Vektory v geometrii

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

VEKTORY V GEOMETRII

28

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

BRUNO BUDINSKÝ - STANISLAV ŠMAKAL

vektory v geometrii

PRAHA
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzoval doc. Bořivoj Kepr

Předmluva

S vektory se setkáváme poprvé v roce 1853. Zavedl je irský matematik a fyzik *W. R. Hamilton* (1805—1865). Řada matematiků brzy vycítila účinnost vektorové metody, takže již koncem minulého století dává vektorovému počtu téměř současnou podobu americký matematik *J. W. Gibbs* (1839—1903). Na rozdíl od mnoha jiných matematických pojmů, jejichž zrod sahá do dávné historie před naším letopočtem, nejde tedy v případě vektorů o objev nijak starý. A přece má dnes vektorový počet své důležité výsadní místo v moderní matematice a domněnka, že jde o módní záležitost, by byla nesporně velkým omylem. Význam vektorových prostorů přerůstá naopak dnes již klasický rámec geometrického či aritmetického modelu, vektorové prostory nabývají v abstraktnější podobě stále většího oprávnění v analýze, teorii čísel atd.

Tato knížka vám má ukázat, že vektory jsou účinnou moderní metodou při řešení geometrických problémů. Předpokládáme, že se dostane především do rukou těch, kteří se s vektory setkali pouze v míře dané osnovami gymnasií; žádné jiné znalosti knížka nepředpokládá.

V prvých třech kapitolách byl zvolen názorný přístup se zvláštním zaměřením na euklidovský prostor E_3. V 1. kapitole získá čtenář nezbytnou vstupní orientaci pro studium vlastností prostoru E_3. Afinní geometrii je věnována 2. kapitola, geometrii euklidovské pak 3. kapitola. Teprve 4. kapitola podává ucelenější pohled a je určena především těm, kdož jsou schopni větší abstrakce. Setkáte se v ní aspoň v náznaku také s vícerozměrnou geometrií, která se objevuje již v díle řeckého matematika *Diofanta* (250 př. n. l.). Jde tedy o velmi starý problém, který souvisí s „trojrozměrným" vnímáním lidské bytosti, problém, který po staletí nedává spát celé řadě velkých filosofů a matematiků, jako je *I. Kant* (1727—1804), *J. D'Alembert* (1717—1783), *J. L. Lagrange* (1736—1813), *A. F. Möbius* (1790—1868), *C. G. J. Jacobi* (1804—1851), *A. Cayley* (1821—1895), *H. Minkowski* (1864—1909), *H. Grassmann* (1809 až 1877), *J. Plücker* (1801—1868), *B. Riemann* (1826 až 1866), *E. Betti* (1823—1912), *H. Poincaré* (1854—1912), *F. Klein* (1849—1925). Výčet není zdaleka úplný. Důstojné místo v této řadě mají i velcí čeští matematikové *E. Čech* (1893—1959) a *V. Hlavatý* (1894—1969). Vícerozměrná geometrie mohla získat své plné uznání teprve v tom okamžiku, kdy geometrie byla zbavena zátěže konkrétního modelu, aniž upustila od myšlenkové konstrukce. Byl to krok odvážný, ale hluboce důležitý a prospěšný. Nutno ovšem dodat, že existují četné reálné modely vícerozměrných prostorů, a právě ony vícerozměrnou geometrii činí nesporně přitažlivou, aplikabilní a životaschopnou.

Se souřadnicemi pracoval již známý řecký matematik *Apollonius* (260—170 př. n. l.). Za zakladatele analytické geometrie jsou však právem považováni *R. Descartes* (1596—1650) a *P. Fermat* (1601—1665), svůj podíl na jejím rozvoji má také *G. W. Leibnitz* (1646—1716). Analytická vektorová metoda se opírá především o aritmetický vektorový model.

Během četby se setkáte s mnoha zajímavými geometrickými úlohami, které nejsou rozhodně samoúčelné a mohou vám také usnadnit prvé kroky na vysoké škole. Poznáte také, že matematika je nedílná; chtít dělat jen geometrii by bylo velmi ošidné, a zvlášť v této souvislosti vystupuje do popředí důležitost algebry a teorie množin.

1. kapitola

ÚVOD

1.1. Základní pojmy z logiky

Metodou matematiky je *formální logika* a základním stavebním prvkem formální logiky je *výrok*. Obsah tohoto pojmu je pro studenta střední školy dnes již zcela běžný. Připomeňme proto pouze, že dva výroky A, B nám dovolují tvořit výroky nové, kterým říkáme logické operace s výroky. Mezi hlavní logické operace s výroky řadíme *konjunkci* (znak $A \wedge B$), *alternativu* (znak $A \vee B$), *implikaci* (znak $A \Rightarrow B$), a *dvojstrannou implikaci* (znak $A \Leftrightarrow B$).

Z hlediska formální logiky nás zajímá pouze *pravdivost* výroků. Při konjunkci požadujeme současnou *platnost* obou výroků A, B, při disjunkci pak platnost aspoň jednoho z nich.

Implikace $A \Rightarrow B$ je takové spojení dvou výroků A, B, při kterém platnost výroku A má za následek platnost výroku B. Výroku A říkáme obvykle předpoklad *(premisa)*, výroku B důsledek *(konkluze)*. Běžně se užívá také těchto rčení: *A je postačující podmínkou pro B* nebo *B je nutnou podmínkou pro A*. Implikaci $A \Rightarrow B$ můžeme charakterizovat gramatickou větou: „*Když platí A, pak platí i B.*“

Jsou-li dány výroky A, B, jsou formálně myslitelny vždy dvě implikace: $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$. Žádáme-li, aby platila konjunkce $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, nazýváme takový výrok *dvojstrannou implikací* vzhledem k A, B

a píšeme stručně $A \Leftrightarrow B$. Obsah *dvojstranné implikace* výstižně vyjadřuje gramatická věta: „*A platí právě tehdy, když platí B.*"

Při výstavbě matematických disciplín vycházíme z jistého souboru výroků, tzv. *axiomů*, jejichž pravdivost předpokládáme. Ostatní pravdivé výroky nazýváme *větami*. *Důkaz* je jistou formou verifikace (ověření, zjištění pravdivosti) nějakého výroku. Gramatické věty, které nám měly přiblížit obsah implikace a dvojstranné implikace, mají povahu příčinné souvislosti; z hlediska formální logiky nejde však o příčinnou souvislost v pravém slova smyslu.

Jestliže pravdivému výroku přiřadíme číslo 1, nepravdivému 0, potom pravdivost uvedených čtyř logických souvětí v závislosti na vstupních výrocích A, B je dána následující tabulkou:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0

Uvedené tabulce říkáme *pravdivostní schéma.* Pro lepší orientaci zapišme slovně třeba poslední řádek: Je-li výrok A nepravdivý a zároveň B pravdivý, pak konjunkce $A \wedge B$ a *dvojstranná implikace* $A \Leftrightarrow B$ jsou výroky nepravdivé, *alternativa* $A \vee B$ a implikace $A \Rightarrow B$ jsou výroky pravdivé.

Pro zkrácení zápisu použijeme občas zavedených symbolů.

1.2. Některé pojmy z teorie množin

Znalost základních pojmů předpokládáme. Dohodneme se na tomto místě pouze na symbolice, které budeme příležitostně používat, a seznámíme čtenáře s nezbytným minimem nových pojmů tak, aby sledování dalšího textu mohlo probíhat bez nejmenších potíží.

Je-li a prvkem množiny M, píšeme $a \in \mathsf{M}$; platí-li opak, píšeme $a \notin \mathsf{M}$. *Prázdnou* množinu označíme ϑ. Množinu, která se skládá ze všech takových prvků x, které mají *vlastnost* $\mathscr{V}$, píšeme ve tvaru

$$\{x \mid x \text{ má vlastnost } \mathscr{V}\}\,.$$

Tak třeba kružnice o středu S a poloměru 7, která leží v dané rovině ω, je množina

$$\{Y \mid Y \in \omega,\ YS = 7\}\,,$$

tj. množina všech bodů Y, které leží v ω a mají od daného bodu S vzdálenost 7.

Jestliže dvě množiny M, N mají tu vlastnost, že každý prvek jedné je současně prvkem druhé množiny a obráceně, potom píšeme $\mathsf{M} = \mathsf{N}$ a říkáme, že obě množiny se sobě *rovnají*. Symbolicky zapíšeme definici rovnosti dvou množin takto:

$$\mathsf{M} = \mathsf{N} \Leftrightarrow [x \in \mathsf{M} \Rightarrow x \in \mathsf{N};\ y \in \mathsf{N} \Rightarrow y \in \mathsf{M}]\,. \quad (1.1)$$

Přečtěme si (1.1) ještě jednou; říká se zde: *Množina* M *je rovna množině* N *právě tehdy, jestliže platí: a) když prvek x leží v* M, *pak leží také v* N; *b) když prvek y leží v* N, *pak leží též v* M.

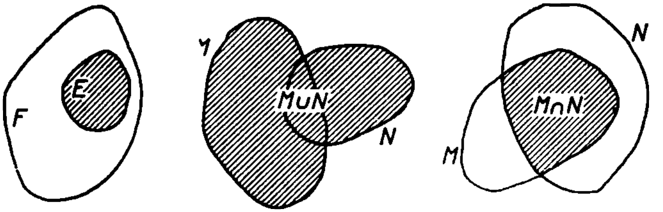
Jestliže množina E je *částí* množiny F, píšeme $\mathsf{E} \subset \mathsf{F}$ (obr. 1a). Definice uvedené vlastnosti množiny E vzhledem k F je dána zápisem

$$\mathsf{E} \subset \mathsf{F} \Leftrightarrow [x \in \mathsf{E} \Rightarrow x \in \mathsf{F}]\,.$$

Skutečnost, že $E \subset F$, nevylučuje možnost $E = F$.

Sjednocení množin M, N označujeme $M \cup N$, *průnik* těchto množin $M \cap N$ (obr. 1b, 1c). Zřejmě platí:

$$M \cup N = \{x | x \in M \vee x \in N\},$$
$$M \cap N = \{x | x \in M \wedge x \in N\}.$$



Obr. 1a. Množina E je částí množiny F.
Obr. 1b. Sjednocení množin M, N.
Obr. 1c. Průnik množin M, N.

Pamatujme, že spojku nebo nechápeme v matematice nikdy ve smyslu vylučovacím; to ostatně plyne z definice alternativy. Do sjednocení množin $M \cup N$ patří proto každý prvek průniku $M \cap N$. Je snadné rozšířit průnik a sjednocení na více množin.

Předpokládejme, že M, N jsou dvě neprázdné množiny. Pomocí těchto množin můžeme vytvořit další množinu, kterou budeme označovat $M \times N$ a nazývat *kartézským součinem* množin M, N. Množinu $M \times N$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, v nichž x je prvek z množiny M a y je prvek z množiny N. Množina $M \times N$ je tedy definována zápisem

$$M \times N = \{[x, y] \mid x \in M,\ y \in N\}.$$

Důležitou množinou, s níž budeme často pracovat, je *množina všech reálných čísel.* Budeme ji označovat R_1. Pomocí množiny R_1 můžeme vytvořit jinou důležitou množinu, kterou nazýváme *aritmetickým prostorem dimenze* 2 a označujeme R_2. Množinu R_2 definujeme jako kartézský součin množiny R_1 se sebou samou, tj. $\mathsf{R}_2 = \mathsf{R}_1 \times \mathsf{R}_1$. Prvky množiny R_2 jsou tedy uspořádané dvojice reálných čísel. V tom smyslu třeba [2, 5] je jiná uspořádaná dvojice než [5, 2].

Množina $\mathsf{R}_n = \mathsf{R}_1 \times \mathsf{R}_1 \times \ldots \times \mathsf{R}_1$ (celkem n činitelů) je tzv. *aritmetický prostor* R_n *dimenze* n. Můžeme jej též definovat zápisem

$$\mathsf{R}_n = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \mid x_i \in \mathsf{R}_1 \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

1.3. Rozklad množiny

Tento odstavec je poněkud obtížnější. Čtenář jej může při prvním čtení textu bez většího rizika vynechat, doporučujeme však, aby se k němu přece jen vrátil. Bude na to později upozorněn.

Předpokládejme, že je dána neprázdná množina M. Sestrojme kartézský součin $\mathsf{M} \times \mathsf{M}$ a zvolme si množinu $\mathscr{R}$, která je podmnožinou v $M \times M$. Množinu $\mathscr{R}$ budeme nazývat *relací* na množině M. Pro každou uspořádanou dvojici prvků $[x, y] \in \mathsf{M} \times \mathsf{M}$ může nastat právě jedna z těchto možností:

$$1.\ [x, y] \in \mathscr{R},$$

$$2.\ [x, y] \notin \mathscr{R}.$$

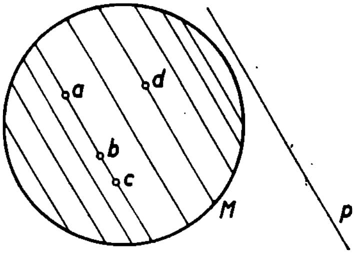
V prvém případě budeme říkat, že prvek *x je v relaci* $\mathscr{R}$ s prvkem y a budeme psát $x \mathscr{R} y$. V druhém případě budeme říkat, že prvek *x není v relaci* $\mathscr{R}$ s prvkem y a budeme psát $x \overline{\mathscr{R}} y$.

Z předcházejících úvah tedy vyplývá, že relace $\mathscr{R}$ na množině M je pravidlo, které o každé uspořádané dvojici prvků z M rozhoduje, zda první prvek je či není v relaci s druhým prvkem. S pojmem relace se setkáváme i v praktickém životě. Na množině M všech žáků jedné školy můžeme zavést relaci $\mathscr{R}$ mnoha způsoby, např. takto:

PŘÍKLAD I. Dvojice žáků A, B (v uvedeném pořadí) ze školy M je v relaci $\mathscr{R}$, jestliže žák A je ze stejné školní třídy jako žák B.

PŘÍKLAD II. Dvojice žáků A, B (v uvedeném pořadí) ze školy M je v relaci $\mathscr{R}$, jestliže žák A je menší než žák B.

Uveďme ještě příklad z geometrie.



Obr. 2. Rozklad množiny M.

PŘÍKLAD III. Na obr. 2 je znázorněna v dané rovině množina M, která je kruhem; v téže rovině leží přímka p. Dohodneme se, že o uspořádané dvojici $[a, b]$ bodů z kruhu M prohlásíme, že je v relaci $\mathscr{R}$, jestliže body a a b leží na přímce rovnoběžné s přímkou p. Můžeme tedy psát $a \mathscr{R} a$ a dále pak (obr. 2): $a \mathscr{R} c$, $b \mathscr{R} c$, $b \overline{\mathscr{R}} d$ atd.

Relace $\mathscr{R}$ na množině M z příkladu III má tyto vlastnosti:

Jsou-li x, y, z libovolné prvky množiny M, pak platí:

$$\begin{aligned}&1.\ x \mathcal{R} x \quad (\textit{reflexivnost}),\\ &2.\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x \quad (\textit{symetrie}),\\ &3.\ (x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z \quad (\textit{tranzitivnost}).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Množina M z našeho příkladu III se skládá z úseček rovnoběžných s přímkou p. Říkejme těmto úsečkám *třídy*. Mají-li dvě nějaké množiny tu vlastnost, že jejich průnik je roven prázdné množině Θ, nazýváme takové množiny *disjunktní*. V tomto smyslu můžeme tedy o našich úsečkách mluvit jako o třídách navzájem disjunktních. Každé dva prvky téže třídy jsou zde v relaci $\mathcal{R}$, každé dva prvky z různých tříd nejsou v relaci $\mathcal{R}$. Každá třída je tedy vlastně množinou prvků, které jsou v relaci $\mathcal{R}$. Systém všech uvedených tříd (je to opět množina) nazýváme *faktorovou množinou* množiny M vzhledem k relaci $\mathcal{R}$. Užívá se pro ni označení $\mathsf{M}/\mathcal{R}$.

Pokusme se nyní o trochu obecnější pohled na věc. V uvedeném příkladě jsme rozdělili množinu M na disjunktní třídy a pomocí daného rozdělení jsme definovali na M relaci $\mathcal{R}$. Vzniká zcela zákonitě otázka: Když je dána na M relace $\mathcal{R}$, je možno pomocí této relace $\mathcal{R}$ rozdělit množinu M na disjunktní třídy tak, že každá jednotlivá třída T_x obsahuje právě všechny prvky y, pro které platí $x \mathcal{R} y$? Takovou třídu T_x bychom pak mohli zapsat ve tvaru $\mathsf{T}_x = \{y | x \mathcal{R} y\}$. Odpověď na danou otázku obsahuje věta 1.1; dříve však musíme zavést pojem *ekvivalence* na množině.

Definice 1.1. Na množině M je dána relace $\mathcal{R}$. Je-li tato relace reflexivní, symetrická a tranzitivní, nazývá se *ekvivalencí* na množině M.

K definici 1.1 dodejme jen to, že požadované vlastnosti jsou dány vztahy (1.2). Jako ilustrace nám poslouží příklady I—III; relace v příkladech I a III je ekvivalencí na M, relace z příkladu II není ekvivalencí na M (pokud má škola aspoň jednoho žáka).

Věta 1.1. *Na množině* M *je dána relace* $\mathcal{R}$*; pro každý prvek* $x \in \mathsf{M}$ *sestrojme třídu* $\mathsf{T}_x = \{y | x \mathcal{R} y\}$. *Relace* $\mathcal{R}$ *je ekvivalencí na* M *právě tehdy, když systém všech* T_x *tvoří disjunktní rozklad množiny* M.

Disjunktní rozklad množiny M znamená, že pro libovolné dvě třídy T_x, T_z platí

$$\mathsf{T}_x = \mathsf{T}_z \quad \text{nebo} \quad \mathsf{T}_x \cap \mathsf{T}_z = \emptyset . \tag{1.3}$$

Důkaz věty vynecháme, i když není obtížný. Stačí totiž ukázat, že podmínky (1.2) a (1.3) jsou vzájemně ekvivalentní.

Je zřejmé, že každá třída T_x disjunktivního rozkladu je jednoznačně určena libovolným svým prvkem (tzv. *reprezentantem*). Později se na to odvoláme.

1.4. Problém zavedení euklidovského prostoru E_3

Převážná část našich úvah bude prováděna v trojrozměrném prostoru, který nazýváme euklidovským prostorem a označujeme E_3. Definovat euklidovský prostor E_3 není ovšem věc tak jednoduchá, jak by se mohlo na první pohled zdát. Zdůrazněme předem, že by bylo přinejmenším pochybné říci, že E_3 je prostor, ve kterém žijeme. Taková definice by totiž nemohla být podkladem žádné matematické úvahy, s takovou definicí se prostě řečeno nedá pracovat.

Nejčastěji bývá prostor E_3 chápán jako množina prvků zvaných body, která má jisté pevně stanovené vlastnosti. Říkáme také, že E_3 je množina bodů vybavená jistou strukturou. Budovat ovšem prostor E_3 axiomaticky je práce nesmírně obtížná. Poprvé se tímto problémem zabýval slavný řecký geometr *Euklides* (365? až 300? př. n. l.) ve své knize *Základy*. Moderně celou problematiku vyčerpávajícím způsobem zpracoval neméně slavný německý matematik *D. Hilbert* (1862 až 1943) v proslulé knize *Grundlagen der Geometrie (Základy geometrie)*.

Jistě čekáte, jak se s tímto problémem vypořádáme v naší knížce. Cílem této publikace není konstrukce euklidovského prostoru E_3 a z hlediska našich potřeb bude stačit, seznámíme-li se jen s těmi vlastnostmi E_3, které jsou pro další účely nutné; to nebude nijak obtížné, neboť většinu těchto vlastností zná čtenář ze střední školy. Skutečnost je ovšem taková, že geometrie není ve středoškolských učebnicích budována zcela důsledně a nelze to mít ani za zlé. O hlubší pohled se pokusíme proto ve 4. kapitole, kde bude naznačena konstrukce prostoru afinního a euklidovského pomocí vektorových prostorů.

1.5. Euklidovská přímka

Na dané přímce o zvolíme úsečku OJ délky 1 (obr. 3). Bod O dělí přímku o na dvě polopřímky. Polopřímku OJ nazveme *kladnou* poloosou o_+, polopřímku k ní opačnou nazveme *zápornou* poloosou o_-. Každému bodu X přiřadíme na ose o číslo x a nazveme je *souřadnicí* bodu X. Přiřazení provedeme takto:

a) Je-li $X \in o_+$, pak $x = OX$.
b) je-li $X \in o_-$, pak $x = -OX$.

Obr. 3. Souřadný systém na přímce.

Všechny vnitřní body kladné poloosy o_+ mají proto kladné souřadnice, všechny vnitřní body záporné poloosy o_- mají souřadnice záporné; bod O má souřadnici 0 a říkáme mu *počátek* soustavy souřadnic. Jelikož každému bodu X odpovídá jediné reálné číslo a každému reálnému číslu jediný bod, mluvíme o vzájemně jednoznačném zobrazení. Nemůže proto dojít k nedorozumění, jestliže bod X o souřadnici x napíšeme ve tvaru $X = [x]$. Podle této dohody platí pro body v obr. 3 $O = [0]$, $J = [1]$, $A = [3]$, $B = [—2]$.

Vzdálenost d libovolných dvou bodů $X = [x]$, $Y = [y]$ je určena velikostí úsečky XY. Platí: $d = |x — y|$. Není problémem ověřit uvedený vztah, ať je poloha bodů X, Y jakákoliv. Při zvolené jednotkové úsečce OJ je číslo d nezávislé na volbě bodu O, budeme proto říkat, že vzdálenost dvou bodů je nezávislá na volbě soustavy souřadnic.

Pro každou dvojici bodů $X = [x]$, $Y = [y]$, kde $x < y$, a střed $S = [s]$ úsečky XY platí:

$$s = x + \frac{|x — y|}{2} = x + \frac{y — x}{2} = \frac{x + y}{2}\,. \quad (1.4)$$

Je-li $x > y$, dospějeme k témuž závěru. Přímku o, o níž jsme dosud jednali, nazýváme euklidovskou přímkou E_1. Na E_1 zavedeme další důležitý pojem.

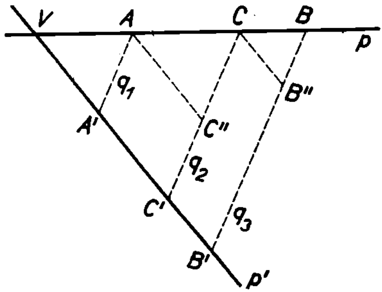
Definice 1.2. Na přímce E_1 jsou dány tři body $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$, přičemž $b \neq c$. Číslo $(c — a) : (c — b)$ nazýváme *dělicím poměrem* uspořádané trojice bodů A, B, C a označujeme (ABC); píšeme pak

$$(ABC) = \frac{c - a}{c - b}. \tag{1.5}$$

Z (1.5) je vidět, že (ABC) je vlastně, snad až na znaménko, poměr vzdáleností $AC : BC$. Nechť $a < b$; jestliže $(ABC) < 0$, bod C odděluje body A, B. Když $0 < (ABC) < 1$, odděluje bod A body C, B. Pokud $(ABC) = 0$, je $A = C$; a konečně případ $(ABC) > 1$ znamená, že bod B odděluje body A, C (obr. 4).

Obr. 4. Dělicí poměr (ABC).

Vraťme se nyní trochu k planimetrii (obr. 5). Mějme dvě různoběžné přímky p, p', které se protínají v bodě V. Libovolnými body A, B, C ($B \neq C$) přímky p veďme rovnoběžky $q_1 \parallel q_2 \parallel q_3$ tak, že tyto rovnoběžky protnou přímku p' v bodech A', B', C' ($B' \neq C'$). Pořadí bodů A, B, C na p je stejné jako pořadí bodů A', B', C' na p'; leží-li bod C na p mezi body A, B, pak C' leží na p' mezi body A', B' atd. Rovnoběžky s přímkou p' vedené body A, C protnou přímky q_2, q_3 po řadě v bodech C'', B''. Z planimetrie pak víme, že $\triangle\, AC''C \sim \triangle\, CB''B$, proto $AC : BC = A'C' : B'C'$. Řekli jsme si již, že poměry $AC : BC$ a $A'C' : B'C'$ určují po řadě — až snad na znaménko — dělicí poměry (ABC) a $(A'B'C')$. Dokázali jsme tím velmi důležité tvrzení:



Obr. 5. Dělicí poměr v rovnoběžném promítání.

Věta 1.2. *Rovnoběžným promítáním se dělicí poměr nemění.*

Příklad 1.1. Je-li S střed úsečky AB, pak zřejmě $(ABS) = -1$.

Příklad 1.2. Leží-li bod M na úsečce AB a platí $AM : BM = 2 : 5$, pak $(ABM) = -\frac{2}{5}$.

Příklad 1.3. Určete souřadnici bodu C, víte-li, že $(ABC) = \lambda$, kde $\lambda \neq 1$.

Řešení: Podle (1.7) máme

$$\frac{c - a}{c - b} = \lambda\,;$$

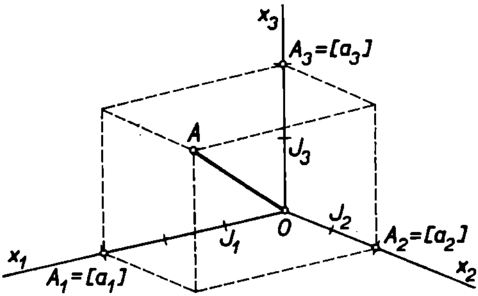
odtud plyne:

$$c = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda}.$$

1.6. Euklidovský prostor E_3

Zvolme v prostoru tři různoběžky, z nichž každé dvě jsou vzájemně kolmé; jejich společný bod označme O. Na jedné z nich zvolme úsečku OJ_1 délky 1 a na dvou zbývajících sestrojme body J_2, J_3 tak, aby úsečky OJ_1, OJ_2, OJ_3 byly shodné. Na přímkách OJ_1, OJ_2, OJ_3 můžeme pak zavést souřadnice bodů naprosto stejně, jako jsme to udělali s přímkou OJ v odstavci 1.5 (obr. 6).

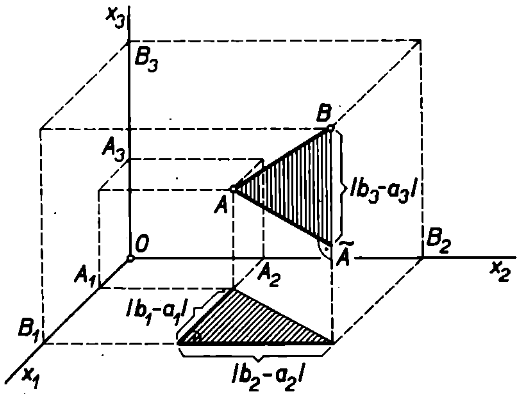
Uspořádanou čtveřici bodů $\{O, J_1, J_2, J_3\}$ nazveme *kartézskou soustavou souřadnic* v E_3. Pro přímky OJ_1, OJ_2, OJ_3, kterým říkáme *souřadnicové osy*, zaveďme tradiční označení $OJ_1 = x_1$, $OJ_2 = x_2$, $OJ_3 = x_3$. Dvojice souřadnicových os určují tři roviny, kterým říkáme *souřadnicové roviny*.



Obr. 6. Kartézská soustava souřadnic v E_3.

Zvolme v E_3 libovolný bod A a veďme tímto bodem roviny, které jsou rovnoběžné s rovinami souřadnicovými. Pomocné roviny protínají osy x_1, x_2, x_3 v jistých bodech, které označíme A_1, A_2, A_3 (obr. 6). Každý z bodů A_i ($i = 1, 2, 3$) má na své ose x_i jednoznačně určenou souřadnici a_i. Bodu A jsou jednoznačně přiřazeny body A_i a tím také tři pevná čísla a_i. Zvolme obráceně na každé souřadnicové ose x_i bod A_i o souřadnici a_i; bodům A_i je pak jednoznačně přiřazen bod A jako vrchol jistého kvádru s tělesovou úhlopříčkou OA.

Můžeme tedy říci: *V dané kartézské soustavě souřadnic* $\{O, J_1, J_2, J_3\}$ *je každému bodu* $A \in \mathsf{E}_3$ *přiřazena jednoznačně uspořádaná trojice čísel a každou uspořádanou trojicí čísel je stanoven jediný bod* $A \in \mathsf{E}_3$. Uspořádanou trojici čísel a_1, a_2, a_3 nazýváme *kartézskými souřadnicemi* bodu A a píšeme $A = [a_1, a_2, a_3]$. V obr. 6. je $A = [3; 2; 2]$. Dodejme ještě, že bodům souřadnicových os přiřadíme také tři souřadnice; dvě z nich jsou vždy nulové, třetí je určena souřadnicí bodu na příslušné ose. V obr. 6. je $A_1 = [3, 0, 0)$, $A_2 = [0, 2, 0]$, $A_3 = [0, 0, 2]$.



Obr. 7. Vzdálenost bodů *A*, *B*.

Zvolme v E_3 dva různé body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$. Střed S úsečky AB sestrojíme tak, že přímku AB považujeme na chvíli za E_1 a žádáme, aby bylo $AS = BS$. Z odstavce 1.5 víme, že poloha bodu S je určena jednoznačně. Označíme kolmé průměty bodů A, B, S do souřadnicových os opět A_i, B_i, S_i ($i = 1, 2, 3$). Užitím známých vět o podobnosti trojúhelníků zjistíme, že body S_i jsou středy úseček A_iB_i; odtud okamžitě máme pro souřadnice středu $S = [s_1, s_2, s_3]$ úsečky AB:

$$s_i = \frac{a_i + b_i}{2} \; (i = 1, 2, 3)\,. \tag{1.8}$$

Vzdálenost d libovolných dvou bodů A, B je pak dána vzorcem

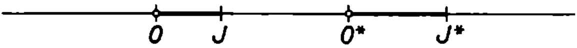
$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\,. \tag{1.9}$$

K důkazu (1.9) stačí použít Pythagorovy věty na trojúhelník $AB\tilde{A}$ (obr. 7).

1.7. Afinní geometrie přímky

Dříve, než se pokusíme o přesnější vymezení některých pojmů, vraťme se k euklidovské přímce E_1, na níž je zvolena soustava souřadnic $\{O, J\}$; říkejme jí kartézská. Zvolme na E_1 dvojici různých bodů O^*, J^* (obr. 8) a domluvme se na těchto požadavcích:

1. nechť každému bodu $X = [x]$ odpovídá jisté číslo $\bar{x}$, které vyhovuje rovnici $\bar{x} = \alpha x + \beta$; kde α, β jsou daná čísla, $\alpha \neq 0$;
2. bodu $O^* = [o^*]$ ať je danou rovnicí přiřazeno číslo nula, bodu $J^* = [j^*]$ ať odpovídá číslo 1.



Obr. 8. Afinní souřadný systém na přímce.

Tím jsou jednoznačně určeny konstanty α, β. Dosadíme-li totiž za x do rovnice $\bar{x} = \alpha x + \beta$ nejprve o^* a pak j^*, získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha o^* + \beta &= 0\,, \\ \alpha j^* + \beta &= 1\,, \end{aligned}$$

z níž plyne:

$$\alpha = \frac{1}{j^* - o^*}\,, \quad \beta = \frac{o^*}{o^* - j^*}\,.$$

Různost bodů O^*, J^* má za následek rozdílnost čísel o^*, j^*, popsaným způsobem odpovídá tedy každému bodu $X = [x]$ jediné číslo

$$\bar{x} = \frac{1}{j^* - o^*}\,x + \frac{o^*}{o^* - j^*}\,. \tag{1.9}$$

Čísla (1.9) považujeme za jakési nové tzv. *afinní* souřadnice bodů X. Počítejme pomocí nich dělicí poměr bodů A, B, C, který označíme dočasně $(\overline{ABC})$. Máme:

$$(\overline{ABC}) = \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{c} - \bar{b}} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{j^* - o^*}\,c + \dfrac{o^*}{o^* - j^*}\right) - \left(\dfrac{1}{j^* - o^*}\,a + \dfrac{o^*}{o^* - j^*}\right)}{\left(\dfrac{1}{j^* - o^*}\,c + \dfrac{o^*}{o^* - j^*}\right) - \left(\dfrac{1}{j^* - o^*}\,b + \dfrac{o^*}{o^* - j^*}\right)} =$$

$$= \frac{c - a}{c - b} = (ABC)\,.$$

Určeme dále pomocí souřadnic (1.9) vzdálenost $\bar{d}$ libovolných dvou bodů X, Y:

$$\bar{d} = |\bar{x} - \bar{y}| =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{j^* - o^*}x + \frac{o^*}{o^* - j^*}\right) - \left(\frac{1}{j^* - o^*}y + \frac{o^*}{o^* - j^*}\right)\right| =$$

$$= \frac{|x - y|}{|j^* - o^*|}.$$

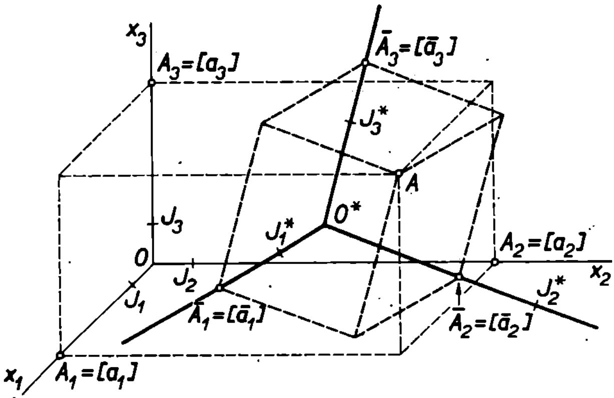
Zjistili jsme, že $(\overline{ABC}) = (ABC)$; dělicí poměr se nemění a nezávisí proto na výběru bodů O^*, J^*. Vzdálenost dvou bodů se však nezmění pouze v tom případě, když úsečka O^*J^* je shodná s jednotkovou úsečkou OJ.

Řekněme, že máme k dispozici pouze čísla (1.9) a neznáme kartézské souřadnice bodů. Celou věc si můžeme představit třeba tak, že „absolutní jednotka" je nám utajena. Jakmile zvolíme na přímce E_1 dva různé body O^*, J^* a přiřadíme jim po řadě čísla 0, 1, máme v tom okamžiku na E_1 definovánu soustavu souřadnic $\{O^*, J^*\}$, které budeme říkat *afinní soustava souřadnic.* Kartézská soustava se tedy jeví jako zvláštní případ afinní soustavy souřadnic.

Jestliže neznáme vztah k původní kartézské soustavě $\{O, J\}$, vzniká přirozeně otázka, kterým geometrickým otázkám můžeme věnovat svou pozornost bez nebezpečí, že naše závěry budou chybné. Je-li dána afinní soustava souřadnic $\{O^*, J^*\}$, ztrácí význam pojem vzdálenosti; z našich úvah však plyne, že se zachovává dělicí poměr (ABC). Můžeme tedy porovnávat úsečky bez znalosti „absolutní jednotky" a vše je v nejlepším pořádku. Geometrii, kterou můžeme na E_1 provádět pomocí afinních souřadnic, nazveme *afinní geometrií přímky.*

1.8. Afinní geometrie prostoru E_3

V odstavci 1.7 jsme si dost podrobně ujasnili, co rozumíme afinní geometrií přímky. Také jsme se již zabývali euklidovským prostorem E_3 a zavedli jsme tam kartézskou soustavu souřadnic $\{O, J_1, J_2, J_3\}$. Přitom, zhruba řečeno, je pro nás euklidovská geometrie v E_3 souhrnem definic a vět, které získáme při studiu prostoru E_3. V našich dalších úvahách budeme vždy předpokládat, že je dána nějaká pevná soustava souřadnic (afinní či kartézská). Transformací soustavy souřadnic se zabývat nebudeme, zabralo by to příliš mnoho času. Abychom si však ujasnili, co rozumíme afinní geometrií prostoru E_3, musíme se na tomto místě transformací soustavy souřadnic v jistém směru zabývat. Půdu k tomu máme však již připravenu.



Obr. 9. Afinní soustava souřadnic v E_3.

Předpokládejme, že v E_3 je dána kartézská soustava souřadnic $\{O, J_1, J_2, J_3\}$ a zvolme čtyři body O^*, J_1^*,

J_2^*, J_3^* tak, že neleží v jedné rovině; stejně jako jsme to udělali v předchozím odstavci s přímkou, přiřaďme bodu O^* číslo nula a každému bodu J_i^* $(i = 1, 2, 3)$ číslo 1. Pak lze každému bodu $X \in \mathsf{E}_3$ přiřadit rovnicí $\bar{x}_i = \alpha_i x_i + \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ jednoznačně uspořádanou číselnou trojici $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$ a čísla $\bar{x}_i$ nazvat *afinními souřadnicemi* bodu X. Ryze geometricky vypadá celá věc tak, že nové souřadnicové osy nejsou obecně vzájemně kolmé a úsečky $O^*J_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$ nejsou obecně shodné (obr. 9). Souřadnice libovolného bodu A získáme — stejně jako v případě kartézských souřadnic — pomocí průmětů $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ do souřadnicových os (srov. odst. 1.6).

Jak jsme ukázali v odstavci 1.5, rovnoběžné promítání zachovává dělicí poměr bodů (ABC). Bez ohledu na výchozí kartézskou soustavu (tedy bez znalosti „absolutní jednotky") můžeme v E_3 studovat ty otázky, které se týkají vzájemné polohy geometrických objektů, a také všechny vztahy, které lze odvodit pomocí dělicího poměru. Nemůžeme však věnovat pozornost těm problémům, v nichž vystupuje vzdálenost dvou bodů (tj. velikost úsečky) a velikost úhlu, neboť tyto dva pojmy spolu velmi úzce souvisí.

Čtenář si může představit, že se nachází v této situaci: Chce studovat vlastnosti prostoru E_3, ale „zapomněl" vzít s sebou měřítko a úhloměr. Má však jistý „přístroj", který mu dovoluje

a) rozhodnout o vzájemné poloze dvou přímek,

b) na každé dané přímce porovnávat úsečky pomocí dělicího poměru,

c) rozhodnout o vzájemné poloze přímky a roviny, dvou rovin atd.

Tyto a jim podobné otázky tvoří afinní geometrii prostoru E_3.

POZNÁMKA 1.1. V matematice se snažíme, aby naše úvahy měly co nejširší dosah, proto saháme často k co nejabstraktnějšímu pojetí. V našem případě jsme zvolili trochu názornější přístup. Bylo by důslednější zavést jistý afinní prostor A_3, v němž by nebyla definována tzv. *euklidovská metrika.* Prostor A_3 by byl obecnějším prostorem než E_3 a studiem A_3 bychom automaticky dělali afinní závěry pro E_3, ale také pro jiné prostory, jako je tzv. Minkowského prostor apod.

Řekli jsme si ovšem již na jiném místě, že se v úvodní kapitole omezíme jen na nutné minimum nových pojmů z hlediska potřeb 2. a 3. kapitoly. Při definici prostoru A_3 se totiž setkáváme s obdobnými potížemi, jako při definici E_3. Hloubavějšímu čtenáři je určena 4. kapitola, v níž je položen solidnější základ pro studium obou uvedených prostorů.

2. kapitola

AFINNÍ GEOMETRIE

Úvahy této kapitoly se budou opírat o euklidovský prostor E_3, případně o euklidovskou rovinu E_2. Obsah pojmu afinní geometrie jsme si ujasnili už v 1. kapitole. Budeme proto „ignorovat" úlohy, které se neobejdou bez metrických pojmů „vzdálenost dvou bodů" a „velikost úhlu". Předmětem našeho zájmu bude tedy pouze vzájemná poloha geometrických objektů z hlediska incidence, uspořádání a rovnoběžnosti; v této souvislosti mluvíme také o geometrii polohy. Způsob studia těchto otázek může být samozřejmě různý, naše metoda bude založena na vektorovém počtu; seznámení s vektorovým počtem bude náš první úkol.

2.1 Pojem vektoru

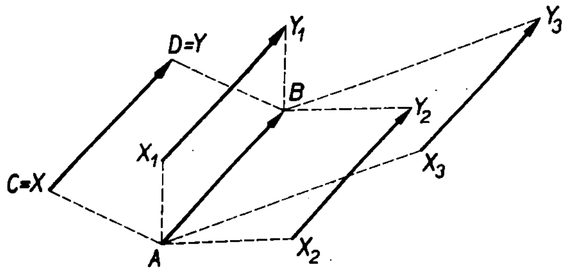
Nejdůležitějším bodem tohoto odstavce je definice 2.4; pro naše účely bude však prospěšné názornější hledisko.

Definice 2.1. Jsou-li A, B dva libovolné body prostoru E_3, pak uspořádanou dvojici (A, B) nazveme *vázaným vektorem* v E_3 a označíme $\overrightarrow{AB}$. Bodu A říkáme *počáteční*, bodu B *koncový* bod vázaného vektoru $\overrightarrow{AB}$; je-li $A = B$, pak vázaný vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ nazveme *nulovým* vázaným vektorem v bodě A, není-li $A = B$, pak $\overrightarrow{AB}$ je tzv. *nenulový* vázaný vektor.

Pro názornost budeme naše úvahy doprovázet obrázky. Nenulové vázané vektory znázorníme úsečkou, opatřenou šipkou v koncovém bodě.

Definice 2.2. Jestliže $A = C'$, $B = D'$, pak píšeme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ a vázané vektory nazýváme *totožnými*.

Definice 2.3. Nechť $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou dva vázané vektory v E_3; je-li možno jediným rovnoběžným posunutím dosáhnout, aby platilo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'D'}$, kde C', D' jsou v daném posunutí obrazy bodů C, D, pak říkáme, že vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou *ekvipolentní* a píšeme $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ (obr. 10).



Obr. 10. Vázané vektory, ekvipolentní s vázaným vektorem $\overrightarrow{AB}$.

Je dobré si hned uvědomit, že ve smyslu poslední definice je každý vázaný vektor, který je ekvipolentní s nulovým vázaným vektorem, rovněž nulový vázaný vektor.

Zavedené pojmy nám již dovolují přikročit k definici vektoru.

Definice 2.4. Nechť $\overrightarrow{AB}$ je libovolný vázaný vektor v E_3; množinu všech vázaných vektorů $\overrightarrow{XY}$, pro které platí $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$, nazýváme *vektorem* v E_3.

Vektory budeme značit malými tučnými písmeny $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ apod.; označíme-li vektor, zavedený definicí 2.4, třeba $\mathbf{u}$, pak vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ bývá často nazýván *reprezentantem* nebo též *umístěním* vektoru $\mathbf{u}$. Řekneme-li „vektor $\mathbf{u}$ je umístěn v bodě A", bude to znamenat, že příslušný vázaný vektor má počáteční bod v bodě A. Vektor, který je reprezentován vázaným vektorem $\overrightarrow{AA}$, budeme přirozeně nazývat *nulovým* vektorem a značit vždy $\mathbf{o}$. V literatuře bývají někdy vektory nazývány volnými vektory. Zavedená označení budeme důsledně dodržovat; definici 2.4 můžeme stručně psát ve tvaru

$$\mathbf{u} = \{\overrightarrow{XY} \mid \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}\}\,.$$

Vraťme se ještě na chvíli k obr. 10. Dá se ukázat (a z názoru je to patrné), že reprezentantem vektoru $\mathbf{u}$ může být kterýkoliv vázaný vektor $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$. Ze základních vlastností rovnoběžného posunutí v E_3 plyne, že pro vázané vektory platí:

1. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ (vztah reflexivní),
2. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ (vztah symetrie),
3. $(\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$
   (vztah tranzitivní).

To znamená, že ekvipolence vektorů je ekvivalencí ve smyslu odstavce 1.3. Množiny všech navzájem ekvipolentních vázaných vektorů tvoří proto disjunktní rozklad. Libovolnou třídu tohoto rozkladu (tj. vektor) lze reprezentovat podle odst. 1.3 libovolným prvkem.

Pojem vektoru si přiblížíme na případu racionálního čísla. Každý zlomek množiny

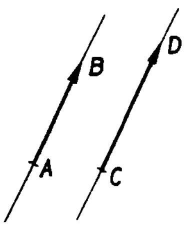
$$M = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{2000}{5000}, \dots \right\}$$

vyjadřuje totéž racionální číslo. Protože každý prvek z M toto racionální číslo určuje jednoznačně, dá se říci, že každý prvek z M je reprezentantem daného racionálního čísla. Je přitom lhostejné, který zlomek množiny M za reprezentanta zvolíme. Racionální číslo je tedy v jistém smyslu pěknou analogií vektoru (volného), každý zlomek z množiny M je pak analogií reprezentanta vektoru.

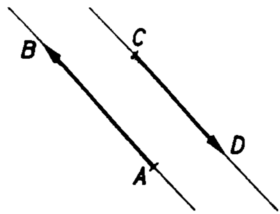
Dále bude účelné zavést některá samozřejmá označení. Předpokládejme, že $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou dva nenulové vektory, $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jejich umístění.

a) Řekneme, že vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou si rovny a píšeme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, jestliže $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

b) Prohlásíme, že nenulové vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou *rovnoběžné* a píšeme $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, je-li přímka AB rovnoběžná s přímkou CD. Mohou zde ovšem nastat dva případy. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nazveme *souhlasně* rovnoběžné, jsou-li souhlasně



Obr. 11a. Dva souhlasně rovnoběžné vektory.



Obr. 11b. Dva nesouhlasně rovnoběžné vektory.

rovnoběžné polopřímky AB a CD (obr. 11a); jestliže polopřímky AB, CD jsou *nesouhlasně* rovnoběžné, prohlásíme totéž o vektorech $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (obr. 11b).

Poznamenejme na závěr, že rovnost a rovnoběžnost vektorů je nezávislá na výběru reprezentanta; to si čtenář snadno promyslí sám.

2.2. Souřadnice vektoru

Jak napovídá název odstavce, přiřadíme každému vektoru jistým způsobem čísla, která nazveme souřadnicemi vektoru. Použití souřadnic nám umožňuje převádět problémy geometrické na algebraické (tj. početní), výsledky algebraických operací pak interpretujeme geometricky. Tomuto způsobu studia geometrických objektů a vztahů mezi nimi říkáme analytická metoda v geometrii.

Zavedení souřadnic by se mohlo zdát předčasné, neboť celou řadu problémů z afinní geometrie lze řešit vektorově bez použití souřadnic. Řešení každé úlohy bez souřadnic za každou cenu by ovšem bylo příliš samoúčelné a ne vždy snadné; čtenář se však brzy přesvědčí, že v některých případech je to způsob velmi elegantní a efektivní, neboť má ještě jednu důležitou přednost — je totiž předem jasné, že dosažený výsledek nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Odborně říkáme, že taková vlastnost geometrického útvaru je *invariantní* vůči transformaci souřadnic. Budeme proto používat obou zmíněných metod, vždy té, která se ukáže v daném případě vhodnější.

Aby se čtenář mohl s plným porozuměním věnovat dalším řádkům, doporučujeme mu, aby se znovu vrátil k odstavci 1.5.

Předpokládejme nyní, že v E_3 je dána libovolná afinní soustava souřadnic $\{O, J_1, J_2, J_3\}$; pro začátek stačí představa, že výchozí soustava souřadnic je kartézská.

Nechť $\overrightarrow{AB}$ je vázaný vektor v E_3, označme $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ a vypočítejme tato tři čísla:

$$b_1 - a_1, \quad b_2 - a_2, \quad b_3 - a_3. \tag{2.1}$$

Zvolme v E_3 další vázaný vektor $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, označme zcela obdobně $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$ a utvořme opět čísla

$$d_1 - c_1, \quad d_2 - c_2, \quad d_3 - c_3; \tag{2.2}$$

ukážeme, že platí rovnosti

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= d_1 - c_1, \\ b_2 - a_2 &= d_2 - c_2, \\ b_3 - a_3 &= d_3 - c_3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Víme, že pro střed $S = [s_1, s_2, s_3]$ nějaké úsečky XY platí

$$s_i = \frac{x_i + y_i}{2}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou ekvipolentní, proto úsečka AD má nutně týž střed S jako úsečka BC; máme tedy (obr. 12):

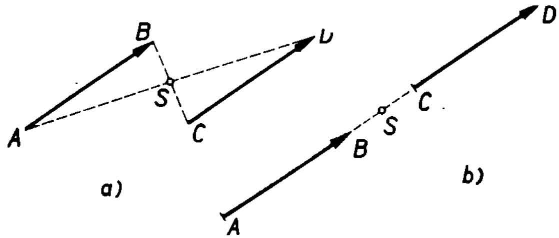
$$s_i = \frac{b_i + c_i}{2} = \frac{a_i + d_i}{2}, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.4}$$

Rovnost (2.4) představuje tři rovnosti mezi souřadnicemi se stejným indexem, a plyne z ní, že

$$b_i - a_i = d_i - c_i; \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.5}$$

Rovnosti (2.5) jsou však jen stručnějším zápisem rovností (2.3).

A nyní obráceně: Předpokládejme, že pro dva vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ platí rovnosti (2.3); pak ovšem platí i rovnost (2.4) a úsečky AD, BC mají týž střed. Tím je dokázáno:



Obr. 12. Dva ekvipolentní vázané vektory.

Věta 2.1. *Dva vázané vektory* $\overrightarrow{AB}$ *a* $\overrightarrow{CD}$ *jsou ekvipolentní právě tehdy, jestliže platí rovnosti* (2.3).

Uvedená věta má pro nás zásadní důležitost, neboť nám umožňuje zavést souřadnice vektoru. Vektor $\mathbf{u}$, jak víme, je množina všech navzájem ekvipolentních vázaných vektorů. Tyto vázané vektory mají všechny společnou vlastnost; každému z nich lze totiž přiřadit tři pevná čísla a tato uspořádaná trojice je stejná při každém umístění vektoru $\mathbf{u}$. Má proto smysl říci:

Definice 2.5. Je-li vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ umístěním vektoru $\mathbf{u}$, pak čísla

$$u_1 = b_1 - a_1, \quad u_2 = b_2 - a_2, \quad u_3 = b_3 - a_3 \qquad (2.6)$$

nazýváme *souřadnicemi* vektoru $\mathbf{u}$ a píšeme

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)\,, \tag{2.7}$$

nebo také

$$\mathbf{u} = B - A\,. \tag{2.8}$$

Souřadnice vektoru budeme psát v oblých závorkách, abychom i formálně odlišili vektory a body, u nichž používáme závorek hranatých.

Čtenáři je jistě známo, že každému bodu v prostoru E_3 lze přiřadit jedinou uspořádanou trojici čísel a každá uspořádaná trojice čísel nám určuje jediný bod v E_3. Stejnou otázku si musíme přirozeně položit i v případě daného vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Že každému vektoru lze přiřadit jedinou trojici čísel, bylo již řečeno; nyní tedy obráceně: je-li dána trojice čísel u_1, u_2, u_3 v uvedeném pořadí, pak existuje jediný bod $U = [u_1, u_2, u_3]$ a vázaný vektor $\overrightarrow{OU}$ je zřejmě umístěním vektoru $\mathbf{u} = U - O$. Vektor $\mathbf{u}$ tedy existuje, a to jediný podle věty 2.1. Čtenář si jistě snadno dokáže, že všechny souřadnice nulového vektoru jsou rovny nule.

Dále si čtenář snadno dokáže, že rovnost dvou vektorů nastává právě tehdy, jestliže jsou si rovny odpovídající souřadnice obou vektorů. Tento fakt můžeme též zapsat tímto způsobem:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow u_i = v_i \; (i = 1, 2, 3)\,.$$

Všimněme si ještě jednou rozdílu v označení $\overrightarrow{AB}$, $B - A$; prvé znamená vázaný vektor, druhé vektor, jehož umístěním je $\overrightarrow{AB}$. Tedy každými dvěma body A, B je určen jednoznačně vektor $B - A$. Dohodneme se, že tento vektor budeme nazývat rozdílem bodů B, A. Touto úmluvou jsme tedy zavedli operaci, *rozdíl dvou* *bodů*; výsledkem této operace je vektor. Heslovitě, i když méně přesně, můžeme též říci: „Bod minus bod rovná se vektor.“ Důležité pro praktické výpočty je, že pro vektor $B - A$ platí $B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, o čemž se snadno přesvědčíte na základě (2.6) a (2.8).

Rovnost $\mathbf{u} = B - A$ je tedy ekvivalentní se soustavou rovností

$$\begin{aligned} u_1 &= b_1 - a_1, \\ u_2 &= b_2 - a_2, \\ u_3 &= b_3 - a_3; \end{aligned} \tag{2.10}$$

rovnice $\mathbf{u} = B - A$ znamená proto formální zápis tří rovnic (v souřadnicích). Podobně můžeme zapsat ostatně také střed úsečky AB

$$S = \frac{A + B}{2}. \tag{2.11}$$

Čtenář se jistě ptá, zda zavedeme obecně také součet dvou bodů. K této otázce se ještě vrátíme, řekněme si však již nyní, že pojem součet dvou bodů nemá pro studium geometrických útvarů význam, i když (2.11) kupodivu smysl má, o tom však později.

2.3. Součet bodu a vektoru

Nic nám nebrání, abychom rovnosti (2.10) psali ve tvaru $a_i + u_i = b_i$ $(i = 1, 2, 3)$. To je ovšem stejné, jako když ekvivalentní rovnost (2.8) píšeme ve formě

$$A + \mathbf{u} = B; \tag{2.12}$$

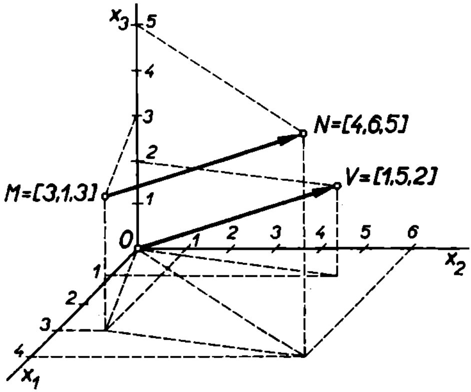
rovnost (2.12) nám říká: Jestliže k souřadnicím bodu A přičteme odpovídající souřadnice vektoru $\mathbf{u}$, obdržíme souřadnice bodu B. Heslovitě také říkáme, že bod plus vektor dává bod. Připomeňme si, že $\overrightarrow{AB}$ je umístěním vektoru $\mathbf{u}$. Jsme tedy vedeni k této definici:

Definice 2.6. Umístěme počáteční bod nějakého vektoru $\mathbf{u}$ do bodu A a koncový bod takto umístěného vektoru označme B; bod B pak nazveme *součtem* bodu A s vektorem $\mathbf{u}$ a píšeme (2.12).

I když nejde o složitý pojem, ilustrativní příklad nám jistě neublíží.

Příklad 2.1. Je dán bod $M = [3, 1, 3]$ a vektor $\mathbf{v} = (1, 5, 2)$. Sestrojte bod $N = M + \mathbf{v}$ a nakreslete příslušný obrázek.

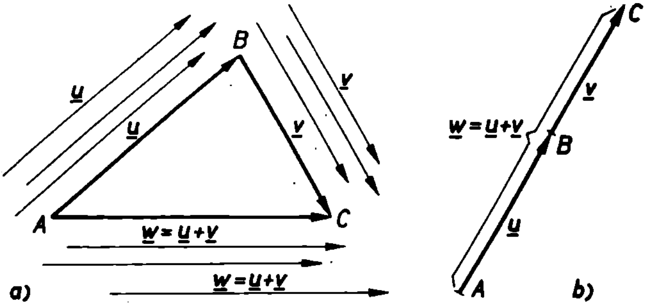
Řešení. Platí: $N = M + \mathbf{v} = [3, 1, 3] + (1, 5, 2) = [4, 6, 5]$; konstrukce je na obr. 13.



Obr. 13. Grafický součet [3, 1, 3] + (1, 5, 2).

2.4. Součet vektorů

Definice 2.7. Mějme dva libovolné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a nechť $\overrightarrow{AB}$ je nějaké umístění vektoru $\mathbf{u}$; vektor $\mathbf{v}$ umístíme do bodu B, koncový bod označíme C. Dále označme $\mathbf{w}$ vektor, jehož umístěním je $\overrightarrow{AC}$ (obr. 14).



Obr. 14. Součet dvou vektorů.

Vektor $\mathbf{w}$ nazýváme *součtem* vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a píšeme

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \,. \tag{2.13}$$

Z uvedené definice při zachování zavedených označení plyne, že

$$\mathbf{w} = C - A = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) \,,$$

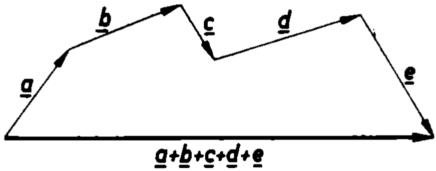
neboli

$$\mathbf{w} = (c_1 - b_1 + b_1 - a_1,\ c_2 - b_2 + b_2 - a_2,\ c_3 - b_3 + b_3 - a_3) \,;$$

potom však platí

$$\mathbf{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \,.$$

ciativního vztahu je možnost vypuštění závorek při součtu vektorů; budeme proto psát stručně $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ atp. (Důkazovou cestou pro větší počet sčítanců by zde byla matematická indukce.) Na obr. 15 je znázorněn součet vektorů $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}$; výsledný vektor (silně vytažený) je jednoznačně stanoven, ať provedeme uzávorkování jakkoliv.



Obr. 15. Grafický součet $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}$.

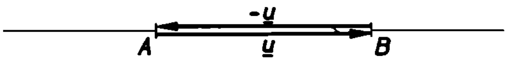
$\mathscr{A}_3$) Důkaz je zřejmý:

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = (u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0) = \mathbf{u} .$$

$\mathscr{A}_4$) K danému vektoru $\mathbf{u}$ hledáme takový vektor $\mathbf{x}$, aby platilo

$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{o} ;$$

tato rovnice rozepsaná po složkách (tj. souřadnicích) však platí právě tehdy, jestliže $\mathbf{x} = (-u_1, -u_2, -u_3)$. Označme $\mathbf{x} = -\mathbf{u}$ a důkaz je ukončen. Dodejme pouze, že vektor $-\mathbf{u}$ nazýváme opačným vektorem k vektoru $\mathbf{u}$; jestliže $\overrightarrow{AB}$ je umístěním vektoru $\mathbf{u}$, pak zřejmě $\overrightarrow{BA}$ je umístěním vektoru $-\mathbf{u}$ (obr. 16).



Obr. 16. Vektory opačné.

Na závěr uveďme důležitou rovnost

$$(A + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = A + (\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

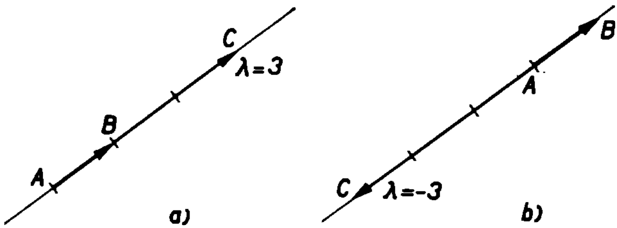
kterou si čtenář snadno odvodí sám.

2.5. Součin vektoru s reálným číslem

Definice 2.8. Nechť je $\overrightarrow{AB}$ umístěním vektoru $\mathbf{u}$ a λ reálné číslo. Jestliže $\lambda = 0$ nebo $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, pak součinem $\lambda\mathbf{u}$ rozumíme nulový vektor $\mathbf{o}$; je-li $\lambda \neq 0$ i $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, sestrojíme na přímce AB bod C tak, aby pro úsečky AB, AC platil vztah

$$AC = |\lambda|\, AB\,, \tag{2.15}$$

přičemž pro $\lambda > 0$ naneseme bod C na polopřímku AB, pro $\lambda < 0$ na polopřímku k ní opačnou, a součinem $\lambda\mathbf{u}$ rozumíme pak vektor, který má umístění $\overrightarrow{AC}$ (obr. 17).



Obr. 17. Vektor $\lambda\mathbf{u}$ a) $\lambda = 3$; b) $\lambda = -3$.

POZNÁMKA 2.1. Na začátku kapitoly jsme řekli, že „zapomeneme“ na slovo vzdálenost. Rozsah naší knížky nedovoluje zacházet do detailů, konstatujme však aspoň, že konstrukce bodu C v definici 2.8 je nezávislá na volbě výchozí jednotkové úsečky na přímce AB, zůstáváme

Dokázali jsme tedy:

Věta 2.2. *Jsou-li* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *dva libovolné vektory v* E_3, *pak platí*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) . \quad (2.14)$$

Součtem vektorů je tedy opět vektor, jehož souřadnice určíme podle (2.14). V definici součtu dvou vektorů hrál zdánlivě důležitou roli bod A, do něhož jsme umístili vektor $\mathbf{u}$, z věty 2.2 však mimo jiné plyne, že na volbě bodu A vůbec nezáleží; jeho souřadnice se v (2.14) totiž neobjevují.

Pro součet vektorů si nyní odvodíme čtyři důležité věty.

Věta 2.3. *Nechť* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *jsou tři libovolné vektory v* E_3. *Pak platí*

$\mathscr{A}_1$) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(vztah komutativní)*,

$\mathscr{A}_2$) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(vztah asociativní)*,

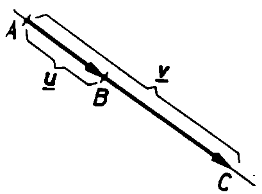
$\mathscr{A}_3$) $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$.

$\mathscr{A}_4$) *Ke každému vektoru* $\mathbf{u}$ *existuje vektor* $-\mathbf{u}$ *tak, že platí* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

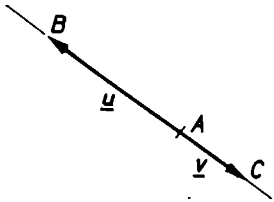
D ů k a z. $\mathscr{A}_1$) Komutativní vztah platí, jak víme, pro součet reálných čísel; můžeme tedy psát $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Důkaz lze ovšem vést také bez souřadnic, podkladem tohoto postupu jsou známé vlastnosti rovnoběžníka, nevýhoda spočívá v tom, že je třeba uvážit zvláštní případy $\mathbf{u} \| \mathbf{v}$ atp.

$\mathscr{A}_2$) Asociativní vztah platí pro reálná čísla, stačí tedy od vektorů přejít k souřadnicím podle (2.14) a máme požadovanou rovnost $\mathscr{A}_2$ pro vektory. Důsledkem asotedy stále na půdě afinní geometrie. Ostatně konstrukci bodu C lze provést také tím způsobem, že na přímce AB sestrojíme bod C tak, aby pro dělicí poměr (CBA) platilo $(CBA) = \lambda$. Snadno se také přesvědčíte, že definice je nezávislá na umístění vektoru $\mathbf{u}$.

V odstavci 2.1 jsme definovali rovnoběžnost vektorů. Jestliže $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ jsou umístění vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a body A, B, C leží na jedné přímce, pak $\mathbf{u} \| \mathbf{v}$; na obr. 18a je zakreslen případ vektorů souhlasně rovnoběžných, na obr. 18b pak případ vektorů nesouhlasně rovnoběžných. Snadno si ověříme, že platí:



Obr. 18a.
Vektor $\mathbf{v} = \mu\mathbf{u}$, $\mu > 0$.



Obr. 18b.
Vektor $\mathbf{v} = \nu\mathbf{u}$, $\nu < 0$.

Věta 2.4. *Dva nenulové vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou souhlasně rovnoběžné právě tehdy, jestliže* $\mathbf{v} = \mu\mathbf{u}$ a $\mu > 0$, *nesouhlasně rovnoběžné pak právě tehdy, jestliže* $\mathbf{v} = \nu\mathbf{u}$ *a* $\nu < 0$.

Věta 2.5. *Budiž* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *libovolný vektor a* λ *reálné číslo. Pak platí*

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) . \qquad (2.16)$$

D ů k a z věty 2.4 je snadný, na to stačí čtenář sám; solidní provedení důkazu věty 2.5 se opírá o řadu vět ze stereometrie a z hlediska cíle této knížky se spokojíme s tím, že uvedená věta platí.

Příklad 2.2. Dokažte, že vektory

a) $\mathbf{u} = (2, 3, -5)$, $\mathbf{v} = (6, 9, -15)$ jsou souhlasně rovnoběžné,

b) $\mathbf{u} = (-1, 0, 5)$, $\mathbf{v} = (10, 0, -50)$ jsou nesouhlasně rovnoběžné,

c) $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (5, 10, -6)$ nejsou rovnoběžné.

Řešení. Podle vět 2.4 a 2.5 máme:

a) $\mathbf{v} = \mu\mathbf{u}$, $\mu = 3$; b) $\mathbf{v} = \nu\mathbf{u}$, $\nu = -10$; c) neexistuje pevné reálné číslo λ tak, aby platilo $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

Zaveďme nyní další důležitý pojem.

Definice 2.9. Je-li jeden vektor násobkem jiného vektoru, potom říkáme, že tyto vektory jsou *kolineární* nebo také *lineárně závislé.*

Poslední definice — jako ostatně každá definice — zavádí nový pojem. Všimněme si tentokrát pozorněji, jaký je její obsah: Nulový vektor $\mathbf{o}$ je jistě kolineární s každým vektorem, neboť pro libovolný vektor $\mathbf{u}$ platí rovnost $0 . \mathbf{u} = \mathbf{o}$; jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ oba nenulové a kolineární, pak existuje $\lambda \neq 0$ tak, že $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, případně $\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{v}$. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou tedy rovnoběžné. Můžeme proto říci: *Dva vektory jsou kolineární právě tehdy, lze-li je umístit na jedné přímce* (linea je latinský název pro přímku). To nám dovoluje snadné řešení úlohy.

Příklad 2.3. Dokažte, že body $A = [1, 0, 2]$, $B = [3, 2, 4]$, $C = [6, 5, 7]$ leží na jedné přímce.

Řešení: Body A, B, C leží na jedné přímce, leží-li na téže přímce vázané vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, což znamená, že vektory $B - A$ a $C - A$ jsou kolineární; to je však splněno, neboť $C - A = 2{,}5\,(B - A)$, jak se lze snadno přesvědčit. Místo vektorů $B - A$ a $C - A$ jsme mohli ovšem vzít dvojice vektorů $B - A$, $C - B$ nebo $C - A$, $C - B$.

Pro součin čísla s vektorem platí čtyři významné vztahy:

Věta 2.6. *Nechť α, β jsou dvě libovolná reálná čísla a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva nějaké vektory. Pak platí:*

$$\begin{aligned}
&\mathscr{B}_1) & 1\,.\,\mathbf{u} &= \mathbf{u}\,, \\
&\mathscr{B}_2) & \alpha(\beta\mathbf{u}) &= (\alpha\beta)\,\mathbf{u}\,, \\
&\mathscr{B}_3) & (\alpha + \beta)\,\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}\,, \\
&\mathscr{B}_4) & \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}\,.
\end{aligned}\left.\vphantom{\begin{aligned}a\\a\end{aligned}}\right\}\ \textit{(vztahy distributivní)}$$

Důkaz. $\mathscr{B}_1)$ $1\,.\,\mathbf{u} = 1(u_1, u_2, u_3) = \mathbf{u}\,.$

$\mathscr{B}_2)$ $\alpha(\beta\mathbf{u}) = \alpha(\beta u_1, \beta u_2, \beta u_3) = (\alpha\beta)\,\mathbf{u}\,.$

Postup pro $\mathscr{B}_3)$ a $\mathscr{B}_4)$ je zcela obdobný, přenecháme jej proto čtenáři.

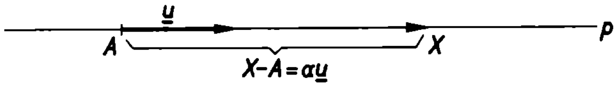
POZNÁMKA 2.2. Prozradíme předem, že $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_4$, $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_4$ nám poslouží v poslední kapitole k vybudování afinního prostoru. Za zmínku stojí, že ve větě 2.6 není uvedena tato snadno dokazatelná vlastnost: $-1\,.\,\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Z axiomatického hlediska by totiž byla přebytečná, neboť by představovala axiom odvoditelný ze vztahů $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_4$, $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_4$.

2.6. Přímka

Uvažujme množinu všech bodů X, které vyhovují rovnici

$$X = A + \alpha\mathbf{u}\,, \tag{2.17}$$

v níž α probíhá množinu všech reálných čísel. Ukážeme si, že rovnicí (2.17) je popsána přímka, která prochází bodem A. Vektor $\mathbf{u}$ je tzv. *směrový vektor* této přímky (obr. 19). Pravá strana rovnice (2.17) není totiž nic jiného, než součet bodu A s vektorem $\alpha\mathbf{u}$ (srv. odst. 2.3).



Obr. 19. K vektorové rovnici přímky.

Mysleme si, že všechny vektory $\alpha\mathbf{u}$ jsou umístěny v bodě A. Jestliže při umístění vektoru $\mathbf{u}$ do bodu A (počáteční bod) označíme jeho koncový bod B, pak pro $\alpha \geqq 0$ probíhá bod X polopřímku AB, pro $\alpha \leqq 0$ polopřímku opačnou k polopřímce AB (srv. definici pro násobení vektoru s číslem v odst. 2.5). Bod X leží tedy pro libovolné $\alpha \in (-\infty, \infty)$ na přímce AB; zvolíme-li obráceně bod X, který leží na přímce AB, pak z vlastnosti reálných čísel plyne, že existuje nějaké $\alpha \in (-\infty, \infty)$ tak, že platí $X - A = \alpha\mathbf{u}$ čili že platí (2.17). Rovnici (2.17) říkáme vektorová rovnice přímky. Připomínáme znovu, že (2.17) jsou vlastně tři rovnice mezi souřadnicemi.

Pro lepší pochopení vyřešíme dva jednoduché příklady.

Příklad 2.4. Je dána přímka AB, $A = [4, 3, 1]$, $B = [7, 4, 2]$. Určete souřadnice průsečíku P přímky AB s půdorysnou (tj. se souřadnicovou rovinou určenou osami x_1, x_2).

Řešení. Body A, B je určen směrový vektor naší přímky $\mathbf{u} = B - A = (3, 1, 1)$. Bod P přímky AB vyhovuje dle (2.17) rovnici

$$P = [4, 3, 1] + \alpha(3, 1, 1)\,,$$

což rozepsáno po složkách vede na tři rovnice

$$\begin{aligned} p_1 &= 4 + 3\alpha\,, \\ p_2 &= 3 + \alpha\,, \\ 0 &= 1 + \alpha\,; \end{aligned}$$

třetí souřadnice bodu P je rovna nule, neboť tuto vlastnost má každý bod půdorysny. Z poslední rovnice tedy máme, že $\alpha = -1$ a dosadíme-li za α do zbývajících dvou, pak $P = [1, 2, 0]$.

Další příklad se bude týkat přímek, které leží v jedné rovině. Můžeme si docela dobře představovat, že danou rovinou je souřadnicová rovina (x_1, x_2). Pak ovšem je třetí souřadnice každého bodu nula a v důsledku toho má stejnou vlastnost také každý vektor. Nic se tedy nestane, budeme-li ji vynechávat, body i vektory budou popsány dvěma čísly, což je případ euklidovské roviny E_2.

POZNÁMKA 2.3. Jiný, dost nevýhodný postup, by spočíval v tom, že bychom všechny úvahy z E_3 zopakovali pro E_2. To by nebylo rozhodně účelné. Ani naše zaměření na E_3 není z obecného pohledu nejvhodnější, má však svůj metodický význam. Elegantní přístup vychází z tzv. n-rozměrného euklidovského prostoru E_n a E_2 či E_3 se pak objeví jako speciální případy. Více si o tom povíme v kapitole 4.

Příklad 2.5. Určete průsečík P přímek AB a CD; $A = [5, 0]$, $B = [9, 2]$, $C = [4, -4]$, $D = [2, 2]$.

Řešení: Podle (2.17) můžeme bod P zapsat ve tvaru $P = A + \alpha(B - A)$ nebo $P = C + \beta(D - C)$. Z rovnosti levých stran plyne rovnost pravých stran rovnic, tedy

$$A + \alpha(B - A) = C + \beta(D - C) .$$

Po úpravě pak dostaneme

$$\alpha(B - A) + \beta(C - D) = C - A$$

a po přechodu k souřadnicím získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4\alpha + 2\beta &= -1 , \\ 2\alpha - 6\beta &= -4 , \end{aligned}$$

z nichž plyne, že $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$. Dosazením za α do výchozí rovnice zjistíme, že $P = [5, 0] - \frac{1}{2}(4,2) = [3, -1]$. Kontrolu správnosti můžeme provést dosazením za β do rovnice $P = C + \beta(D - C)$.

Rovnici (2.17) můžeme zajisté psát ve tvaru

$$X = A + \alpha(B - A) , \tag{2.18}$$

kde $A \neq B$ jsou určující body přímky. Jestliže rovnici (2.18) rozepíšeme po souřadnicích, dostaneme

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_1 + \alpha(b_1 - a_1)\,,\\
x_2 &= a_2 + \alpha(b_2 - a_2)\,,\\
x_3 &= a_3 + \alpha(b_3 - a_3)\,.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Soustavě (2.19) říkáme parametrické rovnice přímky. Ze soustavy (2.19) vytěžíme jeden závěr, a to, že rovnici (2.18) můžeme psát ve tvaru

$$X = A + \alpha B - \alpha A\,,$$

neboli

$$X = (1 - \alpha)\,A + \alpha B\,; \tag{2.20}$$

rovnice (2.20) po rozepsání do souřadnic má smysl. A nyní pozor! Zmínili jsme se ke konci odst. 2.2, že nemá význam sčítání bodů (rozuměj po souřadnicích). Ať bychom totiž výsledek interpretovali jako vektor či bod, ukazuje se, že tento výsledek závisí vždy na volbě soustavy souřadnic. Sčítání v rovnici (2.20) však smysl má, neboť se dá ihned převést na součet bodu a vektoru a tato operace, jak víme, na zvolené soustavě souřadnic nezávisí. Pamatujme si tedy: Operace (2.20) nezávisí na tom, v jaké soustavě souřadnic pracujeme, pokud součet koeficientů u bodů A, B je roven 1. Jde ovšem o důsledek věty daleko obecnější.*)

Věta 2.7. *Budiž k libovolné přirozené číslo; zvolme $k + 1$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ a $k + 1$ čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ tak, aby jejich součet byl roven 1. Potom bod X, o němž platí*

$$X = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k + \alpha_{k+1} A_{k+1}\,, \tag{2,21}$$

je stanoven jednoznačně nezávisle na volbě soustavy souřadnic.

---

*) Čtenář se k ní může vrátit později.

Důkaz. Bylo již několikrát řečeno, že operace součtu bodu s vektorem na soustavě souřadnic nezávisí. Stačí tedy ukázat, že (2.21) můžeme zapsat jako součet bodu a vektoru; to je však snadné, neboť je $\alpha_{k+1} = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_k$, což po dosazení do (2.21) a formální úpravě převádí (2.21) na tvar

$$X = A_{k+1} + \alpha_1(A_1 - A_{k+1}) + \alpha_2(A_2 - A_{k+1}) + \\ + \ldots + \alpha_k(A_k - A_{k+1})\,.$$

Tím je věta dokázána.

Jistou analogií věty 2.7 je věta následující:

Věta 2.7a. *Budiž k libovolné přirozené číslo; zvolme $k + 1$ bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ a $k + 1$ čísel $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}$ tak, aby jejich součet byl roven* 0. *Potom vektor $\mathbf{u}$ definovaný*

$$\mathbf{u} = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_k A_k + \beta_{k+1} A_{k+1} \qquad (2.21a)$$

je stanoven jednoznačně nezávisle na volbě soustavy souřadnic.

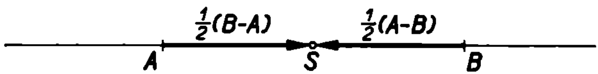
Důkaz. Rovnost (2.21a) má po rozepsání do souřadnic zajisté smysl. Je tedy touto rovností v dané soustavě souřadnic vektor $\mathbf{u}$ stanoven jednoznačně. Abychom však ukázali, že jeho konstrukce nezávisí na volbě soustavy souřadnic, stačí ukázat, že $\mathbf{u}$ je lineární kombinací nějakých vektorů, a tedy vektor. To je však snadné, neboť platí: $\beta_{k+1} = -\beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_k$ po dosazení do (2.21a) a formální úpravě dostaneme:

$$\mathbf{u} = \beta_1(A_1 - A_{k+1}) + \beta_2(A_2 - A_{k+1}) + \\ + \ldots + \beta_k(A_k - A_{k+1})\,.$$

Tím je důkaz uzavřen.

Na základě věty 2.7 a 2.7a budeme zápisů (2.21) a (2.21a) užívat při řešení některých úloh v této i následující kapitole. Čtenář si může položit otázku, proč se nedržíme důsledně vektorového zápisu. Důvod je však nasnadě, neboť zápisy (2.21) a (2.21a) vedou ke značnému zjednodušení [srv. třeba zápisy (2.22), (2.23) aj.]. Upustíme od dalších podrobností. Čtenář si může v každém příkladě, kde bude těchto zápisů užito, vždycky ověřit, že k témuž výsledku dospěje pomocí zápisu striktně vektorového, resp. po souřadnicích.

V odstavci 2.2 jsme se také trochu pozastavili nad tím, že střed úsečky AB můžeme psát ve tvaru (2.11). To je však v souhlase s větou 2.7, neboť $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, součet koeficientů je tedy 1. Vzorec (2.11) snadno uvedeme na tvar $S = A + \frac{1}{2}(B - A)$ nebo $S = B + \frac{1}{2}(A - B)$ (obr. 20). Bod S dělí úsečku AB v poměru 1 : 1.



Obr. 20. Střed úsečky AB.

2.7. Některé úlohy o trojúhelníku a čtyřstěnu

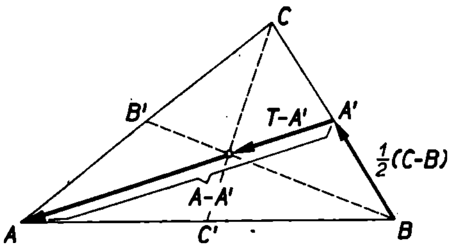
Věta 2.8. *Těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který nazýváme těžištěm; těžiště dělí každou těžnici v poměru* 1 : 2 *(počítáno od strany trojúhelníka).*

Důkaz. Obsah věty zná čtenář velmi dobře, nám jde pouze o důkaz pomocí vektorů. Užijme označení podle obr. 21 a zvolme na úsečce AA' bod T tak, aby bylo $A'T : TA = 1 : 2$; to znamená, že platí rovnost $T - A' = \frac{1}{3}(A - A')$, kterou můžeme psát ve tvaru

$$T = A' + \frac{1}{3}(A - A').$$

Dosadíme-li sem za $A' = \dfrac{B + C}{2}$, máme

$$T = \frac{1}{3}(A + B + C). \tag{2.22}$$

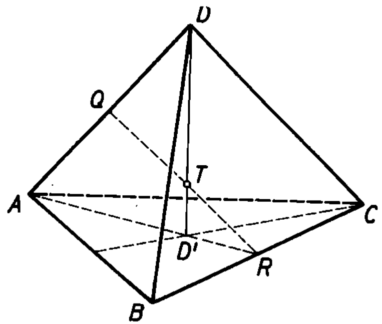


Obr. 21. Těžiště trojúhelníka.

Přejdeme-li k těžnici BB' a určíme bod U, o němž platí $B'U : BU = 1 : 2$, dostaneme U ve tvaru (2.22), tedy $T = U$. Tento výpočet je však zbytečný. Zaměníme-li totiž cyklicky pořadí vrcholů $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, nemění se bod (2.22). Další cyklická permutace $B \to C$, $C \to A$, $A \to B$ vede k témuž závěru, bod T je tedy společným bodem všech tří těžnic a z jeho konstrukce plyne i druhé tvrzení naší věty.

Věta 2.9. *Těžnice čtyřstěnu se protínají v jediném bodě, kterému říkáme těžiště; toto těžiště dělí každou těžnici v poměru* 1 : 3 *(počítáno od stěny čtyřstěnu).*

Důkaz. Těžnicí čtyřstěnu nazýváme úsečku, která spojuje vrchol čtyřstěnu s těžištěm protější stěny.



Obr. 22. Těžiště čtyřstěnu.

Uvažujme čtyřstěn $ABCD$ (obr. 22). Těžiště trojúhelníka ABC označme D' a zvolme na úsečce DD' bod T tak, aby bylo $D'T : DT = 1 : 3$. Formálně jde o stejný postup jako v důkazu věty 2.8, můžeme být proto stručnější; zřejmě $T = D' - \frac{1}{4}(D - D')$ a po dosazení za D' podle (2.22) dává krátký výpočet tento výsledek:

$$T = \frac{1}{4}(A + B + C + D)\,. \tag{2.23}$$

Výsledný bod (2.23) se nemění cyklickou permutací vrcholů čtyřstěnu a je proto společným bodem všech těžnic; volba bodu T potvrzuje i druhou část věty.

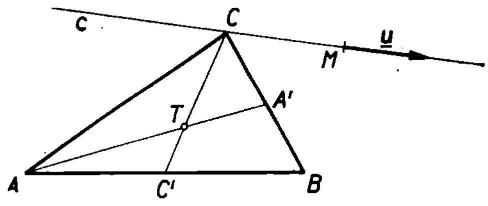
Věta 2.10. *Těžiště čtyřstěnu je středem úsečky, která spojuje středy dvou protilehlých hran čtyřstěnu.*

Důkaz. Protilehlými nazýváme každou dvojici mimoběžných hran. Zůstaneme-li u obr. 22, pak tuto vlastnost mají hrany AD, BC, jejich středy označme po řadě Q, R. Vypočítejme střed úsečky QR, který dočasně označíme S. Jelikož $Q = \frac{1}{2}(A + D)$, $R = \frac{1}{2}(B + C)$, pak nutně s ohledem na (2.23) platí:

$$S = \frac{1}{4}(A + B + C + D) = T\,.$$

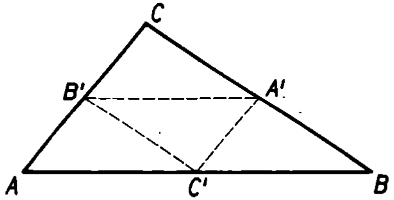
Příklad 2.6. V trojúhelníku ABC jsou vrcholy A, B pevné, bod C probíhá nějakou přímku c. Co opisuje těžiště T trojúhelníků ABC?

Řešení. Je-li $\mathbf{u}$ směrový vektor přímky c, M její libovolný bod, pak můžeme C vyjádřit takto: $C = M + \alpha\mathbf{u}$. Jelikož $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$, dosadíme-li sem za C, máme: $T = \frac{1}{3}(A + B + M + \alpha\mathbf{u})$, neboli $T = \frac{1}{3}(A + B + M) + \frac{1}{3}\alpha\,\mathbf{u}$. Poslední rovnice nám dává odpověď. Těžiště T uvažovaných trojúhelníků vyplní přímku rovnoběžnou s přímkou c. V obecném případě jsou přímky c, AB mimoběžné, tedy také přímka, kterou vytvoří těžiště, je mimoběžná s přímkou AB. Doporučujeme uvážit všechny planimetrické případy (obr. 23).



Obr. 23. K příkladu 2.6.

Příklad 2.7. Určete vrcholy trojúhelníka ABC, jsou-li dány středy A', B', C' jeho stran (obr. 24).



Obr. 24. K příkladu 2.7.

Řešení: Pro středy A', B' máme

$$A' = \frac{1}{2}(B + C),$$

$$B' = \frac{1}{2}(C + A).$$

Odtud ihned plyne, že $B' - A' = \frac{1}{2}(A - B)$; jsou tedy úsečky $A'B'$, AB vzájemně rovnoběžné. Cyklická záměna bodů A', B', C' má za následek, že také $B'C' \parallel BC$ a $A'C' \parallel AC$. Mimochodem jsme také dokázali, že střední příčky v trojúhelníku jsou rovnoběžné se stranami. Sami si snadno zdůvodníte, že platí

$$\begin{aligned} A &= C' + (B' - A'), \\ B &= A' + (C' - B'), \\ C &= B' + (A' - C'). \end{aligned}$$

2.8. Stejnolehlost

Nepochybujeme o tom, že znáte pojem stejnolehlosti v rovině E_2. Nám zde půjde o stejnolehlost v prostoru E_3. Jak účinným se zde ukáže použití vektorů, posoudíte sami.

Definice 2.10. Budiž α nenulové reálné číslo a S_{12} nějaký bod v prostoru E_3. Předpis, který každému $X_1 \in \mathsf{E}_3$ přiřazuje bod $X_2 \in \mathsf{E}_3$ tak, že platí

$$X_2 - S_{12} = \alpha(X_1 - S_{12}), \tag{2.24}$$

se nazývá *stejnolehlost* nebo také *homotetie;* bod S_{12} se nazývá *střed*, číslo α *koeficient stejnolehlosti*. Definovanou stejnolehlost budeme označovat $H_{12}(S_{12}, \alpha)$. Rovnici (2.24) říkáme *vektorová rovnice* stejnolehlosti.

Zkoumejme, co vznikne složením dvou stejnolehlostí $H_{12}(S_{12}, \alpha)$, $H_{23}(S_{23}, \beta)$. Řekněme to trochu podrobněji. Stejnolehlost H_{12} přiřazuje bodu X_1 bod X_2, ve stejnolehlosti H_{23} odpovídá pak bodu X_2 bod X_3. Složením obou stejnolehlostí H_{12}, H_{23} rozumíme zobrazení G_{13}, v němž každému bodu X_1 odpovídá bod X_3. Vnucuje se jistě otázka: Je G_{13} také stejnolehlost? Pokusme se na ni odpovědět.

Zapišme vektorové rovnice obou stejnolehlostí:

$$H_{12}: \quad (X_2 - S_{12}) = \alpha(X_1 - S_{12}) \,, \tag{2.24}$$

$$H_{23}: \quad (X_3 - S_{23}) = \beta(X_2 - S_{23}) \,. \tag{2.25}$$

Rovnici (2.25) můžeme psát ve tvaru

$$(X_3 - S_{23}) = \beta(X_2 - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23}) \,,$$

a dosadíme-li sem z (2.24), máme

$$(X_3 - S_{23}) = \alpha\beta(X_1 - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23}) \,. \tag{2.26}$$

Rovnice (2.26) je vektorová rovnice zobrazení G_{13}: jaké je to zobrazení, o tom nám více řeknou samodružné body. Takový samodružný bod $S = S_1 = S_3$ by musel vyhovovat rovnici (2.26), muselo by tedy být

$$(S - S_{23}) = \alpha\beta(S - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23}) \,, \tag{2.27}$$

což můžeme psát takto:

$$(S - S_{12}) + (S_{12} - S_{23}) = \alpha\beta(S - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23}).$$

Odtud konečně plyne, že

$$(1 - \alpha\beta)\,(S - S_{12}) = (\beta - 1)\,(S_{12} - S_{23}) \,. \tag{2.28}$$

Proveďme diskusi rovnice (2.28).

A. Je-li $\alpha\beta \neq 1$, můžeme z (2.28) bod S jednoznačně určit. Platí

$$S = S_{12} + \frac{\beta - 1}{1 - \alpha\beta}\,(S_{12} - S_{23}) \,. \tag{2.29}$$

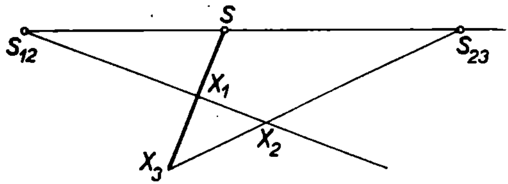
Vraťme se nyní k rovnici (2.26), kterou lze psát ve tvaru

$$(X_3 - S) + (S - S_{23}) =$$
$$= \alpha\beta(X_1 - S) + \alpha\beta(S - S_{12}) + \beta(S_{12} - S_{23})\,.$$

Dosadíme-li sem z (2.27), pak

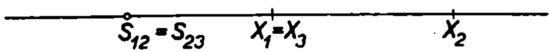
$$X_3 - S = \alpha\beta(X_1 - S) \tag{2.30}$$

a zobrazení G_{13} je stejnolehlostí $H_{13}(S, \alpha\beta)$; to nám říká vektorová rovnice (2.30) (obr. 25).



Obr. 25. Složení dvou stejnolehlostí v obecném případě.

B. Jestliže $\alpha\beta = 1$ a současně $S_{12} = S_{23}$, pak rovnice (2.28) je identicky splněna pro každé $S \in \mathsf{E}_3$. Složením stejnolehlostí H_{12}, H_{23} vznikne tedy identita (obr. 26).

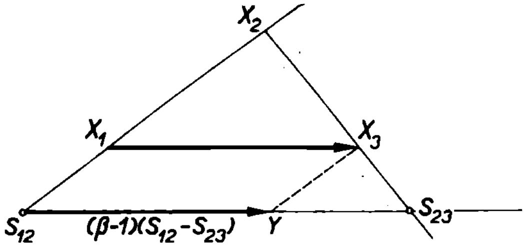


Obr. 26. Složení dvou stejnolehlostí, které je identitou.

C. Nechť $\alpha\beta = 1$, ale $S_1 \neq S_2$; pak jsou možné dva případy.

1. Jestliže $\alpha = \beta = 1$, jde opět o identitu, dokonce obě výchozí stejnolehlosti jsou identitami. To je případ jistě nezajímavý.

2. Jestliže $\alpha \neq 1$, pak také $\beta \neq 1$, rovnice (2.28) nemá řešení a samodružný bod tedy neexistuje. Dosadíme-li $\alpha\beta = 1$ do rovnice (2.26), snadno zjistíme, že $X_3 = X_1 + (\beta - 1)(S_{12} - S_{23})$; to je však vektorová rovnice rovnoběžného posunutí o konstantní vektor $(\beta - 1)(S_{12} - S_{23})$ (obr. 27).



Obr. 27. Složení stejnolehlostí $H_{12}(S_{12}, 3)$, $H_{23}\left(S_{23}, \frac{1}{3}\right)$; výsledkem je posunutí o vektor $\frac{2}{3}(S_{23} - S_{12})$.

Závěry shrneme v následujícím tvrzení:

Věta 2.11. *Složení dvou neidentických stejnolehlostí* $H_{12}(S_{12}, \alpha)$, $H_{23}(S_{23}, \beta)$ je

A. *stejnolehlost* $H_{13}(S, \alpha\beta)$ *se středem* (2.29), *jestliže* $\alpha\beta \neq 1$,

B. *identita, pokud* $\alpha\beta = 1$ *a* $S_{12} = S_{23}$,

C. *rovnoběžné posunutí o nenulový vektor* $(\beta - 1)(S_{12} - S_{23})$, *pokud* $\alpha\beta = 1$ *a* $S_{12} \neq S_{23}$.

Úlohy na stejnolehlost najde čtenář ve cvičení a též v třetí kapitole.

2.9. Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky v E_3 mohou být rovnoběžné (případně totožné), různoběžné nebo mimoběžné. Nechť přímka p má počáteční bod P a směrový vektor $\mathbf{u}$, přímka q pak ať má počáteční bod Q a směrový vektor $\mathbf{v}$. Vektorové rovnice těchto přímek mají tedy tvar

$$p\colon \quad X = P + \alpha\mathbf{u}\,,$$
$$q\colon \quad X = Q + \beta\mathbf{v}\,.$$

a) Rovnoběžné nebo totožné jsou přímky p, q právě tehdy, jestliže $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, což znamená, že existuje reálné číslo $\lambda \neq 0$ tak, že $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$; požadavek $\lambda \neq 0$ plyne z toho, že směrové vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ musí být nenulové, vektorem $\mathbf{o}$ není určena žádná přímka. Skutečnost, že $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ sama o sobě nestačí, abychom rozhodli, zda p, q jsou různé nebo splývající rovnoběžky. Kterýkoliv bod přímky může být zvolen za počáteční, není proto vyloučeno, že bod Q je bodem přímky p, což ze zápisu nepoznáme; pokud to však nastane, pak mezi čísly $\alpha \in (-\infty, \infty)$ musí existovat takové, že platí $Q = P + \alpha\mathbf{u}$ (nebo existuje takové $\beta \in (-\infty, \infty)$, že $P = Q + \beta\mathbf{v}$). Neexistuje-li takové α, pak p, q jsou dvě různé rovnoběžky.

b) Přímky p, q jsou různoběžné nebo mimoběžné právě tehdy, jestliže vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nejsou násobkem; neexistuje tedy číslo $\lambda \neq 0$ tak, aby platilo $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Jde-li o různoběžky, musí existovat společný bod, musí mít proto řešení vektorová rovnice $P + \alpha\mathbf{u} = Q + \beta\mathbf{v}$. Jsou-li p, q mimoběžky, nemá vektorová rovnice $P + \alpha\mathbf{u} = Q + \beta\mathbf{v}$ řešení.

Příklad 2.8. Jakou vzájemnou polohu mají přímky p, q, jestliže

1. $P = [-1, 0, 2]$, $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$;
$Q = [1, 2, 6]$, $\mathbf{v} = (2, 2, 4)$,

2. $P = [1, 2, -1]$, $\mathbf{u} = (-1, 1, 3)$;
$Q = [-10, 4, 9]$, $\mathbf{v} = (3, -3, -9)$,

3. $P = [3, 5, 7]$, $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$;
$Q = [-2, -1, 0]$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$,

4. $P = [1, 0, 0]$, $\mathbf{u} = (0, 1, 2)$;
$Q = [3, 0, 0]$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

Řešení. 1. Jelikož $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$, je $p \parallel q$. Zda nejde o splývající rovnoběžky, o tom rozhodne rovnice $Q = P + \alpha\mathbf{u}$, neboli $[1, 2, 6] = [-1, 0, 2] + \alpha(1, 1, 2)$. Odtud máme tři rovnice mezi souřadnicemi: $\alpha - 1 = 1$, $\alpha = 2$, $2\alpha + 2 = 6$, které jsou splněny pro $\alpha = 2$. Tedy $p = q$.

2. Jde opět o případ rovnoběžných přímek, neboť $\mathbf{v} = -3\mathbf{u}$. Řešení vektorové rovnice $Q = P + \alpha\mathbf{u}$ vede však ke sporné soustavě rovnic: $1 - \alpha = -10$, $2 + \alpha = 4$, $3\alpha - 1 = 9$; z prvé totiž máme $\alpha = 1$ a číslo 1 není řešením druhé rovnice, neboť $3 \neq 4$. Jedná se tedy o dvě různé rovnoběžky.

3. V tomto případě není vektor $\mathbf{v}$ násobkem vektoru $\mathbf{u}$; zda jde o různoběžky nebo mimoběžky zjistíme řešením vektorové rovnice $\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v} = Q - P$, která rozepsána po složkách dává soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \alpha - 3\beta &= -5\,, \\ 2\alpha - 2\beta &= -6\,, \\ 3\alpha - \beta &= -7\,. \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení $\alpha = -2$, $\beta = 1$, přímka p je různoběžná s přímkou q. Chceme-li znát průsečík R, dosadíme $\alpha = -2$ do rovnice $X = P + \alpha\mathbf{u}$ nebo $\beta = 1$

do rovnice $X = Q + \beta\mathbf{v}$; máme tak $R = [1, 1, 1]$.

4. Přímky p, q nejsou rovnoběžné, řešíme tedy stejně jako v předchozím případě vektorovou rovnici $\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v} = Q - P$, neboli soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -\beta &= 2\,, \\ \alpha - \beta &= 0\,, \\ 2\alpha - \beta &= 0\,. \end{aligned}$$

Tato soustava řešení nemá, z prvých dvou rovnic totiž máme $\alpha = \beta = -2$ a dosazení těchto hodnot do třetí vede ke sporu $2 = 0$. Přímky p, q jsou mimoběžné.

2.10. Příčka dvou přímek

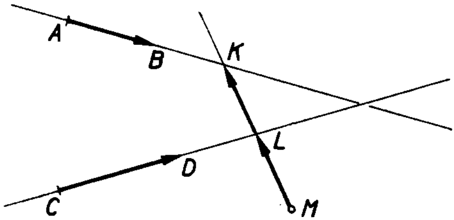
Příčkou dvou daných přímek nazýváme každou přímku, která je s oběma různoběžná.

Věnujme se v tomto odstavci dvěma klasickým úlohám.

Příklad 2.9. Je dán bod M a přímky AB, CD; napište vektorovou rovnici příčky daných přímek, která prochází bodem M, a určete společné body hledané příčky s danými přímkami. Řešte pro případ: $M = [1, 1, 1]$, $A = [5, 3, 5]$, $B = [2, 3, 2]$, $C = [4, 6, 8]$, $D = [3, 4, 5]$.

Řešení. Klasický syntetický postup spočívá v tom, že bodem M a přímkami proložíme roviny, průsečnice těchto rovin je pak hledaná příčka. Vektory nám nabízejí elegantnější postup: Hledaná příčka (pokud existuje) protíná přímky AB, CD po řadě v bodech K, L (obr. 28), které lze vyjádřit takto: $K = A + \alpha(B - A)$, $L = C + \beta(D - C)$. Body M, L, K mají ležet na jedné přímce, proto $K - M = \gamma(L - M)$. Dosadíme-li sem za K a L podle výše uvedených rovnic, dostaneme po malé úpravě

$$\alpha(B - A) + \beta\gamma(C - D) + \gamma(M - C) = M - A. \tag{2.31}$$



Obr. 28. **Příčka dvou přímek vedená daným bodem M.**

Po rozepsání do složek máme soustavu pro neznámé α, $\beta\gamma$, γ:

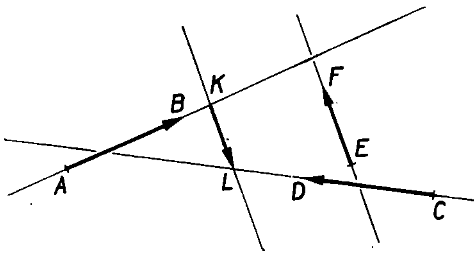
$$\begin{aligned} -3\alpha + \beta\gamma - 3\gamma &= -4\,, \\ 2\beta\gamma - 5\gamma &= -2\,, \\ -3\alpha + 3\beta\gamma - 7\gamma &= -4\,. \end{aligned}$$

Čtenář snadno zjistí, že soustava má právě jedno řešení $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta\gamma = 4$, $\gamma = 2$; odtud $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$. Dosadíme-li do rovnic pro K a L (viz dříve), zjistíme, že $K = [3, 3, 3]$, $L = [2, 2, 2]$, a vektorová rovnice příčky je $X = M + \lambda(K - M)$, neboli $X = [1, 1, 1] + \lambda(2, 2, 2)$.

V našem případě existuje tedy jediná příčka přímek AB, CD, která prochází bodem M. To nemusí platit obecně. Co když body A, B, C, D, M leží v jedné rovině nebo $AB \parallel CD$, bod M však neleží v rovině těchto rovnoběžek? Nadhozené otázky přirozeně úzce souvisí s rovnicí (2.31), která může mít nekonečně mnoho řešení nebo také žádné.

Příklad 2.9. Napište vektorovou rovnici příčky přímek AB, CD, je-li tato příčka rovnoběžná s přímkou EF; $A = [5, 2, 3]$, $B = [4, 1, 2]$, $C = [1, 3, 3]$, $D = [1, 2, 2]$, $E = [3, 2, 2]$, $F = [5, 2, 3]$.

Řešení. Hledanou příčku označme p, její průsečíky s přímkami AB, CD po řadě K, L (obr. 29). Jde jen



Obr. 29. Příčka dvou přímek rovnoběžná s daným směrem.

o jistou modifikaci příkladu 2.8, můžeme být proto stručnější. Zřejmě $K = A + \alpha(B - A)$, $L = C + \beta(D - C)$ a $L - K = \gamma(F - E)$; odtud

$$\alpha(A - B) + \beta(D - C) + \gamma(E - F) = A - C\,, \tag{2.32}$$

což vede na soustavu lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
\alpha \qquad\; -2\gamma &= 4\,, \\
\alpha - \beta \qquad &= -1\,, \\
\alpha - \beta - \gamma &= 0\,,
\end{aligned}
$$

která má jediné řešení $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$.

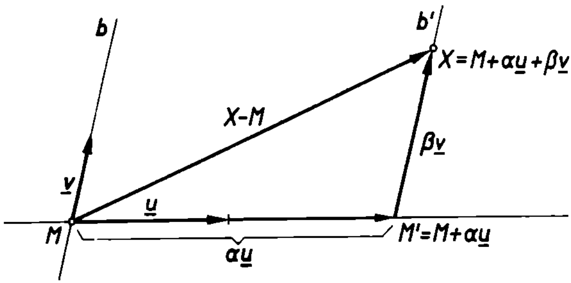
Je tedy $K = [3, 0, 1]$, $L = [1, 0, 0]$ a vektorová rovnice příčky je $X = K + \lambda(L - K)$, čili $X = [3, 0, 1] + \lambda(-2, 0, -1)$.

I zde upustíme od obecné diskuse, která souvisí s rovnicí (2.32).

2.11. Rovina

Nechť M je nějaký bod prostoru E_3 a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva vektory lineárně nezávislé. Zkoumejme množinu všech bodů X, které vyhovují vektorové rovnici

$$X = M + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}\,, \tag{2.33}$$



Obr. 30. K vektorové rovnici roviny.

v níž α, β probíhají nezávisle na sobě všechna reálná čísla. Ukážeme si, že touto množinou je rovina procházející bodem M. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou tzv. *směrové vektory* této roviny.

Uvažujme následovně: Dva lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ umístěné do pevného bodu M určují dvě různoběžky a, b (obr. 30). Zvolme v rovině těchto různoběžek libovolný bod X a veďme jím přímku $b' \parallel b$ (obr. 30). Průsečík přímek b, b' označme M'. Zřejmě existují čísla α, β taková, že

$$X - M = (X - M') + (M' - M) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}\,,$$

čili $X = M + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, což je (2.33). Každý bod Xté roviny, která odpovídá naší představě, vyhovuje tedy rovnici (2.33). Vzniká přirozeně otázka, zda nějaký bod, který vyhovuje rovnici (2.33), neleží mimo rovinu různoběžek a, b. Odpověď je negativní. Jsou-li totiž α, β jakákoliv reálná čísla, pak vektor $\alpha\mathbf{u}$ je kolineární s vektorem $\mathbf{u}$, vektor $\beta\mathbf{v}$ je kolineární s $\mathbf{v}$ a vektor $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, umístěný do bodu M, leží v rovině různoběžek a, b (to se snadno nahlédne). V rovině různoběžek a, b leží pak také koncový bod vektoru $X - M$.

Rovnice (2.33) se nazývá vektorová rovnice roviny; při pevně zvoleném M, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je toto vyjádření jednoznačné, jak si ještě ukážeme. Předpokládejme opak. Potom pro daný bod X platí jednak (2.33), jednak (2.34)

$$X = M + \alpha'\mathbf{u} + \beta'\mathbf{v}\,, \tag{2.34}$$

a je splněna aspoň jedna z nerovností $\alpha' \neq \alpha$, $\beta' \neq \beta$. Odečteme-li rovnice (2.33) a (2.34), dostaneme $\mathbf{o} = (\alpha - \alpha')\mathbf{u} + (\beta - \beta')\mathbf{v}$. Jestliže například $\alpha' \neq \alpha$, uvedeme poslední rovnici na tvar

$$\mathbf{u} = \frac{\beta - \beta'}{\alpha' - \alpha}\,\mathbf{v}\,. \tag{2.35}$$

Vektory (2.35) jsou nutně kolineární, což je ve sporu s požadavky definice roviny.

O vektoru $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ říkáme, že je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Můžeme tedy říci, že rovina, definovaná rovnicí (2.33), je množina všech bodů X, které jsou součtem bodu M s každou lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Příklad 2.10a. Máme napsat vektorovou rovnici roviny, která je určena body A, B, C; $A = [-2, 0, 1]$, $B = [1, 2, 1]$, $C = [-1, 2, 3]$.

Řešení. Zřejmě $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$ jsou dva směrové vektory dané roviny a podle (2.33) $X = A + \alpha(B - A) + \beta(C - A)$, neboli

$$X = [-2, 0, 1] + \alpha(3, 2, 0) + \beta(1, 2, 2)\,,$$

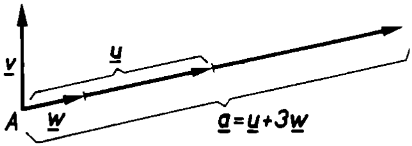
a úkol je splněn. Pokud poslední rovnici zapíšeme po složkách, získáme soustavu lineárních rovnic, kterým říkáme parametrické rovnice roviny:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + 3\alpha + \beta\,, \\ x_2 &= \phantom{-2 + {}} 2\alpha + 2\beta\,, \\ x_3 &= 1 \phantom{{}+ 3\alpha} + 2\beta\,. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Příklad 2.10b. Leží body $P = [-1, -2, -3]$, $Q = [4, 4, 2]$ v rovině ABC z příkladu 2.10a?

Řešení. Rovina ABC z příkladu 2.10 má parametrické rovnice (2.36). Je-li nějaký bod bodem roviny ABC, musí mít řešení soustava (2.36), do níž dosadíme za x_1, x_2, x_3 souřadnice daného bodu. Snadno se přesvědčíte, že bod P je bodem roviny ABC pro $\alpha = 1$, $\beta = -2$, bod Q v rovině ABC neleží.

POZNÁMKA 2.4. Jsou-li dány nějaké tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ a jeden z nich můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících, říkáme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou *komplanární* nebo také *lineárně závislé*. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ lze pak umístit do jedné roviny (latinsky „planum" = = rovina). Tři vektory, které nejsou komplanární, nazýváme *lineárně nezávislé*. Všimněme si jedné jemnosti: jestliže kupř. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$, nikterak z toho neplyne, že $\mathbf{v}$ můžeme psát ve tvaru $\mathbf{v} = \gamma\mathbf{u} + \delta\mathbf{w}$ (srovnejte s obr. 31, kde $\alpha = 0, \beta = 3$). Vektor $\gamma\mathbf{u} + \delta\mathbf{w}$



Obr. 31. Zvláštní případ komplanárních vektorů.

je v našem případě vždy kolineární jak s vektorem $\mathbf{u}$, tak s vektorem $\mathbf{w}$ a vektor $\mathbf{a}$ (obr. 31) můžeme psát ve tvaru $\mathbf{a} = \mathbf{u} + 3\mathbf{w}$, ale též $\mathbf{a} = 2\mathbf{u}$. Je-li tedy vektor vyjádřen jako lineární kombinace lineárně závislých vektorů, pak toto vyjádření není určeno jednoznačně.

2.12. Vzájemná poloha přímky a roviny a vzájemná poloha dvou rovin

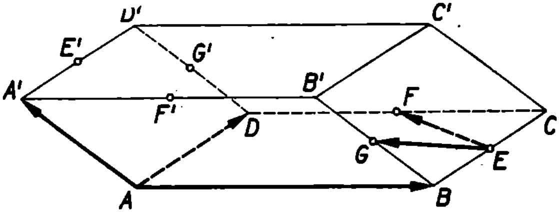
Zapišme znovu vektorové rovnice přímky a roviny:

$$X = A + \alpha\mathbf{u}\,,$$
$$X = M + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}\,.$$

Má-li mít přímka s rovinou společný bod, musí existovat čísla α, β, γ tak, že platí vektorová rovnice $A + \alpha\mathbf{u} = M + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, která rozepsána po souřadnicích vede (tuto operaci jsme zopakovali již několikrát) na systém tří lineárních rovnic o neznámých α, β, γ. Tato soustava — jak známo — může mít řešení jedno, žádné nebo nekonečně mnoho; v prvém případě jde o přímku různoběžnou s rovinou, v druhém o rovnoběžku, třetí možnost znamená, že přímka v rovině leží.

Ukažme si to na příkladech.

Příklad 2.11. Je dán rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$. Označme postupně E, F, G, E', F', G' středy hran, které neprocházejí body A, C' (obr. 32), a dokažme, že uvedených šest středů leží v jedné rovině.



Obr. 32. K příkladu 2.11.

Řešení. Ukažme, že vektor $E' - E$, který je umístěn v bodě E, leží v rovině EFG; při označení $G - E = \mathbf{a}$, $F - E = \mathbf{b}$ stačí ukázat, že vektor $E' - E$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Položme $A' - A = \mathbf{w}$, $D - A = \mathbf{v}$, $B - A = \mathbf{u}$; pak jsou zřejmé tyto vztahy:

$$E' = A' + \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{v},$$

$$E = A + \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v},$$

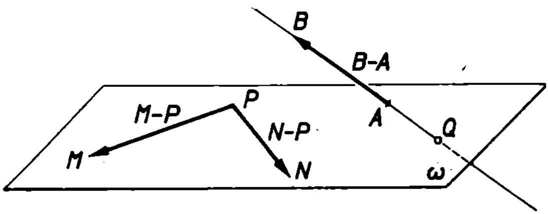
$$G = A + \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{w},$$

$$F = A + \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}.$$

Z nich pak dostaneme, že $E' - E = \mathbf{w} - \mathbf{u}$, $\mathbf{a} = G - E = \frac{1}{2}\mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = F - E = \frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}$. A tedy $E' - E = \mathbf{w} - \mathbf{u} = 2\left(\frac{1}{2}\mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{v}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}\right) = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, c.b.d. Zcela obdobně bychom postupovali v případě bodu F' i G'.

Příklad 2.12. Určete průsečík přímky AB s rovinou MNP; $A = [2, 1, 2]$, $B = [3, 1, 3]$, $M = [1, 2, 2]$, $N = [2, 2, 1]$, $P = [3, 5, 3]$.

Řešení. Z toho, co bylo řečeno na začátku tohoto odstavce, plyne $A + \alpha(B - A) = P + \beta(M - P) + \gamma(N - P)$. (Záměrně jsme v poslední rovnici vybrali za počáteční bod roviny bod P, aby si čtenář uvědomil, že je lhostejné, který bod roviny zvolíme za počáteční.)



Obr. 33. K příkladu 2.12.

Uvedená vektorová rovnice vede na soustavu

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 1\,, \\ 3\beta + 3\gamma &= 4\,, \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 1\,, \end{aligned}$$

z níž plyne $\alpha = -1$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{2}{3}$. Průsečík Q získáme nejlépe z rovnice přímky, tj. $Q = A + \alpha(B - A) = [2, 1, 2] - 1\,(1, 0, 1) = [1, 1, 1]$; v rovnici roviny bychom museli dosadit za β, γ a znamená to jistou práci navíc (obr. 33).

Příklad 2.13. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky AB a roviny MNP, jestliže $A = [1, 2, 0]$, $B = [3, 1, 2]$, $M = [1, 0, 0]$, $N = [2, 0, 1]$, $P = [1, 1, 0]$.

Řešení. Postupujme zcela obdobně jako v předchozím příkladě a napišme proto hned soustavu příslušných lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2\alpha \qquad - \gamma &= 0\,, \\ -\alpha + \beta + \gamma &= -1\,, \\ 2\alpha \qquad - \gamma &= 0\,. \end{aligned}$$

Poslední rovnice říká totéž co první, můžeme ji tedy vynechat; zbývající dvě rovnice mají pak nekonečně mnoho řešení tvaru $\beta = -1 - \alpha$, $\gamma = 2\alpha$, kde α je libovolné reálné číslo. Z úvah na začátku odstavce plyne, že přímka leží v rovině.

Příklad 2.14. Určete průsečnici rovin, z nichž první je určena bodem A a vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, druhá bodem C a vektory $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$; $A = [0, 0, 1]$, $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$, $C = [7, 5, 5]$, $\mathbf{c} = (3, 2, 2)$, $\mathbf{d} = (2, 1, 1)$.

Řešení. Zapišme vektorové rovnice daných rovin a hledejme jejich společné body. Rovnice první roviny je $X = A + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, druhá $X = C + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}$, pro společné body pak máme $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} - \gamma\mathbf{c} - \delta\mathbf{d} = C - A$. Rozpis po souřadnicích vede na systém tří rovnic pro čtyři neznámé

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta - 3\gamma - 2\delta &= 7\,, \\ \alpha + 2\beta - 2\gamma - \delta &= 5\,, \\ \beta - 2\gamma - \delta &= 4\,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Čtenář není asi obeznámen s řešením systémů lineárních rovnic o n neznámých, je-li $n > 3$, a rozsah této publikace nedovoluje, abychom tomuto problému věnovali více místa. Řekněme si však aspoň tolik, že vhodným sčítáním rovnic lze převést danou soustavu na tzv. *trojúhelníkový tvar*, přičemž tato nová soustava je *ekvivalentní* (tj. každé řešení jedné soustavy je řešením soustavy druhé a obráceně) s danou soustavou. Pro naše potřeby postačí, ukážeme-li celý postup na soustavě (2.37). První a třetí rovnici opíšeme, od druhé rovnice odečteme první a máme

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta - 3\gamma - 2\delta &= 7\,, \\ \gamma + \delta &= -2\,, \\ \beta - 2\gamma - \delta &= 4 \end{aligned}$$

a výměnou druhé a třetí rovnice získáme zmíněný trojúhelníkový tvar soustavy:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta - 3\gamma - 2\delta &= 7\,, \\ \beta - 2\gamma - \delta &= 4\,, \\ \gamma + \delta &= -2\,. \end{aligned} \tag{2.38}$$

POZNÁMKA 2.5. Název trojúhelníkový tvar vznikl takto: Je-li dána soustava n rovnic o n neznámých a soustava má jediné řešení, pak levá strana soustavy má po úpravách skutečně tvar trojúhelníka. V našem případě, jak vidno z (2.38), jsme dostali tvar lichoběžníka, avšak i v takových případech hovoříme běžně o „trojúhelníkovém tvaru“.

Pro naše potřeby uveďme bez důkazu tvrzení: Budiž n počet neznámých a h počet rovnic po uvedení na trojúhelníkový tvar. Potom platí: a) je-li $h = n$ a žádná rovnice není „sporná“, má soustava jediné řešení; b) je-li $h < n$ a žádná rovnice není „sporná“, má soustava nekonečně mnoho řešení a $n - h$ neznámých můžeme volit libovolně; c) je-li v systému aspoň jedna rovnice „sporná“, nemá soustava řešení.

K našemu tvrzení dodejme ještě toto: Ke „sporné“ rovnici může dojít jen tak, že na levé straně dostaneme při úpravách nulu, ale pravá strana je různá od nuly.

V systému rovnic (2.38) je $n = 4$, $h = 3$. Podle tvrzení z poznámky 2.5 má tedy soustava (2.38) nekonečně mnoho řešení, přičemž jedna z nich je libovolně volitelná; tato volitelná v našem systému budiž δ. Pak je $\gamma = -2 - \delta$, $\beta = -\delta$, $\alpha = 1 + \delta$. Po dosazení do rovnice $X = A + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ máme ihned $X = A + (1 - \delta)\mathbf{a} - \delta\mathbf{b}$, neboli $X = A + \mathbf{a} + \delta(\mathbf{a} - \mathbf{b})$. Poslední rovnice je však vektorová rovnice přímky; roviny mají tedy společnou přímku a jsou proto různoběžné. Konkrétně má naše průsečnice rovnici $X = [1, 1, 1] + \delta(-1, -1, -1)$.

Příklad 2.15. Určete vzájemnou polohu rovin ABC a PQR, jestliže

a) $A = [1, 2, 3]$, $\quad B = [0, 2, 5]$, $\quad C = [3, 3, 4]$,
$P = [2, 3, 0]$, $\quad Q = [3, 4, 3]$, $\quad R = [5, 4, -1]$,

b) $A = [1, 2, 3], \quad B = [3, 2, -1], \; C = [-5, -1, 0],$
$P = [5, 2, -5], \; Q = [6, 3, -2], \; R = [8, 3, -6].$

Řešení. a) Postupujeme stejně jako při řešení příkladu 2.14. Dospějeme tak k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta + \gamma + 3\delta &= -1\,, \\ \beta - \gamma - \delta &= 1\,, \\ 2\alpha + \beta - 3\gamma + \delta &= -3\,, \end{aligned}$$

která po úpravě na trojúhelníkový tvar dává

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta + \gamma + 3\delta &= -1\,, \\ \beta - \gamma - \delta &= 1\,, \\ 0 &= -6\,. \end{aligned}$$

Poslední „rovnost“ neplatí, soustava obsahuje tedy „spornou“ rovnici (vzhledem k ostatním rovnicím) a nemá proto řešení. Neexistuje tedy žádný společný bod daných rovin, což znamená, že jsou rovnoběžné.

b) V tomto případě systém rovnic analogický se systémem (2.37) má tvar

$$\begin{aligned} 2\alpha - 6\beta - \gamma - 3\delta &= 4\,, \\ 3\beta + \gamma + \delta &= 0\,, \\ 4\alpha + 3\beta + 3\gamma - \delta &= 8\,; \end{aligned}$$

systém, odpovídající systému (2.38), pak je

$$\begin{aligned} 2\alpha - 6\beta - \gamma - 3\delta &= 4\,, \\ 3\beta + \gamma + \delta &= 0\,. \end{aligned}$$

Podle tvrzení z poznámky 2.5 má poslední soustava nekonečně mnoho řešení, přičemž dvě neznámé můžeme volit zcela libovolně, zbývající vypočítáme. Můžeme-li však volit libovolně třeba γ, δ (a to můžeme), určuje každá zvolená dvojice po dosazení do vektorové rovnice

$X = P + \gamma(Q - P) + \delta(R - P)$ bod roviny PQR. To však znamená, že každý bod roviny PQR je také bodem roviny ABC, obě roviny tedy splývají.

POZNÁMKA 2.6. Rádi bychom na tomto místě upozornili čtenáře na jednu důležitou věc. Sami vidíte, že s velkou lehkostí řešíme pomocí vektorového počtu i dosti komplikované konkrétní problémy; někdy však couváme před obecným pohledem. V tomto odstavci jsme se kupř. vyhnuli odpovědi na otázku, jaké podmínky musí obecně platit pro body A, B, C a P, Q, R (případně pro odpovídající vektory), aby dané roviny měly jednu ze tří známých poloh. Důvod je ovšem jasný; nemáme totiž k dispozici dost obsáhlý algebraický aparát. Je jistě pravda, že nám jde především o geometrii, ale potřeba jistého okruhu znalostí z algebry je naprosto zřejmá. Těm, které geometrie opravdu hlouběji zajímá, doporučujeme, aby souběžně věnovali svou pozornost také algebře. Při výběru literatury vám jistě poradí každý dobrý učitel matematiky.

2.13. Obecný tvar rovnice přímky a roviny

Víme, že v E_2 můžeme každou přímku zapsat také jedinou rovnicí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0\,, \tag{2.39}$$

v níž aspoň jedno z čísel a_1, a_2 je nenulové. Řekněme si rovnou, že v E_3 nelze přímku zapsat ve tvaru (2.39). Připomeňme si převod vektorové rovnice přímky v E_2 na tvar (2.39), kterému říkáme obecný tvar rovnice přímky.

Příklad 2.16. Napište vektorovou rovnici přímky AB

a převeďte ji na obecný tvar, jestliže $A = [1, 4]$, $B = [-2, 3]$.

Řešení. Vektorová rovnice naší přímky je $X = A + \alpha(B - A)$, tedy $X = [1, 4] + \alpha(-3, -1)$; odtud máme tzv. parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 3\alpha\,, \\ x_2 &= 4 - \alpha\,, \end{aligned}$$

z nichž vyloučíme parametr α třeba tak, že druhou rovnici násobíme číslem -3, sečteme s první a máme ihned tvar obecný: $x_1 - 3x_2 + 11 = 0$. Podobně to můžeme udělat s vektorovou rovnicí roviny $X = M + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$; přejdeme-li k parametrickým rovnicím a vyloučíme z nich parametry α, β, dostaneme obecně lineární rovnici o třech neznámých x_1, x_2, x_3, kterou můžeme psát ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0\,. \tag{2.40}$$

Rovnici (2.40), v níž aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 je nenulový, říkáme obecný tvar rovnice roviny. Bod X je bodem dané roviny právě tehdy, jestliže jeho souřadnice, dosazeny do (2.40), převádějí tuto rovnici v rovnost.

Jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně nezávislé (nekolineární), dá se ukázat, že převod je vždy možný a každý bod X, který vyhovuje vektorové rovnici, vyhovuje také rovnici (2.40) a obráceně. Rovnice (2.39) a (2.40) jsou objekty afinní geometrie, od důkazu však na tomto místě upouštíme, neboť nemáme dostatek algebraických prostředků, které by byly k dispozici ze střední školy. Důkaz rovnice (2.40) podáme ve 3. kapitole, použijeme však metrických pojmů.

Příklad 2.16. Napište obecný tvar rovnice roviny, která prochází body $A = [-1, 0, -1]$, $B = [-9, 1, 1]$, $C = [6, -2, -2]$.

Řešení. Postupujme cestou, kterou jsme nastínili v úvodu; parametrické rovnice roviny ABC jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 8\alpha + 7\beta\,, \\ x_2 &= \phantom{-1 -{}} \alpha - 2\beta\,, \\ x_3 &= -1 + 2\alpha - \beta\,. \end{aligned}$$

Poslední rovnici násobíme nejprve číslem -2 a sečteme s druhou, potom číslem 7 a sečteme s první; získáme tak dvě rovnice, v nichž se parametr β již nevyskytuje:

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &= 2 - 3\alpha\,, \\ x_1 + 7x_3 &= -8 + 6\alpha\,. \end{aligned}$$

Násobme nyní prvou rovnici dvěma a sečtěme s druhou; tím se zbavíme i parametru α a po anulování máme

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0\,, \tag{2.41}$$

což je rovnice (2.40).

Můžeme však zvolit jiný postup. Z toho, co bylo řečeno, plyne, že body A, B, C musí splňovat rovnici (2.40); proto platí

$$\begin{aligned} -a_1 \phantom{{}+a_2} + a_3 + a_0 &= 0\,, \\ -9a_1 + a_2 + a_3 + a_0 &= 0\,, \\ 6a_1 - 2a_2 - 2a_3 + a_0 &= 0\,. \end{aligned}$$

O soustavách lineárních rovnic jsme se zmínili v poznámce 2.5. Stačí přejít na trojúhelníkový tvar a zjistíte, že jedno z čísel a_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ můžeme volit libovolně, zbylá jsou při dané volbě jednoznačně určena;

nemusíme ovšem získat rovnici formálně shodnou s rovnicí (2.41), nutně však bude s rovnicí (2.41) ekvivalentní. Bylo řečeno, že za volitelnou neznámou můžeme dosadit libovolné číslo. Obecně ano, v našem případě však nesmíme dosadit nulu; důvod, který snadno odhalíte, je ovšem v geometrii, nikoli v algebře.

Příklad 2.17. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky EF s rovinou $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0$, jestliže

a) $E = [-2, 4, 6]$, $F = [-3, 2, 3]$,
b) $E = [0, -2, 0]$, $F = [1, 2, -3]$,
c) $E = [3, 1, 3]$, $F = [4, 5, 0]$;

je-li přímka různoběžná s rovinou, určete průsečík.

Řešení. a) Z vektorové rovnice přímky $X = [-2, 4,6] + \alpha(-1, -2, -3)$ přejdeme k rovnicím parametrickým

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - \alpha\,, \\ x_2 &= 4 - 2\alpha\,, \\ x_3 &= 6 - 3\alpha\,. \end{aligned}$$

Má-li přímka s rovinou společný bod, pak jeho souřadnice převádějí rovnici roviny v rovnost. Dosadíme-li parametrické rovnice přímky do rovnice roviny, dostaneme lineární rovnici pro neznámou α. Víme ovšem, že taková rovnice může mít také nekonečně mnoho řešení nebo žádné. V našem případě platí $(-2 - \alpha) + 2(4 - 2\alpha) + 3(6 - 3\alpha) + 4 = 0$; odtud $\alpha = 2$, existuje jediný společný bod obou útvarů, přímka je různoběžná s danou rovinou. Průsečík R určíme dosazením $\alpha = 2$ do vektorové rovnice přímky: $R = [-4, 0, 0]$.

b) Zcela obdobně zjistíme v tomto případě, že příslušná lineární rovnice pro α je splněna identicky, každý bod přímky (nám by stačily dva) je také bodem dané roviny, přímka tedy v rovině leží.

c) Dá se očekávat, že úloha je volena tak, aby byla vyčerpána každá ze tří možných poloh. Jde vskutku o polohu rovnoběžnou a přímka EF není přímkou dané roviny; příslušná lineární rovnice pro α nemá řešení, doporučujeme proto čtenáři, aby se o tom přesvědčil. V prostoru E_3 používáme často místo symboliky $X = [x_1, x_2, x_3]$ zápisu $X = [x, y, z]$; použijme tohoto označení v následující úloze.

Příklad 2.18. Určete průsečnici rovin daných rovnicemi

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 2 &= 0\,, \\ x + 2y + 3z + 4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Řešení. Souřadnice společných bodů musí splňovat obě rovnice, jsou tedy určeny řešením dané soustavy dvou rovnic o třech neznámých, kterou převedeme opět na trojúhelníkový tvar

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -2\,, \\ y + z &= -2\,; \end{aligned}$$

podle poznámky 2.5 můžeme jednu neznámou volit zcela libovolně, zbývající dvě jsou pak již na této volbě závislé. Zvolme tedy obecně $z = \alpha$; pak $y = -2 - \alpha$, $x = -\alpha$. Výsledné řešení zapíšeme přehledněji

$$\begin{aligned} x &= -\alpha\,, \\ y &= -2 - \alpha\,, \\ z &= \alpha\,. \end{aligned}$$

Obě roviny mají tedy nekonečně mnoho společných bodů, které můžeme psát ve tvaru $X = [0, -2, 0] + \alpha(-1, -1, 1)$, což je vektorová rovnice přímky. Dané roviny jsou proto různoběžné a řešením je popsána jejich průsečnice.

Příklad 2.19. Rovina je dána rovnicí $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$. Dokažte, že nenulový vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je rovnoběžný s danou rovinou právě tehdy, jestliže platí

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0\,. \tag{2.42}$$

Řešení. V dané rovině zvolíme bod Q a umístíme do něj vektor $\mathbf{u}$; koncový bod vektoru $\mathbf{u}$ při tomto umístění označme R. Je-li vektor $\mathbf{u}$ s danou rovinou rovnoběžný, pak při zvoleném umístění platí rovnice

$$a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3 + a_0 = 0\,, \tag{2.43}$$

$$a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + a_0 = 0\,; \tag{2.44}$$

odečtením obou rovnic dostaneme

$$a_1(r_1 - q_1) + a_2(r_2 - q_2) + a_3(r_3 - q_3) = 0\,, \tag{2.45}$$

neboli $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$.

Obráceně — platí-li (2.42) neboli (2.45), pak při daném umístění platí také (2.43) a součet obou rovnic vede na rovnici (2.44); bod R tedy leží rovněž v dané rovině a leží tam proto i vektor $\mathbf{u} = R - Q$ s umístěním v bodě Q.

2.14. Svazek rovin

Úvahy v tomto odstavci budou vycházet z následující definice:

Definice 2.11. Množina všech rovin, které procházejí společnou přímkou o, se nazývá *svazek rovin* (přesněji *svazek rovin* 1. *druhu*). Přímka o je tzv. *osa svazku.*

Svazek rovin je určen, známe-li dvě jeho různé roviny. Předpokládejme, že určující roviny svazku jsou dány rovnicemi

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a = 0\,, \tag{2.46}$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b = 0\,. \tag{2.47}$$

Ukážeme si, že každá rovina, určená rovnicí

$$\begin{aligned}\alpha(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a) &+ \\ + \beta(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b) &= 0\,,\end{aligned} \tag{2.48}$$

kde α, β jsou reálná čísla, z nichž aspoň jedno je nenulové, náleží do uvažovaného svazku. Skutečně, jestliže $[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$ je libovolný bod ležící na průsečnici o, pak jeho souřadnice musí vyhovovat rovnicím (2.46) a (2.47). Potom ovšem souřadnice tohoto bodu vyhovují rovnici (2.48); čili v rovině určené rovnicí (2.48) leží každý bod průsečnice o a zkoumaná rovina náleží danému svazku rovin.

Vzniká jistě otázka, jestli každá rovina svazku má rovnici tvaru (2.48). Odpověď je kladná. Nechť libovolná rovina svazku prochází bodem $[x_1, x_2, x_3] \notin o$. Ukážeme, že její rovnici lze psát ve tvaru (2.48). Dosaďme souřadnice tohoto bodu do rovnice (2.48). Získáme tak rovnici pro neznámé koeficienty α, β.

Tyto koeficienty jsou až násobek libovolným číslem určeny jednoznačně a dosadíme-li je do (2.48), máme rovnici roviny v hledaném tvaru. Dodejme, že (2.48) se často nazývá rovnicí svazku rovin.

Příklad 2.20. Napište rovnici roviny, která prochází bodem $M = [3, 1, 3]$ a obsahuje průsečnici rovin

$$2x + 2y - 3z - 1 = 0\,,$$
$$x + 3y - z - 2 = 0\,.$$

Řešení. Rovnici hledané roviny lze psát podle (2.48) ve tvaru

$$\alpha(2x + 2y - 3z - 1) + \beta(x + 3y - z - 2) = 0\,. \tag{2.49}$$

Dosadíme-li sem souřadnice bodu M, dostáváme

$$-2\alpha + \beta = 0$$

a tedy $\alpha : \beta = 1 : 2$. Zvolíme-li $\alpha = 1$, $\beta = 2$, dostáváme z (2.49)

$$4x + 8y - 5z - 5 = 0\,,$$

což je rovnice hledané roviny.

S dalšími příklady na svazek rovin se setkáme ještě ve třetí kapitole. Dodejme, že bývá zvykem i množinu všech rovin navzájem rovnoběžných nazývat svazkem (přesněji *svazkem rovin 2. druhu*). Jsou-li (2.46) a (2.47) rovnice dvou různých rovin svazku druhého druhu, potom (2.48) je tzv. rovnicí svazku. Lze totiž ukázat, že platí zcela analogická věta jako pro svazek prvního druhu. Rovnici roviny, která náleží právě do svazku rovnic druhého druhu, lze psát ve tvaru (2.48).

Cvičení

2.1. Co je to vektor a jak jsou definovány základní vektorové operace: součet dvou vektorů; součin vektoru s reálným číslem? Kdy jsou dva vektory kolineární, kdy jsou tři vektory komplanární?

2.2. V rovnoběžníku $ABCD$, který má střed S, označme $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = D - A$. Vyjádřete pomocí vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektory $S - A$, $B - S$, $D - S$.

2.3. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $-\mathbf{a}$ jsou lineárně závislé.

2.4. Je dán trojúhelník ABC a libovolný bod T. Sestrojte vektory $\mathbf{a} = A - T$, $\mathbf{b} = B - T$, $\mathbf{c} = C - T$. Ukažte, že rovnice

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$$

je splněna právě tehdy, jestliže T je těžištěm trojúhelníka.

2.5. Je dán lichoběžník $ABCD$. Jeho základna AB je třikrát větší než základna CD. Pomocí vektorů $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - B$, vyjádřete vektory $D - C$, $A - D$.

2.6. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (3, 4, 2)$ jsou komplanární.

2.7. Dokažte, že body $A = [1, 1, 1]$, $B = [1, 1, 2]$, $C = [3, 1, 2]$, $D = [3, 1, 1]$ jsou vrcholy rovnoběžníka.

2.8. Ukažte, že body $A = [3, 3, 0]$, $B = [5, 4, 3]$, $C = [1, 2, -3]$, $D = [7, 5, 6]$ leží na jedné přímce.

2.9. Napište obecný tvar rovnice roviny, která prochází bodem $A = [4, 3, -5]$ rovnoběžně s vektory $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (2, -1, -1)$.

2.10. Napište obecný tvar rovnice roviny, která prochází body $A = [2, -1, 3]$, $B = [4, 1, 3]$, $C = [-1, -2, 4]$.

2.11. Dokažte, že dvě roviny o rovnicích

$$ax + by + cz + d = 0\,,$$
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

jsou rovnoběžné právě tehdy, jestliže existuje číslo $k \neq 0$ tak, že platí

$$A = ka\,, \quad B = kb\,, \quad C = kc\,.$$

2.12. Napište rovnici roviny, která prochází bodem $M = [1, 2, 3]$ a je rovnoběžná s rovinou $2x + y - 2z = 0$.

2.13. Určete vzájemnou polohu rovin

$$\begin{aligned} 2x + y + z - 4 &= 0\,, \\ 3x + 2y + z - 6 &= 0\,, \\ x + y - 2z &= 0\,. \end{aligned}$$

2.14. Určete průsečík P přímky AB s rovinou $x - 2y + 3z - 2 = 0$, jestliže $A = [2, 1, 4]$, $B = [3, 1, 7]$.

2.15. Průsečnicí rovin

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 3z + 1 &= 0\,, \\ x - 2y - 2z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

proložte rovinu, která prochází bodem $M = [0, 1, -2]$; zvolte různé způsoby řešení.

2.16. Průsečnicí rovin z předcházejícího příkladu proložte rovinu rovnoběžnou s přímkou AB; $A = [1, 1, 1]$, $B = [2, 3, 3]$ a napište její rovnice (parametrické i obecnou).

2.17. Bodem M vedeme příčku přímek AB, CD. Napište její rovnici, jestliže $M = [3, 4, 1]$; $A = [0, 0, 2]$, $B = [2, 4, 0]$, $C = [4, 0, 0]$, $D = [0, 6, 2]$.

2.18. Určete rovnici příčky přímek AB, CD z předcházejícího příkladu, víte-li, že je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$.

2.19. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky AB s rovinou PQR; $P = [2, 4, 2]$, $Q = [2, 2, 2]$, $R = [8, -2, 4]$,

a) $A = [3, 4, 3]$, $B = [4, 5, 4]$,

b) $A = [2, 4, 2]$, $B = [5, 0, 3]$.

2.20. Dokažte, že středy hran AB, BC, CD, DA daného čtyřstěnu leží v jedné rovině.

2.21. Označme T_A, T_B, T_C, T_D těžiště stěn čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že čtyřstěny $ABCD$ a $T_AT_BT_CT_D$ mají společné těžiště.

2.22. Dokažte, že ve stejnolehlosti těžišti daného čtyřstěnu odpovídá těžiště odpovídajícího čtyřstěnu.

2.23. Co vznikne složením stejnolehlostí H_{12} (S_{12}, α) a H_{23} (S_{23}, β), jestliže

a) $S_{12} = [3, 4, 1]$, $\alpha = -\frac{1}{5}$, $S_{23} = [5, 2, -1]$, $\beta = 5$,

b) $S_{12} = [7, 0, 2]$, $\alpha = 3$, $S_{23} = [3, 2, 1]$, $\beta = \frac{1}{3}$?

2.24. Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$. Nechť k_i $(i = 1, 2, 3)$ jsou reálná čísla vesměs různá od nuly a od jedné. Na každé straně A_iA_{i+1} $(A_4 = A_1)$ sestrojme body B_i tak, že dělicí poměr $(A_iA_{i+1}B_i) = k_i$. Pak platí

1. všechny body B_i leží na jedné přímce právě tehdy, když $k_1k_2k_3 = 1$ (věta Menelaova);
2. přímky B_1A_3, B_2A_1, B_3A_2 mají společný bod nebo společný směr právě tehdy, když $k_1k_2k_3 = -1$ (věta Cevova).

Pokuste se uvedené věty dokázat; obě lze zobecnit pro $(n + 1)$-úhelník z n-rozměrného prostoru.

3. kapitola

EUKLIDOVSKÁ GEOMETRIE

Prostorem našeho zájmu bude opět euklidovský prostor E_3. Ke studiu některých vztahů mezi geometrickými objekty budeme nyní potřebovat pojem vzdálenosti dvou bodů a velikosti úhlu. V tom spočívá hlavní rozdíl mezi geometrií afinní, kterou jsme studovali až dosud, a geometrií euklidovskou, kterou budeme studovat nyní. V celé kapitole budeme předpokládat, že soustava souřadnic je kartézská; metodou studia bude opět vektorový počet.

3.1. Skalární součin dvou vektorů

Z úvodní kapitoly víme, že vzdálenost bodů $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ je dána vzorcem

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\,. \qquad (3.1)$$

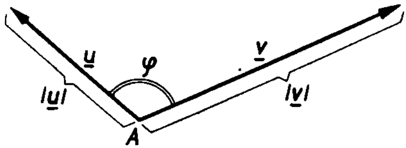
Definice 3.1. Buď $\overrightarrow{AB}$ libovolné umístění vektoru $\mathbf{u}$; *velikostí vektoru* $\mathbf{u}$, kterou označíme $|\mathbf{u}|$, nazýváme velikost úsečky AB.

Věta 3.1. *Pro velikost vektoru* $\mathbf{u}$ *platí vzorec*

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,. \qquad (3.2)$$

Důkaz. Je-li $\overrightarrow{AB}$ umístěním vektoru $\mathbf{u}$, pak $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$; stačí nyní porovnat (3.1) a (3.2).

Definice 3.2. Nechť $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ jsou umístěním dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Polopřímky PA, PB určují neorientovaný úhel o velikosti φ, kde $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Číslo φ nazýváme *odchylkou vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.



Obr. 34. K definici skalárního součinu vektorů.

Definice 3.3. Buď φ odchylka dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (obr. 34); *skalárním součinem vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ rozumíme číslo $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi$, které označujeme $\mathbf{uv}$. Píšeme proto

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi\,. \tag{3.3}$$

Je-li aspoň jeden z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nulový, pak definujeme $\mathbf{uv} = 0$.

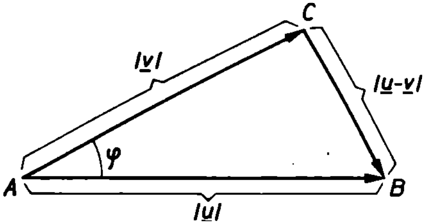
Věta 3.2. *Jsou-li* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *dva libovolné vektory, pak*

$$\mathbf{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\,. \tag{3.4}$$

Důkaz. a) Pokud $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou vektory lineárně nezávislé a označíme φ jejich odchylku, pak při vhodném umístění vektorů vznikne trojúhelník (obr. 35) a podle kosinové věty máme $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \varphi$; z (3.2) a (3.3) plyne po úpravě (3.4).

b) Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ kolineární vektory souhlasně orientované, pak $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$, $\alpha > 0$ a odchylka těchto vektorů je rovna nule; pak ovšem $\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos 0 =$

$= \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = (\alpha v_1)\, v_1 + (\alpha v_2)\, v_2 +$ $+ (\alpha v_3)\, v_3 = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$. V případě, že $\alpha < 0$, postupujeme stejně; případ $\alpha = 0$ je patrný bez výpočtu.



Obr. 35. K důkazu věty 3.2.

3.2. Základní vlastnosti skalárního součinu

Na tomto místě odvodíme čtyři důležité vlastnosti skalárního součinu, které označíme $\mathscr{C}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; v další kapitole budou v roli axiomů při budování euklidovského prostoru.

Věta 3.3. Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *tři libovolné vektory a* α *nějaké reálné číslo, pak platí:*

$\mathscr{C}_1$) $\quad \mathbf{uv} = \mathbf{vu}$ *(vztah komutativní),*

$\mathscr{C}_2$) $\quad \mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{uv} + \mathbf{uw}$ *(vztah distributivní),*

$\mathscr{C}_3$) $\quad (\alpha\mathbf{u})\,\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{uv})$ *(vztah asociativní),*

$\mathscr{C}_4$) $\quad \mathbf{uu} \geqq 0$, *přičemž rovnost platí právě tehdy, jestliže* $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

D ů k a z. Přechodem k souřadnicím se velmi lehce ověří všechny uvedené vlastnosti; případ vztahu komutativního budiž toho dokladem:

$$\mathbf{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \mathbf{vu};$$

zbylé vlastnosti skalárního součinu si ověříte snadno sami.

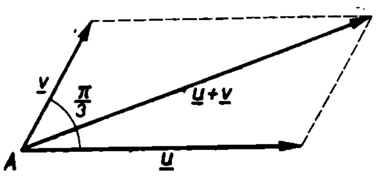
Věta 3.4. Velikost vektoru $\mathbf{u}$ je dána vzorcem

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{uu}}. \tag{3.5}$$

Důkaz. Jelikož $\mathbf{uu} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, máme po dosazení do (3.5) ihned (3.2).

Uvedený vzorec (3.5) nám umožňuje řešení některých úloh bez použití souřadnic, jak ukazuje následující úloha.

Příklad 3.1. V bodě A působí dvě síly o velikostech 3 a 5; odchylka sil $\varphi = \frac{1}{3}\pi$. Určete velikost výslednice obou sil.



Obr. 36. K příkladu 3.1.

Řešení. Mluvme hned geometrickou řečí (obr. 36). Síly jsou reprezentovány vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, které jsou umístěny v bodě A, přičemž platí $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 5$.

Výslednicí je zřejmě síla o velikosti $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v})}$. Odtud dle $\mathscr{C}_2$ $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{uu} + 2\mathbf{uv} + \mathbf{vv}}$ a po dosazení $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| =$

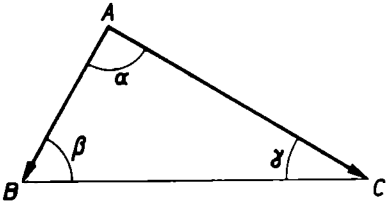
$$= \sqrt{3^2 + 2.3.5 \cos \frac{\pi}{3} + 5^2} = 7.$$

Věta 3.5. Označme φ odchylku dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Potom platí

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}. \tag{3.6}$$

Věta je okamžitým důsledkem vzorce (3.3).

Příklad 3.2. Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka ABC; $A = [4, 2, 0]$, $B = [5, 0, 2]$, $C = [3, 1, 4]$.



Obr. 37. K příkladu 3.2.

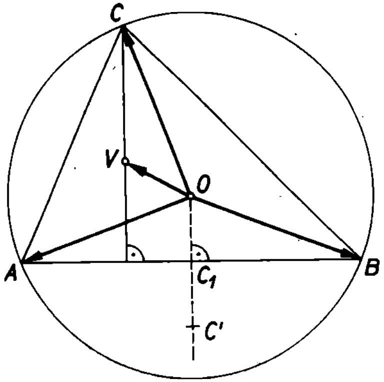
Řešení: Jelikož $B - A = (1, -2, 2)$, $C - A = (-1, -1, 4)$, pak $|B - A| = 3$, $|C - A| = 3\sqrt{2}$ a podle (3.6) máme (obr. 37) $\cos \alpha = \dfrac{(B - A)(C - A)}{|B - A|\,|C - A|} = \dfrac{9}{3.3\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{2}}$, tedy $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; podobně určíme, že $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$.

Na závěr uveďme ještě jednu větu, jejíž správnost plyne přímo ze vztahu (3.3).

Věta 3.5. *Dva nenulové vektory jsou k sobě kolmé právě tehdy, jestliže jejich skalární součin je roven nule.*

3.3. Některé úlohy o trojúhelníku

Trojúhelník je základním stavebním prvkem geometrie. Většinu jeho vlastností znáte velmi dobře ze střední školy. Syntetické důkazy některých vlastností trojúhelníka nejsou zrovna příjemné. Použití vektorů nám tuto práci usnadní.



Obr. 38. Průsečík výšek v trojúhelníku.

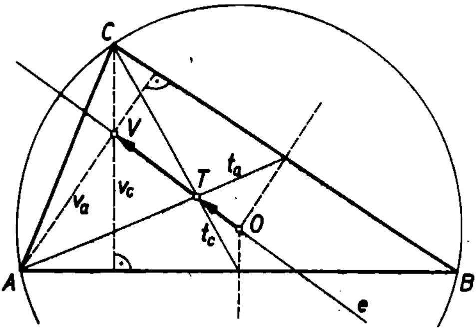
Věta 3.6. *Výšky trojúhelníka se protínají v jediném bodě (tzv. ortocentru).*

D ů k a z. Označme O středy kružnice trojúhelníku ABC opsané (obr. 38), C_1 střed strany AB, C' pak nechť je bod souměrně sdružený s bodem O podle přímky AB. Pro jistý bod V nechť platí

$$V = O + (A - O) + (B - O) + (C - O)\,. \quad (3.7)$$

Víme, že $(A - O) + (B - O) = C' - O$, což dosazeno do (3.7) nám dá $V = O + (C' - O) + (C - O)$, neboli $V - C = C' - O$. Vektory $V - C$ a $C' - O$ jsou tedy rovnoběžné, bod V nutně leží na kolmici vedené bodem C ke straně AB. Při každé cyklické permutaci vrcholů A, B, C má rovnice (3.7) stejný tvar, bod V zůstane pevný a je proto společným bodem všech tří výšek.

Věta 3.7. *Označme O střed kružnice trojúhelníku ABC opsané, T ať je těžiště a V průsečík výšek; body O, T, V leží vždy na jedné přímce (tzv. Eulerově), přičemž bod T odděluje body O, V* tak, že platí $OT : TV = 1 : 2$ (obr. 39).



Obr. 39. Eulerova přímka.

Důkaz. Máme dokázat, že v každém trojúhelníku je $V - O = 3(T - O)$; nuže, podle (3.7) máme:

$$V - O = (A - O) + (B - O) + (C - O) =$$
$$= 3\left\{\frac{1}{3}(A + B + C) - O\right\} = 3(T - O).$$

Věta 3.8. *Nechť $k = (O, r)$ je kružnice trojúhelníku ABC opsaná, průsečík výšek označme V. Středy stran, paty výšek a středy úseček AV, BV, CV leží vždy na jediné (tzv. Feuerbachově) kružnici $k_1 \equiv \left(F, \frac{r}{2}\right)$, přičemž střed F leží na Eulerově přímce a půlí úsečku OV.*

Důkaz. Pro střed F úsečky OV máme $F = \frac{1}{2}[O + V]$; dosadíme-li sem za V podle (3.7), pak $F = \frac{1}{2}[O + O + (A - O) + (B - O) + (C - O)]$, neboli

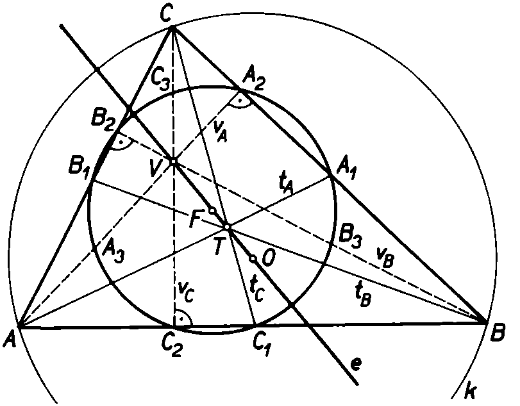
$$F = O + \frac{1}{2}(A - O) + \frac{1}{2}(B - O) + \frac{1}{2}(C - O). \tag{3.8}$$

Středy stran BC, CA, AB označme po řadě A_1, B_1, C_1, paty výšek A_2, B_2, C_2 a středy úseček AV, BV, CV v daném pořadí ať jsou A_3, B_3, C_3 (obr. 40). Dokážeme nyní, že $FC_1 = FC_3 = \frac{1}{2}r$; můžeme zřejmě psát

$$C_1 - F = (C_1 - O) + (O - F). \tag{3.9}$$

Avšak $C_1 - O = \frac{1}{2}(A - O) + \frac{1}{2}(B - O)$. Odtud a ze

(3.8) plyne, že (3.9) můžeme uvést na tvar $C_1 - F = \frac{1}{2}(O - C)$; tedy $FC_1 = |C_1 - F| = \frac{1}{2}|O - C| = \frac{1}{2} r$.



Obr. 40. Feuerbachova kružnice.

Podobně určíme velikost úsečky FC_3 : Je totiž $C_3 = \frac{1}{2}[C + V]$ a podle (3.7) máme

$$C_3 = \frac{1}{2}[C + O + (A - O) + (B - O) + (C - O)] . \tag{3.10}$$

Body F a C_3 máme nyní dány ve tvaru (3.8) a (3.10); použijme těchto zápisů pro výpočet vektoru $C_3 - F$. Snadná úprava nám dává, že $C_3 - F = \frac{1}{2}(C - O)$, a tedy $FC_3 = |C_3 - F| = \frac{1}{2}|C - O| = \frac{1}{2}r$. Body C_1 a C_3 leží proto na Feuerbachově kružnici a z Thaletovy věty plyne, že na téže kružnici leží také bod C_2. Cyklická záměna vrcholů A, B, C vede pak k závěru, že na $k_1 \equiv \left(F, \frac{r}{2}\right)$ leží také trojice bodů A_1, A_2, A_3 a B_1, B_2, B_3.

3.4. Úlohy o kružnicích

Předpokládejme, že v dané euklidovské rovině E_2, kde body i vektory můžeme popsat dvěma souřadnicemi (srv. 2. kapitolu), leží kružnice o středu O a poloměru r. Bod X je bodem kružnice právě tehdy, jestliže pro úsečku OX platí $OX^2 = r^2$ neboli $|X - O|^2 = r^2$. Podle (3.5) můžeme poslední rovnici psát ve formě

$$(X - O).(X - O) = r^2 \tag{3.11}$$

a máme vektorovou rovnici kružnice. Užijeme-li (3.4), uvedeme (3.11) na tvar, který dobře znáte, tj.

$$(x_1 - o_1)^2 + (x_2 - o_2)^2 = r^2 .$$

Stejnolehlostí jsme se zabývali v odstavci 2.8. Je-li v rovině dána stejnolehlost $H(S, \lambda)$, můžeme vektorovou rovnici této stejnolehlosti psát třeba takto:

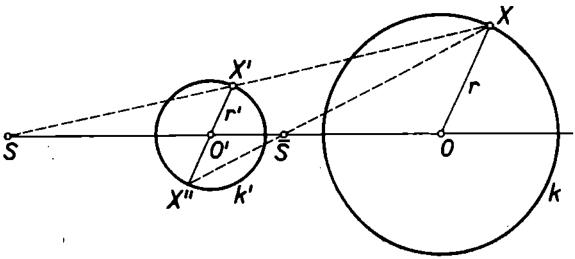
$$X' = S + \lambda(X - S) . \tag{3.12}$$

Položme si otázku, co odpovídá ve stejnolehlosti $H(S, \lambda)$ dané kružnici $k = (O, r)$. Pro vektor $X - O$ zajisté platí $X - O = \frac{1}{\lambda}(S - S) + (X - S) + (S - O)$;

po dosazení do rovnice (3.11) pak dostaneme

$$\frac{1}{\lambda^2}\{[S+\lambda(X-S)]-[S+\lambda(O-S)]\}.\{[S-\lambda(X-S)]-$$
$$-[S+\lambda(O-S)]\}=r^2,$$

což podle (3.12) znamená, že $(X'-O')(X'-O)=$ $=\lambda^2r^2$.



Obr. 41. Stejnolehlost dvou kružnic.

Dokázali jsme (obr. 41):

Věta 3.9. *Nechť ve stejnolehlosti $H(S, \lambda)$ odpovídá bodu O bod O'; potom kružnici $k \equiv (O, r)$ odpovídá vždy kružnice $k' \equiv (O', |\lambda|\, r)$.*

Pro úplnost dodejme, že je-li $\lambda > 0$ nazýváme S vnějším středem stejnolehlosti kružnic k, k'; je-li $\lambda < 0$, bodu S říkáme vnější střed stejnolehlosti kružnic k, k' (obr. 41).

Věta 3.9 navozuje přirozeně další otázku: Jsou-li dány dvě kružnice $k = (O, r)$, $k' = (O', r')$, kde $O \neq O'$, existuje vždy jistá stejnolehlost $H(S, \lambda)$, která převádí kružnici k v kružnici k'? Odpověď je kladná. Jde-li o stejnolehlost s vnějším středem S, pak z věty 3.9 a dodatku plyne, že $\lambda = \frac{r'}{r}$ a $O' = S + \lambda(O - S)$. Pro bod S tedy platí

$$S = \frac{\lambda O - O'}{\lambda - 1}, \quad \lambda = \frac{r'}{r}. \tag{3.13}$$

Je-li $\lambda \neq 1$, neboli $r' \neq r$, je rovnicí (3.13) určen jediný bod. Podobně pro vnitřní střed $\overline{S}$ stejnolehlosti $H(S, \lambda)$ získáme vzorec

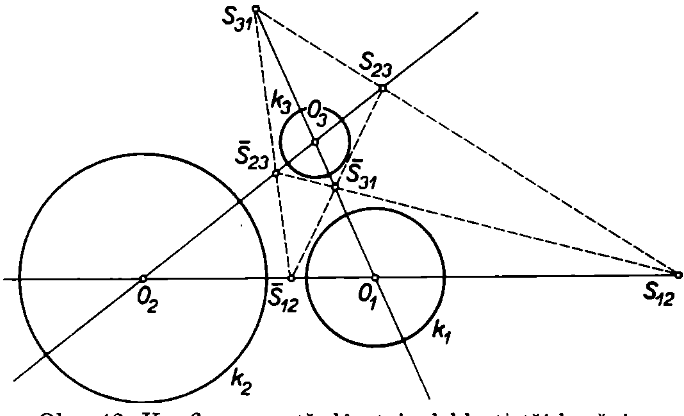
$$\overline{S} = \frac{\lambda O - O'}{\lambda - 1}, \quad \lambda = -\frac{r'}{r}. \tag{3.14}$$

Protože obě nalezené stejnolehlosti převedou kružnici k v kružnici k', dokázali jsme:

Věta 3.10. *Je-li $O \neq O'$ a $r \neq r'$, pak existují vždy dvě stejnolehlosti $H\left(S, \frac{r'}{r}\right)$ a $H\left(\overline{S}, -\frac{r'}{r}\right)$, které převádějí kružnici $k \equiv (O, r)$ v kružnici $k' \equiv (O', r')$; středy S a $\overline{S}$ těchto stejnolehlostí jsou dány vzorci* (3.13) *a* (3.14).

POZNÁMKA 3.1. Je-li $r = r'$, neexistuje stejnolehlost $H\left(S, \frac{r'}{r}\right)$, existuje však stejnolehlost $H\left(\overline{S}, -\frac{r'}{r}\right)$. To plyne ihned ze vzorce (3.13) a (3.14). Za pozornost stojí i zvláštní případ kružnic soustředných či splývajících.

Mějme nyní dány tři kružnice $k_1 \equiv (O_1, r_1)$, $k_2 \equiv$ $\equiv (O_2, r_2)$ a $k_3 \equiv (O_3, r_3)$; předpokládejme, že žádné dvě nejsou soustředné a nemají týž poloměr. Označme S_{ij} vnější střed stejnolehlosti, $\overline{S}_{ij}$ vnitřní střed stejnolehlosti kružnic k_i, k_j ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$) a uvažujme stejnolehlosti $H_{12}\left(S_{12}, \frac{r_2}{r_1}\right)$, $H_{23}\left(S_{23}, \frac{r_3}{r_2}\right)$; stejnolehlost H_{12} převádí k_1 v k_2, stejnolehlost H_{23} pak k_2 v k_3. Jelikož $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \neq 1$, vznikne složením obou stejnolehlostí opět stejnolehlost $H_{31}\left(S_{31}, \frac{r_3}{r_1}\right)$, která převádí kružnici k_1 v kružnici k_3 (srv. odst. 2.8). Podle věty 2.11 leží body S_{12}, S_{23}, S_{31} na jedné přímce (obr. 42). Odtud plyne pěkná věta:



Obr. 42. Konfigurace středů stejnolehlosti tří kružnic.

Věta 3.11. *Jsou dány tři kružnice různých poloměrů tak, že žádné dvě z nich nejsou soustředné. Potom tři vnější středy stejnolehlosti, které převádějí jednu kružnici v druhou, leží v jedné přímce.*

Uvažujme dále stejnolehlosti $\bar{H}_{12}\left(\bar{S}_{12}, -\frac{r_2}{r_1}\right)$ a

$\overline{H}_{23}\left(\overline{S}_{23}, -\frac{r_3}{r_2}\right)$; uvedené stejnolehlosti s vnitřními středy $\overline{S}_{12}$ a $\overline{S}_{23}$ převedou k_1 v k_2 a k_2 v k_3. Složením $\overline{H}_{12}$, $\overline{H}_{23}$ vznikne opět stejnolehlost s koeficientem $\left(-\frac{r_2}{r_1}\right)\left(-\frac{r_3}{r_2}\right) = \frac{r_3}{r_1}$; pozor tedy, jde o stejnolehlost $H_{31}\left(S_{31}, \frac{r_3}{r_1}\right)$. Podle věty 2.11 máme další tvrzení:

Věta 3.12. *Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 s různými středy i poloměry; potom spojnice vnitřních středů stejnolehlostí mezi k_1, k_2 a k_2, k_3 prochází vnějším středem stejnolehlosti mezi k_1, k_3.*

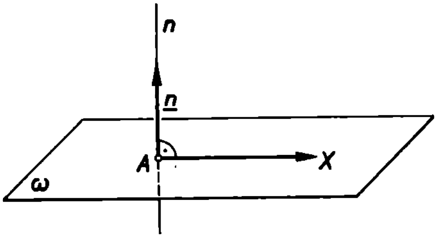
Sami jistě uznáte, že důkazy obou posledních vět nejsou nijak obtížné. Podkladem byla ovšem věta 2.11. odstavce 2.8, který se vám mohl zdát příliš teoretický a nezáživný. Jak vidět, nelze teorii podceňovat. Odvodit výsledky obou vět jinou cestou je nepochybně daleko obtížnější. Dokazuje to kupř. syntetický postup v pěkné knížce J. Holubáře [3], kde oba výsledky jsou východiskem při řešení jedné Apolloniovy úlohy (sestrojit kružnici, která se dotýká daných tří kružnic). Nemělo tím být však řečeno, že syntetický postup odmítáme, chtěli jsme pouze znovu upozornit na efektivnost vektorového počtu. Pokuste se řešit zmíněnou Apolloniovu úlohu vektorově.

3.5. Vektorový zápis obecného tvaru rovnice roviny

Ze stereometrie víme, že kolmice k nějaké rovině je kolmá ke každé přímce této roviny; kolmici k rovině říkáme také normála. Je-li rovina dána svým bodem A a směrovým vektorem normály $\mathbf{n}$, pak obecný bod X leží v dané rovině právě tehdy, jestliže platí (obr. 43)

$$\mathbf{n}(X - A) = 0\,. \tag{3.15}$$

Vskutku: Je-li $X = A$, pak (3.15) platí. Jestliže v dané rovině $X \neq A$, jsou vektory $\mathbf{n}$ a $X - A$ vzájemně kolmé a podle věty 3.5 platí (3.15). Obrácení je zřejmé.



Obr. 43. Rovina určená bodem A a vektorem normály n.

Rovnici (3.15) říkáme *vektorový zápis obecného tvaru rovnice roviny*. Provedeme-li naznačený skalární součin vektorů, dostaneme $n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) = 0$ a po úpravě

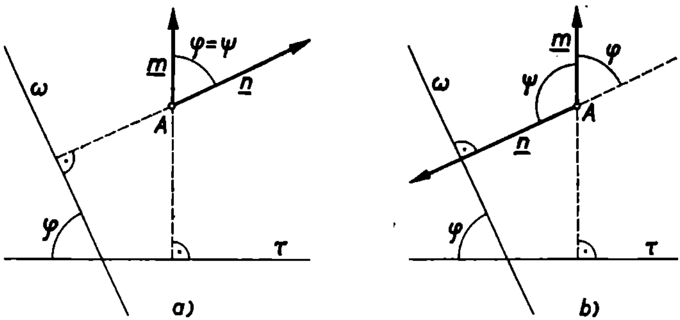
$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0\,, \tag{3.16}$$

kde jsme položili $n_0 = -n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$. Rovnice (3.16) je známá *rovnice roviny* z odst. 2.13. Dobře si všimněte, že v této rovnici jsou koeficienty při x_i $(i = 1, 2, 3)$ rovny i-té souřadnici vektoru $\mathbf{n}$; toto zjištění nám ulehčí řešení mnoha úloh, jak se hned přesvědčíte. Obráceně lze ukázat, že každou rovnici (3.16) můžeme psát ve tvaru (3.15).

Příklad 3.3. Určete odchylku rovin daných rovnicemi

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5 = 0\,,$$
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 = 0\,.$$

Řešení. Ze stereometrie víme, že odchylka φ dvou rovin je definována tak, že $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Označíme-li směrové vektory normál daných rovin $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ a ψ jejich odchylku, pak buď $\varphi = \psi$, nebo $\varphi = \pi - \psi$ (obr. 44).



Obr. 44. Odchylka rovin ω, τ.

V obou případech $\cos\varphi = |\cos\psi|$. Jelikož $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{m} = (-2, -2, 1)$, máme

$$\cos\varphi = \left|\frac{\mathbf{nm}}{\sqrt{\mathbf{nn}}\,\sqrt{\mathbf{mm}}}\right| = \left|\frac{-2}{\sqrt{9}\,\sqrt{9}}\right| = 0{,}2\,.$$

Příklad 3.4. Napište obecný tvar rovnice roviny, která obsahuje průsečnici rovin $x_1 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$, a s první uvedenou rovinou svírá úhel o velikosti $\frac{\pi}{3}$.

Řešení. Hledaná rovina náleží do svazku daných rovin. Má proto tvar $\lambda(x_1 + x_3) + x_1 - x_2 = 0$, neboli $(\lambda + 1)\,x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0$.*) Směrový vektor normály hledané roviny tedy je $\mathbf{m} = (\lambda + 1, -1, \lambda)$; $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ je pak normální vektor roviny $x_1 + x_3 = 0$. Dále víme, že má být

$$\cos\frac{\pi}{3} = \left|\frac{\mathbf{n}\mathbf{m}}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{m}|}\right|,$$

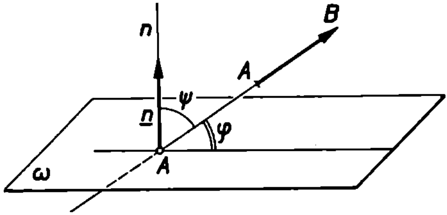
což po dosazení za $\mathbf{n}$ a $\mathbf{m}$ vede k výsledku $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Hledané roviny pak mají rovnice $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$.

Příklad 3.5. Určete odchylku přímky AB od roviny $x_1 - x_3 = 0$, jestliže $A = [5, 5, 5]$, $B = [3, 3, 5]$.

Řešení. Označme ψ velikost úhlu, který svírá přímka AB s normálou dané roviny (obr. 45); buď je $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, nebo $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$. Potom však $\sin\varphi = |\cos\psi| = \left|\frac{\mathbf{n}(B - A)}{|\mathbf{n}|\,|B - A|}\right|$.

*) Vzhledem k odst. 2.14 bychom měli psát $\alpha(x_1 + x_3) + \beta(x_1 - x_2) = 0$, my jsme však zde položili $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$. Přesvědčete se, že $\beta \neq 0$.

V našem případě $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$, $B - A = (2, 2, 0)$; tedy $\sin\varphi = \left|\dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}}\right| = \dfrac{1}{2}$ a odtud $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.



Obr. 45. Odchylka přímky od roviny.

Příklad 3.6. Určete kolmý průmět P bodu $M = [7, 4, 4]$ do roviny dané rovnicí $2x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$.

Řešení: Každá normála dané roviny má směrový vektor $\mathbf{u} = (2, 1, 1)$; kolmice vedená bodem M má proto rovnici $X = [7, 4, 4] + \lambda(2, 1, 1)$. Po dosazení souřadnic bodu X do rovnice roviny zjistíme snadno, že $\lambda = -3$, což po zpětném dosazení do rovnice kolmice nám dá výsledek $P = [1, 1, 1]$.

Příklad 3.7. Dokažte, že množina všech bodů X, které mají stejnou vzdálenost od dvou pevných bodů $A \neq B$, je rovina, která půlí úsečku AB a je k ní kolmá.

Řešení. Bod X je stejně vzdálen od daných bodů A, B právě tehdy, jestliže $AX^2 = BX^2$; uvedenou rovnici můžeme psát ve tvaru $|X - A| = |X - B|$, což po úpravě dává

$$(b_1 - a_1)\, x_1 + (b_2 - a_2)\, x_2 + (b_3 - a_3)\, x_3 + b_0 = 0\,. \tag{3.17}$$

(Položili jsme: $b_0 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)$.)
Rovnice (3.17) je obecná rovnice roviny kolmé k přímce AB; snadno se přesvědčíte, že bod $S = \frac{1}{2}(A + B)$ je bodem roviny (3.17).

POZNÁMKA 3.2. V celém odstavci jsme pracovali s obecným tvarem rovnice roviny a při řešení úloh vystupoval vždy vektor normály. Úlohy stejné povahy můžeme ovšem řešit i tehdy, není-li k dispozici obecný tvar rovnice roviny. Jak si opatříme vektor normály bez znalosti obecné rovnice roviny, ukážeme v odstavci 3.9 a 3.10.

3.6. Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost bodu od roviny je pouze zvláštním případem vzdálenosti dvou množin v prostoru E_3. Nechť F, G jsou dvě množiny v E_3, nechť X je libovolný bod množiny F, Y pak libovolný bod množiny G. Označme $d(X, Y)$ vzdálenost bodů X, Y. Všechna možná čísla $d(X, Y)$ vytvoří číselnou množinu, kterou označíme U. Nejmenší číslo množiny U, pokud existuje, označíme $d(\mathsf{F}, \mathsf{G})$ (stručně budeme psát d) a nazýváme *vzdáleností množin* F, G*).

Ukážeme si nyní, že vzdálenost d bodu M od roviny ω je velikost úsečky MP, kde P je pravoúhlý průmět

*) Jestliže nejmenší číslo množiny U neexistuje, lze zavést pojem vzdálenosti dvou množin pomocí tzv. *infima* množiny U. Jde o pojem poněkud obtížnější, setkáte se s ním ve vyšší matematice.

bodu M do roviny ω. Budiž tedy $X = P + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ libovolný bod roviny ω. Jak známo, pro vzdálenost MX platí

$$\begin{aligned} MX^2 &= (X - M)(X - M) = \\ &= [(P - M) + (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})][(P - M) + \\ &+ (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})] = (P - M)(P - M) + \\ &+ (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})\,. \end{aligned}$$

Vzdálenost MX je zřejmě nejmenší, jestliže skalární součin $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})$ je roven nule, což nastane právě tehdy, když $\alpha = \beta = 0$, čili $X = P$.

Je-li rovina ω určena svým bodem A a vektorem normály $\mathbf{n}$, pak z pravoúhlého trojúhelníka APM (obr. 46) máme

$$d = AM \,.\cos\varphi = \frac{|\mathbf{n}|\,|M - A|\cos\varphi}{|\mathbf{n}|}\,. \tag{3.18}$$

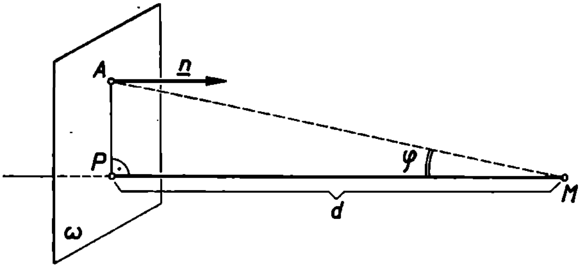
Pro φ platí $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$; vektory $\mathbf{n}$ a $M - A$ mají odchylku φ nebo $\pi - \varphi$, skalární součin těchto vektorů je — až snad na znaménko — roven čitateli zlomku v (3.18). Můžeme proto psát dle (3.3)

$$d = \frac{|\mathbf{n}(M - A)|}{|\mathbf{n}|}\,; \tag{3.19}$$

rovina ω má rovnici $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ a snadno zjistíme, že bod $A = \left[0, 0, -\frac{n_0}{n_3}\right]$ v rovině ω leží. Označíme-li jako vždy $M = [m_1, m_2, m_3]$, můžeme

(3.19) po provedeném skalárním násobení uvést na tvar

$$d = \frac{|n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 + n_0|}{\sqrt{(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2}} . \qquad (3.20)$$



Obr. 46. Vzdálenost d bodu M od roviny ω.

Příklad 3.8. Určete vzdálenost bodu $M = [2, 4, -3]$ od roviny ω: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$.

Řešení. Mechanickým dosazením do (3.20) zjistíme, že

$$d = \frac{|4 - 4 - 6 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 .$$

Vzorec (3.20) nám umožňuje určit také vzdálenost dvou rovnoběžných rovin a vzdálenost přímky od roviny rovnoběžné.

Příklad 3.9. Určete vzdálenost rovin, které jsou dány rovnicemi

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5 = 0 ,$$
$$3x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 3 = 0 .$$

Řešení. Vzdálenost dvou rovin určíme zřejmě jako vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od roviny druhé. Zvolme tedy nějaký bod M, který leží v první rovině, třeba $M = [-1, -1, -1]$; podle (3.20) pak máme $d = 2$.

Rovnice rovnoběžných rovin můžeme psát také ve tvaru

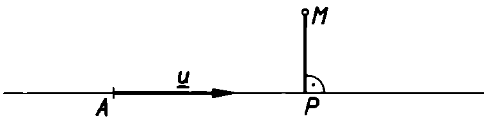
$$a_1x + a_2y + a_3z + a = 0\,,$$
$$a_1x + a_2y + a_3z + A = 0\,.$$

Čtenář se snadno přesvědčí, že vzdálenost takových rovin je dána vzorcem

$$d = \frac{|a - A|}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}}\,. \tag{3.21}$$

3.7. Vzdálenost bodu od přímky

Podobně jako v odstavci 3.6 lze ukázat, že vzdálenost bodu M od přímky p je velikost úsečky MP, kde P je kolmý průmět bodu M na přímku p (obr. 47).



Obr. 47. Vzdálenost bodu od přímky.

Analyticky nás bude zřejmě zajímat velikost vektoru $M - P$, k tomu však nutně potřebujeme znát bod P. Je-li přímka dána bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u}$, pak zřejmě $P = A + \lambda\mathbf{u}$, kde λ je jisté pevné číslo, pro nás zatím neznámé. Víme však, že vektory $\mathbf{u}$ a $M - P$ jsou vzájemně kolmé, proto $\mathbf{u}(M - P) = 0$; dosadíme-li sem za P z výše uvedené rovnice, dostaneme $\mathbf{u}(M - A - \lambda\mathbf{u}) = 0$ a po úpravě

$$\lambda = \frac{\mathbf{u}(M - A)}{\mathbf{u}\mathbf{u}}. \tag{3.22}$$

Ve vzorci (3.22) nelze ovšem krátit; číslo λ známe, snadno tedy určíme bod P. Jiný způsob výpočtu hledané vzdálenosti je uveden ve cvičení v příkladu 3.18.

Příklad 3.10. Určete vzdálenost bodu $M = [2, -2, 2]$ od přímky AB, jestliže $A = [6, 6, 2]$, $B = [9, 8, 3]$.

Řešení. Ve vzorci (3.22) potřebujeme směrový vektor $\mathbf{u} = B - A = (3, 2, 1)$ a vektor $M - A = (-4, -8, 0)$; dosadíme do (3.22) a máme $\lambda = -2$. Potom bod $P = A + \lambda\mathbf{u} = [0, 2, 0]$ a platí $d = |M - P| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$.

Jiný způsob řešení spočívá v tom, že bodem M sestrojíme rovinu ω kolmou k přímce AB a bod P získáme jako průsečík přímky AB s rovinou ω. Rovnici roviny ω určíme snadno, neboť směrový vektor $\mathbf{u}$ je normálový vektor této roviny. Máme tedy $3x_1 + 2x_2 + x_3 + n_0 = 0$ a dále víme, že bod M v rovině ω leží, proto $3 . 2 + 2(-2) + 2 + n_0 = 0$; odtud $n_0 = -4$. Rovnice roviny ω tedy je $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$. Sem dosadíme z rovnice přímky $AB : X = [6, 6, 2] + \lambda(3, 2, 1)$. Zjistíme samozřejmě opět, že $\lambda = -2$. Další postup je shodný s předešlým.

Jak ukazuje příklad 3.10, hraje důležitou roli bod P; víme již také, že při určování vzdálenosti bodu M od roviny ω nemá příslušný bod P tak velký význam. Vektorový součin, který zavedeme v odstavci 3.9, nám pomůže určit vzdálenost bodu od přímky bez závislosti na bodu P.

Zbývá ještě dodat, že vzdálenost bodu od přímky v rovině E_2 určíme zcela obdobně jako vzdálenost bodu od roviny v E_3. Je-li rovnice přímky v obecném tvaru (víme, že v E_3 taková rovnice neexistuje) $a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0$ a bod $M = [m_1, m_2]$, pak

$$d = \frac{|a_1m_1 + a_2m_2 + a_0|}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}}.$$

Podobně pro vzdálenost dvou rovnoběžných přímek v E_2, pokud jsou dány rovnicemi $a_1x_1 + a_2x_2 + a = 0$, $a_1x_1 + a_2x_2 + A = 0$, platí

$$d = \frac{|a - A|}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}}.$$

3.8. Čtvercová matice typu 2,2 a její determinant

Až dosud jsme se vyhýbali zavádění nových algebraických pojmů a neskrývali jsme důvody. Na tomto místě bude však vhodné rozšířit trochu algebraický obzor.

Máme čtyři čísla a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}; jsou-li seřazena do schématu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

potom říkáme, že je definována *čtvercová matice typu* 2,2. Je podstatné, jak jsme uvedená čísla zapsali. Např. matice

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$$

je obecně jinou maticí než matice (3.22).

Matici (3.22) přiřadíme číslo $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, které nazýváme *determinantem matice* (3.22) a užíváme pro něj označení

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

Píšeme pak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \qquad (3.23)$$

$$- \qquad\qquad +$$

Šipky v zápise jsou mnemotechnickou pomůckou. Pozor tedy, matice je číselné schéma, determinant je jediné číslo přiřazené čtvercové matici.

Příklad 3.11. Určete hodnotu determinantu, který je přiřazen matici

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} .$$

Řešení.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2.1 - 5.3 = -17 .$$

Čtvercová matice typu 2,2 má dva řádky a dva sloupce. Vyměníme-li v matici (3.22) řádky nebo sloupce, liší se determinanty těchto nových matic pouze znaménkem od determinantu matice (3.22). To ukazuje přímý výpočet a srovnání s (3.23).

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,.$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,.$$

Přímým výpočtem se také snadno dokáže: *Determinant matice* (3.22) *je roven nule právě tehdy, když jeden řádek je násobkem druhého řádku nebo jeden sloupec násobkem druhého sloupce.*

3.9. Vektorový součin dvou vektorů

Definice 3.4. Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vektor

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{3.24}$$

budeme označovat $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a nazývat *vektorovým součinem vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

Definicí 3.4 je dvěma vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ přiřazen vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$; vektor (3.24) má velký význam, neboť je v obecném případě kolmý k vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, což ukážeme později. Někdo by si mohl myslet, že vektorových součinů můžeme zavést libovolné množství a nebyl by daleko od pravdy. Ukazuje se ovšem, že vektorový součin definovaný jiným způsobem (třeba $\mathbf{u} \square \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \cos u_2, \sin v_3)$ nemá rozumný geometrický význam a při změně soustavy souřadnic mění svůj obsah. Jak vidíme, tyto problémy u vektorového součinu (3.24) odpadnou.

Věta 3.13. *Vektorový součin* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *je roven nulovému vektoru* $\mathbf{o}$ *právě tehdy, jestliže vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou lineárně závislé (kolineární).*

Důkaz. a) Jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně závislé, pak např. $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, neboli $v_1 = \lambda u_1$, $v_2 = \lambda u_2$, $v_3 = \lambda u_3$. Dosadíme-li odtud od (3.24), zjistíme, že v každém determinantu je druhý řádek násobkem prvého. Podle odstavce 3.8 tedy $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 0, 0)$.

b) Obráceně: Je-li $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$, znamená to podle (3.24), že je

$$\begin{aligned} u_2v_3 - u_3v_2 \qquad\qquad &= 0\,, \\ -u_1v_3 \qquad\qquad + u_3v_1 &= 0\,, \\ u_1v_2 - u_2v_1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, soustava (3.25) je splněna a vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé. Nechť žádný z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ není nulový. Pak vektor $\mathbf{u}$ má aspoň jednu složku nenulovou, nechť tedy třeba $u_2 \neq 0$. Z prvé a třetí rovnice (3.25) máme

$$v_3 = \frac{v_2}{u_2} u_3\,, \quad v_1 = \frac{v_2}{u_2} u_1 \quad \text{a jistě platí} \quad v_2 = \frac{v_2}{u_2} u_2\,.$$

Je tedy $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, kde $\lambda = \dfrac{v_2}{u_2}$; vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

Věta 3.14. *Nechť* φ *je odchylka dvou lineárně nezávislých vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *a* $\mathbf{w}$ *jejich vektorový součin. Potom vektor* $\mathbf{w}$ *je nenulový a kolmý k oběma vektorům* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *a platí*

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\varphi\,. \tag{3.26}$$

Důkaz. Podle věty 3.13 je $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektor nenulový. Počítejme skalární součin $\mathbf{wu}$:

$$\mathbf{wu} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} u_3 =$$

$$= u_1u_2v_3 - u_1v_2u_3 - u_1u_2v_3 + v_1u_2u_3 + u_1v_2u_3 - \\ - v_1u_2u_3 = 0 ;$$

podobně se ukáže, že $\mathbf{wv} = 0$.

Zbývá tedy odvodit vzorec (3.26). Výpočet je formálně snadný, ale delší:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = (u_2v_3 - v_2u_3)^2 + (u_3v_1 - v_3u_1)^2 + \\ + (u_1v_2 - v_1u_2)^2.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = [(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2] [(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2] + \\ + (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 ,$$

který znamená vlastně

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{uv})^2 .$$

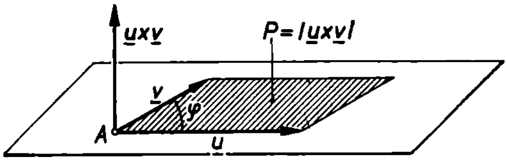
Skalární součin v kulaté závorce nahradíme podle (3.3) a po úpravě získáme vzorec (3.26), jak ukazuje výpočet:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2 \, |\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}| \, |\mathbf{v}| \cos \varphi)^2 = \\ &= |\mathbf{u}|^2 \, |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 \, |\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi = \\ &= |\mathbf{u}|^2 \, |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \\ &= |\mathbf{u}|^2 \, |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \varphi = (|\mathbf{u}| \, |\mathbf{v}| \sin \varphi)^2 . \end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen.

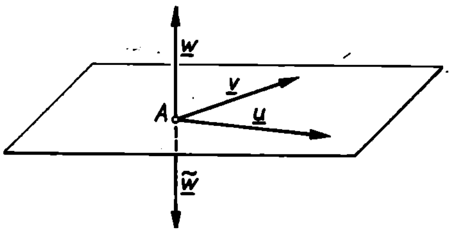
Velikost vektoru $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ lze geometricky interpretovat také jako obsah rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (obr. 48).

POZNÁMKA 3.3. Jsou-li vektory **u**, **v** lineárně nezávislé, víme již, že vektor **u** × **v** je nenulový a kolmý k vektorům **u**, **v**; dosud však nevíme, zda jde o vektor **w** nebo $\tilde{\mathbf{w}}$, jak ukazuje obrázek 49. Tento problém souvisí s orientací soustavy souřadnic a s orientací báze vektorového prostoru. Jde o otázky geometricky dosti náročné a z hlediska našeho zájmu ne právě zásadní. Povahu problému pouze nastíníme bez nároku na přesnost a bez důkazu uvedeme jedno tvrzení.



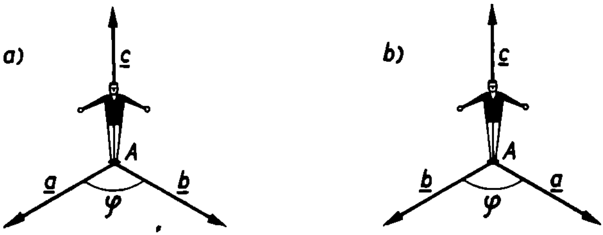
Obr. 48. Vektorový součin **u** × **v**.

Jsou-li dány tři lineárně nezávislé vektory **a**, **b**, **c**, které umístíme do bodu P, leží vektory **a**, **b** v jedné rovině. Označme φ odchylku vektorů **a**, **b** a představme si na místě vektoru **c** pozorovatele tak, že má před sebou úhel vektorů **a**, **b** o velikosti φ (obr. 50).



Obr. 49. Otázka orientace vektorů **u** × **v**.

Má-li pozorovatel vektor $\mathbf{a}$ po pravé ruce, nazveme uspořádanou soustavu vektorů ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$) *pravotočivou*, má-li vektor $\mathbf{a}$ po levé ruce, nazveme tuto soustavu *levotočivou*. Platí pak věta: *Jestliže kartézská soustava souřadnic* (O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) *je pravotočivá a vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *jsou lineárně nezávislé, pak uspořádaná soustava vektorů* ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$) *je pravotočivá.*



Obr. 50a. Pravotočivá soustava vektorů ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$).
Obr. 50b. Levotočivá soustava vektorů ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$).

Z předchozích úvah plyne geometrická konstrukce vektorového součinu $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Jestliže $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou vektory kolineární, pak $\mathbf{w} = \mathbf{o}$. Jestliže $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nejsou kolineární, je $\mathbf{w}$ vektor kolmý k oběma vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníka sestrojeného nad vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a uspořádaná trojice vektorů ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$) tvoří pravotočivou soustavu. Těmito geometrickými vlastnostmi je vektor $\mathbf{w}$ jednoznačně stanoven; definice 3.4 je proto nezávislá na volbě soustavy souřadnic v E_3.

Na závěr odstavce uvedeme větu, která charakterizuje hlavní vlastnosti vektorového součinu.

Věta 3.15. *Jsou-li dány tři libovolné vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{z}$ *a reálné číslo* α, *potom platí:*

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$,
2. $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v})$,
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{z} + \mathbf{v} \times \mathbf{z}$,
4. $\mathbf{z} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{z} \times \mathbf{u} + \mathbf{z} \times \mathbf{v}$.

Důkaz: 1. Podle odstavce 3.8 výměna řádků znamená u determinantu změnu znaménka, máme tedy

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \ldots, \ldots\right) = -\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, \ldots, \ldots\right) = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

Obdobně lze odvodit i zbývající tři vlastnosti.

POZNÁMKA 3.4. Všimněte si, že neplatí obecně vztahy

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u};\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{z} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{z});$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o} \text{ nebo } \mathbf{v} = \mathbf{o}.$$

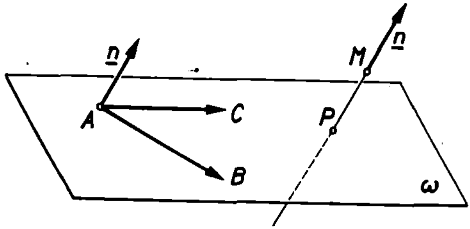
Uvedená implikace neplatila ostatně ani pro skalární součin!

3.10. Úlohy řešené pomocí vektorového součinu

V poznámce 3.2 a také v závěru odstavce 3.7 jsme si řekli, že při řešení některých úloh užijeme s výhodou vektorového součinu. Jde hlavně o takové úlohy, v nichž obecný tvar rovnice roviny není hned po ruce a neznáme tedy ani její normální vektor.

Příklad 3.12. Určete kolmý průmět P bodu $M = [1, -3, 9]$ na rovinu ABC, jestliže $A = [1, 1, 1]$, $B = [3, 1, 1]$, $C = [1, 3, 2]$.

Řešení. Zřejmě $B - A = (2, 0, 0)$, $C - A = (0, 2, 1)$. Vektor $\mathbf{n}$, kolmý k rovině ABC, určíme pomocí vektorového součinu (obr. 51):



Obr. 51. K příkladu 3.12.

$$\mathbf{n} = (B - A) \times (C - A) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0, -2, 4) .$$

Hledaný bod P leží jednak na přímce $X = M + \alpha\mathbf{n}$, jednak v rovině, která má vektorovou rovnici $X = A + \beta(B - A) + \gamma(C - A)$; musí tedy být

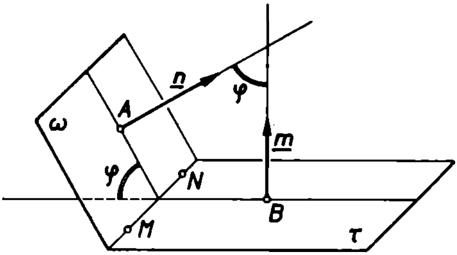
$$M + \alpha\mathbf{n} = A + \beta(B - A) + \gamma(C - A) .$$

Do této rovnice dosadíme a po přechodu k souřadnicím obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -2\beta \qquad\qquad &= 0, \\ -2\alpha \qquad\qquad -2\gamma &= 4, \\ 4\alpha \qquad\qquad - \gamma &= -8 . \end{aligned}$$

Odtud máme $\alpha = -2$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; dosazením za α, β do rovnice roviny zjistíme, že $P = A$.

Příklad 3.13. Určete odchylku rovin AMN a BMN, jestliže $A = [1, 1, 1]$, $B = [3, 3, 3]$, $M = [3, 1, 1]$, $N = [0, 2, 1]$.



Obr. 52. K příkladu 3.13.

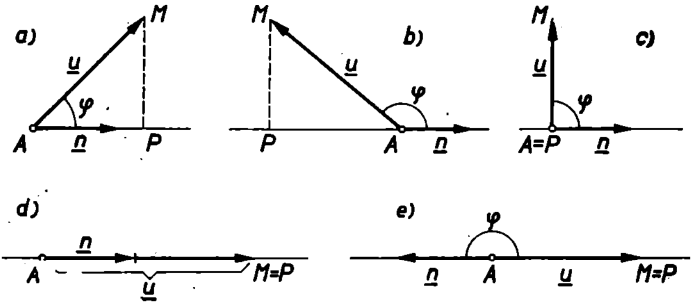
Řešení. Určující vektory daných rovin napíšeme snadno: $M - A = (2, 0, 0)$, $N - A = (-1, 1, 0)$, $M - B = (0, -2, -2)$, $N - B = (-3, -1, -2)$. Normálové vektory daných rovin BMN, AMN označme po řadě $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ (obr. 52). Víme již, že $\mathbf{m} = (N - B) \times (M - B) = (-2, -6, -6)$, $\mathbf{n} = (M - A) \times (N - A) = (0, 0, 2)$, a vždy je $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Je-li ψ odchylka normálových vektorů $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, pak buď $\varphi = \psi$, nebo $\varphi = \pi - \psi$. V každém případě však platí

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{mn}|}{|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|} = \frac{3\sqrt{19}}{19}.$$

Dříve než přistoupíme k řešení dalších dvou úloh, definujeme: Vektor, jehož velikost je 1, se nazývá *jednotkový*. Je-li dán libovolný vektor $\mathbf{z}$, pak vektor

$\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$ je zřejmě jednotkový a kolineární s vektorem $\mathbf{z}$.

Dále si představme, že máme dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{n}$, které umístíme v nějakém bodě A (obr. 53). Předpokládejme, že $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a vypočítejme absolutní hodnotu skalárního součinu $\mathbf{nu}$:



Obr. 53. Kolmý průmět AP vektoru $\mathbf{u}$ na přímku.

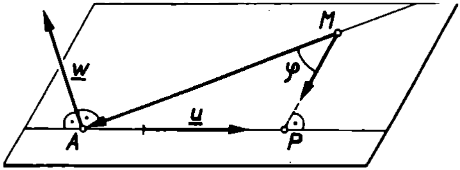
$$|\mathbf{nu}| = \big||\mathbf{n}|\,|\mathbf{u}| \cos \varphi\big| = |\mathbf{u}|\,|\cos \varphi|\,. \qquad (3.27)$$

Dobře si všimněme, co nám říká rovnost (3.27). Absolutní hodnota skalárního součinu jednotkového vektoru $\mathbf{n}$ s libovolným vektorem $\mathbf{u}$ nám udává velikost kolmého průmětu vektoru $\mathbf{u}$ do přímky, která má směrový vektor $\mathbf{n}$ (v obr. 53 je průmět označen AP).

Příklad 3.14. Určete vzdálenost d bodu M od přímky p dané bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u}$ (obr. 54).

Řešení. Mysleme si, že známe jednotkový vektor $\mathbf{n}$ na přímce MP, kde P je pata kolmice vedené bodem M

k přímce p. Vzdálenost d bodu M od přímky p je dána velikostí kolmého průmětu vektoru $A - M$ na přímku MP. Podle (3.27) tedy máme: $d = |\mathbf{n}(A - M)|$. Zbývá určit jednotkový vektor $\mathbf{n}$. Vektor $\mathbf{w} = (A - M) \times \mathbf{u}$ je kolmý k rovině AMP, vektor $\mathbf{n}$ je proto kolmý jak k vektoru $\mathbf{u}$, tak k $\mathbf{w}$, a platí tudíž



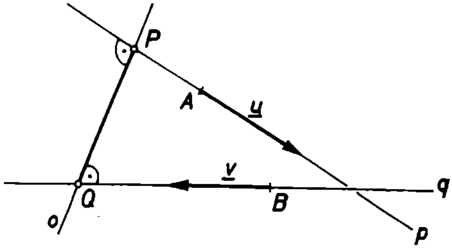
Obr. 54. K příkladu 3.14.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{u} \times [(A - M) \times \mathbf{u}]}{|\mathbf{u} \times [(A - M) \times \mathbf{u}]|}.$$

Známe již vektor $\mathbf{n}$. Hladce proto podle výše uvedeného vztahu určíme také hledanou vzdálenost d. Obecný tvar pro $\mathbf{n}$ nemusí v čtenáři budit příliš mnoho důvěry, konkrétní výpočet však není nijak obtížný. Zkuste vyřešit touto cestou příklad 3.10. (Srv. také cv. 3.18, kde najdete d v jednodušším tvaru.)

Příklad 3.15. Jsou dány dvě mimoběžky $p \equiv (A, \mathbf{u})$, $q \equiv (B, \mathbf{v})$. Určete vzdálenost d mimoběžek p, q, jestliže $A = [2, -2, 0]$, $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$, $B = [2, 3, 1]$, $\mathbf{v} = [0, 1, -2)$.

Řešení. Příčku, která je kolmá k přímkám p, q (taková příčka vždy existuje), nazýváme osou nebo též společnou kolmicí mimoběžek p, q. Označme průsečíky osy s přímkami p, q po řadě P, Q. Ukážeme, že velikost úsečky PQ je hledanou vzdáleností mimoběžek p, q (obr. 55). Nechť $X = P + \alpha\mathbf{u}$ je běžný bod přímky p, $Y = Q + \beta\mathbf{v}$ běžný bod přímky q. Pro vzdálenost XY platí (srv. začátek odstavce 3.6):



Obr. 55. Osa dvou mimoběžek.

$$XY^2 = (X - Y)(X - Y) =$$
$$= (P - Q)(P - Q) + (\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v})(\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}) .$$

Tento výraz je zřejmě nejmenší právě tehdy, jestliže $\alpha = \beta = 0$, čili $X = P$, $Y = Q$.

A nyní přikročíme k řešení dané úlohy: Osa mimoběžek je nutně rovnoběžná s jednotkovým vektorem

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} .$$

Hledaná vzdálenost $d = PQ$ je zřejmě rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $B - A$ na osu mimoběžek. Podle (3.27) je tedy $d = |\mathbf{n}(B - A)|$ a dosazení za $\mathbf{n}$ vede na tvar

$$d = \frac{|(B - A)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} . \qquad (3.28)$$

V našem konkrétním případě $B - A = (0, 5, -1)$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, 2, 1)$, $(B - A)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 9$, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3$. Podle (3.28) pak $d = 3$.

Jiný způsob řešení dané úlohy. Zřejmě existují čísla α, β tak, že $P = A + \alpha\mathbf{u}$, $Q = B + \beta\mathbf{v}$. Vektor $P - Q$ musí být kolmý k vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, to znamená, že musí platit

$$
\begin{aligned}
(A - B + \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v})\mathbf{u} &= 0\,, \\
(A - B + \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v})\mathbf{v} &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

V případě, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé (vektory mimoběžek mají vždy tuto vlastnost), má soustava (3.29) jediné řešení. Existuje tedy jediná dvojice čísel α, β, s jejíž pomocí určíme body P, Q. Stanovit velikost vektoru $P - Q$ umíme již dávno. Tento způsob je sice delší, má však tu výhodu, že umožňuje okamžitý zápis rovnice osy.

3.11. Smíšený součin vektorů

Ve vztahu (3.28) se objevil současně jak skalární, tak vektorový součin. Výraz

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \tag{3.30}$$

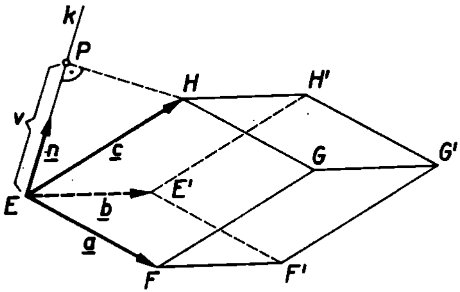
nazýváme *smíšeným součinem vektorů* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a označujeme $(\mathbf{abc})$. Je zřejmé, že smíšený součin vektorů je číslo. Smíšený součin je závislý na pořadí vektorů. Je jen otázkou trpělivosti ověřit si, že

$$(\mathbf{abc}) = -(\mathbf{acb}) = (\mathbf{cab}) = -(\mathbf{cba}) = (\mathbf{bca}) = -(\mathbf{bac});$$

výměna dvou vektorů má tedy vždy za následek změnu znaménka smíšeného součinu.

Ukážeme si pěknou geometrickou interpretaci smíšeného součinu.

Věta 3.16. *Je dán rovnoběžnostěn $EFGHE'F'G'H'$ (obr. 56). Označíme-li $\mathbf{a} = F - E$, $\mathbf{b} = E' - E$, $\mathbf{c} = H - E$, pak objem V rovnoběžnostěnu je dán vzorcem*



Obr. 56. Geometrický význam smíšeného součinu.

$$V = |(\mathbf{abc})| . \tag{3.31}$$

D ů k a z. Poznamenejme nejprve toto: Jsou-li dány tři lineárně nezávislé vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, existuje vždy rovnoběžnostěn shora uvedených vlastností. Smíšený součin tří lineárně nezávislých vektorů je podle věty 3.16 vždy, až snad na znaménko, objem jistého rovnoběžnostěnu, který umíme sestrojit.

A nyní k důkazu věty (obr. 56). Je-li v vzdálenost rovin EFF', HGG', pro objem V máme podle (3.26)

$$V = v|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| . \tag{3.32}$$

Označme k přímku kolmou k rovině EFF'. Jak víme, jednotkový směrový vektor $\mathbf{n}$ přímky k je dán vztahem

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

Výška v je pak dána velikostí kolmého průmětu vektoru $\mathbf{c}$ na přímku k; podle (2.27) tedy

$$v = |\mathbf{cn}| = \frac{|\mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

Dosadíme-li za v do (3.32), máme po krácení ihned (3.31).

Příklad 3.16. Stanovte objem rovnoběžnostěnu, určeného vektory $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (-3, 0, 0)$.

Řešení: Určíme nejprve vektorový součin $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, -3, 3).$$

Tedy $V = |\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |(1, 2, 1)(0, -3, 3)| = 3.$

Zkuste dokázat, že smíšený součin vektorů je roven nule právě tehdy, když tyto vektory jsou komplanární.

3.12. Některé vlastnosti vektorového a smíšeného součinu

V různých aplikacích vektorového počtu užíváme často komplikovanějších vzorců. Se třemi z nich se nyní seznámíme.

Věta 3.17. *Nechť jsou* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ *čtyři libovolné vektory. Potom platí*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{ad} \\ \mathbf{bc} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}, \qquad (3.34)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\,\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\,\mathbf{c}\,, \tag{3.35}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{abd})\,\mathbf{c} - (\mathbf{abc})\,\mathbf{d}\,. \tag{3.36}$$

Důkaz. 1. Podle definice je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\quad a_3b_1 - a_1b_3,\quad a_1b_2 - a_2b_1)\,,$$
$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = (c_2d_3 - c_3d_2,\quad c_3d_1 - c_1d_3,\quad c_1d_2 - c_2d_1)\,.$$

Odtud tedy plyne, že

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + \\ + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)\,. \\ .\,(c_1d_2 - c_2d_1)\,.$$

Pravou stranu rovnosti (3.34) můžeme upravit takto:

$$(\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}) = \\ = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,.\,(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) + \\ + (a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)\,.\,(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3d_3)\,.$$

Po provedeném násobení pravých stran obou posledních rovností se přesvědčíme o správnosti vzorce (3.34).

2. Zvolme si libovolný vektor $\mathbf{u}$. Použijeme-li vzorců (3.30) a (3.34), můžeme psát

$$\mathbf{u}[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = (\mathbf{ua}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = ((\mathbf{b} \times \mathbf{c})\,\mathbf{ua}) = \\ = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{u} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{bu})(\mathbf{ca}) - (\mathbf{ba})(\mathbf{cu}) = \\ = \mathbf{u}[(\mathbf{ac})\,\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\,\mathbf{c}]\,.$$

Z poslední rovnosti platné pro každou volbu vektoru $\mathbf{u}$ plyne (3.35).

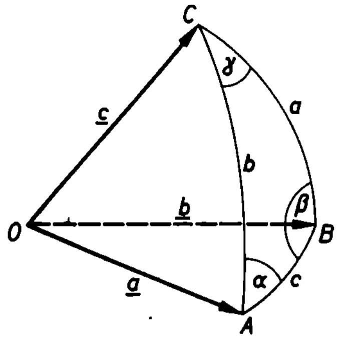
3. Jestliže v rovnosti (3.35) nahradíme vektor $\mathbf{a}$ vektorem $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ vektorem $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$, dostáváme po jednoduché úpravě rovnost (3.36). Tím je věta dokázána.

Jestliže položíme ve vzorci (3.34) $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{u}$ a $\mathbf{b} = \mathbf{d} = \mathbf{v}$, odvodíme snadno vzorec (3.26), který známe již z odstavce 3.9 o vektorovém součinu.

3.13. Základní věty sférické trigonometrie

V tomto odstavci si ukážeme jednu významnou aplikaci vektorového počtu. Pomocí vzorců (3.34) a (3.36) odvodíme základní věty sférické trigonometrie, větu sinovou a dvě věty kosinové.

Zvolme si v prostoru E_3 čtyři body O, A, B, C tak, aby neležely v jedné rovině a aby vektory $\mathbf{a} = A - O$, $\mathbf{b} = B - O$, $\mathbf{c} = C - O$ byly jednotkové. Polopřímky OA, OB, OC tvoří tzv. *trojhran* a na jednotkové kouli opsané ze středu O určují tzv. *sférický trojúhelník* ABC (obr. 57).



Obr. 57. Sférický trojúhelník.

Zaveďme následující označení pro velikosti úhlu dvou vektorů:

$$a = \sphericalangle(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad b = \sphericalangle(\mathbf{c}, \mathbf{a}), \quad c = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \tag{3.37}$$

$$\alpha = \sphericalangle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c}), \quad \beta = \sphericalangle(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{b} \times \mathbf{a}),$$
$$\gamma = \sphericalangle(\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{c} \times \mathbf{b}). \tag{3.38}$$

Uvážíme-li, že vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou jednotkové, plynou z uvedených označení tyto rovnosti:

$$\cos a = \mathbf{bc}, \quad \cos b = \mathbf{ca}, \quad \cos c = \mathbf{ab}, \tag{3.39}$$

$$\sin a = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|, \quad \sin b = |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|,$$
$$\sin c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, \tag{3.40}$$

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\,|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|},$$
$$\cos \beta = \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \times \mathbf{a})}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\,|\mathbf{b} \times \mathbf{a}|}, \tag{3.41}$$
$$\cos \gamma = \frac{(\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{c} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|\,|\mathbf{c} \times \mathbf{b}|}.$$

Otevřeli jsme si tak cestu k odvození věty sinové. Vyjdeme z rovnosti (3.36), která má v případě $\mathbf{d} = \mathbf{a}$ následující tvar

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{abc})\,\mathbf{a}.$$

Odtud a ze vzorců (3.38) a (3.40) plyne, že

$$|(\mathbf{abc})| = \sin c \sin b \sin \alpha.$$

Cyklickou záměnou získáme další rovnosti

$$|(\mathbf{bca})| = \sin a \sin c \sin \beta,$$
$$|(\mathbf{cab})| = \sin b \sin a \sin \gamma.$$

Podle (3.32) jsou levé strany posledních tří rovností stejně velké. Můžeme proto psát

$$\sin c \sin b \sin \alpha = \sin a \sin c \sin \beta = \\ = \sin b \sin a \sin \gamma \,.$$

Odtud okamžitě vyplývá rovnost

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}\,, \tag{3.42}$$

která má ve sférické trigonometrii název *sinová věta.*

Stejně snadno odvodíme tzv. 1. kosinovou větu. Rovnost (3.34) má v případě $\mathbf{d} = \mathbf{a}$ tvar

$$\mathbf{bc} = (\mathbf{ab})(\mathbf{ac}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{c})\,.$$

Odtud a ze vzorců (3.39) a (3.41) okamžitě máme rovnost

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha\,,$$

která má ve sférické trigonometrii název 1. *kosinová věta.*

Další úvaha je poněkud komplikovanější. K danému trojhranu sestrojme tzv. *polární trojhran.* Jeho polopřímky vycházejí opět z bodu O a jsou rovnoběžné s jednotkovými vektory

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}\,, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|}\,, \\ \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}\,. \tag{3.44}$$

Podobně jako v (3.37) a (3.38) zaveďme i pro polární trojhran veličiny a', b', c', α', β', γ'. Vypočtěme první z těchto veličin. Užijeme-li postupně rovností (3.44), (3.41), můžeme psát

$$\cos a' = \mathbf{b}'\mathbf{c}' = \frac{(\mathbf{c} \times \mathbf{a})(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|\,|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} =$$

$$= \frac{-(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\,|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|} = -\cos \alpha\,.$$

Jsou tedy úhly a', α výplňkové a tedy: $a' + \alpha = \pi$. Stejně snadno se přesvědčíme o správnosti vzorců

$$\begin{aligned} a' + \alpha &= \pi\,, & b' + \beta &= \pi\,, & c' + \gamma &= \pi\,, \\ \alpha' + a &= \pi\,, & \beta' + b &= \pi\,, & \gamma' + c &= \pi\,. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Užijeme-li kosinovou větu (3.43) na polární trojhran a použijeme-li dále k úpravě vzorce (3.45), dostáváme rovnost

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a\,,$$

která má ve sférické trigonometrii název 2. *kosinová věta.*

Končíme naši malou exkurzi. Věty, které jsme odvodili, tvoří základ sférické trigonometrie. Z nich lze snadno odvodit pro případ pravoúhlého sférického trojúhelníka (např. $\gamma = \frac{1}{2}\pi$) tzv. *Napierova pravidla.* Toto odvození a další podobné úvahy nalezne čtenář, pokud bude mít zájem, v každé solidní učebnici sférické trigonometrie (viz velmi pěknou knížku J. Kůsta *Sférická trigonometrie*).

Cvičení

3.1. Jak je definován skalární, vektorový a smíšený součin vektorů? Jaké je vyjádření těchto součinů v kartézské soustavě souřadnic? Jaká je jejich geometrická interpretace?

3.2. Určete odchylku φ, vektorů $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, víte-li že $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ jsou dva jednotkové vzájemně kolmé vektory.

3.3. Co lze říci o čtyřúhelníku $ABCD$, v němž $A = [1, 0, 0]$, $B = [2, 3, -4]$, $C = [2, 6, 0]$, $D = [3, 3, 4]$?

3.4. Určete průsečík P kolmice vedené bodem $M = [4, 6, -1]$ na rovinu $2x + 3y - z + 1 = 0$.

3.5. Určete průsečík P kolmice vedené bodem $M = [1, -7, 9]$ na rovinu, která je dána vektorovou rovnicí
$X = [3, 2, 2] + \alpha\,(2, 1, 1) + \beta\,(0, 2, 2)$.

3.6. Určete kolmý průmět P bodu $A = [0, 2, 0]$ na přímku BC, $B = [3, 3, 1]$, $C = [4, 5, 2]$.

3.7. Vypočtěte vzdálenost bodu $A = [3, 4, 2]$ od přímky, která prochází body $B = [2, 5, 2]$ a $C = [3, 2, 1]$.

3.8. Vypočtěte vzdálenost bodu $A = [1, 3, -1]$ od roviny dané rovnicí $x + 2y - 2z = 0$.

3.9. Vypočtěte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin určených rovnicemi

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 2z \phantom{{}-17} &= 0\,,\\ 6x + 4y + 4z - 17 &= 0\,. \end{aligned}$$

3.10. Vypočtěte vzdálenost přímek, které jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} X &= [0, 0, 0] + \alpha\,(-2, 1, 2);\\ Y &= [0, 1, 1] + \beta\,(-1, 2, 1). \end{aligned}$$

3.11. Napište rovnici roviny, která prochází bodem $A = [5, -3, 2]$ a je kolmá k průsečnici rovin

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z - 5 &= 0\,,\\ 5x - 4y + z - 7 &= 0\,. \end{aligned}$$

3.12. Vypočtěte odchylku rovin $y + z - 3 = 0$,
$-2x + y + 2z = 0$.

3.13. Souřadnicovou osou x proložte rovinu, která svírá s rovinou $\sqrt{5}x - 2y - z + 2 = 0$ úhel o velikosti $\pi/3$.

3.14. Napište rovnici roviny, která prochází body $A = [0, 0, -5]$, $B = [2, 0, 0]$ a je kolmá k rovině
$$2x + y + 5z - 2 = 0.$$

3.15. Určete odchylku přímky AB se souřadnicovými osami, jestliže $A = [2, 6, -2]$, $B = [-1, 2, 3]$.

3.16. Vypočtěte odchylku přímek daných rovnicemi:

$$p \equiv \begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ -x + 2y + 3z + 2 = 0; \end{cases}$$
$$q \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ -2x + 2y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

3.17. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [0, -4, 3]$ a je rovnoběžná s průsečnicí rovin

$$x + y - 2z + 3 = 0,$$
$$-x + 2y + z + 3 = 0.$$

3.18. Vypočtěte vzdálenost bodu $M = [3, 2, -1]$ od přímky, která je dána rovnicí $X = A + \alpha\,\mathbf{u}$; $A = [1, -1, -2]$, $\mathbf{u} = (5, 3, 4)$. Výsledek zkontrolujte pomocí vzorce

$$d = \frac{|\mathbf{u} \times (M - A)|}{|\mathbf{u}|},$$

jehož správnost dokažte!

3.19. Vypočtěte velikost úhlu, který svírá průsečnice rovin $2x + 3y = 0$, $3y - z = 0$ s rovinou $x + 2y + z = 0$.

3.20. Napište rovnici roviny, která prochází průsečnicí rovin $3x - y + 4z - 6 = 0$, $-x + 5y + z + 10 = 0$ a je kolmá k rovině $5x - y + 2z - 5 = 0$.

3.21. Napište rovnici roviny, která má vzdálenost $d = 4$ od roviny $x + 2y + 2z - 8 = 0$.

3.22. Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC; $A = [5, 3, 4]$, $B = [2, 5, -2]$, $C = [-1, 0, 6]$.

3.23. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ mají odchylku $\frac{\pi}{4}$; $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 3$.

Vypočtěte obsah trojúhelníka sestrojeného nad vektory $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

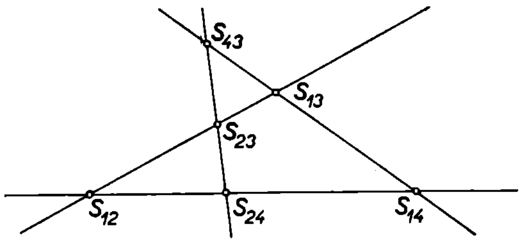
3.24. Je dán čtyřstěn $ABCD$; $A = [3, 1, 1]$, $B = [1, 4, 1]$, $C = [1, 1, 7]$, $D = [3, 4, 9]$. Určete a) objem čtyřstěnu, b) velikost jeho výšky procházející bodem D, c) odchylku stěn, které se protínají v hraně AB.

3.25. Jsou dány tři jednotkové vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ takové, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$. Ukažte, že body A, $A + \mathbf{u}$, $A + \mathbf{u} + \mathbf{v}$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Dále ukažte, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ svírají úhel velikosti $\frac{2}{3}\pi$.

3.26. Jestliže ve čtyřstěnu se všechny čtyři výšky protínají v jediném bodě (tzv. ortocentru), nazýváme čtyřstěn *ortocentrickým*. Dokažte větu: *V ortocentrickém čtyřstěnu jsou každé dvě protilehlé hrany na sebe kolmé.*

3.27. Dokažte větu: *Nejkratší příčka (tj. osa) každých dvou mimoběžných hran ortocentrického čtyřstěnu prochází ortocentrem čtyřstěnu.*

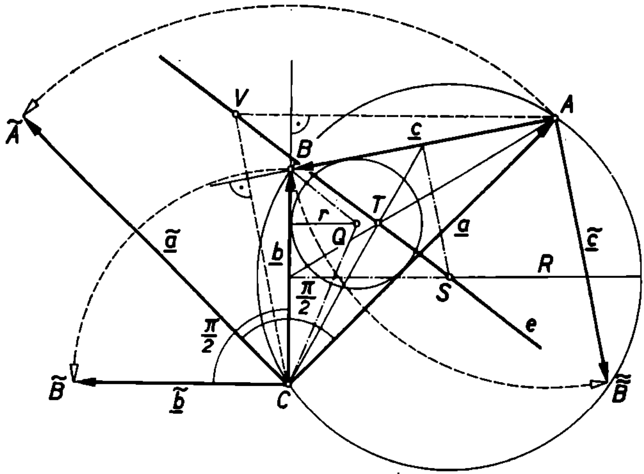
3.28. Jsou dány čtyři kulové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ různých středů i poloměrů. Pak pro každé dvě různé kulové plochy $\varkappa_i$, $\varkappa_j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ existuje právě jeden vnější střed S_{ij} stejnolehlosti, v níž si obě kulové plochy odpovídají. Dokažte, že všechny středy S_{ij} leží v jedné rovině a v ní pak vytvářejí bodovou konfiguraci, která je znázorněna obrázkem 58.



Obr. 58. Ke cvičení 3.28.

3.29. Je dán trojúhelník ABC. Označme S střed kružnice opsané, T těžiště, V průsečík výšek, Q střed kružnice

vepsané, $\mathbf{a} = A - C$, $\mathbf{b} = B - C$, $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ (viz obr. 59).
Dále označme R poloměr kružnice opsané, r poloměr kružnice vepsané, P plochu trojúhelníka a konečně $2s = a + b + c$. Otočme v kladném smyslu body A, B kolem bodu C o úhel $\frac{\pi}{2}$ do bodů $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ a označme $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{A} - C$; $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{B} - C$. Nechť $\tilde{\mathbf{a}} . \mathbf{b} > 0$ (a tedy $P = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{a}} . \mathbf{b}$). Podobně sestrojte vektor $\tilde{\mathbf{c}}$ (viz obrázek 59).



Obr. 59. Ke cvičení 3.29.

Ukažte, že

$$S = C + \frac{b^2 \tilde{\mathbf{a}} - a^2 \tilde{\mathbf{b}}}{4P}; \quad T = C + \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3},$$

$$V = C - \frac{ab}{2P} \tilde{\mathbf{c}}; \quad Q = C + \frac{a\mathbf{b} + b\mathbf{a}}{2s},$$

$$R = \frac{abc}{4P}\,; \quad r = \frac{P}{s}\,.$$

3.30. V roce 1905 dokázal Josef Langr následující větu: Sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka ABC jakožto nad základnami rovnoramenné trojúhelníky ABC', BCA', CAB', které mají při vrcholech A', B', C' shodné úhly o velikostech $2\pi/3$ (všechny rovnoramenné trojúhelníky sestrojíme vně trojúhelníka ABC nebo obráceně), pak trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný. Pokuste se o důkaz pomocí vektorů.

3.31. Na výškách trojúhelníka ABC sestrojme po řadě body A', B', C' tak, aby bylo

$$\frac{AA'}{BC} = \frac{BB'}{CA} = \frac{CC'}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

a aby všechny polopřímky AA', BB', CC' buď protínaly, nebo neprotínaly příslušné protější strany trojúhelníka. Potom trojúhelník ABC je rovnostranný. Dokažte!

4. kapitola

VEKTOROVÁ KONSTRUKCE AFINNÍHO A EUKLIDOVSKÉHO PROSTORU

Při zavádění základních pojmů, které byly podkladem našich úvah v předcházejících kapitolách, jsme často vycházeli z názoru. Nepostupovali jsme tedy důsledně deduktivně, to znamená, neodvozovali jsme všechny věty důsledně pomocí axiomů nebo vět dříve již dokázaných. Takový postup by totiž nebyl vhodný při prvním seznámení s naší geometrickou problematikou. Teprve v této závěrečné kapitole chceme ukázat celý problém komplexněji z fundovanějšího hlediska a tak uvést čtenáře do studia hlubší geometrické problematiky. Výklad zaměříme na náročnějšího čtenáře, dovolíme si proto rychlejší postup.

4.1. Několik historických poznámek

Z historického hlediska je pokládána za první známý pokus o důsledné axiomatické vybudování geometrie slavná Euklidova kniha *Základy* (στωχεα). Ve své době byla tato kniha vrcholem geometrie, vrcholem všeho, co bylo do té doby v geometrii podniknuto. Vliv této práce na tehdejší matematiku i na další její vývoj byl obrovský.

Z dnešního hlediska má ovšem Euklidova kniha řadu nedostatků, jejichž společným jmenovatelem je to, že postup není důsledně deduktivní. Na některých místech se mlčky předpokládá platnost vět, které nejsou zahrnuty do výchozí soustavy axiomů. Zmínili jsme se již dříve, že první důsledné axiomatické vybudování geometrie provedl velký německý matematik David Hilbert (1862—1943) v knize *Grundlagen der Geometrie (Základy geometrie)*. Hilbertova kniha je svým způsobem velmi blízká knize Euklidově, zvláště pokud jde o volbu systému axiomů. Důsledné axiomatické vybudování geometrie lze však provést i jiným způsobem.*)

Z pedagogického hlediska je nesporně zajímavý způsob Weylův**), tzv. *vektorová konstrukce prostoru*. Obtížnost jiných axiomatických konstrukcí je zde překlenuta tím, že se již předpokládá znalost reálných čísel a pojmu vektorový prostor. Náš postup bude velmi blízký Weylovu pojetí.

4.2. Axiomy vektorového prostoru

Postavme se dočasně na stanovisko, že nevíme, co je to euklidovský prostor E_3 (resp. E_2 nebo E_1), že nevíme, co jsou to vektory. Tyto pojmy zavedeme postupně znovu, samozřejmě jiným způsobem. Základní roli zde bude hrát tato definice:

Definice 4.1. Předpokládejme, že W je neprázdná množina, jejíž prvky budeme označovat $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ... a nazývat vektory. Předpokládejme dále, že každé

---

*) Viz např. velmi podnětnou knihu Friedrich Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin—Göttingen-Heidelberg 1959 *(Výstavba geometrie na základě pojmu zrcadlení)*.

**) Weyl: *Raum, Zeit, Materie, (Prostor, čas, hmota)*, Berlin 1923.

uspořádané dvojici vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je přiřazen jediný vektor, který označujeme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a nazýváme *součtem* vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ a každému reálnému číslu α a každému vektoru $\mathbf{u}$ je přiřazen jediný vektor, který označujeme $\alpha\mathbf{u}$ a nazýváme *součinem* reálného čísla α s vektorem $\mathbf{u}$. Jestliže pro každé tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ a pro každá dvě reálná čísla α, β jsou splněny předpoklady $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \mathscr{A}_4$ uvedené na str. 37 a předpoklady $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3, \mathscr{B}_4$ uvedené na str. 42, potom množinu W nazýváme *vektorovým prostorem* (přesněji: *afinním vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel*).

Matematickou indukcí bychom se snadno mohli přesvědčit, že platnost předpokladu $\mathscr{A}_2$ lze rozšířit pro součet libovolného konečného počtu vektorů. Analogická poznámka platí též pro předpoklady $\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_3, \mathscr{B}_4$. Rovněž není obtížné dokázat, že pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathsf{W}$ a každé reálné číslo α platí: $-1 . \mathbf{u} = -\mathbf{u}$, $0 . \mathbf{u} = \mathbf{o}$, $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

Vektorový prostor, který jsme zavedli předcházející definicí, není pojmem důležitým pouze pro geometrii. S tímto pojmem se totiž běžně setkáváme v algebře, v diferenciálním počtu, v numerické matematice atd. Uvědomte si, že např. množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu J tvoří vektorový prostor. Skutečně — součtem funkcí $y = f(x)$, $y = g(x)$, kde $x \in J$, je opět funkce $y = f(x) + g(x)$, $x \in J$; součinem čísla α a funkce $y = f(x), x \in J$ je funkce $y = \alpha f(x), x \in J$. Sami se snadno přesvědčíte, že předpoklady $\mathscr{A}_i, \mathscr{B}_i$ $(i = 1, \dots, 4)$ jsou zde splněny. Roli nulového vektoru hraje funkce $y = 0$, tj. funkce rovná nule pro každé $x \in J$. Vektorovým prostorem v uvedeném smyslu je též množina všech funkcí spojitých na intervalu, množina všech mnohočlenů, množina všech lineárních funkcí;

příklady jsou podrobně diskutovány v knihách [12] a [9].

4.3. Lineární závislost a nezávislost vektorů

Zvolme si ve vektorovém prostoru W k vektorů

$$u_1, u_2, \ldots, u_k \tag{4.1}$$

a zvolme dále k reálných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Rovnicí $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u} + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}_k$ je definován vektor $\mathbf{u}$, který nazýváme *lineární kombinací vektorů* (4.1).

Příklad 4.1. Ve vektorovém prostoru všech komplexních čísel je vektor $\mathbf{w} = 7 + 9i$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u} = 2 + 3i$, $\mathbf{v} = 1 + i$, neboť platí $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

Definice 4.2. Jestliže alespoň jeden z vektorů (4.1) je lineární kombinací ostatních vektorů, potom o vektorech (4.1) říkáme, že jsou *lineárně závislé.*

Platí-li tedy třeba $\mathbf{v} = \gamma\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, pak vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ resp. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou lineárně závislé. Jestliže mezi vektory (4.1) je jeden vektor nulový, např. $\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, potom jsou vektory (4.1) lineárně závislé. Lze totiž psát $\mathbf{u}_k = 0 . \mathbf{u}_1 + 0 . \mathbf{u}_2 + \ldots + 0 . \mathbf{u}_{k-1}$.

Věta 4.1. *Vektory* (4.1) *jsou lineárně závislé právě tehdy, když řešením rovnice*

$$\gamma_1\mathbf{u}_1 + \gamma_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \gamma_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o} \tag{4.2}$$

je také skupina čísel $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, která nejsou vesměs nulová.

Důkaz. 1. Předpokládejme, že vektory (4.1) jsou lineárně závislé. Jeden z těchto vektorů, mysleme si, že jde o vektor $\mathbf{u}_k$, lze psát ve tvaru

$$\mathbf{u}_k = \gamma_1 \mathbf{u}_1 + \gamma_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \gamma_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} .$$

Snadno přepíšeme tuto rovnici na tvar (4.2), kde položíme $\gamma_k = -1 \neq 0$.

2. Jestliže platí (4.2) a jeden z koeficientů γ_i je různý od nuly, mysleme si, že $\gamma_k \neq 0$, můžeme psát

$$\mathbf{u}_k = -\frac{\gamma_1}{\gamma_k} \mathbf{u}_1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_k} \mathbf{u}_2 - \ldots - \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_k} \mathbf{u}_k .$$

Odtud plyne, že vektory (4.1) jsou lineárně závislé, c. b. d.

Definice 4.3. O vektorech (4.1) řekneme, že jsou *lineárně nezávislé*, jestliže žádný z těchto vektorů není lineární kombinací ostatních vektorů (tj. jestliže vektory (4.1) nejsou lineárně závislé).

Příklad 4.2. Vektory $\mathbf{u} = \sin x$, $\mathbf{v} = \cos x$ z vektorového prostoru všech funkcí definovaných na intervalu $(-\infty, +\infty)$ jsou lineárně nezávislé. Neexistuje totiž ani číslo α, ani číslo β takové, aby pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$ platilo $\sin x = \alpha \cos x$, resp. $\cos x = \beta \sin x$.

Věta 4.2. *Vektory* (4.1) *jsou lineárně nezávislé právě tehdy, jestliže rovnice* (4.2) *má jen nulové řešení* $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k = 0$.

Snadný důkaz (sporem) pomocí věty 4.1 přenecháme čtenáři.

Příklad 4.3. Vektory $\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{v} = \mathrm{i}$ z vektorového prostoru všech komplexních čísel jsou lineárně nezávislé. Rovnice (4.2), která má zde tvar $\gamma_1 . 1 + \gamma_2 . \mathrm{i} = 0 + 0\mathrm{i}$, má jediné řešení $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

4.4. Dimenze vektorového prostoru

Definice 4.4. Jestliže v daném vektorovém prostoru W existuje n-lineárně nezávislých vektorů a přitom každých $n + 1$ vektorů je lineárně závislých, říkáme, že vektorový prostor W má *dimenzi (konečnou)* rovnou číslu n. Jestliže existuje ve vektorovém prostoru W k lineárně nezávislých vektorů, ať zvolíme za k jakékoliv přirozené číslo, říkáme, že vektorový prostor W má *(nekonečnou) dimenzi* $+\infty$.

Vektorový prostor dimenze n značíme většinou W_n, W'_n, V_n atp. Ke stanovení dimenze konkrétního vektorového prostoru je užitečná věta, kterou bez důkazu nyní uvedeme.*)

Věta 4.3. *Předpokládejme, že vektory*

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \tag{4.3}$$

jsou lineárně nezávislé. Sestrojme l dalších vektorů

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l \tag{4.4}$$

tak, že každý z těchto vektorů je nějakou lineární kombinací vektorů (4.3). *Potom z vektorů* (4.4) *lze vybrat nejvýše k lineárně nezávislých vektorů.*

---

*) Důkaz je např. v knize I. M. Gelfanda, *Lekcii po linějnoj algebre.*

Příklad 4.4. Věta, kterou jsme uvedli, nám umožní zjistit dimenzi n vektorového prostoru K_2 všech komplexních čísel. V příkladě 4.3 jsme ukázali, že vektory $\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{v} = i$ jsou lineárně nezávislé. Existují tedy v prostoru K_2 dva lineárně nezávislé vektory, a proto $n \geqq 2$. Zvolme si v K_2 tři libovolné vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a napišme je jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (odůvodněte si sami, proč je to možné). Podle předcházející věty lze vybrat z vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nejvýše dva lineárně nezávislé vektory. To však znamená, že libovolně zvolené tři (a tedy každé tři) vektory z K_2 jsou lineárně závislé. Prostor K_2 má proto dimenzi $n = 2$.

Příklad 4.5. Označme V_3 množinu všech vektorů definovaných (v druhé kapitole) v prostoru E_3. Zřejmě V_3 je vektorovým prostorem. Ukážeme si, že jeho dimenze $n = 3$. Přesvědčme se nejprve, že ve V_3 existují tři lineárně nezávislé vektory, totiž např. vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$. Skutečně rovnice $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{o}$ čili rovnice

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

má jediné řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$ a tedy podle věty 4.2 jsou vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ lineárně nezávislé. Každý vektor $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3)$ z V_3 lze zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}$. To tedy znamená, že každý vektor z V_3 je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Odtud a z věty 4.3 vyplývá, že každé čtyři vektory z V_3 jsou lineárně závislé.

4.5. Báze vektorového prostoru

Definice 4.5. Každou skupinu n lineárně nezávislých vektorů

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{4.5}$$

z n-rozměrného vektorového prostoru W_n nazýváme *bází* tohoto prostoru.

Tak třeba vektory $\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{v} = i$ tvoří bázi ve vektorovém prostoru K_2 (příklad 4.4) a vektory $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$ tvoří bázi ve vektorovém prostoru V_3 (příklad 4.5). O bázi vektorového prostoru platí tato důležitá věta:

Věta 4.3. *Předpokládejme, že* (4.5) *je bází vektorového prostoru* W_n. *Potom každý vektor* $\mathbf{u} \in W_n$ *lze vyjádřit právě jedním způsobem*

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \ldots + u_n\mathbf{e}_n \tag{4.6}$$

jako lineární kombinaci vektorů báze (4.5) (tj. čísla $u_1, \ldots, u_n$ jsou určena jednoznačně).

Důkaz. 1. Nechť $\mathbf{u}$ je vektor z W_n. Ukážeme, že je možné vyjádřit jej ve tvaru (4.6). Z vlastností báze plyne, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ jsou lineárně závislé. Existuje tedy alespoň jedno nenulové řešení rovnice

$$\alpha\mathbf{u} + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{o}\,. \tag{4.7}$$

Při tomto nenulovém řešení je nutně $\alpha \neq 0$, neboť v opačném případě by musely být vektory (4.5) lineárně závislé; to však není možné. Rovnici (4.7) můžeme tedy upravit na tvar

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\mathbf{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\mathbf{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\mathbf{e}_n\,,$$

z něhož je patrné, že libovolně zvolený (a tedy každý) vektor $\mathbf{u} \in W_n$ je lineární kombinací vektorů dané báze.

2. Předpokládejme, že

$$\mathbf{u} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n \tag{4.8}$$

je jiné vyjádření vektoru $\mathbf{u}$, odlišné od vyjádření (4.6). Odečteme-li od sebe rovnice (4.8) a (4.6), dostáváme rovnici

$$\mathbf{o} = (v_1 - u_1)\,\mathbf{e}_1 + (v_2 - u_2)\,\mathbf{e}_2 + \ldots + (v_n - u_n)\,\mathbf{e}_n,$$

z níž okamžitě vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ vyplývá, že

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n .$$

Tím je věta dokázána.

Čísla $u_1, u_2, \ldots, u_n$ z rovnice (4.6) nazýváme *souřadnicemi* vektoru $\mathbf{u}$ vzhledem k bázi (4.5). Je-li báze (4.5) zvolena pevně, nemůže dojít k nedorozumění, užijeme-li označení $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Jestliže dále $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ a α je libovolné reálné číslo, zřejmě platí:

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (u_1 + w_1, u_2 + w_2, \ldots, u_n + w_n)\,,$$

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)\,.$$

4.6. Axiomy afinního prostoru

V druhé kapitole jsme vyšli z předpokladu, že ze střední školy víme, co je euklidovský prostor E_3. Na tomto základě jsme zavedli pojem vektoru, vektorových operací a pokračovali jsme pak dále ve studiu geometrie prostoru E_3. Jak jsme se již zmínili, je možné mít k tomuto postupu z matematického hlediska výhrady. Středoškolský postup výkladu geometrie není totiž důsledně deduktivní, často se opírá o názor, a tím je pak nutně poznamenán i výklad, který vychází z tohoto středoškolského pojetí. Ukážeme si způsob, jakým lze námitku obejít.

V této kapitole jsme zavedli pojem n-rozměrného vektorového prostoru. Přitom jsme se nikde neodvolávali na znalost euklidovského prostoru. To nám umožňuje, abychom „zpětně" pomocí n-rozměrného vektorového prostoru zkonstruovali euklidovský prostor, a to dokonce tzv. *n-rozměrný euklidovský prostor*. Celou konstrukci provedeme postupně. Nejprve budeme definovat tzv. *afinní prostor*, tj. prostor, ve kterém nebude zavedeno měření velikostí úseček a úhlů. Připojením dalších předpokladů sestrojíme pak euklidovský prostor. Věnujeme se tedy afinnímu prostoru.

Definice 4.6. Nechť je W_n n-rozměrný vektorový prostor a A_n množina. Prvky množiny A_n budeme nazývat *body* a označovat velkými písmeny A, B, C, ... Nechť jsou splněny následující požadavky:

$\mathscr{D}_1$) Každé uspořádané dvojici bodů A, B z A_n je přiřazen v prostoru V_n právě jeden vektor. Pro tento vektor užijeme označení $B - A$.

$\mathscr{D}_2$) Každému bodu $A \in \mathsf{A}_n$ a každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathsf{W}_n$ odpovídá právě jeden bod $B \in \mathsf{E}_n$ takový, že platí

$$B - A = \mathbf{u} .$$

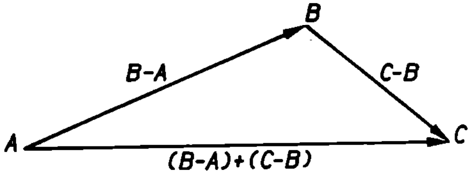
Bod B budeme také nazývat *součtem bodu A s vektorem* $\mathbf{u}$ a budeme psát $B = A + \mathbf{u}$.

$\mathscr{D}_3$) Pro každé tři body A, B, C z A_n platí (obr. 60)

$$(C - B) + (B - A) = C - A .$$

Množinu A_n, která vyhovuje požadavkům $\mathscr{D}_1$—$\mathscr{D}_3$, nazýváme *n-rozměrným afinním prostorem*. W_n je tzv. *vektorové zaměření prostoru* A_n.

Zavedli jsme tedy jednoduchým a jasným způsobem pojem n-rozměrného afinního prostoru. Položíme-li $n = 3$, dostáváme prostor A_3, v němž můžeme provést všechny úvahy druhé kapitoly. Položíme-li $n = 2$, resp. $n = 1$, máme tzv. *afinní rovinu* A_2, resp. *afinní přímku* A_1. Studium geometrie v prostorech A_3, A_2, A_1 lze provést najednou tím prostým způsobem, že studujeme geometrii přímo v n-rozměrném prostoru A_n. To je jedna z výhod zavedení n-rozměrného prostoru. Přitom konstrukce prostoru A_n je co do obtížnosti stejná jako konstrukce prostoru A_3 (resp. A_2 nebo A_1), který se pak jeví jako speciální případ prostoru A_n. Uveďme ještě jeden důvod pro zavedení n-rozměrného prostoru. Seznamujeme se totiž s pojmem velmi užitečným a dnes stále více používaným nejen v matematice, ale i v jejích aplikacích (např. lineární programování, mechanika hmotných bodů, teorie relativity).



Obr. 60. Grafický součet vektorů.

4.7. Některé věty z afinní geometrie

Nyní bychom mohli začít systematicky budovat afinní geometrii. Postupně bychom odvodili všechny známé poučky ze „středoškolské afinní" geometrie (tj. ze středoškolské geometrie polohy). To však není účelem naší knížky. Na několika málo definicích a větách si však naznačený postup ukažme. Jistě zde oceníte jednoduchost a eleganci vektorového pojetí geometrie.

Definice 4.7. Buď A libovolný bod prostoru A_n a $\mathbf{u}$ libovolný nenulový vektor z vektorového prostoru W_n. Potom množinu všech bodů X určených rovnicí

$$X = A + t\mathbf{u}\,, \quad t \in (-\infty, +\infty)\,, \tag{4.9}$$

nazýváme *přímkou.* Rovnice (4.9) je tzv. *vektorová rovnice* této přímky. O přímce (4.9) dále říkáme, že *prochází* bodem A a je *rovnoběžná* s vektorem $\mathbf{u}$. O každém nenulovém vektoru, který je kolineární s vektorem $\mathbf{u}$, říkáme, že je *rovnoběžný* s přímkou (4.9).

Všimněte si, že při definici přímky není vůbec podstatná dimenze prostoru, v němž přímku definujeme.

Věta 4.4. *Jsou dány přímky $a : X = A + \alpha\mathbf{u}$; $b : Y = B + \beta\mathbf{v}$. Obě přímky jsou totožné právě tehdy, jestliže vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou kolineární a $B \in a$.*

Důkaz. 1. Předpokládejme, že přímky a, b jsou totožné. Jestliže $A \neq B$, pak existují nenulová čísla α_0, β_0 taková, že platí $B = A + \alpha_0\mathbf{u}$; $A = B + \beta_0\mathbf{v}$. Sečtením obou rovnic dostaneme rovnici $\mathbf{o} = \alpha_0\mathbf{u} + \beta_0\mathbf{v}$, z níž podle věty 4.1 plyne, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou kolineární. Jestliže $A = B$, zvolíme na přímce b bod $B + \mathbf{v}$. Bod $B + \mathbf{v}$ leží též na totožné přímce a, tedy $B + \mathbf{v} = A + \alpha\mathbf{u}$. Odtud máme $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou tedy kolineární. Jelikož dále $B \in a$, je tím první část věty dokázána.

2. Předpokládejme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou kolineární a $B \in a$. Z rovnic $B = A + \alpha_0\mathbf{u}$, $\mathbf{v} = \gamma\mathbf{u}$, $Y = B + \beta\mathbf{v}$ snadno odvodíme, že $Y = A + (\alpha_0 + \beta\gamma)\,\mathbf{u}$. Dokázali

jsme tedy, že každý bod Y přímky b leží na přímce a. Obráceně však také každý bod X přímky a leží na přímce b; přesvědčte se o tom sami. Přímky a, b jsou tedy totožné. Věta je dokázána.

Věta 4.5. *Dvěma různými body A, B prochází právě jedna přímka.*

Důkaz. 1. Ukážeme nejprve, že body A, B prochází alespoň jedna přímka, totiž přímka určená rovnicí $X = A + t(B - A)$. To je zřejmé, neboť pro $t = 0$ je $X = A$; pro $t = 1$ je $X = B$.

2. Předpokládejme, že přímky o rovnicích

$$X = A + \alpha \mathbf{u}\,, \quad Y = A + \beta \mathbf{v}\,, \tag{4.10}$$

procházejí body A, B. Zřejmě existují čísla α_0 a β_0 tak, že platí

$$B = A + \alpha_0 \mathbf{u}\,, \quad B = A + \beta_0 \mathbf{v}\,.$$

Jelikož body A, B jsou různé, je $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$. Sečtením posledních rovnic zjistíme, že $\alpha_0 \mathbf{u} + \beta_0 \mathbf{v} = \mathbf{o}$. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou tedy podle věty 4.1 kolineární, a podle věty 4.4. jsou obě přímky (4.10) totožné. Tím je věta dokázána.

Definice 4.8. Přímky, které jsou rovnoběžné s týmž vektorem, nazýváme *rovnoběžnými přímkami.*

Věta 4.6. *Dvě rovnoběžné přímky nemají buď žádný bod společný, nebo mají všechny body společné (tj. jsou totožné).*

Věta 4.7. *Daným bodem prochází právě jedna přímka, která je rovnoběžná s danou přímkou.*

Věty 4.6—4.9 zkuste dokázat sami.

Definice 4.9. Dvě přímky, které mají právě jeden bod společný, nazýváme *různoběžnými přímkami.*

Věta 4.8. *V afinní rovině* A_2 *jsou každé dvě přímky buď rovnoběžné, nebo různoběžné.*

Věta 4.9. *V afinním prostoru* A_3 *existují přímky (tzv. mimoběžky), které nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné.*

Mohli bychom pokračovat dále a zavést pojmy: *orientace přímky, uspořádání bodů na přímce, úsečka, shodnost úseček na přímce, rovina* atd. Zabralo by to však příliš mnoho místa a tato knížka vám má dát pouze první impuls k hlubšímu studiu nadhozených otázek.

4.8. Afinní souřadnice

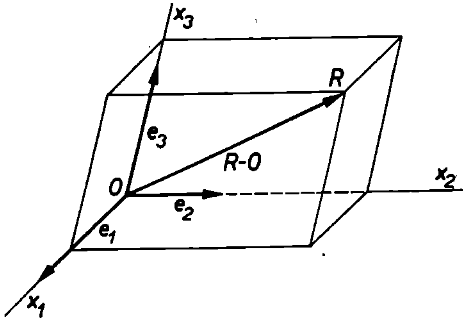
V n-rozměrném afinním prostoru A_n si zvolíme libovolný bod O a nazveme jej *počátkem afinní soustavy souřadnic.* Dále si zvolme ve vektorovém prostoru W_n bázi, jejíž vektory označme $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Bod O spolu s vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ tvoří tzv. *afinní soustavu souřadnic v prostoru* A_n. Označíme ji $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Přímky, které procházejí bodem O rovnoběžně s vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, nazýváme souřadnicovými osami a značíme je $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Systém souřadnic v A_3 je znázorněn na obr. 61.

V prostoru A_n si zvolme libovolný bod R. Vektor $R - O$ můžeme vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinaci vektorů báze

$$R - O = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + \ldots + r_n\mathbf{e}_n\,.$$

Tuto rovnici můžeme podle definice 4.6 (axiom $\mathscr{D}_2$) zapsat ve tvaru

$$R = O + r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + \ldots + r_n\mathbf{e}_n\,. \qquad (4.11)$$



Obr. 61. Afinní soustava souřadnic.

Dohodneme se, že uspořádanou n-tici čísel $r_1, r_2, \ldots, r_n$ budeme nazývat *afinní souřadnice* bod R vzhledem k afinní bázi $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Je zřejmé, že každému bodu je v dané afinní soustavě souřadnic přiřazena právě jedna uspořádaná n-tice souřadnic. Platí též obráceně, že každou uspořádanou n-ticí čísel je určen právě jeden bod prostoru A_n.

Zvolíme-li afinní soustavu souřadnic pevně, nemůže jistě nastat nedorozumění, užijeme-li pro bod R označení $[r_1, r_2, \ldots, r_n]$ a budeme-li psát $R = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$. Užijeme-li tohoto označení, lze snadno ukázat, že pro libovolné dva body $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ a libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ (srv. s odstavcem 4.5) lze psát

$$A + \mathbf{u} = [a_1 + u_1, a_2 + u_2, \ldots, a_n + u_n],$$
$$B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n).$$

Vektorovou rovnici přímky $X = A + t\mathbf{u}$ lze pomocí souřadnic psát ve tvaru

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n] + t(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Rozepsáním této rovnice podle jednotlivých souřadnic získáme n tzv. parametrických rovnic přímky, a to ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tu_1, \\ x_2 &= a_2 + tu_2, \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + tu_n. \end{aligned}$$

4.9. Axiomy euklidovského prostoru

Definice 4.10. Nechť A_n je n-rozměrný afinní prostor a W_n je jeho vektorové zaměření. Předpokládejme, že každé uspořádané dvojici vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ z W_n je přiřazeno právě jedno číslo, které budeme nazývat *skalárním součinem vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a které budeme označovat $\mathbf{u}.\mathbf{v}$. Předpokládejme dále, že pro každé tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ z V_n a pro každé reálné číslo k jsou splněny předpoklady $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4$ ze str. 85. Potom prostor A_n označujeme E_n a nazýváme *n-rozměrným euklidovským prostorem*. V_n je jeho vektorové zaměření.

Skalární součin definovaný v prostoru V_n nám umožní zavést v E_n pojmy vzdálenost dvou bodů, úhel dvou přímek, kartézská soustava souřadnic atd. Postupně tak zjistíme, že v případě $n = 3$ je euklidovský prostor E_n prostorem, v němž můžeme realizovat všechny úvahy třetí kapitoly.

4.10. Vzdálenost dvou bodů

Ve shodě s úvahami kapitoly třetí se dohodneme, že velikost vektoru $\mathbf{u} \in \mathsf{W}_n$ budeme označovat $|\mathbf{u}|$ a budeme jí rozumět číslo definované takto:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\mathbf{u}}\,. \tag{4.12}$$

Vzdálenost dvou bodů A, B z euklidovského prostoru E_n pak definujme jako velikost vektoru $B - A$. Budeme tedy psát

$$AB = |B - A|\,. \tag{4.13}$$

Věta 4.10. *Pro vzdálenosti libovolných tří bodů A, B, C z E_n platí*

1. $AB = BA$,
2. $AB \geqq 0$;

přitom $AB = 0$ právě tehdy, jestliže $A = B$.

3. $AB + BC \geqq CA$ *(tzv. trojúhelníková nerovnost).*

Důkaz. 1. Zřejmě $AB = |B-A| = \sqrt{(B-A)(B-A)} = \sqrt{(A-B)(A-B)} = |A-B| = BA$.

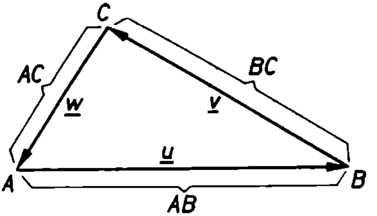
2. $AB = |B - A| = (B - A)(B - A)$. Odtud a z axiomu C_4 vyplývá, že $AB \geqq 0$ a že dále platí $AB = 0 \Leftrightarrow A = B$.

3. Než přistoupíme k důkazu tzv. trojúhelníkové nerovnosti, kterou pro případ trojrozměrného prostoru

znáte jistě dobře ze školy (obr. 62), odvodíme tzv. *nerovnost Cauchyho* (čti Kóšiho)

$$|\mathbf{uv}| \leqq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,, \tag{4.14}$$

která platí pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ z W_n. Zvolme



Obr. 62. K důkazu trojúhelníkové nerovnosti.

si libovolné reálné číslo α a sestrojme vektor $\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}$. Zřejmě $(\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v})(\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}) \geqq 0$. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{uu} - 2\alpha\mathbf{uv} + \alpha^2\mathbf{vv} \geqq 0\,. \tag{4.15}$$

Jestliže vektor $\mathbf{v}$ je nulovým vektorem, je nerovnost (4.14) splněna. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ čili $|\mathbf{v}| \neq 0$ a položme

$$\alpha = \frac{\mathbf{uv}}{\mathbf{vv}}\,.$$

Odtud a ze (4.15) plyne, že

$$\mathbf{uu} - 2\,\frac{(\mathbf{uu})^2}{\mathbf{vv}} + \frac{(\mathbf{uv})^2}{(\mathbf{vv})^2}\,(\mathbf{vv}) \geqq 0\,.$$

Tato nerovnost není ničím jiným než Cauchyho nerovností (4.14), která je tím dokázána.

Vraťme se nyní k důkazu trojúhelníkové nerovnosti. Užijeme-li označení z obrázku 62 a Cauchyho nerovnosti, můžeme psát

$$\begin{aligned} AC^2 &= \mathbf{ww} = (\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{uu} + \mathbf{vv} + 2\mathbf{uv} \leqq \\ &\leqq \mathbf{uu} + \mathbf{vv} + 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = \\ &= AB^2 + BC^2 + 2AB.BC = (AB + BC)^2\,. \end{aligned}$$

Tím je ověřena trojúhelníková nerovnost, a tedy i věta 4.10.

4.11. Odchylka dvou vektorů a odchylka dvou přímek

Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dva nenulové vektory, můžeme Cauchyho nerovnost psát ve tvaru

$$-1 \leqq \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} \leqq 1\,.$$

V tomto případě má tedy rovnice

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\,, \tag{4.16}$$

v níž neznámou je φ, vždy v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ právě jedno řešení. Dohodneme se, že číslo φ, které je tímto řešením, budeme nazývat odchylkou dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Jestliže $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, řekneme, že (nenulové) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou vzájemně kolmé. Z rovnice (4.16) okamžitě plyne, že dva nenulové vektory jsou vzájemně kolmé právě tehdy, jestliže jejich skalární součin je roven nule.

Máme-li určit odchylku φ dvou přímek, budeme postupovat následovně:

Zvolíme si nenulový vektor $\mathbf{u}$ rovnoběžný s prvou přímkou a nenulový vektor $\mathbf{v}$ rovnoběžný s druhou přímkou. Dohodneme se, že hledanou odchylkou budeme rozumět číslo φ z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ stanovené rovnicí

$$\cos \varphi = \left| \frac{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}{\mathbf{uv}} \right|. \tag{4.17}$$

Ukáže se, že rovnice (4.17) má v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ vždy právě jedno řešení a že toto řešení je nezávislé na volbě vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, které jsou s uvažovanými rovnoběžné. Dvě přímky, které mají odchylku rovnou číslu $\frac{\pi}{2}$, nazýváme kolmými.

Čtenáře možná překvapuje abstraktní přístup k pojmům odchylka dvou vektorů a odchylka dvou přímek. Je důležité si uvědomit, že pokud se pohybujeme v prostoru E_3, vystačíme vcelku s názorným pojetím 3. kapitoly. Pokud ovšem zkoumáme prostor E_n, kde $n > 3$, nemáme jinou možnost, než uvedené pojmy zavést touto abstraktní cestou. Toto abstraktní pojetí není nijak v rozporu s tím, co již dávno víme o prostoru E_3, (resp. E_2).

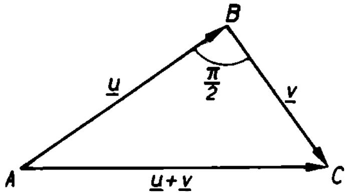
Další studium odchylek, resp. úhlů, by nás mohlo vést třeba až k trigonometrii rovinných a sférických trojúhelníků. Není to v souhlase s naší koncepcí. Zájemce však odkazujeme na knihu [1] našeho vynikajícího matematika světového jména Eduarda Čecha.

Pro ilustraci uveďme aspoň jednoduchý způsob, kterým lze z našich předpokladů odvodit známou Pytha-

gorovu větu. Vyjdeme-li z označení obrázku 63, můžeme psát
$AC^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{uu} + \mathbf{vv} + 2\mathbf{uv}$. Jelikož přímky AB a BC jsou navzájem kolmé, je $\mathbf{uv} = 0$ a tedy

$$AC^2 = AB^2 + BC^2\,.$$

Tím je platnost Pythagorovy věty prokázána, a to nejenom v prostorech E_2 a E_3, ale dokonce v n-rozměrném euklidovském prostoru E_n.



Obr. 63. K důkazu Pythagorovy věty.

4.12. Kartézská soustava souřadnic v E_n

Předpokládejme opět, že je dán euklidovský prostor E_n a jeho vektorové zaměření W_n. Nechť afinní soustava souřadnic $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ prostoru E_n má tu vlastnost, že každý její vektor je jednotkový a že každé dva její různé vektory jsou navzájem kolmé. Jinými slovy řečeno nechť platí

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = j \\ 0 \text{ pro } i \neq j. \end{cases} \tag{4.18}$$

Potom $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ nazýváme *kartézskou soustavou souřadnic*. Lze ukázat, že v prostoru E_n vždy existuje kartézská soustava souřadnic. Důkaz provádět nebudeme.

Zvolme tedy pevně v prostoru E_n kartézskou soustavu souřadnic. Počítejme skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, jejichž souřadnice uvažujeme vzhledem k této soustavě souřadnic. Zřejmě $\mathbf{u}.\mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \ldots + u_n\mathbf{e}_n).(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n)$. Odtud a z (4.18) okamžitě plyne, že

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n\,. \qquad (4.19)$$

Tím jsme odvodili vzorec, který pro $n = 3$ dobře známe z třetí kapitoly.

V prostoru E_n si zvolme dva body $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$, jejichž souřadnice jsou opět vztaženy k uvažované pevně zvolené kartézské soustavě souřadnic. Hledejme vzdálenost dvou bodů A a B. Z rovnice

$$AB = |B - A| = \sqrt{(B - A).(B - A)}$$

a z rovnice (4.19) okamžitě dostáváme

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}\,.$$

Znovu jsme si tedy odvodili vzorec, který, jak víme, v E_3 platí.

Uzavíráme tuto kapitolu. Nadhled, který čtenář v poslední kapitole získal, mu dovoluje hlubší pohled do problematiky druhé a třetí kapitoly.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

2.2. $S—A = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, $B—S = \frac{1}{2}(\mathbf{u} — \mathbf{v})$, $D—S = \frac{1}{2}(\mathbf{v} — \mathbf{u})$.

2.3. Ano, platí totiž $\mathbf{a} = 0 . \mathbf{b} + (—1)(—\mathbf{a})$.

2.4. Rovnici můžeme upravit na tvar
$(A—T) + (B—T) + (C—T) = 0$ čili $\frac{A + B + C}{3} = T$.

2.5. $D—C = —\frac{1}{3}\mathbf{u}$, $A—D = —\frac{2}{3}\mathbf{u} — \mathbf{v}$.

2.6. Ano, neboť $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.

2.7. Zřejmě $D—A = C—B$; $C—D = B—A$.

2.9. $X = [3, 3, —5] + \alpha(1, 3, —1) + \beta(2, —1, —1)$; rozepíšeme-li vektorovou rovnici do tří parametrických rovnic a vyloučíme z nich parametry α, β, dostáváme obecnou rovnici roviny $4x + y + 7z + 16 = 0$.

2.10. $2x — 2y + 4z — 18 = 0$.

2.11. Návod. Vyjděte z faktu, že dvě roviny rovnoběžné mají buď všechny body společné, nebo nemají žádný bod společný.

2.12. $2x + y — 2z + 2 = 0$; užijte výsledku předcházejícího příkladu.

2.13. Roviny mají právě jeden bod společný $[1, 1, 1]$.

2.14. $P = [1, 1, 1]$.

2.15. Řešte pomocí svazku rovnic $5x + 4y + 4z + 4 = 0$.

2.16. $4x - y - z + 5 = 0.$

2.17. $K = [1, 2, 1]; \quad L = [2, 3, 1].$

2.18. $K = [0, 0, 2]; \quad L = [2, 3, 1].$

3.2. $\varphi = \dfrac{\pi}{4}.$

3.3. Čtyřúhelník je kosočtvercem.

3.4. $P = [0, 0, 1].$

3.5. $P = [1, 1, 1].$

3.6. $P = [2, 1, 0].$

3.7. $d = \sqrt{5/11}.$

3.8. $d = 3.$

3.9. $d = \dfrac{\sqrt{17}}{2}.$

3.10. $d = \sqrt{2}/2.$

3.11. $x + y - z = 0.$

3.12. $\varphi = \pi/4.$

3.13. $3y - z = 0, \quad y + 3z = 0.$

3.14. $-5x + 2z + 10 = 0.$

3.15. $\cos\alpha = 0{,}3.\sqrt{2}; \quad \cos\beta = 0{,}4.\sqrt{2}, \quad \cos\gamma = 0{,}5.\sqrt{2}.$

3.16. $\cos\varphi = \dfrac{11}{26}.$

3.17. $X = [0, -4, 3] + \alpha(5, 1, 3).$

3.18 $d = \sqrt{3{,}42}; \quad d = AM\sin\alpha = |M - A|\dfrac{|\mathbf{u} \times (M - A)|}{|\mathbf{u}||M - A|} =$

$$= \frac{|\mathbf{u} \times (M - A)|}{|\mathbf{u}|}.$$

3.19. $\sin\varphi = 1/\sqrt{6}.$

3.20. $14y + 7z + 24 = 0.$

3.21. $x + 2y + 2z - 20 = 0, \quad x + 2y + 2z + 4 = 0.$

3.22. $O = 24{,}5$.

3.23. $P = 18\sqrt{2}$.

3.24. $V = 14$, $v_D = \sqrt{14}$, $\cos\varphi = 7/\sqrt{62}$.

3.26. Označme V ortocentrum čtyřstěnu $ABCD$. Označme $\mathbf{a} = A—V$, $\mathbf{b} = B—V$, $\mathbf{c} = C—V$, $\mathbf{d} = D—V$. Zřejmě $\mathbf{a}(C—D) = 0 \Rightarrow \mathbf{a}[(C—V) + (D—V)] = 0 \Rightarrow \mathbf{a}\,.\,(\mathbf{c} — \mathbf{d})$, podobně $\mathbf{b}(\mathbf{c} — \mathbf{d}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{a} — \mathbf{b})(\mathbf{c} — \mathbf{d}) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (A—B).(C—D) = 0$. Hrany AB a CD jsou tedy na sebe kolmé, atd.

3.28. Zcela analogicky jako v odstavci 3.4 lze ukázat, že vnější středy stejnolehlostí tří kulových ploch leží na jedné přímce. Na jedné přímce tedy musí ležet body

a) S_{12}, S_{24}, S_{14},

b) S_{24}, S_{23}, S_{43},

c) S_{14}, S_{13}, S_{43},

d) S_{12}, S_{23}, S_{13}.

Tato situace je právě ta, která je zachycena na obrázku 58.

LITERATURA

[1] E. ČECH, *Základy analytické geometrie I*, Přírod. nakl., Praha 1951.

[2] J. GATIAL, M. HEJNÝ, *Úvod do analytickej geometrie, II. časť*, Soc. akademie, Bratislava 1969.

[3] J. HOLUBÁŘ, *O metodách rovinných konstrukcí*, JČMF, Praha 1940.

[4] V. KNICHAL a kol., *Matematika I, II*, SNTL, Praha 1965, 1966.

[5] J. KOLIHA, *Polohové vektory*, Matematika ve škole, roč. XVIII, leden 1968, č. 5.

[6] K. KOPFERMANN, *Über Dreiecke*, Elemente der Mathematik, 1968, Band 23, Heft 3.

[7] E. KRAEMER, *Analytická geometrie lineárních útvarů*, II. vyd., ČSAV, Praha 1956.

[8] E. KRAEMER s kol., *Matematika pro III. ročník SVVŠ, větev přírodovědná*, SPN, Praha 1967.

[9] P. A. ROZENFELD, *Mnogoměrnyje prostranstva*, Moskva 1966.

[10] L. F. TÓTH, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verlag Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953.

[11] S. ŠMAKAL, B. BUDINSKÝ, *Goniometrické funkce*, Mladá fronta, Praha 1968.

[12] J. VYŠÍN, *Základy vektorové algebry*, SPN, Praha 1966.

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

BRUNO BUDINSKÝ
STANISLAV ŠMAKAL

vektory v geometrii

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Praha 1, Panská 8
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 3096
Edice Škola mladých matematiků, svazek 28
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
6,47 AA. 6,71 VA. Náklad 5000 výtisků
1. vydání. 160 stran. Praha 1971
508/21/8.5 23-086-71 03/2
Cena brožovaného výtisku 11,— Kčs

[redacted]

23-086-71
03/2
Cena brož.
Kčs 11,—