Nerovnosti a odhady

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

NEROVNOSTI A ODHADY

39

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ALOIS KUFNER

Nerovnosti a odhady

PRAHA 1975
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

ÚVOD

Otočíme-li písmeno V o devadesát stupňů doprava nebo doleva, dostaneme znaménko nerovnosti. Nevyhne se mu nikdo, kdo se jen trochu zabývá matematikou, a intuitivně s tímto znaménkem pracuje každý, neboť denně všichni používáme pojmů „větší než", „menší než" atp.

Bez nerovnosti se neobejde ani Matematická olympiáda; vyskytuje se skoro v každé úloze — nezávisle na kategorii řešitelů. Ve většině úloh hrají nerovnosti pouze pomocnou roli, ale početné jsou i úlohy, v nichž je nerovnost podstatnou složkou, v nichž jde třeba o to vyřešit jednu či více nerovností (či přesněji, v dnešní terminologii, *nerovnic*) o jedné či více neznámých, kde se jedná o určení rovinného oboru, který je popsán nerovnostmi atp. Důležitost nerovností a nerovnic ve školské matematice je konec konců zdůrazněna i skutečností, že speciálně jim byly věnovány už dvě publikace Školy mladých matematiků: svazek 5 F. Veselého *O nerovnostech* a svazek 18 K. Havlíčka *Analytická geometrie a nerovnosti*.

I v tomto svazku Školy mladých matematiků půjde o nerovnosti, ovšem z poněkud jiného hlediska než třeba u obou zmíněných publikací. Zde budeme chápat nerovnost ve smyslu *odhadu*, budeme se ptát, zda nějaký výraz, v němž vystupují čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — označme tento výraz symbolem $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ —, lze odhadnout jiným, jednodušším, nebo pro naše konkrétní účely vhodnějším výrazem $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Budeme zkrátka vyšetřovat nerovnosti tvaru

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \tag{U.1}$$

přičemž čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ budou ležet v nějaké předem dané množině M. Výraz $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pak bude *horním odhadem* výrazu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a naopak — výraz $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bude *dolním odhadem* výrazu $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Nespokojíme se přitom jen tak s nějakým odhadem; budeme chtít, aby nerovnost (U.1) byla v nějakém smyslu *přesná*. Tuto přesnost můžeme vyjádřit různým způsobem: můžeme např. požadovat, aby pro jistou n-tici čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z M nastala v (U.1) rovnost; nebo můžeme požadovat, aby rozdíl mezi pravou a levou stranou bylo možno učinit libovolně malý; nebo můžeme chtít, aby jistá konstanta — např. konstanta c, má-li výraz G tvar $c\,.\,\widetilde{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — byla nejlepší možná, tj. např. taková, že nerovnost (U.1) už neplatí, zvolíme-li G ve tvaru $\bar{c}\,.\,\widetilde{G}$, kde je $\bar{c} < c$; nebo můžeme požadavek přesnosti vyjádřit jinak. Ilustrujme to na příkladech.

Příklad U.1. Pro každé reálné číslo x platí

$$x \leqq |x|\,;$$

platí však také $x \leqq \alpha|x| + \beta$, je-li $\beta \geqq 0$ a $\alpha \geqq 1$. Označíme-li $F(x) = x$ a $G_{\alpha,\beta}(x) = \alpha|x| + \beta$, dostaneme odhad

$$F(x) \leqq G_{\alpha,\beta}(x)\,,$$

který platí pro všechna reálná čísla x, je-li $\alpha \geqq 1$ a $\beta \geqq 0$; nejlepším horním odhadem ze všech odhadů tvaru $G_{\alpha,\beta}$ ovšem bude výraz $G_{1,0}(x) = |x|$, neboť $G_{1,0}(x) \leqq G_{\alpha,\beta}(x)$. Jinými slovy: konstanty $\alpha = 1$, $\beta = 0$ jsou ze všech konstant $\alpha \geqq 1$ a $\beta \geqq 0$ *nejlepší.*

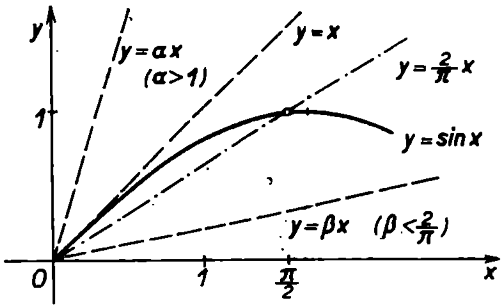
Příklad U.2. Zvolme za M interval $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a položme $F(x) = \sin x$. Zkoumejme horní odhady $H_\alpha(x)$ tvaru $\alpha . x$ a dolní odhady $D_\beta(x)$ tvaru $\beta . x$, tj. zkoumejme, kdy pro všechna $x \in M$ platí

$$D_\beta(x) \leqq \sin x \leqq H_\alpha(x)$$

čili

$$\beta x \leqq \sin x \leqq \alpha x . \tag{U.2}$$

Lze ukázat, že to platí pro $\alpha \geqq 1$ a $\beta \leqq \frac{2}{\pi}$ (viz též obr. 1), zatímco pro $\alpha < 1$ neplatí horní odhad a pro $\beta > \frac{2}{\pi}$ neplatí dolní odhad (uvědomte si, že všude je podstatné, že $x \in M$!). Nerovnosti



Obr. 1.

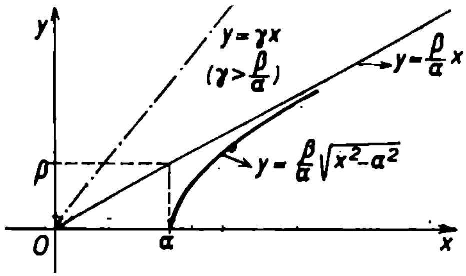
$$\frac{2}{\pi} x \leqq \sin x \leqq x$$

jsou přitom *přesné* v tom smyslu, že rovnost nastává jednak pro $x = 0$ a u dolního odhadu ještě pro $x = \frac{\pi}{2}$. Konstanty $\beta_0 = \frac{2}{\pi}$ a $\alpha_0 = 1$ jsou nejlepší možné, neboť je-li $\beta < \frac{2}{\pi}$ a $\alpha > 1$, platí

$$\beta x \leqq \beta_0 x \leqq \sin x \leqq \alpha_0 x \leqq \alpha x .$$

Příklad U.3. Buďte α, β kladná čísla, M interval $\langle \alpha, \infty)$ a $F(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$. Chtěli bychom výraz $F(x)$ odhadnout *shora* výrazem typu $H_\gamma(x) = \gamma x$, $\gamma > 0$. Z geometrie víme, že výraz $F(x)$ popisuje část hyperboly (viz též obr. 2). Je-li $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$, bude nerovnost

$$\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} \leqq \gamma x \tag{U.3}$$



Obr. 2.

platit jen pro některé hodnoty x, nikoliv pro *všechna* $x \in M$ (řešte rovnici $\beta\sqrt{x^2-\alpha^2} = \alpha\gamma x$!). Horní odhad dostaneme, volíme-li $\gamma \geqq \frac{\beta}{\alpha}$. Nejlepší horní odhad přitom dostaneme, volíme-li $\gamma = \gamma_0 = \frac{\beta}{\alpha}$, neboť pro $\gamma > \gamma_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2} \leqq \gamma_0 x < \gamma x .$$

Zde nelze ukázat, že by v nerovnosti (U.3) nastávala pro $\gamma = \gamma_0$ rovnost, naopak, nerovnost je vždy *ostrá*. Rozdíl mezi pravou a levou stranou však konverguje k nule, roste-li x do nekonečna, tj. rozdíl mezi pravou a levou stranou lze učinit libovolně malý volbou vhodné hodnoty x.

Nerovnosti typu odhadů se v Matematické olympiádě často objevují. Např. v 8. ročníku byl v kategorii B zadán tento příklad: „Dokažte, že pro každou trojici kladných čísel a, b, c platí vztah

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq 9 ;$$

nalezněte všechny trojice, pro něž nastává rovnost.“ To lze chápat jako úlohu dokázat odhad

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq 9\,\frac{1}{a+b+c} ,$$

ukázat, že je přesný a že devítka je nejlepší možná konstanta. Tato úloha je speciálním případem úlohy, která se objevila ve 2. ročníku Matematické olympiády v kategorii A a kde šlo o to dokázat nerovnost

$$(\mathrm{U}.4) \quad (x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

My se k této úloze vrátíme v dalším a uvedeme dva způsoby řešení této úlohy — viz příklad I.1 a příklad II.2.

V tomto svazku uvedeme několik užitečných odhadů nebo — chcete-li — nerovností. Jejich význam — a i smysl tohoto svazečku — je v tom, že je dobré je znát, vědět o nich, neboť se mohou hodit při řešení řady úloh, s nimiž se čtenář setká [viz např. nerovnost (U.4) — autor ztroskotal kdysi právě na této úloze a dodnes se za to hanbí; kdyby byl znal Cauchyovu nerovnost, vyřešil by ji obratem ruky, ale tehdy ještě svazky Školy mladých matematiků neexistovaly]. To však není jediný jejich význam, a řekl bych, že není ani hlavní. Za důležitější než *znát* tyto nerovnosti považuji *umět je dokázat*, či přesněji *vědět, jak se dokazují*. V těchto důkazech (a my u některých nerovností uvedeme důkazů několik) je totiž skryta řada pěkných idejí, šikovných početních obratů a pod., což vše lze využít i v řadě jiných matematických problémů.

Doporučujeme proto čtenáři, aby při četbě tohoto svazečku maximálně spolupracoval, aby sledoval hlavní ideje důkazů jednotlivých tvrzení a pokusil se je odlišit od těch kroků, které představují jistou početní rutinu, aby se zamyslel nad tím, zda se na daný problém lze dívat i z jiné strany a zda existuje možnost zobecňování. To byl konec konců i důvod toho, že některé nerovnosti jsou dokazovány vícerým způsobem, ač by se to mohlo někdy zdát zbytečné či zbytečně složité.

Každá kapitola obsahuje řadu úloh, jejichž řešení by mělo čtenáři pomoci v tom, aby se mohl podílet na právě požadované spolupráci. Úlohy jsou různého stupně obtížnosti a v závěru svazku jsou obsaženy výsledky, návody k řešení nebo celá řešení; bylo by však vhodné, kdyby čtenář nalistování posledních stránek odložil na co nejpozdější dobu. Bylo by možno dodat více úloh či příkladů, domnívám se však, že úlohy zde obsažené mohou zainteresovaného čtenáře podnítit k tomu, aby si podobné úkoly kladl sám; přitom bych chtěl připomenout, že beze smyslu nejsou ani zdánlivě zcela triviální úlohy jako volba speciálních čísel v dané nerovnosti (viz např. úlohy II.1 a II.2 nebo úlohy III.3, III.4 a III.5) — i takový výsledek může být zajímavý a někdy dokonce osvětlí nerovnost více než vztah s obecnými vektory. A čtenář, který bude mít skutečný zájem, najde inspiraci v seznamu literatury na konci svazku: zvláště v knihách [4], [5] a [6] najde mnoho dalších vhodných úloh.

Nakonec několik slov k užitečnosti nerovností, o nichž budeme hovořit. Vyjděme třeba z elementární nerovnosti

$$(a - b)^2 \geqq 0\,,$$

která platí pro všechny dvojice reálných čísel a, b. Plyne odtud, že $a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$, čili že $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, čili že

$$ab \leqq \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{2}\,b^2\,. \tag{U.5}$$

Tím jsme tedy odvodili jednoduchý odhad výrazu ab, který je zajímavý především pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Odhad (U.5) znal už Eukleides a my v dalším uvidíme, jak je užitečný (*geometricky* znamená, že plocha obdélníka není větší než polovina plochy čtverce sestrojeného nad úhlopříčkou!); zobecněním tohoto odhadu, s nímž se též setkáme, je odhad

$$ab \leqq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad \left(p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Tento odhad je jedním z nejdůležitějších pomocných prostředků při řešení různých problémů matematické analýzy, a to problémů velice netriviálních. S trochou nadsázky lze říci, že na tomto odhadu je založena nejedna matematická teorie. Snad tedy čtenář uvěří, že nerovnosti, s nimiž se setká, nejsou jen samoúčelným prostředkem Matematických olympiád.

PŘÍPRAVNÁ KAPITOLA

V dalším podstatně využijeme tohoto pomocného tvrzení:

Věta P.1. *Budiž α reálné číslo, $t > 0$. Pak platí*

$$t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \geqq 0 \text{ pro } \alpha > 1 \text{ a pro } \alpha < 0, \tag{P.1}$$

$$t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \leqq 0 \text{ pro } \alpha \in (0, 1). \tag{P.2}$$

Rovnost v (P.1) *i v* (P.2) *nastává tehdy a jen tehdy, je-li $t = 1$.*

Poznámka P.1. Pro hodnoty $\alpha = 0$ a $\alpha = 1$ není ve větě P.1 vysloveno žádné tvrzení. Je však ihned vidět, že pro tyto hodnoty platí v (P.1) rovnost pro v š e c h n a $t \geqq 0$.

Úloha P.1. Předpokládejte, že platí (P.1) pro $\alpha > 1$, a dokažte, že pak platí (P.1) pro $\alpha < 0$ a (P.2) pro $\alpha \in (0, 1)$.

Z předcházející úlohy plyne, že stačí dokázat (P.1) pro $\alpha > 1$, a tím už bude dokázána celá věta P.1.

Budiž $s > 0$ a budiž n přirozené číslo. Pak je

$$\frac{s^{n+1} - 1}{n + 1} - \frac{s^n - 1}{n} = \frac{s - 1}{n + 1} (s^n + s^{n-1} + \ldots + s + 1) -$$
$$- \frac{s - 1}{n} (s^{n-1} + \ldots + s + 1) =$$
$$= \frac{s - 1}{n(n + 1)} (ns^n - s^{n-1} - \ldots - s - 1) ;$$

odtud plyne (musíme rozlišit případy $0 < s \leqq 1$ a $s > 1$), že

$$\text{(P.3)} \qquad \frac{s^{n+1} - 1}{n + 1} - \frac{s^n - 1}{n} \geqq 0$$

a že rovnost nastane tehdy a jen tehdy, je-li $s = 1$.

Jsou-li nyní m a n přirozená čísla, $m > n$, plyne z (P.3)

$$\frac{s^m - 1}{m} - \frac{s^n - 1}{n} \geqq 0\,;$$

položíme-li zde $s = t^{1/n}$ $(t > 0)$ dostáváme nerovnost

$$t^{m/n} - 1 - \frac{m}{n}(t - 1) \geqq 0\,,$$

což je nerovnost (P.1) pro racionální čísla $r > 1$:

$$\text{(P.4)} \qquad t^r - rt + r - 1 \geqq 0, \quad r > 1 \quad \text{racionální;}$$

tato nerovnost je ostrá pro $t \neq 1$.

Je-li nyní α iracionální číslo, $\alpha > 1$, existuje posloupnost $\{r_k\}$ racionálních čísel $r_k > 1$ tak, že $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = \alpha$. Pro každé r_k platí (P.4); přejdeme-li tam k limitě pro $k \to \infty$, dostáváme (P.1) i pro $\alpha > 1$. Tato nerovnost už ovšem nemusí být ostrá pro $t \neq 1$. To však „napravíme“ takto: Je-li $\alpha > 1$ a $t \neq 1$ $(t > 0)$, položíme

$$\alpha = r\,.\,\beta, \text{ kde } r \text{ je racionální číslo, } r > 1,\ \beta > 1.$$

Užijeme-li nerovnosti (P.4) pro t^β místo pro t $(t^\beta \neq 1)$, bude

$$(t^\beta)^r - rt^\beta + r - 1 > 0 \quad \text{čili} \quad (t^\beta)^r > rt^\beta - r + 1.$$

Pak však je

$$t^{\alpha} - \alpha t + \alpha - 1 = (t^{\beta})^{r} - r\beta t + r\beta - 1 >$$
$$> rt^{\beta} - r + 1 - r\beta t + r\beta - 1 =$$
$$= r(t^{\beta} - \beta t + \beta - 1) \geqq 0 \,,$$

takže nerovnost (P.1) je opět ostrá pro $\alpha > 1$ a $t \neq 1$.

Poznámka P.2. Větu P.1 lze ovšem snadno dokázat, ovládáme-li základy diferenciálního počtu.

V dalším budeme používat označení, které nyní zavedeme: Budiž n přirozené číslo, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ komplexní čísla; n-tici těchto čísel budeme značit $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,,$$

a budeme hovořit o (komplexním) vektoru $\boldsymbol{x}$. Budou-li čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reálná, řekneme, že vektor $\boldsymbol{x}$ je reálný. Někdy budeme hovořit o bodu $\boldsymbol{x}$ — bude tím míněn bod n-rozměrného eukleidovského prostoru, který má souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

A nyní označení:

$\boldsymbol{1} = (1, 1, \ldots, 1)$; $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$;

$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ znamená, že $x_k \geqq 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ (hovoříme pak o nezáporném vektoru $\boldsymbol{x}$);

$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ znamená, že $x_k > 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ (hovoříme pak o kladném vektoru $\boldsymbol{x}$);

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ znamená, že $x_k \neq 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ (tj. pro *všechna* k);

$\boldsymbol{x} \not\equiv \boldsymbol{0}$ znamená, že $x_k \neq 0$ *alespoň pro jedno* z čísel k;

$$\frac{1}{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{pro } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \,;$$

$\mathbf{x}^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$ pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ a kladné číslo p resp. pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a reálné číslo p; speciálně je

$\sqrt{\mathbf{x}} = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n})$;

$|\mathbf{x}| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$;

$m_n(\mathbf{x})$ je pro reálný vektor $\mathbf{x}$ *nejmenší* z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$M_n(\mathbf{x})$ je pro reálný vektor $\mathbf{x}$ *největší* z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Je-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, pak

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,

$\mathbf{x}.\mathbf{y} = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n)$,

$c.\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$ pro komplexní číslo c,

$\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \left(\dfrac{x_1}{y_1}, \dfrac{x_2}{y_2}, \ldots, \dfrac{x_n}{y_n}\right)$ pro $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$,

$\mathbf{x} = \mathbf{y}$ znamená, že $x_k = y_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou úměrné, a zapíšeme to symbolem

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} ,$$

existují-li reálná čísla α, β tak, že $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ a že

$$\alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{y}$$

(tj. $\alpha x_k = \beta y_k$ pro $k = 1, 2. \ldots, n$).

Kapitola I.

ARITMETICKÝ, GEOMETRICKÝ A HARMONICKÝ PRŮMĚR

Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Označme

$$A_n(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \tag{I.1}$$

tzv. *aritmetický průměr* čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$; dále označme pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$

$$G_n(\mathbf{x}) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \tag{I.2}$$

tzv. *geometrický průměr* čísel x_1, x_2, $\ldots$, x_n a konečně označme pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$H_n(\mathbf{x}) = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} \tag{I.3}$$

tzv. *harmonický průměr* čísel x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Je ihned vidět, že pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ je $A_n(\mathbf{x}) > 0$ a

$$H_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) = \frac{1}{A_n(\mathbf{x})} \tag{I.4}$$

čili

$$H_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) . A_n(\mathbf{x}) = H_n(\mathbf{x}) . A_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) = 1 \tag{I.5}$$

pro každé $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

Dále je zřejmé, že pro

(I.6) $$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a > 0$$

je

(I.7) $$A_n(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{x}) = H_n(\mathbf{x}) = a\,.$$

Označíme-li dále pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ $\log \mathbf{x} = (\log x_1, \log x_2, \ldots, \log x_n)$, je z definice aritmetického a geometrického průměru vidět, že

(I.8) $$\log G_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n) = \\ = A_n(\log \mathbf{x})\,.$$

Pomocí tohoto vzorce lze řadu vlastností geometrického průměru odvodit z vlastností aritmetického průměru. Označíme-li $e^{\mathbf{x}} = (e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n})$, platí tento vzorec, který je „inverzní" ke vzorci (I.8):

(I.9) $$G_n(e^{\mathbf{x}}) = e^{A_n(\mathbf{x})}.$$

Dokážeme toto důležité tvrzení:

Věta I.1. *Nechť je* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. *Pak je*

(I.10) $$m_n(\mathbf{x}) \leqq H_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{x}) \leqq A_n(\mathbf{x}) \leqq M_n(\mathbf{x}).$$

Jsou-li alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *různá, jsou všechny nerovnosti v* (I.10) *ostré.*

Tato věta v sobě zahrnuje řadu nerovností; dokážeme je postupně. Důkaz případu

(I.11) $$m_n(\mathbf{x}) \leqq H_n(\mathbf{x})$$

je snadný: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$(\mathrm{I}.12) \qquad x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n-1} \leqq x_n\,,$$

přičemž je $x_1 > 0$. Pak je $m_n(\boldsymbol{x}) = x_1$ a $\dfrac{x_1}{x_k} \leqq 1$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. To znamená, že

$$x_1\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{x_1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \ldots + \frac{x_1}{x_n} \leqq$$
$$\leqq 1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

a po vydělení této nerovnosti kladným číslem $\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right)$ dostáváme (I.11). — Bude-li alespoň jedna z nerovností v (I.12) ostrá, bude ostrá alespoň jedna z nerovností $\dfrac{x_1}{x_k} \leqq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a dostaneme ostrou nerovnost $m_n(\boldsymbol{x}) < H_n(\boldsymbol{x})$. — Bude-li platit (I.6), bude $m_n(\boldsymbol{x}) = a$ a to spolu se vztahy (I.7) dává rovnost

$$m_n(\boldsymbol{x}) = H_n(\boldsymbol{x})\,.$$

Stejně snadno se dokáže nerovnost

$$(\mathrm{I}.13) \qquad A_n(\boldsymbol{x}) \leqq M_n(\boldsymbol{x})\,.$$

Opět totiž můžeme předpokládat, že platí (I.12); pak je $M_n(\boldsymbol{x}) = x_n$ a $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq x_n + x_n + \ldots + x_n = nM_n(\boldsymbol{x})$, odkud už (I.13) plyne. — Bude-li alespoň jedna z nerovností v (I.12) ostrá, dostaneme ostrou nerovnost $A_n(\boldsymbol{x}) < M_n(\boldsymbol{x})$, kdežto v případě (I.6) bude $M_n(\boldsymbol{x}) = A_n(\boldsymbol{x}) = a$.

Nejdůležitější z nerovností (I.10) je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem — označme ji (AG):

$$(\mathrm{AG}) \qquad G_n(\boldsymbol{x}) \leqq A_n(\boldsymbol{x})\,.$$

Důkazu této nerovnosti věnujeme zvláštní odstavec; zatím však předpokládejme, že (AG) platí, a dokažme za tohoto předpokladu poslední z nerovností v (I.10), nerovnost

$$H_n(\boldsymbol{x}) \leqq G_n(\boldsymbol{x}) . \tag{I.14}$$

Z definice geometrického průměru především plyne, že

$$G_n\left(\frac{1}{\boldsymbol{x}}\right) = \frac{1}{G_n(\boldsymbol{x})} \quad \text{pro } \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} . \tag{I.15}$$

Nerovnost (AG) platí podle předpokladu pro každé $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, a platí tedy i pro $\frac{1}{\boldsymbol{x}}$, tj.

$$G_n\left(\frac{1}{\boldsymbol{x}}\right) \leqq A_n\left(\frac{1}{\boldsymbol{x}}\right) . \tag{I.16}$$

Tuto nerovnost můžeme pomocí vzorců (I.5) a (I.15) zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{G_n(\boldsymbol{x})} \leqq \frac{1}{H_n(\boldsymbol{x})}$$

a odtud už plyne (I.14). — Je-li alespoň jedna z nerovností v (I.12) ostrá, je (podle předpokladu!) ostrá i nerovnost (I.16), a tedy je pak $H_n(\boldsymbol{x}) < G_n(\boldsymbol{x})$.

Poznámka I.0. Vzorec (I.10) shrnuje celkem 10 nerovností. My jsme zde dokázali dvě přímo a jednu za předpokladu, že platí nerovnost (AG); zbývající už z těchto čtyř nerovností plynou. Řadu z těchto zbylých nerovností lze ovšem dokázat *přímo:* např. $m_n(\boldsymbol{x}) \leqq G_n(\boldsymbol{x})$, $m_n(\boldsymbol{x}) \leqq A_n(\boldsymbol{x})$ a další. Také to, že v jistém smyslu preferujeme nerovnost (AG), není podstatné: Čtenář snadno dokáže, že nerovnost (AG) plyne z nerovnosti (I.14), a tak lze tedy dokázat (I.14) a všechno ostatní odvodit z této nerovnosti. Doporučujeme proto čtenáři, aby si rozmyslel, které z deseti nerovností obsažených v (I.10) lze dokázat přímo, bez „okliky" přes nerovnost (AG).

Důkaz nerovnosti (AG)

Existuje celá řada důkazů této nerovnosti, lišících se metodou, náročností a použitými pomocnými prostředky. Jen v knize [1] je uvedeno těchto důkazů dvanáct. Zde uvedeme zatím čtyři důkazy; jejich myšlenky lze využít i v řadě jiných úvah.

První důkaz je (pravděpodobně) i historicky nejstarší: vznikl kolem roku 1820 a jeho autorem je A. L. Cauchy (1789—1857). Tento důkaz je zajímavý mj. také tím, že využívá tzv. *regresivní* (zpětné) indukce.

Už v úvodu jsme ukázali, že platí nerovnost

$$ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \text{ pro všechna } a \geqq 0,\ b \geqq 0; \tag{I.17}$$

z odvození této nerovnosti je vidět, že bude ostrá, bude-li $a \neq b$. Zvolme $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ a položme v (I.17) $a = \sqrt{x_1}$, $b = \sqrt{x_2}$; pak bude

$$\sqrt{x_1 x_2} \leqq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \tag{I.18}$$

čili

$$G_2(\mathbf{x}) \leqq A_2(\mathbf{x}),$$

přičemž nerovnost je ostrá, je-li $x_1 \neq x_2$. Budiž nyní $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) > 0$. Podle (I.18) pak je

$$\sqrt{y_1 y_2} \leqq \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \quad \text{a} \quad \sqrt{y_3 y_4} \leqq \frac{1}{2}(y_3 + y_4),$$

a tedy

$$\text{(I.19)} \qquad \sqrt[4]{y_1y_2y_3y_4} = \sqrt{\sqrt{y_1y_2}\cdot\sqrt{y_3y_4}} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{1}{2}(y_1+y_2)\cdot\frac{1}{2}(y_3+y_4)}\,;$$

tato nerovnost bude ostrá, bude-li $y_1 \neq y_2$ nebo $y_3 \neq y_4$. Položme dále v (I.18)

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1+y_2), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_3+y_4).$$

Dostaneme

$$\sqrt{\frac{1}{2}(y_1+y_2)\cdot\frac{1}{2}(y_3+y_4)} \leqq$$

$$\leqq \frac{\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\frac{1}{2}(y_3+y_4)}{2} = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\,;$$

přitom tato nerovnost bude ostrá, bude-li $y_1 + y_2 \neq \neq y_3 + y_4$, a tedy speciálně v případě, kdy je $y_1 = y_2$ a $y_3 = y_4$ (a kdy tedy v (I.19) nastává rovnost), ale kdy $y_2 \neq y_3$. Spolu s (I.19) dostáváme tak nerovnost

$$G_4(\mathbf{y}) \leqq A_4(\mathbf{y})\,,$$

která je ostrá, jsou-li alespoň dvě z čísel y_1, y_2, y_3, y_4 různá.

Stejným postupem můžeme nyní matematickou indukcí dokázat, že nerovnost (AG) platí pro $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$, tj. pro čísla tvaru 2^k, kde k je přirozené číslo. Platí-li totiž (AG) pro $2^k = n$,

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq A_n(\mathbf{x})\,,$$

dokážeme (AG) pro $2^{k+1} = 2n$ takto: Pro $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n})$ položíme $\mathbf{u} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a $\mathbf{v} = (y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n})$. Podle indukčního předpokladu je

$$G_n(\mathbf{u}) \leqq A_n(\mathbf{u}) \quad \text{a} \quad G_n(\mathbf{v}) \leqq A_n(\mathbf{v}),$$

a tedy

$$G_{2n}(\mathbf{y}) = \sqrt{G_n(\mathbf{u}) . G_n(\mathbf{v})} \leqq \sqrt{A_n(\mathbf{u}) . A_n(\mathbf{v})}$$

a z nerovnosti (I.18), použité pro $x_1 = A_n(\mathbf{u})$ a $x_2 = A_n(\mathbf{v})$, pak plyne

$$G_{2n}(\mathbf{y}) \leqq \sqrt{A_n(\mathbf{u}) . A_n(\mathbf{v})} \leqq \frac{A_n(\mathbf{u}) + A_n(\mathbf{v})}{2} = A_{2n}(\mathbf{y}).$$

Úvahy o tom, kdy je tato nerovnost ostrá, si čtenář provede snadno sám.

Tím jsme dokázali nerovnost (AG) pro speciální hodnoty n. Pro zbývající přirozená čísla ji dokážeme zpětnou indukcí, která tvrdí: Platí-li (AG) pro $n \geqq 2$, platí i pro $n - 1$.

Uvažujme proto pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) > \mathbf{0}$ vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, definovaný takto:

$$y_i = x_i \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n - 1;$$

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1}.$$

Pak je též $\mathbf{y} > \mathbf{0}$; nerovnost $G_n(\mathbf{y}) \leqq A_n(\mathbf{y})$, která podle předpokladu platí, má tvar

$$\text{(I.20)} \qquad \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}} . \sqrt[n]{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1}} \leqq$$

$$\leqq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}.$$

To můžeme zapsat též takto:

$$[G_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{(n-1)/n} . [A_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{1/n} \leqq A_{n-1}(\boldsymbol{x}) .$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem

$$[A_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{-1/n},$$

dostaneme nerovnost

$$[G_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{(n-1)/n} \leqq [A_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{(n-1)/n},$$

odkud plyne nerovnost (AG) pro $n - 1$ umocněním. — Jsou-li alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ různá, jsou různá i alespoň dvě z čísel $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$; nerovnost v (I.20) je pak ostrá a ostrá bude i výsledná nerovnost $G_{n-1}(\boldsymbol{x}) < A_{n-1}(\boldsymbol{x})$.

Druhý důkaz byl publikován v roce 1954 a jeho autorem je G. Ehlers: Uvažujme takové $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, že je

(I.21) $$x_1 x_2 \ldots x_n = 1$$

(tj. $[G_n(\boldsymbol{x})]^n = 1$). Pak lze nerovnost (AG) upravit na tvar

(I.22) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n .$$

Dokážeme indukcí, že (I.22) platí za předpokladu (I.21).*) Především platí nerovnost (I.22) pro $n = 1$.

*) Důkaz je uveden též v 6. svazku Školy mladých matematiků *Matematická indukce* (str. 35, příklad 4).

Předpokládejme nyní, že platí pro n, a mějme vektor $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ takový, že

$$y_1 y_2 \ldots y_n y_{n+1} = 1 .$$

Mezi čísly $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ pak musí existovat dvě čísla y_i a y_j $(i \neq j)$, pro něž platí: $y_i \leqq 1$, $y_j \geqq 1$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že to jsou čísla y_1 a y_2. Je tedy $y_1 \leqq 1$ a $y_2 \geqq 1$ čili $y_1 - 1 \leqq 0$ a $y_2 - 1 \geqq 0$ čili $(y_1 - 1)(y_2 - 1) \leqq 0$. Tuto poslední nerovnost lze zapsat takto:

$$y_1 \cdot y_2 + 1 \leqq y_1 + y_2 .$$

Přičteme-li na obou stranách výrazy $y_3 + y_4 + \ldots + y_n + y_{n+1}$, dostaneme

$$\text{(I.23)} \qquad \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n + y_{n+1} \geqq \\ \geqq 1 + y_1 y_2 + y_3 + \ldots + y_{n+1} . \end{aligned}$$

Položme

$$x_1 = y_1 y_2 ,\quad x_2 = y_3 ,\quad x_3 = y_4 ,\quad \ldots,\quad x_n = y_{n+1} .$$

Pak vektor $\mathbf{x}$ splňuje podmínku (I.21), neboť

$$x_1 x_2 \ldots x_n = y_1 y_2 y_3 \ldots y_{n+1} = 1$$

a podle indukčního předpokladu pak platí (I.22), tj.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 y_2 + y_3 + \ldots + y_{n+1} \geqq n .$$

Z nerovnosti (I.23) tedy plyne

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + y_{n+1} \geqq 1 + n ,$$

což je (I.22) pro $n + 1$. — Bude-li alespoň jedno x_i různé od 1, bude nerovnost v (I.22) ostrá, kdežto pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ platí v (I.22) rovnost.

K nerovnosti (AG) pro $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) > \mathbf{0}$ dojdeme nyní tak, že položíme

$$x_i = \frac{z_i}{G_n(\mathbf{z})}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pak je $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, a tedy

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{G_n(\mathbf{z})} (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \geqq n;$$

odtud už plyne, že $G_n(\mathbf{z}) \leqq A_n(\mathbf{z})$.

Třetí důkaz pochází od E. Jacobsthala a byl uveřejněn v roce 1951. Je sice poněkud umělý, udává však současně zajímavý vztah pro rozdíl $A_n(\mathbf{x}) - G_n(\mathbf{x})$.

Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $k = 1, 2, \ldots, n$; označme

$$\text{(I.24)} \quad A_k = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}, \; G_k = \sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_k}.$$

Je tedy $k . A_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ a $G_k^k = x_1 x_2 \ldots x_k$ a odtud dostáváme tyto rekurentní vztahy

$$\text{(I.25)} \quad (k + 1) A_{k+1} = k A_k + x_{k+1}, \quad G_{k+1}^{k+1} = G_k^k . x_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1 .$$

Pak je

$$A_{k+1} = \frac{k}{k+1} \cdot A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1} = \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} \frac{G_{k+1}^{k+1}}{G_k^k},$$

tj.

$$\text{(I.26)} \quad A_{k+1} = \frac{k}{k+1} A_k + \frac{G_k}{k+1} \left(\frac{G_{k+1}}{G_k} \right)^{k+1}.$$

Nyní užijeme nerovnosti (P.1) z přípravné kapitoly pro $\alpha = k + 1$; tato nerovnost má pak tvar

$$t^{k+1} \geqq (k + 1)\, t - k \quad \text{pro} \quad t \geqq 0\,,$$

přičemž pro $t \neq 1$ je nerovnost ostrá. Položíme-li zde

$$t = \frac{G_{k+1}}{G_k}\,,$$

dostaneme

$$\left(\frac{G_{k+1}}{G_k}\right)^{k+1} \geqq (k + 1)\frac{G_{k+1}}{G_k} - k\,,$$

což po užití v identitě (I.26) dává:

$$A_{k+1} \geqq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{G_k}{k+1}\left[\frac{G_{k+1}}{G_k}(k + 1) - k\right] =$$

$$= \frac{k}{k+1} A_k + G_{k+1} - \frac{k}{k+1} G_k$$

čili

(I.27) $$(A_{k+1} - G_{k+1}) \geqq \frac{k}{k+1}(A_k - G_k)\,.$$

Protože pro $k = 2$ je $A_2 \geqq G_2$, plyne z poslední nerovnosti

$$A_k \geqq G_k \quad \text{pro} \quad k = 2, 3, \ldots, n\,,$$

což pro $k = n$ je nerovnost (AG). Jsou-li alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ různá, je nerovnost (AG) ostrá: lze totiž čísla x_i uspořádat tak, aby bylo $x_1 \neq x_2$, a pak je (jak víme např. už z prvního důkazu) $A_2 > G_2$.

Z (I.27) ihned plyne

$$(A_n - G_n) \geqq \frac{p}{n}(A_p - G_p) \quad \text{pro} \quad n \geqq p \geqq 2\,,$$

a speciálně tedy

$$(A_n - G_n) \geqq \frac{2}{n}(A_2 - G_2) . \tag{I.28}$$

Čtvrtý důkaz nebudeme provádět do všech podrobností; ty si čtenář snadno doplní. Důkaz využívá jisté zajímavé vlastnosti aritmetických a geometrických průměrů.

Budiž tedy $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a předpokládejme, že platí (I.12). Aritmetický průměr $A_n(\mathbf{x})$ označme písmenem a a utvořme z vektoru $\mathbf{x}$ nový vektor $\mathbf{y}$ takto: Prvek x_1 (nejmenší prvek v $\mathbf{x}$) nahradíme číslem a, prvek x_n (největší prvek v $\mathbf{x}$) nahradíme číslem $x_1 + x_n - a$, prvky $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ ponecháme beze změny. Bude tedy $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$, kde

$$y_1 = a, y_2 = x_2, y_3 = x_3, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1},$$
$$y_n = x_1 + x_n - a .$$

Zřejmě je

$$A_n(\mathbf{y}) = A_n(\mathbf{x}) = a , \tag{I.29}$$

tj. aritmetický průměr se při přechodu od vektoru $\mathbf{x}$ k vektoru $\mathbf{y}$ *nezmění*. Podívejme se, jak se bude chovat geometrický průměr: Podle (I.12) je $x_1 \leqq x_i \leqq x_n$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, a tedy je

$$\begin{aligned} nx_1 = x_1 + x_1 + \ldots + x_1 \leqq \\ \leqq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq \\ \leqq x_n + x_n + \ldots + x_n = nx_n \end{aligned}$$

čili $x_1 \leqq A_n(\mathbf{x}) \leqq x_n$. To znamená, že je $a - x_1 \geqq 0$ a $x_n - a \geqq 0$, čili

$$\begin{aligned} 0 \leqq (a - x_1)(x_n - a) = \\ = a(x_1 + x_n - a) - x_1 x_n = y_1 y_n - x_1 x_n . \end{aligned}$$

Dostali jsme tak nerovnost

$$x_1x_n \leqq y_1y_n ;$$

vynásobíme-li ji kladným číslem $x_2x_3\ldots x_{n-1} = y_2y_3\ldots y_{n-1}$, dostaneme po odmocnění nerovnost

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{y}) , \tag{I.30}$$

tj. geometrický průměr se při přechodu od vektoru $\mathbf{x}$ k vektoru $\mathbf{y}$ *nezmenší*.

Všimněme si nyní vektoru $\mathbf{y}$. Jsou dvě možnosti: (a) číslo a je nejmenší z čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$; (b) číslo a není nejmenší z čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

V případě (a) je $a \leqq y_i$ pro $i = 2, 3, \ldots, n$; uvědomíme-li si, jak jsou definována čísla y_i, dostáváme nerovnosti

(I.31)
$$a \leqq x_2,\ a \leqq x_3,\ \ldots,\ a \leqq x_{n-1},\ a \leqq x_1 + x_n - a .$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$(n-1)a \leqq x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_1 + x_n - a = \\ = nA_n(\mathbf{x}) - a = (n-1)a$$

čili

$$(n-1)\, a \leqq (n-1)a .$$

Zde však nutně musí platit rovnost, a tedy musí platit rovnosti ve všech nerovnostech v (I.31):

$$a = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_1 + x_n - a .$$

Protože $y_1 = a$, dostáváme odtud $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = a$; a protože $A_n(\mathbf{y}) = a$, plyne odtud, že také $y_n = x_1 + x_n - a = a$. Vektor $\mathbf{y}$ má tedy v případě (a) tvar

$$(a, a, a, \ldots, a, a) .$$

V případě (b) bude mezi čísly $y_2, y_3, \ldots, y_n$ existovat číslo menší než a. Poněvadž však $A_n(\mathbf{y}) = a$ [viz (I.29)], musí mezi nimi existovat i číslo větší než a (jinak by totiž bylo $a = A_n(\mathbf{y}) < \frac{n.a}{n} = a$, a to je spor). Uspořádáme-li tedy čísla $y_1, y_2, \ldots, y_n$ podle velikosti: $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n-1}}, y_{i_n}$, bude se číslo $a(= y_1)$ vyskytovat alespoň jednou mezi čísly $y_{i_2}, y_{i_3}, \ldots, y_{i_{n-1}}$.*)

Nyní utvořme z vektoru $\mathbf{y}$ nový vektor $\mathbf{z}$ stejným postupem jako jsme to učinili u vektoru $\mathbf{x}$: Položíme

$$z_1 = a,\ z_2 = y_{i_2},\ z_3 = y_{i_3},\ \ldots,$$
$$z_{n-1} = y_{i_{n-1}},\ z_n = y_{i_1} + y_{i_n} - a$$

(uvědomte si, že je $A_n(\mathbf{y}) = a$). Pak bude (viz (I.29) a (I.30))

$$A_n(\mathbf{z}) = a \quad \text{a} \quad G_n(\mathbf{y}) \leqq G_n(\mathbf{z})\,.$$

Mezi čísly $z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}$ se vyskytuje alespoň jedno číslo a, a protože $z_1 = a$, je číslo a ve vektoru $\mathbf{z}$ zastoupeno alespoň dvakrát. Stejně jako u vektoru $\mathbf{y}$ zjistíme, že buď má $\mathbf{z}$ tvar $(a, a, a, \ldots, a, a)$, nebo je jedno z čísel z_i $(i \geqq 2)$ menší než a, tj. platí

$$z_{j_1} < z_{j_2} \leqq z_{j_3} \leqq \ldots \leqq z_{j_{n-1}} \leqq z_{j_n}\,,$$

kde $z_{j_1} < a$ a mezi čísly $z_{j_2}, \ldots, z_{j_{n-1}}$ se číslo a vyskytuje alespoň dvakrát.

Budeme-li v tomto procesu pokračovat, dostaneme po k-tém kroku $(k < n)$ vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, v němž alespoň k čísel bude rovných a, a přitom bude platit

$$A_n(\mathbf{x}) = A_n(\mathbf{y}) = A_n(\mathbf{z}) = \ldots = A_n(\mathbf{u}) = a\,,$$
$$G_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{y}) \leqq G_n(\mathbf{z}) \leqq \ldots \leqq G_n(\mathbf{u})\,.$$

*) Dokažte, že nemůže být $y_{i_n} = a$.

Po nejvýše $n-1$ krocích dojdeme k vektoru $\mathbf{w} = (a, a, \ldots, a)$, neboť pak bude $w_1 = w_2 = \ldots = w_{n-1} = a$, a tedy také $w_n = a$. Ale $G_n(\mathbf{w}) = \sqrt[n]{a.a.\ldots.a} = \sqrt[n]{a^n} = a$, takže máme

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{w}) = a = A_n(\mathbf{x}) ,$$

což je nerovnost (AG).

Poznámka I.1. Důkazem nerovnosti (AG) je dokázána věta I.1 jako celek. Všimněte si, že jsme dokázali vlastně o něco více; ukázali jsme totiž, že rovnost v (I.10) platí tehdy a jen tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

V jistém smyslu jsou tedy nerovnosti v (I.10) přesné; v dalším však ukážeme, že existuje celá řada výrazů $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které lze vložit např. mezi $A_n(\mathbf{x})$ a $G_n(\mathbf{x})$. Tvrzení z prvního odstavce této poznámky ovšem zaručuje, že pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ musí být

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_n(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{x}) .$$

Úloha I.1. Čtvrtý důkaz nerovnosti (AG) lze upravit tak, že se využívá geometrického průměru $G_n(\mathbf{x}) = g$. Proveďte to.

Uvedeme nyní několik příkladů, v nichž jednak užijeme nerovností z věty I.1, jednak odvodíme další vztahy pro průměry.

Příklad I.1. (2. ročník MO, kategorie A.) Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$. Pak platí

I.32)

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq n^2 .$$

Nerovnost (I.32) není totiž ničím jiným než upravenou nerovností mezi harmonickým a aritmetickým průměrem: Je $H_n(\mathbf{x}) \leqq A_n(\mathbf{x})$ a z (I.5) plyne

$$1 = H_n(\mathbf{x})A_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \leqq A_n(\mathbf{x})A_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right);$$

vynásobíme-li tuto nerovnost číslem n^2, dostáváme (I.32). — Dokonce z věty I.1 plyne, že rovnost v (I.32) nastane tehdy a jen tehdy, bude-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Příklad I.2. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a označme $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nA_n(\mathbf{x})$. Pak platí

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}. \tag{I.33}$$

Užijeme-li totiž nerovnost (AG) pro vektor $\mathbf{1} + \mathbf{x}$ (viz označení na str. 13 a 14), bude

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) = [G_n(\mathbf{1} + \mathbf{x})]^n \leqq$$
$$\leqq [A_n(\mathbf{1} + \mathbf{x})]^n = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right]^n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + x_k}{n}\right)^n =$$
$$= [1 + A_n(\mathbf{x})]^n = \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n.$$

Podle binomického vzorce je nyní

$$\left(1 + \frac{s}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{s}{n}\right)^k =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n.n.\ldots.n} s^k =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{s^k}{k!} \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}$$

a (I.33) je dokázáno.

Příklad I.3. Budiž $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ a $y_1 \leqq y_2 \leqq \ldots \leqq \leqq y_n$. Pak platí

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i . \tag{I.34}$$

Tato nerovnost se nazývá *Čebyševova* a lze ji zapsat ve tvaru

$$A_n(\mathbf{x}) . A_n(\mathbf{y}) \leqq A_n(\mathbf{x} . \mathbf{y}) . \tag{I.35}$$

(význam symbolu $\mathbf{x} . \mathbf{y}$ byl vysvětlen na str. 14).

Důkaz: Označme $S_n(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nA_n(\mathbf{x})$. Zřejmými úpravami dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x_i y_i - x_i y_k) = \sum_{i=1}^{n} (n x_i y_i - x_i S_n(\mathbf{y})) =$$
$$= nS_n(\mathbf{x} . \mathbf{y}) - S_n(\mathbf{x}) S_n(\mathbf{y}) ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k y_k - x_k y_i) = \sum_{k=1}^{n} (n x_k y_k - x_k S_n(\mathbf{y})) =$$
$$= nS_n(\mathbf{x} . \mathbf{y}) - S_n(\mathbf{x}) S_n(\mathbf{y}) .$$

Sečteme-li obě rovnosti, dostaneme po úpravě

$$nS_n(\mathbf{x} . \mathbf{y}) - S_n(\mathbf{x}) S_n(\mathbf{y}) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x_i y_i - x_i y_k + x_k y_k - x_k y_i) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x_i - x_k)(y_i - y_k) .$$

Z podmínek na x_i a y_i plyne, že výrazy $(x_i - x_k)$ a $(y_i - y_k)$ mají stejné znaménko; je tedy $(x_i - x_k) . (y_i - y_k) \geqq 0$ pro $i, k = 1, 2, \ldots, n$. To však znamená, že $nS_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}) - S_n(\mathbf{x})S_n(\mathbf{y}) \geqq 0$, a po vynásobení této nerovnosti číslem $\frac{1}{n^2}$ dostaneme nerovnost $A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}) -$ $- A_n(\mathbf{x})A_n(\mathbf{y}) \geqq 0$, což je (I.35).

Z důkazu je vidět, že nerovnost (I.34) platí také za předpokladu

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \quad \text{a} \quad y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n .$$

Nerovnost (I.34) či (I.35) lze zobecnit i na více vektorů: Budiž $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ a $0 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \ldots \leqq z_n$. Pak plyne z (I.35)

$$A_n(\mathbf{x})A_n(\mathbf{y})A_n(\mathbf{z}) \leqq A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y})A_n(\mathbf{z}) ,$$

neboť $A_n(\mathbf{z}) \geqq 0$. Abychom mohli užít (I.35) pro vektory $\mathbf{u} = \mathbf{xy}$ a $\mathbf{z}$, musí být $x_1y_1 \leqq x_2y_2 \leqq \ldots \leqq x_ny_n$. To není obecně zaručeno; budeme-li však předpokládat

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n , \quad 0 \leqq y_1 \leqq y_2 \leqq \ldots \leqq y_n$$

bude také $0 \leqq x_1y_1 \leqq x_2y_2 \leqq \ldots \leqq x_ny_n$ a tedy podle (I.35) je $A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y})A_n(\mathbf{z}) \leqq A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}.\mathbf{z})$ čili

$$A_n(\mathbf{x}).A_n(\mathbf{y}).A_n(\mathbf{z}) \leqq A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}.\mathbf{z}) .$$

Odtud speciálně plyne: Je-li m přirozené číslo a je-li $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, je

$$[A_n(\mathbf{x})]^m \leqq A_n(\mathbf{x}^m) . \tag{I.36}$$

Vzorec (I.35) ukazuje, jak lze odhadnout aritmetický průměr součinu dvou vektorů $A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y})$. Vzorec pro aritmetický průměr součtu dvou vektorů je jasný:

$$A_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A_n(\mathbf{x}) + A_n(\mathbf{y}) . \tag{I.37}$$

U geometrického průměru je naopak jednoduchý vzorec pro případ **součinu** dvou vektorů: Je-li $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ a $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$, je

$$(\mathrm{I}.38) \qquad G_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = G_n(\mathbf{x}).G_n(\mathbf{y}) .$$

Než si všimneme geometrického průměru **součtu** dvou vektorů, dokážeme toto tvrzení:

Věta I.2. *Budiž* $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) > \mathbf{0}$, $G_n(\mathbf{z}) = 1$. *Pak je pro každé* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$

$$(\mathrm{I}.39) \qquad A_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}) \geqq G_n(\mathbf{x}) .$$

Ke každému vektoru $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ *existuje vektor* $\mathbf{z}$ *(závislý na* $\mathbf{x}$*) tak, že* $G_n(\mathbf{z}) = 1$ *a že v* (I.39) *platí rovnost.*

Důkaz: Z nerovnosti (AG) především plyne, že $A_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}) \geqq G_n(\mathbf{x}.\mathbf{z})$; užijeme-li však (I.38), je $G_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}) = G_n(\mathbf{x}).G_n(\mathbf{z}) = G_n(\mathbf{x})$, neboť $G_n(\mathbf{z}) = 1$. Tím je dokázána nerovnost (I.39). Zapišme ji ve tvaru

$$A_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}) \geqq G_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}) ;$$

podle věty I.1 zde nastává rovnost tehdy a jen tehdy, je-li $x_1 z_1 = x_2 z_2 = \ldots = x_n z_n$. Těmito rovnostmi je však vektor $\mathbf{z}$ určen. Stačí volit

$$z_i = \frac{G_n(\mathbf{x})}{x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n ;$$

pak je $z_i > 0$, neboť $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a tedy $G_n(\mathbf{x}) > 0$, a dále je $x_i z_i = G_n(\mathbf{x})$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a $G_n(\mathbf{z}) = 1$.

Nyní už můžeme dokázat toto tvrzení: Pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ a $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ je

$$(\mathrm{I}.40) \qquad G_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geqq G_n(\mathbf{x}) + G_n(\mathbf{y}) .$$

Důkaz: Je-li některé z čísel x_i nebo některé z čísel y_i rovné nule, je $G_n(\mathbf{x}) = 0$ nebo $G_n(\mathbf{y}) = 0$ a nerovnost (I.40) zřejmě platí. Proto můžeme předpokládat $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$. Pak podle věty I.2 existuje k vektoru $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ vektor $\mathbf{z}^*$ tak, že $G_n(\mathbf{z}^*) = 1$ a $G_n(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A_n[(\mathbf{x}+\mathbf{y}).\mathbf{z}^*]$. Užijeme-li vzorce (I.37), obdržíme

$$G_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A_n((\mathbf{x} + \mathbf{y}).\mathbf{z}^*) = \\ = A_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}^*) + A_n(\mathbf{y}.\mathbf{z}^*)\,. \tag{I.41}$$

Podle věty I.2 je dále $A_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}^*) \geqq G_n(\mathbf{x})$ a $A_n(\mathbf{y}.\mathbf{z}^*) \geqq$ $\geqq G_n(\mathbf{y})$; odtud a z (I.41) už plyne (I.40).

Příklad I.4. V příkladu I.1 jsme dokázali, že *dolním* odhadem výrazu $A_n(\mathbf{x}).A_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)$ je jednička. *Horní* odhad udává tato nerovnost: Pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ je

$$A_n(\mathbf{x}).A_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \leqq \frac{[M_n(\mathbf{x}) + m_n(\mathbf{x})]^2}{4M_n(\mathbf{x}).m_n(\mathbf{x})}\,. \tag{I.42}$$

Tato nerovnost plyne z nerovnosti, obsažené v této větě:

Věta I.3. *Buďte a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ reálná čísla, nechť je $a_k \neq 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a nechť je $m \leqq$ $\leqq \frac{b_k}{a_k} \leqq M$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + mM \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqq (M + m) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\,. \tag{I.43}$$

Důkaz: Zřejmě platí

$$\left(\frac{b_k}{a_k} - m\right)\left(M - \frac{b_k}{a_k}\right) a_k^2 = (b_k - ma_k)\ (Ma_k - b_k) \geqq 0$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$. Sečteme-li všechny tyto nerovnosti, dostaneme

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} (b_k - ma_k)(Ma_k - b_k) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + (M + m) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - mM \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ,$$

což je (I.43).

Současně je z důkazu vidět, že rovnost bude v (I.43) platit tehdy a jen tehdy, bude-li pro každé k platit některá z rovností $\frac{b_k}{a_k} = m$ a $\frac{b_k}{a_k} = M$, tj. bude-li buď $b_k = ma_k$ nebo $b_k = Ma_k$.

Nerovnost (I.42) odvodíme z (I.43) takto: Pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$ položíme $b_k = \sqrt{x_k}$, $a_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$.

Pak je $\frac{b_k}{a_k} = x_k$ a $m = m_n(\mathbf{x})$, $M = M_n(\mathbf{x})$. Nerovnost (I.43) má tvar

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k + m_n(\mathbf{x}) M_n(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \leqq$$

$$\leqq (M_n(\mathbf{x}) + m_n(\mathbf{x})) \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} . \frac{1}{\sqrt{x_k}} =$$

$$= (M_n(\mathbf{x}) + m_n(\mathbf{x})) . n .$$

Použijeme-li nerovnosti (I.17) pro

$$a = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k} \quad \text{a} \quad b = \sqrt{m_n(\mathbf{x}) M_n(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} ,$$

bude

$$\sqrt{m_n(\mathbf{x})M_n(\mathbf{x})\,(\sum_{k=1}^{n} x_k)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k + m_n(\mathbf{x})\,M_n(\mathbf{x})\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right],$$

a tedy podle neroxnosti (*)

$$m_n(\mathbf{x})\,M_n(\mathbf{x})\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{4n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k + m_n(\mathbf{x})\,M_n(\mathbf{x})\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right]^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{4n^2}\,[M_n(\mathbf{x}) + m_n(\mathbf{x})]^2 . n^2 = \frac{[m_n(\mathbf{x}) + M_n(\mathbf{x})]^2}{4}\,.$$

Odtud už plyne (I.42); rovnost v (I.42) přitom bude platit tehdy a jen tehdy, bude-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Příklad I.5. Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq \mathbf{0}$. Označme $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ a $S_k = S - (n-1)x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - (n-1)\,x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Jsou-li všechna $S_k \geqq 0$, pak platí

$$\text{(I.44)} \qquad x_1x_2\ldots x_n \geqq S_1S_2\ldots S_n\,.$$

Je totiž $S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1} + S_{k+1} + \ldots + S_n = (n-1)\,x_k$ (ověřte to!) čili

$$x_k = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1} + S_{k+1} + \ldots + S_n}{n-1}\,.$$

Vpravo stojí aritmetický průměr vektoru $(S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}, S_{k+1}, \ldots, S_n)$, a podle nerovnosti (AG) je pak

$$x_k \geqq (S_1S_2\ldots S_{k-1}S_{k+1}\ldots S_n)^{1/(n-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

To je celkem n nerovností; znásobíme-li jejich levé strany a jejich pravé strany, dostaneme (I.44).

Příklad I.6. Označme pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$ symbolem $\mathbf{x}^{(i)}$ vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ a budiž

$$a_i = A_{n-1}(\mathbf{x}^{(i)}) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_i}{n-1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Označme dále $\mathbf{a}$ vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n) > \mathbf{0}$. Pak platí

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{a}) \leqq A_n(\mathbf{x})\,. \tag{I.45}$$

Důkaz: Je

$$x_1x_2\ldots x_n = \left(\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_1}\right)^{1/(n-1)} \left(\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_2}\right)^{1/(n-1)} \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_n}\right)^{1/(n-1)} = G_{n-1}(\mathbf{x}^{(1)})\, G_{n-1}(\mathbf{x}^{(2)}) \ldots G_{n-1}(\mathbf{x}^{(n)})\,.$$

Podle nerovnosti (AG) je $G_{n-1}(\mathbf{x}^{(i)}) \leqq A_{n-1}(\mathbf{x}^{(i)}) = a_i$, a tedy máme

$$x_1x_2 \ldots x_n \leqq a_1a_2 \ldots a_n\,,$$

odkud plyne první nerovnost v (I.45) odmocněním.

Použijeme-li nerovnosti (AG) pro vektor $\mathbf{a}$, máme

$$G_n(\mathbf{a}) \leqq A_n(\mathbf{a}) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} =$$

$$= \frac{\dfrac{nx_1 + nx_2 + \ldots + nx_n - x_1 - x_2 - \ldots - x_n}{n-1}}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = A_n(\mathbf{x})\,,$$

což je druhá nerovnost v (I.45).

Příklad I.7. Budiž $\boldsymbol{x}^{(i)}$ vektor z příkladu I.6 a označme

$$g_i = G_{n-1}(\boldsymbol{x}^{(i)}) = \left(\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_i}\right)^{1/(n-1)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Je-li $\boldsymbol{g}$ vektor $(g_1, g_2, \dots, g_n) > \boldsymbol{0}$, platí

$$G_n(\boldsymbol{x}) \leqq A_n(\boldsymbol{g}) \leqq A_n(\boldsymbol{x}) \,. \tag{I.46}$$

Důkaz: V předchozím příkladu jsme ukázali, že $G_n(\boldsymbol{x}) = G_n(\boldsymbol{g})$. Z nerovnosti (AG), použité pro vektor $\boldsymbol{g}$, pak plyne první nerovnost v (I.46). Z nerovnosti (AG), použité pro vektor $\boldsymbol{x}^{(i)}$, plyne, že $g_i = G_{n-1}(\boldsymbol{x}^{(i)}) \leqq \leqq A_{n-1}(\boldsymbol{x}^{(i)}) = a_i$, takže také

$$g_1 + g_2 + \dots + g_n \leqq a_1 + a_2 + \dots + a_n \,;$$

odtud už plyne druhá nerovnost v (I.46).

Poznámka I.2. Oba poslední příklady mj. ukazují, že mezi výrazy $G_n(\boldsymbol{x})$ a $A_n(\boldsymbol{x})$ lze zařadit výrazy $G_n(\boldsymbol{a})$ a $A_n(\boldsymbol{g})$, které opět závisejí na vektoru $\boldsymbol{x}$; tím máme konkrétní ilustraci k poznámce I.1. Jestliže nyní k vektoru $\boldsymbol{a}$ sestrojíme vektor $\boldsymbol{b}$ stejným postupem, jakým jsme v příkladu I.6 sestrojili k vektoru $\boldsymbol{x}$ vektor $\boldsymbol{a}$, bude podle zmíněného příkladu, nerovnosti (I.45), platit

$$G_n(\boldsymbol{a}) \leqq G_n(\boldsymbol{b}) \leqq A_n(\boldsymbol{a}) \,;$$

protože však je $G_n(\boldsymbol{x}) \leqq G_n(\boldsymbol{a})$ a $A_n(\boldsymbol{a}) = A_n(\boldsymbol{x})$, dostali jsme další výraz $G_n(\boldsymbol{b})$, který opět lze vložit mezi $A_n(\boldsymbol{x})$ a $G_n(\boldsymbol{x})$. A tak bychom mohli pomocí příkladů I.6 a I.7 pokračovat v sestrojování dalších výrazů, které ilustrují poznámku I.1.

Nerovnosti (AG) lze využít i v geometrických úlohách:

Příklad I.8. V 15. ročníku MO byla v kategorii B zadána tato úloha: Je dán kvádr o rozměrech a, b, c, který není krychle. Součet objemů krychlí o hranách a, b, c je větší než trojnásobný objem daného kvádru; dokažte.

Zde jde o to dokázat, že platí

$$a^3 + b^3 + c^3 > 3abc \quad \text{pro} \quad a, b, c > 0. \tag{I.47}$$

To však plyne ihned z nerovnosti (AG) pro $n = 3$: Je $\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ pro $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) > \boldsymbol{0}$, a nerovnost (I.47) dostaneme, položíme-li $x_1 = a^3$, $x_2 = b^3$, $x_3 = c^3$. Protože výchozí kvádr n e n í krychle, jsou alespoň dvě z čísel a, b, c různá, a nerovnost je tedy podle věty I.1 ostrá.

Úloha I.2. Vyřešte pomocí nerovnosti (AG) tento (tzv. *isoperimetrický)* problém: *Mezi všemi trojúhelníky o stejném obvodu najít ten, který má největší obsah.*

Příklad I.9. V 17. ročníku MO byla v kategorii A zadána tato úloha: Pro každá tři nezáporná čísla x, y, z platí

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geqq 0; \tag{I.48}$$

dokažte. V kterých případech nastane rovnost?

Zde stačí použít nerovnosti (AG) pro $n = 2$, podle níž je

$$\sqrt{yz} \leqq \frac{1}{2}(y + z), \sqrt{xz} \leqq \frac{1}{2}(x + z), \sqrt{xy} \leqq \frac{1}{2}(x + y)\,.$$

Pak je

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geqq$$
$$\geqq x\left[x - \frac{1}{2}(y + z)\right] + y\left[y - \frac{1}{2}(x + z)\right] +$$

$$+ z\left[z - \frac{1}{2}(x + y)\right] = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + + (z - x)^2] \geqq 0\,,$$

což je (I.48). Odtud je také vidět, že rovnost v (I.48) nastane tehdy a jen tehdy, bude-li $x = y = z$.

Příklad I.10. Předpokládejme, že $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, a nechť jsou A_k a G_k dána vzorci (I.24). Užijme nyní nerovnosti (P.1) pro $\alpha = k + 1$ a pro $t = \dfrac{A_{k+1}}{A_k}$. Pak je

$$\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)^{k+1} \geqq (k + 1)\frac{A_{k+1}}{A_k} - k =$$
$$= \frac{1}{A_k}[(k + 1)A_{k+1} - kA_k] = \frac{1}{A_k}x_{k+1}\,;$$

zde jsme užili prvního vzorce v (I.25). Je tedy

$$x_{k+1} \leqq \frac{A_{k+1}^{k+1}}{A_k^k}\,.$$

Podle druhého vzorce z (I.25) je však $x_{k+1} = \dfrac{G_{k+1}^{k+1}}{G_k^k}$, takže máme nerovnost

$$\frac{G_{k+1}^{k+1}}{G_k^k} \leqq \frac{A_{k+1}^{k+1}}{A_k^k}\,,$$

kterou lze upravit na tvar

$$\text{(I.49)} \quad \left(\frac{G_{k+1}}{A_{k+1}}\right)^{k+1} \leqq \left(\frac{G_k}{A_k}\right)^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

Tím jsme vlastně podali další, už *pátý* důkaz nerovnosti (AG): Z (I.49) totiž plyne, že

$$\left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n \leqq \left(\frac{G_2}{A_2}\right)^2,$$

a protože víme, že $G_2 \leqq A_2$ čili že $\dfrac{G_2}{A_2} \leqq 1$, je také $\dfrac{G_n}{A_n} \leqq 1$ čili $G_n(\mathbf{x}) \leqq A_n(\mathbf{x})$.

Příklad I.11. Pomocí věty I.2 jsme výše dokázali nerovnost

$$G_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geqq G_n(\mathbf{x}) + G_n(\mathbf{y})\,. \tag{I.40}$$

Tuto nerovnost můžeme dokázat p ř í m o pomocí nerovnosti (AG) a několika početních obratů: Je-li $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} > \mathbf{0}$, je

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i + y_i}{x_i + y_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i + y_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i + y_i} =$$
$$= A_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\right) + A_n\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\right) \geqq G_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\right) + G_n\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\right) =$$
$$= G_n(\mathbf{x})\,.\,G_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\right) + G_n(\mathbf{y})\,.\,G_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\right) = \frac{G_n(\mathbf{x}) + G_n(\mathbf{y})}{G_n(\mathbf{x} + \mathbf{y})},$$

odkud už plyne (I.40). [Použili jsme též vztahů (I.38) a (I.15).]

Předchozí příklad ukazuje, co se stane, zaměníme-li pořadí operací „součet dvou vektorů" a „utvoření geometrického průměru". V trochu jiném smyslu pojednává o výsledku záměny operací „sčítání" a „tvoření průměru (aritmetického, geometrického, harmonického)" následující úloha.

Úloha I.3. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$. Zřejmě je

$$(I.50) \qquad \sum_{k=1}^{m} A_2(x_k, y_k) = A_2\left(\sum_{k=1}^{m} x_k, \sum_{k=1}^{m} y_k\right)^{*)}.$$

Dokažte, že dále platí

$$(I.51) \qquad \sum_{k=1}^{m} G_2(x_k, y_k) \leqq G_2\left(\sum_{k=1}^{m} x_k, \sum_{k=1}^{m} y_k\right)$$

a

$$(I.52) \qquad \sum_{k=1}^{m} H_2(x_k, y_k) \leqq H_2\left(\sum_{k=1}^{m} x_k, \sum_{k=1}^{m} y_k\right).$$

Některé vlastnosti vektorů $\boldsymbol{x}$ se přenášejí i na aritmetické a geometrické průměry:

Úloha I.4. (22. ročník MO, kategorie A.) Budiž dána posloupnost reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ taková, že pro každé $k > 1$ platí

$$(I.53) \qquad x_{k-1} + x_{k+1} \geqq 2x_k .$$

Dokažte, že pro aritmetické průměry $A_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ platí

$$(I.54) \qquad A_{n-1} + A_{n+1} \geqq 2A_n \quad \text{pro každé } n > 1.$$

Úloha I.5. Buďte $x_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ a označme $G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ukažte, že když pro každé $k > 1$ je

$$(I.55) \qquad x_{k-1} x_{k+1} \geqq x_k^2 ,$$

je také

$$(I.56) \qquad G_{n-1} G_{n+1} \geqq G_n^2 \quad \text{pro každé } n > 1.$$

---

*) Pro zjednodušení jsme zde použili označení $A_2(x_k, y_k)$ místo důslednějšího označení $A_2((x_k, y_k))$.

A nakonec uveďme pro procvičení řadu úloh, které lze snadno vyřešit pomocí předchozích výsledků; jedná se převážně o použití nerovnosti (AG).

Úloha I.6. Budiž α ostrý úhel; dokažte, že platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geqq 2 .$$

Úloha I.7. Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqq 8abc .$$

Kdy nastane rovnost?

Úloha I.8. Buďte a, b kladná čísla. Pro kterou reálnou hodnotu t nabývá zlomek $\frac{1}{t^2}(a + bt^4)$ nejmenší hodnoty?

Úloha I.9. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ platí

$$\sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)} \geqq$$
$$\geqq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3} .$$

Úloha I.10. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqq n .$$

Úloha I.11. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ platí

$$n! < \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n .$$

Úloha I.12. (a) Mezi všemi obdélníky o stejném obvodu naleznéte ten, který má největší obsah.
(b) Mezi všemi obdélníky o stejném obsahu naleznéte ten, který má nejmenší obvod.

Úloha I.13. Mezi všemi obdélníky vepsanými do kružnice o poloměru R naleznéte ten, který má největší obsah.

Úloha I.14. Mezi všemi trojúhelníky o stejném obsahu naleznéte ten, který má nejmenší obvod.

Úloha I.15. Budiž $0 < m \leqq x_k \leqq M$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Buďte p_k kladná čísla a nechť je $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Dokažte, že platí

(I.57) $$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{x_k}\right) \leqq \frac{(M+m)^2}{4Mm}.$$

Kapitola II.

CAUCHYOVA NEROVNOST

V této kapitole se budeme většinou zabývat **reálnými** vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ atd. Půjde-li o komplexní vektory, výslovně to podotkneme.

Začněme hlavním tvrzením kapitoly:

Věta II.1. *Pro každou dvojici reálných vektorů* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *platí*

$$(\mathrm{II}.1) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Rovnost zde nastává tehdy a jen tehdy, jsou-li vektory $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$ *úměrné.*

Nerovnosti (II.1) se říká *Cauchyova*, někdy však také *Schwarzova* nebo *Buňakovského* — podle matematiků, kteří ji zobecnili, resp. dokázali pro obecnější objekty než jsou vektory. Uvedeme zde opět několik rozdílných důkazů této nerovnosti, kterou můžeme psát též takto:

$$[A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y})]^2 \leqq A_n(\mathbf{x}^2).A_n(\mathbf{y}^2)$$

(dokažte!).

Cauchyova nerovnost se často zapisuje ve tvaru

$$(\mathrm{II}.2) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,.\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}\,,$$

který dostaneme z (II.1) odmocněním.

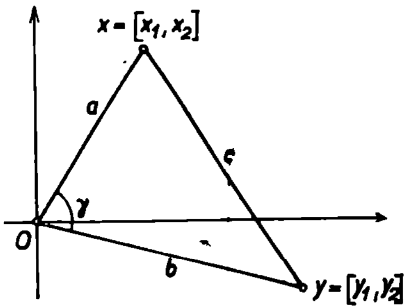
Ještě než začneme Cauchyovu nerovnost dokazovat, ukážeme, že má názorný geometrický význam:

Budiž $n = 2$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. Pro úsečky a, b, c z obr. 3 platí

$$a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, b = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\,, c = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Podle kosinové věty je $2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$ (viz označení z obr. 3) čili

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\,.$$



Obr. 3

Cauchyova nerovnost v zápisu (II.2) vypadá pro $n = 2$ takto:

$$| x_1 y_1 + x_2 y_2 | \leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

čili pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ to znamená, že

$$| \cos (\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}) | \leqq 1\,,$$

kde $\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}$ je úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{0x}$ a $\boldsymbol{0y}$ (a který jsme na obr. 3 označili γ).

Chápeme-li (pro $n \geqq 2$) $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jako vektory v n-rozměrném eukleidovském prostoru, má Cauchyova nerovnost stejný význam. Při této geometrické interpretaci Cauchyovy nerovnosti vynikne i význam úměrnosti vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ — pak je totiž $|\cos(\widehat{\mathbf{xy}})| = 1$ čili $\widehat{\mathbf{xy}} = 0$ nebo $\widehat{\mathbf{xy}} = \pi$.

Nyní dokážeme větu II.1.

První důkaz. Výraz

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} (x_k t + y_k)^2 = \tag{II.3}$$

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)t^2 + 2(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)t + \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

je pro každé reálné číslo t nezáporný, takže kvadratická rovnice $P(t) = 0$ má *nejvýše jeden* reálný kořen. To však znamená, že diskriminant této rovnice musí být nekladný, tj.

$$4(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 - 4(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2) \leqq 0\,;$$

odtud už plyne (II.1). — Rovnost v (II.1) je ekvivalentní s tím, že rovnice $P(t) = 0$ má *právě jeden* reálný kořen t_0. Pak však je z (II.3) vidět, že musí být $y_k = -t_0 x_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, tj. vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou úměrné.

Druhý důkaz vychází z tzv. *Lagrangeovy identity*

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2) - (\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 = \sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} (x_i y_k - x_k y_i)^2\,, \tag{II.4}$$

jejíž platnost čtenář snadno ověří. Protože pravá strana v (II.4) je nezáporná, plyne odtud ihned (II.1). — Má-li platit v (II.1) rovnost, musí být pravá strana v (II.4) rovna nule, tj. musí být $x_i y_k = x_k y_i$ pro všechny různé dvojice i, k. Zvolíme-li i pevně (a tak, aby bylo $x_i^2 + y_i^2 \neq 0$), znamená to, že vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ jsou úměrné.

Poznámka II.1. Také Lagrangeova identita má geometrický význam: Budiž $n = 2$ a použijme označení z obr. 3. Je

$$\cos^2\gamma = \frac{(x_1y_1 + x_2y_2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)\,(y_1^2 + y_2^2)},$$

a tedy

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{(x_1^2 + x_2^2)\,(y_1^2 + y_2^2)}$$

(proveďte příslušné výpočty!). Lagrangeova identita má pro $n = 2$ a pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ po úpravě tvar

$$\frac{(x_1y_1 + x_2y_2)^2}{(x_1^2 + x_2^2)\,(y_1^2 + y_2^2)} + \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2}{(x_1^2 + x_2^2)\,(y_1^2 + y_2^2)} = 1\,,$$

a to není nic jiného než známý vztah

$$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{xy}}) + \sin^2(\widehat{\boldsymbol{xy}}) = 1\,.$$

Analogicky je tomu i pro $n > 2$.

Třetí důkaz věty II.1 využívá nerovnosti (I.17), kterou jsme dokázali už v úvodu a která platí pro každou dvojici reálných čísel a, b:

$$ab \leqq \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{2}\,b^2$$

s rovností tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$. Zvolme libovolné nenulové číslo ε a položme $a = \varepsilon \mid x_k \mid$, $b = \frac{1}{\varepsilon} \mid y_k \mid$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Dostaneme pak n nerovností

$$(\text{II}.5) \quad |x_k y_k| = (\varepsilon\,|x_k|)\left(\frac{1}{\varepsilon}\,|\,y_k\,|\right) \leqq \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 x_k^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\,y_k^2$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

a po jejich sečtení máme

$$(\text{II}.6) \quad \sum_{k=1}^{n} |\,x_k y_k\,| \leqq \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} y_k^2\,.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon \neq 0$. Nerovnost (II.1) zřejmě platí, je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$ nebo $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 0$: pak je totiž $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ nebo $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$. Můžeme proto předpokládat, že $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$ a $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 > 0$, a položíme pak

$$\varepsilon^2 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}}\,.$$

Potom je

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)}$$

a z (II.6)máme

$$\sum_{k=1}^{n} |\,x_k y_k\,| \leqq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)}\,.$$

Protože $(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 = |\sum_{k=1}^{n} x_k y_k|^2 \leqq (\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|)^2$, plyne odtud (II.1). — Rovnost nastane tehdy a jen tehdy, platí-li rovnost ve všech nerovnostech v (II.5) a je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|$; musí tedy být $\varepsilon |x_k| = \frac{1}{\varepsilon} |y_k|$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a čísla x_k, y_k musí mít stejná znaménka, což znamená, že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou úměrné.

Poznámka II.2. Další důkaz Cauchyovy nerovnosti najde čtenář v 33. svazku Školy mladých matematiků *O dynamickém programování* od J. Morávka.

Ve větě II.1 jsme předpokládali, že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou reálné. Jsou-li x_j a y_j komplexní čísla, platí Cauchyova nerovnost ve tvaru

$$|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k|^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 . \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 . \tag{II.7}$$

Je totiž

$$|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leqq \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|$$

a stačí nyní užít nerovnosti (II.1) pro reálné vektory $|\mathbf{x}|$ a $|\mathbf{y}|$.

Poznámka II.3. Také Cauchyova nerovnost je v jistém smyslu přesná; v dalším však uvidíme, že existuje celá škála výrazů $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které lze vložit mezi $(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2$ a $(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2)$. (Viz analogickou poznámku I.1.)

Uvedeme nyní úlohy na procvičení a příklady na užití Cauchyovy nerovnosti.

Úloha II.1. Dokažte, že pro každý reálný vektor $\boldsymbol{x}$ je

$$(\mathrm{II.8}) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 ;$$

rovnost platí tehdy a jen tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Úloha II.2. Pro každé reálné číslo a platí vztah

$$3(1 + a^2 + a^4) \geqq (1 + a + a^2)^2 ;$$

dokažte a určete všechna reálná čísla a, pro která nastane rovnost. (4. ročník MO, kategorie B.)

Úloha II. 3. Buďte x, y, z nezáporná čísla. Dokažte pomocí (II.1), že platí

$$(\mathrm{II.9}) \qquad \sqrt{xy + yz + zx} \leqq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Využijte této nerovnosti a nerovnosti (II.1) k novému důkazu nerovnosti (I.48) z příkladu I.9.

Příklad II.1. Ve 2. ročníku MO byla v kategorii B zadána tato úloha: Dokažte, že pro libovolnou trojici reálných čísel a, b, c platí

$$(\mathrm{II.10}) \qquad (a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 \geqq \geqq ab + bc + ca\,.$$

Vyřešíme tuto úlohu pomocí Cauchyovy nerovnosti. Z (II.1) především plyne, že

$$(\mathrm{II.11}) \qquad ab + bc + ca \leqq a^2 + b^2 + c^2$$

(viz úlohu II.3). Protože

$$(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 =$$
$$= a^2 + (b - c)^2 + 2a(b - c) + b^2 + (c - a)^2 +$$
$$+ 2b(c - a) + c^2 + (a - b)^2 + 2c(a - b) =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 +$$
$$+ (a - b)^2 \geqq a^2 + b^2 + c^2 ,$$

plyne (II.10) odtud a z (II.11). Dokonce jsme ukázali, že rovnost nastane v (II.10) tehdy a jen tehdy, je-li $a = b = c$.

Poznámka II.4. Zavedeme-li v předchozím příkladu označení x_1, x_2, x_3 místo a, b, c a budeme-li předpokládat, že $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) > \boldsymbol{0}$, můžeme pomocí označení z příkladů I.5 a I.7 zapsat nerovnost (II.10) takto:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leqq g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 .$$

Doporučujeme čtenáři, aby uvážil, zda tuto nerovnost je možno dokázat pomocí výsledků z kapitoly I a zda ji lze zobecnit pro $n > 3$.

Příklad II.2. Budiž $\boldsymbol{z}$ vektor, $\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$, a položme $x_k = \sqrt{z_k}$, $y_k = \dfrac{1}{\sqrt{z_k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Pak je $x_k y_k = 1$ a nerovnost (II.1) dává

$$n^2 = (\sum_{k=1}^{n} 1)^2 \leqq (\sum_{k=1}^{n} z_k)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right);$$

to je jiný důkaz nerovnosti (I.32).

Příklad II.3. Nechť reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 1)$ splňují nerovnost

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq \sqrt{(n - 1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

Pak jsou všechna čísla x_i nezáporná, tj. $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$.

Dokážeme toto tvrzení sporem: Předpokládejme, že některé z čísel x_i je záporné — nechť je to třeba x_n. Protože $x_n < 0$, je

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n < x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} .$$

Z nerovnosti (II.8), použité pro $n - 1$ místo n, plyne

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leqq \sqrt{n-1} . \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2} ,$$

a protože

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2,$$

plyne ze všech čtyř výše uvedených nerovností vztah

$$\sqrt{(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)} < \\ < \sqrt{n-1} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} ,$$

což je spor.

Příklad II.4. Buďte z_i komplexní čísla a α_i kladná čísla taková, že $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\alpha_i} = 1$. Pak platí

$$\text{(II.12)} \qquad | z_1 + z_2 + \ldots + z_n |^2 \leqq \\ \leqq \alpha_1 | z_1 |^2 + \alpha_2 | z_2 |^2 + \ldots + \alpha_n | z_n |^2 .$$

Podle (II.1) totiž platí pro každý reálný vektor $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

$$(\sum_{i=1}^{n} \beta_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} . \beta_i \sqrt{\alpha_i}\right)^2 \leqq (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}) (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i^2) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i^2$$

a nyní stačí volit

$$\beta_i = \frac{|z_i|}{\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

je-li $\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k| \neq 0$ (v případě $\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k| = 0$ nerovnost (II.12) zřejmě platí).

Úloha II.4. Buďte $\alpha_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Dokažte, že pro reálné vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ platí

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k} y_k^2\right).$$

Různou volbou čísel α_k dostaneme řadu zajímavých nerovností.

Úloha II.5. Buďte $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ reálné vektory, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$. Pak platí

$$\text{(II.13)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geqq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k};$$

rovnost přitom nastává právě tehdy, jsou-li vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ úměrné.

Příklad II.5. Buďte $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ vektory, α, β čísla. Pak je

$$x_k y_k = (x_k^{\alpha} y_k^{\beta})(x_k^{1-\alpha} y_k^{1-\beta}).$$

Použijeme-li nyní Cauchyovy nerovnosti (II.1), kde ovšem místo x_k volíme $x_k^{\alpha} y_k^{\beta}$ a místo y_k volíme $x_k^{1-\alpha} y_k^{1-\beta}$, dostaneme

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{2\alpha} y_k^{2\beta}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{2-2\alpha} y_k^{2-2\beta}\right).$$

Volbou čísel α a β dostáváme různé odhady. Pro $\alpha = 1$ a $\beta = 0$ nebo pro $\alpha = 0$ a $\beta = 1$ dostáváme nerovnost (II.1), pro $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ dostáváme zřejmou identitu, pro $\alpha = \beta = 0$ máme nerovnost

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 \leqq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2 ,$$

která ovšem ihned plyne např. z (II.8). Zvolíme-li $\beta = 1 - \alpha$, dostaneme symetrickou nerovnost

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^{2\alpha} y_k^{2-2\alpha}) (\sum_{k=1}^{n} x_k^{2-2\alpha} y_k^{2\alpha}) .$$

Pracujeme-li s komplexními čísly, lze Cauchyovu nerovnost trochu zlepšit. Buďte tedy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reálná čísla a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ čísla komplexní a předpokládejme pro jednoduchost (není to podstatné), že je $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k \geqq 0$. Pak platí

$$\text{(II.14)} \quad |\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k|^2 \leqq \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2) (\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + |\sum_{k=1}^{n} z_k^2|) .$$

Tato nerovnost je ostřejší než nerovnost (II.7) (kde ovšem píšeme $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{z}$ místo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$): (II.7) plyne z (II.14), užijeme-li toho, že

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k^2| \leqq \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 .$$

Dokažme (II.14): Položíme $z_k = x_k + iy_k$; pak je $|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k|^2 = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k)^2$, neboť podle předpokladu je

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = 0$. Užijeme-li Cauchyovy nerovnosti pro reálné vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{x}$ ve tvaru (II.1), máme

$$|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k|^2 = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k)^2 \leqq (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2)(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)\,.$$

Nerovnost (II.14) odtud plyne, použijeme-li toho, že

$$x_k^2 = \frac{1}{2}|z_k|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{Re} z_k^2$$

a že

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k^2 = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \leqq |\sum_{k=1}^{n} z_k^2|\,.$$

V Cauchyově nerovnosti vystupují dva vektory — $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Čtenář si jistě snadno odvodí další analogické odhady pro více vektorů. Uveďme alespoň dvě úlohy:

Úloha II.6. Buďte $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ reálné vektory. Pak platí

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k z_k)^4 \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^4)(\sum_{k=1}^{n} y_k^4)(\sum_{k=1}^{n} z_k^2)^2\,. \tag{II.15}$$

Úloha II.7. Buďte $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ reálné vektory. Pak platí

$$(\sum_{k=1}^{n} w_k x_k y_k z_k)^4 \leqq (\sum_{k=1}^{n} w_k^4)(\sum_{k=1}^{n} x_k^4)(\sum_{k=1}^{n} y_k^4)(\sum_{k=1}^{n} z_k^4)\,. \tag{II.16}$$

Kdy nastává rovnost?

Budiž $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$. Rozdíl mezi pravou stranou a levou stranou v Cauchyově nerovnosti (II.1), tj. číslo

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2) - (\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2$$

známe: udává nám je Lagrangeova identita (II.4). Pro podíl obou těchto sčítanců dostáváme z (II.1) odhad zdola:

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2} \geqq 1\,.$$

Horní odhad udává tato nerovnost:

$$\text{(II.17)}\qquad \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{M(\mathbf{x})M(\mathbf{y})}{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}} + \sqrt{\frac{m(\mathbf{x})m(\mathbf{y})}{M(\mathbf{x})M(\mathbf{y})}}\right]^2,$$

kde $m(\mathbf{x}) = m_n(\mathbf{x})$, $M(\mathbf{x}) = M_n(\mathbf{x})$ a podobně pro $\mathbf{y}$. Je $m(\mathbf{x}) > 0$ a $m(\mathbf{y}) > 0$, neboť předpokládáme $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$; tím spíše je tedy $M(\mathbf{x}) > 0$ a $M(\mathbf{y}) > 0$.

Úloha II.8. Dokažte nerovnost (II.17).

Uvedeme ještě dva příklady, v nichž je použito Cauchyovy nerovnosti:

Příklad II.6. Budiž $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \geqq 0$ a buďte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reálná čísla. Nechť jsou splněny tyto nerovnosti:

$$\text{(II.18)}\qquad x_1 \leqq y_1,\ x_1 + x_2 \leqq y_1 + y_2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leqq y_1 + y_2 + y_3,\ \ldots,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq y_1 + y_2 + \ldots + y_n.$$

Pak platí

$$\text{(II.19)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} y_k^2 .$$

Důkaz: Vynásobíme první nerovnost v (II.18) nezáporným číslem $x_1 - x_2$, druhou nerovnost nezáporným číslem $x_2 - x_3$ atd.; poslední nerovnost v (II.18) vynásobíme číslem x_n. Sečteme-li všechny takto vzniklé nerovnosti, dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

Pravou stranu odhadneme pomocí Cauchyovy nerovnosti ve tvaru (II.2) a máme

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} ;$$

odtud už plyne (II.19).

Příklad II.7. Označme $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = X$, $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = Y$, $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = Z$ a předpokládejme, že reálné vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ nejsou úměrné. Pak je podle (II.1)

$$Z^2 < XY \quad \text{čili} \quad XY - Z^2 > 0 .$$

Budiž nyní $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ vektor, který vyhovuje těmto podmínkám:

$$\text{(II.20)} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \xi_i = 1 .$$

Pak platí

$$\text{(II.21)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \geqq \frac{X}{XY - Z^2} ;$$

rovnost zde nastává tehdy a jen tehdy, je-li

(II.22) $$\xi_i = \frac{y_i X - x_i Z}{XY - Z^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Důkaz: Budiž $\eta_i = \dfrac{y_i X - x_i Z}{XY - Z^2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; pak je

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i = \frac{X . \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - Z . \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{XY - Z^2} = \frac{XZ - ZX}{XY - Z^2} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \eta_i = \frac{X . \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - Z . \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{XY - Z^2} = \frac{XY - Z^2}{XY - Z^2} = 1.$$

Vektor η tedy vyhovuje podmínkám (II.20).

Budiž ξ libovolný reálný vektor, který také vyhovuje podmínkám (II.20). Pak je

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \frac{X . \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i - Z . \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i}{XY - Z^2} = \frac{X}{XY - Z^2};$$

speciálně lze za ξ volit vektor η a máme

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 = \frac{X}{XY - Z^2}.$$

Je tedy

(II.23)
$$0 \leqq \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \frac{2X}{XY - Z^2} + \frac{X}{XY - Z^2} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \frac{X}{XY - Z^2},$$

a odtud už plyne (II.21). Rovnost v (II.21) může platit tehdy a jen tehdy, bude-li platit rovnost v (II.23); to však nastane právě tehdy, bude-li $\xi_i = \eta_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), což je (II.22) vzhledem k definici čísel η_i.

Poznámka II.5. Ve čtenáři může vzniknout dojem, že příklad II.7 je sice možná zajímavý, ale dosti umělý a neprůhledný: není vidět, jaký má smysl. Ale příkladu II.7 lze dát názorný geometrický význam: V úvodu této kapitoly jsme uvedli, že výraz $\frac{Z^2}{XY}$ souvisí s kosinem úhlu, který svírají vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$: $\frac{Z^2}{XY} = \cos^2(\widehat{\boldsymbol{xy}})$. Odtud je $\sin^2(\widehat{\boldsymbol{xy}}) = 1 - \frac{Z^2}{XY} = \frac{XY - Z^2}{XY}$; přitom je $X \neq 0$ i $Y \neq 0$, neboť vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ nejsou podle předpokladu úměrné a je tedy $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ i $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$.

Označme nyní $\Xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, kde ξ je vektor z příkladu II.7; z druhé podmínky v (II.20) plyne, že je $\xi \neq \boldsymbol{0}$ a tedy $\Xi > 0$. První podmínka v (II.20) říká, že vektor ξ je kolmý na vektor $\boldsymbol{x}$: je totiž

$$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{x}\xi}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i\right)^2}{X.\Xi} = 0 \quad \text{čili} \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{x}\xi}) = 0$$

čili $\widehat{\boldsymbol{x}\xi} = \frac{\pi}{2}$. Druhá podmínka v (II.20) říká, že

$$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{y}\xi}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\xi_i\right)^2}{Y.\Xi} = \frac{1}{Y\Xi}.$$

Nerovnost (II.21) znamená, že

$$\Xi \geqq \frac{1}{Y \sin^2 (\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}})}$$

čili že

$$\sin^2 (\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}) \geqq \frac{1}{Y\Xi} = \cos^2 (\widehat{\mathbf{y}\xi}) ;$$

(II.22) znamená, že vektor ξ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Příklad II.7 lze tedy formulovat takto: *Buďte dány dva vektory* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, *které nejsou úměrné. Je-li* ξ *vektor kolmý k vektoru* $\mathbf{x}$, *platí*

$$\cos^2 (\widehat{\mathbf{y}\xi}) \leqq \sin^2 (\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}) ;$$

rovnost zde platí právě tehdy, je-li vektor ξ *jistou speciální lineární kombinací vektorů* $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$.

(Nakreslete si obrázek pro $n = 3$!)

Cauchyovu nerovnost můžeme psát ve tvaru

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqq$$
$$\leqq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) .$$

Lze se nyní ptát, zda platí nějaká analogická nerovnost, jestliže místo *součtů* budeme uvažovat v závorkách *rozdíly*. Nejjednodušší to bude v případě $n = 2$: ptáme se, zda je mezi čísly

$$L = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 \quad \text{a} \quad P = (x_1^2 - x_2^2)(y_1^2 - y_2^2)$$

nějaký vztah (třeba nerovnost), který by platil např. pro všechny nezáporné vektory (x_1, x_2), (y_1, y_2). Rozhodně *neplatí* pro všechny takové vektory nerovnost $L \leqq P$, neboť pro $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ a $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ je $L = 0$ a $P = -1$, není však zatím jasné, zda tedy pro všechny takové vektory je $L \geqq P$. Jistou odpověď (i pro $n > 2$) dává tato věta:

Věta II.2. *Buďte* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *nezáporná čísla a nechť je buď*

$$x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \tag{II.24}$$

nebo

$$y_0^2 > y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \,. \tag{II.25}$$

Pak platí

$$(x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots - x_ny_n)^2 \geqq \geqq (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2) \,.\, (y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_n^2) \,. \tag{II.26}$$

Rovnost nastane tehdy a jen tehdy, budou-li vektory $\tilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\tilde{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *úměrné.*

Poznámka II.6. Výrazy, stojící na pravé straně nerovnosnosti (II.26), souvisejí s Einsteinovou teorií relativity. Einsteinův princip relativity ukázal nutnost změny starých představ o prostoru a času; tyto změny jsou spojeny se jménem holandského fyzika H. A. Lorentze („Lorentzovy transformace“); německý matematik H. Minkowski pak přispěl podstatnou měrou k vyřešení úkolu vybudovat vhodný matematický aparát pro popis zákonů teorie relativity. Jak to však souvisí s nerovností (II.26)? V roce 1908 upozornil Minkowski v přednášce „Prostor a čas“ na 80. sjezdu německých přírodovědců a lékařů, že „nikdo nepozoroval nějaké místo jinak než v určitém čase a čas jinak než na určitém místě“. Zavedl čtyřrozměrný prostor tzv. „světobodů“ $[x_1, x_2, x_3, t]$, kde x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice bodu v trojrozměrném prostoru a t je čas, a množina všech světobodů se dnes nazývá *časoprostor* nebo též *prostoročas*. V geometrii tohoto časoprostoru hrají důležitou roli výrazy $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2$ nebo $t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$; píšeme-li zde x_0 místo t, máme výrazy z věty II.2 (pro $n = 3$).

Větu II.2 lze dokázat opět různým způsobem. Jeden důkaz využívá Cauchyovy nerovnosti (II.1); ten však zde nebudeme uvádět a odkazujeme na třetí kapitolu, kde tímto postupem dokážeme větu obecnější (viz příklad III.6).

Dva důkazy, které zde provedeme, jsou vlastně analogiemi obou prvních důkazů věty II.1.

První důkaz. Nechť je splněna podmínka (II.24) a uvažujme kvadratický výraz

$$P(t) = (x_0t - y_0)^2 - \sum_{k=1}^{n} (x_kt - y_k)^2 =$$

$$= (x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)\, t^2 - 2(x_0y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k)\, t + (y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2)\,.$$

Protože koeficient u t^2 je kladný, bude $P(t) > 0$ pro čísla t, pro něž bude $|t|$ dosti velká. Zvolíme-li $t_0 = \dfrac{y_0}{x_0}$ (to lze, neboť vzhledem k (II.24) je $x_0 > 0$), bude

$$\text{(II.27)}\quad P(t_0) = P\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \left(x_k \frac{y_0}{x_0} - y_k\right)^2 \leqq 0\,,$$

a to znamená, že rovnice $P(t) = 0$ má *alespoň jeden* reálný kořen. Diskriminant této rovnice tedy musí být nezáporný, čili

$$4(x_0y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k)^2 - 4(x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)(y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2) \geqq 0\,,$$

a to je (II.26). Rovnost zde bude platit právě tehdy, bude-li rovnice $P(t) = 0$ mít *právě jeden* reálný kořen. Pro všechna t tedy bude $P(t) \geqq 0$ a speciálně bude $P\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \geqq 0$. Srovnání s (II.27) ukazuje, že tím jediným kořenem bude číslo t_0 a že to nastane právě tehdy, bude-li $y_k = \frac{y_0}{x_0} x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; to však znamená, že vektory $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou úměrné.

Předpokládali jsme, že je splněna podmínka (II.24). Je-li splněna podmínka (II.25), zaměníme pouze role vektorů $\tilde{\mathbf{x}}$ a $\tilde{\mathbf{y}}$.

Druhý důkaz využívá následující identity, kterou čtenář snadno ověří:

(II.28)

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)\,[(x_0y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k)^2 - (x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)(y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2)] =$$

$$= (y_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_0 \sum_{k=1}^{n} x_ky_k)^2 + (x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)\,[(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2) -$$

$$- (\sum_{k=1}^{n} x_ky_k)^2]\,.$$

Je-li splněna podmínka (II.24), je pravá strana nezáporná, neboť poslední součinitel je nezáporný v důsledku Cauchyovy nerovnosti (II.1). Je-li tedy $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$, plyne nerovnost (II.26) z identity (II.28). Je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$, je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ a nerovnost (II.26) je zřejmě opět splněna. — Rovnost v (II.26) nastane právě tehdy, bude-li pravá strana v (II.28) rovna nule. To především znamená, že musí platit rovnost v Cauchyově nerovnosti pro vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tj. podle věty II.1 musí být tyto vektory úměrné: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ čili $\alpha x_k = \beta y_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Dále musí být $y_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x_0 \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$; čtenář si už snadno dokáže, že odtud plyne $\beta y_0 = \alpha x_0$, což znamená, že vektory $\tilde{\mathbf{x}}$ a $\tilde{\mathbf{y}}$ jsou úměrné.

Předpokládáme-li, že je splněna podmínka (II.25), musíme identitu (II.28) zřejmým způsobem upravit.

Úloha II.9. Ukažte, že nerovnost (II.26) platí i tehdy, bude-li $x_0^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ nebo $y_0^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$.

Vzniká nyní přirozená otázka, jaký vztah bude platit mezi levou a pravou stranou v (II.26), bude-li současně platit

$$\text{(II.29)} \qquad x_0^2 < \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \qquad y_0^2 < \sum_{k=1}^{n} y_k^2 .$$

Bude pak v (II.26) platit obrácená nerovnost, tj. bude

$$\text{(II.30)} \quad \left(x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 < \left(x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) ?$$

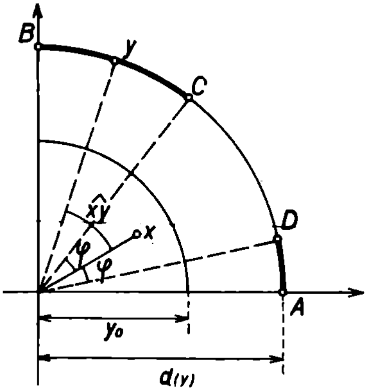
Úloha II.10. Ukažte, že v případě $n = 1$ nerovnost (II.30) neplatí nikdy. Pro $n \geqq 2$ nalezněte dvojici vektorů $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$, pro které platí (II.29) i (II.30), a jinou dvojici vektorů $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$, pro které (II.29) platí, (II.30) však nikoliv.

Poznámka II.7. Úkol, který je obsažen v závěru předchozího odstavce, stačí vyřešit pro $n = 2$; přechod k případu $n > 2$ je pak snadný: položíme $x_i = y_i = 0$ pro $i = 3, 4, \ldots, n$. Pro $n = 2$ však má nerovnost (II.30) — a pochopitelně i nerovnost (II.26) — geometrický význam.

Budiž tedy $n = 2$. Pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \geqq \mathbf{0}$ označme $d(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $d(\mathbf{y}) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ (je to vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{y}$ v rovině od počátku); pro jednoduchost zvolme ještě $x_0 = 0$, $y_0 > 0$. Nerovnosti (II.29) můžeme zapsat takto:

$$d^2(\mathbf{x}) > 0\,, \quad d^2(\mathbf{y}) > y_0^2\,;$$

druhá nerovnost říká, že bod $\mathbf{y}$ leží v prvním kvadrantu



Obr. 4

vně čtvrtkruhu se středem v počátku a o poloměru y_0 (viz obr. 4). Nerovnost (II.30) lze zapsat takto:

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 < (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2 - y_0^2) = \\ = d^2(\mathbf{x})d^2(\mathbf{y}) - y_0^2d^2(\mathbf{x})$$

čili po úpravě

$$\left(\frac{x_1y_1 + x_2y_2}{d(\mathbf{x})d(\mathbf{y})}\right)^2 < 1 - \left(\frac{y_0}{d(\mathbf{y})}\right)^2.$$

Připomeneme-li si geometrický význam Cauchyovy nerovnosti (viz začátek této kapitoly), lze tuto nerovnost zapsat takto:

$$\cos^2(\widehat{\mathbf{xy}}) < 1 - \left(\frac{y_0}{d(\mathbf{y})}\right)^2$$

čili

$$\sin^2(\widehat{\mathbf{xy}}) > \left(\frac{y_0}{d(\mathbf{y})}\right)^2.$$

Označíme-li ještě symbolem φ úhel mezi 0 a $\frac{\pi}{2}$, pro který platí

$$\sin\varphi = \frac{y_0}{d(\mathbf{y})}, \tag{II.31}$$

má vlastně nerovnost (II.30) tento význam:

$$\sin^2(\widehat{\mathbf{xy}}) > \sin^2\varphi$$

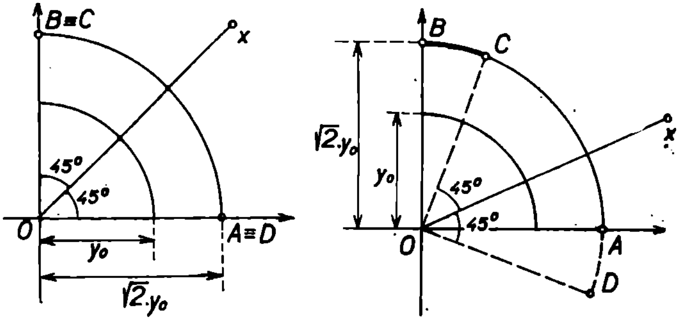
čili

$$|\sin(\widehat{\mathbf{xy}})| > \sin\varphi\,. \tag{II.32}$$

Zvolme nyní $x_0 = 0$, x_1, x_2 a y_0 pevně a vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ zvolme tak, aby se neměnilo číslo $d(\mathbf{y})$ (a aby bylo $d(\mathbf{y}) > y_0$ čili $d^2(\mathbf{y}) > y_0^2$); odpovídající body (y_1, y_2) budou pak ležet na čtvrtkružnici o poloměru

$d(\mathbf{y})$ (viz obr. 4). Najdeme ještě φ tak, aby platilo (II.31), a úhel φ naneseme na obě strany od úsečky $\boldsymbol{0x}$. Ty body $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, pro které platí (II.32) — a tedy (II.30) —, leží na čtvrtkružnici $\widehat{AB}$ vně oblouku $\widehat{CD}$; na oblouku $\widehat{CD}$ (včetně obou koncových bodů) leží pak ty body $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, pro které platí za předpokladů (II.29) nerovnost (II.26).

Velikost úhlu φ závisí pochopitelně na číslu $d(\mathbf{y})$, které lze volit (ovšem tak, aby bylo $d(\mathbf{y}) > y_0$); čím větší bude $d(\mathbf{y})$, tím menší bude úhel φ a tím větší část z oblouku $\widehat{AB}$ zaberou ta $\mathbf{y}$, která leží vně oblouku $\widehat{CD}$ a pro něž tedy za předpokladů (II.29) platí (II.30). Záleží pochopitelně také na poloze bodu $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$: Volíme-li $x_1 = x_2$ a $d(\mathbf{y}) = \sqrt{2}\,.\,y_0$, bude $\varphi = 45°$ a oblouk $\widehat{CD}$ bude totožný s obloukem $\widehat{AB}$, takže (II.30) neplatí pro *žádné* $\mathbf{y}$ takové, že $d(\mathbf{y}) = \sqrt{2}\,.\,y_0$. Jiná situace však nastane, volíme-li $x_1 > x_2$ (a opět $d(\mathbf{y}) = \sqrt{2}\,.\,y_0$) — pak se oblouk $\widehat{CD}$ překryje jen s částí oblouku $\widehat{AB}$ a najdeme vektory $\mathbf{y}$, pro něž platí (II.30) (viz obr. 5a, 5b).



Obr. 5a, b

Pomocí těchto geometrických úvah tedy můžeme řešit úlohu II.10.

V poznámce II.3 jsme se zmínili o výrazech, které lze vložit mezi levou a pravou stranu v Cauchyově nerovnosti. V následující kapitole se setkáme s řadou takových výrazů; zde uveďme na závěr alespoň jeden:

Úloha II.11. Ukažte, že pro $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ platí

$$(\text{II.33}) \quad \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) \leqq$$

$$\leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big),$$

a zjistěte, kdy platí všude rovnosti.

Kapitola III.

HÖLDEROVA A MINKOWSKÉHO NEROVNOST

V obou předchozích kapitolách hrála významnou roli celkem elementární nerovnost

$$\sqrt{x_1 x_2} \leqq \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 , \quad x_1 \geqq 0 , \quad x_2 \geqq 0 ,$$

kterou můžeme zapsat též takto:

$$x_1^{1/2} x_2^{1/2} \leqq \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 . \tag{III.1}$$

Tuto nerovnost můžeme zobecnit:

Věta III.1. *Budiž $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$. Pak pro každou dvojici čísel $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ platí*

$$x_1^{1/p} x_2^{1/q} \leqq \frac{1}{p} x_1 + \frac{1}{q} x_2 . \tag{III.2}$$

Rovnost v (III.2) *platí tehdy a jen tehdy, je-li $x_1 = x_2$.*

Důkaz: Vyjdeme z nerovnosti

$$t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \leqq 0 , \tag{III.3}$$

která platí pro $0 < \alpha < 1$ a $t > 0$ a v níž nastane rovnost tehdy a jen tehdy, bude-li $t = 1$.*)

---

*) Připomeňme, že nerovnost (III.3) je nerovnost (P.2) z věty P.1. Zde poprvé použijeme této věty i pro jiná α než celá.

Je-li $x_2 = 0$, je nerovnost (III.2) zřejmě splněna. Můžeme tedy předpokládat $x_2 > 0$ a položit v (III.3)

$$t = \frac{x_1}{x_2}, \quad \alpha = \frac{1}{p} .$$

Pak je $\alpha - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = -\frac{1}{q}$ a (III.3) má tvar

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/p} - \frac{1}{p} \cdot \frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{q} \leqq 0 .$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $x_2 = x_2^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}} = x_2^{1/q} . x_2^{1/p}$, dostaneme

$$x_1^{1/p} x_2^{1/q} - \frac{1}{p} x_1 - \frac{1}{q} x_2 \leqq 0 ,$$

což je ekvivalentní s (III.2). Protože rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, bude-li $t = \frac{x_1}{x_2} = 1$, je tím věta dokázána.

Poznámka III.1. Protože $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p}$, jsou čísla p a q vázána symetrickým vztahem

$$\text{(III.4)} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 ,$$

který budeme všude v této kapitole automaticky používat. Připomeňme, že pro $p = 2$ je také $q = 2$; nerovnost (III.1) je právě speciálním případem nerovnosti (III.2) pro $p = 2$. — Pravou stranu v (III.2) můžeme pomocí (III.4) zapsat takto:

$$\frac{1}{p}x_1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right)x_2 \quad \text{čili} \quad \lambda x_1 + (1 - \lambda)\,x_2\,, \quad \lambda = \frac{1}{p}.$$

Protože $p > 1$, je $0 < \lambda < 1$; bude-li se číslo λ měnit mezi 0 a 1, bude se bod $\lambda x_1 + (1 - \lambda)\,x_2$ pohybovat po úsečce o koncových bodech x_1 a x_2.

Poznámka III.2. Zvolíme-li v (III.2) $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, dostaneme nerovnost

$$ab \leqq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\,, \tag{III.5}$$

která opět platí pro $a \geqq 0, b \geqq 0$, $p > 1, q = \dfrac{p}{p-1}$. Rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, bude-li $a^p = b^q$.

Poznámka III.3. Také nerovnost (III.2) lze dokazovat různým způsobem. Jedna důkazová metoda je založena na hledání minima funkce

$$f(x) = x^{1/p}y^{1/q} - \frac{x}{p} - \frac{y}{q}$$

a může ji použít ten, kdo ovládá základy diferenciálního počtu; jiný důkaz, využívající vlastnosti grafu logaritmu, je uveden v 35. svazku Školy mladých matematiků.

Otto Hölder byl německý matematik, který žil v letech 1859—1937. Jeho jménem je nazvána nerovnost (III.6), o níž pojednává tato věta:

Věta III.2. *Budiž* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqq \mathbf{0}$, $p > 1$ a $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Pak platí*

$$\text{(III.6)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} . \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q} ;$$

rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, budou-li vektory $\mathbf{x}^p$ *a* $\mathbf{y}^q$ *úměrné.*

Důkaz: Označme $X = \sum_{k=1}^{n} x_k^p$, $Y = \sum_{k=1}^{n} y_k^q$. Je-li $X = 0$ nebo $Y = 0$, je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ nebo $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ a nerovnost (III.6) zřejmě platí. Můžeme proto předpokládat, že $X > 0$ a $Y > 0$. Položíme-li v (III.5) $a = x_k/X^{1/p}$, $b = y_k/Y^{1/q}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), dostaneme n nerovností

$$\text{(III.7)} \qquad \frac{x_k y_k}{X^{1/p} Y^{1/q}} \leqq \frac{1}{p} \cdot \frac{x_k^p}{X} + \frac{1}{q} \cdot \frac{y_k^q}{Y} , \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

a sečtením všech těchto nerovností máme

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{X^{1/p} Y^{1/q}} \leqq \frac{1}{p} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^p}{X} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k^q}{Y} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s (III.6). — V poslední nerovnosti platí znaménko rovnosti tehdy a jen tehdy, platí-li rovnost ve všech nerovnostech v (III.7), tj. je-li $a^p = b^q$ čili

$$\frac{x_k^p}{X} = \frac{y_k^q}{Y} \quad \text{čili} \quad Y . x_k^p = X . y_k^q , \quad k = 1, 2, \ldots, n .$$

To však znamená, že $\mathbf{x}^p \sim \mathbf{y}^q$.

Zvolíme-li $p = 2$, dostaneme z Hölderovy nerovnosti (III.6) nerovnost Cauchyovu, a to ve tvaru (II.2).

Hölderova nerovnost je tedy zobecněním Cauchyovy nerovnosti.

Vynásobíme-li nerovnost (III.6) číslem $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/q}$, můžeme ji zapsat v tomto tvaru:

(III.8) $$A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}) \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p}\,[A_n(\mathbf{y}^q)]^{1/q}\,.$$

Je-li $0 < p < 1$, je $q = \dfrac{p}{p-1} < 0$. V tomto případě platí nerovnost, která se opět nazývá Hölderova a liší se od (III.6) pouze znaménkem nerovnosti:

Věta III.3. *Budiž* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) > \mathbf{0}$, $p < 1$, $p \neq 0$ a $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Pak platí*

(III.9) $$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p}\,(\sum_{k=1}^{n} y_k^q)^{1/q}\,;$$

rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, budou-li vektory $\mathbf{x}^p$ *a* $\mathbf{y}^q$ *úměrné.*

Důkaz: Je-li $p < 1$, $p \neq 0$ a $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, je jedno z čísel p, q záporné. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že je to číslo q [v opačném případě využijeme symetrie vzorce (III.9) a zaměníme role vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ a parametrů p a q]. Budiž tedy

$$0 < p < 1, \quad q < 0\,,$$

a položme

$$p^* = \frac{1}{p}\,, \quad q^* = -\frac{q}{p}\,.$$

Pak je $p^* > 1$ a $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{q^*} = p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) =$ $= p\frac{1}{p} = 1$. Lze tedy použít věty III.2 pro p^*, q^* a pro vektory **u**, **v**: Platí

$$\text{(III.10)} \qquad \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \leqq (\sum_{k=1}^{n} u_k^{p^*})^{1/p^*} (\sum_{k=1}^{n} v_k^{q^*})^{1/q^*}$$

pro $u_k > 0$, $v_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Položíme-li zde

$$u_k = x_k^p y_k^p, \quad v_k = y_k^{-p},$$

bude $u_k v_k = x_k^p$, $u_k^{p^*} = x_k y_k$ a $v_k^{q^*} = y_k^q$ a (III.9) plyne z (III. 10) ekvivalentními úpravami.

Úloha III.1. Pro *komplexní* vektory **x**, **y** má Hölderova nerovnost tvar

$$\text{(III.11)} \qquad |\sum_{k=1}^{n} x_k y_k| \leqq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q}$$

$\left(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Dokažte (III.11) pomocí (III.6). Platí pro $p < 1$ $(p \neq 0)$ opět obrácená nerovnost podobně jako v (III.9)?

V Hölderově nerovnosti (III.6) a (III.9) vystupují dva parametry p a q, vázané vztahem (III.4). Chceme-li Hölderovu nerovnost (III.6) zapsat pomocí jediného parametru, stačí dosadit za q výraz $\frac{p}{p-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)})^{(p-1)/p}.$$

Po umocnění odtud máme nerovnost

$$(\text{III.12}) \qquad \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)^p \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)}\Big)^{p-1},$$

která platí pro $p > 1$ a je zobecněním Cauchyovy nerovnosti v tvaru (II.1). — Pro $p < 1$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ je situace poněkud složitější: Hölderovu nerovnost (III.9) lze opět zapsat pomocí jediného parametru ve tvaru

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)}\Big)^{(p-1)/p},$$

ale nyní už je třeba rozlišovat:

(a) Je-li $0 < p < 1$, plyne z (*) umocněním nerovnost

$$(\text{III.12a}) \qquad \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)^p \geqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)}\Big)^{p-1},$$

která je protějškem nerovnosti (III.12).

(b) Je-li $p < 0$, změní se při „umocnění" nerovnosti (*) znaménko nerovnosti a dostaneme opět nerovnost (III.12).

Lze tedy shrnout: Nerovnost (III.12) platí pro $p > 1$ a pro $p < 0$; pro $0 < p < 1$ platí obrácená nerovnost (III.12a).

Poznámka III.4. Cauchyovu nerovnost lze geometricky interpretovat; u Hölderovy nerovnosti to není tak jednoduché. Zachováme-li označení z kapitoly II, můžeme pomocí nerovností (III.6) a (III.9) odvodit tento vztah, který platí pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, $p > 1$ a $r < 1$:

$$\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^r\right)^{1/r} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}} \leqq \cos \widehat{\mathbf{xy}} \leqq$$

$$\leqq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}} .$$

Úloha III.2. Velice užitečná je nerovnost

$$|u + v|^p \leqq 2^{p-1}(|u|^p + |v|^p) , \tag{III.13}$$

která platí pro komplexní čísla u, v a pro $p \geqq 1$. Dokažte tuto nerovnost.

Úloha III.3. Zvolte v (III.6) a (III.9) $\mathbf{y} = (1, 1, \ldots, 1)$ a zapište takto vzniklé nerovnosti.

Úloha III.4. Zvolte v (III.9) $p = \frac{1}{2}$ a zapište odpovídající dolní odhad pro $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Úloha III.5. Jak vypadají Hölderovy nerovnosti, volíme-li $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a $\mathbf{y} = \frac{1}{\mathbf{x}}$? Uvědomte si, že jde o zobecnění úlohy z příkladu I.1 resp. II.2. Zvolte speciálně $p = \frac{1}{2}$.

Úloha III.6. Dokažte, že pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ a $p \geqq 1$ platí

$$\text{(III.14)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^p}{y_k^{p-1}} \geqq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p}{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^{p-1}}$$

a že rovnost zde nastává pro $p > 1$ tehdy a jen tehdy, je-li $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. (Pro $p = 2$ jsme tuto nerovnost vyšetřovali v úloze II.5.)

Úloha III.7. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$. Dokažte, že nerovnost (III.14) platí také pro $p < 0$, zatímco pro $0 < p < 1$ platí obrácená nerovnost.

Budiž $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$. Zvolíme-li v (III.5) $a = x_k$, $b = y_k$, dostaneme n nerovností $x_k y_k \leqq \frac{1}{p} x_k^p + \frac{1}{q} y_k^q$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a jejich sečtením pak nerovnost

$$\text{(III.15)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} y_k^q$$

$$\left(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Poznámka III.5. V řadě matematických problémů je třeba odhadnout výraz $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, ale tak, aby se zdůraznil podíl, kterým přispívá např. vektor $\mathbf{x}$, a aby se naopak potlačil podíl, kterým přispívá vektor $\mathbf{y}$. Pak se někdy hodí odhad (III.15), v němž provedeme tento obrat: Je-li $\varepsilon > 0$, je

$$x_k y_k = (\varepsilon x_k)\left(\frac{y_k}{\varepsilon}\right)$$

a z (III.15), kde ovšem uvažujeme εx_k místo x_k a $\frac{y_k}{\varepsilon}$ místo y_k, dostáváme

$$\text{(III.16)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \varepsilon^p \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^q \sum_{k=1}^{n} y_k^q .$$

Je-li nyní ε dosti velké číslo, bude $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^q$ dosti malé a druhý sčítanec vpravo v (III.16) bude malý, takže příspěvek vektoru **y** bude malý ve srovnání s příspěvkem vektoru **x**; pro $\varepsilon > 0$ dosti malé tomu bude naopak. Připomeňme, že tento „trik" jsme už použili, ovšem pro $p = 2$, v třetím důkazu věty II.1.

Poznámka III.6. Nerovnost (III.15) lze ovšem „vylepšit" Mezi její pravou a levou stranu lze vložit výraz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q},$$

tj. platí

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q} \leqq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} y_k^q .$$

První nerovnost je Hölderova nerovnost (III.6), druhou nerovnost dostaneme z (III.5), položíme-li tam $a = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}$, $b = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}$. — Poslední nerovnost současně říká, že odhad výrazu $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ pomocí (III.15) je „horší" než odhad pomocí Hölderovy nerovnosti.

Uvedeme nyní několik příkladů použití Hölderovy nerovnosti (III.6).

Příklad III.1. Nechť je $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$; dále zvolme čísla α a β tak, aby bylo $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Pak je

$$x_k y_k = (x_k^\alpha y_k^\beta)\,(x_k^{1-\alpha} y_k^{1-\beta})\,.$$

Použijeme-li Hölderovy nerovnosti (III.6) pro vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, kde $u_k = x_k^\alpha y_k^\beta$ a $v_k = x_k^{1-\alpha} y_k^{1-\beta}$, bude $u_k v_k = x_k y_k$ a

$$\text{(III.17)} \qquad \sum_{k=1}^n x_k y_k \leqq \left(\sum_{k=1}^n x_k^{\alpha p} y_k^{\beta p}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n x_k^{(1-\alpha)q} y_n^{(1-\beta)q}\right)^{1/q}.$$

Každý z obou činitelů na pravé straně lze opět odhadnout pomocí Hölderovy nerovnosti: u prvního volíme $r > 1$ a $s > 1$ tak, aby bylo $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, a užijeme (III.6) s r místo p, s s místo q, s $\mathbf{x}^{\alpha p}$ místo $\mathbf{x}$ a s $\mathbf{y}^{\beta p}$ místo $\mathbf{y}$ a máme

$$\sum_{k=1}^n x_k^{\alpha p} y_k^{\beta p} \leqq \left(\sum_{k=1}^n x_k^{\alpha p r}\right)^{1/r} \left(\sum_{k=1}^n y_k^{\beta p s}\right)^{1/s};$$

podobně bude pro druhý činitel

$$\sum_{k=1}^n x_k^{(1-\alpha)q} y_k^{(1-\beta)q} \leqq \left(\sum_{k=1}^n x_k^{(1-\alpha)q\varrho}\right)^{1/\varrho} \left(\sum_{k=1}^n y_k^{(1-\beta)q\sigma}\right)^{1/\sigma},$$

kde je $\varrho > 1$, $\sigma > 1$ a $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\sigma} = 1$. Obě poslední nerovnosti spolu s (III.17) dávají odhad

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqq \left(\sum_{k=1}^n x_k^{\alpha p r}\right)^{1/rp} \left(\sum_{k=1}^n x_k^{(1-\alpha)q\varrho}\right)^{1/\varrho q} \left(\sum_{k=1}^n y_k^{\beta p s}\right)^{1/ps} .$$
$$. \left(\sum_{k=1}^n y_k^{(1-\beta)q\sigma}\right)^{1/\sigma q}.$$

Zvolme speciálně $\beta = 1 - \alpha$, $p = q = 2$, $r = \frac{1}{\alpha}$

$\left(\text{a tedy } s = \frac{1}{1-\alpha}\right)$ a $\varrho = \frac{1}{\beta}\left(\text{a tedy } \sigma = \frac{1}{1-\beta}\right)$; přitom je podle předpokladu $0 < \alpha < 1$. Pak je $\alpha pr = (1-\alpha)q\varrho = \beta ps = (1-\beta)q\sigma = 2$ a máme

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^{2\alpha} y_k^{(2-2\alpha)})^{1/2} (\sum_{k=1}^{n} x_k^{(2-2\alpha)} y_k^{2\alpha})^{1/2} \leqq$$

$$\leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\alpha/2} (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{(1-\alpha)/2} (\sum_{k=1}^{n} y_k^2)^{(1-\alpha)/2} (\sum_{k=1}^{n} y_k^2)^{\alpha/2}$$

[první nerovnost je nerovnost (III.17)]. Po umocnění dostáváme vztah

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^{2\alpha} y_k^{2-2\alpha}) (\sum_{k=1}^{n} x_k^{2-2\alpha} y_k^{2\alpha}) \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^2) (\sum_{k=1}^{n} y_k^2) .$$

Nerovnost mezi prvním a třetím členem je Cauchyova nerovnost (II.1). Prostřední výraz je tedy jedním z výrazů, které můžeme vložit mezi krajní výrazy v Cauchyově nerovnosti a o nichž hovoříme v poznámce II.3. Poznamenejme ještě, že prostřední výraz se mění se změnou parametru α v intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Příklad III.2. Buďte a, b, c, A, B, C nezáporná čísla, $p > 1$, a nechť platí

(III.18) $$a^{1/(p-1)} + c^{1/(p-1)} \leqq b^{1/(p-1)}, \quad A^{1/p} + C^{1/p} \geqq B^{1/p}.$$

Pak platí

(III.19) $$Abc - Bca + Cab \geqq 0 .$$

Důkaz: Užijeme Hölderovy nerovnosti (III.6) pro $n = 2$, přičemž zvolíme

$$x_1 = (Ac)^{1/p} , \; x_2 = (Ca)^{1/p} , \; y_1 = a^{1/p} , \; y_2 = c^{1/p} .$$

Z nerovnosti

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leqq (x_1^p + x_2^p)^{1/p} (y_1^{p/(p-1)} + y_2^{p/(p-1)})^{(p-1)/p}$$

máme

$$(Aac)^{1/p} + (Cac)^{1/p} \leqq (Ac + Ca)^{1/p} (a^{1/(p-1)} + c^{1/(p-1)})^{(p-1)/p}.$$

Užijeme-li zde nerovností (III.18), dostaneme

$$(ac)^{1/p} B^{1/p} \leqq (Ac + Ca)^{1/p} b^{1/p}$$

a odtud už plyne (III.19).

Příklad III.3. Buďte x, y, z kladná čísla, α reálné číslo. Pak platí tzv. *Schurova nerovnost*

$$\text{(III.20)} \qquad x^\alpha(x - y)(x - z) + y^\alpha(y - x)(y - z) + \\ + z^\alpha(z - x)(z - y) \geqq 0 .$$

Tato nerovnost je speciálním případem nerovnosti (III.19): Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $0 < x \leqq y \leqq z$. Zvolíme-li pak $p = 2$, $a = z - y$, $b = z - x$, $c = y - x$, bude platit první z nerovností (III.18) (dokonce nastane rovnost); zvolíme-li $A = x^\alpha$, $B = y^\alpha$, $C = z^\alpha$, bude platit i druhá z nerovností (III.18) (pro $\beta \geqq 0$ je $z^\beta \geqq y^\beta$, pro $\beta < 0$ je $x^\beta \geqq y^\beta$, a pro všechna reálná α je tedy $x^{\alpha/2} + z^{\alpha/2} \geqq y^{\alpha/2}$).

Příklad III.4. Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq \mathbf{0}$, $p > 1$, a označme $A_k = \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Pak platí

$$\text{(III.21)} \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k^p \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{n} x_k^p .$$

Důkaz: Protože je $x_k = kA_k - (k-1)A_{k-1}$ (klademe $A_0 = 0$), je

$$A_k^p - \frac{p}{p-1} A_k^{p-1} x_k =$$

$$= A_k^p - \frac{p}{p-1} A_k^{p-1} [kA_k - (k-1) A_{k-1}] =$$

$$= A_k^p \left(1 - \frac{kp}{p-1}\right) + \frac{(k-1)p}{p-1} A_k^{p-1} A_{k-1}.$$

Zvolíme-li v nerovnosti (III.5) $a = A_{k-1}$ a $b = A_k^{p-1}$, bude

$$A_{k-1} A_k^{p-1} \leqq \frac{1}{p} A_{k-1}^p + \frac{p-1}{p} (A_k^{p-1})^{p/(p-1)} =$$

$$= \frac{1}{p} A_{k-1}^p + \frac{p-1}{p} A_k^p$$

a odtud máme

$$A_k^p - \frac{p}{p-1} A_k^{p-1} x_k \leqq$$

$$\leqq A_k^p \frac{p-1-kp}{p-1} + \frac{(k-1)p}{p-1} \left(\frac{1}{p} A_{k-1}^p + \frac{p-1}{p} A_k^p\right) =$$

$$= \frac{1}{p-1} [(k-1) A_{k-1}^p - kA_k^p] .$$

Zde je $k = 1, 2, \ldots, n$, tj. máme n nerovností, a jejich sečtením dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^p - \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} x_k \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{p-1} [-1 . A_1^p + 1 . A_1^p - 2 . A_2^p + 2 . A_2^p - 3A_3^p +$$

$$+ \ldots + (n-1) A_{n-1}^p - nA_n^p] = - \frac{nA_n^p}{p-1} \leqq 0$$

čili

$$\text{(III.22)} \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k^p \leqq \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} x_k \, ;$$

je zřejmé, že rovnost zde platí právě tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Součet na pravé straně v (III.22) odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti (III.6), v níž položíme $y_k = A_k^{p-1}$. Pak je $y_k^q = (A_k^{p-1})^{p/(p-1)} = A_k^p$ a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} x_k \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^p \Big)^{1-1/p}$$

čili z (III.22) máme

$$\text{(III.23)} \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k^p \leqq \frac{p}{p-1} \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^p \Big)^{1-1/p} .$$

Je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, nerovnost (III.21) zřejmě platí, neboť také $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$. Je-li alespoň jedno z čísel x_i kladné, je $A = \sum_{k=1}^{n} A_k^p > 0$ a (III.21) plyne z (III.23) ekvivalentními úpravami: vynásobením nerovnosti (III.23) číslem $A^{-1+1/p}$ a umocněním.

Je-li číslo $A > 0$ (tj. je-li $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), je nerovnost v (III.21) ostrá; konstanta $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ je však nejlepší možná.

Hölderovu nerovnost lze zapsat ještě v jiném tvaru: Označíme-li $x_k^p = a_k$, $y_k^q = b_k$, bude $x_k = a_k^{1/p}$, $y_k = b_k^{1/q}$ a po dosazení do (III.6) máme nerovnost

$$\text{(III.24)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^{1/p} b_k^{1/q} \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k \Big)^{1/q} ,$$

která platí pro $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$; rovnost zde nastává tehdy a jen tehdy, jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ úměrné.

Označíme-li ještě $\dfrac{1}{p} = \alpha$, $\dfrac{1}{q} = \beta$, dostáváme vzorec

$$\text{(III.25)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha b_k^\beta \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^\beta,$$

který platí pro $\boldsymbol{a} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$.

S Hölderovou nerovností ve tvaru (III.25) se pracuje někdy pohodlněji než s tvarem (III.6). Ukazuje to i následující úloha.

Úloha III.8. Dokažte vzorec (III.25) indukcí. Dokažte analogicky i nerovnost (III.6) a porovnejte pracnost a přehlednost obou výpočtů.

Hölderova nerovnost se týká součinu dvou vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$; je to vidět např. ze zápisu (III.8). Lze ji však zobecnit i pro součin většího počtu vektorů:

Věta III.4. *Budte* $\boldsymbol{x}_{(i)} = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) \geqq \boldsymbol{0}$ *vektory*, $p_i > 1$ *čísla* $(i = 1, 2, \ldots, m)$ a *nechť je*

$$\text{(III.26)} \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1\,.$$

Pak platí

(III.27)

$$\sum_{k=1}^{n} x_{1k}x_{2k} \ldots x_{mk} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_{1k}^{p_1}\right)^{1/p_1} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{2k}^{p_2}\right)^{1/p_2} \ldots \left(\sum_{k=1}^{n} x_{mk}^{p_m}\right)^{1/p_m}.$$

Hölderovu nerovnost (III.6) dostaneme, volíme-li $m = 2$, $\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{y}$, $p_1 = p$, $p_2 = q$.

Nerovnost (III.27) lze zapsat ve tvaru

$$A_n(\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(2)} \dots \boldsymbol{x}_{(m)}) \leqq$$
$$\leqq [A_n(\boldsymbol{x}_{(1)}^{p_1})]^{1/p_1} [A_n(\boldsymbol{x}_{(2)}^{p_2})]^{1/p_2} \dots [A_n(\boldsymbol{x}_{(m)}^{p_m})]^{1/p_m}.$$

Tato nerovnost je však stále dosti nepřehledná, a právě zde vyniknou výhody zápisu Hölderovy nerovnosti ve tvaru (III.25): Zavedeme-li totiž vektory $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\dots$, $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ předpisy

$$\boldsymbol{x}_{(1)} = \boldsymbol{a}^{1/p_1} \text{ (tj. } x_{1k} = a_k^{1/p_1}), \ \boldsymbol{x}_{(2)} = \boldsymbol{b}^{1/p_2}, \ \dots, \ \boldsymbol{x}_{(m)} = \boldsymbol{d}^{1/p_m},$$

a označíme-li ještě

$$\alpha = \frac{1}{p_1}, \ \beta = \frac{1}{p_2}, \ \dots, \ \delta = \frac{1}{p_m},$$

bude $\alpha + \beta + \dots + \delta = 1$ a z (III.27) dostáváme

$$\text{(III.28)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha b_k^\beta \dots d_k^\delta \leqq (\sum_{k=1}^{n} a_k)^\alpha (\sum_{k=1}^{n} b_k)^\beta \dots (\sum_{k=1}^{n} d_k)^\delta .$$

Důkaz věty III.4 lze provést indukcí přes m. Nebudeme zde zabíhat do detailů; ukážeme jen na tvaru (III.28), jak lze od $m = 2$ přejít k $m = 3$. Čtenář pak už důkaz snadno dokončí.

Předpokládejme tedy, že platí (III.27) resp. (III.28) pro $m = 2$; ukážeme, že pro $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$, a pro $\boldsymbol{a} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c} \geqq \boldsymbol{0}$ je

$$\text{(III.29)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha b_k^\beta c_k^\gamma \leqq (\sum_{k=1}^{n} a_k)^\alpha (\sum_{k=1}^{n} b_k)^\beta (\sum_{k=1}^{n} c_k)^\gamma .$$

Označme $\alpha + \beta = \varepsilon$; pak je $\varepsilon + \gamma = 1$ a tedy $0 < \varepsilon < 1$. Užijeme-li nerovnosti (III.25) [což je (III.28) pro $m = 2$!] s ε místo α, s γ místo β, s $\boldsymbol{a}^{\alpha/\varepsilon}\boldsymbol{b}^{\beta/\varepsilon}$ místo $\boldsymbol{a}$ a s $\boldsymbol{c}$ místo $\boldsymbol{b}$, máme

(III.30)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha b_k^\beta c_k^\gamma = \sum_{k=1}^{n} (a_k^{\alpha/\varepsilon} b_k^{\beta/\varepsilon})^\varepsilon c_k^\gamma \leqq (\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha/\varepsilon} b_k^{\beta/\varepsilon})^\varepsilon (\sum_{k=1}^{n} c_k)^\gamma .$$

První činitel v posledním výrazu opět odhadneme pomocí (III.25), kde ovšem místo α a β užijeme α/ε a β/ε; je $\dfrac{\alpha}{\varepsilon} + \dfrac{\beta}{\varepsilon} = 1$, neboť $\alpha + \beta = \varepsilon$:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha/\varepsilon} b_k^{\beta/\varepsilon})^\varepsilon \leqq [(\sum_{k=1}^{n} a_k)^{\alpha/\varepsilon} (\sum_{k=1}^{n} b_k)^{\beta/\varepsilon}]^\varepsilon = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^\alpha (\sum_{k=1}^{n} b_k)^\beta .$$

Odtud a z (III.30) máme (III.29).

Příklad III.5. Budiž $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$. Pak platí

(III.31) $\quad (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geqq (1 + G_n(\boldsymbol{x}))^n$;

rovnost nastává tehdy a jen tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Důkaz: Použijeme vzorce (III.28), a to pro n dvoučlenných vektorů: $\boldsymbol{a} = (1, x_1)$, $\boldsymbol{b} = (1, x_2)$, ..., $\boldsymbol{d} = (1, x_n)$, a pro $\alpha = \beta = \ldots = \delta = \dfrac{1}{n}$. Pak má (III.28) tvar

$$1^{1/n}1^{1/n} \ldots 1^{1/n} + x_1^{1/n}x_2^{1/n} \ldots x_n^{1/n} \leqq$$
$$\leqq (1 + x_1)^{1/n} (1 + x_2)^{1/n} \ldots (1 + x_n)^{1/n},$$

odkud plyne (III.31) umocněním. Důkaz tvrzení o rovnosti přenecháváme čtenáři.

Úloha III.9. Dokažte nerovnost (III.31) pomocí nerovnosti (I.40).

Nerovnost (III.31) lze zapsat též takto:

$$[G_n(\mathbf{1} + \mathbf{x})]^n \geqq [1 + G_n(\mathbf{x})]^n \, .$$

Porovnáme-li příklad III.5 s příkladem I.2, zjistíme, že jsme ukázali

$$[1 + G_n(\mathbf{x})]^n \leqq (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \leqq$$
$$\leqq [1 + A_n(\mathbf{x})]^n \, .$$

Úloha III.10. Nerovnost (III.27) je zobecněním nerovnosti (III.6). Lze analogicky zobecnit také nerovnost (III.9) pro více než dva vektory?

Se jménem německého matematika Hermanna Minkowského (1864—1909) jsme se setkali už v kapitole II. Je po něm nazvána nerovnost (III.32), kterou odvodíme z Hölderovy nerovnosti:

Věta III.5. *Budiž* $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ *a* $p \geqq 1$. *Pak platí*

$$\text{(III.32)} \qquad \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right]^{1/p} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p} ;$$

rovnost zde nastává pro $p > 1$ *tehdy a jen tehdy, jsou-li vektory* $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$ *úměrné. — Je-li* $0 < p < 1$ *nebo je-li* $p < 0$ *a* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, *platí obrácená nerovnost.*

Důkaz: Využijeme identity

$$(x_k + y_k)^p = (x_k + y_k)(x_k + y_k)^{p-1} =$$
$$= x_k(x_k + y_k)^{p-1} + y_k(x_k + y_k)^{p-1} \, ,$$

která platí pro $k = 1, 2, \dots, n$. Sečtením všech těchto identit máme

(III.33)

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{p-1}.$$

Pro $p > 1$ odhadneme oba sčítance vpravo pomocí Hölderovy nerovnosti:

(III.34)

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{p-1} \leqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} [\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{(p-1)q}]^{1/q},$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{p-1} \leqq (\sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{1/p} [\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{(p-1)q}]^{1/q}.$$

Ale $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a tedy je $(p - 1)q = p$. Z (III.33) a (III.34) nyní plyne

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leqq [(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{1/p}] [\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p]^{1/q}.$$

Je-li číslo $X = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p$ rovno nule, nerovnost (III.32) zřejmě platí; je-li $X > 0$, můžeme poslední nerovnost dělit číslem $X^{1/q}$ a dostáváme (III.32), neboť vlevo pak bude $X . X^{-1/q} = X^{1-1/q} = X^{1/p}$.

Rovnost v (III.32) nastane tehdy a jen tehdy, nastane-li rovnost v obou nerovnostech (III.34), tedy podle věty III.2 tehdy a jen tehdy, bude-li vektor $\mathbf{x}^p$ úměrný vektoru $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^{(p-1)q}$ a současně vektor $\mathbf{y}^p$ úměrný témuž vektoru. Pak však je $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$.

Pro $p = 1$ platí v (III.32) vždy rovnost. Pro $p < 1$ ($p \neq 0$) užijeme věty III.3: Nerovnosti v (III.34) je pak třeba obrátit a z identity (III.33) dostaneme obrácenou nerovnost v (III.32).

Nerovnost (III.32) můžeme po zřejmé úpravě zapsat takto:

(III.35)
$$[A_n((\mathbf{x}+\mathbf{y})^p)]^{1/p} \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{y}^p)]^{1/p} \ (p \geqq 1)\,.$$

V kapitole I jsme odvodili jistou analogii této nerovnosti pro geometrické průměry — viz (I.40). Metodu, které jsme tam použili (tj. vlastně větu I.2), lze upravit tak, že dostaneme jiný důkaz nerovnosti (III.35) a tedy jiný důkaz Minkowského nerovnosti (III.32).

Věta III.6. *Budiž* $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \geqq \mathbf{0}$, $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ *a nechť je* $A_n(\mathbf{z}^q) = 1$. *Pak je pro každý vektor* $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$

$$A_n(\mathbf{x}\mathbf{z}) \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p}\,. \tag{III.36}$$

Je-li $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ *takový vektor, že* $A_n(\mathbf{x}^p) > 0$, *existuje vektor* $\mathbf{z}$ *(závislý na* $\mathbf{x}$*) tak, že je* $A_n(\mathbf{z}^q) = 1$ *a že v* (III.36) *platí rovnost.*

Důkaz: Z Hölderovy nerovnosti ve tvaru (III.8) plyne, že $A_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{z}) \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p}[A_n(\mathbf{z}^q)]^{1/q}$, odtud plyne (III.36), neboť $A_n(\mathbf{z}^q) = 1$. — Je-li $\mathbf{x}$ daný vektor, pro který je číslo $A = A_n(\mathbf{x}^p)$ kladné, zvolíme $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ takto:

$$z_i^q = \frac{1}{A}\, x_i^p\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{III.37}$$

Pak je $A_n(\mathbf{z}^q) = \dfrac{1}{A} A_n(\mathbf{x}^p) = 1$ a platí (III.36). To je však Hölderova nerovnost, a protože (III.37) znamená, že $\mathbf{z}^q \sim \mathbf{x}^p$, platí v ní podle věty III.2 rovnost.

Pomocí věty III.6 nyní snadno dokážeme (III.35): Budiž $\mathbf{z}^*$ vektor, který je podle věty III.6 přiřazen vektoru $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Pak je

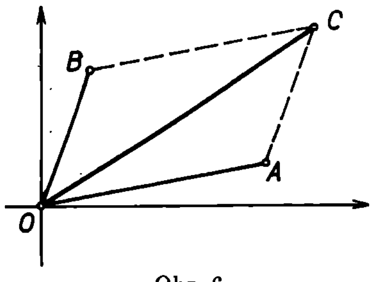
$$[A_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})^p)]^{1/p} = A_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z}^*) = A_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}^*) + \\ + A_n(\mathbf{y}.\mathbf{z}^*) \leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{y}^p)]^{1/p} ;$$

přitom jsme použili vzorce (I.37) (u druhé rovnosti) a vzorce (III.36) (v poslední nerovnosti).

Úloha III.11. Dokažte Minkowského nerovnost (III.32) pro $n = 3$ za předpokladu, že platí pro $n = 2$.

Poznámka III.7. Minkowského nerovnosti lze dát geometrický význam: Uvažujme $n = 2$ a $p = 2$; pak má (III.32) tvar

$$\text{(III.38)} \quad \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leqq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_1^2 + y_2^2} .$$



Obr. 6

Budiž A bod o souřadnicích $[x_1, x_2]$, B bod o souřadnicích $[y_1, y_2]$ a C bod o souřadnicích $[x_1 + y_1, x_2 + y_2]$ (viz obr. 6). Protože pro bod $[a_1, a_2]$ v rovině je $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

vzdálenost tohoto bodu od počátku, lze nerovnost (III.39) zapsat takto:

$$\overline{OC} \leqq \overline{OA} + \overline{OB} .$$

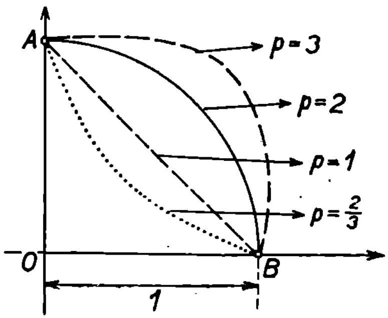
Ale $\overline{OB} = \overline{AC}$, takže máme nerovnost

$$\overline{OC} \leqq \overline{OA} + \overline{AC} ,$$

kterou lze vyjádřit takto: *Součet dvou stran v trojúhelníku není menší než strana třetí.* Nerovnost (III.38) — čili Minkowského nerovnost pro $p = 2$ — tedy není nic jiného než tzv. *trojúhelníková nerovnost.* — A podobný význam má Minkowského nerovnost i pro ostatní $p \geqq 1$: Výraz

$$\text{(III.39)} \qquad (x_1^p + x_2^p)^{1/p} = v_p(x_1, x_2)$$

lze považovat za jakousi „deformovanou" vzdálenost bodu o souřadnicích $[x_1, x_2]$ v rovině od počátku a Minkowského nerovnost pak říká, že trojúhelníková nerovnost platí i tehdy, měříme-li délky stran trojúhelníka pomocí této „deformované" vzdálenosti. Pro srovnání:



Obr. 7

Je-li $p = 2$, tvoří body v prvním kvadrantu, jejichž vzdálenost $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ od počátku je rovna jedné, čtvrtkružnici; pro $p = 1$ je „vzdálenost" dána číslem $x_1 + x_2$ a body o „vzdálenosti" $v_1 = 1$ od počátku vyplní úsečku $\overline{AB}$ na obr. 7; konečně pro $p = 3$ je „vzdálenost" dána číslem $\sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$ a body o jednotkové „vzdálenosti" v_3 od počátku vyplní čerchovaný oblouk $\widehat{AB}$.

Nerovnost (III.9) říká, že při měření pomocí vzdáleností $v_p(x_1, x_2)$ s $p < 1$ trojúhelníková nerovnost neplatí, naopak, součet dvou stran v trojúhelníku je *menší* než strana třetí. Pro $p = \frac{2}{3}$ je na obr. 7 tečkovaně vyznačena množina těch bodů, pro které je $v_{2/3}(x_1, x_2) = 1$ — je to část tzv. *astroidy*.

Úloha III.12. Dokažte, že pro komplexní vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ a pro $p \geqq 1$ platí Minkowského nerovnost ve tvaru

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Úloha III.13. Rozšiřte Minkovského nerovnost na případ součtu více než dvou vektorů.

Z Hölderovy nerovnosti lze odvodit, jak se chová výraz $[A_n(\boldsymbol{x}^p)]^{1/p}$ pro pevný vektor $\boldsymbol{x}$ při měnícím se p.

Buďte tedy r, s čísla, $0 < r < s$, a $\boldsymbol{x}$ vektor, $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$. Je $r = s\alpha$, kde $0 < \alpha < 1$. Užijeme-li nyní nerovnosti (III.25), kde položíme $a_k = x_k^s$, $b_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a $\beta = 1 - \alpha$, máme

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^r = \sum_{k=1}^{n} (x_k^s)^\alpha \,.\, 1^{1-\alpha} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^s\right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^{1-\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^s\right)^\alpha .\, n^{1-\alpha}$$

neboli
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^r \leqq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^s\right)^\alpha .$$
Protože $\alpha = \frac{r}{s}$, plyne z poslední nerovnosti umocněním na $\frac{1}{r}$ vztah

(III.40) $$[A_n(\boldsymbol{x}^r)]^{1/r} \leqq [A_n(\boldsymbol{x}^s)]^{1/s} \quad \text{pro } 0 < r < s.$$

Poznámka III.8. Na rozdíl od nerovnosti (III.40) nemusí platit nerovnost
$$A_n(\boldsymbol{x}^r) \leqq A_n(\boldsymbol{x}^s) \quad \text{pro} \quad 0 < r < s :$$
Stačí zvolit $n = 2$, $r = 1$, $s = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$; pak je $A_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4}$ a $A_2(\boldsymbol{x}^2) = \frac{1}{8} < A_2(\boldsymbol{x})$. Pro $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ je ovšem $A_2(\boldsymbol{x}) = 1$ a $A_2(\boldsymbol{x}^2) = 2 > A_2(\boldsymbol{x})$.

Označme

(III.41) $$S_n(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n ;$$

je tedy $S_n(\boldsymbol{x}) = nA_n(\boldsymbol{x})$. Výraz $S_n(\boldsymbol{x}^p)$ se pro pevné $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ chová zcela jinak než výraz $A_n(\boldsymbol{x}^p)$: Pro $0 < r < s$ platí

(III.42) $$[S_n(\boldsymbol{x}^r)]^{1/r} \geqq [S(\boldsymbol{x}^s)]^{1/s} .$$

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že vektor $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ je zvolen tak, aby platilo $S_n(\boldsymbol{x}^r) = 1$. Pak musí být $x_k \leqq 1$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, a tedy je
$$x_k^s \leqq x_k^r \quad (k = 1, 2, \ldots, n) .$$
Sečteme-li všechny tyto nerovnosti, máme $S_n(\boldsymbol{x}^s) \leqq$ $\leqq S_n(\boldsymbol{x}^r) = 1$ a odtud plyne (III.42) odmocněním. —

Budiž nyní $\boldsymbol{x}$ takový vektor, že $S_n(\boldsymbol{x}^r) > 0$, a definujme vektor $\boldsymbol{y}$ takto:

$$y_i = \frac{x_i}{[S_n(\boldsymbol{x}^r)]^{1/r}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Pak je $S_n(\boldsymbol{y}^r) = 1$ a podle první části důkazu platí (III.42) pro vektor $\boldsymbol{y}$, tj. $[S_n(\boldsymbol{y}^s)]^{1/s} \leqq 1$; současně však je $1 \geqq [S_n(\boldsymbol{y}^s)]^{1/s} = \dfrac{1}{[S_n(\boldsymbol{x}^r)]^{1/r}}\,[S_n(\boldsymbol{x}^s)]^{1/s}$, a odtud plyne (III.42).

Úloha III.14. Ukažte, že pro některé vektory $\boldsymbol{x}$ je $S_n(\boldsymbol{x}^r) \geqq S_n(\boldsymbol{x}^s)$, kdežto pro jiné je $S_n(\boldsymbol{x}^r) \leqq S_n(\boldsymbol{x}^s)$ $(0 < r < s)$.

Předcházející výsledky ukazují, že u výrazů z (III.40) a (III.42) je důležitý exponent $\dfrac{1}{r}$ resp. $\dfrac{1}{s}$. Lze se nyní ptát, co se stane, když v (III.32) „zapomeneme" na exponenty $\dfrac{1}{p}$. Pak se tato nerovnost obrátí:

Budiž $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$ a $p \geqq 1$. Pak platí

$$\text{(III.43)} \qquad \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \geqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \sum_{k=1}^{n} y_k^p\,;$$

pro $0 < p < 1$ platí obrácená nerovnost

$$\text{(III.44)} \qquad \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \sum_{k=1}^{n} y_k^p\,.$$

Důkaz tohoto tvrzení plyne z (III.42): Zvolme tam $n = 2$ a místo dvojice x_1, x_2 uvažujme dvojici x_k, y_k; pak má tato nerovnost tvar $(x_k^r + y_k^r)^{1/r} \geqq (x_k^s + y_k^s)^{1/s}$. Zvolíme-li ještě (pro $p > 1$) $r = 1$ a $s = p$, máme

$$x_k + y_k \geqq (x_k^p + y_k^p)^{1/p} \quad \text{čili} \quad (x_k + y_k)^p \geqq x_k^p + y_k^p$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Sečtením těchto n nerovností dostáváme (III.43). — Případ $p < 1$ se dokáže analogicky.

Současně je vidět, že tohoto postupu lze užít i pro více než dva vektory, takže pro $p \geqq 1$ např. platí:

$$A_n([\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}]^p) \geqq A_n(\mathbf{x}^p) + A_n(\mathbf{y}^p) + A_n(\mathbf{z}^p)\,.$$

V Minkowského nerovnosti (III.32) tedy nelze beztrestně vynechat exponenty $\frac{1}{p}$. Pokud chceme vzorec „bez odmocnin“ se stejným znaménkem nerovnosti jako v (III.32), musíme použít úlohy III.2: Položíme-li v (III.13) $u = x_k$ a $v = y_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), dostaneme n nerovností $(x_k + y_k)^p \leqq 2^{p-1}(x_k^p + y_k^p)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) a po jejich sečtení máme žádanou nerovnost:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leqq 2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p + \sum_{k=1}^{n} y_k^p \right)$$

pro $p > 1$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$.

Bez „odmocňování“ se obejdeme i v tzv. *Beckenbachově nerovnosti*, o níž pojednává úloha III.16. Nejprve však budeme potřebovat tvrzení, které je obsahem následující úlohy.

Úloha III.15. Budiž $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dokažte, že pro všechny vektory $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ takové, že $S_n(\mathbf{z}^q) = 1$, platí

(III.45) $$[S_n)\mathbf{x}\mathbf{z})]^p \leqq S_n(\mathbf{x}^p)\,,$$

a že existuje vektor $\mathbf{z}^*$ (závislý na $\mathbf{x}$) tak, že v (III.45) platí rovnost.

Úloha III.16. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, $1 < p \leqq 2$. Dokažte, že pro $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ platí nerovnost

$$\text{(III.46)} \quad \frac{[S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z})]^p}{S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})^{p-1})} \leqq \frac{[S_n(\mathbf{x}\mathbf{z})]^p}{S_n(\mathbf{x}^{p-1})} + \frac{[S_n(\mathbf{y}\mathbf{z})]^p}{S_n(\mathbf{y}^{p-1})},$$

a pomocí (III.46) dokažte Beckenbachovu nerovnost

$$\text{(III.47)} \quad \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{p-1}} \leqq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{p-1}} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^{p-1}}.$$

Proč zde předpokládáme, že $1 < p \leqq 2$?

Úloha III.17. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$, $1 < p \leqq 2$. Dokažte, že

$$\text{(III.48)} \quad \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{p-1}} \geqq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p + \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{p-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^{p-1}};$$

porovnejte tento odhad s odhadem (III.47).

Úloha III.18. Pro $0 < p \leqq 1$ se v (III.47) změní znaménko nerovnosti v opačné. Dokažte to.

V kapitole II jsme odvodili nerovnost, která v jistém smyslu zobecňovala Cauchyovu nerovnost — místo součtů $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ jsme uvažovali rozdíly $x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots - x_ny_n$ (věta II.2). Protože Cauchyova nerovnost je speciálním případem Hölderovy nerovnosti (dostaneme ji pro $p = 2$), lze očekávat, že nějaké podobné tvrzení bude platit i pro obecné p.

Příklad III.6. Buďte $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$ vektory, $x_0 \geqq 0$, $y_0 \geqq 0$ čísla, $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ a nechť je splněna alespoň jedna z podmínek

$$x_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p\,, \quad y_0^q \geqq \sum_{k=1}^{n} y_k^q\,. \tag{III.49}$$

Pak platí

(III.50)
$$x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq \Big(x_0^p - \sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{1/p} \Big(y_0^q - \sum_{k=1}^{n} y_k^q\Big)^{1/q}.$$

Rovnost zde nastane tehdy a jen tehdy, jsou-li vektory $\tilde{\boldsymbol{x}}^p$ a $\tilde{\boldsymbol{y}}^q$ úměrné [je $\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{\boldsymbol{y}} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$].

Důkaz: Označme $X = \big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\big)^{1/p}$, $Y = \big(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\big)^{1/q}$. Podmínky (III.49) můžeme zapsat takto:

$$x_0 \geqq X\,, \quad y_0 \geqq Y\,, \tag{III.51}$$

a nerovnost (III.50) má tvar

$$x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq (x_0^p - X^p)^{1/p} (y_0^q - Y^q)^{1/q}\,. \tag{III.52}$$

Předpokládejme, že nerovnost (III.50) platí pro $n = 1$. To znamená, že je

$$x_0 y_0 - XY \geqq (x_0^p - X^p)^{1/p} (y_0^q - Y^q)^{1/q}\,, \tag{III.53}$$

pokud je splněna alespoň jedna z podmínek (III.51). Ale z (III.53) už plyne (III.52), neboť podle Hölderovy nerovnosti (III.6) je

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq X \, . \, Y\,, \tag{III.54}$$

a tedy $x_0y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k \geqq x_0y_0 - XY$. Rovnost v (III.52) nastane tehdy a jen tehdy, nastane-li rovnost v (III.53) i v (III.54). Rovnost v (III.54) znamená, že $\mathbf{x}^p \sim \mathbf{y}^q$ (věta III.2), rovnost v (III.53) znamená, že vektory (x_0^p, X^p) a (y_0^q, Y^q) jsou úměrné (stále předpokládáme, že tvrzení platí pro $n = 1$!); to dohromady dává vztah $\tilde{\mathbf{x}}^p \sim \tilde{\mathbf{y}}^q$.

Zbývá tedy dokázat tvrzení našeho příkladu pro $n = 1$. To však už je důsledkem Hölderovy nerovnosti pro $n = 2$: Uvažujeme-li totiž v (III.6) pro $n = 2$ číslo X místo x_1, číslo $(x_0^p - X^p)^{1/p}$ místo x_2 a podobně Y a $(y_0^q - Y^q)^{1/q}$ místo y_1 a y_2, máme:

$$XY + (x_0^p - X^p)^{1/p}\,(y_0^q - Y^q)^{1/q} \leqq$$
$$\leqq (X^p + x_0^p - X^p)^{1/p}.(Y^q + y_0^q - Y^q)^{1/q} = x_0y_0$$

a odtud plyne (III.53). Má-li platit v poslední nerovnosti znaménko rovnosti, musí být podle věty III.2 vektory $(X^p, x_0^p - X^p)$ a $(Y^q, y_0^q - Y^q)$ úměrné, a odtud už plyne úměrnost vektorů (x_0^p, X^p), (y_0^q, Y^q).

Důkaz, který jsme právě provedli, byl jakýmsi „testem čtenářovy pozornosti“. *Nebyl totiž zcela v pořádku:* Když jsme použili Hölderovy nerovnosti pro $n = 2$ a pro čísla X, $(x_0^p - X^p)^{1/p}$, Y, $(y_0^q - Y)^{1/q}$, předpokládali jsme, že je splněna alespoň jedna z podmínek (III.51) [což jsou podmínky (III.49) pro $n = 2$]; proto může být jedno z těchto čtyř čísel *záporné* (případně nemusí být vůbec reálné — např. pro $x_0^p < X^p$ a $p = 2$). Ve větě III.2 však výslovně předpokládáme, že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou *nezáporné*. Musíme proto tvrzení z příkladu III.6 opravit: *Nerovnost* (III.50) *umíme dokázat jen za předpokladu, že platí*

$$\text{(III.55)} \qquad x_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p \quad \text{a současně} \quad y_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} y_k^p\,.$$

Nestačí tedy jedna z podmínek (III.49), musí být splněny *obě*!

Úloha III.19. Porovnáte-li výsledek příkladu III.6 [už opravený, tj. za předpokladu (III.55)] s větou II.2, zjistíte, že u této věty skutečně stačilo, aby byla splněna alespoň jedna z podmínek (III.49) (kde ovšem klademe $p = 2$). Lze tedy dokázat nerovnost (III.50) nějakým jiným způsobem za využití jen jedné z podmínek (III.49), nebo je požadavek (III.55) podstatný?

Úloha III.20. Nerovnost (III.50) je jistou analogií Hölderovy nerovnosti. Dokažte, že analogicky lze „rozšířit" i Minkowského nerovnost, tj. dokažte toto tvrzení: Je-li $p \geqq 1$, $\tilde{x} \geqq \mathbf{0}$, $\tilde{y} \geqq \mathbf{0}$ a je-li

$$\text{(III.56)} \qquad x_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} x_k^p \quad \text{a} \quad y_0^p \geqq \sum_{k=1}^{n} y_k^p\,,$$

je

$$\text{(III.57)} \qquad [(x_0 + y_0)^p - \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p]^{1/p} \geqq$$

$$\geqq (x_0^p - \sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} + (y_0^p - \sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{1/p}\,.$$

Kdy nastane v (III.57) rovnost?

Úloha III.21. Nechť je v předchozí úloze $p = 2$; platí pak nerovnost (III.57), když je splněna jen jedna z podmínek (III.56)?

Na závěr této kapitoly se vraťme ještě k Hölderově nerovnosti. Z ní totiž plyne toto tvrzení, ukazující, že pravá strana v (III.6) udává v jistém smyslu *nejlepší* horní odhad výrazu $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$:

Budiž $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$, A nezáporné číslo. Pak k tomu, aby platilo

$$\text{(III.58)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq A \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{1/q} \quad \text{pro všechna } \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0},$$

je nutné a stačí, aby bylo

$$\text{(III.59)} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^p \leqq A^p .$$

Podrobný důkaz přenecháme čtenáři s tímto návodem. Postačitelnost podmínky (III.59) plyne ihned z Hölderovy nerovnosti (III.6), nutnost lze dokázat sporem: předpokládáme-li, že $\sum_{k=1}^{n} x_k^p > A^p$, vede (III.58) ke sporu s Hölderovou nerovností, jakmile zvolíme $\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}$.

Část tvrzení, jehož důkaz jsme právě přenechali čtenáři, lze zformulovat takto: Je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k^p > A^p$, existuje vektor $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$ tak, že $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k > A \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{1/q}$. Pišme nyní x_0 místo A a označme $y_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{1/q}$. Pak tedy je $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k > x_0 y_0$ čili $x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k < 0$. Tento výsledek dává opět jistou odpověď na otázku z úlohy III.19.

VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH ÚLOH

P.1.

Budiž $\alpha < 0$. Pak je $\beta = 1 - \alpha > 1$; píšeme-li v (P.1) β místo α a $\dfrac{1}{t}$ místo t ($t > 0$), máme *platnou* nerovnost

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{1-\alpha} - (1 - \alpha)\frac{1}{t} + (1 - \alpha) - 1 \geqq 0\,.$$

Po úpravě (vynásobení této nerovnosti číslem $t > 0$) dostáváme nerovnost (P.1) pro $\alpha < 0$.

Budiž $0 < \alpha < 1$. Pak je $\beta = \dfrac{1}{\alpha} > 1$; píšeme-li v (P.1) β místo α a $t^{1/\beta}$ místo t, máme *platnou* nerovnost

$$(t^{1/\beta})^{\beta} - \beta t^{1/\beta} + \beta - 1 \geqq 0\,.$$

Po úpravě (vynásobení této nerovnosti číslem $-\alpha < 0$) dostáváme nerovnost (P.2).

I.1.

Nechť platí (I.12). Utvořme z vektoru $\mathbf{x}$ nový vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tak, že číslo x_1 nahradíme číslem $y_1 = g$ a číslo x_n nahradíme číslem $y_n = (x_1 x_n)/g$; ostatní složky ponecháme beze změny: $y_i = x_i$, $i = 2, 3, \ldots, n - 1$. Geometrický průměr se *nezmění*:

$$G_n(\mathbf{y}) = G_n(\mathbf{x}) = g\,,$$

zatímco pro aritmetický průměr platí

$$(*) \qquad A_n(\mathbf{y}) \leqq A_n(\mathbf{x})\,.$$

Je totiž (podle věty I.1) $x_1 \leqq g \leqq x_n$ čili $x_n - g \geqq 0$ a $g - x_1 \geqq 0$; a odtud máme

$$0 \leqq \frac{1}{g}(x_n - g)(g - x_1) = x_1 + x_n - g - \frac{x_1 x_n}{g} =$$
$$= x_1 + x_n - y_1 - y_n$$

čili $x_1 + x_n \geqq y_1 + y_n$. Odtud už plyne nerovnost (*). Opakujeme-li tento postup (tj. sestrojíme-li k vektoru $\mathbf{y}$ analogickým způsobem vektor $\mathbf{z}$ atd.), dojdeme — podobně jako u čtvrtého důkazu nerovnosti (AG) — k vektoru $\mathbf{w} = (g, g, \ldots, g)$; přitom bude

$$A_n(\mathbf{x}) \geqq A_n(\mathbf{y}) \geqq \ldots \geqq A_n(\mathbf{w}) = g = G_n(\mathbf{x})\,,$$

což je nerovnost (AG).

I.2.

Označme $2p$ daný obvod trojúhelníka, a, b, c délky jeho neznámých stran. Podle Heronova vzorce je obsah trojúhelníka dán výrazem

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Užijeme-li nerovnosti (AG) pro $n = 3$, $x_1 = p - a$, $x_2 = p - b$ a $x_3 = p - c$, bude

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqq \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} =$$
$$= \frac{3p - (a + b + c)}{3} = \frac{p}{3}$$

čili

$$(*) \qquad (p-a)(p-b)(p-c) \leqq \frac{p^3}{27}\,.$$

Číslo P bude největší tehdy, bude-li největší číslo $(p - a) \cdot (p - b)(p - c)$. To je odhadnuto shora v (*), současně však nastane podle věty I.1 v (*) rovnost právě pro $p - a = p - b = p - c$ čili pro $a = b = c \left(= \frac{2p}{3}\right)$, takže maxima bude dosaženo v případě, že trojúhelník je rovnostranný

I.3.

Především lze snadno zobecnit (I.40): jsou-li $\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_{(m)}$ vektory o n složkách, $\mathbf{x}_{(i)} \geqq 0$, pak platí

$$(*) \qquad G_n(\mathbf{x}_{(1)} + \mathbf{x}_{(2)} + \ldots + \mathbf{x}_{(m)}) \geqq \\ \geqq G_n(\mathbf{x}_{(1)}) + G_n(\mathbf{x}_{(2)}) + \ldots + G_n(\mathbf{x}_{(m)})$$

(dokažte to indukcí podle m!). Nerovnost (I.51) je pak už jen speciálním případem nerovnosti (*): stačí volit $n = 2$ a $\mathbf{x}_{(i)} = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Nerovnost (I.52) je vhodné zapsat ve tvaru

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \leq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{m} y_k\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k\right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} y_k\right)};$$

tuto nerovnost pak můžeme dokázat indukcí podle m. Případ $m = 2$ lze dokázat přímo ověřením (je to poněkud pracnější), dále postupujeme takto: Především je

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} + \frac{x_{m+1} y_{m+1}}{x_{m+1} + y_{m+1}}.$$

Použijeme indukčního předpokladu a první sčítanec vpravo odhadneme podle (**) (pro m); bude pak

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \leqq \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)}{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)} + \frac{x_{m+1} y_{m+1}}{x_{m+1} + y_{m+1}} .$$

A nyní použijeme nerovnosti (**) pro $m = 2$, kde ovšem volíme za x_1 výraz $\sum_{k=1}^{m} x_k$, za x_2 číslo x_{m+1}, za y_1 výraz $\sum_{k=1}^{m} y_k$ a za y_2 číslo y_{m+1}, a dostaneme (**) pro $m + 1$.

I.4.

Tato úloha byla zařazena do III. kola MO v roce 1973 a účastníci tohoto kola ji řešili různým způsobem. Jednou z možností (nikoliv nejelegantnější) je použití indukce.

I.5.

Také tuto úlohu je možno řešit přímo např. pomocí indukce. Lze však také použít vztahu (I.8) a výsledku úlohy I.4: Z nerovnosti (I.55) plyne, že

$$\log (x_{k-1} x_{k+1}) = \log x_{k-1} + \log x_{k+1} \geqq 2 \log x_k .$$

Označíme-li $\log x_k$ jako y_k, je to nerovnost (I.53) pro posloupnost $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$, a je tedy podle (I.54)

$$\frac{\log x_1 + \ldots + \log x_{n-1}}{n - 1} + \frac{\log x_1 + \ldots + \log x_{n+1}}{n + 1} \geqq$$

$$\geqq 2 \frac{\log x_1 + \ldots + \log x_n}{n}$$

čili podle (I.8)

$$\log G_{n-1} + \log G_{n+1} \geqq 2 \log G_n$$

neboli

$$\log G_{n-1} G_{n+1} \geqq \log G_n^2 ;$$

odtud už plyne (I.56).

I.6, I.7, I.8

Použijeme nerovnosti (AG) pro $n = 2$ [neboli nerovnosti (I.18)]: v první úloze pro $x_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $x_2 = \operatorname{cotg} \alpha$, ve druhé třikrát pro dvojice (a, b), (b, c) a (c, a), ve třetí pro dvojici $\left(\frac{a}{t^2}, bt^2\right)$. V I.7 nastane rovnost pro $a = b = c$, v I.8 pro $t = \pm \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

I.9

Nerovnost můžeme po úpravě zapsat ve tvaru

$$\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2} \cdot \frac{a_3}{a_3 + b_3}} + \\ + \sqrt[3]{\frac{b_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2 + b_2} \cdot \frac{b_3}{a_3 + b_3}} \leqq 1\,;$$

poslední nerovnost dokážeme tím, že na oba sčítance na levé straně použijeme nerovnosti (AG) pro $n = 3$.

I.10

Použijeme nerovnosti (AG) pro vektor $\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{x_n}{x_1}\right)$.

I.11

Použijeme nerovnosti (AG) pro vektor $(1, 2, 3, \ldots, n)$ a vzorce

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)\,.$$

I.12

Je to v obou případech čtverec. Použijeme nerovnosti (AG) pro $n = 2$.

I.13

Je to čtverec. Použijeme nerovnosti (AG) pro $n = 2$, nejlépe ve tvaru (I.17).

I.14

Je to rovnostranný trojúhelník; viz úlohu I.2.

I.15

Nerovnost (I.57) obsahuje jako speciální případ nerovnost (I.42): tu dostaneme, volíme-li $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$. Pokuste se proto nerovnost (I.57) dokázat pomocí věty I.3 úpravou postupu, jímž jsme z této věty odvodili nerovnost (I.42).

II.1

Za $\boldsymbol{y}$ zvolte $\boldsymbol{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

II.2

Užijte (II.8) pro $n = 3$ a $\boldsymbol{x} = (1, a, a^2)$. Rovnost nastane jen pro $a = 1$.

II.3

Užijte (II.1) pro $n = 3$ a vektory $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{y} = (y, z, x)$. Při důkazu nerovnosti (I.48) použijte toho, že — opět podle (II.1) nebo (II.2) pro $n = 3$ a pro vektory $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{y} = (\sqrt{yz}, \sqrt{xz}, \sqrt{xy})$ — je

$$x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy} \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(yz + xz + xy)}\,.$$

II.4

Využijte toho, že $x_k y_k = (x_k \sqrt{a_k}) \left(y_k \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$, a použijte Cauchyovy nerovnosti pro vektory $\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{a}}$ a $\mathbf{y}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}}}$ (viz označení na str. 14).

II.5

Využijte toho, že $x_k = \left(\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\right)\sqrt{y_k}$, a použijte Cauchyovy nerovnosti pro vektory $\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{y}}}, \sqrt{\mathbf{y}}$.

II.6

Užijeme Cauchyovy nerovnosti: nejprve pro dvojici vektorů $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ a pak pro dvojici vektorů $\mathbf{x}^2$ a $\mathbf{y}^2$.

II.7

Užijeme Cauchyovy nerovnosti (II.1): nejprve pro dvojici vektorů $\mathbf{w}.\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}.\mathbf{z}$ a pak ještě dvakrát pro dvojice $\mathbf{w}^2$, $\mathbf{x}^2$ a $\mathbf{y}^2$, $\mathbf{z}^2$.

II.8

Použijeme věty I.3, kde položíme $a_k = x_k$, $b_k = y_k$, $m = \frac{m(\mathbf{y})}{M(\mathbf{x})}$, $M = \frac{M(\mathbf{y})}{m(\mathbf{x})}$. Nerovnost, která tak vznikne z nerovnosti (I.43), sečteme se zřejmou nerovností

$$0 \leqq \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} - \sqrt{\frac{m(\mathbf{y})}{M(\mathbf{x})}\cdot\frac{M(\mathbf{y})}{m(\mathbf{x})}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)}\right]^2$$

a po úpravě dostaneme (II.17).

II.9

V tomto případě je pravá strana v (II.26) rovna nule, kdežto na levé straně je nezáporné číslo.

II.10

Pro $n = 1$ je (II.30) ekvivalentní s nerovností $(x_0y_1 - x_1y_0)^2 < < 0$, která neplatí. — Uvažujme $n = 2$. Pro dvojici $\bar{x} = (0,1,0)$, $\bar{y} = (0,0,1)$ platí (II.29) i (II.30); pro dvojici $\bar{x} = (1,1,\varepsilon)$, $\bar{y} = (1,\varepsilon,1)$, kde je $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, platí jen (II.29). Pro $n > 2$ viz poznámku II.7.

II.11

První nerovnost v (II.33) plyne z nerovnosti (II.13) v úloze II.5: stačí tam zvolit x_ky_k místo x_k a $x_k^2 + y_k^2$ místo y_k. Druhou nerovnost dostaneme z nerovnosti (I.52): stačí se uvědomit, že $\frac{x_k^2y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} = \frac{1}{2} H_2(x_k^2, y_k^2)$, kde H_2 je harmonický průměr.

III.1

Je $\left|\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_ky_k|$; pravou stranu odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti (III.6), kterou ovšem použijeme pro vektory $(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$, $(|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|)$. Znaménko nerovnosti v (III.11) nelze pro $p < 1$ obrátit, neboť např. pro $n = 2$, $\mathbf{x} = (1, \mathrm{i})$, $\mathbf{y} = (1, \mathrm{i})$ je $\left|\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right| = 0$, kdežto $\sum_{k=1}^{2} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{2} |y_k|^q = 2$. Z nerovnosti (III.9) lze ovšem za jistých předpokladů odvodit nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} |x_ky_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

III.2

Případ $p = 1$ je zřejmý; pro $p > 1$ použijeme (III.11), kde položíme $n = 2$, $\mathbf{x} = (u, v)$ a $\mathbf{y} = (1, 1)$.

III.6

Případ $p = 1$ je zřejmý. Pro $p > 1$ využijeme toho, že

$$x_k = \frac{x_k}{y_k^{(p-1)/p}} \cdot y_k^{(p-1)/p},$$

a použijeme nerovnosti (III.12), kde ovšem zvolíme $x_k y_k^{(1-p)/p}$ místo x_k a $y_k^{(p-1)/p}$ místo y_k.

III.7

Zaměníme-li v (III.14) role vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ a píšeme-li tam r místo p ($r > 1$!), dostaneme platnou nerovnost

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^r}{x_k^{r-1}} \geqq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)^r}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{r-1}}.$$

Budiž nyní $p < 0$ a označme $r = 1 - p$. Pak je $r > 1$ a $r - 1 = -p$ a nerovnost (III.14) (pro $p < 0$!) plyne ihned z (*). Nerovnost (III.14) lze ovšem také pro $p < 0$ dokázat stejně jako v úloze III.6, neboť jsme použili nerovnosti (III.12), a ta platí i pro $p < 0$ (viz str. 76). Je-li $0 < p < 1$, postupujeme opět zcela stejně jako v úloze III.6; použijeme jen nerovnosti (III.12a).

III.8

Platí-li (III.25) pro $n = 2$, je

$$(*) \qquad a_1^{\alpha} b_1^{\beta} + a_2^{\alpha} b_2^{\beta} \leqq (a_1 + a_2)^{\alpha} (b_1 + b_2)^{\beta}.$$

Pak je

$$a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta + a_3^\alpha b_3^\beta \leqq$$
$$\leqq (a_1 + a_2)^\alpha (b_1 + b_2)^\beta + a_3^\alpha b_3^\beta \leqq$$
$$\leqq [(a_1 + a_2) + a_3]^\alpha [(b_1 + b_2) + b_3]^\beta ,$$

což je (III.25) pro $n = 3$; přitom jsme použili dvakrát nerovnosti (*) — nejprve přímo, a pak tak, že jsme kladi $a_1 + a_2$ místo a_1 a a_3 místo a_2 a analogicky pro b_i. Indukční krok od n k $n + 1$ se provede podobně. Zbývá tedy dokázat, že (*) skutečně platí. Tuto nerovnost zapíšeme takto:

$$\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)^\alpha \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2}\right)^\alpha \left(\frac{b_2}{b_1 + b_2}\right)^\beta \leqq 1 ;$$

platnost posledního vztahu dokážeme dvojím použitím věty III.1. Stačí totiž v (III.2) položit $\frac{1}{p} = \alpha, \frac{1}{q} = \beta$ a $x_1 = \frac{a_i}{a_1 + a_2}$, $x_2 = \frac{b_i}{b_1 + b_2}$ $(i = 1, 2)$.

III.9

Po úpravě můžeme (III.31) zapsat takto:

$$G_n(\mathbf{1} + \mathbf{x}) \geqq 1 + G_n(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{1}) + G_n(\mathbf{x}) ;$$

tato nerovnost plyne z (I.40), volíme-li tam $\mathbf{y} = (1, 1, \ldots, 1)$.

III.10

Nerovnost (III.9) lze zobecnit jen tehdy, učiníme-li některé speciální předpoklady. Tak např. platí

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k z_k \geqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{n} y_k^q)^{1/q} (\sum_{k=1}^{n} z_k^r)^{1/r} ,$$

je-li $\mathbf{x} > 0$, $\mathbf{y} > 0$, $\mathbf{z} > 0$, $0 < p < 1$, $q < 0$, $r < 0$ a $\frac{1}{p} +$

$+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. Nerovnost (*) lze dokázat takto: Označme $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{s}$, $s<0$, a použijme nerovnosti (III.9) pro dvojici vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}.\boldsymbol{z}$ a pro dvojici parametrů p a s; bude pak

$$(**)\qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k z_k \geqq \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n} (y_k z_k)^s\Big)^{1/s}.$$

Dále označme $p^*=\frac{q}{s}$, $q^*=\frac{r}{s}$; je $p^*>1$, $q^*>1$ a $\frac{1}{p^*}+\frac{1}{q^*}=$ $=1$ a můžeme použít Hölderovy nerovnosti (III.6) pro dvojici vektorů $\boldsymbol{y}^s$, $\boldsymbol{z}^s$ a pro dvojici parametrů p^* a q^*:

$$(***)\qquad \sum_{k=1}^{n} y_k^s z_k^s \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^{sp^*}\Big)^{1/p^*}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k^{sq^*}\Big)^{1/q^*}=$$

$$=\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\Big)^{s/q}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k^r\Big)^{s/r}.$$

Protože je $s<0$ a tedy i $\frac{1}{s}<0$, plyne odtud

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^s z_k^s\Big)^{1/s} \geqq \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\Big)^{1/q}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k^r\Big)^{1/r};$$

z této nerovnosti a z nerovnosti (**) už plyne (*). — Je-li opět $0<p<1$, ale $q>0$ a $r<0$, nemůžeme tohoto postupu použít, protože místo (III.6) musíme použít (III.9) (je totiž $p^*<0$, $q^*>0$) a místo (***) dostáváme obrácenou nerovnost. Lze však ukázat, že v tomto druhém případě nerovnost (*) ani nemůže obecně platit a že neplatí ani nerovnost obrácená: stačí zvolit $n=2$, $p=\frac{1}{2}$, $q=1$, $r=-\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{y}=(1,4)$, $\boldsymbol{z}=(1,1)$. Volíme-li nyní $\boldsymbol{x}=(1,4)$, dostáváme nerovnost (*), volíme-li $x = \left(1, \frac{1}{4}\right)$, dostáváme obrácenou nerovnost.

III.11

Pro $n = 2$ má nerovnost (III.32) tvar

(*) $[(x_1 + y_1)^p + (x_2 + y_2)^p]^{1/p} \leqq (x_1^p + x_2^p)^{1/p} + (y_1^p + y_2^p)^{1/p}$.

K případu $n = 3$ přejdeme takto:

$$L_3 = \{(x_1 + y_1)^p + (x_2 + y_2)^p + (x_3 + y_3)^p\}^{1/p} = \\ = \{([(x_1 + y_1)^p + (x_2 + y_2)^p]^{1/p})^p + (x_3 + y_3)^p\}^{1/p}.$$

Výraz v hranaté závorce odhadneme podle (*); bude pak

$$L_3 \leqq \{((x_1^p + x_2^p)^{1/p} + (y_1^p + y_2^p)^{1/p})^p + (x_3 + y_3)^p\}^{1/p}.$$

Zde odhadneme pravou stranu opět podle (*), kde však položíme $(x_1^p + x_2^p)^{1/p}$ místo x_1, $(y_1^p + y_2^p)^{1/p}$ místo y_1 a x_3, y_3 místo x_2, y_2. Dostaneme pak

$$L_3 \leqq [((x_1^p + x_2^p)^{1/p})^p + x_3^p]^{1/p} + [((y_1^p + y_2^p)^{1/p})^p + y_3^p]^{1/p} = \\ = (x_1^p + x_2^p + x_3^p)^{1/p} + (y_1^p + y_2^p + y_3^p)^{1/p},$$

což je (III.32) pro $n = 3$.

III.12

Je $\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leqq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p$; pravou stranu odhadneme pomocí Minkowského nerovnosti (III.32), kterou ovšem použijeme pro vektory $(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$, $(|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|)$.

III.13

Můžeme postupovat indukcí podle počtu vektorů. Pro tři vektory rozšíříme Minkowského nerovnost pomocí téže nerovnosti pro dva vektory — ve tvaru (III.35) — takto: Je $(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z})^p = [(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}]^p$ a tedy pro $p > 1$

$$\begin{aligned}[A_n([\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}]^p)]^{1/p} &= [A_n([(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}]^p)]^{1/p} \leqq \\ &\leqq [A_n([\mathbf{x} + \mathbf{y}]^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{z}^p)]^{1/p} \leqq \\ &\leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{y}^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{z}^p)]^{1/p} .\end{aligned}$$

III.14

Protože $S_n(\mathbf{x}^p) = n . A_n(\mathbf{x}^p)$, stačí použít výsledků poznámky III.8.

III.15

Využijeme toho, že $S_n(\mathbf{y}) = nA_n(\mathbf{y})$, a postupujeme stejně jako při důkazu věty III.6.

III.16

Nerovnost (III.46) dokážeme takto: Sčítance (zlomky) na pravé straně označíme a^p a b^p a vyjádříme $S_n(\mathbf{xz})$ resp. $S_n(\mathbf{yz})$ pomocí a resp. b. Pak bude

$$[S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z})]^p = [a(S_n(\mathbf{x}^{p-1}))^{1/p} + b(S_n(\mathbf{y}^{p-1}))^{1/p}]^p ;$$

pravou stranu odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti (pro $n = 2$!) a dostaneme

$$\begin{aligned}[S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z})]^p \leqq (a^p + b^p)[(S_n(\mathbf{x}^{p-1}))^{1/(p-1)} + \\ + (S_n(\mathbf{y}^{p-1}))^{1/(p-1)}]^{p-1} .\end{aligned}$$

Výraz v hranaté závorce vpravo odhadneme pomocí Minkowského nerovnosti *shora* (užijeme totiž Minkowského nerovnosti pro $p - 1$!) výrazem $S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})^{p-1})$ a dostaneme (III.46). Zde bylo podstatné, že je $0 < p - 1 \leqq 1$ čili $1 < p \leq 2$!

Nyní už stačí zvolit v (III.46) za $\mathbf{z}$ ten vektor s vlastností $S_n(\mathbf{z}^q) = 1$, který je podle úlohy III.15 přiřazen vektoru $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, a užít nerovnosti (III.45); levá strana se díky volbě vektoru $\mathbf{z}$ nezmění, neboť $[S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z})]^p = S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})^p)$, pravá strana se nezmenší, neboť $[S_n(\mathbf{x}.\mathbf{z})]^p \leqq S_n(\mathbf{x}^p)$, $[S_n(\mathbf{y}.\mathbf{z})]^p \leqq S_n(\mathbf{y}^p)$ a dostáváme tak ihned (III.47).

III.17

Užijeme jednak nerovnosti (III.43) pro p, jednak nerovnosti (III.44) pro $p - 1$ (je $p \leqq 2$ a tedy $p - 1 \leqq 1$!). Nerovnosti (III.47) a (III.48) dávají pro $1 \leqq p \leqq 2$ horní a dolní odhad výrazu $\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p / \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{p-1}$.

III.18

Postupujeme stejně jako v úloze III.16. Nejprve ukážeme, že také v nerovnosti (III.46) se změní znaménko; přitom použijeme Hölderovy nerovnosti pro $n = 2$ a pro $p \leqq 1$, tj. musíme užít tvaru (III.12a). Pak dokážeme — opět použitím obrácené Hölderovy nerovnosti — stejně jako v úloze III.15, že také v nerovnosti (III.45) se pro $0 < p \leqq 1$ změní znaménko nerovnosti, a důkaz dokončíme jako v úloze III.16 speciální volbou vektoru $\mathbf{z}$.

III.19

Především je třeba si uvědomit, že pro $p = 2$ má nerovnost (III.50) tvar

$$(*) \qquad x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq \sqrt{x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2},$$

kdežto ve větě II.2 jsme dokázali nerovnost

$$(^{**})\qquad (x_0y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 \geqq (x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)(y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2)\,.$$

Je ihned vidět, že když bude splněna jen jedna z podmínek (III.49) (pro $p = 2$), nemusí mít nerovnost (*) vůbec smysl, neboť na pravé straně může být komplexní číslo. Požadavek (III.55) je tedy pro platnost nerovnosti (*) — a tím i nerovnosti (III.50) — podstatný; nerovnost (**) je naproti tomu splněna automaticky, je-li jedna z nerovností v (III.49) obrácená.

III.20

Můžeme postupovat analogicky jako při důkazu nerovnosti (III.50), tj. dokázat (III.57) pro $n = 1$ pomocí Minkowského nerovnosti (III.32) a odtud pak dokázat (III.57) pro libovolné přirozené $n > 1$. Zde však uvedeme důkaz, který využívá nerovnosti (III.50) a je obdobou důkazu Minkowského nerovnosti (III.32) (viz str. 88): Užijeme toho, že pro $p > 1$ je

$$(x_0 + y_0)^p - \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p =$$

$$= [x_0(x_0 + y_0)^{p-1} - \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{p-1}] +$$

$$+ [y_0(x_0 + y_0)^{p-1} - \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{p-1}]\,.$$

Oba výrazy v hranatých závorkách odhadneme pomocí (III.50), kde ovšem pro první výraz volíme místo vektoru $\bar{y}$ vektor $\bar{z} = (\bar{x} + \bar{y})^{p-1}$ a pro druhý výraz pak volíme místo vektoru $\bar{x}$ vektor $\bar{y}$ a místo vektoru $\bar{y}$ vektor $\bar{z}$; dostaneme tak nerovnost

$$(^{*})\qquad (x_0 + y_0)^p - \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \geqq$$

$$\geq [(x_0^p - \sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} + (y_0^p - \sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{1/p}] \,.$$

$$. [(x_0 + y_0)^p - \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p]^{(p-1)/p} \,.$$

Musíme ovšem ukázat, že jsou splněny předpoklady (III.55) pro odpovídající vektory. Pro vektory $\bar{x}$ a $\bar{y}$ to plyne z podmínek (III.56), pro vektor $\bar{z}$ to ukážeme pomocí Minkowského nerovnosti (III.32) a pomocí podmínek (III.56):

$$(**) \quad \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leqq [(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{1/p}]^p \leqq (x_0 + y_0)^p.$$

Druhý součinitel v (*) je tedy *nezáporný*. Je-li *kladný*, plyne (III.57) z (*) ekvivalentní úpravou; je-li *nulový*, musí být $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ (věta III.5) a v (III.56) musí platit rovnosti a tudíž (III.57) zřejmě platí. — Rovnost v (III.57) nastane tehdy a jen tehdy, je-li $\bar{\mathbf{x}} \sim \bar{\mathbf{y}}$. — Je-li $p = 1$, platí (III.57) pro libovolné nezáporné vektory $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$.

III.21

Nerovnost (III.57) v tomto případě nemá smysl, neboť na pravé straně stojí komplexní číslo.

Seznam literatury

[1] BECKENBACH, E. F.; BELLMAN, R.: Inequalities. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961. (Ruský překlad: Moskva 1965)

[2] HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G.: Inequalities. Cambridge 1934. (Ruský překlad: Moskva 1948)

[3] MITRINOVIČ, D. S.: Analytic inequalities. Berlin-Heidelberg-New York 1970

[4] MOROZOVA, E. A.: Meždunarodnyje matematičeskije olimpiady. Moskva 1967

[5] Sbornik zadač moskovskich matematičeskich olimpiad, Moskva 1965

[6] ŠKLARSKIJ, D. O.; ČENCOV, N. N.; JAGLOM, I. M.: Izbrannyje zadači i teoremy elementarnoj matematiki. Část I.: Aritmetika i algebra. Moskva 1954.

OBSAH

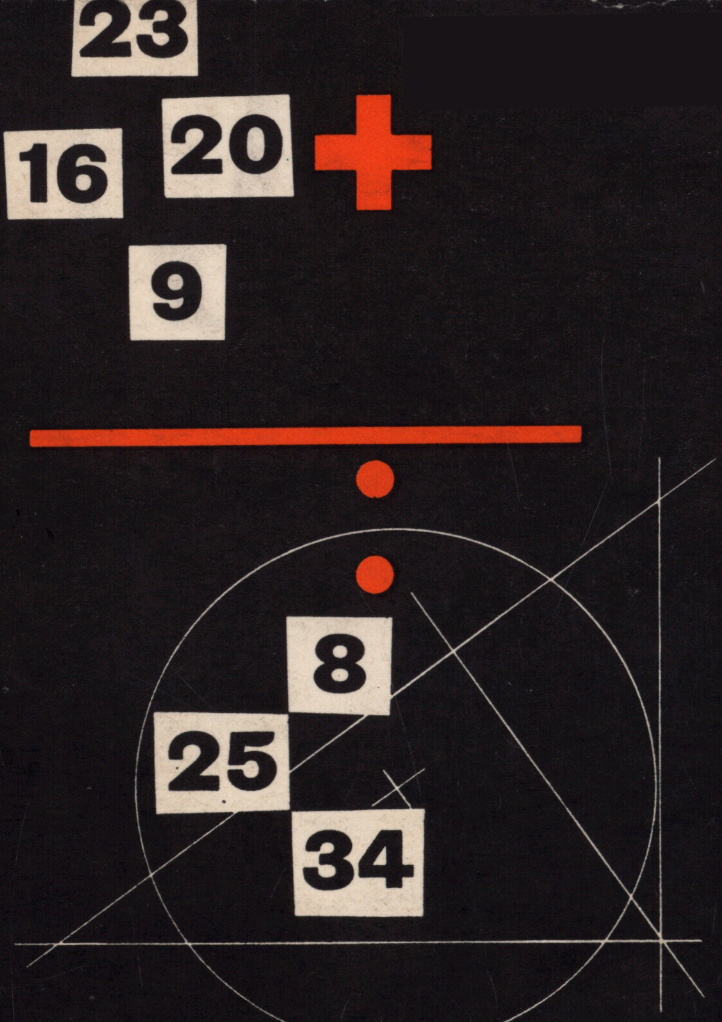
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ALOIS KUFNER

Nerovnosti a odhady

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědný redaktor Ladislav Smoljak
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 3540
Edice Škola mladých matematiků
svazek 39
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
4,47 AA, 4,82 VA. 120 stran
Náklad 6500 výtisků. 1. vydání
Praha 1975. 508/21/82.6

23-049-75 03/2 Cena brož. výt. Kčs 7,—



23-049-75
03/2
Cena brož.
Kčs 7,—