Faktoriály a kombinační čísla

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

FAKTORIÁLY A KOMBINAČNÍ ČÍSLA

10

Vydal ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK

faktoriály a kombinační čísla

PRAHA 1964
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY A ÚV ČSM
V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA

Před časem jsem byl požádán ústředním výborem matematické olympiády, abych pro naše středoškolské studenty napsal knížku o kombinatorice. Tak vznikl tento svazeček, který je zaměřen šířeji, než jak to bývá zvykem ve středoškolské kombinatorice. Knížka je vlastně sbírkou řešených příkladů, přičemž se vychází od otázek jednodušších a směřuje se k příkladům složitějším a méně obvyklým. U některých příkladů jsou uvedeny dvě různé metody řešení. Všude jsme kladli důraz na numerické počítání a jestliže si to výklad vyžadoval, doplnili jsme jej obrázkem, grafem nebo náčrtkem. Příklady jsou spojeny textem, ve kterém najdete všechny potřebné definice (jež jsou ostatně většině čtenářů jistě známé ze školy); tento text obsahuje také poznámky k probraným příkladům a upozorňuje na jejich vzájemné souvislosti.

Jak název knížky napovídá, vycházíme zde z běžné definice faktoriálu a kombinačního čísla a všímáme si jejich využití nejen v tradiční středoškolské kombinatorice, ale ukazujeme i souvislosti s teorií čísel, elementární geometrií, matematickou statistikou, teorií pravděpodobnosti a matematickou analýzou. Při výkladu předpokládáme jen znalosti středoškolské matematiky. Předpokládá se, že je čtenáři známa metoda nepřímého důkazu a matematická indukce; to je sice látka trochu obtížnější, ale často se vyskytuje v úlohách matematické olympiády.*) Aby si čtenář mohl látku lépe procvičit, připojili jsme za každý paragraf ještě několik nerozřešených úloh. Jejich výsledky jsou sice uvedeny v závěru brožury, ale používejte jich jen pro kontrolu svého vlastního řešení nebo nebudete-li si vědět s úlohou rady. Knížka končí seznamem další doporučené literatury, která souvisí s probíranou látkou.

Závěrem bych chtěl poděkovat oběma recenzentům, kteří četli rukopis tohoto svazku. Jsou to doc. dr. Karel Hruša a C. Sc. Zbyněk Šidák. Oba mi poskytli řadu podnětů a podstatně tak přispěli ke zlepšení výkladu.

Autor

*) Čtenáře můžeme odkázat na přístupně psanou knížku R. Výborného s názvem „Matematická indukce", která r. 1963 rovněž vyšla v knižnici Škola mladých matematiků.

1. kapitola

FAKTORIÁLY A PERMUTACE

V mnoha kombinatorických úlohách a také v teorii čísel se vyskytuje pojem **faktoriálu**, o kterém jsme se učili ve škole. Zopakujeme si tedy úvodem tento pojem. Je-li dáno přirozené číslo $n > 1$, pak součin

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (n-1) \,.\, n$$

zapisujeme stručně $n!$ a čteme *n faktoriál*. Tuto definici rozšiřujeme i na případ $n=0$ a $n=1$ a klademe $0!=1$, $1!=1$. Faktoriály čísel pro malé hodnoty n lze sestavit do této tabulky:*)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

Začněme několika příklady, ve kterých si můžeme procvičit některé vlastnosti faktoriálů.

Příklad 1. Rozhodněte, které ze dvou čísel $500!+503!$ a $501!+502!$ je větší.

Řešení. Protože se v příkladě vyskytují příliš velká čísla, nemůžeme se o výsledku přesvědčit přímým vý-

*) Podrobnější přehled faktoriálů najde čtenář ve většině matematických tabulek. Tak např. ve Valouchových „Pětimístných tabulkách logaritmických“ jsou uvedeny faktoriály přirozených čísel až do 30!; najdeme tu též rozklady na prvočinitele těchto faktoriálů a dále logaritmy faktoriálů až do log 200!.

počtem. Poslouží nám však tato úvaha: První z čísel vyjádříme ve tvaru

$$500!+503!=500!\,.\,(1+501\,.\,502\,.\,503),$$

druhé ve tvaru

$$501!+502!=500!\,.\,(501+501\,.\,502).$$

Stačí tedy porovnávat čísla

$$x=1+501\,.\,502\,.\,503 \quad \text{a} \quad y=501+501\,.\,502.$$

Ani zde však nemusíme provádět numerický výpočet do konce, nýbrž v y vytkneme 501, takže máme $y=501\,.\,(1+502)=501\,.\,503$. Dále je zřejmě $x>501\,.\,502\,.\,503$. Součin $501\,.\,502\,.\,503$ je však zajisté větší než $501\,.\,503$, takže je $x>y$.

Odpověď. Číslo $500!+503!$ je větší než číslo $501!+502!$.

Příklad 2. Sečtěte

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}+\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!},$$

kde n je dané přirozené číslo.

Řešení. První zlomek můžeme zkrátit číslem $(n-1)!$, druhý číslem $(2n+1)!$. Dostáváme tak součet

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)(2n+3)}.$$

Můžeme ještě uvést na společného jmenovatele, jímž je $2n(n+1)(2n+3)$. Dostaneme pak po úpravě výsledek

$$\frac{5n+6}{2n(n+1)(2n+3)}.$$

Další dva příklady patří do číselné teorie; i v nich se pracuje s faktoriálem. O příkladě 3 bude ještě zmínka v pozdějších našich úvahách.

Příklad 3. Kolika nulami (v desítkové soustavě) končí číslo $300!$.

Řešení. Číslo $300!$ je součinem všech přirozených čísel od 1 do 300. Všimněme si zde těch činitelů, které jsou dělitelné pěti. Jsou to čísla 5, 10, 15, 20, ..., 295, 300. Těchto čísel je zřejmě 60. Musíme si však uvědomit, že mezi těmito uvažovanými čísly byla zahrnuta také čísla 25, 50, 75, ..., 275, 300, z nichž každé je dělitelné číslem 5^2. Tato skupina čísel obsahuje zřejmě 12 prvků. Konečně je nutno uvážit, že jsou zde čísla 125 a 250, jež jsou dělitelná číslem 5^3.

Celkem jsme tedy zjistili, že číslo $300!$ je dělitelné mocninou $5^{60+12+2}$, tj. 5^{74}. Z naší úvahy též vyplývá, že $300!$ není dělitelné mocninou 5^{75}. Polovina z čísel 1, 2, 3, ..., 300 je sudých, takže $300!$ je jistě dělitelné mocninou 2^{150}. Z toho vyplývá, že $300!$ je dělitelné mocninou 10^{74}, avšak není dělitelné mocninou 10^{75}.

Odpověď. Číslo $300!$ končí 74 nulami.

Příklad 4. Ukažte, že číslo $18!+1$ je dělitelné číslem 23.

Řešení. Máme-li po ruce vhodné tabulky, můžeme v nich vyhledat, že platí

$$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000.$$

Pak budeme dělit

$$6\,402\,373\,705\,728\,001 : 23.$$

Čtenář vidí, že tato cesta pro důkaz našeho tvrzení je dosti pracná, i když jsme většinu námahy „přenechali" tabulkám. Nemáme-li po ruce příslušné tabulky, musíme hledat jiný způsob k řešení. Ukážeme si, jak lze postupovat v tomto případě.

Zřejmě je $4! = 24 = 23 + 1$
a dále*)

$$6! = (4!) \cdot 30 = (23+1) \cdot (23+7) = 23^2 + 8 \cdot 23 + 7 = 23a + 7.$$

Podobně počítáme dále

$$\begin{aligned}
8! &= (6!) \cdot 56 = (23a+7) \cdot (23 \cdot 2 + 10) = 23b + 1,\\
10! &= (8!) \cdot 90 = (23b+1) \cdot (23 \cdot 3 + 21) = 23c + 21,\\
12! &= (10!) \cdot 132 = (23c+21) \cdot (23 \cdot 5 + 17) = 23d + 12,\\
14! &= (12!) \cdot 182 = (23d+12) \cdot (23 \cdot 7 + 21) = 23e + 22,\\
16! &= (14!) \cdot 240 = (23e+22) \cdot (23 \cdot 10 + 10) = 23f + 13,\\
18! &= (16!) \cdot 306 = (23f+13) \cdot (23 \cdot 13 + 7) = 23g + 22.
\end{aligned}$$

Závěrem tedy nacházíme

$$18! + 1 = 23g + 23 = 23(g+1),$$

čímž je prokázáno, že číslo $18!+1$ je dělitelné číslem 23.

Otázka, se kterou jsme se setkali v příkladě 4, souvisí s tzv. Wilsonovou větou.**): *Číslo* $(p-1)!+1$ *je dělitelné číslem* p *právě tehdy, je-li* p *prvočíslo.* Důkaz této věty zde nebudeme provádět, neboť je dosti obtížný a převyšuje rámec této knížky. Všimněme si však, který důsledek plyne z Wilsonovy věty pro číslo $18!+1$. Položíme $p=19$ (což je prvočíslo) a vidíme, že číslo $18!+1$ je dělitelné číslem 19. Připojíme-li to k výsledku známému z příkladu 4, máme: Číslo $18!+1$ je dělitelné součinem $19 \cdot 23$ čili číslem 437.

Zopakujme si nyní definici permutace, známou ze školy. *Permutace* z n různých prvků jsou skupiny, které vzniknou záměnou pořadí prvků množiny, která obsahuje n různých prvků. Jejich počet se obvykle označuje $P(n)$. Dá se dokázat, že počet permutací z n prvků je dán

*) Písmena $a, b, \ldots, g$ v další úvaze znamenají vhodná přirozená čísla.

**) Název této věty nám připomíná jméno Johna Wilsona (1741—1793).

vzorcem $P(n)=n!$. Vyřešíme si dva příklady o permutacích.

Příklad 5. Jsou dána přirozená čísla $1, 2, 3, \ldots, m-1, m$. Kolik můžeme z nich sestavit permutací takových, že lichá čísla zůstávají na místech lichých*) a sudá na místech sudých?

Řešení. Počet všech uvažovaných permutací označme $\overline{P}(m)$. Budeme rozlišovat dva případy. Nejprve nechť je m sudé, v druhém případě liché.

a) Je-li $m=2k$, pak máme k lichých čísel $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ a také k sudých čísel $2, 4, 6, \ldots, 2k$. Nejprve uvažujeme permutace sestavené z čísel lichých; těch je zřejmě $k!$. Na sudých místech mají být čísla sudá $2, 4, 6, \ldots, 2k$, jichž je také k. Z nich lze tedy sestavit rovněž $k!$ permutací. Pro celkový počet permutací $\overline{P}(m)$ tedy máme $\overline{P}(m)=k!\,.\,k!=(k!)^2$.

b) Je-li $m=2k-1$, pak existuje opět k lichých čísel $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$; z nich můžeme sestavit $k!$ permutací. Sudých čísel $2, 4, 6, \ldots, 2k-2$ je pouze $k-1$, takže máme $(k-1)!$ permutací. Pro $\overline{P}(m)$ tedy vychází $\overline{P}(m)=k!\,.\,(k-1)!$.

Odpověď. Je-li m sudé, potom platí

$$\overline{P}(m)=\left(\left(\frac{m}{2}\right)!\right)^2;$$

je-li m liché, je

$$\overline{P}(m)=\left(\frac{m+1}{2}\right)!\,.\,\left(\frac{m-1}{2}\right)!\,.$$

Čtenář si může uvědomit, že ze vzorce $P(m)=m!$

*) *Lichým místem* v permutaci $a_1, a_2, \ldots, a_m$ rozumíme to místo, jež přísluší prvku s lichým indexem. Obdobně lze definovat *místo sudé.*

a ze dvou vzorců právě odvozených plynou tyto nerovnosti:

$$m! > \left(\left(\frac{m}{2}\right)!\right)^2 \quad \text{pro } m \text{ sudé};$$

$$m! \geqq \left(\frac{m+1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right)! \quad \text{pro } m \text{ liché.*)}$$

Příklad 6. V rovině je dán vypuklý n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (kde $n \geqq 4$) a jsou sestrojeny všechny jeho úhlopříčky. Kolika způsoby můžeme projít všechny vrcholy n-úhelníka tak, že vyjdeme z A_1, postupujeme po stranách nebo úhlopříčkách, každým z vrcholů A_2, A_3, ..., A_{n-1} projdeme právě jednou a skončíme ve vrcholu A_n.

Řešení. Tvoříme vlastně skupiny z n prvků (vrcholů mnohoúhelníka), přičemž A_1 se vždy vyskytne jako první a A_n jako poslední. Dva prvky jsou tedy pevné, kdežto zbývající $n-2$ prvky mění své pořadí. Hledaný počet je tedy $P(n-2) = (n-2)!$.

Často se vyskytuje případ, že se mezi danými n prvky jeden opakuje r-krát a druhý s-krát. Počet různých skupin (permutací), které se liší pořadím prvků, je pak — jak víme ze školy — dán vzorcem

$$P(n; r, s) = \frac{n!}{r!s!}.$$

Připomeneme si tuto problematiku na jednom příkladě.

Příklad 7. Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných devíti, která lze napsat užitím číslic 0, 1, 2, 5, 7. Přitom se mohou číslice v čísle i opakovat.

*) Rozmyslete si sami, proč v první z těchto nerovností je znaménko $>$, kdežto v druhé $\geqq$.

Řešení. Vzpomeneme si nejprve na znak dělitelnosti číslem 9. Číslo (v desítkové soustavě) je dělitelné devíti právě tehdy, je-li jeho ciferný součet dělitelný devíti. V našem případě přicházejí v úvahu pouze ciferné součty 9 nebo 18, neboť ciferný součet 27 nelze pomocí daných číslic vytvořit (a samozřejmě nemůžeme vytvořit ani součty 36, 45, ...).

Kolika způsoby lze v našem případě vytvořit součet 9? Nejprve nebudeme hledět na pořadí a v zápisech uspořádáme jednotlivé sčítance podle velikosti třeba „sestupně". Platí

$$9=7+2+0+0, \quad 9=7+1+1+0,$$

$$9=5+2+2+0, \quad 9=5+2+1+1.$$

Podobně pro součet 18 najdeme

$$18=7+7+2+2, \quad 18=7+5+5+1.$$

Vraťme se tedy k zápisu $9=7+2+0+0$. Kolik čtyřciferných čísel lze napsat, máme-li užít číslic 7, 2, 0, 0? Jde zřejmě o permutace ze čtyř prvků, přičemž se jeden prvek opakuje dvakrát. Počet těchto permutací je určen číslem

$$\frac{4!}{2!} = 12.$$

Z tohoto počtu ovšem musíme vyloučit čísla, která mají na prvním místě (zleva) číslici 0. Kolik je těchto případů? Tvoříme permutace ze zbývajících tří prvků 7, 2, 0 — a těchto permutací je $3!=6$. Zápisu $9=7+2+0+0$ odpovídá tedy $12-6=6$ případů.

Podobně zápisu $9=7+1+1+0$ odpovídá počet

$$\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=12-3=9.$$

Stejný výsledek dostaneme zřejmě pro zápis $9=5+2+2+0$.

Součtu $9=5+2+1+1$ odpovídá počet

$$\frac{4!}{2!}=12.$$

Pro ciferný součet 9 jsme tedy našli celkem 36 případů.

Nyní budeme uvažovat o ciferném součtu 18. Vyjádření $18=7+7+2+2$ odpovídají permutace ze čtyř prvků, přičemž jeden prvek se opakuje dvakrát a další také dvakrát. Jak známo, je počet těchto permutací roven číslu

$$\frac{4!}{2!\,.\,2!}=6.$$

Konečně zápisu $18=7+5+5+1$ odpovídá $\frac{4!}{2!}=12$ případů. Pro ciferný součet 18 jsme tedy našli celkem 18 případů.

Odpověď. Z daných číslic lze celkem sestavit 54 čtyřciferných čísel dělitelných devíti.

Obrátíme se nyní k obecnějšímu pojmu — k variacím. Dejme tomu, že jsou dána dvě přirozená čísla k, n, o nichž platí $1 \leqq k \leqq n$. *Variace k-té třídy* z n různých prvků jsou skupiny po k prvcích, vybrané z množiny obsahující n prvků tak, že každé dvě skupiny, které se liší pořadím prvků, pokládáme za různé. Počet variací k-té třídy z n prvků se obvykle označuje $V_k(n)$. Dá se dokázat, že pro $k > 1$ platí

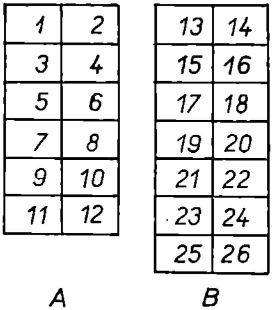
$$V_k(n)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

a pro $k=1$ je $V_1(n)=n$. To lze psát pomocí faktoriálů též takto

$$V_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ze školy víme, že permutace z n prvků jsou zvláštním případem variací (dostaneme je pro $k=n$). O variacích si nyní rozřešíme jeden příklad.

Příklad 8. Ve třídě jsou 24 žáci a 26 míst (viz obr. 1). Kolika způsoby je možno sestavit zasedací pořádek?



Obr. 1.

Řešení. Představme si nejprve, že jsou jednotlivá místa ve třídě očíslována tak, jak je to uvedeno na obr. 1. Máme-li nyní rozesadit 24 žáky, tvoříme vlastně skupiny po 24 prvcích z 26 prvků, přičemž záleží na pořadí. Tyto skupiny jsou tedy variace 24. třídy z 26 prvků a je jich

$$V_{24}(26)=26\,.\,25\,.\,24\,.\,\ldots\,.\,5\,.\,4\,.\,3=\frac{26!}{2!}.$$

Přistupme nyní k numerickému výpočtu. Podle Valouchových „Pětimístných tabulek logaritmických" platí

$$26!=403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000,$$

takže pro hledaný počet máme výsledek

$$201\,645\,730\,563\,302\,817\,792\,000\,000.$$

Tento paragraf skončíme příkladem trochu jiného druhu. Budeme se zabývat jednou rovnicí, ve které za neznámé x, y, z, t připouštíme jen přirozená čísla. Takováto úloha se v teorii čísel — jak mnozí čtenáři jistě vědí — nazývá neurčitá (diofantská) rovnice.*) Příklad 9 je trochu myšlenkově náročnější a proto doporučujeme, abyste si řešení dobře promysleli.

Příklad 9. Je dána rovnice

$$x!\,.\,y!\,.\,z!=t!. \tag{1}$$

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho čtveřic přirozených čísel x, y, z, t větších než 1 takových, že vyhovují rovnici (1).

Řešení. Zvolme libovolné přirozené číslo $n>2$**) a položme $x=n$, $y=n!-1$, $z=(n!)!-1$. Součin $x!\,.\,y!$ lze pak psát jako

$$n!\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,(n!-2)(n!-1)=(n!)!.$$

Podobně pro $x!\,y!\,z!$ máme

$$[(n!)!]\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,[(n!)!-2]\,.\,[(n!)!-1]=[(n!)!]!.$$

Pro takto zvolenou trojici přirozených čísel x, y, z vychází tedy $t=(n!)!$. Protože takovou konstrukci lze provést pro libovolné přirozené číslo $n>2$, je vidět, že rovnici (1) skutečně vyhovuje nekonečně mnoho čtveřic přirozených čísel větších než 1.

Zamysleme se ještě nad předcházejícím příkladem. V řešení jsme si ukázali, že existuje nekonečně mnoho

*) Označení diofantská rovnice nám připomíná Diofanta z Alexandrie, který žil okolo r. 275 n. l. Někdy se neznámé v diofantské rovnici omezují též na čísla celá, jindy na celá nezáporná apod.

**) Z další úvahy pochopíme, proč se zde omezujeme na případ $n>2$. Je to proto, aby v úvaze vystupovala jen přirozená čísla větší než 1.

čtveřic požadované vlastnosti, ale nezkoumali jsme, zda postupem uvedeným v předcházejících řádcích jsou vyčerpána všechna řešení rovnice (1). Je samozřejmé, že jsme mohli začít tím, že položíme např. $y=n$, $x=n!-1$, $z=(n!)!-1$, což znamená vlastně záměnu písmen (x, y, z) v předcházející konstrukci. Kdybychom měli hledat všechny čtveřice přirozených čísel x, y, z, t, které vyhovují rovnici (1), byl by to jistě mnohem složitější a obtížnější úkol než to, co bylo obsahem příkladu 9. Pokud je nám známo, nebyla tato otázka dosud úplně vyřešena.

Úlohy

1. Rozhodněte, které ze dvou čísel $500!.503!$ a $501!.502!$ je větší.

2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

a) $n!.(n+3)!>(n+1)!.\ (n+2)!$;

b) $n!+(n+3)!>(n+1)!+(n+2)!$.

3. Dokažte správnost těchto vzorců:

a) $(1!).1+(2!).2+(3!).3+\ldots+(n!).n=(n+1)!-1$;

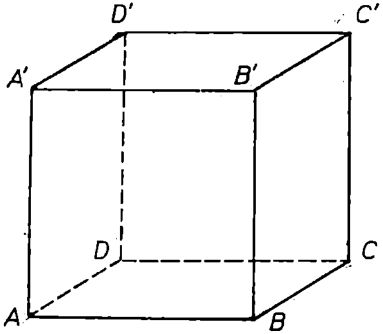
b) $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}\cdot$

4. Mám sedm knih českých a pět slovenských. Kolika způsoby je mohu postavit do řady na poličku tak, že nejprve jsou zařazeny všechny knihy české a pak všechny slovenské.

5. Vrcholy vypuklého n-úhelníku z příkladu 6 na str. 10

máme projít po stranách a úhlopříčkách tak, že začneme v A_1, každý z vrcholů $A_2, A_3, \ldots, A_n$ projdeme právě jednou a skončíme v A_1. Kolika způsoby je to možné?

6. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ (viz obr. 2). Rozhodněte, zda můžeme projít její vrcholy tak, že vyjdeme



Obr. 2.

z A, jdeme po hranách krychle, každý z vrcholů B, D, A', B', C', D' projdeme právě jednou a skončíme ve vrcholu C.

7. Je dána rovnice

$$x!.y!.z!.t!=u!.$$

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho pětic přirozených čísel x, y, z, t, u větších než 1 takových, že vyhovují dané rovnici.

8. Je dána rovnice

$$x!+y!=z!.$$

Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z, jež vyhovují dané rovnici.

9. Určete nejmenší přirozené číslo x, které má tuto vlastnost: Není možno najít žádné přirozené číslo n tak, že $n!$ má v desítkové soustavě právě x číslic.

2. kapitola

KOMBINAČNÍ ČÍSLO

Připomeňme si nejprve definici známou ze školy. Jsou dána dvě přirozená čísla k, n, přičemž $k \leqq n$. Potom klademe

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!},$$

což lze pro $k > 1$ vyjádřit též ve tvaru

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1)}{1.2.3.\ \dots\ k}$$

a pro $k = 1$ ve tvaru $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n.$

Číslo $\binom{n}{k}$ čteme „n nad k" a nazýváme *kombinační číslo* neboli *binomický koeficient*. Definice kombinačního čísla se rozšiřuje i pro $k = 0$ a klade se

$$\binom{n}{0} = 1$$

pro každé přirozené číslo n. Dalším rozšířením je

$$\binom{0}{0} = 1.$$

Kombinační číslo se někdy definuje i pro ta přirozená čísla k, n, pro něž platí $k > n$. Potom klademe

$$\binom{n}{k} = 0.$$

V několika příkladech si všimneme aritmetických vlastností kombinačních čísel.

Budeme zde pracovat se dvěma vzorci, které jsme si odvozovali ve škole. Jsou to vzorce

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},$$

které platí pro libovolná dvě celá čísla k, n, splňující vztah $0 \leqq k \leqq n$.

Příklad 10. Jsou dána kombinační čísla $\binom{500}{490}$ a $\binom{499}{9}$. Rozhodněte, které z nich je větší.

Řešení. Nejprve upravíme první kombinační číslo. Platí

$$\binom{500}{490}=\binom{500}{500-10}=\binom{500}{10}=\frac{500.499.\ \ldots\ .491}{1.2.3.\ \ldots\ .10}.$$

Pro druhé kombinační číslo máme

$$\binom{499}{9}=\frac{499.498.\ \ldots\ .491}{1.2.3.\ \ldots\ .9}.$$

Platí

$$\binom{500}{10}=\frac{500}{10}.\binom{499}{9}=50.\binom{499}{9},$$

takže číslo $\binom{500}{10}$ je padesátkrát větší než číslo $\binom{499}{9}$.

Odpověď: Číslo $\binom{500}{490}$ je větší než číslo $\binom{499}{9}$.

Příklad 11. Jsou dána dvě přirozená čísla m, n. Dokažte, že platí

$$\binom{m+n}{3}-\binom{m}{3}-\binom{n}{3}=\binom{m}{2}.n+\binom{n}{2}.m. \qquad (1)$$

Řešení. Vyjdeme z definice kombinačního čísla a budeme nejprve upravovat levou stranu vzorce (1). Abychom nemuseli pracovat se zápisy, ve kterých se vyskytují zlomky, vypočteme nejprve

$$6 \cdot \binom{m+n}{3} = (m+n)(m+n-1)(m+n-2) =$$

$$= m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 - 3m^2 - 6mn - 3n^2 + 2m + 2n;$$

podobně je

$$6 \cdot \binom{m}{3} = m^3 - 3m^2 + 2m,$$

$$6 \cdot \binom{n}{3} = n^3 - 3n^2 + 2n.$$

Pro úpravu levé strany vzorce (1) vypočteme tedy

$$6 \cdot \binom{m+n}{3} - 6 \cdot \binom{m}{3} - 6 \cdot \binom{n}{3} = 3m^2n + 3mn^2 - 6mn,$$

takže levá strana rovnosti (1) je $\frac{1}{2}mn(m+n-2)$. Na tento tvar však snadno převedeme i pravou stranu vzorce (1) a tím je jeho platnost prokázána.

Poznamenejme, že se ke vzorci (1) ještě vrátíme později. Uvidíme, že nám tento vzorec vyplyne jako snadný důsledek jedné geometrické úvahy. Nyní se však zabývejme ještě dalšími příklady o kombinačních číslech.

Příklad 12. Je dáno přirozené číslo r; položme $s = \binom{r}{2}$. Dokažte, že platí

$$\binom{s}{2} = 3 \cdot \binom{r+1}{4}.$$

Řešení. Upravujeme kombinační číslo

$$\binom{s}{2}=\frac{1}{2}s(s-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{r(r-1)}{2}\cdot\frac{r(r-1)-2}{2}\,.$$

V posledním čitateli lze psát*)

$$r(r-1)-2=r^2-r-2=(r+1)(r-2).$$

Platí tedy

$$\binom{s}{2}=\frac{(r+1)r(r-1)(r-2)}{2.2.2}=3\cdot\binom{r+1}{4},$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 13. Určete přirozené číslo n tak, aby platilo

$$\binom{n}{3}+\binom{n+2}{3}+\binom{n+4}{3}=\frac{n^3}{2}+88.$$

Řešení. Podle definice kombinačního čísla upravíme nejprve levou stranu dané rovnice. Dostáváme

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{(n+2)(n+1)n}{6}+\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6},$$

což po malé úpravě dává

$$\frac{1}{2}(n^3+3n^2+10n+8).$$

Daná rovnice se tím převede na tvar

$$\frac{1}{2}(n^3+3n^2+10n+8)=\frac{n^3}{2}+88,$$

což po úpravě vede na kvadratickou rovnici

$$3n^2+10n-168=0.$$

Snadný výpočet ukazuje, že kořeny této rovnice jsou

*) Při úpravě lze použít pomocné kvadratické rovnice $r^2-r-2=0$, která má kořeny $r=-1$, $r=2$.

$$n=6, \quad n=-\frac{28}{3}.$$

Výsledek $n=6$ vyhovuje zřejmě podmínkám naší úlohy, zatímco druhý kořen rovnice není číslo přirozené, a proto nemůže být ani řešením naší úlohy.

Odpověď. Hledané přirozené číslo je $n=6$.

Další příklad souvisí s teorií čísel. Je zajímavý sám o sobě, ale zařadili jsme jej sem proto, že jej budeme ještě potřebovat v dalších úvahách jako pomocnou větu.

Příklad 14. Je dáno prvočíslo p. Dokažte, že každé z kombinačních čísel

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \binom{p}{3}, \ldots, \binom{p}{p-1}$$

je dělitelné číslem p.

Řešení. Uvažujme kombinační číslo $\binom{p}{k}$, kde $1 \leq k \leq p-1$.

Napišme je jako zlomek

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1.2.3.\ldots.k}.$$

Ve jmenovateli se nevyskytuje činitel p, takže jmenovatel tohoto zlomku není dělitelný prvočíslem p. Čitatel je ovšem tímto prvočíslem dělitelný a z toho již plyne tvrzení, které jsme měli dokázat.

V dalším příkladě budeme potřebovat matematickou indukci.

Příklad 15. Jsou dána dvě přirozená čísla k, n. Dokažte, že platí

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\binom{k+3}{k}+\ldots+\binom{k+n}{k}=\binom{k+n+1}{k+1}.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. V celé úvaze budeme předpokládat, že přirozené číslo k je libovolně pevně dané. Pro $n=1$ máme vztah

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}=\binom{k+2}{k+1},$$

o jehož platnosti se můžeme přesvědčit velmi snadno. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo n náš vztah platí a budeme dokazovat obdobný vztah pro číslo $n+1$. V tomto novém vztahu se levá strana liší od původního vzorce jen tím, že zde máme na konci ještě kombinační číslo $\binom{k+n+1}{k}$ jako poslední sčítanec. Podle indukčního předpokladu lze tedy levou stranu vyjádřit ve tvaru

$$\binom{k+n+1}{k+1}+\binom{k+n+1}{k},$$

což podle známého vzorce dává $\binom{k+n+2}{k+1}$. To však je stejný výsledek, jaký bychom dostali, kdybychom do pravé strany dokazovaného vzorce dosadili $n+1$ místo n. Tím je i druhý indukční krok proveden a platnost vzorce dokázána.

Ze školy si pamatujeme, že se kombinační čísla dají snadno vypočítat pomocí tzv. Pascalova*) trojúhelníka. Tímto názvem označujeme tabulku trojúhelníkového tvaru

*) Blaise Pascal (1623—1662) je znám nejen jako matematik, ale vynikl i ve fyzice a ve filosofii.

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1

. . . .

Každý řádek zde obsahuje všechna kombinační čísla pro totéž n. Podle známého vzorce dostaneme sečtením dvou sousedních kombinačních čísel některého řádku to kombinační číslo, jež stojí v dalším řádku pod mezerou mezi nimi. Pascalův trojúhelník tak může sloužit k dosti rychlému a celkem jednoduchému výpočtu kombinačních čísel.

Příklad 16. Určete počet sudých čísel, která se vyskytují ve 13. řádku Pascalova trojúhelníka (tedy pro $n=12$).

Řešení. Okamžitě nás napadne, že můžeme prostě spočítat všech 13 řádek Pascalova trojúhelníka a dát pak odpověď na otázku, která byla položena v našem příkladě. To je ovšem postup dosti zdlouhavý a mohli bychom se ostatně při počítání dopustit i numerické chyby. Zamyslíme-li se však na okamžik nad danou otázkou, vidíme, že se zde nezajímáme o velikost binomických koeficientů, nýbrž jen o to, zda jsou to čísla sudá nebo lichá. Označíme-li liché číslo l a sudé s, můžeme napsat tyto schematické rovnice:*)

$$l+l=s; \quad l+s=s+l=l, \quad s+s=s. \tag{1}$$

*) Zápisu $l+l=s$ rozumějte tak, že součet dvou lichých čísel je vždy sudý. Analogický význam mají i další zápisy.

Z písmen *l*, *s* můžeme nyní sestavit „Pascalův“ trojúhelník podle stejných zásad, na jaké jsme zvyklí ze školy. Dostáváme tak schema

l

l l

l s l

l l l l

l s s s l

l l s s l l

l s l s l s l

l l l l l l l l

l s s s s s s s l

l l s s s s s s l l

l s l s s s s s l s l

l l l l s s s s l l l l

l s s s l s s s l s s s l

. . . .

Odpověď. Ve 13. řádku Pascalova trojúhelníka je právě 9 sudých čísel.

V probraném příkladě jsme tedy postupovali tak, aby vynaložená námaha byla přiměřená tomu, čeho chceme dosáhnout. To ostatně je v matematice (a zejména v matematice středoškolské) jev celkem všeobecný: Z postupů, které se nám nabízejí při řešení některé úlohy, si volíme vždycky tu cestu, která je nejschůdnější a nejjednodušší.

Pro úplnost poznamenejme k příkladu 16, že jednoduchou odpověď lze najít také tak, že použijeme vhodných matematických tabulek. Tak např. ve Valouchových „Pětimístných tabulkách logaritmických“ najdeme binomické koeficienty $\binom{n}{k}$ až do $n = 10$. Z tabulek tedy můžeme pro náš příklad vybrat přímo 11. řádek „Pascalova“ trojúhelníka ve tvaru $l, s, l, s, s, s, s, s, l, s, l$ a pokračovat pak jen v sestrojení dalších dvou řádků.

Čtenáře možná bude zajímat samo počítání s písmeny l, s, pro něž jsme definovali sčítání rovnicemi (1). Setkali jsme se tu totiž s velmi jednoduchým příkladem abstraktního pojmu, který se studuje v moderní algebře, s tzv. Abelovou grupou. Čtenáře, který by se chtěl s pojmem grupy seznámit podrobněji, odkazujeme např. na starší, ale velmi pěknou knížku L. Riegra „O grupách a svazech", Praha 1952.

Úlohy

10. Pro která přirozená čísla n platí nerovnost

$$\binom{n}{2}+\binom{n+3}{2}+\binom{n+6}{2}<100.$$

11. Jsou dána dvě přirozená čísla m, n, jež jsou obě větší než 1. Dokažte, že platí

$$\binom{m+n}{2}\geqq\binom{m}{2}+\binom{n}{2}+4.$$

Kdy nastane rovnost?

12. Je dáno přirozené číslo n. Uvažujte n čísel tvaru

$$1.\binom{n}{1},\quad 2.\binom{n}{2},\quad 3.\binom{n}{3},\ \ldots,\ (n-1).\binom{n}{n-1},\quad n.\binom{n}{n};$$

rozhodněte, které z těchto čísel je největší.

13. Určete, kolik je v 15. řádku Pascalova trojúhelníka čísel dělitelných třemi.

3. kapitola

KOMBINACE

Jsou dána dvě přirozená čísla k, n. *Kombinace k-té třídy z n prvků* jsou skupiny po k různých prvcích vybrané z množiny mající n prvků tak, že každé dvě skupiny, které se liší pouze pořadím prvků, pokládáme za totožné. Ze školy víme, že počet kombinací k-té třídy z n prvků se rovná kombinačnímu číslu $\binom{n}{k}$. Příklady nám zase ukáží, jak se pojmu kombinace užívá při řešení různých otázek.

Příklad 17. Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby všechna tři pole neměla stejnou barvu?

Řešení. Vybíráme tři pole ze 64 polí, tj. tvoříme kombinace 3. třídy ze 64 prvků. Těch je $\binom{64}{3}$. Šachovnice má 32 bílých a 32 černých polí. Podle našeho textu nejsou přípustné trojice složené vesměs z bílých polí — takových trojic je $\binom{32}{3}$ — ani trojice složené vesměs z černých polí — těch je rovněž $\binom{32}{3}$. Hledaný počet je tedy

$$\binom{64}{3} - 2.\binom{32}{3} = 41\,664 - 9920 = 31\,744.$$

Můžeme však počítat též jiným způsobem. Pole vybíráme tak, že buď jedno je bílé a dvě černé nebo jedno je černé a dvě bílá. Z toho odvodíme počet možností

$$32.\binom{32}{2}+\binom{32}{2}.32=32.32.31=31744.$$

Odpověď. Pole můžeme vybrat 31 744 způsoby.

Příklad 18. Který vypuklý n-úhelník má alespoň dvakrát tolik úhlopříček co stran?

Řešení. Ze školy si pamatujeme, že počet úhlopříček vypuklého n-úhelníka lze vyjádřit číslem

$$\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Má tedy platit nerovnost

$$\frac{n(n-3)}{2}\geqq 2n.$$

Úpravou dostáváme

$$n(n-3)\geqq 4n.$$

Protože číslo n je kladné, můžeme obě strany tímto číslem dělit a dostaneme $n-3\geqq 4$, čili $n\geqq 7$.

Odpověď. Hledaný n-úhelník má alespoň sedm stran.

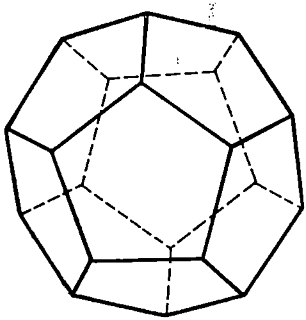
Trochu prostorové představivosti budeme potřebovat v dalším příkladě. Setkáme se tam s jedním pravidelným tělesem, které se nazývá pravidelný dvanáctistěn (dódekaedr). Abychom si o tomto tělese učinili lepší představu, podívejme se na obr. 3, který zachycuje pohled na toto těleso. Stěny dódekaedru jsou pravidelné pětiúhelníky.

Příklad 19. Kolik tělesových úhlopříček*) má pravidelný dvanáctistěn?

*) *Tělesovou úhlopříčkou* vypuklého tělesa rozumíme (jak známo) úsečku spojující dva různé vrcholy a ležící uvnitř tělesa.

Řešení. Pravidelný dvanáctistěn má 20 vrcholů. Z nich budeme vybírat dvojice, čili tvořit kombinace 2. třídy z 20 prvků. Těch je $\binom{20}{2} = 190$. To ovšem nejsou vesměs tělesové úhlopříčky, nýbrž jsou sem zahrnuty i hrany dvanáctistěnu a úhlopříčky ve stěnách. Dvanáctistěn má 30 hran, každá jeho stěna je pravidelný pětiúhelník a existuje tedy v ní pět úhlopříček. Ve stěnách je tedy celkem $12.5 = 60$ úhlopříček. Počet tělesových úhlopříček je tedy

$$190 - 30 - 60 = 100.$$



Obr. 3.

Jiné řešení. Určeme, kolik tělesových úhlopříček vychází z pevně zvoleného vrcholu. Každý vrchol patří ke třem stěnám, takže z něho vycházejí tři hrany a šest stěnových úhlopříček. Zbývá tedy ještě deset vrcholů, k nimž ze zvoleného vrcholu vedou tělesové úhlopříčky. Tato úvaha platí ovšem pro každý vrchol. Vrcholů je 20. Součin 20.10 znamená tedy dvojnásobně braný počet všech tělesových úhlopříček a to již vede k výsledku odvozenému v předcházejícím řešení.

Odpověď. Pravidelný dvanáctistěn má 100 tělesových úhlopříček.

Příklad 20. Vraťte se k příkladu 8 na str. 13. Ukažte, jak se změní výsledek, žádáme-li, aby ani v oddělení A ani v oddělení B nezůstala dvě volná místa.

Řešení. Je zakázán každý případ, kdy v A jsou dvě volná místa a také každý případ, kdy v B jsou dvě volná místa. V oddělení A, které má 12 míst, lze vybrat dvě volná místa zřejmě $\binom{12}{2}$ způsoby. Ostatní místa (je jich 24) jsou pak obsazena; žáky na ně můžeme umístit celkem 24! způsoby. Počet zasedacích pořádků, v nichž jsou dvě volná místa v oddělení A, je pak $\binom{12}{2} . 24!$. Podobně pro dvě volná místa v oddělení B máme $\binom{14}{2}$ možností a na zbylých místech ve třídě lze žáky zase rozesadit 24! způsoby. Číslo $\binom{14}{2} . 24!$ tedy udává počet zasedacích pořádků, v nichž jsou vždy dvě volná místa v oddělení B.

Odpověď na původní otázku tedy dává číslo

$$x = \frac{26!}{2!} - \binom{12}{2} . 24! - \binom{14}{2} . 24!.$$

Snadno nahlédneme, že je $x = (24!) . 168$. Logaritmický výpočet dává*)

$$\log x \doteq 23{,}7927 + 2{,}2253 = 26{,}0180$$

a po odlogaritmování $x \doteq 1{,}043 . 10^{26}$.

Příklad 21. V rovině jsou dány dvě různé rovnoběžky a, b. Na přímce a je dáno m různých bodů A_1, A_2, ...,

*) Můžete opět použít Valouchových tabulek, kde lze najít přibližnou hodnotu čísla log 24!.

A_m a na přímce b je dáno n různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách a, b, a to právě v bodech A_i, B_j.

Řešení. Celkem se v této úloze vyskytuje $m + n$ různých bodů, ze kterých máme tvořit trojice.

Utvoříme tedy nejprve všechny kombinace 3. třídy z $m + n$ prvků. Těchto kombinací je $\binom{m+n}{3}$. Toto číslo ovšem neznamená počet všech trojúhelníků, které nás zajímají v dané úloze. Zahrnuli jsme sem totiž také trojice bodů, které leží na přímce a a rovněž trojice ležící na přímce b. Je tedy nutné odečíst jednak $\binom{m}{3}$, jednak $\binom{n}{3}$, takže konečný výsledek je

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}.$$

Jiné řešení. Příklad 21 lze řešit též touto úvahou. Z $m + n$ daných bodů budeme vybírat nejprve ty trojice, ve kterých dva body leží na přímce a a jeden na přímce b. Tvoříme tedy kombinace 2. třídy z m prvků — těch je $\binom{m}{2}$ — a ke každé z nich připojíme některý z bodů na přímce b. To je možno provést celkem $\binom{m}{2} . n$ způsoby.

Podobně určíme počet těch trojic, kde jeden bod leží na přímce a a dva na přímce b. Tu máme $m . \binom{n}{2}$ možností. Celkový počet trojúhelníků je tedy

$$\binom{m}{2} . n + \binom{n}{2} . m.$$

Dvě řešení, jež jsme podali u předcházejícího příkladu, nám poskytla dva výsledky, které se na první pohled od sebe liší. Z úvahy, kterou jsme provedli, vyplývá, že oba výsledky jsou si rovny, že tedy platí

$$\binom{m+n}{3}-\binom{m}{3}-\binom{n}{3}=\binom{m}{2}\cdot n+\binom{n}{2}\cdot m.$$

Tento vzorec je nám ostatně už znám z příkladu 11, kde jsme jej dokazovali výpočtem. Nyní jsme vlastně tedy dokazovali tento vzorec znova, přičemž jsme užili geometrického znázornění a vhodné kombinatorické úvahy. Čtenář nechť sám posoudí, která z obou cest pro důkaz našeho vzorce se mu jeví schůdnější.

Někdy se v matematice vyskytují též tzv. kombinace s opakováním; s tímto pojmem se seznámíme v dalších řádcích. I tato otázka však úzce souvisí s jedním problémem z teorie čísel. Abychom této souvislosti lépe porozuměli, vyřešíme nejprve dva příklady, které na první pohled nijak nesouvisejí s kombinacemi. Při řešení druhého z nich však hned poznáme, že se s výhodou dá použít kombinačních čísel.

Příklad 22. Je dána rovnice

$$x+y+z=3.$$

Uveďte všechny uspořádané trojice celých nezáporných čísel (x, y, z), jež vyhovují naší rovnici.*)

Řešení. Úloha je celkem jednoduchá, jen si musíme dát pozor, abychom nezapomněli na žádný případ, který vyhovuje dané rovnici. Budeme proto postupovat systematicky.

Největší z hledaných čísel nemůže být větší než 3; tak nacházíme případy (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3). Nyní vezmeme v úvahu ty trojice, ve kterých největší číslo je 2 — jedna z nich je (2, 1, 0) — a konečně ty, v nichž největší

*) Setkáváme se tu tedy s dalším případem neurčité (diofantské) rovnice.

číslo je 1 — taková je jen jediná, totiž (1, 1, 1). Výsledek můžeme zapsat do tohoto přehledu:

$$(3, 0, 0);\ (0, 3, 0);\ (0, 0, 3);\ (2, 1, 0);\ (2, 0, 1);$$
$$(1, 2, 0);\ (1, 0, 2);\ (0, 2, 1);\ (0, 1, 2);\ (1, 1, 1).$$

Odpověď. Našli jsme celkem 10 trojic, jež vyhovují daným podmínkám.

V dalším příkladě se budeme zabývat ještě obecnějším případem diofantské rovnice a budeme hledat počet řešení. Rozřešením příkladu 23 bude nalezena i odpověď na příklad 22, takže se může pokročilejšímu čtenáři zdát příklad 22 zbytečný. Zařadili jsme jej sem však přesto — nejen jako přípravu k další úvaze, ale aby si čtenář skutečně prošel všechny trojice vyhovující dané rovnici.

Příklad 23. Je dána rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n,$$

kde r, n jsou daná přirozená čísla. Určete, kolik existuje uspořádaných r-tic čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$, jež splňují danou rovnici a jsou celá nezáporná.

Řešení. Zavedeme pomocné neznámé $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_r$ tím, že položíme

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + x_1, \\
y_2 &= 2 + x_1 + x_2, \\
y_3 &= 3 + x_1 + x_2 + x_3, \\
y_4 &= 4 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_r &= r + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r.
\end{aligned}$$

Protože původní neznámé x_i jsou čísla nezáporná, platí o nových neznámých y_i zřejmě vztah

$$1 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_r = n + r.$$

Povšimněme si zde, že číslo y_r je rovno číslu $n + r$, takže je $y_{r-1} \leqq n + r - 1$. Máme tedy $r - 1$ přirozených čísel $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{r-1}$, o nichž platí $1 \leqq y_i \leqq n + r - 1$.

Ke každé r-tici celých nezáporných čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$ umíme tedy přiřadit jedinou $(r-1)$-tici $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{r-1}$ a obráceně lze ke každé $(r-1)$-tici $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{r-1}$, jež splňuje vztah

$$1 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{r-1} \leqq n + r - 1,$$

najít příslušná čísla $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$. Otázka se tedy převádí na tento úkol: Máme určit, kolika způsoby lze vybrat $r - 1$ různých přirozených čísel z celkového počtu $n + r - 1$ daných přirozených čísel. Vidíme, že jde o kombinace $(r-1)$-ní třídy z $n + r - 1$ prvků, takže hledaný počet je vyjádřen kombinačním číslem

$$\binom{n+r-1}{r-1}.$$

Odpověď. Daná neurčitá rovnice má $\binom{n+r-1}{r-1}$ řešení.*)

Přistupme nyní k definici kombinací s opakováním. *Kombinacemi n-té třídy* z r různých prvků *s opakováním* nazýváme skupiny po n prvcích z daných r prvků (bez zřetele k uspořádání ve skupině), v nichž se každý prvek může opakovat až n-krát. O počtu kombinací s opakováním se dozvíme v dalším příkladě.

Příklad 24. Jsou dána dvě přirozená čísla n, r. Určete počet kombinací n-té třídy z r různých prvků s opakováním.

Řešení. Daných r prvků označme po řadě $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Každou kombinaci s opakováním lze úplně popsat tím,

*) Pro $r = 3$, $n = 3$ dostáváme $\binom{3+3-1}{3-1} = 10$, což souhlasí s výsledkem dosaženým v příkladě 22.

že uvedeme, kolikrát se v ní vyskytuje prvek a_i (pro $i = 1, 2, \ldots, r$). Označíme-li x_i násobnost prvku a_i v uvažované kombinaci s opakováním, je r-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ tvořena celými nezápornými čísly a platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n.$$

Tím je otázka převedena na řešení neurčité rovnice, kterou jsme se zabývali v předcházejícím příkladě.

Odpověď. Počet kombinací n-té třídy z r různých prvků s opakováním je $\binom{n+r-1}{r-1}$.

Úlohy

14. Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby všechna neležela v témž sloupci?

15. Je dán vypuklý n-úhelník, jehož žádné tři úhlopříčky nemají společný vnitřní bod. V tomto n-úhelníku jsou sestrojeny všechny úhlopříčky. Kolik průsečíků úhlopříček tím vznikne?

16. Je dán pravidelný dvanáctistěn (dódekaedr). Každé tři jeho různé vrcholy určují jednu rovinu. Kolik rovin je celkem určeno, uvažujeme-li všech 20 vrcholů? Kolik z těchto rovin prochází vnitřkem dódekaedru?

17. V prostoru jsou dány dvě mimoběžky a, b. Na přímce a je dáno m různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a na přímce b je dáno n různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Určete počet všech čtyřstěnů, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách a, b, a to v bodech A_i, B_j.

4. kapitola

BINOMICKÁ VĚTA

Kombinační čísla se používají v tzv. binomické větě, jejíž znění si zde nejprve uvedeme (a která je čtenářům rovněž známa ze školy). *Binomická věta* zní:

Jsou-li a, b libovolná čísla (reálná nebo komplexní) a n přirozené číslo, platí

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+ \\ +\binom{n}{n}b^n.$$

Její použití si opět procvičíme v příkladech.

Příklad 25. Pomocí binomické věty vypočtěte $(x^3 + 2y)^5$.

Řešení. Podle binomické věty platí

$$(x^3+2y)^5=\binom{5}{0}x^{15}+\binom{5}{1}x^{12}.2y+\binom{5}{2}x^9.4y^2+ \\ +\binom{5}{3}x^6.8y^3+\binom{5}{4}x^3.16y^4+\binom{5}{5}.32y^5.$$

Binomické koeficienty $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, ..., $\binom{5}{5}$ můžeme určit třeba z Pascalova trojúhelníka:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Dostáváme tak

$$(x^3+2y)^5=x^{15}+10x^{12}y+40x^9y^2+80x^6y^3+80x^3y^4+32y^5.$$

V dalším příkladě si dokážeme dva vztahy o kombinačních číslech, které jsou dosti užitečné v mnoha úvahách.

Příklad 26. Je dáno přirozené číslo n. Dokažte, že platí

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n;$

b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+$

$$+(-1)^n\binom{n}{n}=0.$$

Řešení. Budeme používat binomické poučky

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+$$

$$+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n.$$

a) Dosadíme sem $a = b = 1$ a dostáváme přímo vztah, který máme dokázat.

b) Dosadíme $a = 1$, $b = -1$; snadnou úpravou dostaneme pak žádaný výsledek.

Ukážeme si hned použití těchto vzorců. V dalším příkladě si totiž odvodíme trochu složitější vztah s kombinačními čísly.

Příklad 27. Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Dokažte, že platí

$$1.\binom{n}{1}-2.\binom{n}{2}+3.\binom{n}{3}-4.\binom{n}{4}+\ldots+n(-1)^{n-1}\binom{n}{n}=0.$$

Řešení. Uvažovaný součet označíme S_n. Budeme postupovat matematickou indukcí (která ovšem začne až případem $n = 2$). Pro $n = 2$ dostáváme

$$S_2=1.\binom{2}{1}-2.\binom{2}{2}=2-2=0,$$

takže vzorec platí.*) Předpokládejme nyní, že náš vzorec platí pro některé přirozené číslo n a uvažujme součet

$$S_{n+1}=1.\binom{n+1}{1}-2.\binom{n+1}{2}+3.\binom{n+1}{3}-\ldots+$$
$$+(n+1)(-1)^n\binom{n+1}{n+1},$$

ve kterém k-tý člen je

$$a_k=(-1)^{k-1}.k\binom{n+1}{k}.$$

Tento výraz můžeme upravovat podle známého vzorce

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

a dostáváme

$$a_k=(-1)^{k-1}.k.\binom{n}{k}+(-1)^{k-1}.k.\binom{n}{k-1}. \qquad (1)$$

Abychom vypočetli S_{n+1}, musíme sečíst všechny členy a_k pro $k = 1, 2, 3, \ldots, n+1$. Podle vzorce (1) dostáváme při tomto sčítání nejprve součet S_n (sečtením prvních n sčítanců v a_k), potom výraz

$$V=(-1)^n(n+1)\binom{n}{n+1}$$

a konečně součet

$$s=1.\binom{n}{0}-2.\binom{n}{1}+3.\binom{n}{2}-\ldots+(n+1)(-1)^n\binom{n}{n}.$$

Je zřejmě $V = 0$ a budeme se tedy zabývat součtem s. Zde můžeme k-tý člen napsat ve tvaru

$$b_k=(-1)^{k-1}k\binom{n}{k-1},$$

*) Doporučuji vám, abyste si sami vypočítali též čísla s_3, s_4, s_5, což vám přiblíží náš příklad a snad i umožní pochopit důkaz.

což lze upravit na tvar

$$b_k=(-1)^{k-1}(k-1)\binom{n}{k-1}+(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}.$$

Dosazujeme-li $k = 1, 2, 3, \ldots, n + 1$, dostáváme tedy výsledek

$$s=S_n+\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}.$$

Podle indukčního předpokladu a podle příkladu 26 b) je proto $s = 0$. Tím je druhý indukční krok proveden a důkaz uvedeného vztahu je podán.

Nyní si odvodíme jednu nerovnost, kterou budeme v dalším potřebovat.

Příklad 28. Pro každé přirozené číslo n a pro každé nezáporné číslo x platí $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$. Dokažte!*)

Řešení. Nerovnost vyplývá z binomické věty

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\ldots$$

V místě, kde jsme napsali tři tečky, jsou členy**) tvaru $\binom{n}{k}x^k$, které jsou za našich předpokladů vesměs čísla nezáporná. Jestliže tedy na pravé straně tyto členy vynecháme, buď se tím tato strana zmenší nebo se nezmění. Vždycky tedy platí

$$(1+x)^n\geqq 1+\binom{n}{1}x,$$

což po malé úpravě již dává žádanou nerovnost.

*) Nerovnost z této úlohy se obvykle nazývá Bernoulliho nerovnost.

**) Pro $n=1$ ovšem tyto členy již neexistují, ale pro tento triviální případ je platnost Bernoulliho nerovnosti zřejmá.

Jiné řešení. Můžeme postupovat též matematickou indukcí. Než však přistoupíme k tomuto druhému řešení, připojíme ještě jednu poznámku. Obor čísel x z naší úlohy je možno totiž rozšířit a dokázat platnost Bernoulliho nerovnosti pro všechna reálná čísla $x > -1$.

Matematickou indukci začneme případem $n = 1$. Pak má nerovnost tvar

$$(1+x)^1 \geqq 1+x,$$

což je zřejmě správné. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo n platí

$$(1+x)^n \geqq 1+nx.$$

Obě strany této nerovnosti znásobíme kladným číslem $(1+x)$; vychází

$$(1+x)^{n+1} \geqq (1+nx)(1+x). \qquad (1)$$

Na pravé straně vynásobením dostáváme

$$1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2.$$

Číslo nx^2 je nezáporné, takže po jeho vynechání se příslušný výraz buď zmenší nebo nezmění. Z toho plyne

$$(1+nx)(1+x) \geqq 1+(n+1)x.$$

Připojíme-li toto k nerovnosti (1), dostáváme

$$(1+x)^{n+1} \geqq 1+(n+1)x.$$

Tím jsme však Bernoulliho nerovnost dokázali též pro $n+1$ a důkaz je tím podán.*)

Bernoulliho nerovnost nám umožní odvodit jeden zajímavý vztah. Tomuto odvození je věnován příklad 29.

Příklad 29. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

*) Rozmyslete si sami, zda Bernoulliho nerovnost platí též pro $x = -1$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqq 2.$$

Řešení. Stačí dosadit $x=\frac{1}{n}$ do Bernoulliho nerovnosti. Po zkrácení již okamžitě dostáváme žádaný vztah. Prosíme čtenáře, aby si uvědomil, že znaménko $=$ v tomto vztahu platí právě tehdy, je-li $n=1$.

S příkladem 29 úzce souvisí další nerovnost, která rovněž podává informaci o mocnině $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Příklad 30. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Řešení. Pro $n=1$ dostáváme

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < 3,$$

takže nerovnost skutečně platí. V dalším textu budeme předpokládat, že přirozené číslo n je větší než 1. Podle binomické věty máme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2.\ldots.n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Ve zlomcích

$$\frac{n(n-1)}{1.2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\ \ldots,\ \frac{n(n-1).\ldots.1}{1.2.\ldots.n}$$

upravíme čitatele tím, že zde každého činitele nahradíme číslem n. Tím se každý z těchto zlomků zvětší a přejde na tvar

$$\frac{n^2}{2!}, \frac{n^3}{3!}, \quad \ldots, \frac{n^n}{n!}.$$

Dosadíme-li tyto zvětšené hodnoty do našeho výpočtu, vidíme, že můžeme krátit a dostáváme tak nerovnost

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}. \qquad (1)$$

Zbývá odhadnout číslo

$$a=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Zde ve jmenovatelích budeme místo čísel $2!$, $3!$, $\ldots$, $n!$ klást čísla 2^1, 2^2, $\ldots$, 2^{n-1}. Tím se zřejmě (počínaje od druhého členu) každý jmenovatel zmenší a pro číslo a tím nacházíme odhad

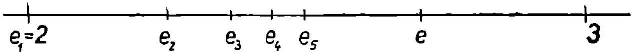
$$a < \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

Je tedy $a < 1$. Vrátíme-li se ke vzorci (1) a použijeme-li zde výsledku právě dosaženého, dostáváme tím už okamžitě nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Zůstaňme ještě na chvíli u příkladů 29 a 30. Zde se vyskytuje výraz

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

který má v matematické analýze dosti časté upotřebení. Dosazujeme-li totiž do e_n po řadě $n = 1, 2, 3, \ldots$, dostáváme tak posloupnost čísel, jež jsou — jak jsme právě viděli — vesměs větší nebo rovna než číslo 2 a menší než číslo 3. Na obr. 4 vidíme část číselné osy a na ní jsme zobrazili část naší posloupnosti, to je čísla e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Dá se dokázat, že tato posloupnost je rostoucí, tj. že pro každé



Obr. 4.

n platí $e_n < e_{n+1}$. Již z názoru je patrné, že se tato čísla e_n musí „hromadit“ kolem určité hodnoty; toto „mezní“ číslo označujeme písmenem e. Výpočet ukazuje, že je e $\doteq$ 2,71828. Mnozí naši čtenáři jistě umějí počítat s limitami a vědí proto, že se v takovém případě mluví o **konvergenci** posloupnosti $e_1, e_2, e_3, \ldots$ a že se píše

$$\lim_{n \to \infty} e_n = e.$$

Říkáme, že číslo e je **limitou** posloupnosti $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *)

Nerovnosti, které jsme až dosud probrali, nám umožní odvodit některé věty o faktoriálech. Těmto odvozením jsou věnovány další příklady.

Příklad 31. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n=1$ máme

$$1! > \frac{1}{3},$$

což zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že pro některé

*) Čtenáře, kteří se zajímají o pojem limity, odkazujeme na dvě přístupně psané knihy. První má název „Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu“ a napsal ji K. Hruša; druhá má název „Diferenciální počet pro začátečníky“ a jejím autorem je K. Havlíček.

přirozené číslo n uvažovaná nerovnost platí a budeme dokazovat nerovnost

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}. \qquad (1)$$

Levou stranu nerovnosti (1) lze upravovat podle indukčního předpokladu takto:

$$(n+1)! = n!.(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n.(n+1). \qquad (2)$$

Abychom dokázali vztah (1), musíme poslední výraz v řádku (2) porovnat s číslem $\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$. Ptejme se, zda může platit

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1) \leqq \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}. \qquad (3)$$

Kdyby tato nerovnost platila, pak bychom po vynásobení (kladným) číslem 3^{n+1} dostali

$$3.n^n.(n+1) \leqq (n+1)^{n+1}.$$

Dále lze krátit číslem $n+1$, což dává

$$3.n^n \leqq (n+1)^n.$$

Dělíme-li obě strany číslem n^n, pak po snadné úpravě pravé strany vychází

$$3 \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

To však je spor s tím, co jsme dokázali v předcházejícím příkladě. Vztah (3) tedy neplatí a naopak je správná nerovnost

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1) > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Připojíme-li tuto nerovnost k řádku (2), dostáváme závěrem vztah (1), čímž je hotov druhý indukční krok. Důkaz uvedené nerovnosti je tím podán.

Příklad 32. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 6$ platí

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n. \tag{1}$$

Řešení. I zde použijeme matematické indukce, ale ta začne u čísla $n = 6$. Pro tento případ totiž dostáváme $6! < 3^6$, čili $720 < 729$, což je zřejmě správná nerovnost. Předpokládejme tedy, že nerovnost (1) platí pro některé přirozené číslo $n \geqq 6$ a budeme dokazovat obdobnou nerovnost pro číslo $n + 1$. Platí

$$(n+1)! = n!(n+1) < \left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1). \tag{2}$$

Porovnáme nyní čísla

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) \quad \text{a} \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Kdyby platilo

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) > \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1},$$

pak by odtud plynulo

$$2 . n^n (n+1) > (n+1)^{n+1},$$

čili po další malé úpravě

$$2 . n^n > (n+1)^n.$$

Obě strany bychom dělili číslem n^n a dostali bychom

$$2 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

To však je spor s příkladem 29. Našli jsme tak vztah

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1},$$

který připojíme ke (2). Tak vychází

$$(n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Tím jsme prokázali platnost také pro číslo $n+1$ a důkaz je hotov.

Ještě několik slov k předcházejícím dvěma příkladům. Výsledky, se kterými jsme se tam seznámili, můžeme shrnout do stručného vyjádření

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \tag{1}$$

což platí pro všechna „dostatečně velká" přirozená čísla n.

Z počítání s faktoriály víme, že číslo $n!$ vzrůstá, dosazujeme-li za n po řadě čísla 1, 2, 3, ... Vyjádření (1) ukazuje, že $n!$ vzrůstá „rychleji" než $\left(\frac{n}{3}\right)^n$ a „pomaleji" než $\left(\frac{n}{2}\right)^n$. Tak např. pro $n = 300$ máme odhad*)

$$100^{300} < 300! < 150^{300}.$$

Platí $100^{300} = 10^{600}$, což je číslo, které má (v desítkové soustavě) celkem 601 místo. Z toho je tedy patrné, že číslo 300! má také alespoň 601 místo. Z druhé strany jsme číslo 300! odhadli číslem 150^{300}. Abychom si uvědomili, kolik číslic má (v desítkové soustavě) číslo 150^{300}, budeme počítat logaritmicky. V logaritmických tabulkách najdeme, že $\log 150 = 2{,}1761$. Musíme si ovšem uvědomit, že toto je neúplné číslo, které zastupuje vyjádření

$$2{,}17605 \leqq \log 150 \leqq 2{,}17615.$$

Odtud plyne

$$300 \, . \, 2{,}17605 \leqq 300 \, . \log 150 \leqq 300 \, . \, 2{,}17615,$$

čili

$$652{,}815 \leqq \log 150^{300} \leqq 652{,}845.$$

*) Srovnej též výsledek, k němuž jsme došli v příkladě 3.

Toto vyjádření však znamená, že číslo 150^{300} má (v desítkové soustavě) právě 653 číslice. Celkem je tedy vidět z řádku (1), že číslo 300! má nejvýše 653 číslice.

Souhrnně lze tedy říci, že číslo 300! má alespoň 601 číslici a nejvýše 653 číslice. Tento odhad je ovšem jen velmi hrubý; kdybychom chtěli určit přesný počet číslic v čísle 300!, potřebovali bychom k tomu zřejmě velmi zdlouhavý numerický výpočet. V integrálním počtu se odvozuje tzv. Stirlingův vzorec, který dovoluje určit číslo $n!$ poměrně dosti přesně, jestliže číslo n je „dostatečně velké". V tomto vzorci se vyskytuje číslo e, o kterém již byla řeč na stránkách této knížky. Stirlingův vzorec má tvar

$$n! \doteq \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Ukázali jsme si tedy, že binomická věta slouží k odvození některých vztahů, jež jsou dosti užitečné i při numerickém počítání. Tento paragraf ukončíme jedním příkladem, který nám osvětlí užitečnost binomické věty i v teorii čísel.

Příklad 33. Nechť p je libovolné prvočíslo a n libovolné přirozené číslo. Potom rozdíl $n^p - n$ je dělitelný prvočíslem p. Dokažte.

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. Přitom ovšem budeme prvočíslo p pokládat za pevné. Pro $n = 1$ je uvedený rozdíl roven nule, takže tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení je dokázáno pro některé přirozené číslo n a budeme je dokazovat pro číslo $n + 1$. Budeme tedy pracovat s výrazem $(n + 1)^p - (n + 1)$, který můžeme upravit podle binomické věty na tvar

$$\{n^p - n\} + \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \binom{p}{3} n^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-1} n.$$

Výraz $n^p - n$ je dělitelný číslem p podle indukčního předpokladu, zatímco každý ze zbývajících členů je dělitelný prvočíslem p podle příkladu 14. Je tedy také rozdíl $(n+1)^p - (n+1)$ dělitelný prvočíslem p. Druhý indukční krok je tím proveden a důkaz je podán.

Poučka, s níž jsme se setkali v příkladě 33, se nazývá malá věta Fermatova. Připomíná nám jméno francouzského matematika a právníka P. Fermata (1601—1665), který našel řadu vět z teorie čísel. Přívlastkem „malá" odlišujeme tuto větu od jiného tvrzení, které vyslovil rovněž P. Fermat a které se dnes nazývá velká věta Fermatova. Toto druhé tvrzení se týká neurčité rovnice $x^n + y^n = z^n$, kde n je dané přirozené číslo. Fermat se zabýval případem $n \geqq 3$ a pokoušel se dokázat, že uvedená rovnice nemá žádné řešení přirozenými čísly x, y, z. Ze zápisu, jenž se nám zachoval, je vidět, že se Fermatovi žádné řešení nepodařilo najít; domníval se dokonce, že našel důkaz pro nemožnost takového řešení. V jeho úvaze však byla jistě nějaká chyba, neboť tento problém nebyl dodnes rozřešen a o velké větě Fermatově existuje již velmi obsáhlá literatura.

Úlohy

18. Vypočtěte: a) $(1+\sqrt{3})^6$; b) $(1+i)^7$.

19. Je dáno přirozené číslo n a reálné číslo x, o němž platí $|x| \leqq 1$. Dokažte nerovnost

$$(1+x)^n+(1-x)^n \geqq 2.$$

20. S přesností na dvě desetinná místa vypočtěte

$$e_{100} = 1{,}01^{100}.$$

21. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí*)

$$n! \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

22. Podle Stirlingova vzorce vypočtěte přibližně $300!$.

*) Srovnej tuto úlohu s příkladem 32.

5. kapitola

NĚKOLIK OTÁZEK Z MATEMATICKÉ STATISTIKY

Představme si, že máme vyšetřit výšku a váhu patnáctiletých chlapců v naší republice. Předmětem zkoumání je tedy soubor jedinců, který obsahuje dosti značný počet prvků. Nebylo by proto hospodárné, kdybychom k získání výsledku chtěli skutečně změřit a zvážit všechny chlapce tohoto věku. Nebylo by to možné třeba ani z toho důvodu, že by tento experiment trval příliš dlouho a my máme předepsáno, abychom výsledný údaj získali v době co nejkratší. Jak budeme postupovat? Místo celého velmi početného základního souboru si vezmeme jen určitý výběr, tj. skupinu patnáctiletých chlapců, která není příliš početná a která je vybrána podle určitých zásad z celého souboru zkoumaných jedinců. Výšku resp. váhu pak měříme jen u tohoto výběru. Zmíněné zásady spočívají zejména v tom, že žádáme, aby výběr byl náhodný a co možná reprezentativní, tj. aby v určitém smyslu vzhledem ke zkoumanému znaku reprezentoval celý základní soubor.

Měli jsme tedy základní soubor, ve kterém se měl měřit některý kvantitativní znak (výška, váha) a přešli jsme k menšímu výběru. Jak se liší třeba aritmetický průměr v základním souboru od aritmetického průměru ve výběru a jaký je vztah mezi těmito čísly? Tomuto zkoumání věnujeme další úvahu. Přitom odhlédneme od konkrétního významu kvantitativního znaku a budeme pracovat prostě s čísly.

Nechť je tedy dán základní soubor, který má N prvků.

Na každém z nich je naměřen kvantitativní znak x_i, takže dostáváme skupinu N čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$. Kromě toho uvažujme výběr, který má r prvků ($1 \leqq r \leqq N$). Takových výběrů existuje celkem $\binom{N}{r}$. Číslům N, resp. r, říkáme někdy též *rozsah* základního souboru, resp. výběru. Označme $\bar{x}$ aritmetický průměr v základním souboru; je tedy

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}. \tag{1}$$

Dále označme $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)}$ po řadě všechny aritmetické průměry ve výběrech rozsahu r; je tedy $s = \binom{N}{r}$. Jak velký je aritmetický průměr z čísel $\bar{x}^{(i)}$? Odpověď najdeme v dalším příkladě.

Příklad 34. Určete aritmetický průměr z výběrových aritmetických průměrů $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)}$.

Řešení. Předmětem naší úvahy je výraz

$$\frac{\bar{x}^{(1)} + \bar{x}^{(2)} + \ldots + \bar{x}^{(s)}}{s}.$$

Rozšíříme-li tento zlomek číslem r, vychází

$$\frac{r\bar{x}^{(1)} + r\bar{x}^{(2)} + \ldots + r\bar{x}^{(s)}}{rs}. \tag{2}$$

Každé z čísel $r\bar{x}^{(i)}$ si můžeme představit jako součet některých čísel x_j, přičemž sčítanců je vždy r. V čitateli zlomku (2) se tedy vyskytují všechna čísla x_j — případně vícekrát. Kolikrát je tu číslo x_1? Musíme určit, kolikrát se číslo x_1 vyskytuje ve výběrech rozsahu r ze základního souboru rozsahu N. Každý výběr obsahující prvek x_1 dostaneme tak, že k prvku x_1 přidáme libovolnou skupinu o $r-1$ prvcích; je tedy výběrů obsahujících prvek x_1 právě tolik, kolik kombinací $(r-1)$-ní třídy lze utvořit z $N-1$ prvků, tj.

$\binom{N-1}{r-1}$. Číslo x_1 je tedy v čitateli zlomku (2) právě $\binom{N-1}{r-1}$-krát a totéž platí ovšem i o každém z dalších čísel x_2, x_3, ..., x_N. Čitatele zlomku (2) tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\binom{N-1}{r-1}.(x_1+x_2+\ldots+x_r).$$

Podle (1) má proto čitatel tvar

$$\binom{N-1}{r-1}.N.\bar{x}=\frac{(N-1)!}{(r-1)!(N-r)!}.N.\bar{x}=\frac{N!}{(r-1)!(N-r)!}.\bar{x}.$$

Jmenovatel zlomku (2) je

$$r.s=r.\binom{N}{r}=r.\frac{N!}{r!(N-r)!}=\frac{N!}{(r-1)!(N-r)!}.$$

Dělením tedy dostáváme podíl $\bar{x}$.

Odpověď. Aritmetický průměr ze všech výběrových aritmetických průměrů se rovná aritmetickému průměru v základním souboru.

Další důležitou charakteristikou, která se vyskytuje v matematické statistice, je tzv. *směrodatná odchylka* σ. Jsou-li dána čísla x_1, x_2, ..., x_N, pak σ je definováno vztahem

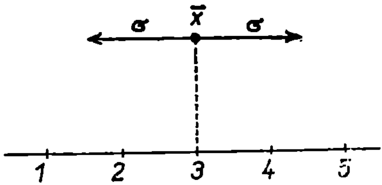
$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2}{N}}.$$

Směrodatná odchylka σ je mírou, jak se hodnoty x_i „rozptylují" nebo „kupí" kolem aritmetického průměru $\bar{x}$; to je vidět z toho, že σ závisí na odchylkách $x_i - \bar{x}$. Jsou-li odchylky malé, je σ malé, jsou-li odchylky velké, je σ velké.

Uvedeme si numerický příklad. Čísla 1, 2, 3, 4, 5 mají aritmetický průměr 3, takže

$$\sigma=\sqrt{\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}}=\sqrt{2}.$$

Bývá zvykem znázorňovat daná čísla na ose číselné a připojit tam též směrodatnou odchylku. Pro náš případ je toto znázornění vidět na obr. 5.



Obr. 5.

Vraťme se ještě k výběrovým aritmetickým průměrům a studujme otázku, jak se tato čísla $\bar{x}^{(i)}$ „kupí" kolem aritmetického průměru $\bar{x}$. Srovnáme tedy směrodatnou odchylku všech těchto výběrových aritmetických průměrů se směrodatnou odchylkou čísel x_j v základním souboru. Tomuto srovnání je věnován další příklad.

Příklad 35. Znáte-li rozsah základního souboru a rozsah výběrů (čísla N a r) a směrodatnou odchylku σ v základním souboru, vypočtěte směrodatnou odchylku všech výběrových aritmetických průměrů $\bar{x}^{(i)}$.

Řešení. Případ $r = 1$ je triviální, neboť pak je hledaná směrodatná odchylka rovna přímo číslu σ. V dalším textu tedy uvažujme jen případ $r \geqq 2$. Použijme výsledku z předcházejícího příkladu, podle něhož čísla $\bar{x}^{(i)}$ mají aritmetický průměr $\bar{x}$. Jejich směrodatnou odchylku $\bar{\sigma}$ vypočteme tedy podle vzorce

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{(\bar{x}^{(1)} - \bar{x})^2 + (\bar{x}^{(2)} - \bar{x})^2 + \ldots + (\bar{x}^{(s)} - \bar{x})^2}{s}}.$$

Budeme zatím pracovat jen se zlomkem pod odmocninou, který rozšíříme číslem r^2. Dostáváme tak zlomek

$$\frac{(r\bar{x}^{(1)}-r\bar{x})^2+(r\bar{x}^{(2)}-r\bar{x})^2+\ldots+(r\bar{x}^{(s)}-r\bar{x})^2}{r^2 s}. \tag{3}$$

Součin $r\bar{x}^{(i)}$ si zase můžeme představit jako součet některých čísel x_j, takže rozdíl $r\bar{x}^{(i)} - r\bar{x}$ lze převést na tvar

$$(x_a-\bar{x})+(x_b-\bar{x})+\ldots+(x_t+\bar{x}),$$

který se týká jednoho výběru. Čitatele zlomku (3) lze tedy vyjádřit jako součet, v němž jsou jednak sčítanci tvaru $(x_a-\bar{x})^2$, jednak sčítanci tvaru $2(x_a-\bar{x})(x_b-\bar{x})$ (při $a \neq b$). Kolikrát je zde sčítanec $(x_1-\bar{x})^2$? Stejná úvaha jako v předcházejícím příkladě nás vede k výsledku $\binom{N-1}{r-1}$. Také každý ze sčítanců

$$(x_2-\bar{x})^2, (x_3-\bar{x})^2, \ldots, (x_N-\bar{x})^2$$

má v čitateli zlomku (3) stejnou násobnost.

Kolikrát se v čitateli zlomku (3) vyskytuje sčítanec tvaru $2(x_1-\bar{x})(x_2-\bar{x})$? Jsme tu vedeni ke kombinačnímu číslu $\binom{N-2}{r-2}$, které se ovšem týká i dalších sčítanců uvedeného tvaru.

Čitatel zlomku (2) je tedy součtem dvou výrazů; první má tvar

$$A=\binom{N-1}{r-1}\cdot[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2],$$

druhý má tvar

$$B=\binom{N-2}{r-2}\cdot[2(x_1-\bar{x})(x_2-\bar{x})+\ldots+2(x_{N-1}-\bar{x})(x_N-\bar{x})].$$

Víme, že platí

$$\binom{N-1}{r-1}=\binom{N-2}{r-2}+\binom{N-2}{r-1},$$

takže v součtu $A+B$ si můžeme nejprve všímat jen těch sčítanců, jež mají u sebe jako koeficient kombinační číslo $\binom{N-2}{r-2}$. Je vidět, že součet těchto sčítanců lze vyjádřit jako

$$[(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_N-\bar{x})]^2,$$

což podle vzorce (1) je zřejmě rovno nule. Součet $A+B$ v čitateli zlomku (3) se tedy převádí na tvar

$$\binom{N-2}{r-1}.[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2].$$

Podle definice směrodatné odchylky lze tento výsledek vyjádřit jako

$$\binom{N-2}{r-1}.N\sigma^2=\frac{(N-2)!}{(r-1)!(N-r-1)!}.N\sigma^2.$$

Upravujme ještě jmenovatele zlomku (3). Máme

$$r^2s=r^2\binom{N}{r}=r^2\frac{N!}{r!(N-r)!}=r\frac{N!}{(r-1)!(N-r)!}.$$

Zlomek (3) se tedy rovná

$$\frac{N-r}{r(N-1)}\sigma^2.$$

Odpověď. Směrodatnou odchylku všech výběrových aritmetických průměrů určuje vzorec

$$\bar{\sigma}=\sigma\sqrt{\frac{N-r}{r(N-1)}}.$$

Výsledek, ke kterému jsme právě dospěli, se zdá na první pohled trochu složitý, avšak pro praktické případy jej můžeme ještě zjednodušit. Obvykle bývá totiž číslo N velmi veliké a číslo r poměrně malé. V takovém případě můžeme ještě upravovat zlomek, který se vyskytuje ve výsledném vzorci pro $\bar{\sigma}$. Platí

$$\frac{N-r}{r(N-1)}=\frac{1-\frac{r}{N}}{r-\frac{r}{N}},$$

přičemž zlomek $\frac{r}{N}$ je „poměrně malý". V praktických příkladech můžeme dokonce předpokládat, že se rovná nule; tím dostáváme přibližnou rovnost

$$\frac{N-r}{r(N-1)} \doteq \frac{1}{r}$$

a pro směrodatnou odchylku přibližný vzorec

$$\bar{\sigma} \doteq \frac{\sigma}{\sqrt{r}}.$$

Zamysleme se ještě nad tím, jaký význam má výsledek dosažený v příkladě 35. Zjistili jsme, že se výběrové aritmetické průměry „hromadí" kolem průměru $\bar{x}$ mnohem více než původně uvažovaná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Směrodatná odchylka nás poučuje o tom, jak jsou čísla na číselné ose roztroušena. Bereme-li z velkého základního souboru např. výběry rozsahu 25, pak směrodatná odchylka $\bar{\sigma}$ je zhruba pětinou směrodatné odchylky σ. Abychom si mohli lépe představit, jak se výběrové průměry hromadí kolem $\bar{x}$, vypočteme si ještě jeden numerický příklad. V něm jsme zvolili jen malá čísla, protože při větších rozsazích a větších číslech x_j velmi rychle vzrůstají technické potíže s numerickým výpočtem.

Příklad 36. V základním souboru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sestrojte všechny výběry rozsahu 3. Vypočtěte výběrové aritmetické průměry a jejich směrodatnou odchylku. Znázorněte výsledek graficky.

Řešení. Víme již (viz str. 52), že $\bar{x}=3$, $\sigma=\sqrt{2} \doteq 1{,}41$. Další výpočet můžeme upravit do tabulky

výběr	$\bar{x}^{(i)}$	$\bar{x}^{(i)}-\bar{x}$	$(\bar{x}^{(i)}-\bar{x})^2$
1, 2, 3	2	-1	1
1, 2, 4	$2\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
1, 2, 5	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1, 3, 4	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1, 3, 5	3	0	0
1, 4, 5	$3\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
2, 3, 4	3	0	0
2, 3, 5	$3\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
2, 4, 5	$3\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
3, 4, 5	4	1	1

Sečteme čísla v posledním sloupci a dostáváme výsledek $3\frac{1}{3}$. Protože je celkem 10 výběrů, dělíme

$$3\frac{1}{3} : 10 = \frac{1}{3}$$

a pak odmocníme. Je tedy

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \doteq 0{,}58.$$

To je ve shodě se vzorcem pro $\bar{\sigma}$, který jsme odvodili výše. Podle něho je totiž

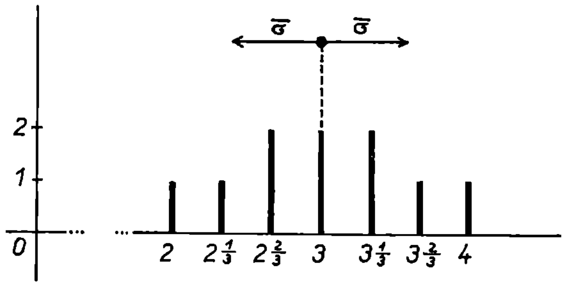
$$\bar{\sigma} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{5-3}{3 \cdot (5-1)}} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Přibližný vzorec pro $\overline{\sigma}$ zde ovšem nemůžeme uplatnit, neboť je

$$\frac{r}{N} = \frac{3}{5} = 0{,}6,$$

což nelze považovat za číslo „skoro rovné" nule.

Ještě ke grafickému znázornění. Protože se zde některé výběrové průměry $\bar{x}^{(i)}$ opakují, použijeme ke znázornění tzv. sloupkového diagramu. Na ose číselné u čísla $\bar{x}^{(i)}$ je připojen sloupek, jehož délka uvádí, kolikrát se toto číslo v úvaze vyskytuje. Výsledek je vidět na obr. 6, kde



Obr. 6.

jsme také znázornili směrodatnou odchylku $\overline{\sigma}$. Srovnejte tento sloupkový diagram s obr. 5, který se týká základního souboru.*)

*) Příklady, které jsme zde řešili, patří do oddílu matematické statistiky, nazývaného teorie výběrových šetření (z konečných souborů).

Úlohy

23. Graficky znázorněte přibližný vzorec

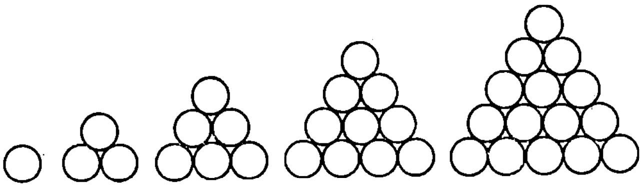
$$\bar{\sigma} \doteq \frac{\sigma}{\sqrt{r}};$$

přitom volte $\sigma = 10$, na vodorovnou osu nanášejte r a na svislou $\bar{\sigma}$.

6. kapitola

TROJÚHELNÍKOVÁ ČÍSLA

Mezi kombinačními čísly byla v poslední době studována zejména čísla tvaru $\binom{n}{2}$, která se při $n \geqq 2$ nazývají *čísly trojúhelníkovými*. Název je odvozen z toho, že číslo $\binom{n}{2}$ udává (zhruba řečeno) počet shodných kružnic, jež lze umístit v trojúhelníkovém schematu tak, jak to pro $n = 2$,



Obr. 7.

3, 4, 5, 6 ukazuje obr. 7. Pojem trojúhelníkového čísla se vyskytuje již r. 1762 u E. de Joncourta, ale teprve v posledních desetiletích studovali vlastnosti trojúhelníkových čísel zevrubněji někteří matematikové, a to zvláště autoři polští (A. Mąkowski, A. Schinzel, W. Sierpiński*), K. Zarankiewicz aj.). Ukážeme si zde též něco z této problematiky.

*) W. Sierpiński, vicepresident Polské akademie věd a profesor varšavské university, je dobře znám i u nás. Je čestným doktorem Karlovy university v Praze a zahraničním členem Československé akademie věd.

Nejprve uvedeme tabulku trojúhelníkových čísel pro několik hodnot n.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\binom{n}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78

Také obrázek nám přehledně ukáže, jak vzrůstají trojúhelníková čísla, vzrůstá-li číslo n. Je to vidět na obr. 8, kde prvním sedmi hodnotám z naší tabulky odpovídá 7 bodů označených malými kroužky. Vzpomeneme-li na to, co jsme se učili v nauce o funkcích, můžeme v obr. 8 sestrojit i graf funkce

$$y=\frac{1}{2}x(x-1);$$

grafem této funkce je parabola, jejíž část tu naznačuje tečkovaná čára. Nyní však už přistoupíme k příkladům.

Příklad 37. Čísla 6, 66 a 666 jsou trojúhelníková, avšak číslo 6666 není trojúhelníkové. Dokažte.

Řešení. Že čísla 6 a 66 jsou trojúhelníková, je nám už známo, neboť je $\binom{4}{2}=6$ a $\binom{12}{2}=66$. Zabývejme se tedy číslem 666 a ptejme se, zda pro některé přirozené číslo n platí $\binom{n}{2}=666$. Tento vztah vede k rovnici

$$n(n-1)=1332,$$

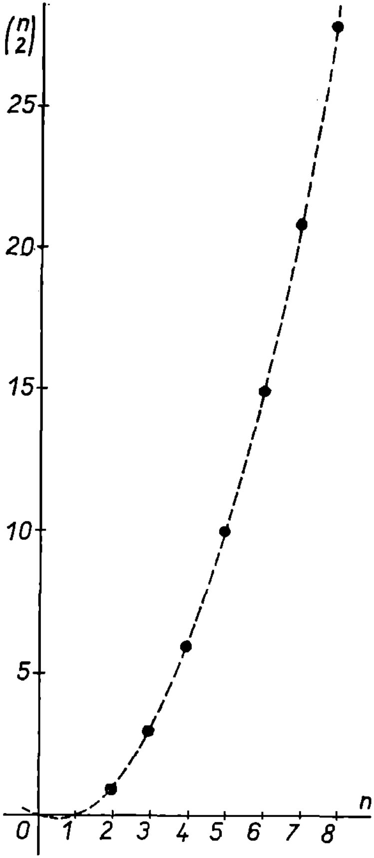
což po malé úpravě dává $n^2-n-1332=0$. Tato kvadratická rovnice má kořeny $n=37$ a $n=-36$, z nichž druhý nevyhovuje požadavkům úlohy.

Kořen $n=37$ vyhovuje naší úloze.

Konečně zbývá úvaha o čísle 6666. Zde docházíme ke kvadratické rovnici

$$n^2 - n - 13332 = 0,$$

která má diskriminant $D = 53329$. Podle tabulek se můžeme přesvědčit, že neexistuje žádné přirozené číslo r, aby bylo $r^2 = 53329$. Tento výsledek znamená, že uvažované kvadratické rovnici nevyhovuje žádné přirozené číslo n, jinými slovy, že číslo 6666 není trojúhelníkové.



Obr. 8.

Příklad, který jsme probrali, nám znovu ukazuje, jak důležitý je matematický důkaz nějakého tvrzení. Z případů čísel 6, 66 a 666 bychom totiž mohli dojít k ukvapené domněnce, že v desítkové soustavě každé číslo psané šestkami, je trojúhelníkové. Toto tvrzení je ovšem nesprávné. V dalším příkladě se setkáme s obdobným tvrzením o trojúhelníkových číslech, psaných číslicemi 2 a 1; tam však se obdobná domněnka ukáže správnou.

Příklad 38. V posloupnosti

$$21, 2211, 222111, 22221111, \ldots$$

je každý člen číslo trojúhelníkové. Dokažte.

Řešení. Čísla v naší posloupnosti jsou psána číslicemi 2 a 1, přičemž v každém členu se nejprve napíše několikrát číslice 2 a pak se doplní ve stejném počtu číslice 1. Člen n-tý můžeme tedy schematicky vyjádřit ve tvaru

$$a_n = \underbrace{222\ldots2}_{n\text{-krát}}\ \underbrace{111\ldots1}_{n\text{-krát}},$$

což v jiném tvaru dává

$$a_n = (2.10^{2n-1} + 2.10^{2n-2} + \ldots + 2.10^{n+1} + 2.10^n) +$$
$$+ (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1).$$

Z mnohočlenu v první závorce vytkneme 2.10^n a v takto získaném výrazu provedeme další úpravu, jež vede k výsledku

$$a_n = (2.10^n + 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1).$$

Podle známého vzorce pro částečný součet geometrické posloupnosti dostáváme další úpravu

$$a_n = \frac{1}{9}(2.10^n + 1)(10^n - 1).$$

Nyní jsme člen a_n vyjádřili ve tvaru, který nám umožní vyšetřovat, zda je toto číslo trojúhelníkové. Ptejme se, zda se a_n dá vyjádřit ve tvaru $\binom{x}{2}$. To vede k rovnici

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{9}(2.10^n + 1)\ (10^n - 1),$$

která po odstranění zlomků a malé úpravě dává

$$9x^2 - 9x - 2.(2.10^n + 1)\ (10^n - 1) = 0.$$

Její diskriminant je $D = 9^2 + 8.9.(2.10^n + 1)(10^n - 1)$, což po úpravě dává

$$D=9(16.10^{2n}-8.10^n+1)=3^2.(4.10^n-1)^2.$$

Pro kořeny kvadratické rovnice tedy nacházíme

$$x=\frac{1}{3}(2.10^n+1), \quad \text{resp. } x=\frac{2}{3}(1-10^n).$$

Druhý kořen můžeme hned zamítnout, neboť pro každé přirozené číslo n je to číslo záporné. Pohlédneme-li na kořen první, mohlo by se zdát, že ani ten nebude vyhovovat naší úloze, neboť je tu jmenovatel 3. Číslo 2.10^n+1 je však podle známého znaku dělitelnosti dělitelné třemi (pro každé přirozené číslo n) a proto první kořen je číslo přirozené. Je to výsledek, který vyhovuje naší úloze a je tím dokázáno, že v uvedené posloupnosti jsou všechny členy čísla trojúhelníková.

V dalším příkladu bude dáno přirozené číslo, které budeme vyjadřovat jako součet několika čísel trojúhelníkových. Tato otázka má vždycky smysl, neboť číslo 1 je trojúhelníkové a lze tedy libovolné přirozené číslo n triviálním způsobem vyjádřit jako součet n trojúhelníkových čísel. Nás ovšem budou zajímat vyjádření, jež nejsou zcela triviální.

Příklad 39. Vyjádřete číslo 80 jako součet co nejmenšího počtu trojúhelníkových čísel.

Řešení. S trochou početní námahy (a s využitím tabulky na str. 61) najdeme, že platí $80 = 10 + 15 + 55$, přičemž všechny tři sčítance jsou čísla trojúhelníková. Dané číslo lze tedy vyjádřit jako součet tří trojúhelníkových čísel. Je možno najít vyjádření s menším počtem sčítanců? Několik pokusů nám ukáže, že 80 nelze vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel. Nemůžeme se ovšem spokojit jen nezdarem nahodilých pokusů, a proto toto tvrzení dokážeme. Důkaz spočívá jen v systematickém probrání všech možností.

Dejme tomu, že platí $80 = a + b$, kde a, b jsou vhodná trojúhelníková čísla. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $a \leqq b$. Pak máme odhad

$$a+a \leqq a+b=80,$$

čili $2a \leqq 80$. Pro a tedy vychází $a \leqq 40$. Nyní vyhledáme tabulku na str. 61 a zjistíme, že pro a přicházejí v úvahu hodnoty*) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 a 36. Pro druhé trojúhelníkové číslo b máme vztah $b = 80 - a$, což pro nalezených osm hodnot dává po řadě výsledky 79, 77, 74, 70, 65, 59, 52 a 44. Žádné z těchto čísel však není trojúhelníkové, jak nám ukáže opět naše tabulka. Nebyl tedy správný náš předpoklad, že číslo 80 lze vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel.

Tím jsme však s řešením již hotovi; číslo 80 není trojúhelníkové, nelze je vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel a vztah $80 = 10 + 15 + 55$ ukazuje, že je lze vyjádřit jako součet tří trojúhelníkových čísel. To je tedy skutečně vyjádření s nejmenším počtem sčítanců.

V předcházejícím příkladě jsme nezkoumali otázku, zda vyjádření čísla 80 součtem tří trojúhelníkových čísel je jednoznačné (nehledíme-li na pořadí sčítanců) nebo zda existuje více takových vyjádření. Tomu se věnujeme v další úvaze.

Příklad 40. Vyšetřete, kolika způsoby je možno vyjádřit číslo 80 jako součet tří trojúhelníkových čísel.

*) Zde se trochu opíráme o názor. Není snad předem jasné, zda pro některá velká čísla n, jež v naší tabulce nejsou uvedena, neplatí znovu $\binom{n}{2} \leqq 40$. Tato možnost je však vyloučena a můžeme to i dokázat. Tvrzení je jistě známé čtenářům, kteří znají průběh tečkované paraboly z obr. 8, nebo je můžeme odvodit snadnou úvahou o nerovnostech.

Řešení. Pišme $80 = a + b + c$, kde a, b, c značí vhodná trojúhelníková čísla. Jejich označení je v naší moci, takže můžeme mezi nimi předpokládat vztah $a \leqq b \leqq c$. Odtud plyne $3a \leqq 80$, čili

$$a \leqq 26\frac{2}{3}.$$

Podle tabulky uvedené na str. 61 přicházejí pro trojúhelníkové číslo a tyto možnosti: 1, 3, 6, 10, 15 a 21. Probereme každou z nich zvlášť.

Pro $a = 1$ se naše původní rovnice převede na tvar $79 = b + c$. Protože je $b \leqq c$, plyne odtud $2b \leqq 79$ čili $b \leqq 39{,}5$. Pro b tedy přicházejí v úvahu možnosti 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 a 36, jimž odpovídají tato čísla c: 78, 76, 73, 69, 64, 58, 51 a 43. Jedině číslo 78 je trojúhelníkové a našli jsme tedy jedno z možných vyjádření, totiž $80 = 1 + 1 + 78$.

Pro $a = 3$ dostáváme rovnici $77 = b + c$, což vede k nerovnosti $2b \leqq 77$ a dále k odhadu $3 \leqq b \leqq 38{,}5$. Pro b máme tedy možnosti 3, 6, 10, 15, 21, 28 a 36, jimž odpovídají čísla $c = 74, 71, 67, 62, 56, 49$ a 41. Žádné z těchto čísel c není trojúhelníkové, takže jsme v tomto případě nenašli žádné vyjádření čísla 80.

Pro $a = 6$ dostáváme rovnici $74 = b + c$, což dává $2b \leqq 74$, čili $6 \leqq b \leqq 37$. Trojúhelníkovým číslům $b = 6$, 10, 15, 21, 28 a 36 odpovídají čísla $c = 68, 64, 59, 53, 46$ a 38. Ani zde nevyšlo žádné číslo trojúhelníkové.

Pro $a = 10$ máme $70 = b + c$, čili $2b \leqq 70$ a dále $10 \leqq b \leqq 35$. Číslům $b = 10$, 15, 21 a 28 odpovídají $c = 60, 55, 49$ a 42, z nichž jen číslo 55 je trojúhelníkové. Tím jsme našli vyjádření $80 = 10 + 15 + 55$, které je nám známo již z předcházejícího příkladu.

Pro $a = 15$ vychází rovnice $65 = b + c$, což vede k nerovnosti $2b \leqq 65$ a dále $15 \leqq b \leqq 32{,}5$. Číslům $b = 15$, 21 a 28 odpovídají $c = 50$, 44 a 37, z nichž žádné není trojúhelníkové.

Konečně pro $a = 21$ máme $59 = b + c$, čili $2b \leqq 59$, což dává odhad $21 \leqq b \leqq 29{,}5$. Číslům $b = 21$ a 28 odpovídají $c = 38$ a 31, takže ani zde nevychází žádné vyjádření čísla 80.

Odpověď. Nehledíme-li na pořadí sčítanců, lze číslo 80 vyjádřit dvěma způsoby, totiž $80 = 1 + 1 + 78$ a $80 = 10 + 15 + 55$. Kdybychom přihlíželi k pořadí sčítanců, měli bychom celkem devět možností.

V dalším příkladě se budeme zabývat vzorcem

$$a_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}.$$

Snadný výpočet ukazuje, že $a_1 = 1$. Také pro $n = 2$ a $n = 3$ máme jednoduché výsledky:

$$a_2 = \frac{9+12\sqrt{2}+8-(9-12\sqrt{2}+8)}{4\sqrt{2}} = 6,$$

$$a_3 = \frac{(27+54\sqrt{2}+72+16\sqrt{2}) - (27-54\sqrt{2}+72-16\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = 35.$$

Už tyto tři případy ukazují, že čísla a_n jsou přirozená (ačkoliv jejich vyjádření zlomkem a odmocninou je dosti složité). Toto podezření je celkem správné a plyne z binomické věty; v příkladě 41 si o číslech a_n dokážeme ještě více.

Příklad 41. Pro každé přirozené číslo n je číslo a_n^2 trojúhelníkové. Dokažte.

Řešení. Budeme se zabývat rovnicí

$$\binom{x}{2} = a_n^2,$$

která přejde na tvar

$$x^2-x-2a_n^2=0.$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je číslo $D = 1 + 8a_n^2$. Budeme se nyní zabývat úpravou čísla D; zřejmě chceme ukázat, že číslo D je druhou mocninou některého přirozeného čísla. Platí

$$D=1+8\cdot\frac{(3+2\sqrt{2})^{2n}-2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^{2n}}{32}.$$

Zkrátíme osmi, uvedeme na společného jmenovatele a dostáváme

$$D=\frac{4+(3+2\sqrt{2})^{2n}-2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^{2n}}{4}.$$

Místo čísla 4 můžeme do čitatele psát součin $4(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n$, jak nás přesvědčí výpočet. V čitateli zlomku máme už výraz $-2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n$, takže po sloučení dostáváme

$$D=\frac{(3+2\sqrt{2})^{2n}+2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^{2n}}{4}.$$

Čitatele můžeme upravovat podle vzorce $u^2+2uv+v^2=(u+v)^2$, přičemž $u=(3+2\sqrt{2})^n$, $v=(3-2\sqrt{2})^n$. Vychází

$$D=\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}\right)^2.$$

Vraťme se k výchozí kvadratické rovnici. Její kořeny jsou

$$x=\frac{1+\sqrt{D}}{2},\quad \text{resp. } x=\frac{1-\sqrt{D}}{2}.$$

Druhou možnost hned zamítneme, neboť vede k zápornému číslu. Úpravou prvního vzorce dostáváme

$$x=\frac{2+(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{4}.$$

Tento výsledek se dá ještě zjednodušit, použijeme-li vyjádření

$$3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2,\quad 3-2\sqrt{2}=(-1+\sqrt{2})^2.$$

Číslo 2 lze napsat jako $2(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})$ nebo též $2(1+\sqrt{2})^n(-1+\sqrt{2})^n$. Pro číslo x tedy vychází vyjádření

$$x=\frac{(1+\sqrt{2})^{2n}+2(1+\sqrt{2})^n(-1+\sqrt{2})^n+(-1+\sqrt{2})^{2n}}{4}$$

čili

$$x=\left(\frac{(1+\sqrt{2})^n+(-1+\sqrt{2})^n}{2}\right)^2.$$

Musíme se ještě přesvědčit o tom, že toto číslo x je přirozené. K tomuto vyšetřování nám poslouží binomická věta, podle níž platí

$$(1+\sqrt{2})^n=\binom{n}{0}.1^n+\binom{n}{1}.1^{n-1}.\sqrt{2}+\binom{n}{2}.1^{n-2}.2+\ldots+$$
$$+\binom{n}{n}.(\sqrt{2})^n,$$

$$(-1+\sqrt{2})^n=\binom{n}{0}.(-1)^n+\binom{n}{1}(-1)^{n-1}.\sqrt{2}+\binom{n}{2}(-1)^{n-2}.2+$$
$$+\ldots+\binom{n}{n}.(\sqrt{2})^n.$$

Je-li n číslo sudé, pak sečtením obou výrazů na pravých stranách se zruší všechny členy tvaru $m\sqrt{2}$ (m celé) a součet je tedy celé číslo. Dokonce vidíme, že je to číslo sudé, takže po dělení dvěma vyjde rovněž číslo celé.

Umocníme-li ještě na druhou, vychází číslo x, jež je tedy přirozené.

Je-li n číslo liché, pak naopak zůstávají všechny sčítance tvaru $m\sqrt{2}$ a ostatní členy se zruší. Můžeme vytknout číslo $\sqrt{2}$ a koeficient, který tak dostáváme, je sudý. Dělíme dvěma a dostáváme zase číslo tvaru $m\sqrt{2}$. Zbývá umocnit na druhou a výsledek $2m^2$ je opět číslo přirozené. Rozbor ukázal, že x je vždycky přirozené číslo. Ponecháváme čtenáři, aby si rozmyslel, že je $x > 1$ pro každé přirozené číslo n. Příklad je tím rozřešen.

Co plyne z probraného příkladu? Protože čísel a_n je nekonečně mnoho*), můžeme vyslovit toto tvrzení: Existuje nekonečně mnoho trojúhelníkových čísel, z nichž každé je rovno druhé mocnině některého přirozeného čísla.

Úlohy

24. Rozhodněte, zda v posloupnosti 55, 5050, 500500, 50005000, ... jsou všechny členy čísla trojúhelníková.

25. Vyjádřete číslo 60 jako součin dvou trojúhelníkových čísel.

26. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel, která nemůžeme vyjádřit jako součin několika čísel trojúhelníkových.

27. Najděte příklad přirozeného čísla, které můžeme alespoň dvěma různými způsoby vyjádřit jako součin několika čísel trojúhelníkových větších než 1.

28. Jsou dána dvě přirozená čísla $m < n$. Potom platí $a_m < a_n$ (viz vzorec na str. 67). Dokažte.

*) Otázce, že různým číslům n odpovídají různá čísla a_n, je věnována též úloha 28 na této stránce.

29. Rozhodněte, zda rovnice

$$\binom{x}{2}+\binom{y}{2}=\binom{z}{2}$$

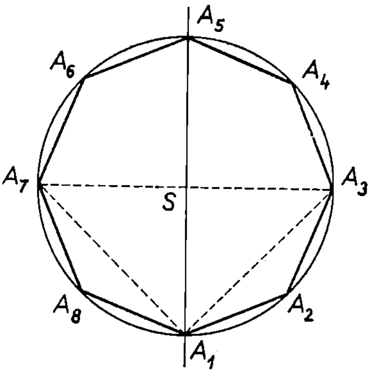
má konečně nebo nekonečně mnoho řešení v přirozených číslech x, y, z.

7. kapitola

RŮZNÉ

V závěru této knížky uvedeme několik příkladů s kombinatorickým námětem. Budou to otázky, kde se zase nevystačí jen s mechanickým použitím hotového vzorce, nýbrž bude třeba provést určitou matematickou úvahu. Náš první příklad je z planimetrie.

Příklad 42. V rovině je dán pravidelný n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (kde n je sudé). Z n vrcholů $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ vyberte tři tak, aby tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníka. Kolika způsoby je to možné?



Obr. 9.

Řešení. Odpovězme nejprve na otázku, kolik zde existuje rovnoramenných trojúhelníků s hlavním vrcholem v bodě A_1. Označme S střed kružnice opsané danému n-úhelníku a sestrojme přímku A_1S*). Z geometrie víme, že tato přímka prochází ještě jedním vrcholem našeho n-úhelníka (vrcholem, jehož index je $\frac{n}{2}+1$). Přímka A_1S rozděluje rovinu na dvě poloroviny; zvolme si z nich tu, která obsahuje uvnitř bod A_2. Uvnitř této poloroviny leží $\frac{1}{2}(n-2)$ vrcholů našeho n-úhelníka a číslo $\frac{1}{2}(n-2)$ znamená zřejmě i počet rovnoramenných trojúhelníků s hlavním vrcholem A_1. Mezi těmito trojúhelníky může ovšem existovat i trojúhelník rovnostranný, neboť i tento trojúhelník zahrnujeme pod pojem trojúhelníka rovnoramenného. Kdy může vzniknout rovnostranný trojúhelník? Zřejmě je to možné právě tehdy, je-li číslo n dělitelné třemi. Budeme tedy rozlišovat dva případy.

Je-li n dělitelné třemi, pak počet rovnoramenných trojúhelníků, jež nejsou rovnostranné a mají hlavní vrchol A_1, je

$$\frac{1}{2}(n-2)-1=\frac{1}{2}(n-4).$$

Stejný počet ovšem dostáváme, volíme-li za hlavní vrchol kterýkoli z dalších bodů $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Součin

$$n\,.\,\frac{1}{2}(n-4)$$

udává tedy počet všech rovnoramenných trojúhelníků, jež nejsou rovnostranné. Počet rovnostranných trojúhelníků

*) Na obr. 9 jsme znázornili případ $n=8$. Zde je též tečkovaně narýsován jeden z rovnoramenných trojúhelníků, o nichž jedná příklad 42 (je to trojúhelník $A_1A_3A_7$).

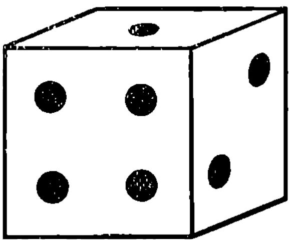
však určíme snadno — je totiž roven číslu $\frac{n}{3}$. Je-li n dělitelné třemi, máme tedy celkový výsledek

$$\frac{n}{2}(n-4)+\frac{n}{3}=\frac{n}{6}(3n-10).$$

Zbývá ještě případ, kdy n není dělitelné třemi. Pak nelze sestrojit žádný rovnostranný trojúhelník a číslo $\frac{n}{2}(n-2)$ znamená tedy hledaný počet rovnoramenných trojúhelníků.

Odpověď. Je-li n dělitelné třemi, pak hledaný počet rovnoramenných trojúhelníků je $\frac{n}{6}(3n-10)$; není-li n dělitelné třemi, je hledaný počet $\frac{n}{2}(n-2)$.

Jistě znáte kostku, kterou se hrají různé společenské hry (viz obr. 10). Každá stěna kostky je označena některým z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tím, že je na ní uveden příslušný počet bodů (ok). V některých kombinatorických úlohách, jež vedou k počtu pravděpodobnosti, se vyskytují též otázky spojené s jednou nebo několika takovými hracími kostkami.



Obr. 10.

Uvedeme nejprve jednu velmi jednoduchou variantu takového příkladu.

Příklad 43. Máme dvě hrací kostky — červenou a modrou. Kolika způsoby můžeme při hodu těmito kostkami dosáhnout součtu 6?

Řešení. Součet 6 se může vyskytnout např. tak, že na červené kostce padne 1 a na modré 5. Uvědomte si, že tento případ musíme odlišovat od případu, kdy na červené máme 5 a na modré 1.

Celkem nám dá odpověď tato tabulka:

červená	1	2	3	4	5
modrá	5	4	3	2	1

Součet 6 může padnout pěti způsoby.

Po přípravné úvaze z předcházejícího příkladu se nyní obrátíme k otázce složitější.

Příklad 44. Máme tři hrací kostky — červenou, modrou a bílou. Při hodu těmito kostkami mohou padnout součty 3, 4, 5, ..., 17, 18. Vyšetřete, kolika způsoby lze každý z těchto součtů uskutečnit.

Řešení. Barva kostek nás zase upozorňuje na to, že je třeba dbát na pořadí, ve kterém uvažovaný součet padl.

Součet 3 můžeme uskutečnit jediným způsobem — na každé kostce padne 1. Součet 4 lze uskutečnit třemi způsoby — číslo 2 padne na jedné kostce a na ostatních dvou jsou jedničky. Postupujeme-li tímto způsobem dále, dostáváme počet možností pro každý z uvažovaných součtů.

Přehledně je výsledek takového vyšetřování patrný z této tabulky:

součet	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
počet způsobů	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Bývá zvykem, že se taková tabulka znázorní i graficky. Na obr. 11 vidíme sloupkový diagram, který odpovídá naší úloze o třech hracích kostkách. Všimněte si, že je tento diagram „souměrný" podle svislé přímky, kterou jsme v obr. 11 narýsovali čárkovaně.

Našli jsme tedy odpověď na otázku o třech hracích kostkách. Zůstaňme však ještě u této problematiky a ukažme si jiný způsob, kterým můžeme celý výpočet zformalizovat a tím si jej podstatně usnadnit. Uvažujme pomocný šestičlen

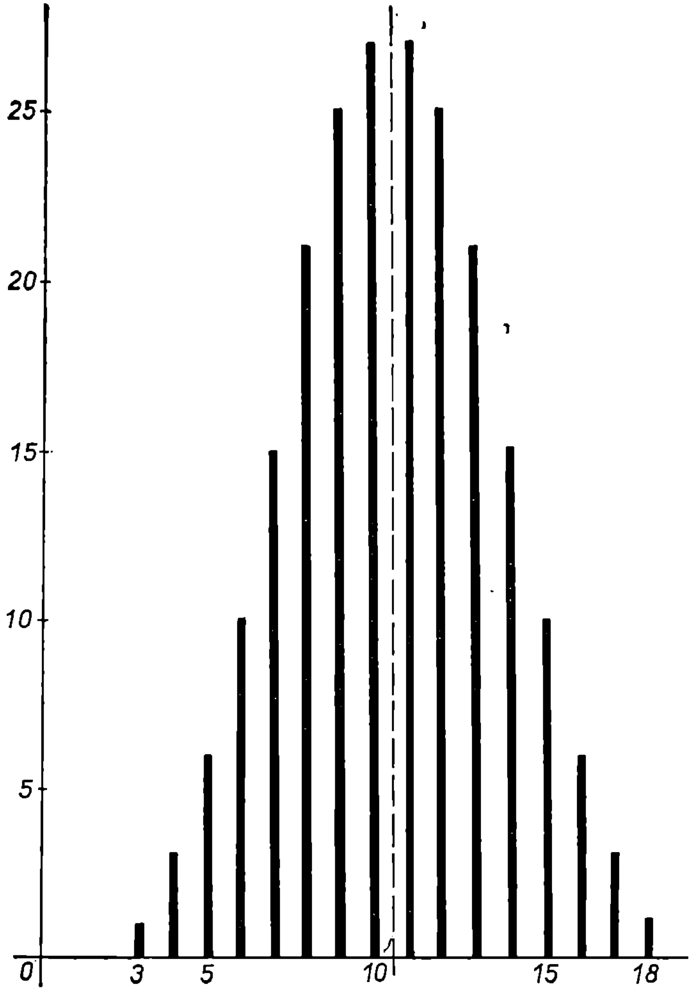
$$A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

a vytvořme mocninu A^3. To je mnohočlen v proměnné x a má tvar

$$A^3 = s_3x^3 + s_4x^4 + s_5x^5 + \ldots + s_{17}x^{17} + s_{18}x^{18}.$$

Jakou úlohu zde mají koeficienty $s_3, s_4, s_5, \ldots, s_{17}, s_{18}$? Odpovězme příkladem. Napíšeme-li A^3 jako součin $A.A.A$, pak např. koeficient s_6 dostaneme takto: Mocninu x^6 lze vytvořit tak, že v prvním činiteli A vybereme vhodný člen x^a, v druhém A člen x^b a ve třetím A člen x^c tak, že $a + b + c = 6$. Číslo s_6 tedy určuje počet všech způsobů, jimiž tento výběr můžeme provést. Představíme-li si nyní, že první činitel A odpovídá kostce červené, druhý modré a třetí bílé, plyne odtud okamžitě, že s_6 značí počet způsobů, jimiž na našich třech kostkách lze vytvořit součet 6.

Nyní k technickému použití právě popsané skutečnosti. Abychom určili všechna čísla s_i, zabývejme se čistě aritme-



Obr. 11.

tickou úlohou — totiž umocňováním našeho šestičlenu na třetí. Platí

$$
\begin{aligned}
A^3 &= [(x+x^2+x^3)+x^3(x+x^2+x^3)]^3 = \\
&= (x+x^2+x^3)^3(1+x^3)^3 = \\
&= [x^3+3x^2(x^2+x^3)+3x(x^2+x^3)^2+(x^2+x^3)^3](1+x^3)^3 = \\
&= (x^3+3x^4+3x^5+3x^5+6x^6+3x^7+x^6+3x^7+3x^8+ \\
&\qquad +x^9)(1+x^3)^3 = \\
&= (x^3+3x^4+6x^5+7x^6+6x^7+3x^8+x^9)(1+3x^3+ \\
&\qquad +3x^6+x^9) = \\
&= x^3+3x^4+6x^5+10x^6+15x^7+21x^8+25x^9+27x^{10}+ \\
&+27x^{11}+25x^{12}+21x^{13}+15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}.
\end{aligned}
$$

Je vidět, že koeficienty získaného mnohočlenu jsou skutečně čísla, která jsou nám už známa z předcházejícího řešení úlohy o třech hracích kostkách.

Do kombinatorické analýzy bývají často zahrnovány i poučky o tzv. latinských čtvercích. Je to problematika, která svým původem vlastně patří do matematiky rekreační a byla studována již mnoha autory. *Latinský čtverec* je čtvercové schéma (tvaru šachovnice z n^2 polí), přičemž na každé pole tohoto schématu je napsáno jedno z přirozených čísel 1, 2, 3, ... n. Přitom ani v žádném řádku ani v žádném sloupci se nesmí žádné číslo vyskytovat více než jedenkrát. Pro $n = 5$ zde uvádíme tento příklad latinského čtverce:*)

*) Uvědomte si, že v jednotlivých řádcích latinského čtverce jsou napsány některé permutace čísel 1, 2, 3, 4, 5.

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	4	5	1	2
4	5	2	3	1
5	3	1	2	4

Latinské čtverce sice svým původem patří do matematiky rekreační, avšak v dnešní době hrají velmi důležitou roli v matematické statistice, v tzv. plánování čili uspořádávání pokusů. Představme si např., že na pokusném poli, jež má 5 × 5 dílců podobně jako v našem schématu latinského čtverce, chceme pěstovat 5 odrůd určité plodiny (nebo při určité plodině vyzkoušet 5 druhů hnojení apod.), abychom zjistili jejich výnosnost. Odrůdy prostě označme čísly 1, 2, 3, 4, 5. Každou odrůdu máme vyzkoušet na stejném počtu dílců, tj. v našem případě na 5 dílcích. Kdybychom nyní třeba všechny dílce s odrůdou 1 umístili v levém horním rohu schématu a dostali třeba podstatně vyšší nebo nižší výnos, nevěděli bychom potom, zdali tento výsledek byl skutečně způsoben kvalitou odrůdy nebo pouze tím, že v této oblasti pokusného pole půda má odlišnou kvalitu nebo odlišnou vlhkost apod. Abychom tedy co možno vyloučili vliv nestejnorodosti půdy, musíme dílce s každou odrůdou „rozptýlit“ po celém poli. To právě lze učinit schématem latinského čtverce tak, že odrůdu 1 umístíme na dílcích označených číslem 1 v latinském čtverci atd.

Jedním latinským čtvercem se budeme ještě zabývat v dalším příkladě.

Příklad 45. Je dáno čtvercové schéma se 16 poli:

		3	
4			
	1		
			2

Zde jsou čtyři pole obsazena čísly, ostatní jsou volná. Napište do volných okének čísla 1, 2, 3, 4 tak, aby vznikl latinský čtverec.

Řešení. Všimněme si levého horního pole v daném schématu. Zde nemůže stát číslo 3 (neboť tím již je první řádek obsazen) ani číslo 4 (tím je obsazen první sloupec). Přicházejí tedy v úvahu čísla 1 a 2.

Napišme sem tedy číslo 1. Na konci prvního řádku přichází tedy v úvahu jen číslo 4 a tím dostává první řádek tvar 1, 2, 3, 4. Podobně první sloupec končí nutně číslem 3 a má tedy (ve směru shora dolů) tvar 1, 4, 2, 3. Dále si všimneme třeba sloupce posledního, kde nám zatím chybí dva údaje; zřejmě tento sloupec musí mít tvar 4, 1, 3, 2. Podobně lze postupovat ještě v dalších případech; dostáváme tak posléze tento latinský čtverec:

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Zbývá ještě probrat případ, kdy v levém horním rohu našeho schématu je číslo 2. Pak snadno najdeme třeba pro první řádek jedinou možnost 2, 4, 3, 1 a pro první sloupec rovněž 2, 4, 3, 1. I další konstrukce jsou zde jednoznačné a vedou k tomuto latinskému čtverci:

2	4	3	1
4	2	1	3
3	1	2	4
1	3	4	2

Je vidět, že daným podmínkám odpovídají dva latinské čtverce.

Úlohy

30. V rovině je dán pravidelný n-úhelník $A_1A_2A_3 \dots A_n$ (kde n je liché). Z n vrcholů $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ vyberte tři tak, aby tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníka. Kolika způsoby je to možné?

31. Kolika způsoby lze hodit čtyřmi kostkami součet 12?

VÝSLEDKY ÚLOH

1. Větší je číslo $500!.503!$.

2. a) Kdyby bylo $n!\,(n+3)! \leqq (n+1)!(n+2)!$, pak by po zkrácení vyšlo $n+3 \leqq n+1$ (spor).

b) Kdyby bylo $n!+(n+3)! \leqq (n+1)!$, pak by vyšlo $n^3+5n^2+7n+4 \leqq 0$ (spor).

3. Oba vzorce lze dokázat matematickou indukcí.

4. Je $7!.5!$ možností.

5. Je to možné $(n-1)!$ způsoby.

6. Nemůžeme.

7. Pro přirozené číslo $n>2$ položíme $x=n$, $y=n!-1$, $z=(n!)!-1$, $t=[(n!)!]!-1$. Pak je $u=[(n!)!]!$.

8. Vyhovuje jen $x=1$, $y=1$, $z=2$.

9. Nejmenší je $x=12$, jak se lze přesvědčit podle tabulek faktoriálů.

10. Nerovnost lze upravit na tvar $3n^2+15n-164<0$, čemuž vyhovují přirozená čísla $n \leqq 5$.

11. Ekvivalentními úpravami se nerovnost převede na tvar $mn \geqq 4$. Z toho je též patrné, že rovnost nastane jen pro $m=n=2$.

12. Vyjdeme ze vztahu

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k},$$

z něhož plyne

$$k.\binom{n}{k}=(k-1).\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k-1}.$$

Nyní vyšetříme, kdy je zlomek $\frac{n-k+1}{k-1}$ větší než 1, kdy se rovná číslu 1 a kdy je menší než toto číslo. Je-li n liché, pak z uvažovaných čísel dostaneme největší pro $k=\frac{n+1}{2}$.

Je-li n sudé, pak největší dostaneme pro $k=\frac{n}{2}$ a $k=\frac{n+2}{2}$.

13. Tři.

14. Celkem $\binom{64}{3} - 8.\binom{8}{3}$ způsoby.

15. Vznikne $\binom{n}{4}$ průsečíků.

16. Celkem $\binom{20}{3}$ rovin. Vnitřkem prochází $\binom{20}{3} - 12$ rovin.

17. Celkem $\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{2}$ čtyřstěnů.

18. a) $208+120\sqrt{3}$; b) $8-8i$.

19. Dvakrát použijte Bernoulliho nerovnost.

20. Lze počítat např. logaritmicky. Se čtyřmístnými tabulkami nemůžeme dosáhnout žádané přesnosti, proto použijeme tabulek pětimístných. Podle nich najdeme $0{,}43150 < \log e_{100} < 0{,}43250$ a proto $2{,}700 < e_{100} < 2{,}708$. Máme tedy zaručena dvě desetinná místa — totiž 2,70. Poznamenejme, že úlohu lze řešit též pomocí binomické věty.

21. Důkaz matematickou indukcí.

22. Čtyřmístné logaritmické tabulky a Stirlingův vzorec dávají $\log 300! \doteq 614{,}48$. Z toho lze soudit, že číslo 300! má v desítkové soustavě 615 míst.

23. Odpověď uvádí obr. 12.

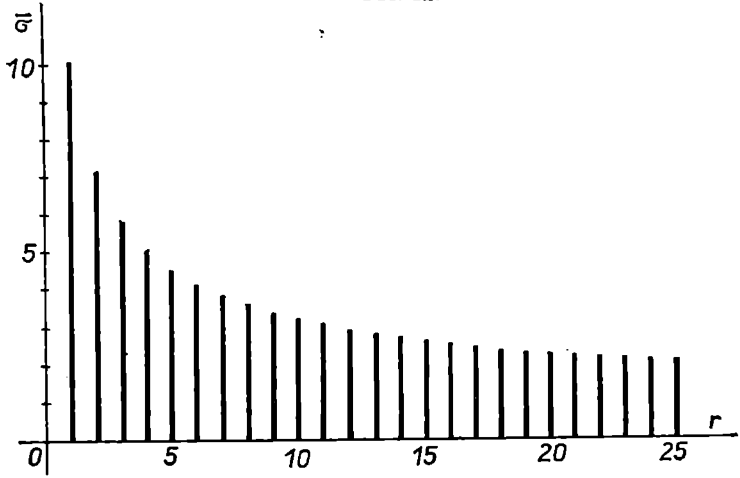
24. Všechny členy jsou čísla trojúhelníková.

25. Najdeme vyjádření $60=6.10$.

26. Úloze vyhovují např. všechna prvočísla větší než 3.

27. Najdeme $630=3.10.21=6.105$.

Obr. 12.



28. Je $3+2\sqrt{2}>1$, $0<3-2\sqrt{2}<1$. Proto je $(3+2\sqrt{2})^m<$ $<(3+2\sqrt{2})^n$ a současně $(3-2\sqrt{2})^m>(3-2\sqrt{2})^n$. Z toho již snadno plyne $a_m<a_n$.

29. Rovnice má nekonečně mnoho řešení, jak plyne např. ze vztahu

$$\binom{3k+1}{2}+\binom{4k+2}{2}=\binom{5k+2}{2},$$

který platí pro libovolné přirozené číslo k.

30. Je-li n dělitelné třemi, je hledaný počet $\frac{n}{6}(3n-7)$, v každém jiném případě máme $\frac{n}{2}(n-1)$ možností.

31. Celkem 125 způsoby.

Další doporučená literatura

V. Dupač — J. Hájek: Pravděpodobnost ve vědě a technice. Cesta k vědění, Praha 1962.

M. Hall: Комбинаторный анализ (překlad z angličtiny do ruštiny), Moskva 1963.

K. Hruša — E. Kraemer — J. Sedláček — J. Vyšín — R. Zelinka: Přehled elementární matematiky, 4. vydání, Praha 1964.

W. Sierpiński: Liczby trójkątne, Varšava 1962.

W. Sierpiński: Teoria liczb II, Varšava 1959.

OBSAH

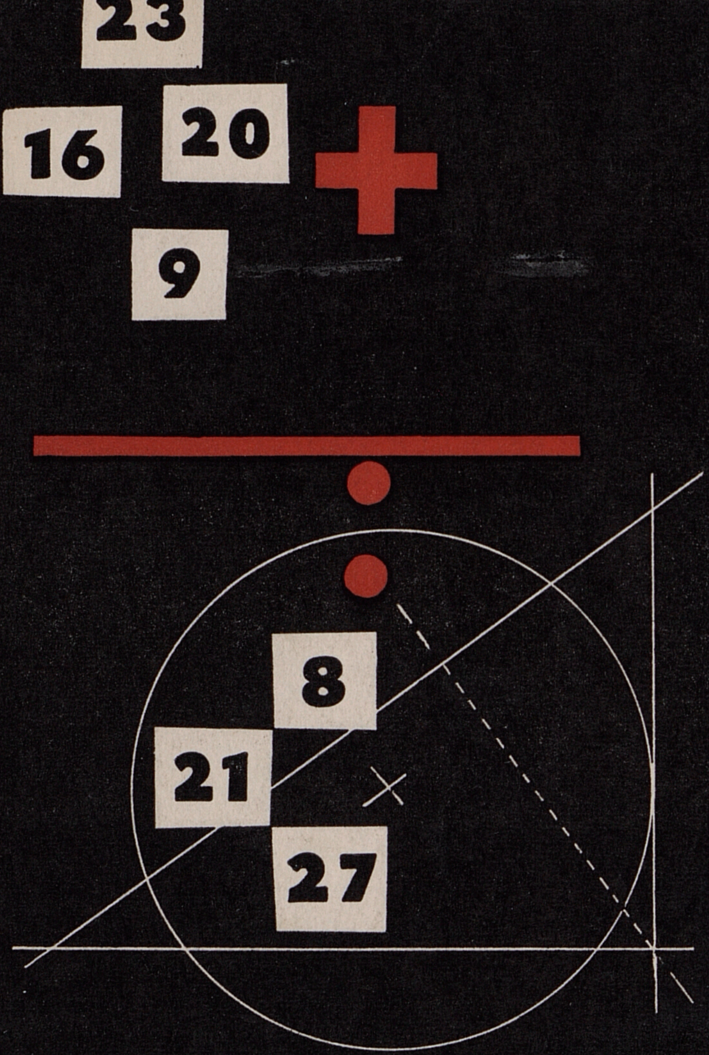
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK

faktoriály a kombinační čísla

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědná redaktorka Helena Benešová
Publikace číslo 2137
Edice Škola mladých matematiků, svazek 10
Vytiskl Mír, n. p., závod 2, provozovna 22,
Legerova 22, Praha 2
3,37 AA, 3,51 VA. D-04*40201
Náklad 6 700 výtisků. 1. vydání
88 stran. Praha 1964. 63/III-7

23-116-64 03-2 Cena brož. výt. Kčs 3,—



23-116-64
03-2