

Plochy stavebně-inženýrské praxe

František Kadeřávek (author): Plochy stavebně-inženýrské praxe.
(Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403311>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

František Kadeřdvek



PLOCHY

stavebně-inženýrské praxe

CESTA **J**ŮVĚDĚNÍ
SVAZEK 58
m f

PŘÍRODOVĚDECKÉ NAKLADATELSTVÍ

Dr František Kadeřávek:

PLOCHY

stavebně-inženýrské praxe

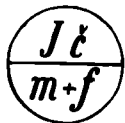
Stavitelství spolu s výtvarným uměním dalo už v dávných dobách vznik různým plochám, které teprve později byly geometricky studovány. Dokladem toho jsou různé egyptské, ve stříbře tepané nádoby, sloupy, vázy a římsy, které zdobily chrámy řecké, římské a také katedrály románské a gotické.

V nedávných dobách stavebně-inženýrská praxe konstruovala řadu ploch pro stavby kamenné, jako jsou na př. šikmé průchody, strombatury u mostů, různé plochy opěrných pilířů a okenních oblouků atd.

Moderní střízlivé stavitelství používající železobetonu přišlo s plochami skořepinovými, které mají mnoho předností. Uspokojí se při nich stavební materiál, jsou estetické, vynikají velmi dobrým a příjemným osvětlením, takže jsou-li střešními nebo stropními plochami továr-

Dr FRANTIŠEK KADEŘÁVEK

PLOCHY
stavebně-inženýrské
praxe



PŘÍRODOVĚDECKÉ NAKLADATELSTVÍ

Vydala

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

Vydáno v roce 1950 na paměť prvních prací z deskriptivní geometrie, které uveřejnil roku 1850

RUDOLF SKUHERSKÝ,

od roku 1852 první profesor nově zřízené stolice deskriptivní geometrie na

ČESKÉM STAVOVSKÉM POLYTECHNICKÉM ÚSTAVU

v Praze, o jehož počestění se roku 1861 se zdarem zasadil a z jehož české větve se časem vyvinulo

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

ÚVODEM

V technické praxi se používá řady ploch. Jejich výtvarný zákon je buď jednoduchý a známý, nebo složitý, po případě se stanoviska geometrického i neznámý. Všechny tyto plochy je možno seřadit tak, že určitá jejich skupina má řadu společných výrazných vlastností, které se mohou s výhodou použít při řešení úloh oněch ploch se týkajících. Mnohé z ploch se svými výraznými vlastnostmi řadí do dvou i více takových skupin, jak se ukáže v dalších úvahách.

Plochy byly v českých učebnicích z poslední doby důkladně probrány v díle: *Kadeřávek-Klíma-Kounovský*, Deskriptivní geometrie, díl II, Praha 1932 a skupina ploch zborcených v práci prof. Dr. *J. Kounovského*: Zborcené plochy, Praha, 1947 ve sbírce Cesta k vědě, svazek 36. Tu jsou i dány směrnice pro obdobnou práci: totiž omezení pomocné látky na míru nejmenší, aby se od spisku neodradili čtenáři, chtějící se poučit o konstrukci těchto ploch a na těchto plochách a nemající obšírné znalosti geometrické. Ba ani začátečnickům nemá dílo svým studiem činiti zbytečné potíže. Těmito směrnicemi se chce řídit i tento spis.

I. OBALOVÉ PLOCHY

Plocha obecně vzniká zákonným spojitým pohybem křivky, lhostejno, zda rovinné či prostorové, která se při tomto pohybu nemusí nebo může i podle určitého daného zákona měnit. Takto vzniká plocha jako souhrn nekonečně mnohých křivek. Plochu lze však vytvořiti i jiným způsobem. Vytkneme v prostoru určitou plochu a přikážeme jí zákonný spojitý pohyb, při čemž plocha se buď nemusí, nebo může i podle daného pravidla měnit. Všechny tyto plochy obalí plochu novou, kterou nazýváme jejich *plochou obalovou*; jsou jí vesměs *obaleny*. Vytkněme řadu ploch ${}^1\varepsilon, {}^2\varepsilon, {}^3\varepsilon, {}^4\varepsilon, \dots$, které se postupně protínají v křivkách ${}^1k, {}^2k, {}^3k, \dots$, určujících v nich plošné proužky $({}^1k{}^2k), ({}^2k{}^3k), \dots$. Plochy ${}^1\varepsilon, {}^2\varepsilon, \dots$ se dotýkají nové plochy, plochy η a to vždy v mezích těchto proužků. Přejdeme-li k mezi, t. j. předpokládáme-li nekonečně mnoho ploch ε následujících po sobě v malých odlehlostech, bude konečně v limitě obalová plocha η totožná se souhrnem křivek k a dotkne se vždy plochy obalené ε podél křivky k , limitní polohy křivky, v níž ε protíná plochu blízkou pro případ, že se tato plocha neomezeně blíží ploše ε . Křivky k nazýváme *charakteristikami* obalové plochy η .

Lze proto vysloviti větu:

Pohybem plochy ε v prostoru vzniká obalová plocha η , dotýkající se všech ploch ε jako obalovaných a dotýká se jich podle příslušných charakteristik k .

Tím je dána možnost v libovolném bodě plochy η , dané jako obalové plochy ploch ε , sestrojiti tečnou rovinu a normálu. Daným bodem B prochází na η určitá charakteristika k , k níž přísluší i určitá plocha ε . Tečná rovina τ této plochy ε v bodě B je již i tečnou rovinou plochy η v tomto bodě.

2. ROTAČNÍ PLOCHY

2.0. Vytváření rotačních ploch. Nejjednodušším pohybem v prostoru je *otáčení*, *rotace*, okolo dané přímky, *osy otáčení*. Každý bod otáčejícího se útvaru probíhá při tomto pohybu kružnici, položenou v rovině kolmé k ose otáčení.

Otáčením zcela libovolné křivky k okolo dané osy o vytvoří se plocha ρ , která se nazývá *rotační plochou*. Nese na svém povrchu nekonečně mnoho kružnic v rovinách kolmých k ose otáčení. Jsou to její *rovnoběžky* nebo *paralelní kružnice*. Ony z nich, které ve svém okolí mají *nejmenší* poloměr, nazývají se *hrdla* plochy, ty pak, kterým v jejich okolí přísluší *největší* poloměry, jsou *rovníky* (*aequatory*) plochy. Souhrn průsečíků veškerých rovnoběžek s libovolnou rovinou σ , jdoucí osou o , jmenuje se *poledník* (*meridián*) plochy ρ . Plochu ρ možno vytvořit i otáčením poledníku.*)

Veškeré poledníky plochy ρ jsou křivky mezi sebou shodné a vzhledem k ose o kolmo souměrné, jak plyne z jejich sestavení uvedeným způsobem. Poledník, který je rovnoběžný s průmětnou, jeví se v příslušném průmětu v pravém tvaru, po případě i ve skutečné velikosti a je označován jako *poledník hlavní*.

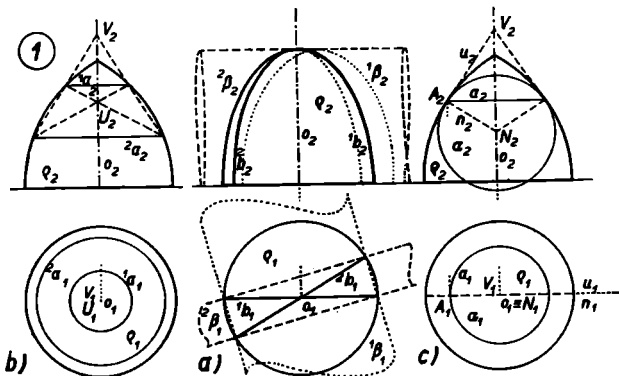
2.1. Dotykové plochy rotačních ploch. Vytkneme-li (obr. 1a) na rotační ploše ρ , mající v přímce o svou osu, dva poledníky 1b , 2b , jsou to v prostoru křivky kolmo souměrné k rovinám, které procházejí osou o , půlí odchylky rovin těchto poledníků. Proto leží oba poledníky 1b , 2b na dvou válcových plochách ${}^1\beta$, ${}^2\beta$, jejichž povrchové přímky jsou kolmé k ose o a jejichž osy stojí k sobě rovněž kolmo. Splynou-li oba poledníky 1b , 2b v jediný b , přejde plocha válcová ${}^1\beta$ do válcové

*) Je patrné, že byly vzaty názvy křivek položených na rotačních plochách z *matematického zeměpisu*. Proto bývá i označován průsečík rotační plochy s osou, pokud je jejím obyčejným bodem (jeho rovina tečná je kolmá k ose) *pólem* dané rotační plochy.

plochy, která se podél poledníku b dotýká plochy ρ a plocha ${}^2\beta$ přejde do roviny poledníku b . Tedy:

Podél každého poledníku b dotýká se rotační plochy ρ plocha válcová β , jejíž povrchové přímky jsou kolmé k rovině onoho poledníku.

Plocha rotační jeví se tedy jako obalová plocha válcových ploch, charakteristikami jsou tu poledníky plochy.



V obr. 1b) výtknuty byly na ploše ρ dvě rovnoběžky 1a , 2a . Jimi lze proložit dvě rotační plochy kuželové ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$, mající v o svou osu a v bodech V a U své vrcholy. Z toho máme důsledek:

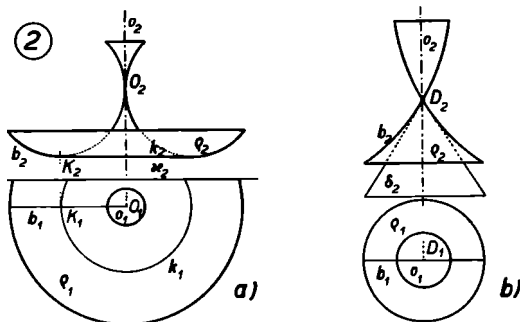
Každé dvě rovnoběžky rotační plochy ρ spočívají na dvou rotačních plochách kuželových, z jejichž vrcholů lze jednu promítnouti do druhé.

Splynou-li obě rovnoběžky v jedinou a , přejde jedna plocha kuželová do roviny této rovnoběžky a druhá do rotační plochy kuželové, která se podél rovnoběžky a plochy ρ dotkne a má svůj vrchol na ose o . Je-li rovnoběžka a vytvářena otáčením bodu A poledníku b plochy ρ , vytvoří

tečna u křivky a v bodě A dotykovou plochu kuželovou α .
Tudíž:

Podél každé rovnoběžky a rotační plochy ρ dotýká se jí rotační plocha kuželová α souosá. Pro hrdla a rovníky přechází tato dotyková plocha kuželová v plochu válcovou.

Rotační plocha ρ je tedy obalovou plochou rotačních ploch kuželových o společné ose, kružnice rovnoběžkové jsou příslušnými charakteristikami.

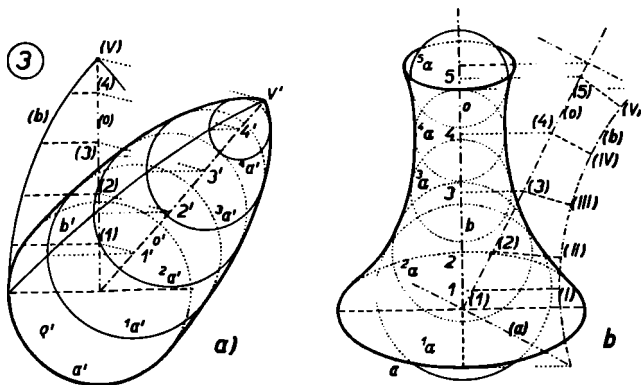


Sestrojíme-li (obr. 1c) v bodě A hlavního meridiánu rotační plochy ρ tečnu u a normálu n , jejichž průsečíky s osou rotace o jsou body V a N , je zřejmé, že rotací kružnice mající v N střed a poloměr rovný \overline{AN} , vytvoří se plocha kulová α , která se plochy ρ podél rovnoběžky a dotýká. Z toho plyne:

Podél každé rovnoběžky rotační plochy ρ o ose o dotýká se plochy ρ kulová plocha α . Její střed N je vrcholem rotační plochy kuželové souosé s ρ , vyplněné normálami poledníků plochy ρ v bodech kružnice a .

Plocha rotační ρ jeví se tedy jako plocha obalová ploch kulových α , majících středy na ose o ; charakteristikami jsou tu rovnoběžkové kružnice a plochy ρ . Pro rovníky a hrdla

plochy ρ jsou poloměry dotykových ploch kulových ve svém okolí hodnoty nejmenší. Je-li v bodě K (obr. 2a) tečna k poledníku b kolmá k ose o rotační plochy ρ , popíše při rotaci bod K kružnici k v rovině $\kappa \perp o$ a pro každý bod kružnice k je κ příslušnou rovinou tečnou. κ je rovina, která se dotýká plochy ρ podél celé křivky k , kterou nazýváme



kráterovou křivkou plochy ρ . Protíná-li poledník b plochy ρ (obr. 2b) osu otáčení v bodě D , tu příslušná tečna poledníku vytvoří rotací okolo o kuželovou plochu δ , která se v bodě D plochy ρ dotýká. V bodě D má plocha ρ nekonečně mnoho rovin tečných: tento kuželový bod je jejím bodem *singulárním*. Zvláštní případ nastane, dotkne-li se poledník v bodě O osy o (obr. 2a).

2.2. Tečné roviny a normály. V předešlé části sezнали jsme dotykové plochy rotačních ploch podél poledníků a rovnoběžkových kružnic. Při stanovení tečné roviny v bodě rotační plochy vedeme jí buď poledník nebo rovnoběžkovou kružnici, sestrojíme podél poledníku dotykovou plochu válcovou nebo podél rovnoběžkové kružnice buď kuželovou nebo ku-

lovou plochu dotykovou a k této ploše stanovíme pak v daném bodě rovinu tečnou, která jest již i tečnou rovinou dané rotační plochy. Jednodušeji řešíme tuto úlohu tak, že bodem B rotační plochy ρ proložíme rovnoběžkovou kružnici a a poledník b ; tyto křivky v bodě B nahradíme tečnami u, v a rovina, těmito přímkami určená, je hledanou rovinou tečnou. Normála n jde k ní bodem B kolmo.

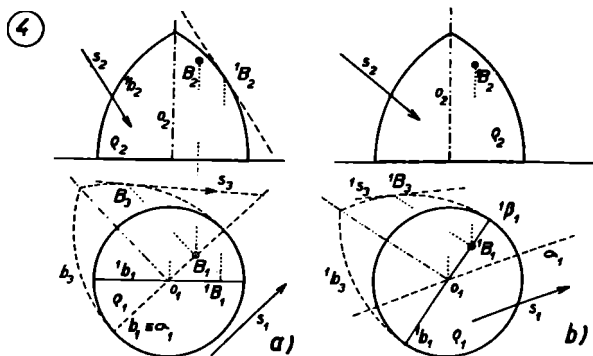
2.3. Obrisy a rovnoběžné osvětlení. Rovnoběžkové kružnice rotační plochy ρ použijeme s výhodou k tomu, abychom vyhledali obrys kosoúhlého průmětu plochy ρ v případě, že roviny rovnoběžkových kružnic jsou rovnoběžné k průmětně rovnoběžného promítání (obr. 3a). Kosoúhlé průměty rovnoběžkových kružnic jsou opět kružnice a jejich obálka je obrys kosoúhlého průmětu. Uvedený obrat vede i v centrálním resp. perspektivním promítání snadno k cíli, je-li rotační osa o kolmá k průmětně.

Dotykové plochy kulové (obr. 3b) umožňují velmi snadné vyhledání obrysu rotační plochy ρ v kolmém promítání. Jejich obrysy jsou kružnice. Zvolíme několik normál $1 I, 2 II, \dots$ poledníku b a v kolmém průmětu opisujeme okolo průmětů bodů $1, 2, \dots$ kružnice poloměry $\overline{1 I}, \overline{2 II}, \dots$ Tím jsme stanovili obrysy ploch kulových ${}^1\alpha, {}^2\alpha, \dots$, které obalují hledanou obrysovou křivku.

Daným směrem s opsati rotační ploše ρ plochu válcovou může býti řešeno i jako vyhledání meze stínu vlastního pro rovnoběžné světelné paprsky se směrem s . Je zřejmé, že mez stínu vlastního je křivka kolmo souměrná k rovině poledníku, která je rovnoběžna se světelným paprskem, tedy k rovině *světelného poledníku*. Křivka má na tomto poledníku své *vrcholy*.

Hledejme vrchol B meze vlastního stínu (obr. 4a). K světelnému poledníku b plochy ρ vede se tečna rovnoběžná k světelnému paprsku s , což lze výhodně provést za pomoci třetí vedlejší průmětny σ , totožné s rovinou světelného meridiánu. Použito bylo při tom věty, že podle poledníku se

rotační plochy dotýkají plochy válcové. Z téhož plyne, že když vedeme k hlavnímu poledníku 1b tečnu rovnoběžnou s nárysem světelného paprsku, jest její dotykový bod 1B rovněž bodem hledané meze vlastního stínu. Chceme-li na libovolném poledníku (obr. 4b) 1b plochy ρ vyhledati bod meze stínu, musíme si zjednati kolmý průmět 1s světelného

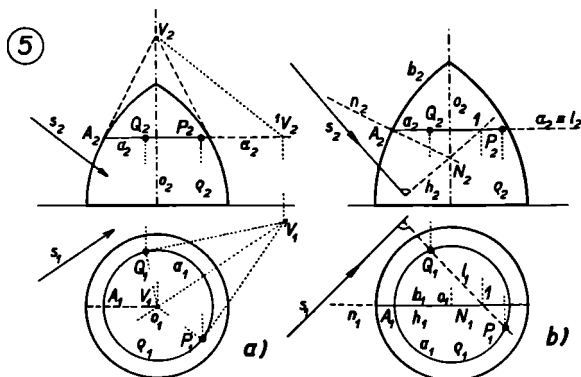


paprsku s na rovinu tohoto poledníku a dotykový bod 1B tečny křivky 1b rovnoběžné s 1s je hledaným bodem. Opět tu s výhodou použijeme třetí vedlejší průmětny ${}^1\beta$ totožné s rovinou poledníku 1b . (V obrázku není zarysováno sestrojení směru 1s_3 !) Tím jsme vyčerpali konstrukce, které používaly dotykových ploch válcových rotační plochy ρ .

K řešení předložené úlohy lze však použití i dotykových ploch kuželových (obr. 5a). Podél rovnoběžky a plochy ρ dotýká se kuželová plocha, mající v bodě V na ose o vrchol. Sestrojíme vržený stín 1V bodu V na rovinu α křivky a a z něho vedeme k ní obě tečny. Jejich dotykovými body P , Q s křivkou a jdou meze vlastního stínu použité plochy kuželové a proto jsou tyto body též body hledané meze vlastního stínu dané plochy ρ .

V obr. 5b bylo použito k řešení téže úlohy dotykové plo-

chy kulové. V bodu A hlavního poledníku b vztyčena k němu normála n , její průsečík N s osou o je středem pomocné plochy kulové. Tímto bodem jde rovina meze vlastního stínu této kulové plochy kolmo k světelnému paprsku s . Je stanovena hlavními přímkami h (h_2 bodem N_2 kolmo k s_2 ; $h_1 \equiv b_1$; průsečík h s α je bod l) a l (l_1 bodem l kolmo k s_1 ,

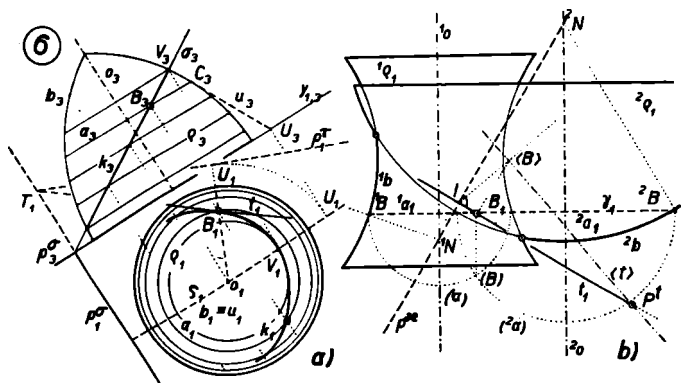


$l_2 \equiv \alpha_2$). Přímka l protíná rovnoběžkovou kružnici a v rovině α , podél níž se pomocná plocha kulová dotýká plochy ρ , v bodech P, Q . To jsou dva body meze stínu vlastního pomocné plochy kulové na rovnoběžce a a proto i body meze stínu vlastního plochy ρ na kružnici a .

2.4. Rovinné řezy. Řez roviny σ s rotační plochou ρ mající osu $o \perp \pi$ a poledník v křivce b stanovíme z jednotlivých bodů (obr. 6a). Vytkneme rovnoběžkovou kružnici a a sestrojíme její průsečíky s rovinou σ . Pohodlně se tak stane, použijeme-li opět pomocné třetí průmětny, rovnoběžné s osou o a kolmé k rovině σ . Tu je již průsečík B_3 přímek α_3 a σ_3 jedním bodem stranorysu řezu k . Z B_3 snadno získáme B_1 . V bodě B stanovíme tečnou rovinu τ a její průsečnice s rovinou σ , přímka t je tečnou křivky k v bodě B . Křivka k

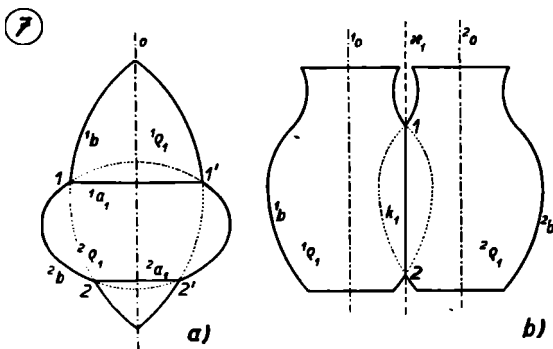
je kolmo souměrná k rovině ζ , která, jdouc osou o , je kolmá k rovině σ , proto bod V položený v ζ je vrcholem křivky k .

2,5. Proniky dvou rotačních ploch. Dvě rotační plochy ${}^1\rho$ a ${}^2\rho$ mohou mít své osy buď rovnoběžné (po případě splývající), nebo různoběžné a konečně mimoběžné. Hledáme-li průnikovou křivku takových dvou rotačních ploch, postupujeme v každém z uvedených případů jiným způsobem.



2,51. Příklad rovnoběžných os. Uvažujme nejprve dvě rotační plochy ${}^1\rho$ a ${}^2\rho$, které mají rovnoběžné osy ${}^1o \parallel {}^2o$ položené v první průmětně (obr. 6b). Rovina γ kolmá k osám otáčení protíná dané plochy v rovnoběžkových kružnicích 1a a 2a . Sklopte rovinu γ do průmětny: Sklopené kružnice (1a) a (2a) protínají se v bodě (B), který je sklopením bodu B hledané průsečné křivky k . Pata kolmice spuštěné z bodu (B) na γ_1 je jeho prvním průmětem B_1 . Tečnu křivky k v bodě B mohli bychom sestrojiti jako průsečnici tečných rovin ploch ${}^1\rho$ a ${}^2\rho$ v bodě B , ale můžeme ji snadno sestrojiti za pomoci *normální roviny* křivky k . Stanovme v průsečíku 1B rovnoběžkové kružnice 1a s poledníkem 1b normálu ${}^1B^1N$ křivky 1b a totéž učinme i v bodě 2B , v němž rovnoběžková

kružnice 2a protíná poledník 2b . Buď 2N průsečíkem normály ${}^2N^2B$ poledníku 2b s osou 2o . Pak 1NB a 2NB jsou normály hledané průsečné křivky k v bodě B , určují normální rovinu κ křivky k v bodě B a tečna t křivky k v bodě B jde jím kolmo k rovině κ . Proto je $t_1 \perp {}^1N^2N$ a sklopíme-li promítací rovinu tečny t do průmětny ($B^1 \langle B \rangle = B_1(B); I \langle B \rangle \perp \perp \langle B \rangle P^t$), získáme snadno stopník P^t hledané tečny t .



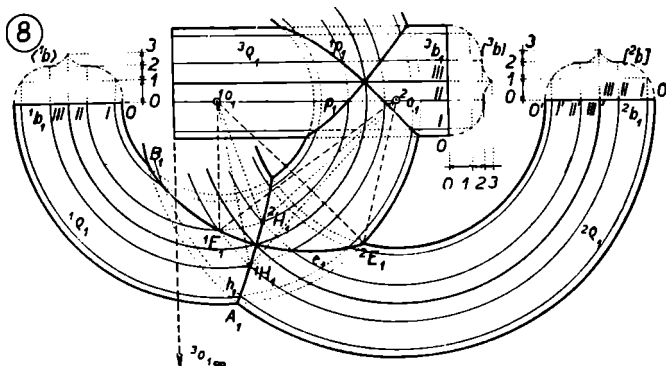
Je zřejmé, že průsečná křivka k je kolmo souměrná k rovině, procházející osami 1o a 2o a má v průsečných bodech hlavních poledníků 1b a 2b své vrcholy.

Splývají-li osy obou ploch v jediné přímce o (obr. 7a), rozpadne se proniková křivka ploch ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ na několik rovnoběžkových kružnic 1a , 2a , vytvářených průsečnými body $1\ 1'$, $2\ 2'$, poledníků 1b , 2b .

Jsou-li dána dvě shodná rotační tělesa omezená plochami ${}^1\varrho \cong {}^2\varrho$ o osách ${}^1o \parallel {}^2o$ (obr. 7b), je vzájemný pronik omezen křivkou k položenou v rovině κ , rovnoběžné s osami a od nich stejně vzdálené.

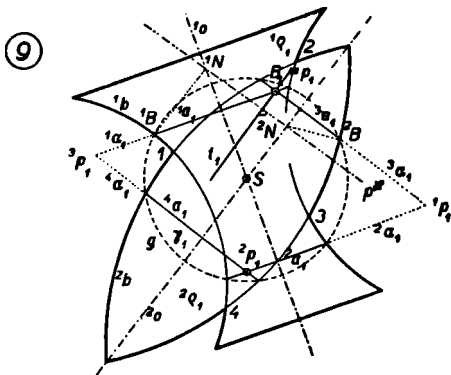
Uvažujeme-li celé plochy ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$, je k jen částí jejich pronikavých křivek, jak později seznáme.

Budtež nyní dány dvě rotační plochy ${}^1\rho$, ${}^2\rho$ (obr. 8), jejichž osy ${}^1o \parallel {}^2o$ jsou kolmé k průmětně. Poledníky obou ploch budtež křivky ${}^1b \cong {}^2b$ a stejně k průmětně položené. Zvolme stejné aequidistance nad průmětnou $0\ I, 0\ 2, 0\ 3!$ Body příslušné těmto vzdálenostem na polednicích 1b a 2b , promítají se do shodných řad $0, I, II, III$ po případě $0, I',$



II', III' a těmito procházejí průměty rovnoběžkových kružnic na obou plochách. Průmět h_1 průsečné křivky vychází z průsečíku A_1 stop obou ploch do bodů ${}^1H, {}^2H$. Je zřejmé, že se přiblíží bod 2H_1 k bodům 1o_1 a 2o_2 o touž vzdálenost, rovnou úsečce $I\ III = I'\ III'$ a je proto rozdíl průvodičů bodů křivky h_1 vzhledem k bodům ${}^1o_1, {}^2o_1$ stálý a křivka h_1 je *hyperbolou o ohniskách* v ${}^1o_1, {}^2o_1$. Pro část pronikové křivky, která vychází z průsečného bodu B stop obou ploch ${}^1\rho$ a ${}^2\rho$, je, jak patrné z průvodičů bodů 1E a 2E , jejich součet stálou hodnotou. Je z toho zřejmé, že *proniková křivka dvou rotačních ploch o rovnoběžných osách a shodných polednicích položených ve stejné výši promítá se kolmo na průmětnu kolmou k osám do kuželoseček, které mají v průmětu os svá společná ohniska.*

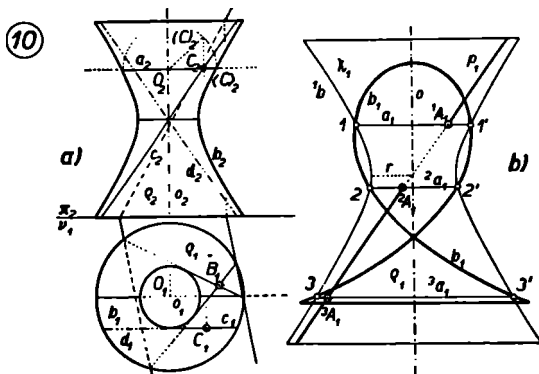
Je-li osa jedné plochy, na př. ${}^3\rho$ nekonečně vzdálenou, je ${}^3\rho$ plochou válcovou a příslušný průmět průsečné křivky p a 1p s rotační plochou ${}^1\rho$ na rovinu kolmou k ose je dvojina parabol o společném ohnisku 1o_1 a směru os kolmém k směru povrchových přímků plochy ${}^3\rho$.



2,52. *Případ různoběžných os.* V případě, že dvě rotační plochy ${}^1\rho$, ${}^2\rho$ mají poledníky v křivkách 1b , 2b a osy 1o , 2o různoběžné, protínající se v bodě S (obr. 9), postupujeme takto:

Rovinu, stanovenou osami ploch, použijeme za průmětnu kolmého promítání. Okolo bodu S opišeme kružnici g , jejímž otáčením okolo osy 1o i 2o vznikne plocha kulová γ , sousedá jak s ${}^1\rho$ tak i s ${}^2\rho$. Protíná proto γ obě plochy v několika kružnicích. Kružnice 1a plochy ${}^1\rho$ seče kružnicí 3a plochy ${}^2\rho$ ve dvou, k průmětně souměrně položených bodech, kterým přináležejí jediný průmět B_1 . Stejně reálná kružnice 2a plochy ${}^1\rho$ seče reálnou kružnicí 3a plochy ${}^2\rho$ ve dvou, na přímce 1p kolmé k průmětně položených bodech, které jsou sice imaginární, ale dávají v 1p_1 reálný průmět. Je zřejmo,

že použitím jedné plochy kulové γ stanovili jsme současně řadu bodů průřezu k_1 pronikové křivky k , v našem případě body $p_1, {}^1p_1, {}^2p_1$ a 3p_1 , z nichž jen dva jsou průřezky reálných bodů křivky k . Tečnu křivky k v bodě B lze stanoviti opět buď jako průsečnici tečných rovin sestrojených v bodě B k plochám ${}^1\rho, {}^2\rho$, nebo výhodněji za pomoci normální roviny



z křivky k v bodě B stejným postupem, jakého bylo použito v obr. 6b. Křivka k prochází průsečíky 1, 2, 3, 4 obou poledníků a má v nich v prostoru své vrcholy.

2,53. *Případ mimoběžných os.* Jsou-li osy obou rotačních ploch ${}^1\rho$ a ${}^2\rho$ mimoběžné, prokládáme roviny kolmé k jedné nebo druhé ose rotace; roviny protnou jednu z ploch v kružnicích a druhou v obecné křivce, kterou sestrojíme podle obr. 6a. Průsečíky této křivky a příslušné kružnice jsou jednotlivé body hledané pronikové křivky. Její tečnu vyšetříme opět buď jako průsečnici příslušných tečných rovin k plochám ${}^1\rho, {}^2\rho$ nebo za pomoci normál k těmto plochám.

2,6. *Rotační zborcený hyperboloid.* Otáčí-li se přímka c mimoběžná k přímce o okolo této přímky (obr. 10a), vznikne plo-

cha ρ , jejímž poledníkem b je hyperbola. Zvolme na c bod C' ! Poloměr kružnice a popisované bodem C je přepona trojúhelníka $\triangle O_2C_2(C)_2$, kde $\overline{C_2(C)}_2$ se rovná vzdálenosti přímky c od osy o . Z obrazce je patrna známá konstrukce hyperboly b , jejíž asymptota je rovnoběžná s c . Vzniklá plocha je *rotační jednodílný hyperboloid ρ , plocha zborcená* (2) str. 13 a násl. *) Zvolíme-li na ní bod B , můžeme vyhledati jeho tečnou rovinu buď stanovením tečen u, v k poledníku a rovnoběžkové kružnici bodu B nebo uvážiti: plocha je kolmo souměrná k rovině jdoucí osou o kolmo k druhé průmětně, proto obsahuje přímku d kolmo souměrnou k přímce c a též rotaci této přímky d kolem o vytváří se plocha ρ . Proto:

Rotační zborcený hyperboloid obsahuje dvě soustavy povrchových přímek, přímky jedné soustavy jsou mezi sebou mimoběžné, ale protínají všechny přímky druhé soustavy. Každým bodem plochy zborceného hyperboloidu procházejí dvě povrchové přímky plochy, které patří různým soustavám a určují tečnou rovinu daného bodu.

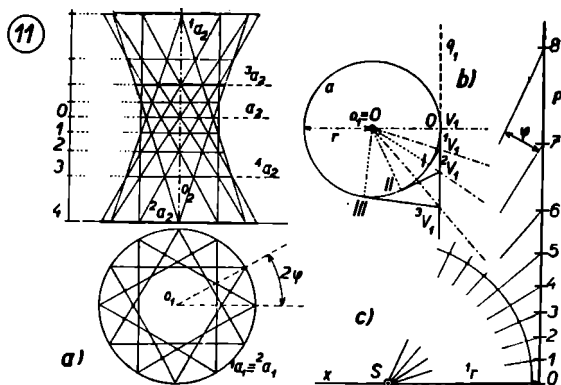
Proložením obou přímek, které procházejí bodem B , je snadno tečná rovina určena (obr. 10a) a lze pro ni jednoduše stanoviti i stopy.

2,61. *Stupeň rotační plochy.* Poledník b rotační plochy ρ (obr. 10b) musí býti křivka kolmo souměrná k ose o otáčení. Je-li algebraická a její stupeň m , pak i stupeň plochy ρ je rovný m , neboť zvolíme-li libovolnou přímku p v prostoru, vznikne její rotací okolo o rotační hyperboloid, jehož poledník je hyperbola 1b souosá s poledníkem b . Oba poledníky mají $2m$ společných bodů $1\ 1', 2\ 2', 3\ 3', \dots$ jejichž otáčením vznikne m kružnic ${}^1a, {}^2a, {}^3a, \dots$ společných plochám ρ a ${}^1\rho$. Průsečíky ${}^1A, {}^2A, {}^3A \dots$ těchto kružnic s přímkou p jsou průsečné body přímky p s plochou ρ , mimo ně již není žádný průsečný bod. Platí tedy:

*) Čísla v závorkách vztahují se k seznamu literatury, uvedenému na konci knížky.

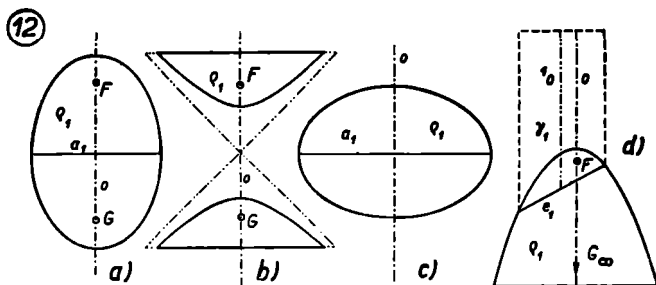
Otáčením algebraické křivky m -tého stupně kolem její osy kolmé souměrnosti vznikne rotační plocha m -tého stupně.

Poledník může být tvořen jedinou křivkou nebo dvěma k ose o souměrnými křivkami. V prvním případě lze vytvořit i rotační plochy mající lichý stupeň.



2,62. Rotační hyperboloid zborcený jako chladič věž. Hyperboloid jednodílný má praktické použití při stavbách chladičích věží. Ve směru povrchových přímek je tu možno klást vyztužení železem při pracech ve vyztuženém betonu (obr. 11a). Plocha je použita od podstavy 2a přes hrdlo až k určité rovnoběžkové kružnici 3a . Jestliže se použijí přímky položené ve stejných úhlových odchylkách, budou se vázati přímky obou soustav jednak na hrdle ve vrcholech pravidelného mnohoúhelníka, dále pak na určitých povrchových rovnoběžkových kružnicích. Platí tu jednoduchý vztah (obr. 11b): v půdoryse, kde a je položeno přímo v průmětně, je bod V_1 půdorys průsečíku dvou přímek různých soustav na hrdle a ; bod 1V_1 je půdorys průsečíku přímky q s další přímkou, vázající se na hrdlo v bodě I , bod 2V_1 další půdorys průsečíku přímky q s přímkou jdoucí z bodu II hrdla atd.

Body $V_1 \equiv 0, {}^1V_1, {}^2V_1, \dots$, tvoří řadu, v níž vzdálenosti bodů od počátku 0 jsou určeny hodnotami $r \operatorname{tg} \varphi, r \operatorname{tg} 2\varphi, r \operatorname{tg} 3\varphi, \dots$. Tato řada pro hodnotu ${}^1r = \overline{SO}$ je narýsována v obr. 11c. Je zřejmé, že s touto řadou je promětná řada v přímce q_1 v obr. b) i řada $0, 1, 2, 3, 4, \dots$, v obr. a) a i řady bodů, vzniklé v jednotlivých povrchových přímkách uvažovaného

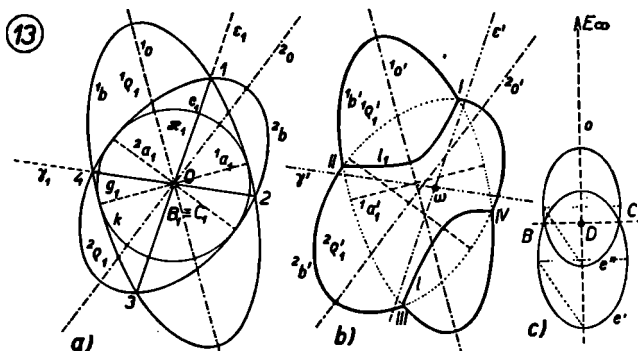


hyperboloidu. Zpravidla bývá přímek mezi stopou 2a a kružnicí 4a použito jako nožek, na nichž spočívá hmota chladicí věže a kudy do ní proudí vzduch. Mezi hodnotami: počet povrchových přímek (tím i úhlem φ), výška celé věže, výška hrdla a výška kružnice 4a nad podstavou, existuje určitý vztah a proto nemohou býti všechny tyto hodnoty zvoleny. (Příloha I.)

2,63. *Rotací plochy druhého stupně a jejich rovinné řezy.* Otáčením kuželoseček okolo osy vznikají *rotační plochy druhého stupně* (obr. 12). Otáčením elipsy okolo *hlavní osy* vzniká *elipsoid vejčitý* nebo *prodloužený*, rotací hyperboly okolo *hlavní osy* *hyperboloid nepřímkový, dvojdílný*, elipsa, otáčející se kolem své *vedlejší osy* vytvoří *zploštělý elipsoid* a rotací paraboly okolo osy vznikne *rotační paraboloid*. Při otáčení hyperboly, lhostejno kolem které osy, vytvoří asymptoty poledníku rotační plochu — *asymptotickou plochu kuže-*

lovou — která se rotační plochy uvažované dotýká podél úběžné kružnice. Proto:

Libovolná sečná rovina protíná hyperboloid i jeho asymptotickou plochu kuželovou v kuželosečkách, které mají úběžné body a tečny v nich společné, jsou tedy podobné, podobně položené a soustředné.



Pro rotační paraboloid platí věta [(1) str. 467 a násl.], že libovolný rovinný řez se promítá směrem osy o (obr. 12d) rotační plochou válcovou γ . Tedy:

Průsečné křivky rotačního paraboloidu o ose o a rotační plochy válcové s osou $1o \parallel o$ jsou podobné a podobně položené elipsy.

Rotační plochy druhého stupně, jejichž poledníky mají v ose otáčení ohniska, jeví se proto jako plochy, které jsou vyplněny body, majícími od těchto bodů stálý algebraický součet vzdáleností. Při paraboloidu je jedno ohnisko G úběžné.

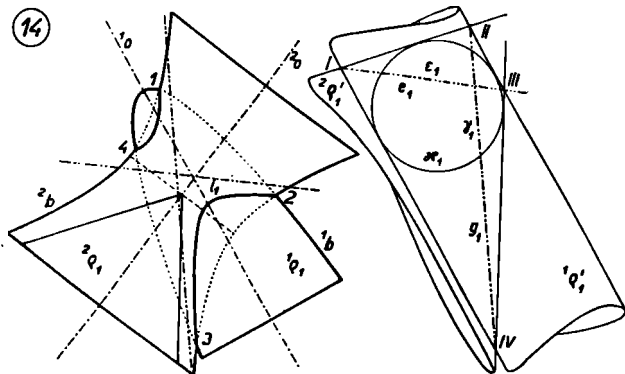
2,64. Průniky dvou rotační ploch druhého stupně. Úběžná přímka rovnoběžných rovin protíná plochu druhého stupně

ve dvou bodech, jimiž jdou průsečné kuželosečky uvažovaných rovin, proto také:

Řezy rovnoběžných rovin s plochou druhého stupně jsou kuželosečky podobné a podobně položené.

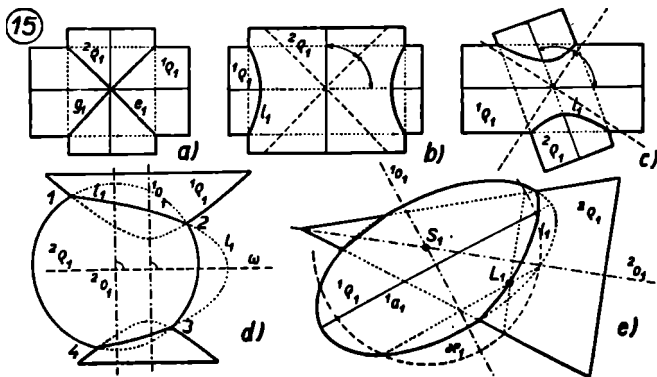
Dvě plochy druhého stupně protínají se obecně v prostorové křivce čtvrtého stupně. Zvolme si (obr. 13a) plochu kulovou κ mající v bodě O v průmětně střed a stopu v kružnici k ! Bodem O proložme v průmětně dvě přímky 1o , 2o a sestrojme dvě kuželosečky 1b , 2b , mající v O střed a v přímkách 1o , 2o osy a dotýkající se kružnice k ! Otáčením křivek 1b , 2b okolo os 1o , 2o vytvoří se plochy 1q , 2q druhého stupně, které se protnou v křivce čtvrtého stupně, kolmo souměrné k průmětně a jdoucí průsečnými body $1, 2, 3, 4$ obou poledníků. Obě kružnice 1a , 2a , podél nichž se plochy 1q , 2q dotýkají kulové plochy κ , protínají se v bodech B a C , které rovněž náleží k pronikové křivce ploch 1q a 2q , které se v bodech B a C navzájem dotýkají. Rovina ε vedená body $1, 3, B, C$ protíná plochy 1q a 2q v kuželosečkách, které obsahují uvedené body a v bodech B, C mají tečny rovnoběžné s průmětnou a jsou proto totožné. Obdobně je to i v rovině γ jdoucí body $2, 4, B, C$. Je z toho zřejmé, že v tomto případě se proniková křivka ploch 1q , 2q , které se dotýkají v bodech B, C rozpadla na dvě kuželosečky, které se promítají do úseček $\overline{13} \equiv e_1$ a $\overline{24} \equiv g_1$. (Věta Mongeova ⁽¹²⁾, str. 642.) Roviny rovnoběžné s rovinami ε a γ těchto kuželoseček protínají plochy druhého stupně 1q , 2q v kuželosečkách podobných a podobně položených — homothetických. Tohoto výsledku lze použítí k sestrojení kolmého průmětu pronikové křivky dvou rotačních ploch druhého stupně ${}^1q'$, ${}^2q'$ (obr. 13, část b) na průmětnu, jdoucí osami rotace. Proniková křivka l čtvrtého stupně, ježto je k průmětně kolmo souměrná, protne libovolnou rovinu k průmětně kolmou ve čtyřech bodech, které však vzhledem k tomu, že vždy dva z nich jsou na témž kolmo promítacím paprsku, dají jen *dva* body průmětu l_1 . Je proto l_1 kuželosečkou. Ta jde průsečnými

body I, II, III, IV obou poledníků ${}^1b', {}^2b'$. Protneme-li plochy ${}^1\rho', {}^2\rho'$ rovinou kolmou k průmětně v kuželosečkách podobných a podobně položených, protnou se tyto kuželosečky (obr. 13c) ve dvou v konečnu položených bodech B, C , které vedou k průmětu D na ose kuželoseček e', e'' položenému a dále ve dvou úběžných bodech, které na ose o dávají spo-



lečný úběžný průmět E . Z toho je patrné, že rovina ϵ kolmá k průmětně, která seče plochy ${}^1\rho', {}^2\rho'$ v kuželosečkách podobných a podobně položených promítá se na průmětnu do směru asymptoty kuželosečky l_1 . Proto, jsou-li dány plochy ${}^1\rho'$ a ${}^2\rho'$ (obr. 13b), sestrojíme plochu kulovou κ (obr. 13a) a k ní plochy jí se dotýkající ${}^1\rho$ a ${}^2\rho$ podobné a podobně položené k plochám ${}^1\rho', {}^2\rho'$. Ty se protnou v kuželosečkách e a g a průměty ϵ_1 a γ_1 rovin ϵ a γ , v nichž jsou e a g položeny, na průmětnu jsou již směry asymptot kuželosečky l_1 (obr. 13b). V obr. 14 sestrojena proniková křivka l rotačního hyperboloidu a rotačního paraboloidu, majících různoběžné osy v průmětně kolmého promítání. Zvolena pomocná plocha kulová κ , k ní sestrojena dotyková plocha rotační válcová ${}^1\rho'$, rovnoběžná s osou 1o paraboloidu ${}^1\rho$ a dotyková plocha

kuželová ${}^2\rho'$ rovnoběžná k asymptotické kuželové ploše hyperboloidu ${}^2\rho$. Plochy ${}^1\rho'$, ${}^2\rho'$, dotýkající se plochy kulové κ , dotýkají se ve dvou bodech, proto jejich proniková křivka se rozpadla ve dvě kuželosečky e, g , ležící v rovinách ε a γ . Přímký ε_1 a γ_1 jsou směry asymptot kuželosečky l_1 , určené dále průsečnými body 1, 2, 3, 4 obou poledníků ${}^1b, {}^2b$.



Z uvedeného je patrné, že dvě rotační plochy druhého stupně ${}^1\rho, {}^2\rho$, mající v průmětně své různoběžné osy, protínají se v křivce l , která se promítá kolmo na průmětnu do rovnose hyperboly, jsou-li poledníky ${}^1b, {}^2b$ kuželosečky podobné (při elipsoidech musí být obě plochy buď vejčité nebo obě zploštělé). Směry asymptot hyperboly l_1 rozpolují úhly sevřené osami ploch ${}^1\rho, {}^2\rho$. Sem patří případy, kdy ${}^1\rho, {}^2\rho$ jsou obě rotační plochy válcové (obr. 15abc) nebo rotační paraboloidy nebo plocha válcová a rotační paraboloid, dále dvě plochy hyperboloidů nebo ploch kuželových, po případě plochy kuželové a hyperboloidu, kdy odchylky povrchových přímků ploch kuželových a ploch kuželových asymptotických od osy rotace jsou stejné.

Obecně je l_1 hyperbolou, jejíž směry asymptot získáme obrazcem, obdobným k pomocnému výkresu v obr. 14.

Dvě rotační plochy druhého stupně, mající rovnoběžné osy, protínají se v křivce l , která se promítá kolmo na rovinu stanovenou osami do *paraboly* l_1 , jejíž osa ω je kolmá k osám daných ploch (obr. 15d).

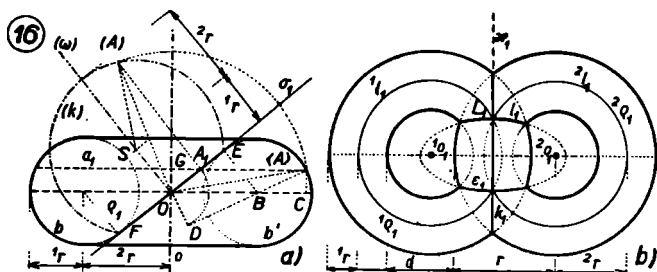
Jen v *případě*, kdy jedna a jen jedna z obou ploch, majících různoběžné osy, je *zploštělým elipsoidem*, je průmět l_1 průsečné křivky l na rovinu určenou osami *elipsou* (obr. 15e).

2,7. Kruhový prstenec — anuloid. Zvolíme-li za poledníkovou křivku dvě k ose otáčení o souměrné kružnice, vytvoří se jejich otáčením plocha ρ čtvrtého stupně. Koncové body průměrů kružnic poledníkových, rovnoběžných k ose otáčení, probíhají *kružnice kraterové*, podél nichž se dotýkají plochy dvě roviny kolmé k ose. Bod nejbližší k ose popisuje *hrdlo*, které může přejíti do bodu, dotýkají-li se poledníkové kružnice osy o . Bod nejvzdálenější od osy probíhá *rovník*; v případě, že poledníkové kružnice protínají osu ve dvou bodech, jsou tyto *kuželovými body* plochy, která nemá hrdla, ale má dvě kružnice rovníkové.

Rovinný řez sestruje se podle 2,4; obr. 6a. Označme poloměr poledníkové kružnice 1r , vzdálenost jejího středu od osy 2r ! Je-li sečná rovina σ rovnoběžná s osou o , vzniká v řezu *spirická křivka Perseova*, pro případ, že vzdálenost roviny sečné od osy o je rovna 1r , je řezem *křivka Cassiniova*, pro níž součin vzdáleností od dvou pevných bodů — položených zde v rovině rovníku a vzdálených od osy souměrnosti průsečné křivky o délku 2r — je stálou hodnotou. Je-li $^2r = 2^1r$, je křivka průsečná *Bernouillioho lemniskatou* [(¹) str. 596 a n.].

Mysleme si (obr. 16a) v první průmětně π položenou osu o prstence ρ , jehož poledníkové kružnice jsou b a b' ! Podél nich se dotýkají plochy ρ dvě rotační válcové plochy, kolmé k průmětně, ke kterým vedme společnou rovinu tečnou $\sigma \perp \pi$! Tato rovina dotýká se plochy ρ v bodech E a F —

je to t. zv. *rovina bitangenciální*. Její průsečnou křivku s plochou označme písmenou k a její bod položený na rovnoběžkové kružnici a označme A ! Stopa $\langle A \rangle$ kružnice a je otočením bodu A kolem osy o do π . Oklopmo σ okolo σ_1 , do π ! Bod A přejde do bodu (A) na kolmici $(A)A_1 \perp \sigma_1$ a při tom úsečka $(A)O = \overline{\langle A \rangle O}$. Nanesme na kolmici (ω) vztyče-



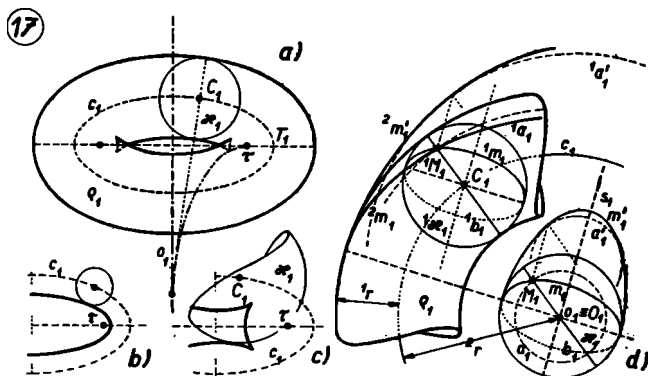
nou v bodě O k σ_1 úsečku $\overline{SO} = {}^1r = \overline{B\langle A \rangle}$. Získali jsme tu trojúhelník $\triangle DOB \sim \triangle C\langle A \rangle B$ a trojúhelník $\triangle GOA_1 \sim \triangle EBO$. Z prvé dvojiny plyne, že $\overline{OD} : \overline{\langle A \rangle C} = \overline{OB} : \overline{\langle A \rangle B} = {}^2r : {}^1r$, z druhé dvojiny, že $\overline{A_1O} : \overline{OG} = \overline{OB} : \overline{BE} = {}^2r : {}^1r$ a ježto $\overline{\langle A \rangle C} = \overline{GO}$, je i $\overline{OG} = \overline{OD}$. Jsou proto $\triangle OB\langle A \rangle$ a $\triangle (A)SO$ shodné. Je tedy $\overline{S(A)} = {}^2r$. Z toho patrné, že část řezu roviny σ s plochou ρ položená nad π je kružnice k o poloměru 2r , jejíž střed S je od osy vzdálen o délku 1r . Celý řez je kolmo souměrný k π a z toho plyne:

Bitangenciální rovina protíná anuloid ve dvou kružnicích o poloměru 2r , jejichž středy jsou od osy vzdáleny o délku 1r , rovnou poloměru poledníka.

Podržíme-li jednu z těchto kružnic, na př. k a otočíme-li druhou okolo osy do polohy l , lze kružnicemi k a l proložit plochu kulovou, která se v průsečných bodech M, N těchto kružnic dotýká plochy ρ .

Bitangenciální plochy kulové protínají anuloid ve dvou kružnicích, majících poloměr 2r rovný vzdálenosti středu poledníku od osy rotace.

Vytkněme dva prstence ${}^1\rho$, ${}^2\rho$ (obr. 16b) o středech 1O a 2O v π a osách 1o , 2o kolmých k π ! Hodnoty 1r , 2r buďtež shodné pro tyto plochy! Podle odst. 2,5 obr. 8 promítá se



proniková křivka kolmo na π do konfokálních kuželoseček, které mají v průřezu 1o_1 , 2o_1 os svá ohniska. Hyperbolický průmět k_1 jedné části pronikové křivky přešel tu do přímky κ_1 , průmětem další části e je elipsa e_1 ; stopa eliptické válcové plochy ε . Tím je doplněn odst. 2,5 obr. 7b. Je tu zřejmo, že plochy ${}^1\rho$, ${}^2\rho$ se neprotínají *pouze* v křivce k , ale ještě v další křivce, která ji doplňuje na úplnou pronikovou křivku. Stane-li se vzdálenost $d = 0$, dotknou se obě plochy ${}^1\rho$ a ${}^2\rho$ ve dvou bodech a křivka e rozpadne se na dvě povrchové kružnice těchto ploch.

Plochu kruhového prstence ρ můžeme pokládati za obalovou plochu kuželových ploch rotačních a kulových ploch sousých s prstencem. Mimo to podle každé kružnice poled-

níkové se dotýká plochy ρ rotační plocha válcová, jejíž osa je kolmá k rovině příslušného poledníku. Do této plochy můžeme vepsati tečnou plochu kulovou a je tedy zřejmé, že:

Kruhový prstenec je obalovou plochou kulových ploch o poloměru 1r , jejichž středy probíhají kružnici C o poloměru 2r .

Z toho dále plyne:

Obrys libovolného kolmého průmětu kruhového prstence je jako obálka shodných kružnic o poloměru 1r aequidistantou eliptického průmětu kružnice C (obr. 17a).

Tento obrys průmětu má dvě větve: *vnější*, zdánlivě eliptickou, ale *elipsou tato větev není*, a *vnitřní*, která může mít dva dvojné body a čtyři body úvratu (obr. 17a). Závisí to na tom, zda poloměr 1r poledníku je větší či menší nežli je poloměr křivosti pro vrchol hlavní osy elipsy C_1 (srovnej obr. 17c a 17b).

Rovnoběžné osvětlení prstence ρ provádí se snadno za pomoci ploch kulových, dotýkajících se plochy ρ podél poledníků (obr. 17d). Zvolme prstenec ρ o středu O v první průmětně π , osa jeho buď $o \perp \pi$! Vytkněme s prstencem soustřednou plochu kulovou κ o poloměru 1r a s ní shodnou plochu kulovou ${}^1\kappa$, která se ρ dotýká podél poledníkové kružnice 1b ! Pro světelné paprsky dané směrem s buďtež m a 1m mezemi vlastními stínů ploch κ a ${}^1\kappa$; vyznačíme-li ještě na κ poledníkovou kružnici b položenou v rovině poledníku 1b , je zřejmo, že v prostoru ${}^1\overline{MM} \# {}^1\overline{M}_1\overline{M}_1 = {}^2r$. Z toho:

Kolmý průmět 2m_1 meze vlastního stínu kruhového prstence ρ na rovinu kolmou k ose o je konchoida eliptického průmětu m_1 meze stínu vlastního s prstencem soustředné plochy kulové o poloměru 1r pro stálou délku rovnou 2r a pro pól totožný s bodem o_1 .

Body M a 1M jsou ve stejné výši nad průmětnou. Jimi procházejí na ρ a κ rovnoběžkové kružnice v prostoru soustředné 1a a a , pro něž rozdíl poloměrů je roven 2r . Vržené

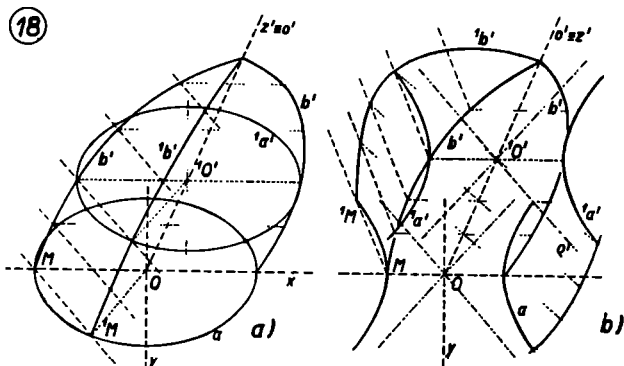
stíny a' kružnic a obalují eliptický vržený stín m' plochy kulové κ ; vržené stíny ${}^1a'$ kružnic 1a mající vždy poloměr o 2r větší než kružnice a obalují proto aequidistantu křivky m'_1 pro stálou hodnotu rovnou 2r . Z toho je patrné:

Vržené stíny při rovnoběžném osvětlení a dále obrisy kruhového prstence v kosoúhlém promítání jsou afinními křivkami k eliptickým aequidistantám.

Použití rotačních ploch je patrné z přílohy II a III.

3. ZEVŠEOBECNĚNÍ ROTAČNÍCH PLOCH

3.0. Užití afinní transformace. Plochy rotační mohou se zevšeobecniti takto: Provedeme pro plochu rotační afinní prostorové přetvoření pro rovinu některého poledníku (obr. 18a), tím přejdou rovnoběžkové kružnice $a, {}^1a, {}^2a, \dots$,



do vzájemně podobných a podobně položených elips, majících své středy na ose o . Shodné poledníkové křivky $b, {}^1b, {}^2b \dots$ přejdou do křivek afinně sdružených, osa o bude tu příslušnou osou afinity.*) Roviny křivek $a, {}^1a, \dots$, plochy nemusí tu být ani kolmé k ose o . Pro plochy takto získané platí věty:

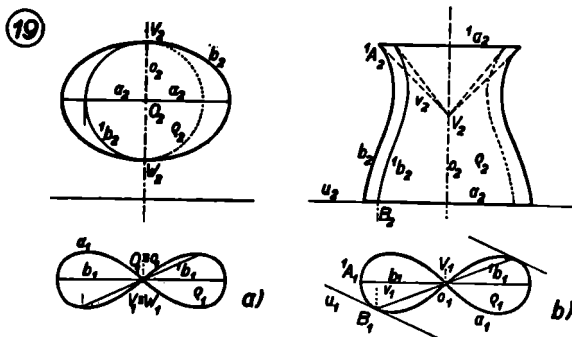
Každé dvě křivky soustavy b jsou položeny na dvou plochách válcových. Podél libovolné křivky soustavy b se dotýká plochy válcová plocha, vyplněná tečnami křivek a .

Každé dvě křivky soustavy a jsou položeny na dvou plochách kuželových, majících vrchole v přímce o . Podél každé křivky

*) Francouzi jmenují toto vytváření ploch *eliptickou rotací*⁽¹²⁾ str. 20.

soustavy a dotýká se plochy kuželová plocha, mající vrchol na přímce o a vyplněná tečnami křivek b .

Protože afinní transformací se nemění stupeň plochy, bude plocha vytvářená v obr. 18a křivkou b stupně m -tého též sama stupně m -tého. Je zřejmé, že křivky soustavy b mají v přímce o osu souměrnosti.



3.1. Nahrazení rovníkové křivky křivkou hyperbolickou plochy.

V úvaze prováděné v 3.0 mohou se homothetické elipsy soustavy křivek a nahraditi (obr. 18b) homothetickými hyperbolami v rovinách rovnoběžných a majících středy na přímce o buď kolmé, nebo nakloněné k rovinám těchto křivek. Zvolíme-li konečné křivky a v soustavě shodných parabol v rovinách rovnoběžných, majících své vrcholy na rovinné křivce b a osy mezi sebou rovnoběžné, získáváme typ ploch, k nimž se ještě vrátíme. Přímka o přejde tu do nekonečna.

3.2. Nahrazení rovníku křivkou souměrnou k ose plochy. Budiž dána (obr. 19a) středově souměrná křivka a , jejímž středem O jde přímka o kolmo k její rovině. Zvolme v o dva body V , W , tak aby $VO = WO$ a vytvořme plochu ρ jako souhrn elips b majících v bodech V , W dva své vrcholy a další dva

v bodech křivky a . Vzniklá plocha má tytéž základní vlastnosti jako plochy rotační, má dvě soustavy povrchových křivek, jedny, křivky b , podle osy o afinně sdružené, které, neexistují-li reálné body V , W , jsou hyperbolami afinně sdruženými podle osy o . V rovinách rovnoběžných s rovinou α křivky a jsou k této podobné a podobně položené křivky soustavy a .

Každé dvě křivky soustavy b lze položit na dvě plochy válcové, tedy promítnouti jednu rovnoběžně do druhé, v limitě se podle křivky soustavy b dotýká plochy ρ válcová plocha vyplněná tečnami křivek soustavy a . Každé dvě křivky soustavy a je možno položit na dvě kuželové plochy, jejichž vrcholy jsou v ose o a v mezním případě je vidno, že se plochy ρ podél křivky soustavy a dotýká kuželová plocha s vrcholem v ose o a vyplněná tečnami křivek soustavy b .

Křivky soustavy a musí být křivkami středově souměrnými. Je-li křivka a složena ze dvou kuželoseček resp. kružnic, vznikne plocha stupně čtvrtého, s níž se ještě seznámíme v dalších oddílech.

Křivku a můžeme zvoliti v algebraické epicykloidě nebo v hypocykloidě o sudém počtu větví, po případě nahraditi ji řadou kružnic sudého počtu stejného poloměru, navzájem se dotýkajících a majících středy na kružnici. Je-li křivka b elipsou, získají se plochy, které byly upotřebeny na př. na makovicích bání kostela sv. Mikuláše v Praze I, zdobí konchy nik se sochami v průčelí Národního divadla v Praze, vyplňují i polokruhová zakončení chrámových zdí na ruských stavbách zvaná „zakomary“ (příloha IV), je to patrné na katedrále archangelské z roku 1508 v Moskvě. V nejnovější době shledáváme se s těmito plochami při leteckých padácích, jak je vidno z obrázku.

Nahradíme-li konečně kuželosečky soustavy b (obr. 19b) křivkami k ose o kolmo souměrnými a mezi sebou afinně sdruženými podle přímky o , získáváme nejobecnější typ,

vybavený týmiž vlastnostmi jako plochy předcházející. Myslíme-li si křivku a stupně n -tého (sudého), převedenu na soustavu $\frac{1}{2}n$ soustředných kuželoseček, přejde plocha v $\frac{1}{2}n$ ploch afinních k plochám rotačním a majícím m -tý stupeň, je-li křivka b stupně m -tého. Plyne z toho, že stupeň těchto ploch nesoucích křivky a n -tého a křivky b m -tého stupně je roven $\frac{1}{2}nm$.

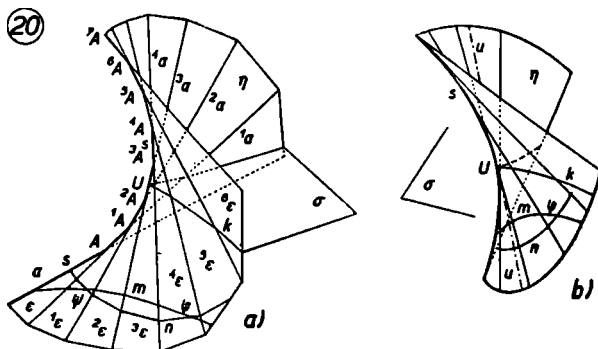


U všech dosud v odst. 2 a 3 probíraných ploch známe dvě soustavy povrchových křivek, obdobných poledníkům a kružnicím rovnoběžkovým. Každým bodem plochy jde jedna z křivek soustavy a a jedna křivka soustavy b . Jejich tečny u a v určují tečnou rovinu τ v bodě B .

Plochy posledně uvedeného typu spatřujeme použity jako ozdobu na tepaných stříbrných nádobách starého Egypta. Tytéž plochy zdobí velkolepé kupole islamských mešit a náhrobků sultánů a je jimi okrášlena i známá katedrální církev Vasila Blaženého v Moskvě (příloha V). Při bedlivém pozorování najde jich čtenář v uměleckých i architektonických výtvorech starších i novodobých velmi mnoho, jen námátkou v Praze jsou v nich vyvedeny obě bání kostelů u Křižovníků a sv. Mikuláše na Menším Městě Pražském, jimi zdobeny jsou i velké vázy v zámku Troja atd.

4. ROZVINUTELNÉ PLOCHY

4.0. Vytvoření a základní pojmy. V odst. 1 byly uvažovány obalové plochy a nebylo přihlédnuto k případu, kdy plochou obalovanou je rovina. Povšimněme si nyní tohoto případu!



Prostorový mnohostran $s \equiv A^1A^2A^3A^4 \dots$ (obr. 20a) má řadu hran $A^1A \equiv 1a$, $A^2A \equiv 2a$, ..., vždy dvě po sobě jdoucí jsou navzájem různoběžné a určují roviny ${}^1\varepsilon \equiv ({}^1a^2a)$, ${}^2\varepsilon \equiv ({}^1a^2a)$, ..., které obsahují vždy tři po sobě jdoucí body A^1A^2A , A^2A^3A , ..., uvažovaného mnohostranu. Vznikl tak mnohostěn $\eta \equiv ({}^1\varepsilon, {}^2\varepsilon, {}^3\varepsilon, \dots)$, na němž lze vésti rovině i prostorové mnohostrany, jako na př. m a n , které se protínají v řadě bodů a svírají úhly φ, ψ, \dots . Uvažovaný mnohostěn, prořatý libovolnou rovinou sečnou σ , stanoví v ní mnohostran k , jehož sousední strany při průsečném bodě U roviny σ s mnohostranem s svírají nepatrný úhel, předpokládáme-li, že roviny ${}^1\varepsilon, {}^2\varepsilon, {}^3\varepsilon, \dots$ následují po sobě v malých odlehlostech spojitě. Tento úhel zmizí, projde-li sečná rovina σ stranou ${}^2A^3A$ uvažovaného mnohostranu. Mnoho-

strany s , m , n a k mají určitou délku; je zřejmé, že mnohostěn η můžeme rozvinout postupným otáčením jeho částic kolem přímek 1a , 2a ... do jediné roviny, aniž bychom daný mnohostěn v jeho částech musili nějak porušit, protáhnout, přetrhnout nebo směrem přímek a jednotlivé částice vzhledem k druhým posouvat. Je to mnohostěn prostě rozvinutelný. Po rozvinutí čili rozbalení přejdou prostorové mnohostrany s , m , n , k do rovinných mnohostranů, které označme (s) , (m) , (n) , (k) , ... Je zřejmé, že délka těchto mnohostranů v rovině bude rovna délkám útvarů s , m , n , k ... v prostoru. Pro útvar s mimo to platí, že vždy tři jeho po sobě jdoucí body A , 1A , 2A ; 1A , 2A , 3A , ...; leží v jedné rovině ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$, ..., a že proto kružnice, proložené těmito body budou shodné s kružnicemi, které budou proloženy odpovídajícími body po rozvinutí.

Přejdeme nyní k limitě! Mnohostran s (obr. 20a) přejde tu do prostorové křivky s (obr. 20b), jeho strany do tečen křivky s , jeho stěny, které obsahovaly tři blízké body mnohoúhelníka, do oskulačních rovin křivky s . Kružnice, která byla proložena trojinou bodů, na př. A , 1A , 2A a která spočívala v rovině ${}^1\varepsilon$ (obr. 20a) přejde do oskulační kružnice křivky s (obr. 20b), položené v její oskulační rovině. Mnohostěn η přešel do souhrnu tečen prostorové křivky s , ale nepozbyl svých základních vlastností, to jest, že je možno jej rozvinouti bez porušení, protržení nebo posouvání jednotlivých částí vůči druhým do roviny.

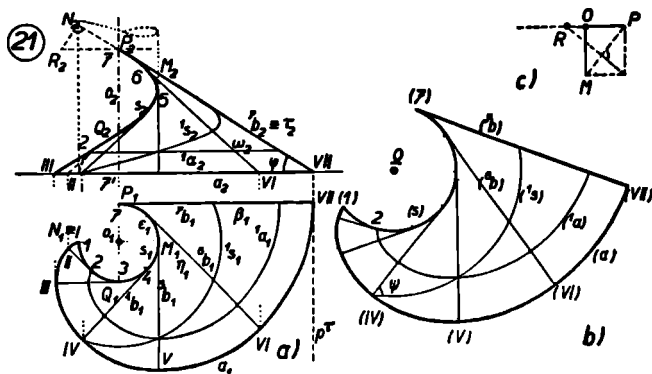
Souhrn η tečen prostorové křivky s (obr. 20b) je tedy přímková plocha rozvinutelná.

Libovolná rovina sečná σ protíná η v křivce k , která má na křivce s v bodě U úvrat; pouze v tom případě, když σ prochází tečnou u křivky s v bodě U , nemá průsečná křivka k v U úvratu. Křivka s se jmenuje *hranou vratu* nebo *úvratovou křivkou* plochy η .

Dvě křivky m a n plochy η , které se protínají v úhlu φ , přejdou po rozvinutí plochy do roviny (nebo jak se též říká, po její komplanaci) ve dvě křivky (m) , (n) , které se protnou

rovněž v úhlu φ . Ani jejich délky se rozvinutím do roviny nezmění. Křivka vratu s plochy η přejde po rozvinutí v křivku (s) a poloměr křivosti v libovolném jejím bodě je též, jako poloměr v odpovídajícím mu bodě křivky s .

4,1. Rozvinutelná plocha šroubová. Zvolme (obr. 21a) šroubovici s o ose o kolmé k π ! První průmět je kružnice s_1 ,



druhý je sinusoida [srv. (1) str. 514 a násl. a (2) str. 95 a násl.]. Tečny křivky s svírají s první průmětnou stále též úhel φ , jejich stopy I, II, \dots, VII vyplňují evolventu a kružnice s_1 . Kdybychom vytkli v rovině β tečnu ${}^{\gamma}b$ se stopou VII a nabalovali rovinu β i s tečnou ${}^{\gamma}b$ na rotační plochu válcovou ε , proběhne stopa VII evolventu a , všechny polohy pohybující se tečny obalí vytčenou šroubovici a vyplní rozvinutelnou plochu η tečen šroubovice t. zv. *rozvinutelnou plochu šroubovou*.

Tečné roviny této plochy η jsou dány vždy příslušnou povrchovou přímkou a tečnou ke stopě a . Tečná rovina τ podél přímky ${}^{\gamma}b$ je určena touto přímkou a stopou p^r kolmou k ${}^{\gamma}b_1$. Je z toho patrné:

Rozvinutelná plocha šroubová vznikne též jako obalová plocha rovin, dotýkajících se křivky a a svírajících s π stálý úhel φ . Její přímočaré charakteristiky jsou normálami křivky a a svírají s π rovněž úhel φ .

Rovina ω rovnoběžná s první průmětnou protíná plochu η v křivce 1a . Body křivek a a 1a na všech povrchových přímkách mají stejnou svislou odlehlost, kolmou k π , a úsečky jimi stanovené stejný spád $\operatorname{tg}\varphi$, proto i první průměty těchto úseček, položené v normálách křivky a_1 musí být stálé velikosti. Křivky a a 1a jsou křivky rovnoběžné a i jejich průměty a_1 a 1a_1 na první průmětnu jsou equidistantní křivky. Tedy:

Řezy rovin kolmých k ose o rozvinutelné plochy šroubové jsou mezi sebou shodné evolventy kruhové.

Vytkneme-li na př. na povrchové přímce 4 IV bod IV a sledujeme-li jeho pohyb při šroubovém pohybu, určeném křivkou s , seznáme, že probíhá šroubovicí 1s souosou s křivkou s a o téže výšce závitu. Z odst. 4,0 plyne:

Tečné roviny plochy η jsou oskulačními rovinami šroubovice s .

Tečná rovina plochy η podél přímky $^7b \equiv 7 VII$ je rovina $\tau \perp \nu$. Protíná plochu válcovou ε , na níž je položena šroubovice s v elipse, která má vrcholy P, Q pro osu vedlejší a M, N pro osu hlavní. Poloosa vedlejší je rovna poloměru r válcové plochy ε , poloosa hlavní má délku $r : \operatorname{tg}\varphi$ a proto poloměr křivosti uvažované elipsy pro vrchol P osy vedlejší je roven $r : \operatorname{tg}^2\varphi$ (srv. obr. 21c). Hodnotu tohoto poloměru získáme v úsečce P_2R_2 , kde $N_2R_2 \perp \tau_2$ a $R_2P_2 \perp o_2$. Oskulační kružnice uvažované elipsy, která je průmětem šroubovice s směrem o do oskulační roviny τ šroubovice, má tudíž tři souměrné body společné se šroubovicí s a je proto její oskulační kružnicí v bodě P .

Rozvíňme část šroubové plochy vytčenou šroubovicí s , povrchovou přímkou 7b a půdorysnou stopou a do roviny

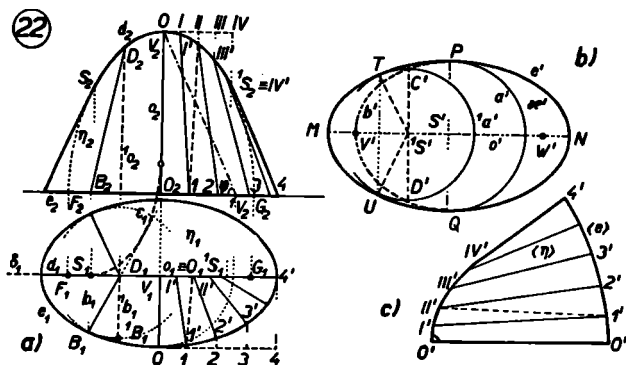
(obr. 21b)! Šroubovice s , protože má ve všech svých bodech též poloměr křivosti ρ a protože její křivost se rozvinutím nezmění, rozvine se do křivky (s) konstantní křivosti, t. j. do kružnice (s) opsané kolem bodu Ω poloměrem $\rho = r : \operatorname{tg}^2 \varphi$. Skutečná délka šroubovice mezi půdorysným stopníkem I a bodem P se získá odvinutím tečné roviny od válce ε a jeví se jako přepona γVII pravouhlého trojúhelníka $\triangle \gamma \gamma' VII$. Tuto délku nanese se na (s) od bodu (I) do bodu (γ); rozdělíme ji na tolik stejných dílů, na kolik jsme rozdělili šroubovici s , tedy zde na šest. Tečny v těchto bodech sestrojené ke křivce (s) jsou povrchové přímky plochy η v rozvinutí. Nanese-li na ně od dotkových bodů s křivkou (s) úsečky rovné délkám povrchových přímek plochy η mezi stopníkem a dotkovým bodem s křivkou s , získáme body rozvinutí stopy plochy η . Povrchové přímky plochy η jsou ke stopě a kolmé a tento pravý úhel se rozvinutím nemění, z čehož je patrné, že (a) je evolventou kružnice (s), protínajíc její tečny kolmo.

Rovinné řezy rozvinutelné plochy šroubové kolmé k její ose dávají v rozvinutí evolventy kružnice, do níž přešla po rozvinutí plochy její šroubovice vratu.

Je zřejmo, že (a) a (1a) jsou aequidistantní, kde (1a) je řez roviny $\omega \perp o$ s plochou η v rozvinutí. Šroubovice 1s určuje na povrchových přímkách uvažované plochy se šroubovicí vratu s stejné úsečky, proto v rozvinutí se objeví šroubovice 1s v kružnici (1s) soustředné s (s). Kružnice (1s) protíná povrchové přímky v stálém úhlu φ , proto i 1s protíná povrchové přímky plochy η stále v úhlu φ . Protože povrchové přímky plochy η jsou jejími křivkami největšího spádu vzhledem k první průmětně, jsou šroubovice $^2s, \dots$ plochy η jejími křivkami stejného spádu vzhledem k průmětně.

Je-li 1s hrana silnice stejného stoupání, je η plochou stejného spádu touto hranou vedenou a to mezi 1s a a plochou omezující násyp, část mezi 1s a s plochou, kterou užíváme k omezení výkopu.

Z provedeného postupu je zřejmo, že v tomto případě bylo možno provést rozvinutí dané plochy geometrickým postupem v mezích možných chyb, daných grafickým provedením za možnosti kontroly propočtem. Není tomu tak vždycky.



4.2. Rozvinutelná plocha stejného spádu. Jako další příklad uvažujme plochu stejného spádu k první průmětně, danou řídicí elipsou e ! (Obr. 22a.) Dvě roviny proložené tečnami křivky e ve stejném spádu protnou se v průsečnici, jejíž první průmět púlí úhel příslušných stop jda jejich průsečíkem, tedy v mezném případě, pro dvě roviny nekonečně blízké, získáme jako jejich průsečnici *normálu* křivky e , která svírá s π daný úhel φ , jehož $\text{tg} \varphi$ je daným stálým spádem.

Z toho je patrné, že *všechny půdorysy povrchových přímek hledané plochy η obalí evolutu ϵ_1 elipsy e* ; povrchové přímky samy dotýkají se válce ϵ jdoucího touto evolutou ϵ_1 kolmo k první průmětně, obalující v něm příslušnou křivku vratu, kterou se však zde nebudeme zabývat. Plocha η má tři roviny kolmé souměrnosti, rovinu π a obě roviny vedené k ní osami elipsy e kolmo. Má tři osy kolmé souměrnosti v prů-

sečnicích těchto rovin a je k jejich průsečíku středově souměrná.*)

V rovině δ jdoucí hlavní osou elipsy e kolmo k π je *dvojná křivka* d plochy η ; vždy dvě k δ souměrně položené povrchové přímky se na ní protínají v témž bodě, na př. přímky jdoucí body B, F protínají se na d v bodě D .

Abychom vyšetřili křivku d , postupujeme takto: Otočme úsečku \overline{BD} okolo přímky DD_1 do polohy 1BD rovnoběžné s třetí hlavní průmětnou, stopa B otočila se do polohy 1B ! Provedeme-li toto se všemi povrchovými přímkami, přetvořili jsme uvažovanou plochu η v plochu válcovou, jejíž povrchové přímky svírají s π úhel φ a která protne rovinu δ v křivce afinní ke své základně v π . Souhrn bodů 1B však snadno vyšetříme! Mysleme si plochu kulovou κ (obr. 22b), která se dotýká roviny π a sestrojme její vržený stín na tuto rovinu pro rovnoběžné světelné paprsky! Obrysem vrženého stínu bude tu elipsa, která má ve vržených stínech nejvyššího a nejnižšího bodu dané plochy kulové na π svá ohniska V' a W' a která se jeví jako obálka vržených stínů jednotlivých kružnic plochy κ , rovnoběžných s π . Koncové body průměrů těchto kružnic kolmých k rovině světelného poledníku leží na hlavní kružnici plochy κ , jdoucí nejvyšším a nejnižším bodem a proto průměry vržených stínů těchto kružnic rovnoběžné s vedlejší osou vrženého stínu vyplňují elipsu, jdoucí vrcholy vedlejší osy a ohnisky vrženého stínu e' plochy kulové κ . Tím je dokázáno, že otočíme-li normály elipsy e' okolo průsečíku ${}^1S'$ s hlavní osou do polohy rovnoběžné s osou vedlejší, vyplní jejich otočené paty D', C', \dots elipsu, mající v ohniskách e' své dva vrcholy a další dva ve vrcholech vedlejší osy křivky e' .

*) *Poznámka.* Každou tečnou elipsy e jdou *dvě* roviny tečné, které svírají s π daný úhel φ ; jedna se sklání *nad* plochou elipsy, druhá *ven*. V obraze je uvažována jen obálka prvních rovin, obálka druhých rovin, která je dalším dílem plochy η , je k první podle π kolmo souměrně sdružená.

Vraťme se nyní zpět do obrazce 22a! Nanesme od O_2 do 1V_2 na e_2 poloosu vedlejší elipsy e ! Přímka $V_2{}^1V_2$ vedená v úhlu φ k e_2 dává již v O_2 nárys V_2 vrcholu dvojně elipsy d , která prochází ohnisky F a G a je tím plně určena. Stanovme středy křivosti S_1 a 1S_1 elipsy e_1 pro vrcholy hlavní osy a vyhledejme na d body S a 1S , jimž jsou uvedené středy prvními průměty! Normála ve vrcholu hlavní osy elipsy e a její soumězná protínají se ve středu křivosti, z toho patrně:

Povrchové přímky plochy η jdou pouze od bodu S dvojně elipsy d přes vrchol V do bodu 1S . Dalšími body dvojně křivky d neprocházejí reálné povrchové přímky.

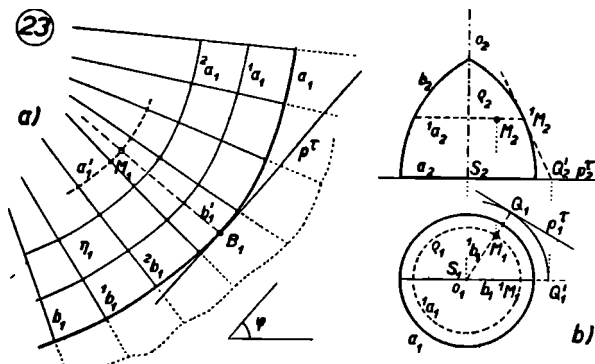
Povrchové přímky plochy η lze pohodlně rýsovat na základě věty, že vzdálenost paty normály elipsy od vedlejší osy má se ku vzdálenosti průsečíku s osou hlavní od středu jako se má hlavní poloosa ku vzdálenosti středu křivosti pro vrchol hlavní osy od středu křivky. Rozdělíme-li proto poloosu hlavní $\overline{O_1 4}$ (nebo tečnu $0 4$) na určitý počet dílů a rovnoběžkami s vedlejší osou vyhledáme k nim v elipse e_1 body $0, I', 2', 3', 4', \dots$ a učiníme-li totéž s úsečkou ${}^1S_1 O_1$ (nebo s tečnou v bodě V_2 délky $\overline{O IV} = \overline{O_1 {}^1S_1}$) a vyhledáme-li poté v d rovnoběžkami s o_2 body $0, I', II', III'$ a IV' , jsou spojnice $0 0, I' I', 2' II', \dots$ povrchové přímky hledané plochy. Plocha není tu uvažována dále přes dvojnou křivku d , protože tato její část nenachází v praxi upotřebení.

Plocha obsahuje dvě soustavy povrchových křivek: Povrchové přímky, které jsou jejími křivkami největšího spádu a rovinné řezy v rovinách rovnoběžných s rovinou elipsy e . Tyto rovinné řezy jsou aequidistanty elipsy e .

Chceme-li provést rozvinutí plochy η do roviny, vytkneme si dostatečné množství povrchových přímek a předpokládáme, že části, na př. $I' II' I'$ a $II' I' 2'$ se nepatrně liší od trojúhelníků stanovených těmito body. Tyto částice ve skutečné velikosti pak k sobě skládáme (obr. 22c). Křivka $\langle e \rangle$ musí tu při správném rýsování vyjít jako kolmá trajektorie povr-

chových přímek v rozvinutí. Je zřejmé, že tu provádíme rozvinutí jen *přibližně* a přiblížení se k přesnému výsledku, že závisí na množství zvolených povrchových přímek a zejména na přesnosti provádění.

Obdobně bychom postupovali, kdyby místo elipsy byla zvolena hyperbola nebo parabola. Dvojná křivka v rovině



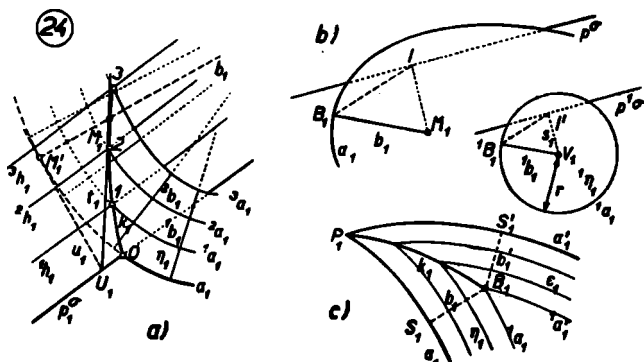
kolmé souměrnosti by byla pak hyperbola nebo parabola. [Bližší viz ⁽¹⁾ str. 543 a násl.]

Je-li stopa plochy stejného spádu η (obr. 23a) obecná křivka a , jsou povrchové přímky plochy normály křivky a , svírající s rovinou křivky a daný, stálý úhel φ a v rovinách rovnoběžných s rovinou křivky a jsou položeny křivky $^1a, ^2a, \dots$, které jsou aequidistantami křivky a . Tečná rovina τ v libovolném bodě M je dána povrchovou přímkou b' , normálou křivky a a tečnou ke křivce a' aequidistantní ke křivce a a jdoucí bodem M . Stopa p^r je tečna křivky a v bodě B , stopě přímky b' .

Ploch stejného spádu můžeme použití i při plochách rotačních (obr. 23b). Abychom stanovili v bodě M plochy ϱ tečnou rovinu, uvažme, že podél rovnoběžky 1a nesoucí bod M se plochy ϱ dotýká plocha stejného spádu — plocha

kuželová. Její stopa je aequidistanta křivky 1a ; proto, opíšeme-li kolem o_1 kružnici poloměrem $\overline{S_2Q_2'}$, je tečna p_1^τ vedená k ní v průsečíku Q_1 spojnice o_1M_1' s touto kružnicí již stopou hledané tečné roviny τ .

4.3. Rovinný řez a průnik dvou ploch stejného spádu. Rovinný řez plochy η stejného spádu (obr. 24a) sestojí se velmi snad-

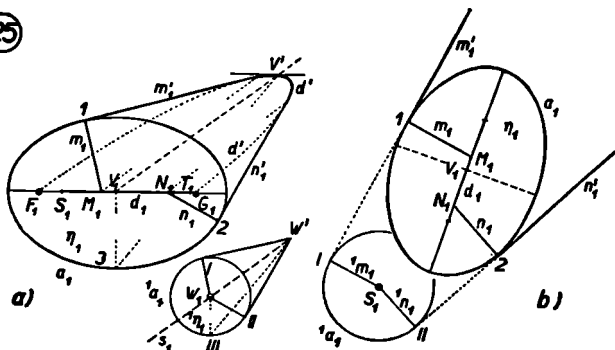


no. Rovina sečná budiž dána stopou a hlavními přímkami ${}^1h, {}^2h, \dots$, plocha η stopou a a křivkami ${}^1a, {}^2a, \dots$ v úrovni přímků ${}^1h, {}^2h, \dots$. Spojnice průsečíků přímků ${}^1h, \dots$ a křivek ${}^1a, \dots$ je hledaná průsečná křivka, tečna v bodě M je průsečnice roviny sečné σ a tečné roviny bodu M , dané stopou a , tečnou to křivky a v bodě M' , stopníku povrchové přímky b , nesoucí na η bod M .

Rovinný řez můžeme však stanoviti i jiným způsobem: Buď dána stopa a (obr. 24b) plochy η stejného spádu $\text{tg}\varphi = \text{konst.}$ a stopa p^σ sečné roviny σ . Libovolným bodem V vedme kuželovou plochu ${}^1\eta$, mající k nákresně též spád $\text{tg}\varphi$. Stopou této kuželové plochy je kružnice 1a a dále určíme stopu $p^{1\sigma} \parallel p^\sigma$ roviny ${}^1\sigma \parallel \sigma$ vedené bodem V . Zvolme libovolnou povrchovou přímku b plochy η ; b_1 je normálou křivky

a a má v B svůj stopník. S přímkou b vedme na l_1 rovnoběžku 1b , ${}^1b_1 \parallel b_1$, dále stanovme přímkou největšího spádu $I'V$ roviny σ a její stopník I' ! Poté položíme stopníkem B přímkou $BI \parallel BI'$ a bodem I vedme přímkou největšího spádu roviny σ ! Její průsečík M s b je již bodem hledané křivky sečné, neboť přímky b a IM jsou různoběžné, ležící

25



v rovině rovnoběžné s ${}^1BVI'$. Je z toho též patrné, že $IM_1 : B_1M_1 = I'V_1 : {}^1B_1V_1 = s_1 : r = \text{konst.}$

Rovinný řez plochy stejného spádu je křivka, která je souhrnem bodů majících od stopy plochy a stopy sečné roviny stálý poměr vzdáleností.

Touž vlastnost má i její kolmý průmět na rovinu řídicí křivky a .

V obr. 24c stanovena průsečná křivka k dvou ploch stejných spádů $tg\varphi$, $tg\psi$ nad křivkami a a a' . I tu je patrné, že průsečná křivka je souhrnem bodů, které mají v prostoru i v kolmém průmětu na rovinu křivek a a a' stálý poměr vzdáleností od křivek a a a' .

Je-li $tg\varphi = tg\psi$ a tvoří-li křivky a, a', \dots ornament v ploše,

může se tento velmi zdůraznit, stanoví-li se nad celkem křivek a, a', \dots plochy stejného spádu s příslušnými průsečnicemi. Takto vzniklý prostorový útvar nad základní rovinou bývá označován jménem *plošný ornament* a byl svého času v architektuře velmi oblíben.

4,4. Osvětlení ploch stejného spádu. V obr. 25a zvolena část plochy stejného spádu η nad elipsou a a plocha omezena dvojnou křivkou. Zvolme bod W a proložme jím všechny přímky rovnoběžné k povrchovým přímčkám plochy η . Získali jsme tak *řídící plochu kuželovou*, rotační plochu ${}^1\eta$ o podstavě 1a . Osvětleme tuto pomocnou plochu! Vrcholový paprsek s má stopu v bodě W' , z něho vedené tečny dávají mez stínu vrženého plochy ${}^1\eta$ a přímky $I W, II W$ jsou příslušné meze vlastního stínu. Tečny m', n' vedené k elipse a rovnoběžné s vrženými stíny plochy ${}^1\eta$ jsou vržené stíny plochy η . Jsou to stopy tečných rovin, dotýkajících se plochy η podél přímek m a n rovnoběžných s mezemi vlastního stínu pomocné kuželové plochy ${}^1\eta$. Jsou to přímky, podél nichž tečné roviny plochy η jsou rovnoběžné k světelnému paprsku a proto hledané meze stínu vlastního. Vržený stín byl doplněn vrženým stínem d' dvojnou elipsy d .

Rovnoběžné osvětlení ploch rozvinutelných vyšetříme tak, že vyhledáme meze vlastního stínu jejich řídících ploch kuželových a s těmi proložíme na ploše hledané meze rovnoběžně.

V obr. 25b je osvětlena plocha stejného spádu nad elipsou a svítícím bodem S . Tento bod byl zvolen za vrchol řídící plochy kuželové. Jeho stopou je kružnice 1a . Křivkám a a 1a vedeny společné tečny; jsou to stopy společných tečných rovin a proto přímky $1 M, 2 N, \dots$, podél nichž se tyto roviny dotýkají plochy η , jsou hledané meze vlastních stínů, jako souhrn tečných bodů, jejichž tečné roviny jdou svítícím bodem. Vržené stíny m', n', \dots mezi vlastních stínů jsou stíny vrženými. Tedy máme výsledek:

Rozvinutelnou plochu osvětlíme středově ze svítícího bodu tak, že svítící bod zvolíme za vrchol řídící plochy kuželové a

sestrojíme roviny tečné společně oběma těmto plochám. Tyto společné tečné roviny dotýkají se plochy rozvinutelné podél hledaných mezi vlastního stínu.

Společné tečné roviny mají stopy ve společných tečných stop dané plochy a řídicí plochy kuželové na libovolné rovině.

Z obr. 25b je patrné, že bodem S lze vést k ploše η čtyři tečné roviny, neboť křivky a a 1a mají čtyři společné tečny. Je proto plocha stejného spádu nad kuželosečkou plochou čtvrté třídy.

4.5. Plochy římsově. Zvolme (obr. 26a) plochu válcovou $\varepsilon \perp \pi$! V tečné rovině β této plochy zvolme libovolnou křivku b — v obrazci je dána sklopením (b) do průmětné roviny π . Odvíjí-li se nyní rovina β od plochy válcové ε popisuje každý bod křivky b v rovině α kolmé k ε evolventu této plochy, totožnou s evolventou křivky e položené na ε v rovině α . Křivka b probíhá při tom nekonečně mnoho poloh, aniž by měnila svůj tvar. Známe proto na ploše η soustavu shodných křivek $b, ^1b, \dots$ v tečných rovinách válcové plochy ε a soustavu křivek $a, ^1a, \dots$ v rovinách kolmých k povrchovým přímkám válcové plochy ε . Jsou to křivky mezi sebou aequidistantní, rovnoběžné.

Naznačeným způsobem se vytahují plechovou šablonou na stavbách římsoy a proto se nazývají tyto plochy římsovými plochami.

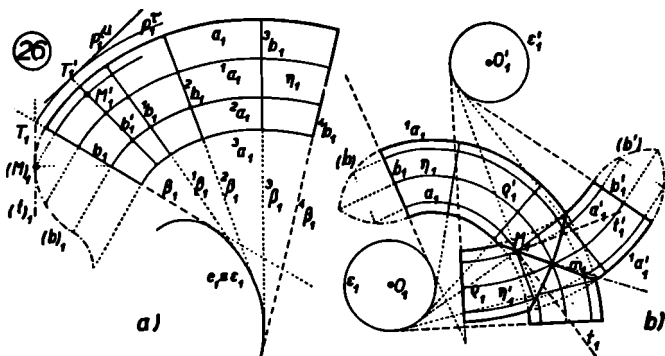
Vytkneme-li v libovolném bodě M křivky b tečnu t a stanovíme její stopu T na nákresně, probíhá při vytváření plochy přímka t rozvinutelnou plochu stejného spádu k průmětně, bod T stopu p^r této plochy, která je rovnoběžnou křivkou ke křivkám soustavy $a, ^1a, \dots$ Za pomoci křivky p^r stanovíme snadno tečnou rovinu μ stopou p^μ pro bod M' na křivce b' , mající v M' tečnu o stopě T' .

Za pomoci křivek a, a', \dots snadno vyhledáme na ploše η jak rovinné řezy, tak i proniky s plochami, jejichž řezy s ro-

vinami rovnoběžnými s nákresnou jsou známé. Je patrné, že:

Plocha římsová je zevšeobecněním plochy rotační, osa této rotační plochy byla nahrazena řídicí plochou válcovou ε .

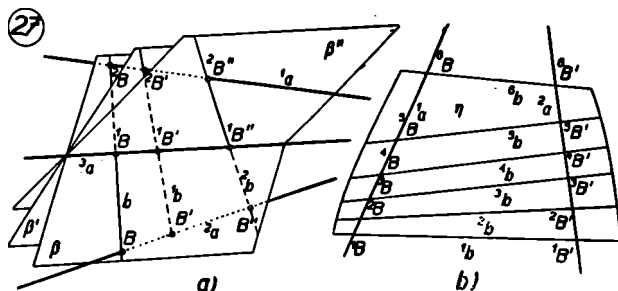
V obr. 26b byly zvoleny dvě římsové plochy η a ${}^1\eta$, jejichž řídicí plochy válcové $\varepsilon \perp \pi$ a $\varepsilon' \perp \pi$ jsou rotační. Vytvo-



řující křivky b a b' (dané v oklopeních) jsou shodné a shodně umístěné vzhledem k nákresně, stopy 1a a ${}^1a'$ jsou položeny přímo v průmětně. Průsečnou křivku vyšetříme snadno uvažováním křivek $a, {}^1a, \dots$ a $a', {}^1a', \dots$ obou ploch v rovinách rovnoběžných s π a vždy od ní stejně odlehých. Tečnu v bodě M průsečné křivky stanovíme v průmětu buď jako symetrálu průmětů stop t_1 a t_1' tečných rovin obou ploch v bodě M nebo, protože $\varrho_1 \perp T_1$ a $\varrho_1' \perp t_1'$, jako symetrálu průmětů rovin ϱ a ϱ' . Ježto plochy η a ${}^1\eta$ ovijí v nekonečně mnoha závitech plochy válcové ε a ε' , má proniková křivka tvar závitnice.

5. PLOCHY ZBORCENÉ

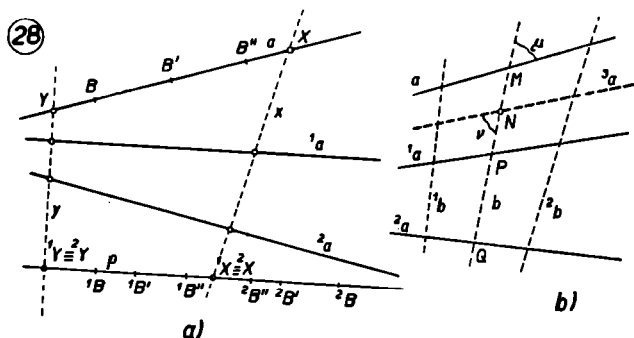
5.0. Vytvoření zborcené plochy. V odst. 4 byl sledován takový pohyb přímky v prostoru, že vždy z jedné polohy přecházela do následující blízké tak, že s ní byla různoběžná. Vznikla tak plocha přímková, sestávající ze souhrnu tečen prostorové křivky; libovolné dvě její povrchové přímky byly mezi sebou mimoběžné, ale každé dvě soumězné se



protínaly. Plochu bylo možno rozvinouti bez porušení do jedné roviny. Takto vzniklé plochy jsou obalovými plochami pohybující se roviny, nazývají se plochy rozvinutelné. Přímce v prostoru je však možno předepsati i jiný pohyb a to takový, aby přímka vyplňující plochu přecházela z jedné polohy do polohy soumězné tak, aby byla vždy k této další poloze mimoběžná. Vznikne tak *přímková plocha*, která nemá na svém povrchu obecně ani v limitě žádný rovinný proužek a proto ji nelze rozvinouti, rozložití bez porušení do roviny, plocha se nazývá *zborcenou*.

Pohyb přímky, která má vytvořiti zborcenou plochu, nejsnáze se stanoví tak, že se požaduje, aby pohybující se přímka stále protínala tři dané křivky v prostoru 1a , 2a , 3a , lhotejno, zda jsou to křivky rovinné nebo prostorové. Označují se jako *řídící křivky* dané zborcené plochy.

5.1. Vytvoření zborčeného hyperboloidu a jeho vlastnosti. Povšimněme si nejprve případu, kdy 1a , 2a , 3a jsou tři navzájem mimoběžné přímky (obr. 27a)! Proložme přímkou 3a roviny β , β' , β'' , ... a vyhledejme jejich průsečíky B , B' , B'' , ... s přímkou 2a a průsečíky 2B , $^2B'$, $^2B''$, ... s přímkou 1a . Uvedené řady bodové jsou v perspektivním vztahu k svazku rovin β , β' , β'' , ... o ose 3a a proto jsou navzájem promětné.



Jejich spojnice $b \equiv B^2B$, $^1b \equiv B'^2B'$, ... jsou žádané přímky, které vyplňují zborčenou plochu $\eta \equiv (^1a, ^2a, ^3a)$, kde v závorce jsou uvedeny řídicí útvary. Zaměníme-li úkol přímek 3a a 2a , shledáme, že i v přímce 3a vzniklá řada bodová 1B , $^1B'$, $^1B''$, ... je promětná s oběma řadami v přímkách 1a a 2a .

Je z toho patrné, že zborčená plocha η určená třemi mimoběžkami 1a , 2a , 3a je totožná s plochou η (obr. 27b), vyplněnou přímkami 1b , 2b , ..., které spojují sdružené body 1B , $^1B'$; 2B , $^2B'$, ... promětných řad bodových, položených ve dvou mimoběžkách 1a , 2a .

Dokážeme, že η je plocha druhého stupně! Vytkněme (obr. 28a) přímky a , 1a , 2a a další přímkou p navzájem mimoběžné! Řadu bodů B , B' , B'' ... v přímce a promítněme na přímkou p jednou z přímkou 1a do řady 1B , $^1B'$, ... po druhé z přímkou

2a do p do řady $^2B, ^2B', \dots$. Tyto řady jsou promětné s řadou v přímce a , proto jsou i navzájem promětné a mají obecně dva samodružné body $^1X \equiv ^2X, ^1Y \equiv ^2Y$, jimiž lze vésti k mimoběžkám $a, ^1a, ^2a$ společné příčky x, y . Je z toho patrné, že přímka p je profata dvěma přímkami x, y plochy η a protože η protíná libovolně zvolenou přímku p ve dvou bodech, je η plochou *druhého stupně*.

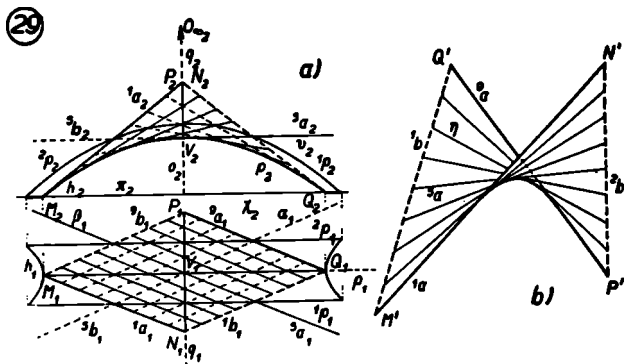
Rovina, vedená libovolnou přímkou, na př. x , této plochy, musí protínati η ještě v další přímce, z čehož je patrné, že η nese na svém povrchu nekonečně mnoho mezi sebou mimoběžných přímek $b, ^1b, ^2b, x, y, \dots$, které protínají dané řídicí přímky $a, ^1a, ^2a$, tvoříce *jednu soustavu povrchových přímek*. Na téže ploše η jsou další nekonečně mnohé, mezi sebou mimoběžné přímky, k nimž patří $a, ^1a, ^2a$ a které protínají všechny přímky $b, ^1b, \dots$ první soustavy, tvoříce tak *druhou soustavu povrchových přímek* plochy η druhého stupně.

Každým bodem plochy η procházejí dvě povrchové přímky různých soustav a určují jeho tečnou rovinu. Plocha η částečně klesá pod, dílem vystupuje nad tečnou rovinu, protínajíc ji ve zmíněných dvou přímkách. Naopak v každé tečné rovině zborcené plochy η druhého stupně — obecně je to *hyperboloid* — jsou položeny dvě přímky různých soustav určující svým průsečíkem příslušný dotkový bod.

Toho použijeme k vyhledání tečné roviny plochy η (obr. 28b). Buď plocha η určena přímkami $a, ^1a, ^2a$! Vedeme-li bodem M přímku a příčku b mimoběžek $^1a, ^2a$, je rovina μ , určená přímkami a a b již tečnou rovinou μ v bodě M . Proložíme-li přímkou a rovinu μ , je to tečná rovina plochy η . Spojnice jejich průsečných bodů P, Q s přímkami $^1a, ^2a$ dává přímku b druhé soustavy povrchových přímek plochy η , která protíná přímku a první soustavy v hledaném dotkovém bodě M roviny μ . Zvolíme-li bod N na přímce b , nebo proložíme-li touto přímkou tečnou rovinu ν , musíme mimo přímku b zjistiti ještě další dvě přímky téže soustavy 1b a 2b a pak řešíme případ pro trojtinu $b, ^1b, ^2b$ stejně jako jsme řešili při dané trojtině $a, ^1a, ^2a$.

Vraťme se k obr. 27a! Přímkou 3a první soustavy zborčené plochy η druhého stupně procházející roviny $\beta, \beta', \beta'' \dots$ obsahují přímkou $b, {}^1b, {}^2b, \dots$ druhé soustavy, které vytyčují v 3a dotykové body ${}^1B, {}^1B', {}^1B'', \dots$ těchto rovin. Z toho je patrné, že:

Svazek tečných rovin plochy η druhého stupně jdoucích povrchovou přímkou plochy je promětný s řadou dotykových bodů těchto rovin v téže přímce.



Zborčená plocha druhého stupně η určená trojicí libovolně zvolených řídicích přímek ${}^1a, {}^2a, {}^3a$ protíná nevlastní rovinu v reálné kuželosečce a nese na svém povrchu elipsy, paraboly i hyperboly a je prostorově afinní plochou k rotační ploše, která byla probrána v odst. 2,6. Nazývá se *obecný, jednodílný* nebo *zborčený hyperboloid*.

Je tedy zborčený hyperboloid souhrnem spojnic sdružených bodů dvou promětných řad na dvou mimoběžkách.

5.2. Vytvoření hyperbolického paraboloidu a jeho vlastností. Po všimněme si nyní případu, kdy řady v uvažovaných mimoběžkách budou podobné nebo shodné (obr. 29a). Vytkněme

body M, N, P, Q po dvou kolmo souměrně sdružené k přímce $o \perp \pi$, spojnice $MQ \perp NP$! Přímky $MN \equiv {}^1a$ a $PQ \equiv {}^2a$ buďtež spojnicemi dvou podobných řad, body M, N, \dots jsou tu sdruženy s body Q, P, \dots . Spojnice ${}^1b, \dots, {}^2b$ sdružených bodů obou řad vyplňují zborcenou plochu druhého stupně η , která obsahuje i úběžnou spojnicí nevlastních úběžníků obou podobných řad. Plocha η obsahující jednu úběžnou přímku, musí mít společnou nezbytně s nevlastním útvarům v prostoru další úběžnou přímku, dotýkající se v jejich průsečíku O_∞ úběžné roviny; je proto *paraboloidem*.

Ježto obecné roviny sečné musí obsahovati dva různé reálné úběžné body položené v úběžných přímkách plochy, budou obecné rovinné řezy hyperboly. Jen roviny procházející bodem O_∞ protínají plochu v parabolách.

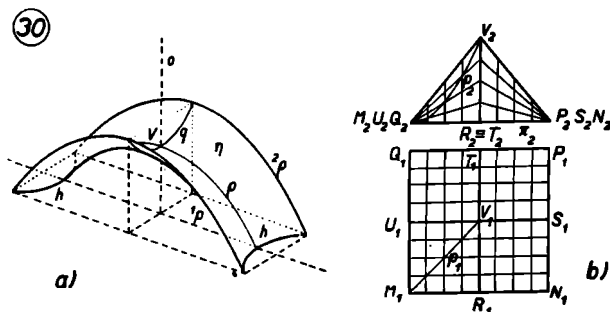
Na rozdíl od paraboloidu uvedeného v odst. 2,63 označujeme tento *zborcený paraboloid* přívlastkem *hyperbolický*.

Vytkněme osou o roviny α, β rovnoběžné s půdorysně promítacími rovinami přímek MQ, NP resp. MN, PQ ! Tyto roviny obsahují úběžné přímky plochy η , která se může vytvořiti i jako souhrn přímek, které protínajíce přímky 1a a 2a jsou rovnoběžny s rovinou α , nebo různoběžkami k přímkám ${}^1b, {}^2b$ rovnoběžnými s rovinou β . Libovolná rovina σ protíná plochu η v hyperbole, která má v průsečnicích roviny σ s rovinami α, β , které se nazývají *řídícími rovinami plochy*, směry svých asymptot. Tak rovina π protíná plochu η v hyperbole h , která má v průsečnicích α_1, β_1 řídících rovin na π své asymptoty. Jsou to přímky rovnoběžné s povrchovými přímkami ${}^5a, {}^5b$ plochy, položenými v tečné rovině v bodu V . Roviny (M, o, P) a (N, o, Q) protínají plochu η v parabolách p a q a jmenují se *hlavní roviny plochy*. Je zřejmo, že takto zvolená plocha je kolmo souměrná k rovinám parabol p a q , které jmenujeme *hlavními řezy plochy*. Je též kolmo souměrná k přímce o , která je *osou plochy* a bod V na ní položený o tečné rovině $v \perp o$ je jediným v konečnu položeným *vrcholem plochy*. Rovnoběžné roviny protínají η v hyperbolách podobných a podobně položených, roviny

rovnoběžné mezi sebou a současně rovnoběžné s osou o protínají plochu ve shodných parabolách.

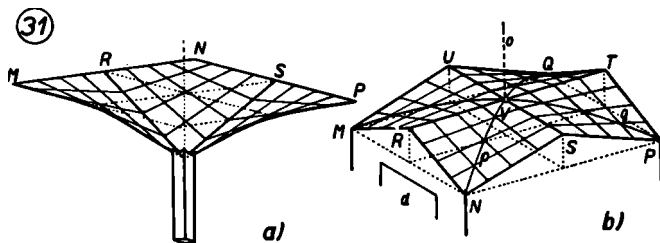
Je-li $\alpha \perp \beta$, jsou křivky v rovinách kolmých k ose o rovnosé hyperboly a paraboly p a q mají též parametr. Tento zvláštní paraboloid je označován jako *orthogonální paraboloid*.

5,3. Použití hyperbolického paraboloidu v technické praxi. V technické praxi bývá zpravidla určen hyperbolický paraboloid t. zv. *zborceným čtyřúhelníkem*, t. j. body M', N', P', Q' , které



neleží v jedné rovině (obr. 29b). (Srov. (4)). Spojnice $M'N'$, $P'Q'$ jsou dvě přímky 1a , 2a jedné soustavy povrchových přímek, spojnice $M'Q' \equiv {}^1b$, $N'P' \equiv {}^2b$ povrchové přímky druhé soustavy. Rovina α' rovnoběžná s přímkami 1b , 2b je jednou řídicí rovinou, rovina β' rovnoběžná s přímkami 1a , 2a druhou řídicí rovinou, jejich průsečnice o' je směr osy. Rovina ${}^1v' \perp o'$ protne řídicí roviny ve dvou přímkách, s nimiž vedeme k dvojnám 1b , 2b a 1a , 2a rovnoběžné přímky, které určují tečnou rovinu v' daného paraboloidu ve vrcholu. Paraboly, které jsou na něm položeny v rovinách jdoucích osou o procházející vrcholem plochy a půlí úhel sevřený přímkami, které procházejí vrcholem, jsou hlavní řezy daného paraboloidu, odpovídající parabolám p, q plochy η v obr. 29a.

V obr. 29a jsou vyznačeny mimo stopy h na rovině π ještě dvě paraboly 1p , 2p shodné s hlavním řezem p . Část plochy η , omezená parabolami 1p a 2p a hyperbolou h (obr. 30a), je užívána nyní ve stavebnictví; provádí se ve ztuženém betonu ve značném rozpětí a slouží jako prvek, který řadě k sobě, dává vhodnou střechu nad leteckými hallami a továrními prostory. Příloha čís. VI předvádí vnější pohled na použité části s výtuhami ve vrcholu, příloha čís. VII ukazuje pohled na dvě osazené části zespoda.

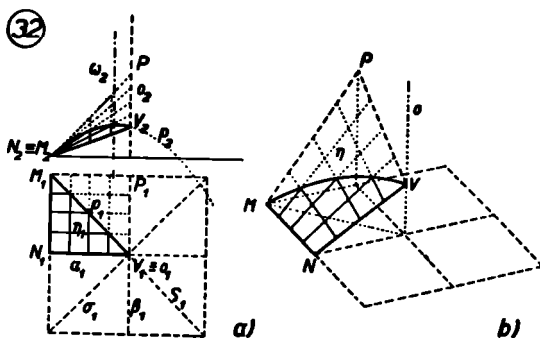


V obr. 30b je dán čtverec $MNPQ$ ve vodorovné rovině π . Střed y jeho stran jsou spojeny s bodem V položeným nad jeho středem. Tím vznikly čtyři zborčené čtyřúhelníky $MRVU$, $NRVS$, $PSVT$, $QUVT$. Jimi určené čtyři hyperbolické paraboloidy mají v rovinách UVS a RVT řídicí roviny, jsou to tedy orthogonální hyperbolické paraboloidy, body M , N , P , Q jdou jejich osy kolmo k rovině π . V rovinách MVR , NVQ jsou položeny paraboly, mající ve vrcholech daného čtverce vrcholy. V těchto bodech jsou tečné roviny ploch totožny s rovinou π . Tato skupina paraboloidů nehodí se dobře jako střecha, při malé vzdálenosti bodu V od π lze ji použít jako plochy stropní.

Obráceně použita (viz obr. 31a) slouží velmi dobře jako část střechy nad pracovišti nebo nádražními nástupišti. Dešťová voda odvádí se tu nosným sloupem. Použití této střechy nad pracovištěm podává příloha čís. VIII, v příloze

čís. IX je zas vidno, jak opakované skupiny řeší velmi vhodně zakrytí nádražního nástupiště.

V obr. 31b je zobrazeno jiné seskupení hyperbolických paraboloidů, velmi často užívané nyní ve stavebnictví. Nad stranami čtverce $MNPQ$ sestrojeny jsou čtyři stejně vysoké štíty o vrcholech R, S, T, U , jimiž jdou dva hřebeny, protínající se ve vrcholu V . Zborcené čtyřúhelníky, které tu



vznikly, určují dva hyperbolické paraboloidy o společném vrcholu V , jeden má hlavní řez parabolický v parabole p , druhý v parabole q . V bodě V je jejich společná tečná rovina vodorovná. Oddělíme-li polovinu použité soustavy a to část $MRNSVUM$, můžeme tuto část použít jako přístřešek, markýzu (francouzsky: la marquise) nad vchodem d ve zdi jdoucí hranou MN .

Ze statických důvodů nevolívá se bod V v téže výši jako body R, S, T, U , ale o něco výše. V tomto případě řeší střechu čtyři hyperbolické paraboloidy, tečné roviny v bodě V nejsou vodorovné. Uvedená skupina dochází hojného použití při nepatrné výšce jako konstrukce velmi vhodných stropů. V příloze čís. X je velmi pěkně zřejmý postup vypracování bednění pro skořepinovou střechu z hyperbolických paraboloidů.

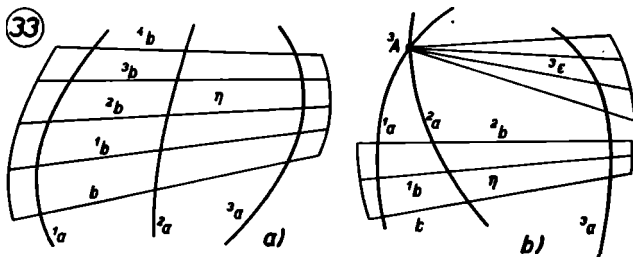
Dosud uvedené skupiny byly ze statických důvodů nahrazeny skupinou, zpravidla označovanou jako *Aimondova bání* (obr. 32a). Nad čtvrtinou čtverce zvolen je zborcený čtyřúhelník $MNVP$, strana MN je vodorovná, body V a P jsou v nestejně výši, bod P je výš. Řídící roviny stanoveného hyperbolického paraboloidu jsou promítací roviny přímk NV a VP , použitá plocha je opět orthogonální hyperbolický paraboloid. Jeho řez s rovinou jdoucí přímkou MV svisle je parabola o svislé ose, mající svůj vrchol mimo bod V ; její osa promítá se v náryse do přímky ω_2 . Z této plochy η použije se jen část nad trojúhelníkem $M_1N_1V_1$ půdorysu a k ní se připojí dalších sedm dílů postupně k sobě kolmo souměrných podle rovin $\alpha, \sigma, \beta, \zeta$. Tím dostáváme tvar staticky velmi výhodný, který nemá nad středem půdorysu nejvyšší části. Z půdorysu a nárysu je těžko představit si tvar použité části hyperbolického paraboloidu, proto je použitá část plochy η vyznačena v axonometrickém pohledu v obr. 32b a připravená forma pro zhotovení Aimondovy bání je zobrazena v příloze čís. XI.

Stejně jako bylo použito hyperbolického paraboloidu určeného zborceným čtyřúhelníkem, může být použito i plochy zborceného hyperboloidu v mezích daného zborceného čtyřúhelníka, ovšem místo řad podobných nastupují v jeho stranách řady obecné promětné. Jako příklad může sloužit model studie na bání nad pravidelným mnohoúhelníkem pro železobetonovou skořepinu. Model byl vypracován ve stud. roce 1948-49 na vysoké škole inž. stavitelství. Příl. č. XI Hyperbolické paraboloidy používají se dále při řešení střech, ve stereotomii při spojování zdí z tesaného kamene o různých spádech [viz k tomu více v (1) str. 808 a násl. a (5)], rovněž nachází použití při pracích zemních v stavitelství silničním a železničním při vyrovnávání spádů a v poslední době i ve stavbách vodních na převádění širších profilů do užších.

5.4. Obecná zborcená plocha a její stupeň. Obecná zborcená plocha určí se obdobně jako hyperboloid, který je dán třemi

řídícími přímkami, třemi řídícími křivkami 1a , 2a , 3a rovinnými nebo prostorovými (obr. 33a), o nichž předpokládáme, že *nemají* společných bodů. Povrchové přímky zborcené plochy stanovíme pak takto:

Na křivce 1a vytkneme bod M , z něho promítneme obě zbývající křivky 2a , 3a kuželovými plochami; jejich společné přímky jsou pak již žádanými povrchovými přímkami



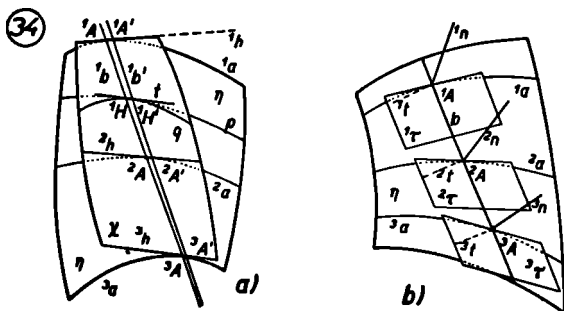
plochy η . Jsou-li křivky 1a , 2a , 3a algebraické stupňů m , n , p , jde každým bodem křivky 1a celkem np přímek, obdobně každým bodem křivek 2a příp. 3a jde mp příp. mn přímek. Posouváme-li bod M po křivce 1a , tu ke každé z np jím procházejících přímek získáváme postupně soumězné mimoběžné přímky, které vytvářejí np pláštů uvažované plochy, jdoucích křivkou 1a . Z toho je samozřejmo:

Křivky 1a , 2a , 3a stupňů m , n , p jsou pro vytvořovanou zborcenou plochu křivkami np , mp resp. mn násobnými. Průsečné křivky mají na nich své np , mp resp. mn násobné body.

Stupeň zborcené plochy η určíme pak tímto způsobem: Vytkneme dvě řídící přímky 1a , 2a a řídící křivku 3a stupně p -tého! Libovolná přímka q určuje s přímkami 1a , 2a zborcenou plochu druhého stupně χ , která protíná křivku 3a ve $2p$ bodech. Jimi procházejí povrchové přímky hyperboloidu $(^1a^2a q)$, které jsou též povrchovými přímkami plochy $\eta \equiv \equiv (^1a, ^2a, ^3a)$ a proto protíná q plochu η ve $2p$ bodech, je

tedy η stupně 2 p . Zvolením přímky 1a a dvou křivek 2a , 3a stupňů n a p a použitím přímky q obdobně přicházíme k tomu, že plocha $(^1a, ^2a, ^3a)$ je stupně 2 np . Konečně stejnou úvahou použitím přímky q ve spojení se dvěma z daných křivek 1a , 2a , 3a stupňů m , n , p , docházíme k tomu, že:

Zborčená plocha určená křivkami 1a , 2a , 3a stupňů m , n , p a nemajících žádné společné body, je stupně 2 mnp .



Je-li jen jediná z řídících křivek transcendentní, není určená plocha algebraickou, ale je rovněž transcendentní.

Protínají-li se řídící křivky 1a , 2a v r bodech (obr. 33b), jedním z nich buď bod $3A$, tu z těchto bodů promítá se třetí křivka řídící stupně p -tého r plochami kuželovými stupně p -tého. Jejich povrchové přímky přináležejí sice k souhrnu přímek, které protínají křivky 1a , 2a , 3a , ale nemůžeme je čítati k vlastní zborčené ploše určené křivkami 1a , 2a , 3a .

Mají-li proto křivky 1a , 2a , 3a postupně r , s , t společných bodů a jsou-li stupňů m , n , p , je jimi určená zborčená plocha η stupně rovnajícího se $2 mnp - rp - sm - tn$.

5.5. Tečná rovina v bodě zborčené plochy. Důležitým úkolem je vyhledati v daném bodě zborčené plochy příslušnou tečnou rovinu. Je-li dána (obr. 34a) zborčená plocha η a na ní

bod 1H , proložíme tímto bodem povrchovou přímkou 1b plochy a libovolnou křivku p . Příмка 1b splývá v celém svém rozsahu se svou tečnou, křivku p , která se nesmí dotýkati 1b , nahradíme v bodě 1H tečnou t a rovina $\tau \equiv ({}^1b, t)$ jest hledanou tečnou rovinou. Je zřejmo, že:

Tečná rovina zborcené plochy jde příslušnou povrchovou přímkou a naopak, každá rovina, která jde povrchovou přímkou zborcené plochy, je její tečnou rovinou.

Je-li plocha η dána řídícími křivkami ${}^1a, {}^2a, {}^3a$, zvolme na prvé dva soumezné body ${}^1A, {}^1A'$ a vedme jimi soumezné, navzájem mimoběžné přímkou ${}^1b, {}^1b'$ plochy (obr. 34a). Je zřejmo, že tyto přímkou musí protínati i křivky ${}^2a, {}^3a$ ve dvojnách soumezných bodů ${}^2A, {}^2A'; {}^3A, {}^3A'$. Uvedené tři dvojiny bodové určují tečny ${}^1h, {}^2h, {}^3h$ křivek ${}^1a, {}^2a, {}^3a$ v bodech ${}^1A, {}^2A, {}^3A$ přímkou 1b plochy. Jimi určená zborcená plocha stupně druhého má proto s plochou η dvě soumezné povrchové přímkou společné a proto má ve všech bodech přímkou 1b tytéž roviny tečné jako daná plocha η .

Zborcenou plochu η lze podél povrchové přímkou 1b nahraditi zborcenou plochou druhého stupně χ , určenou tečnami ke křivkám řídícím v průsečných bodech s přímkou 1b .

Proto platí pro η věta stanovená v odst. 5,1:

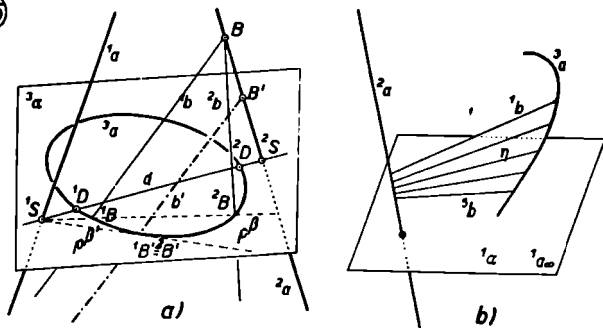
Řada bodů v přímce 1b zborcené plochy η je proměnná se svazkem jejich rovin tečných, jehož osou je táž příмка 1b (poučka Chaslesova).

Zvolíme-li (obr. 34b) přímkou b na zborcené ploše η dané křivkami ${}^1a, {}^2a, {}^3a$ a stanovíme-li jakýmkoli způsobem v jejích třech bodech ${}^1A, {}^2A, {}^3A$ tečné roviny ${}^1\tau, {}^2\tau, {}^3\tau$ a v nich dotykovými body tři libovolné přímkou ${}^1t, {}^2t, {}^3t$, mohli bychom těmito přímkou vést libovolné roviny, které by prořaly plochu η v křivkách ${}^1a', {}^2a', {}^3a'$, které určují touž plochu η a pro niž je stanovena podél b dotyková plocha druhého stupně přímkami ${}^1t, {}^2t, {}^3t$. Je zřejmé, že platí i širší věta:

Tři libovolné tečny 1t , 2t , 3t zborcené plochy η v bodech 1A , 2A , 3A povrchové přímky b této plochy určují zborcenou plochu stupně druhého, která má s η ve všech bodech přímky b společné roviny tečné.

Zvolíme-li 1t , 2t a 3t rovnoběžné s jednou rovinou σ , určují dotykový hyperbolický paraboloid. Je-li $\sigma \perp b$, jsou přímky

35

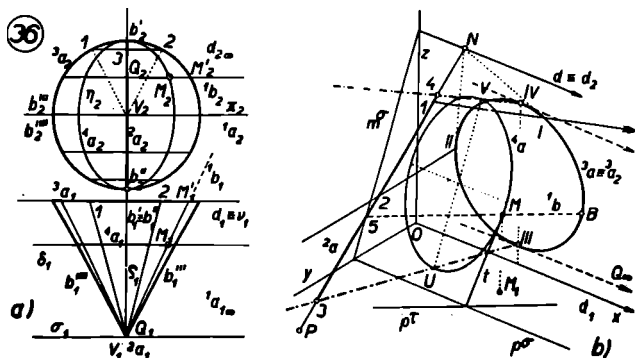


1t , 2t a 3t a i ostatní přímky dotykového hyperbolického paraboloidu kolmé k b a po otočení kolem b o 90° přecházejí do normál plochy. I platí věta:

Normály vztyčené k zborcené ploše v bodech povrchové přímky vyplňují hyperbolický paraboloid.

5,6. Torsální přímky a kuspídní body. Buď dána zborcená plocha η řídicími přímkami 1a a 2a navzájem mimoběžnými a kuželosečkou 3a položenou v rovině ${}^3\alpha$ již protínají přímky 1a a 2a v bodech 1S a 2S položených mimo kuželosečku 3a (obr. 35a). Plocha η je stupně čtvrtého. Každým bodem křivky 3a jde jediná povrchová přímka, přímky 1a a 2a jsou přímky dvojné. Proložme přímkou 1a rovinu β , protínající ${}^3\alpha$ v přímce p^β a přímkou 2a v bodě B . Spojnice 1b , 2b bodu B s průsečíky 1B , 2B přímky p^β s 3a jsou dvě přímky plochy η ,

náležící dvěma pláštům, které procházejí přímkou 2a . Vede-li se z bodu 1S tečna $p^{\beta'}$ ke kuželosečce 3a jako stopa roviny β' proložené přímkou 1a na rovině ${}^3\alpha$, tu spojnice průsečíku B' roviny β' s 2a s oběma splývajícími body ${}^1B' \equiv {}^2B'$ jsou dvě souměrné různoběžné povrchové přímky plochy η splývající v jediné přímce b' . V ní přechází jeden plášť plochy η



jdoucí dvojnou přímkou 2a do druhého touž přímkou procházejícího pláště; podél b' chová se plocha jako plocha rozvinutelná (francouzsky *torse*, 5,0) a proto se nazývá tato přímka *přímkou torsální* plochy η . Její průsečík B' s řídicí přímkou 2a je *kuspidální bod* plochy, je to singulární bod, každá jím vedená rovina je pro plochu η tečnou rovinou.

Plocha čtvrtého stupně má čtyři přímky torsální a čtyři v nich položené body kuspidální.

Spojnice 1S 2S je přímka, v níž splynuly dvě povrchové přímky plochy ${}^1S^1D^2S$ a ${}^1S^2D^2S$ v jedinou, je to *dvojná přímka* plochy η , každá jí proložená rovina protíná plochu η ještě v kuželosečce.

5,7. Konoidy. Zborcená plocha η , daná (obr. 35b) řídicí rovinou ${}^1\alpha$, t. j. její úběžnou přímkou ${}^1a_{\infty}$, přímkou 2a řídicí

v konečnu položenou a dalším řídicím útvarem 3a , jmenuje se *konoid*.*) Je-li $^2a \perp ^1\alpha$ je daný konoid η *přímým konoidem*, jinak je *kosý* nebo *šikmý*. Podle útvaru 3a je pak blíže označen, je-li na př. 3a parabolou, je konoid η *parabolickým konoidem*.

Povšimněme si (obr. 36a) *kruhového konoidu* η ! Jeho řídicími útvary jsou rovina π nescoucí úběžnou řídicí přímkou $^1a_\infty$, řídicí přímka $^2a \perp \pi$ a kružnice 3a v rovině ν . Jak útvary jsou dány, je zřejmo, že roviny π , σ a ζ jsou rovinami kolmé souměrnosti plochy η , jejich průsečnice jsou osami kolmé souměrnosti a jejich průsečík V středem centrální souměrnosti konoidu η . Půdorys a nárys připomíná půdorys a nárys plochy kuželové; přemístíme-li povrchové přímky $1V, 2V$ kuželové plochy o vrcholu V a základně 3a do polohy $13, 23$, přešly do dvou přímek konoidu. Můžeme tedy plochu η odvodit z plochy kuželové (conus) a tím je zdůvodněn její název.

Podle předešlého odst. 5,6 jsou nejvyšší a nejnižší přímka b' a b'' a obě v rovině π položené přímky b''' a b'''' přímkami torsálními, podél prvních se dotýkají plochy η roviny rovnoběžné k π , podél druhých roviny kolmé k π .

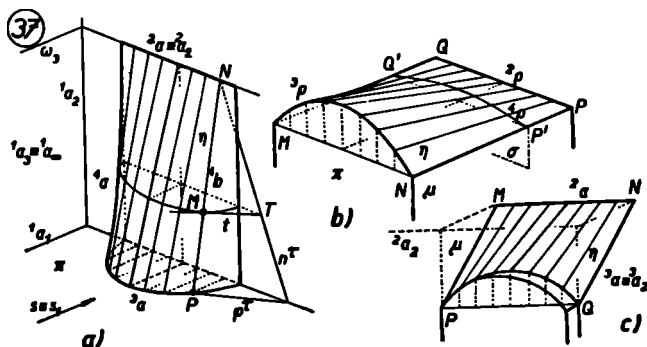
Úběžná přímka d_∞ roviny ν je dvojnou přímkou plochy, proto v rovinách rovnoběžných s ν jsou na ploše položeny elipsy, jejichž osa kolmá k π je rovna průměru kružnice 3a . Lze to dokázat i přímo: Hledejme sečnou křivku 4a roviny $\delta \parallel \nu$! Vytkněme povrchovou přímkou 1b plochy η ! Jest $M_1'Q_1 : M_1Q_1 = M_2'Q_2 : M_2Q_2 = \text{konst.}$; i je 4a afinní křivka ke kružnici 3a_2 , tedy elipsa.

Tečnou rovinu v bodě M stanovíme tečnou k řezu 4a a povrchovou přímkou 1b plochy; jinak dotykovou plochou druhého stupně nebo za pomoci Chaslesovy věty.

V obr. 36b je uvažován kosý konoid kruhový v kolmé axonometrii. Řídicími útvary jsou rovina π , přímka 2a a kružnice 3a v rovině ν . Stopníkem N řídicí přímkou 2a na ro-

*) Latinský *conus*, řecky *konos*, t. j. piniová šiška tvaru kužele.

vině ν řídicí kuželosečky jde dvojná přímka $d \parallel x$, proto rovina σ vedená přímkou d a bodem M na povrchové přímce 1b plochy η protíná uvažovaný konoid v kuželosečce. Pro plochu byly stanoveny torsální přímky podle odst. 5,6, body V a U položené v σ a na torsálních přímkách $4 IV$ a $3 III$ dávají průměr elipsy 4a , průměr přidružený je rovnoběžný s p^{β} a 4a je úplně dána v σ omezeným průměrem UV , k němu



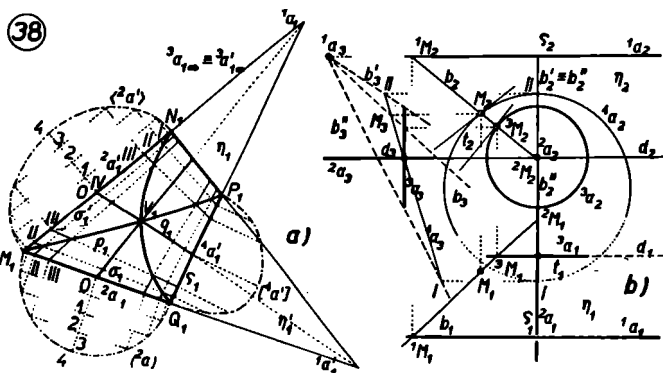
sduženým a neomezeným a bodem M . Povrchová přímka 1b a tečna t křivky 4a v bodě M určují příslušnou tečnou rovinu.

5.8. Použití konoidů v technické praxi. Kruhové a parabolické přímé konoidy jsou hojně používány nyní v technické praxi.

V obr. 37a vyznačen přímý konoid kruhový použitý jako opěrná zeď proti kapalině nebo jemným sypkým hmotám. Tu přibývá tlak do hloubky kapaliny resp. sypké hmoty a odpovídá tomu vhodně i tvar použitého konoidu η . Při hladině ω , kde není vyvozován tlak, je na η přímka 2a ; postupně do hloubky vzdouvá se tato přímka do křivky, až v π dosahuje plného kruhového oblouku 3a tam, kde tlak směrem s je největší.

V příloze čís. XII je pohled zevně na stěnu skladiště pro sypké hmoty, vytvořenou z kruhových konoidů přímých, zobrazeno údobí ve stavbě.

Obr. 37b představuje přímý parabolický konoid, daný řídicí rovinou μ , řídicí přímkou 2p a parabolou 3p . Konoid tu kryje obdélník $MNPQ$ a lze tyto střechy k sobě řadit a to buď tak, aby paraboly 3p byly položeny v témž směru obdélníků



$MNPQ$, nebo aby vždy při dvou použitých plochách η byla společná parabola uprostřed a římsové hrany 2p souměrně položeny k rovině π . Mnohdy bývají tyto konoidy zkracovány a vedeny jen k rovině $\sigma \parallel \pi$, aby se vymýtily z konstrukce vodorovné roviny tečné v bodech P a Q , z nichž dešťová voda neodtéká, což při zkrácení nenastává.

Přílohy čís. XIII a XIV podávají obraz na střechu pracoviště, sestavenou z parabolických konoidů a to pohled z vnějšku i z vnitřku, obé nedokončené a umožňující proto průhledy navrhovanými okny.

Konečně v obr. 37c je vyznačeno použití kruhového konoidu na samonosné markýze η .

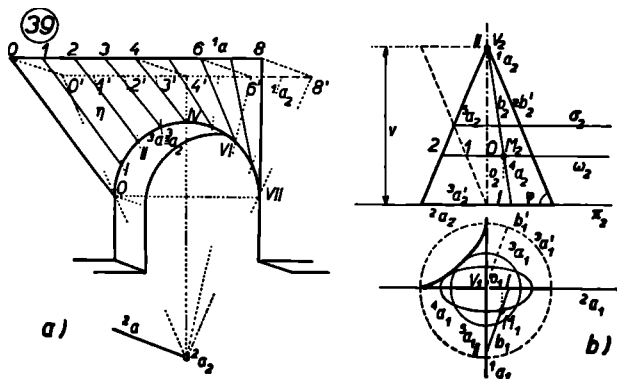
V stavitelství doby románské býval kruhový konoid používán jako lící plocha klenutého oblouku, který spojoval

kružnici nebo elipsu o vodorovné ose s elipsou rovněž o vodorovné ose v téže úrovni, stejně vysokou, ale užší.

Konoidy užívaly se i při řešení *křížových kleneb* nad nepravidelným půdorysem (obr. 38a). Budiž $M_1N_1P_1Q_1$ půdorys síně, nad níž je provedena křížová klenba, která má v rovinách σ a σ' dvě lunety, kruhovou a eliptickou, 2a a $^2a'$ a sice stejně vysoké. K řešení použijeme dvou konoidů η a η' , které mají v přímkách 1a a $^1a'$ kolmých k π své řídicí přímky, řídicí křivky jsou kuželosečky 2a a $^2a'$ a nákresna je společnou řídicí rovinou. Zvolme na svislých osách lunet body $0, 1, 2, 3, 4$ rovnoměrně rozložené! Vodorovné tětivy jimi vedené vytínají v křivkách 2a a $^2a'$ řady bodů, které se promítají kolmo do průměrů MQ a MN do dvou řad podobných. Jejich spojnice s body 1a_1 a $^1a'_1$ dávají proto dva průmětné svazky, které jsou průměty přímk konoidů η a η' , položených vždy po čtyřech v téže úrovni nad průmětnou. Proto jejich průsečíky vyplňují dvě kuželosečky p_1, q_1 jdoucí v prodloužení body 1a_1 a $^1a'_1$. Křivky p_1 a q_1 jsou tu průměty pronikových křivek konoidů η a η' , tedy hran křížové klenby. Na konoidech η a η' jsou kuželosečky položeny v rovinách rovnoběžných se σ a σ' proto luneta v ζ není elipsou, ale je křivkou čtvrtého stupně a je vyznačena v oklopení $[4a']$.

5,9. Zborcená plocha Montpellierského oblouku. Buď dána zborcená plocha (obr. 38b) přímkou řídicí 1a kolmou k stranorysně, další přímkou 2a kolmou k nárysně a kružnicí 3a , mající střed na 2a a svoji rovinu kolmou k 2a ! Plocha je čtvrtého stupně, má v přímce $d \parallel ^1a$ jdoucí středem kružnice 3a svou dvojnou přímku. K ní středem kružnice vedená rovina kolmá ζ je rovinou kolmé souměrnosti plochy a obsahuje dvě reálné torsální přímky dané plochy η . Je-li na přímce b plochy dán bod M , můžeme bodem M a přímkou d proložit rovinu — s výhodou tu použijeme stranorysu — a ta protne η v kuželosečce 4a , mající své vrcholy I, II v obou torsálních přímkách plochy η . Tečna křivky 4a v bodě M a povrchová přímka b jdoucí bodem M určují tečnou rovinu τ plochy η

v M . Touž tečnou rovinu bychom mohli stanoviti i tak, že bychom podrželi přímky 1a a 2a řídicí, třetí řídicí útvar; kružnici 3a bychom v průsečném bodě 3M s povrchovou přímkou b nahradili tečnou t . Tečná rovina τ hyperboloidu daného řídicími přímkami 1a , 2a , t v bodě M je žádanou tečnou rovinou plochy v bodě M . Konečně bychom mohli



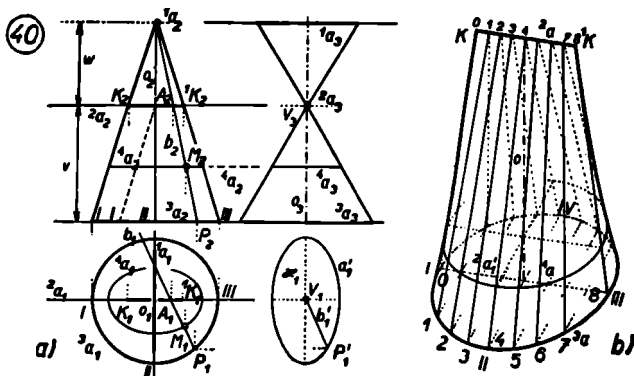
použití věty Chaslesovy: Známe tečné roviny $^1\tau$, $^2\tau$, $^3\tau$ plochy η v bodech 1M , 2M , 3M přímky b . K bodu M čtveřiny bodové 1M , 2M , 3M , M v přímce b sdružená rovina τ v promětné s ní čtveřině rovinové $^1\tau$, $^2\tau$, $^3\tau$, τ o ose b je žádanou rovinou tečnou.

Uvedená plocha byla používána při stavbách z tesaného kamene a jmenována *Montpellierským obloukem* [viz (1) str. 822 nebo (2) str. 74].

Přímka 2a nemusí nezbytně procházeti středem kružnice 3a . Tuto plochu lze dobře použiti jako plochu markýzy (obr. 39a). Tu je dána přímkami 1a a 2a a kružnicí 3a . Je lhostejno, zda je tu uvažován plný oblouk nebo pouze segment. Dělení nárysu 1a_2 přeneseno směrem 2a na přímkou 1a do bodů $0, 1, 2, \dots$ a promítnuto z bodu 2a_2 na kružnici 3a

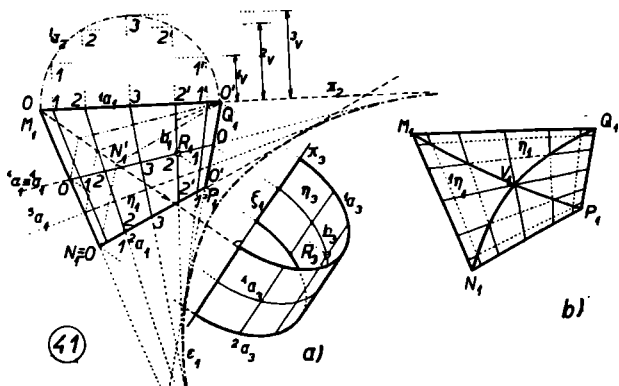
do bodů O, I, II, \dots . Spojnice sdružených bodů jsou povrchové přímky použité plochy η ; $4 IV$ je přímka torsální.

5,10. Plocha eliptického pohybu v prostoru (obr. 39b). Vytkněme dvě k sobě kolmé mimoběžky $^1a \perp ^2a$, jejich osou buď přímka $o \perp \pi$! Zvolme průsečík V přímek 1a a o za vrchol rotační plochy kuželové $^3\alpha$ o ose o , která protíná π v kružnici $^3a'$! Dále uvažujme zborcenou plochu η , určenou přím-



kami $^1a, ^2a$ a podmínkou, že veškeré přímky plochy η musí býti rovnoběžny s přímkami plochy kuželové $^3\alpha$. Kuželovou plochu, která nese na svém povrchu přímky rovnoběžné k povrchovým přímkám dané zborcené plochy η , t. j. má s η společnou nevlastní, úběžnou křivku, jmenujeme *řídící plochou kuželovou* dané zborcené plochy. Plochy $^3\alpha$ a η se podél úběžné křivky zpravidla nedotýkají. Povrchové přímky uvažované plochy svírají všechny též úhel φ s rovinou π ; úsečky vytčené na nich přímkami 1a a 2a mají stejnou aequidistanci v vzhledem k π , proto jejich půdorysy musí míti stálou délku a obalují pravidelnou hvězdičku — *asteroidu* — o čtyřech úvratech [srov. ⁽¹⁾ str. 100]. Dvojnou přímkou plochy η je úběžná přímka roviny π a proto všechny roviny rovnoběžné

s π protínají η v elipsách. Libovolný bod M povrchové přímky b plochy budiž zvolen a pohybujeme přímkou b tak, že její dva pevné body I, II neopouštějí přímky $^1a, ^2a$. Potom M probíhá elipsu 4a v rovině ω . Plocha má v rovinách určených osou o a přímkami řídicími $^1a, ^2a$ roviny kolmé souměrnosti a přímky v nich položené jsou torsálními přímkami plochy η . Křivku 4a stanovíme pohodlně: Vzdálenost $\overline{I\bar{O}}$



je délkou poloosy v jedné rovině souměrnosti. Kolem osy o byla otočena torsální přímka položená v rovině $(o, ^1a)$ do polohy rovnoběžné s nárysnou a úsečka $\overline{I\bar{O}}$ dává již délku druhé poloosy elipsy 4a .

Povrchová přímka b a tečna elipsy 4a v bodě M určují tečnou rovinu τ v bodě M . V obr. 40a uvažována je plocha η z téže skupiny ploch, t. j. je dána řídicími přímkami $^1a \perp ^2a$ a místo úběžné kružnice, určené řídicí plochou kuželovou, byla tu zvolena jako další řídicí útvar v konečnu položená kružnice 3a . I tu roviny určené osou o a řídicími přímkami jsou roviny kolmé souměrnosti plochy a přímky v nich položené jsou přímky torsální. Úběžná přímka d_∞ roviny π ,

v níž leží kružnice řídící 3a , je dvojnou přímkou plochy. Roviny rovnoběžné s π protínají tedy η v elipsách. Tečná rovina bodu M je opět snadno stanovitelná: povrchovou přímkou b plochy η a tečnou k elipse 4a v bodě M . V obraze byl zvolen bod V ve výšce v nad π a stanovena stopa a' řídící plochy kuželové κ plochy η . Její přímka b' je rovnoběžná k přímce b plochy η . Tečná rovina řídící plochy kuželové κ podél b' je rovnoběžná s tečnou rovinou plochy η v úběžném bodě přímky b . Tuto tečnou rovinu plochy η v úběžném bodě nazýváme *asymptotickou rovinou* zborcené plochy a je zřejmo, že ji snadno stanovíme u jakékoli zborcené plochy za pomoci řídící plochy kuželové.

Uvedenou zborcenou plochu lze použít (obr. 40b) jako plochu střechy, která spojuje kruhovou nebo eliptickou hranu římsovou 3a s hřebenem, který je kratší než rovnoběžná s ním osa hrany římsové. Hřeben 2a a rovnoběžnou s ním osu $^2a'$ rozdělíme na stejný počet mezi sebou rovných dílů, v dělicích bodech osy $^2a'$ vztyčené kolmice vytýčí na 3a řadu bodů $0, 1, 2, \dots$, které spojeny s dělicími body $0, 1, 2, \dots$ hřebene dají kroky použité střechy. Latě probíhají ve vodorovných elipsách plochy, na př. 4a .

Dříve bývala tato plocha často používána na věžích opevnění a hradů. Velmi známá je helmice této podoby ve Štrambersku na Moravě (*Štramberská trůba*).

5.11. Cylindroidy. Buď dán půdorys M, N, P, Q místnosti, která má být překlenuta klenbou o vodorovných povrchových přímkách tak, aby jak nad MQ , tak nad NP vznikly lunety o stejné výši. Obr. 41a. Lunetu nad MQ zvolme kruhovou, omezenou kružnicí 1a . Zvolme výšky $^1v, ^2v, ^3v, \dots$ a vedme v nich jak v kružnici 1a tak i v afinní elipse 2a (osa NP) tětivy rovnoběžné s π ! Tyto tětivy vytlnou v křivkách $^1a, ^2a$ řady bodů a řady jejich půdorysů budou řady mezi sebou podobné, každá z nich podle svého středu nad to souměrná. V půdoryse spojnice sružených bodů obalí parabolu ϵ_1 , v prostoru získáme zborcenou plochu η , která je

vyplněna přímkami, které protínajíce křivky 1a , 2a druhého stupně jsou rovnoběžné s rovinou π a dotýkají se parabolické plochy válcové ε . Kdybychom spojovali body $0, 1, 2, \dots$ na 1a_1 s body $0', 1', 2', \dots$ na 2a_1 získali bychom jinou parabolu ε_1' . Je zřejmo, že přímkami, které protínají 1a , 2a a mají v π svou řídicí rovinu, tvoří soubor osmého stupně; ten se však rozpadá na dva mezi sebou rovnocenné soubory, jeden se řídicími útvary ${}^1a, {}^2a, \pi$ a ε a druhý, který místo ε má ε' . I musíme z toho usuzovati, že zborcená plocha $\eta \equiv ({}^1a, {}^2a, \pi, \varepsilon)$ je stupně čtvrtého. Učíme $N_1'Q_1 \nparallel N_1P_1$ a vedme tečny ${}^5a, {}^4a, \dots$ k parabole $\varepsilon_1: V M_1N_1$ a P_1Q_1 vytyčují tečny paraboly dvě řady podobné, promítneme-li řadu M_1N_1 do M_1N_1' směrem N_1N_1' a spojíme-li tuto řadu s bodem Q svazkem paprskovým, budou jeho paprsky rovnoběžny s tečnami paraboly ε_1 a budou míti mezi M_1N_1' a bodem Q_1 touž délku, kterou mají příslušné tečny paraboly ε_1 mezi tečnami M_1N_1 a P_1Q_1 .

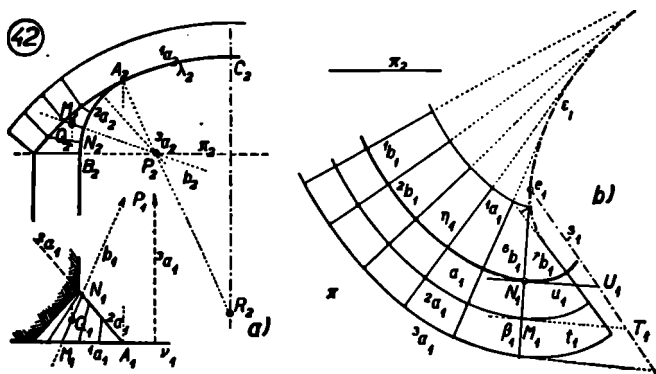
Povšimněme si řezu uvažované plochy η s rovinou ${}^4\alpha$! Řada $0, 1, 2, 3, \dots$ v ${}^4\alpha_1$ je podobná s řadou $0, 1, 2, 3, \dots$ v 1a_1 nad těmito body ve výškách $0, {}^1v, {}^2v, {}^3v, \dots$ leží body křivky 4a . Je z toho patrné, že je to elipsa afinní k elipse 1a . Máme tedy výsledek:

Na uvažované ploše v tečných rovinách válcové plochy ε jsou položeny elipsy téže výšky jako elipsy ${}^1a, {}^2a$.

Úsečky ve svazku Q_1 mezi bodem Q_1 a přímkou M_1N_1' se promítají směrem $s \equiv M_1N_1'$ do stejných délek a proto se budou směrem s promítati do stejných délek i s nimi rovnoběžné a stejně dlouhé úsečky na tečnách paraboly ε_1 , tvořící půdorysy povrchových elips plochy η . Je z toho patrné, že na rovinu $\zeta \perp s$ se promítají všechny povrchové elipsy plochy η do elips shodných. Zvolíme-li ζ za pomocnou stranorysnu, vidíme, že stranorys η_s plochy η připomíná kolmý průmět plochy válcové a proto *jmenujeme zborcené plochy, které jsou určeny dvěma řídicími křivkami a rovinou*

řídící a které se jeví v náryse a stranoryse obdobně jako zde uvažovaná plocha η *cylindroidy*.*)

V obr. 41b jsou určeny dva cylindroidy η a ${}^1\eta$ nad půdorysem M, N, P, Q . Řeší křížovou klenbu nad nepravidelným půdorysem, jejich vrcholové přímky, které jsou pro ně torzálními přímkami, se protínají ve vrcholu V klenby. Přímky, položené na elipsovitých lunetách ve stejných výškách



$v, {}^1v, {}^2v, {}^3v$, stanovují v průmětech lunet podobné, podle středu souměrné řady bodové. Průsečné body stejně vysoko položených přímek dávají pronikové křivky p a q ploch η a ${}^1\eta$. Díváme-li se na obr. 41b jako na kosouhlý průmět hyperbolického paraboloidu určeného zborceným čtvercem $MNPQ$ ($MN = NP = PQ = QM$), jsou křivky p_1, q_1 průměty jeho hlavních řezů, tedy parabol a p_1, q_1 jsou tedy paraboly. O křivkách p, q lze dokázat, že se směrem $s \equiv M_1N_1'$ (obr. 41a) promítají do elips [viz ⁽¹⁾ str. 747]. Jsou proto křivky p, q v prostoru křivky čtvrtého stupně.

5,12. Plocha corne de vache. V obr. 42a je podáno nejjedno-

*) Od řeckého *kyllindros* = válec, *kyllindo* = válim.

dušší řešení úpravy mostních kleneb, nazývané *corne de vache* nebo *la strombatura*. Valená mostní klenba je omezena lící plochou λ , jejímž normálním řezem je ovál složený z kružnice o středu P mezi body B , A a kružnice o středu R , první se v bodě A dotýkající. Bodem A vedená rovina ${}^2\alpha \perp \pi$ protíná λ v elipse 2a a tato křivka s kružnicí 1a a přímkou ${}^3a \perp \nu$ určuje zborcenou plochu η , která je sedmého stupně a již jsme otupili část mostní klenby.

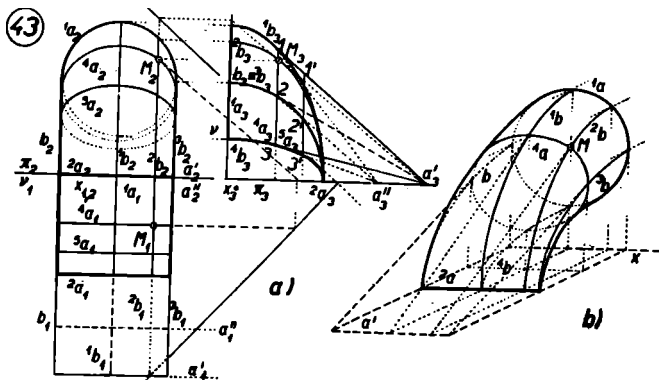
K řešení tečné roviny není tu možno použití vhodného dalšího řezu. Na přímce b zvolme obecný bod Q a vytkněme průsečné body M , N , P s řídicími útvary; tečny t , u vedené k 1a a 2a v bodech M a N určují s přímkou 3a hyperboloid, jehož tečná rovina v bodě Q je tečnou rovinou uvažované plochy η .

Plocha v použité části je zobrazena v příloze čís. XV, kde je ukázána uvedená úprava na mostě Legií v Praze [viz k tomu (1) str. 747 a 820 a (5), str. 98].

5.13. Zborcená plocha vyrovnávací, pláň, planýrovací plocha nebo zkrátka planýrka je cylindroid, který je dán prostorovou křivkou a vodorovnou rovinou π (obr. 42b). Přímký této zborcené plochy jsou rovnoběžné s π a protínají křivku a kolmo. Dotýkají se proto plochy válcové ε , která jde kolmo k π evolutou křivky a_1 . Na ploše známe dvě soustavy povrchových křivek: předně je to soustava povrchových přímk 1b , 2b , ..., dále je to soustava křivek 2a , 3a , ... rovnoběžných s křivkou a , jejichž půdorysy jsou evolventy křivky ε_1 . Podél libovolné přímký, na př. 6b , se dotýká plochy hyperbolický paraboloid, který určují: tečna u v průsečném bodě N přímký 6b s řídicí křivkou a , dále dotyková povrchová přímká e první promítací roviny přímký 6b s plochou válcovou ε a rovina π .

6. KLÍNOVÉ PLOCHY

6.0. Vytvoření. Zvolme kružnici 1a v nárysně a přímku $^2a \parallel x$ v půdorysně (obr. 43a) a předpokládejme k nim další útvary: kružnici $^1a'$ a přímku $^2a' \parallel x$ podle osy x kolmo k nim souměrné; pro úsporu místa nebyly tyto útvary v obraze zarámovány. Prokládejme nyní roviny kolmé k ose x a určuj-



me v nich elipsy b , které mají své vrcholy na zvolených útvarech, jmenujme je *řídícími*, na rozdíl od určených elips, které označme jako soustavu křivek *tvořících*. Vytkneme-li z nich několik, na př. $^1b, ^2b, ^3b, \dots$ jsou jejich stranorysy v afinní poloze pro π_3 jako osu afinity a směr afinity kolmý k π_3 . Proto spojnice sdružených bodů těchto křivek ve dvou rovinách $^4\alpha, ^5\alpha$ rovnoběžných s ν , t. j. spojnice $11', 22', 33', \dots$ budou ve stranorysech procházeti jediným bodem a_3'' , v prostoru jsouce rovnoběžny s μ budou protínati jedinou přímkou $a'' \parallel x$. Leží proto křivky 4a a 5a uvažované plochy η , položené v rovinách $^5\alpha$ a $^4\alpha$ na konoidu, který má stranorysnu za řídící rovinu a přímkou a'' za řídící přímkou. Ze stej-

ného důvodu můžeme i řídicí kružnici 1a položit s křivkou 5a nebo 4a na obdobný konoid a protože na konoidech takto vytvořených jsou křivky položené v rovinách rovnoběžných s rovinou kružnice řídicí 1a afinně sdružené (odst. 5), je z toho zřejmé, že:

Na uvažované ploše jsou položeny v rovinách rovnoběžných s v křivky afinní k řídicí křivce 1a .

Plocha má tedy celou soustavu křivek řídicích v rovinách rovnoběžných a mezi sebou afinně sdružených. Dále je z uvedeného hned patrné, že:

Každé dvě řídicí plochy η můžeme položit na plochu konoidu a můžeme tvrdit, že podél každé řídicí křivky se plochy η dotýká plocha konoidu o řídicí rovině kolmé k ose x a o řídicí přímce rovnoběžné s x .

Tak podle 4a se dotýká plochy η konoid o řídicí přímce $a' \parallel x$. Úkol křivek řídicích a tvořících můžeme zaměnit a ze stejných důvodů lze vyslovit větu:

Každé dvě křivky tvořící lze položit na plochu konoidu a v mezi lze říci, že podél každé křivky tvořící se plochy dotýká rovněž plocha konoidu.

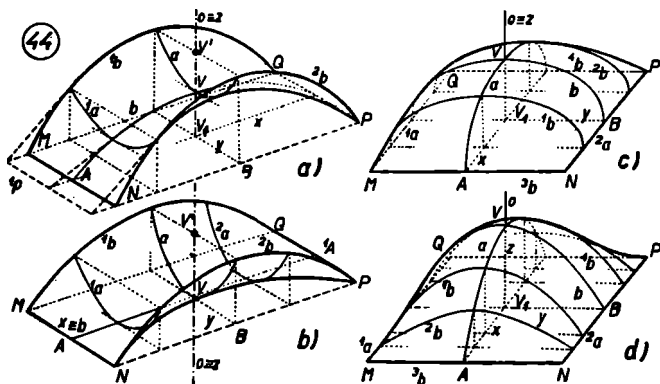
Nárys křivek řídicích je soustava kolmo afinně sdružených kuželoseček, osou afinity je π_2 , společné body nejsou tu reálné. Stranorys křivek tvořících je rovněž soustava kuželoseček kolmo afinně sdružených pro osu π_3 , kterou protínají ve dvou reálných bodech, stranorysech dvou přímek s *uniplanárními* body plochy.

Je zřejmo, že tato *plocha osmého stupně*, jejíž jedna čtvrtina je zobrazena jak v obr. 43a tak i v axonometrickém pohledu v obr. 43b, má tři roviny kolmé souměrnosti, tři osy kolmé souměrnosti a je podle jejich průsečíku středově souměrnou.

Při hraně 2a (obr. 43b) má tvar *klínu**) a možno ji proto označiti jménem *plocha klínová, cuneoid* nebo *plocha sfenoidická*.

*) Klín — latinsky *cuneus*, řecky *sén*. Název *cuneoid* užíval stavitel Petr Nicholson (* 1768 † 1844), vynálezce perspektivního trojpravítka, pro konoidy.

6,1. Některé druhy ploch klínových a jejich použití. Tak jako si praxe vytvořila Montpellierský oblouk a teprve později tento oblouk probádala geometrie, bylo tomu obdobně i s řadou dalších ploch (plocha šikmého průchodu, různé šroubové plochy používané v architektuře a pod.), i zde je původ těchto ploch z praxe.



Článek střešní, tvořený hyperbolickým paraboloidem, jak uvedeno v odst. 5,3 str. 56 má tu nevýhodu, že na patku dosedá hyperbolickým obloukem. Byla proto hledána náprava a z plochy podržena hlavní parabola a (obr. 44a), hlavní parabola b ; hyperbolické oblouky v patce jsou nahrazeny přímkami MN, PQ a v rovinách rovnoběžných s rovinou paraboly b prokládány paraboly $1b, 2b, \dots$, které majíce svíslé osy připínají se na řídicí útvary a, MN, PQ . Vznikla tu plocha klínová (po prvé použitá ve Výzkumném Kloknerově ústavu z námětu prof. B. Hacara a proto jí začali studenti spontánně říkati „Hacarova plocha“), která nese dvě soustavy parabol, jedny v rovinách rovnoběžných s rovinou paraboly a , druhé v rovinách rovnoběžných s parabolou b . Každé dvě křivky řídicí nebo tvořící lze položit na plochu

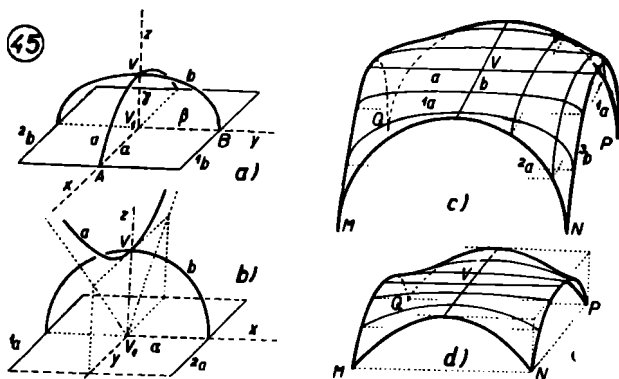
konoidu, podél každé z parabol se dotýká plochy klínové rovněž parabolický konoid. V obrazci je naznačeno, jak možno tuto plochu ukončiti křivkou 1a a odtud dál k patce 1p postupovati za pomoci tečného konoidu. Označíme-li úsečky AV_1 v x , BV_1 v y a $V'V$ i VV_1 v ose z písmenami α , β , γ , δ , má pro uvedené osy plocha η rovnici $\eta \equiv x^2y^2 \cdot (\gamma - \delta) + \beta^2\delta x^2 - \alpha^2y^2(\gamma - \delta) - \alpha^2\beta^2\delta + \alpha^2\beta^2z = 0$. Je to algebraická plocha čtvrtého stupně.

Při tomto řešení byla vedena, obdobně jako při článku z hyperbolického paraboloidu, mezi body M , Q a N , P táhla. Toto odpadne, použije-li se plocha klínová zobrazená v obr. 44b, která má řídicí útvary MN , parabolu a a PQ ; tvořící křivky jsou tu paraboly 1b , 2b a mezi nimi přímka b , která současně slouží jako táhlo. Označíme-li AV , BV a $V'V$ jako hodnoty α , β , γ pro souřadné osy $x \equiv AV$, $y \equiv BV$ a $z \equiv V'V$, má plocha η rovnici $\eta \equiv \gamma x^2y^2 - \alpha^2\gamma y^2 + \alpha^2\beta^2z = 0$.

V obr. 44c vyznačena plocha klínová nad obdélníkem $MNPQ$. Řídicími útvary jsou tu přímky $^1a \equiv MQ$, $^2a \equiv NP$ a elipsa a . Tvořící útvary jsou opět elipsy b , 1b , 2b , ..., které pro polohu 3b a 4b přecházejí do přímek. Plocha má tři roviny (pět, je-li $MNPQ$ čtvercem) kolmé souměrnosti a je plochou středovou, v rovině MVP a NVQ má vždy dvě paraboly o ose VV_1 . Pro dříve vyznačené osy souřadnic a pro $AV_1 = BV_1 = VV_1 = \alpha$ má plocha rovnici $\eta \equiv x^2y^2 - \alpha^2(x^2 + y^2 + z^2) - \alpha^4 = 0$. Pro $\overline{AV}_1 = \alpha$, $\overline{BV}_1 = \beta$ a $\overline{VV}_1 = \gamma$ je rovnice plochy $\eta \equiv \gamma^2x^2y^2 - \beta^2\gamma^2x^2 - \alpha^2\gamma^2y^2 - \alpha^2\beta^2z^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0$.

V obr. 44d je naznačena plocha klínová nad obdélníkem $MNPQ$, řídicí i tvořící křivky jsou paraboly o osách svislých. Plocha postupuje za vyznačený obdélník do prostoru. Pro vyznačné osy a délky $\overline{AV}_1 = \alpha$, $\overline{BV}_1 = \beta$, $\overline{VV}_1 = \gamma$ má rovnici $\eta \equiv \gamma(x^2y^2 + \alpha^2\beta^2) = \gamma(\beta^2x^2 + \alpha^2y^2) + \alpha^2\beta^2z$. Je-li plocha vytvořena nad čtvercem, pak paraboly jdoucí vrcholem jsou shodné a mají-li parametr p , je rovnice plochy tvaru $\eta \equiv (y^2 - p^2)(x^2 - p^2) = 2p^3z$.

Nahradíme-li v uvažované ploše parabolu b elipsou o vrcholech V a B , změní plocha rovnici v následující: $\eta \equiv \alpha^4 \beta^2 z^2 = \gamma^2 (\alpha^2 - x^2) \cdot (\beta^2 - y^2)$. Je vyznačena schematicky v obr. 45a). Užijeme-li jako řídicí útvary přímky 1a , 2a a rovnosou hyperbolu o poloose rovné α , a jako tvořící křivky elipsy, z nichž ona v rovině xz je kružnice o poloměru α , získáme plochu o rovnici $\eta \equiv x^2 y^2 + \alpha^2 (x^2 - y^2 + z^2) = \alpha^4$.



Plochy můžeme vytvořiti ve velkém množství tvarů; plocha klínová, která řeší křížovou klenbu nad obdélníkem a která do podporujícího zdiva jde z lunet *tečně*, je dána řídicími útvary: kružnicemi 1a , 2a a vrcholovou přímkou a , tvořícími útvary jsou elipsy b , mezi něž patří i vrcholová přímka b a kružnice 3b (obr. 45c). Plocha je osmého stupně.

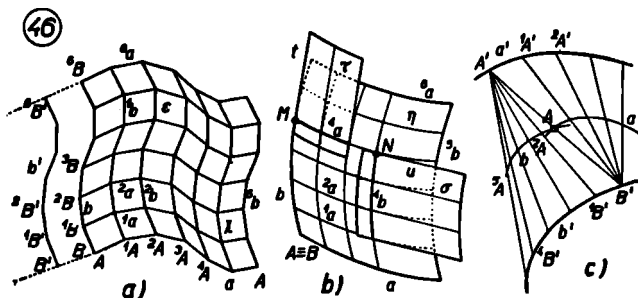
Nahradíme-li kružnice této plochy shodnými parabolami a je-li $MNPQ$ čtvercem (obr. 45d), má plocha velmi jednoduchou rovnici $x^2 y^2 = \alpha^3 z \equiv \eta$, kde α značí polovinu strany MN a je dvojnásobným parametrem krajních parabol. Do stěn podpor vchází pod úhlem.

V obou případech, vytčených v obr. 45c a d, můžeme použítí místo vrcholových přímek, které ani vzhledově ani staticky zcela nevyhovují, křivek a to v prvním případě ploché elipsy a plochu nemusíme ukončovatí při kružnicích 2a a 3b , nýbrž při elipsách 1a a 2b a k nim souměrným, v druhém případě provedeme místo přímek vrcholem mírně vzduté paraboly. Klenby tím získávají na vzhledu.

Modely těchto ploch, vypracované posluchači r. 1949—50 jsou zobrazeny v příloze č. XVI až XVIII.

7. PLOCHY POSOUVÁNÍ

7.0. Vytvoření ploch translačních a základní pojmy. K plochám posouvání nebo translačním dojde se od prostorového mnohoúhelníku (obr. 46a). Vytkněme v prostoru mnohoúhelník $a \equiv A^1A^2A^3 \dots$ a další mnohoúhelník $b \equiv B^1B^2B^3 \dots$, bod A buď totožný s bodem B . Udělíme-li nyní mnohoúhelníku a pohyb daný mnohoúhelníkem b , přejde do jednotlivých



poloh $a, {}^1a, {}^2a, \dots$ a vytvoří prostorový mnohostěn ε . Mnohoúhelník a jmenujeme *tvorčícím*, mnohoúhelník b , který určuje pohyb prvního, *řídícím* mnohoúhelníkem. Řídící mnohoúhelník b můžeme vysunouti i ven z tělesa η , ovšem tak, aby v nové poloze $b' \equiv B^1B^2B^3 \dots$ byl k původní poloze rovnoběžný. Při pohybu vytvoří mnohoúhelník 1a hranol χ , který prochází mnohoúhelníkem 1a a má směr svých povrchových přímk v prvku ${}^1B^2B$ mnohoúhelníka b nebo odpovídajícího prvku ${}^1B^2B'$ vysunutého mnohoúhelníka b' .

Přejdeme-li ke křivkám (obr. 46b), dostaneme plochu η , která bude vytvářována křivkou a , která zůstávajíc stále rovnoběžná a shodná se svou původní polohou, pohybuje se tak, že její bod A neopustí při tom druhou danou křivku b .

Podle libovolné polohy křivky a , na př. 4a dotýká se plochy η plocha válcová, která má směr svých povrchových přímk

určený tečnou t křivky b vedenou k ní v průsečném bodě M s křivkou a . Křivky a jmenujeme *tvořícími křivkami* a křivku b *křivkou řídící*.

Plochu η však můžeme i opačně vytvořiti *posouváním* neboli *translací* křivky b jako tvořící po křivce a jako řídící. Plochy takto vzniklé jmenují se *plochy posouvání* neboli *plochy translační*.

Na plochách posouvání jsou dvě soustavy povrchových křivek, mezi sebou shodné a rovnoběžné křivky tvořící a soustava rovněž mezi sebou shodných a rovnoběžných křivek řídících.

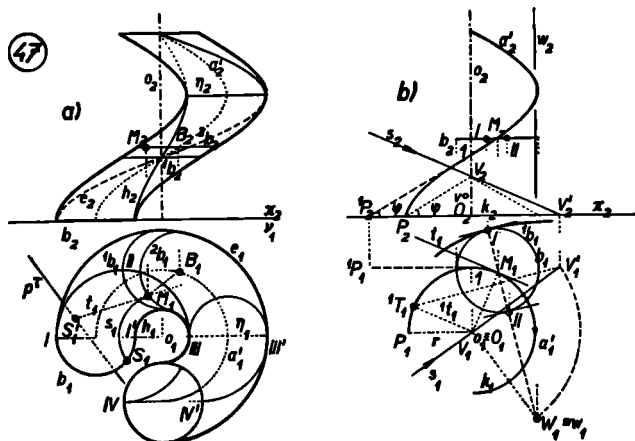
Každým bodem plochy prochází jedna tvořící a jedna řídící křivka, jejich tečny v uvažovaném bodě určují příslušnou rovinu tečnou. Podle křivky řídící dotýká se plochy plocha válcová, jejíž povrchové přímky jsou tečnami křivek tvořících a naopak. Úkol křivek řídících a tvořících může býti zaměněn.

Plochu posouvání můžeme vytvořiti i tímto způsobem (obr. 46c): Vytkneme dvě křivky v prostoru, křivku a' a b' . Na druhé křivce zvolme bod B' a vyšetřme křivku a , která je vyplněna středy úseček vedených mezi bodem B' a body $A', {}^1A', {}^2A', \dots$ křivky a' . Posouváním bodu B' po křivce b' do poloh ${}^1B', {}^2B', \dots$ získáme řadu ploch kuželových a na nich křivky obdobné ke křivce a , která je podobná ke křivce a' , a proto křivky $a, {}^1a, {}^2a, \dots$ budou mezi sebou shodné a v prostoru shodně položené. Bod A křivky a sleduje při tom dráhu b , která je souhrnem středů úseček určených bodem A' a křivkou b' . Je zřejmo, že tu vznikla plocha posouvání o řídící křivce b a tvořící křivce a . Tedy:

Souhrnem středů všech úseček, jejichž koncové body A', B' leží na dvou v prostoru libovolně daných křivkách a' a b' , je plocha translační.

7.1. Plocha vinutého sloupu. Jako příklad proberme plochu, která vznikne posouváním kružnice b , (obr. 47a) jejíž střed probíhá křivku šroubovou a' , danou osou o , poloměrem R

a výškou návitku; první průmět je kružnice a_1' , druhý je obecná sinusoida a_2' . Pohyb kružnice b musíme si představit tak, že zůstávajíc v rovině rovnoběžné s průmětnou, pohybuje se tak, že střed probíhá šroubovici a' jako křivku řídící a průměr II' křivky b přechází do nových poloh $III III'$, $IV IV'$, ... a zůstává stále rovnoběžný s původní polohou II' . Každý bod křivky b vytvoří při tomto pohybu



šroubovici shodnou a shodně položenou s křivkou a' , mající též poloměr R , ale nemající v o svou osu. Osy těchto šroubovic vyplňují rotační plochu válcovou, mající v o osu a v poloměru r křivky b svůj poloměr. Podle šroubovice vytvořené bodem I musí se této translační plochy dotknouti plocha válcová, jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžné s tečnou křivky b v bodě I , t. j. plocha válcová kolmá k druhé průmětně v . Druhý obrys uvažované plochy tvoří dvě šroubovice shodné se šroubovicí a' , obrys nárysu dvě obecné sinusoidy shodné s a_2' a jen vpravo a vlevo o poloměr r posunuté.

Plochu můžeme však vytvořiti i pohybem šroubovým,

t. j. kružnici b budeme rovnoměrně otáčeti kolem osy o a při tom rovnoměrně ji směrem této osy vysunovati tak, aby otočení o plný úhel bylo sdruženo posunutím směrem osy o o výšku v závitu. Při tom bod I a I' proběhnou šroubovice ve svém okolí o největším resp. nejmenším poloměru. Označujeme je názvem *rovníková šroubovice* e a *hrdlo* h dané plochy šroubové η . Každý další bod, na př. bod S křivky b probíhá při uvedeném pohybu šroubovým šroubovici o ose o a stejné výšce v závitu se šroubovicí a' . Křivky e a h tvoří první obrys, půdorysy e_1 a h_1 obrys půdorysu této plochy η , kterou zpravidla jmenujeme *plochou vinutého sloupu* (la colonne torde).

Dosavadní vyšetřené vlastnosti shrňme takto:

Na vinutém sloupu η je nekonečně mnoho šroubovic se šroubovicí a' sousých a stejné výšky návitku, poloměry jsou různé v mezích $R + r$ až $R - r$. Na ploše je dále soustava šroubových křivek shodných s křivkou a' , majících s ní touž výšku a též poloměr R . Osy těchto šroubovic jsou rovnoběžné s osou a od ní o poloměr r vzdáleny. Podle těchto šroubovic se dotýkají plochy η válcové plochy, jejichž povrchové přímky jsou kolmé k ose o . Na ploše je konečně soustava kružnic téhož poloměru r , majících středy na šroubovici a' , podél nich se dotýkají plochy válcové, jejichž osy jsou tečnami šroubovice a' .

Tečnou rovinu v bodě M , který leží na kružnici 2b mající střed v B na a' sestrojíme buď tak, že se uváží, že podél 2b se dotýká η plocha válcová, která má v tečně sestrojené v bodě B k šroubovici a' svou osu; nebo za pomoci šroubovice s jdoucí bodem a a sousé se šroubovicí a' . Tečna t šroubovice s a tečna kružnice 2b v bodě M určují již žádanou tečnou rovinu τ v bodě M .

Vytkněme v obr. 47b opět plochu vinutého sloupu, vytvářenou kružnicí b o poloměru r jako křivkou tvořící, křivkou řídicí buď šroubovice a' o poloměru R ! Vyhledejme v bodě I šroubovice a' tečnu, půdorys ${}^1\overline{P_1}$, I je tečnou kruž-

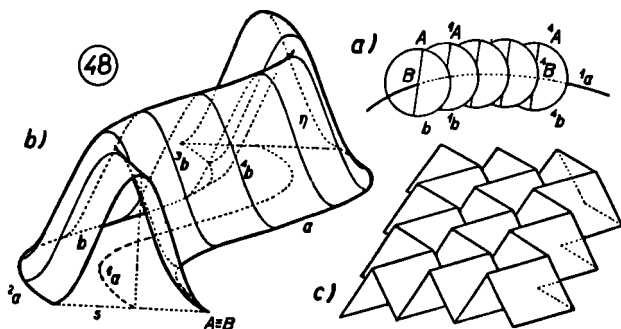
nice a_1' a má délku rovnou oblouku $\widehat{P_1I}$ mezi stopou P šroubovice a' a půdorysem dotykového bodu I . Tato tečna je rovnoběžná s druhou průmětnou a svírá s π úhel φ , úhel, který svírají všechny tečny šroubovice a' s rovinou π . Vedme $P_2V_2 \parallel {}^1P_2I$! $V_2O_2 = v^0 = v : 2\pi$, kde v je výška závitů šroubovice a' . Plocha kuželová, která má bod V za svůj vrchol a kružnici k kolem O poloměrem R opsanou za základní křivku, obsahuje rovnoběžky ke všem tečnám šroubovice a' , je to *řídící plocha kuželová* rozvinutelné šroubové plochy, určené šroubovicí a' .

Zvolme nyní světelný paprsek s přímo bodem V a sestrojme vržený stín V' bodu V na rovinu π , v níž leží základní křivka kuželové plochy (V, k) ! Vytkneme-li nyní libovolnou kružnici tvořící b plochy vinutého sloupu η o středu M na křivce a' , tu víme, že se podle ní dotýká plochy η plocha válcová, jejíž osou je tečna t šroubovice řídící a' v bodě M . Vedme s touto tečnou bodem V rovnoběžku V^1T , jejíž stopa musí zapadnouti do k . Přímka ${}^1TV'$ je vržený stín této přímky na rovině π pro světelné paprsky směru s . Je to směr vržených stínů povrchových přímek válcové plochy, která se podél b plochy η dotýká a proto, vedeme-li k b tečny rovnoběžné s ${}^1TV'$, jsou dotykové body I, II těchto tečen body, jimiž procházejí meze stínu vlastního pomocné dotykové plochy válcové plochy η podél kružnice b a proto i dva body meze vlastního stínu plochy η .

Otočme bod V' okolo osy o ve směru stoupání šroubovice a' o pravý úhel do bodu W ! Tento bod označme jménem *světelný pól* šroubové plochy η a přímku $w \parallel o$ jím procházející jmenujme *světelnou osou* plochy η pro rovnoběžné světelné paprsky se směrem s ! Ježto jsme učinili $W_1O_1 \neq \pm W_1'O_1$ a ježto ${}^1T_1O_1 \neq M_1O_1$ jsou trojúhelníky $\triangle {}^1T_1O_1V_1' \cong \triangle M_1O_1W_1$ a je zřejmo, že spojnice středu M_1 s W_1 vztahuje již v b_1 oba půdorysy I, II bodů meze stínu vlastního, které jsou položeny na b . $I W_1$ a $II W_1$ jsou tu normály křivky b_1 jdoucí bodem W_1 . Je tedy z toho patrné, že:

Body meze stínu vlastní plochy vinutého sloupu η jsou ony body tvořících křivek b , jejichž normály jdou světelným pólem nebo protínají světelnou osu pro daný směr světla.

Půdorys meze stínu vlastní nebo dotykové křivky válcové plochy ploše η směrem s opsané má jednoduchou konstrukci: Na paprsky jdoucí bodem W_1 nanášejí se od kružnice a_1' na obě strany úsečky, jejichž délka je rovna poloměru r kružnic tvořících b .



Kolmý průmět dotykové křivky válcové plochy směrem s ploše η opsané je proto na rovině π kolmé k ose plochy η konchoida kružnice a_1' pro stálou délku r a pól v bodě W_1 .

Plocha vinutého sloupu byla velmi často užívána ve stavitelství románském a byzantském jako zdobný motiv, viz přílohu čís. XIX. Dnes slouží jako plocha tobogánů k vnitřní dopravě zboží, zejména pytlového v továrnách a mlýnech.

7,2. Vytvoření paraboloidů a modely ploch translačních. Je-li řídicí křivka přímkou, vytvoří se plocha válcová. Ježto rovnoběžné řezy parabolické na paraboloidu (odst. 2,63) jsou křivky shodné, lze vytvořiti hyperbolický paraboloid posouváním jedné hlavní paraboly jako tvořící po druhé

hlavní parabole jako řídící. Srovnej obrázky a odst. 5,2! Obecně posouváním paraboly po parabole druhé, jsou-li jejich osy v opačných polopřímkách (neboli parametry opačných znamení), vytváří se hyperbolický paraboloid, jsou-li v téže polopřímce parametry stejného znaménka, eliptický paraboloid.

Jsou-li paraboly řídící a tvořící o společném vrcholu a ose a v rovinách k sobě kolmých shodné, vzniká translací při nestejném znaménku parametrů orthogonální hyperbolický paraboloid, při stejném znaménku rotační paraboloid.

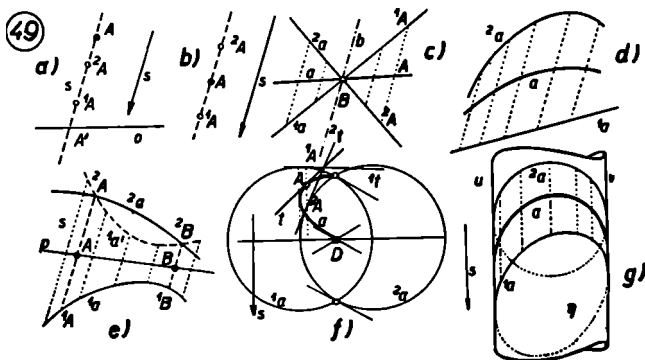
Každá plocha, která je vyplněna (obr. 48a) soustavou kružnic shodných v rovnoběžných rovinách, jejichž středy B vyplňují křivku 1a , je plochou translační, kružnice jsou souhrnem jejich křivek tvořících, křivka 1a je křivkou řídící.

Totéž platí i pro pohybujiící se křivku rovinnou, která nemění ani tvar ani polohu, zůstávajíc stále v rovině k původní poloze rovnoběžné. V obr. 48b je zobrazena zajímavá plocha translační, která vzniká posouváním sinusoidy b po sinusoidě a . Křivky a , b jsou ve dvou k sobě kolmých rovinách.

Vytkneme-li tři dosti blízké polohy křivky b a tři blízké polohy křivky a , vzniknou čtyři malé kosodélníky o společném vrcholu M , mající u tohoto bodu M součet úhlů rovný $4R$. Lze přesně ukázat, že tato nepřímková plocha je rozvinutelná. Nahradíme-li křivky a a b lomenými čarami, dostáváme translaci jedné po druhé známý v praxi používaný rozvinutelný mnohostěn, který lze získati formami buď složením nebo vytlačěním z listu papíru (obr. 48c). Plocha válcová o řídící křivce v sinusoidě, vytlačěná z papíru, dá se ohýbatí kolem svých povrchových přímek, plocha translační tvaru plochy η (obr. 48a) však tento pohyb nepřipouští, rozvíjí a transformuje se pouze tlakem prováděným celými rovinami ve směru kolmém na rovinu křivky řídící a [Viz (?) str. 30 a n. II. dílu.] podél kráterových křivek a , 2a a nejvyšší křivky plochy.

8. SOUČTOVÉ PLOCHY

8,0. Základní pojmy. Buď v rovině (obr. 49a) dána pevná přímka o — *osa sčítání* — a pevný směr s — *směr sčítání*. V libovolné přímce $s' \parallel s$ položené dva body ${}^1A, {}^2A$, vzdálené od osy o směrem s o délky ${}^1AA', {}^2AA'$ vedou k dalšímu bodu A , pro nějž $\overline{AA'} = \overline{{}^1AA'} + \overline{{}^2AA'}$. Bod A označujeme



jako součet bodů ${}^1A, {}^2A$ pro osu o a směr s . Součet může být pojat *algebraicky*, to jest být součtem nebo rozdílem pořadnic čítaných bodů směrem s . Uvážíme-li místo součtu pouze *polovinu* součtu, bude bod A součet bodů ${}^1A, {}^2A$, středem jimi určené úsečky (obr. 49b). Z tohoto pojetí plyne, že:

Součet přímek ${}^1a, {}^2a$ směrem s je přímka a , která je čtvrtou harmonickou k trojnici ${}^1a, {}^2a$ a $b \parallel s$ jdoucí bodem B (obr. 49c).

Dále je patrné z obr. 49d:

Součet algebraické křivky stupně m -tého 2a a přímky 1a je k ní afinní křivka a , která je též stupně m -tého.

Abychom určili stupeň součtu a dvou křivek 1a stupně m -tého a 2a stupně n -tého směrem s , zvolme libovolnou přímkou p (obr. 49e) a hledíme počet jejích průsečíků s křivkou a ! Křivka ${}^1a'$ směrem s souměrně sdružená s křivkou 1a a proto též stupně m -tého, protíná křivku 2a v mn bodech ${}^2A, {}^2B, \dots$, které vedou, jak z obrázku patrně, k průsečíkům, A, B, \dots přímkou p se součtem a daných křivek.

Součet dvou křivek ${}^1a, {}^2a$ stupně m -tého a n -tého je obecně algebraická křivka stupně mn -tého.

V obr. 49f stanovena část součtu směrem s dvou kružnic ${}^1a, {}^2a$, jejichž středná je k s kolmá. Je to křivka tvaru *lemniskaty s dvojným uzlovým bodem* v bodě D . Ježto součet dvou sečen základních křivek dá sečnu součtu, je z toho zřejmo, že:

Součet tečen sčítaných křivek je tečnou jejich součtu.

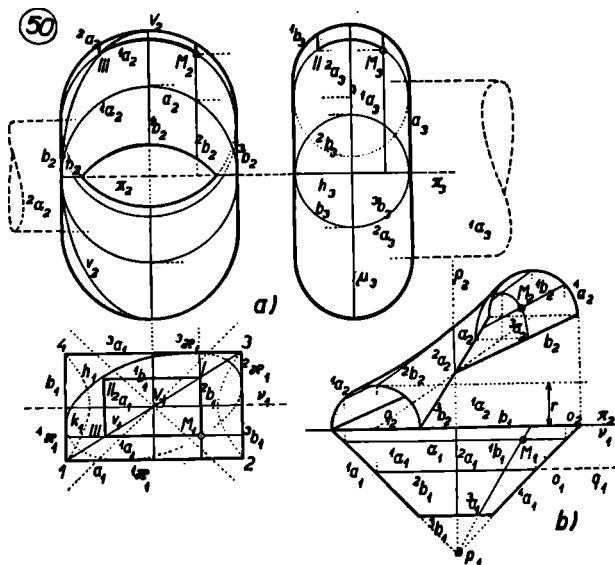
Tyto úvahy lze rozšířit i do prostoru. Můžeme uvažovati buď základní rovinu ω a směr sčítání s . Dva body 1A a 2A v přímce $s' \parallel s$ protínající ω v bodě A' dávají součet A , pro nějž platí, že $\overline{AA'} = \overline{{}^1AA'} + \overline{{}^2AA'}$, nebo chceme-li z úvah vyloučiti rovinu ω , můžeme bráti za součet bodů ${}^1A, {}^2A$ položených v přímce $s' \parallel s$ střed A úsečky jimi určené. Tedy:

Součtem α dvou rovin ${}^1\alpha, {}^2\alpha$ je opět rovina procházející jejich průsečnicí, součtem algebraické plochy ${}^1\alpha$ m -tého stupně a roviny ${}^2\alpha$ je plocha α stupně m -tého a součtem α dvou algebraických ploch ${}^1\alpha$ m -tého a ${}^2\alpha$ n -tého stupně je obecně algebraická plocha stupně mn -tého.

Vytkneme-li v prostoru (obr. 49g) dvě roviny ${}^1\alpha$ a ${}^2\alpha$ a protneme-li je plochou válcovou druhého stupně rovnoběžnou se směrem s sčítání, získáme tím v rovinách ${}^1\alpha$ a ${}^2\alpha$ dvě afinně sdružené kuželosečky ${}^1a, {}^2a$, jejichž součtem je kuželosečka k nim afinně sdružená. Z tohoto prostorového řešení plyne poučka, že v rovině součtem dvou elips (hyperbol nebo parabol) o společných tečnách rovnoběžných se směrem

sčítání jsou dvě elipsy (hyperboly nebo paraboly), dotýkající se týchž dvou tečen.

Plyne to z toho, že křivku 2a můžeme bráti na ploše η tak, jak je vyznačeno v obrazci, nebo zaměnit ji křivkou ${}^2a'$, která má v části viditelné křivky 2a svou část neviditelnou a naopak.



8.1. Plochy kuželosečko-kuželosečkové. Provedme příklad na sčítání dvou ploch válcových ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ (obr. 50a) v prostoru! Sčítání provádějme pro rovinu π jako základní a pro směr sčítání kolmý k této rovině! Součet dvou rotačních ploch válcových ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$, majících v π své osy bude *plocha čtvrtého stupně*, která má tři roviny kolmé souměrnosti, tři osy kolmé souměrnosti a která je plochou středovou: označme ji α !

V rovinách rovnoběžných s ν jsou položeny na ploše válcové ${}^1\alpha$ kružnice, na ploše válcové ${}^2\alpha$ přímky, proto v těchto rovinách bude míti α soustavu shodných kružnic. Totéž platí pro roviny rovnoběžné s μ . Tu na ${}^2\alpha$ jsou kružnice shodné a na ${}^1\alpha$ přímky. Z uvedeného je patrné, že α má dvě soustavy povrchových kružnic v rovinách rovnoběžných s ν a μ .

Uvažovanou plochu možno též vytvořiti jako plochu posouvání translací kružnice b po kružnici a.

Podél těchto kružnic se dotýkají plochy α plochy válcové, které přecházejí v roviny ${}^1\kappa$, ${}^2\kappa$, ${}^3\kappa$, ${}^4\kappa$, v nichž jsou položeny kružnice, podél nichž se v celém rozsahu uvedené roviny dotýkají plochy α . Jsou to (obdobně jako u anuloidu — odst. 2,7) *kráterové kružnice* plochy α , které v rovinách κ vytvářejí lunety, bylo-li plochy α použito jako lící plochy klenby nad obdélníkem. Plocha α bývá označována jménem *plocha kruho-kruhová*, v němž vytčena řídicí i tvořící křivka. Plocha kruho-kruhová nad obdélníkem má kruhové lunety o různých výškách, nahradíme-li větší kružnici elipsou o téže výšce, jakou má menší kružnice, řeší vytvořená *plocha kruho-eliptická* líc klenby o stejně vysokých lunetách.

Z plochy α bývala používána jen část — v obraze vyznačena body *M I III III* — která do podporujícího zdiva nejde tečně, jako je tomu u použité plochy α v mezích kráterových kružnic, ale seče roviny podpůrného zdiva v úhlu.

Vytkneme-li v půdoryse elipsu k_1 , která se dotýká obdélníkového obrysu půdorysu plochy, můžeme tuto křivku pokládati za půdorys elipsy 1k položené na ploše válcové ${}^1\alpha$ a za půdorys další elipsy 2k ležící na válcové ploše ${}^2\alpha$. Jejich součtem je elipsa k plochy α . Z toho je patrné, že, *na ploše α je nekonečně mnoho elips, které se promítají do roviny π do elips vepsaných obdélníku 1 2 3 4.* Každým bodem *M* plochy jdou dvě takové elipsy. Týmž bodem jdou i dvě kružnice, na jejichž podkladě vyhledáme tečnou rovinu τ plochy. Touž rovinu mohli bychom určit i jako součet tečných rovin válcových ploch ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ v bodech odpovídajících bodu *M*.

Plochy válcové ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ protínají se v prostorové křivce čtvrtého stupně ${}^1h \equiv {}^2h$ souměrné k rovině π , kterou bĕřeme za základ kolmého sčítání. Vytkneme-li na křivce dva body ${}^1H \equiv {}^2H$, dají součet H ve dvojitĕ výšĕ nad π a tak dojdeme ke křivce prostorové stupně čtvrtĕho o pŕodorysu v rovnoosĕ hyperbole h_1 , která náležĕ α . Vezmeme-li však na křivce prŕsečné dva body ${}^1H'$ a ${}^2H'$ souměrnĕ položené k π , dají součet H' položený v π na křivce h_1 . Z ŕoho je patrnĕ, že plocha α má v π položenou rovnoosou hyperbolu h , která jde body 1, 2, 3, 4 a která je pro plochu α dvojnou křĕvkou. Majĕ-li válcovĕ plochy ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ tŕž polomĕr, rozpadne se tato dvojná hyperbola na dvĕ dvojnĕ, navzájem kolmĕ pŕímky plochy α .

Plochy translační kuželosečko-kuželosečkovĕ byly za prof. Tilšera na českĕ technice ve velĕkĕ oblibĕ a studenti vypracovali řadu jejich kartonovĕch modelŕ.

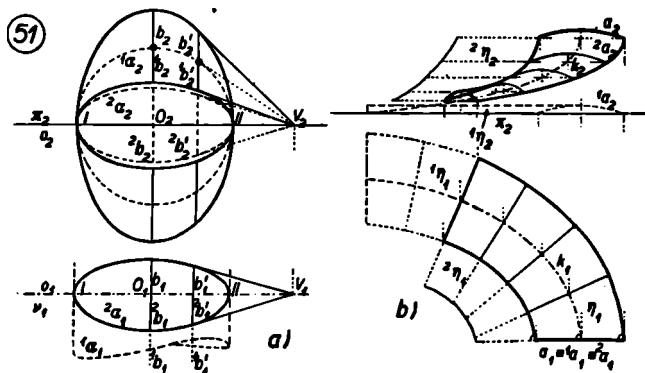
Z uvedenĕho pŕĕkladu je patrnĕ, že lze každou translační plochu, jejíž křĕvky řídĕcí a tvoŕĕcí jsou křĕvky rovinnĕ, vytvoŕiti tĕž jako součtovou plochu dvou válcovĕch ploch.

8,2. Plocha cylindroidu. V obr. 50b je zobrazen součet α rotační plochy válcovĕ ${}^1\alpha$ majĕcí osu o v rovinĕ π a plochy hyperbolickĕho paraboloidu ${}^2\alpha$, danĕho pŕímku $p \perp \pi$, pŕímku q a rovinou π jako řídĕcími ŕtvary. Součet α je zborcená plocha čtvrtĕho stupně. Povrchovĕ pŕímky, rovnoobĕžné s rovinou ν protĕínají elipsy 1a a 4a , jevící se v náryse jako kružnice, v pŕodoryse jako pŕímky svĕrajĕcí s ν_1 ŕhel 135° a 45° . Plocha je t. zv. *cylindroid* (viz odst. 5,11). V rovinách jdoucĕch pŕímku p má elipsy, z nichž 2a v rovinĕ kolmĕ k ν je kružnicĕ. Tečnā rovina v bodĕ M urĕĕ se povrchovou pŕímku 1b a tečnu k elipse 3a bodem M jdoucĕ nebo za pomoci dotykovĕ zborcenĕ plochy druhĕho stupně nebo Chaslesovou vĕtou (odst. 5,5). Pŕímky b a 3b jsou torsální pŕímky plochy α , roviny podĕl nich se dotýkajĕcí jsou rovnoobĕžné s ν .

Plocha bývala pouŕívána jako lĕcí plocha klenby nad schodištĕm, které vedlo z jednoho patra do patra vŕššího,

při čemž chodby těchto pater byly překlenuty valenými klenbami o plném oblouku, ukončenými elipsami 1a a 4a . (Fréziérovův cylindroid).

8.3. Další příklady součtových ploch. V obr. 51a bylo zvoleno totéž sčítání jako v předešlém příkladě, základní rovinou je rovina π a směr sčítání je k ní kolmý. Plocha ${}^1\alpha$ je rotační



plocha válcová kolmá k rovině ν , plocha ${}^2\alpha$ je rotační elipsoid o ose o . Součet α má v rovinách kolmých k ose o vždy dvě kružnice, podél nichž se plochy α dotýkají dvě plochy kuželové, mající vrchol V v ose o . Jsou to součty dotykové plochy kuželové elipsoidu ${}^2\alpha$ a tečné roviny plochy válcové ${}^1\alpha$. Elipsy, které mají v půdoryse v bodech I, II své vrcholy, můžeme pokládati jak za půdorys elipsy na elipsoidu ${}^2\alpha$, tak elipsy na ploše válcové ${}^1\alpha$. Jejich součet je opět elipsa, která náleží součtu α a podél níž se α dotýká válcová plocha, vzniklá sečtením plochy válcové ${}^1\alpha$ a válcové plochy dotýkající se elipsoidu ${}^2\alpha$ podle příslušné povrchové elipsy. Podél dvou z těchto elips přejde dotyková plocha válcová do roviny, získáváme tak na α dvě křivky kráterové. Označme úhel sevřený jejich rovinami písmenou φ ! Vidíme, že zde

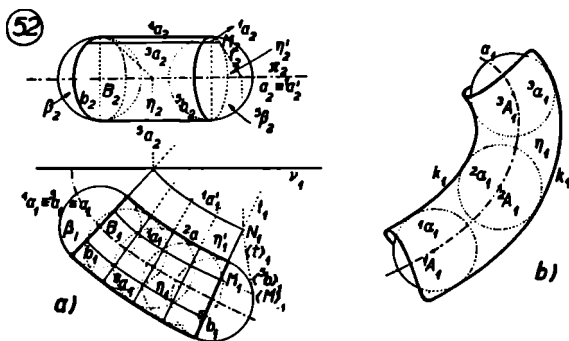
uvažovaná plocha α je plochou, která patří do skupiny ploch uvažovaných v odst. 3,2 a je-li úhel $\varphi = 360^\circ : n$, kde n je číslo celé, lze $\frac{1}{2}n$ těchto ploch složit v celek o společné ose o a podél svých kráterových elips se navzájem dotýkající a tento celek lze použít jako ozdobný motiv.

V obr. 51b jsou zobrazeny dvě plochy, plocha římsová ${}^1\eta$ daná řídicí křivkou k_1 v π a normálním řezem 1a v rovině kolmé k π i ke křivce k_1 a dále zborcená pláň ${}^2\eta$ určená prostorovou křivkou k , jejímž půdorysem je k_1 a jejíž povrchové přímky kolmé ke křivce k jsou rovnoběžné s rovinou π . Součtová plocha η ploch ${}^1\eta$ a ${}^2\eta$ pro π jako základní rovinu sčítání a směr sčítání $s \perp \pi$, má v rovinách kolmých ke křivce k_1 a k π shodné mezi sebou křivky a, a', \dots a shodně k π položené.

Je-li k silniční trať a a příčným profilem silničního tělesa, je η plochou silniční koruny. Tato plocha vyskytuje se v stavitelství silničním a železničním v místech, kde mezi dvěma kruhovými oblouky bylo použito přechodnice nebo při použitých kruhových obloucích tam, kde není stejný spád a kde k není křivkou šroubovou. Je-li k šroubovicí, přechází plocha do plochy šroubové. Vraťme se k obr. 48b! Vytkneme-li plochy válcové ${}^1\eta, {}^2\eta$, pro něž jsou a a b normálními řezy, je jejich součet pro směr s plocha η .

9. ROUROVÉ PLOCHY

9.0. Vytvoření a základní vlastnosti. Pohybuje-li se plocha kulová β svým středem B po dané křivce a , aniž by měnila velikost svého poloměru, vznikne obalová plocha, jejímiž charakteristikami $b, {}^1b, \dots$ jsou kružnice o poloměru r , položené v rovinách jdoucích středem obalené plochy kulové kolmo ke křivce řídící. Vytvořené plochy nazýváme *rourovými*. Potom platí:



Každá rourová plocha má na svém povrchu soustavu shodných kružnic stálého poloměru r , položených v rovinách kolmých ke křivce řídící a majících středy na této křivce.

Je-li řídící křivka křivkou rovinnou (obr. 52a) — v obrazení zvolena křivka a v parabole a položené v rovině π , je vytvořená plocha η plochou římsovou (odst. 4,5). Kromě soustavy shodných kružnic v rovinách kolmých k π nese na svém povrchu soustavu rovnoběžných křivek s řídící křivkou a . Dvě z nich, které jsou křivkami kráterovými a podél nichž se v celém rozsahu dotýkají plochy η roviny rovnoběžné s π , jsou paraboly ${}^4a, {}^5a$ shodné s křivkou a . Ostatní z této

šoustavy povrchových křivek jsou parabolické aequidistanty. Podél jedné z nich, na př. 2a je vyznačena v obrazci dotyková plocha η' rozvinutelná, stejného spádu vzhledem k π , jejíž stopou ${}^1a'$ na π je rovněž aequidistanta paraboly a . Tyto plochy přecházejí do válcových ploch kolmých k π pro obě křivky položené v π .

Tečná rovina v libovolném bodě N se stanoví buď tečnou t ke křivce 5b a tečnou u (v obrazci není rýsována) ke křivce 1a v bodě M . Nebo stanovíme tečnou rovinu bodu M na základě toho, že podél charakteristiky 5b se dotýká plochy η rotační plocha válcová o povrchových přímkách kolmých k rovině křivky 5b nebo konečně na podkladě toho, že podél křivky 2a rovnoběžné s π se dotýká plochy η rozvinutelná plocha stejného spádu η' . Tečna sestrojena v bodě N ke křivce ${}^1a'$ je již stopou tečné roviny bodu M na rovině π .

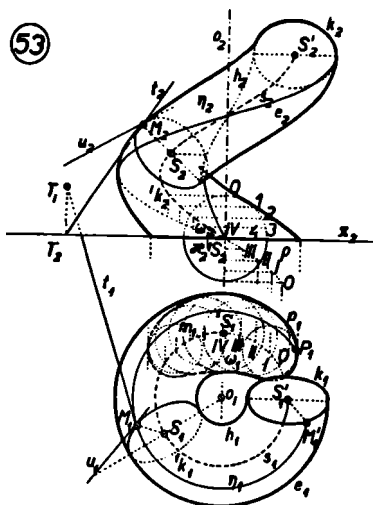
Obrysy ploch rourových v promítání kolmém se sestroyují velmi pohodlně. Veškeré obalené plochy kulové (obr. 52b) obalové plochy η , určené křivkou a vyplněnou středy obalených koulí, mají obrysy kolmých průmětů v kružnicích stálého poloměru r opsaných okolo jednotlivých bodů kolmého průmětu a_1 křivky a . Proto:

Obrys kolmého průmětu plochy rourové je aequidistanta k_1 kolmého průmětu a_1 řídící křivky a .

9,1. Serpentina. Vytkněme v obr. 53 křivku šroubovou s (srov. s odst. 4,1) a předpokládejme o ní, že je řídící křivkou rourové plochy η , obalované plochami kulovými o poloměru r . Charakteristiky plochy η jsou kružnice o poloměru r , mající střed na šroubovici s a položené v rovinách kolmých k s . Charakteristikou k o středu S' je část zobrazené *transcendentní plochy* ukončena. Obrys nárysu je aequidistanta kolmého průmětu s_2 křivky řídící, t. j. aequidistanta obecné sinusoidy s_2 . Sestává z nekonečně mnoho větví, které proti vrcholu sinusoidy mají dva body úvratu a dvojný uzlový bod. Tyto singularity mohou splynouti v jediný bod nebo

nemusí být reálné, obdobně jako tomu bylo při kolmém obrysu prstence (odst. 2,7), je-li r rovno nebo menší než poloměr křivosti ve vrcholu sinusoidy s_2 .

Dále jsou vyznačeny v obraze šroubovice e a h o největším a nejmenším poloměru, tvořící první obrys. Jejich půdorysy



e_1, h_1 jsou obrysy půdorysu. Aby se vyšetřila stopa plochy η na rovině π může se buď vyhledati řada stopníků jednotlivých povrchových křivek šroubových nebo řada stopníků charakteristik na rovině π a spojití poté tyto body plynulou křivkou. Výhodněji lze postupovati takto:

Vytkněme plochu kulovou κ opsanou kolem stopníku $1s$ šroubovice s . K ploše κ sestrojme obě roviny tečné rovnoběžné s π a mezi nimi sedm rovnoběžných, mezi sebou stejně vzdálených rovin, vyhledejme jejich průsečíky $0, I, II, III, \dots$ se šroubovicí s a poloměry kružnic v těchto rovinách po-

ložených na ploše kulové κ ; jsou to úsečky rovné vzdálenostem bodů $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ od nárysu o_2 osy o . Poté v půdoryse opíšeme okolo bodů I, II, III, IV, \dots kružnice poloměry rovnými vzdálenostem bodů $1, 2, 3, 4, \dots$ od o_2 a takto získané kružnice jsou průsečnice ploch kulových o středech I, II, III, IV, \dots položených na s s rovinou π . Obalují křivku p , která je hledanou stopou plochy η na π . Je to křivka podle $o_1^1 S_1$ kolmo souměrná.

Je zřejmo, že touto methodou může býti stanoven řez této *plochy rourové šroubové*, která bývá též označována jménem *serpentina*, s libovolnou rovinou, ale stejně lze vyhledati rovinný řez jakékoli rourové plochy o libovolné křivce řídící s .

Zvolme nyní půdorys M_1 bodu plochy a sice na viditelné straně. Bodem M provedena povrchová šroubovice (její půdorys je kružnice kolem o_1 jdoucí M_1), vyšetřen průsečík $M's$ charakteristikou k (v obraze poloměrem $M_1'S_1'$ protata kružnice s_1 z bodu M_1 v bodě S_1 a kolem S_1 sestrojen půdorys chatakeristiky 1k). Je to elipsa shodná s k_1 , její hlavní osa jde bodem o_1 a vedlejší je tečnou křivky s_1 . Kružnice 1k leží v rovině kolmé k tečně šroubovice s v bodě S a na základě toho vyhledán její nárys 1k_2 a na něm bod M_2 .

Tečnou rovinu bodu M lze vyšetřiti buď jako rovinu τ určenou tečnou u v bodě M ke charakteristice 1k a tečnou t ke šroubovici m v bodě $M - t_1$ je tečnou k m_1 , stopník šroubovice m je bod P ve stopě p plochy η ; $\overline{T_1 M_1} = \widehat{M_1 P_1}$; neznáme-li stopu p , můžeme tečnu šroubovice určití snadno za pomoci příslušné plochy kuželové řídící o výšce v^0 . Jinak můžeme určití tečnou rovinu τ jako tečnou rovinu válcové plochy, která se podél 1k plochy η dotýká. Je to rotační plocha válcová o normálním řezu 1k nebo můžeme vyhledat τ jako tečnou rovinu dotykové plochy kulové podle 1k ; jejím středem je bod S a proto SM je normálou plochy v bodě M .

10. PLOCHY ŠROUBOVÉ

10.0. Vytvoření a základní pojmy. Zvolíme-li libovolnou křivku k , rovinnou nebo prostorovou a vykonáme-li s ní šroubový pohyb okolo osy o , to jest spojíme-li její rovnoměrné otáčení okolo o se současným postupem rovněž rovnoměrným směrem osy o , vytvoří každý bod křivky k šroubovici o ose o a výšce závitů v (stejně pro všechny tyto křivky). Všechny tyto šroubovice vyplní jako soustava sousých šroubovic plochu šroubovou η . Libovolný bod křivky k proběhne šroubovici, kterou můžeme označiti jako *řídící křivku*, protože určuje šroubový pohyb útvaru k , který plochu vytváří. Vyhledáme-li průsečíky všech šroubovic plochy η s rovinou $\pi \perp o$, získáváme křivku n , jejímž šroubovým pohybem určeným řídící šroubovicí, vytvoří se tatáž plocha η . Křivku n jmenujeme *kolmým* nebo *normálním řezem* šroubové plochy η .

Všechny normální řezy plochy šroubové tvoří soustavu křivek plochy a to křivek mezi sebou shodných.

Obdobně průsečíky všech povrchových šroubovic plochy η s libovolnou rovinou α jdoucí osou o vyplňují určitou křivku a a jejím šroubovým pohybem, daným řídící šroubovicí, vytvoří se rovněž tatáž plocha šroubová η . Je tedy zřejmé, že:

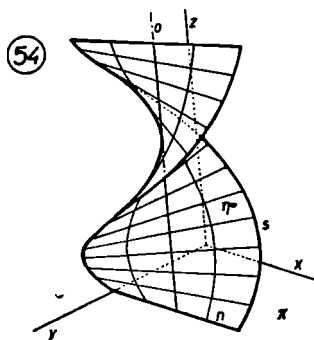
Všechny osové řezy plochy η jsou mezi sebou shodné.

Osový řez šroubové plochy sestává z nekonečně mnohých větví, mezi sebou shodných, které po jedné straně osy následují po sobě ve vzdálenosti rovné výšce v závitů, s druhé strany pak jsou o půl výšky závitů směrem osy proti prvním posunuty.

Plochy šroubové pro závitovou výšku $v = 0$ přecházejí do rotačních ploch, osový řez pak splývá s poledníkem plochy. Pro návitkovou výšku nekonečně velkou přejde šrou-

bová plocha do plochy válcové; povrchové šroubovice stanou se povrchovými přímkami, normální řez základní křivkou plochy válcové.

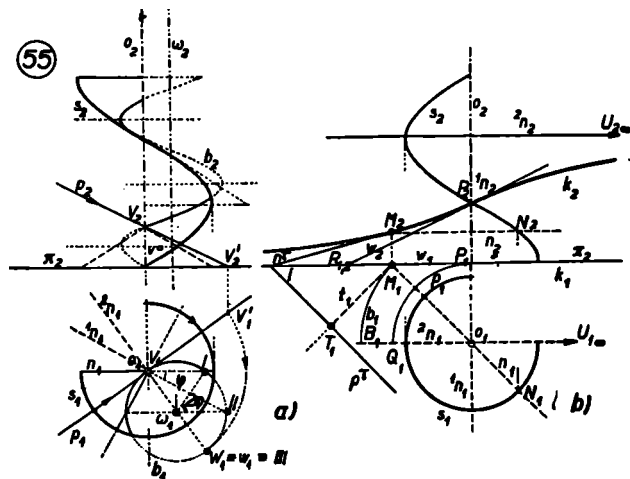
Šroubovice položené na η a mající ve svém okolí největší nebo nejmenší poloměr, jsou obdobné rovníkům a hrdlům rotační plochy a označují se jmény *rovníkové*, *meridiánní šroubovice* a *hrdla*. Hrdlo může přejíti i do osy o dané plochy šroubové.



10.1 Šroubové plochy o normálních řezech přímočarých. V obr. 54 je zobrazena v axonometrickém promítání šroubová plocha η , jejíž normální řez n protíná osu o . Plocha je určena jako zborcená osou o , šroubovicí s a řídicí rovinou π , je to tedy *přímý šroubový konoid*. Abychom vyšetřili jeho některé vlastnosti, vraťme se k obrazci 47b. Tam byla vyšetřována šroubová plocha o normálním řezu kruhovém b a na tomto řezu vyhledán bod I meze stínu vlastního tak, že ze světelného pólu W byla na b spuštěna kolmice a její pata I byla hledaným bodem meze. Veďme libovolnou křivku 1b , která se b v bodě I dotýká! Vinutý sloup vytvářený šroubovým pohybem normálního řezu b a šroubová plocha ${}^1\eta$ vytvářená křivkou 1b musí mít v bodě I touž tečnou rovinu, která je určena tečnou v bodě I ke šroubovici tímto bodem

jdoucí a společnou tečnou křivek b a b' v bodě I . Je proto bod I i bodem meze vlastního stínu plochy η pro dané rovnoběžné osvětlení. Je zřejmo, že platí věta:

Dotyková křivka opsané plochy válcové nebo mez vlastního stínu pro dané rovnoběžné osvětlení při šroubové ploše je vyplněna oněmi body normálních řezů, jejichž normály protínají světelnou osu nebo procházejí světelným pólem.



Zvolme v obr. 55a šroubový konoid přímý a směr světelných paprsků v přímce p ! Na osu o konoidu nanese nad π redukovanou výšku návitku $v^0 = v : 2\pi$ do bodu V , sestrojme jeho vržený stín V' na π a otočme ve směru stoupání řídicí šroubovice s o 90° do bodu W ; do světelného pólu! V půdoryse paty kolmic spuštěných z W_1 na paprskový svazek o středu o_1 vyplní kružnici b_1 nad $o_1 W_1$ jako nad průměrem opsanou. Vytkněme tři body I, II, III křivky b_1 ! Úhel $\sphericalangle I \omega_1 II = 2 \sphericalangle I o_1 II$ a obdobně úhel $\sphericalangle II \omega_1 III = 2 \sphericalangle II o_1 III$. Je patrné, že okolo přímky ω , která jde středem

kružnice b_1 kolmo k π se body I, II, III otáčejí dvojnásobnou rychlostí jako přímky $n, {}^1n, {}^2n$ okolo osy o . Vytvoří proto body I, II, III rovnoměrně podél o vystupující, ale současně se kolem osy ω dvojnásobnou rychlostí rovnoměrně otáčející křivku šroubovou, která má v ω svou osu a má poloviční výšku návitkovou, jaká přísluší řídicí šroubovici s . Tedy:

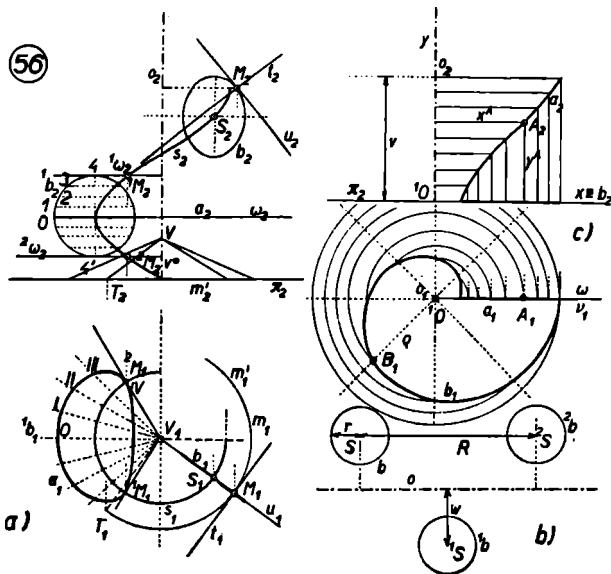
Na ploše šroubového konoidu je soustava šroubovic souosých o ose o a výšce závitů v a soustava šroubovic, které protínají osu o , s níž mají rovnoběžnou osu a mají poloviční výšku závitů. Libovolným bodem plochy jde jedna šroubovice první soustavy a nekonečně mnoho šroubovic soustavy druhé.

Tečnou rovinu v bodě stanovíme pohodlně příslušnou povrchovou přímkou a tečnou k šroubovici o ose o , tím bodem procházející. V obr. 55b vyhledán je řez k plochy šroubové η s nárysnou γ . Tečná rovina bodu M — stanovená přímkou n a tečnou t šroubovice b , která jde bodem M ($\overline{M_1T_1} = \overline{M_1B_1}$), protíná ν v tečně n^r křivky k v bodě M . Normální řez ${}^1n \perp \nu$ má nárysnou stopu P , která je inflexčním bodem křivky k . Její tečna RP je tečnou šroubovice p v bodě P — $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_1R_1}$. Normální řez ${}^2n \parallel \nu$ protíná γ v úběžném bodě. V tomto bodě tečná rovina daného konoidu, jeho *asymptotická rovina* je kolmá k ose o a protíná ν v *asymptotě křivky k* . Křivka k je obecná *tangentoida* o nekonečně mnohých, mezi sebou shodných větvích s inflexemi na přímce o_2 a majícími nekonečně mnoho asymptot, kolmých k o_2 a následujících po sobě ve vzdálenostech $\frac{1}{2}v$.

Zvolíme-li normální řez v přímce, která neprotíná osu řídicí šroubovice, získáváme t. zv. *otevřenou plochu šroubovou pravouhlou*. Tečná rovina v libovolném bodě je tu obdobně jako při šroubovém konoidu dána povrchovou přímkou a tečnou šroubovice, která daným bodem prochází. Obě uvedené šroubové plochy vyskytují se ve stavitelství

silničním, ve stereotomii při schodech, které mají šroubovici jako čáru výstupní a v architektuře jako motiv ozdobný.

10.2. Plocha sv. Jiljí. Povšimněme si nyní šroubové plochy, jejímž osovým řezem je kružnice (obr. 56a)! Bud' dána šroubovice s probíhaná středem S osového řezu b plochy η ! Jed-



noduchým způsobem sestrojíme tu tečnou rovinu v bodě M plochy. Je dána tečnou u k řezu b a tečnou t k šroubovici plochy, která bodem M probíhá. Všechny povrchové šroubovice plochy mají společnou osu o a společnou redukovanou výšku $v^0 = v : 2\pi$, kde v je výška návitku. Všechny tečny šroubovice m procházející bodem M jsou rovnoběžny s povrchovými přímkami kuželové plochy řídicí o vrcho-

lu ∇ ve výšce v^0 nad π a mající v m_1 řídicí křivku. Sestrojíme snadno tečnu t ; t_1 je tečnou kružnice m_1 v M_1 , s t vedeme VT rovnoběžně na řídicí ploše kuželové. V_2T_2 je nárysem této rovnoběžky a s ním je t_2 jdoucí bodem M_2 rovnoběžně. Normální řez v rovině ω sestrojíme snadno takto: K příslušnému osovému řezu 1b vedeme tečné roviny ${}^1\omega \parallel {}^2\omega \parallel \pi$ a vyšetříme jejich průsečíky ${}^1M, {}^2M$ se šroubovicí s . Otočí-li se normální řez o úhel $\sphericalangle {}^1M_1V_1{}^2M_1 = \varphi$, vystoupí současně směrem osy o o délku $v' = {}^1M_2{}^2M_2$. Rozdělíme-li v' na osm stejných dílů a vedeme-li dělicími body rovnoběžky s τ_2 protínající 1b_2 v bodech $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ a rozdělíme-li i úhel $\sphericalangle {}^1M_1V_1{}^2M_1$ na též počet stejných dílů, máme v půdoryse polohy osových řezů, které odpovídají posunu ve směru osy o o délky uvedené v náryse. Nanášíme-li nyní na paprsky svazku o středu V_1 od s_1 do bodů $0, I, II, III, IV, \dots$ vzdálenosti bodů $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ v 1b_2 od průměru $4\ 4'$, získali jsme již řadu bodů normálního řezu a v rovině ω .

Plocha zde uvedená byla použita jako lící plocha stropu nad vinutým schodištěm v klášteře sv. Jiljí a proto se jí dostalo tohoto jména.

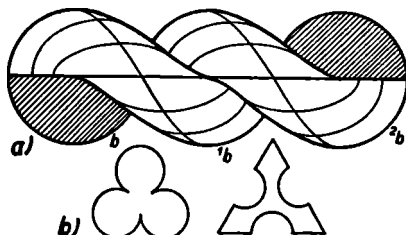
Vytkneme-li v obr. 56b osový řez této plochy, může být $R = n \cdot 2r$ nebo $R \leq n \cdot 2r$. V prvním případě, pro $n = 1$ dostáváme jednu plochu, která se sama sebe dotýká; pro $n = 2$ můžeme utvořit dvě plochy, které se navzájem dotýkají atd., kdežto v druhém případě buď plocha se sama ve šroubovicích protíná nebo jde volně, aniž by se část závitu dotýkala druhé části. Je-li $w > r$ získáváme otevřenou plochu šroubovou, která se dotýká ploch válcových popsaných okolo osy o poloměry $w \pm r$. Pro $w = r$ obsahuje plocha osu o . Pro $w = 0$ a $R = 4r$ získáváme zvláštní plochu, kterou Scheffers [viz (8) díl II, str. 355 a n.] nazval *kadeř* [die Locke] (obr. 57a).

Plochu sv. Jiljí je možno vytvořit jako součtovou plochu prstence a souosého přímého konoidu šroubového; směr sčítání

je dán společnou osou o , základní rovina je k o kolmá. Plocha zobrazená v obr. 57a je součet šroubového přímého konoidu a plochy kulové, která má střed na ose konoidu.

10.3. Vztah mezi osovým a kolmým řezem obecné plochy šroubové vyšetříme snadno (obr. 56c)! Buď dán v rovině ν osový řez a v mezi určené výškou návitku v ! Rozdělme výšku

(57)



v na př. na osm stejných dílů a vytkneme na a příslušné k tomu body, pro $\frac{1}{8}v$ je tu v a bod A . Aby bod A přešel šroubovým pohybem o výšce návitku v do roviny π , musíme ho sesunout o $\frac{1}{8}v$ směrem osy o dolů, získáme v π bod A_1 a ten musíme otočiti o $\frac{1}{8}$ úhlu plného do příslušné polohy B . Provedeme-li toto se všemi body křivky a_1 získáme v π křivku b . Vztáhneme křivku a ke dvěma kolmým osám souřadným x, y , které procházejí počátkem o a křivku b k souřadnicím polárním: počátkem buď bod O , osou ω a průvodiče ρ svírají s osou ω úhly měřené směrem kladným, t. j. proti chodu ručiček hodinových. Bodu A přísluší souřadnice x, y ; bodu B souřadnice ρ a $\varphi = \sphericalangle A_1OB_1$. Je zřejmé, že tu je $x = \rho$ a $y : v = \varphi : 360^\circ$, tedy $y = v \cdot \varphi : 360^\circ$. Měříme-li φ délkou oblouku kruhového na kružnici popsané kolem O poloměrem $v^0 = v : 2\pi$, bude $y = v\varphi : 2\pi = v^0\varphi$ a zvolíme-li $v^0 = 1$, bude $y = \varphi$. Tím je dán vztah mezi křivkou osovou a normální [srovnej (*) str. 352, díl II].

Plochy šroubové o osových řezech kruhových a normálních řezech přímočarých a kruhových jsou velmi často užívanými motivy ozdobnými. Vytvářejí se za jejich pomoci nejen ozdobné sloupy slohu románského a byzantského [viz na př. (3) str. 291, kde jsou normální řezy takových sloupů; obr. 57b], ale i celé motivy stavební, na př. lucerny pod báními, ve slohu východním, jak je patrné z přílohy čís. XIX.

O plochách zborcených šroubových velmi obsažně pojednal Dr J. Kounovský [viz (2)], na jehož vzorný spis zde čtenáře upozornuji. V přílohách XI, XVI, XVII, XVIII, a XX jsou reprodukovány obrazy modelů vypracovaných v stud. roce 1949-50 a 1948-9 posluchači vysoké školy inženýrského stavitelství na Českém vysokém učení technickém v Praze. Takové modely velmi podporují studium složitých ploch, z nárysu a půdorysu těžko představitelných.

DOSLOV

Jsem opravdovou vděčností zavázán Jednotě čs. matematiků a fyziků a Dr *Fr. Vyčichlovi* redaktoru sbírky *Cesta k vědění*, že umožnila tento svazek ve vzorné úpravě vydání. Dále děkuji panu Dr *Fr. Faltusovi* a Dr *B. Hacarovi*, profesorům vysoké školy inženýrského stavitelství ČVUT za laskavé zapůjčení fotografií technických děl buď hotových nebo ve stavbě se nacházejících, Dr *Hacarovi* též za vhodné náměty pro modely pracované posluchači. Děkuji na tomto místě p. asistentovi *B. Keprovi* za vytažení a popsání obrazců, což byla práce nemalá a p. asistentovi *K. Drábkovi* za úpravu rukopisu pro tiskárnu, a výpomoc při provádění korektur.

Snažil jsem se zavést jednotný postup při řešení tečných rovin za pomoci tečen ke dvěma příslušným bodem procházejícím křivkám. Jediný případ, kdy této cesty nebylo použito, byla plocha *corne de vache*, která, protože je vyššího stupně, neskýtala vhodné jednoduché křivky k řešení této úlohy. Tu bylo nutno podržeti dotykový hyperboloid nebo řešení větou Chaslesovou. Namáhal jsem se, aby obrazce byly jasné, jednoduché, přehledné, a vždy jsem se přičinil, aby byl připojen názorný obraz plochy.

Byl bych rád, kdyby tento spisek posloužil našim posluchačům inženýrského stavitelství a pozemního stavitelství a architektury, pro něž je psán, a i těm čtenářům, kteří mají o deskriptivní geometrii zájem.

Dr *F. Kadeřávek*.

V Praze dne 16. července 1950.

L I T E R A T U R A

- (¹) *Kadeřávek-Klíma-Kounovský*: Deskriptivní geometrie I. a II. díl. Knihovna spisů matematických a fyzikálních, svazek 16 a 17, JČMF, Praha 1929 a 1932.
- (²) *Josef Kounovský*: Zborčené plochy. Cesta k vědě, sv. 36, JČMF, Praha, 1947.
- (³) *N. A. Rynin*: Sbornik zadač po načertatělnoj geometrii, str. 283—291, Leningrad, 1923.
- (⁴) Architekt, měsíčník SIA, 5 — XLVI — 1948 květen.
Konrád Hruban: Tenké klenby ze železového betonu, str. 64—67.
Otakar Štěpánek: Architektura zborčených kleneb, str. 77—84.
- (⁵) *Klíma-Šimek*: Kamenofez. Cesta k vědě sv. 29, 1942 a 1950.
- (⁶) *W. Weibel*: Russland. Delphin Verlag Mnichov, 1916.
- (⁷) *Ch. Wiener*: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 1887.
- (⁸) *G. Scheffers*: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Berlin, 1920.
- (⁹) *Vladimír Vlček*: Dnešní Moskva. Praha, 1947.
- (¹⁰) *Kurt Hielscher*: Románia, Lipsko, 1933.
- (¹¹) *Fr. Táborský*: Ruské umění, díl I., část I., str. 59. Praha, 1921.
- (¹²) *F. G.-M.*: Exercices de géométrie descriptive, Paris, 1888.

OBSAH

Úvodem	6
1. OBALOVÉ PLOCHY	7
2. ROTAČNÍ PLOCHY	8
2,0. Vytváření rotačních ploch	8
2,1. Dotykové plochy rotačních ploch	8
2,2. Tečné roviny a normály	11
2,3. Obrisy a rovnoběžné osvětlení	12
2,4. Rovinné řezy	14
2,5. Průniky dvou rotačních ploch	15
2,51. Příklad rovnoběžných os	15
2,52. Příklad různoběžných os	18
2,53. Příklad mimoběžných os	19
2,6. Rotační zborcený hyperboloid	19
2,61. Stupeň rotační plochy	20
2,62. Rotační hyperboloid zborcený jako chladič věž	21
2,63. Rotační plochy druhého stupně a jejich rovinné řezy	22
2,64. Průniky dvou rotačních ploch druhého stupně	23
2,7. Kruhový prstenec — anuloid	27
3. ZEVŠEOBECNĚNÍ ROTAČNÍCH PLOCH	32
3,0. Užití afinní transformace	32
3,1. Nahrazení rovňkové křivky křivkou hyperbolickou plochy	33
3,2. Nahrazení rovňku křivkou souměrnou k ose plochy	33
4. ROZVINUTELNÉ PLOCHY	36
4,0. Vytvoření a základní pojmy	36
4,1. Rozvinutelná plocha šroubová	38
4,2. Rozvinutelná plocha stejného spádu	41
4,3. Rovinný řez a průnik dvou ploch stejného spádu	45
4,4. Osvětlení ploch stejného spádu	47
4,5. Plochy římsové	48
5. PLOCHY ZBORCENÉ	50
5,0. Vytvoření zborcené plochy	50
5,1. Vytvoření zborceného hyperboloidu a jeho vlastnosti	51
5,2. Vytvoření hyperbolického paraboloidu a jeho vlastnosti	53
5,3. Použití hyperbolického paraboloidu v technické praxi	55

5,4. Obecná zborcená plocha a její stupeň	58
5,5. Tečná rovina v bodě zborcené plochy	60
5,6. Torsální přímký a kuspídní body	62
5,7. Konoidy	63
5,8. Použití konoidů v technické praxi	65
5,9. Zborcená plocha Montpelliérského oblouku	67
5,10. Plocha eliptického pohybu v prostoru	69
5,11. Cylindroidy	71
5,12. Plocha corne de vache	73
5,13. Zborcená plocha vyrovnávací	74
6. KLÍNOVÉ PLOCHY	75
6,0. Vytvoření	75
6,1. Některé druhy plochy klínových a jejich použití	77
7. PLOCHY POSOUVÁNÍ	81
7,0. Vytvoření ploch translačních a základní pojmy	81
7,1. Plocha vinutého sloupu	82
7,2. Vytvoření paraboloidů a modely ploch translačních ..	86
8. SOUČTOVÉ PLOCHY	88
8,0. Základní pojmy	88
8,1. Plochy kuželosečko-kuželosečkové	90
8,2. Plocha cylindroidu	92
8,3. Příklady součtových ploch	93
9. ROUROVÉ PLOCHY	95
9,0. Vytvoření a základní vlastnosti	95
9,1. Serpentina	96
10. PLOCHY ŠROUBOVÉ	99
10,0. Vytvoření a základní pojmy	99
10,1. Přímý šroubový konoid	100
10,2. Plocha sv. Jiljí	103
10,3. Vztah mezi osovým a kolmým řezem obecné šroubové plochy	105
DOSLOV	107
LITERATURA	108

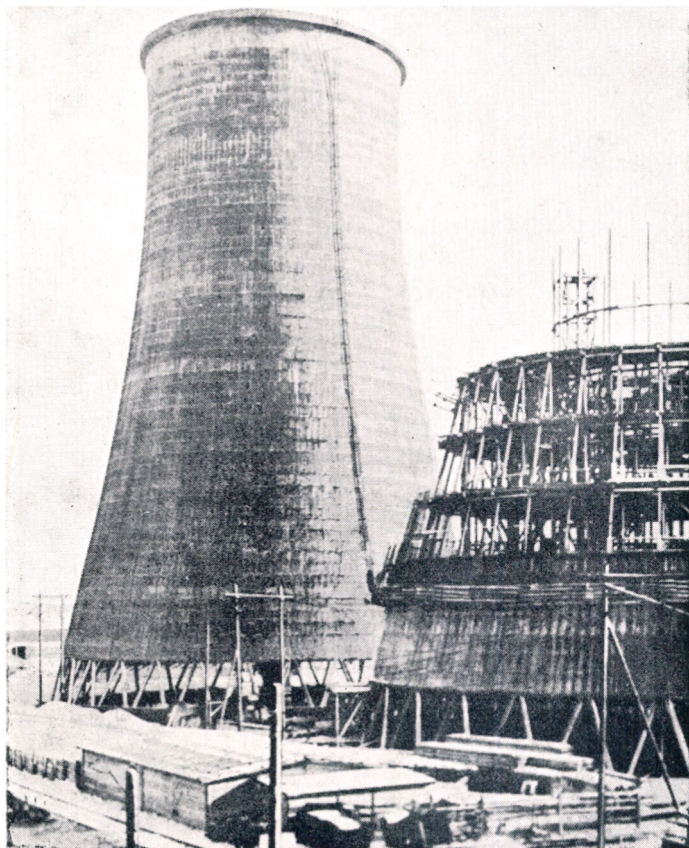
Prof. Dr František Kadeřávek:

PLOCHY STAVEBNĚ-INŽENÝRSKÉ PRAXE

Knížnice Cesta k vědění, sv. 58

Šéfredaktor Miroslav Střída. Odborný redaktor Miroslav Fuka. Redaktor knihnice Dr František Vyčichlo. Výtvarný redaktor Miloš Hrbas. Plán. skupina 30103-130, čís. pov. výměru 57185/50/III, čís. publ. 46. Sazba 16. X. 1950, tisk 21. XII. 1950. První vydání. Náklad 4400 výtisků. Počet plán. archů 4,12, autorských archů 6,21, vydavatelských archů 6,33. Papír: skupina 221-07 a 403-21, formát 70/100, gramáž 80 g a 110 g. Vytiskly Středočeské tiskárny n. p., závod 07 (Prometheus), Praha VIII. Tištěno ze sazby písmem Extended. Všeobecná daň 1%. Cena brož. výtisku 43 Kčs.

Příl. I.



Chladicí věž tvaru rotačního zborceného hyperboloidu.



Ocelová nádrž na tekutiny ve tvaru kapky s poledníkem v jediné křivce.



Ocelová nádrž na tekutiny s poledníkem složeným z více křivek.

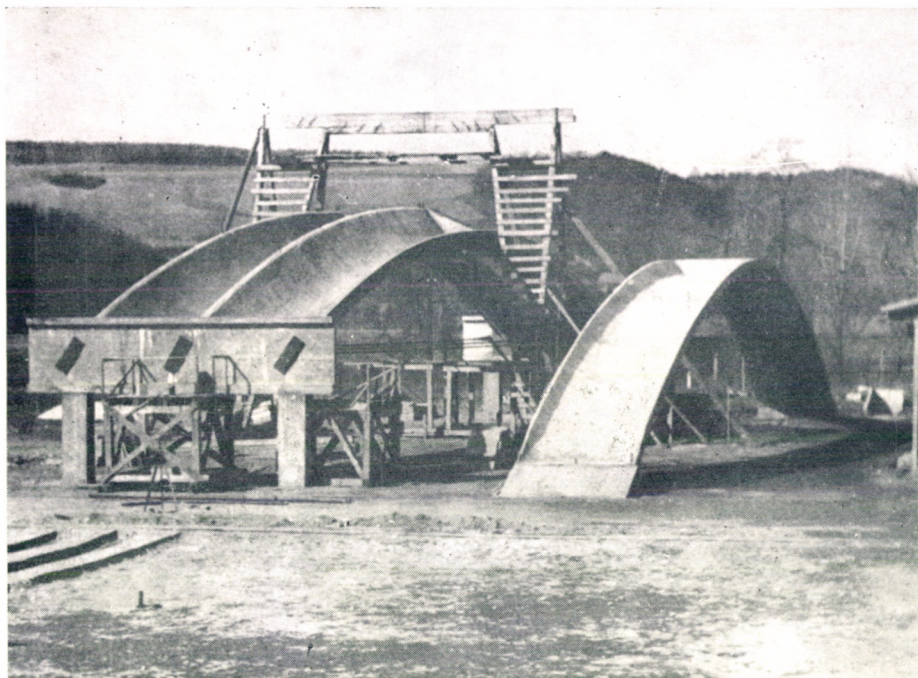


Archangelský sobor v Moskvě. s typickými zakomary, vystavěný milánským architektem v letech 1505—08.



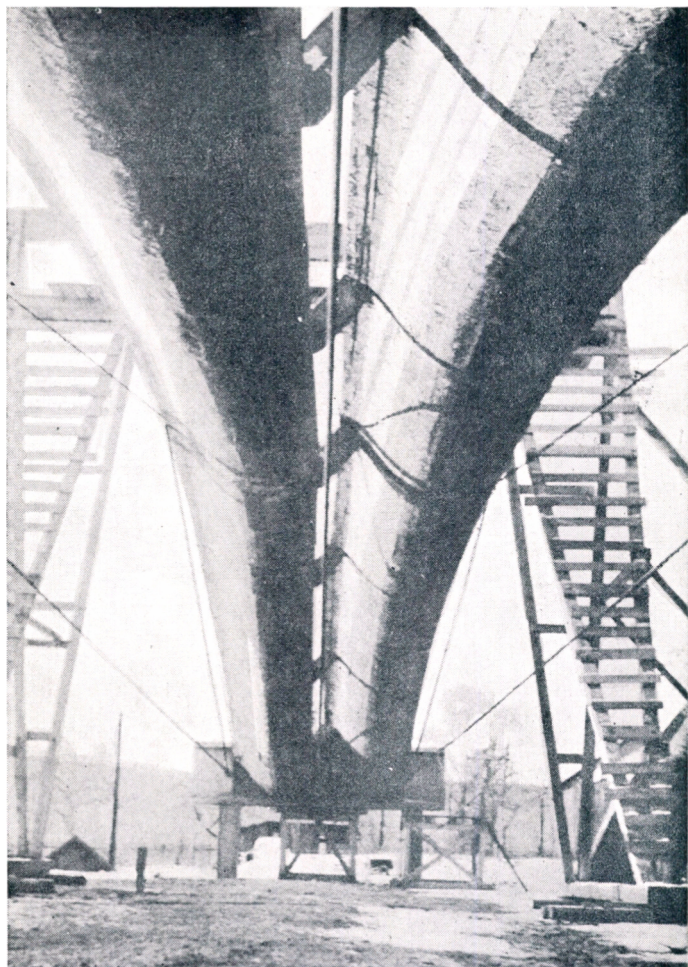
Katedrální sobor Vasila Blaženého v Moskvě, vystavěný v letech 1554—57 ruskými staviteli Barmou a Postnikem.

Příl. VI.



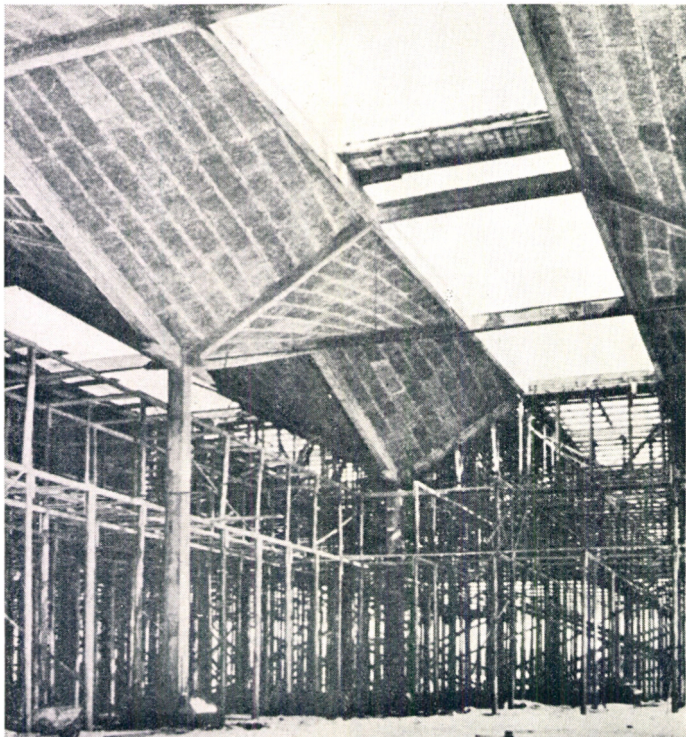
Dva osazené a jeden k osadění připravený díl střechy z hyperbolických paraboloidů. Osazené díly jsou opatřeny táhly. Rozpětí je 40 m.

Přil. VII.



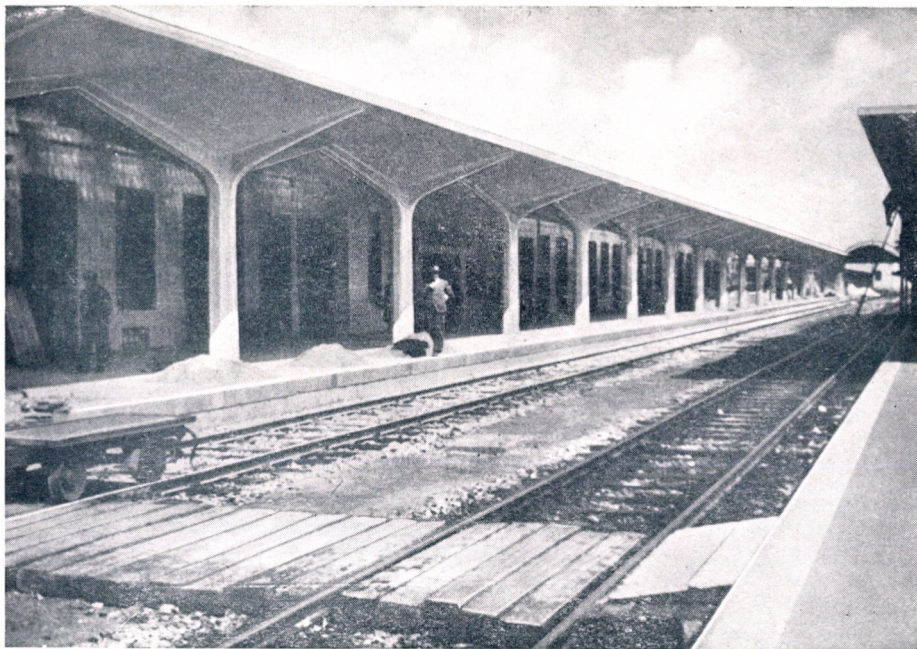
Pohled na touž střechu jako v přil. VI zevnitř, mezera 80 cm je ponechána pro zasklení. Dobře jsou patrna táhla.

Příl. VIII.



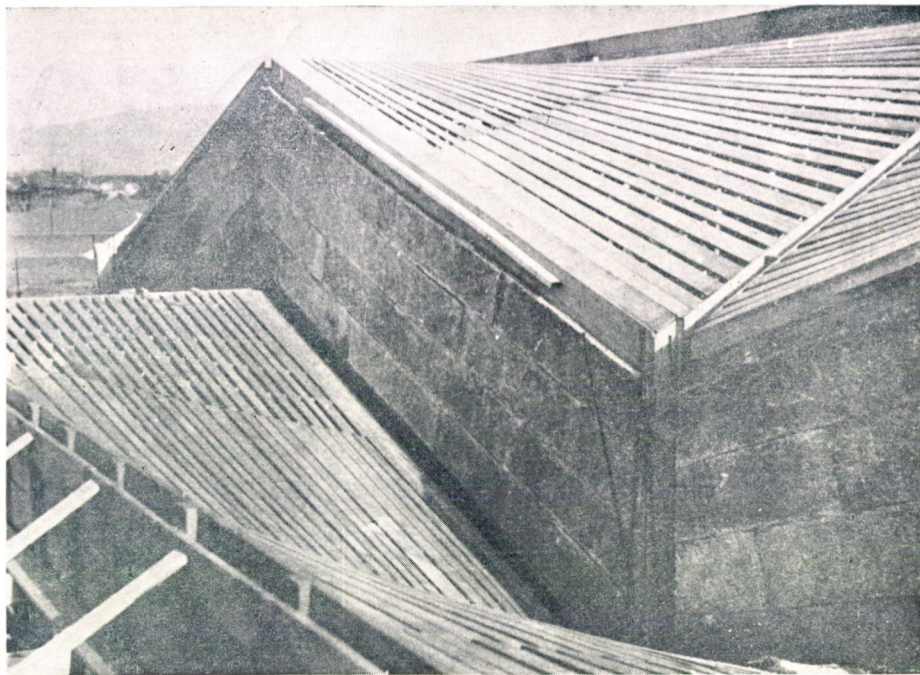
Skupiny paraboloidů, které vytvoří střechní nad rozlehlým pracovištěm. Dešťová voda je odváděna rourami v podpůrných sloupech.

Přil. IX.



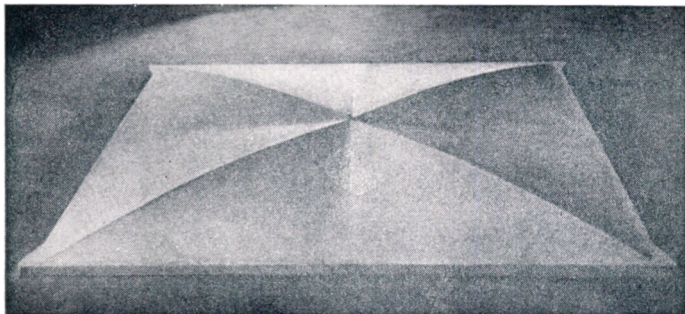
Část nádražního nástupiště, krytá skupinami hyperbolických paraboloidů.

Příl. X.

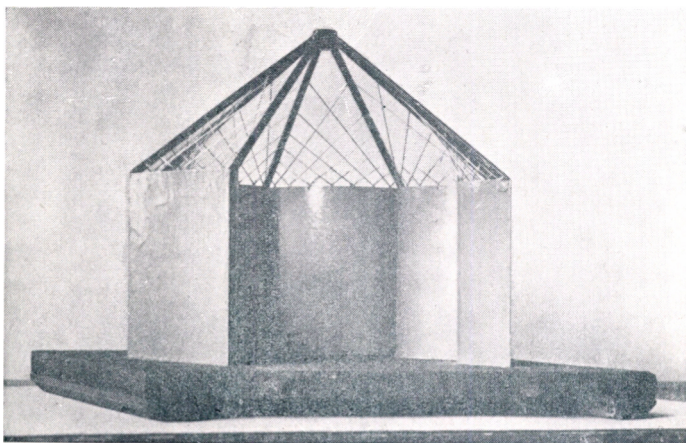


Bednění pro skořepinové střechy, tvořené hyperbolickými paraboloidy nad rozlehlým pracovištěm.

Příl. XI.

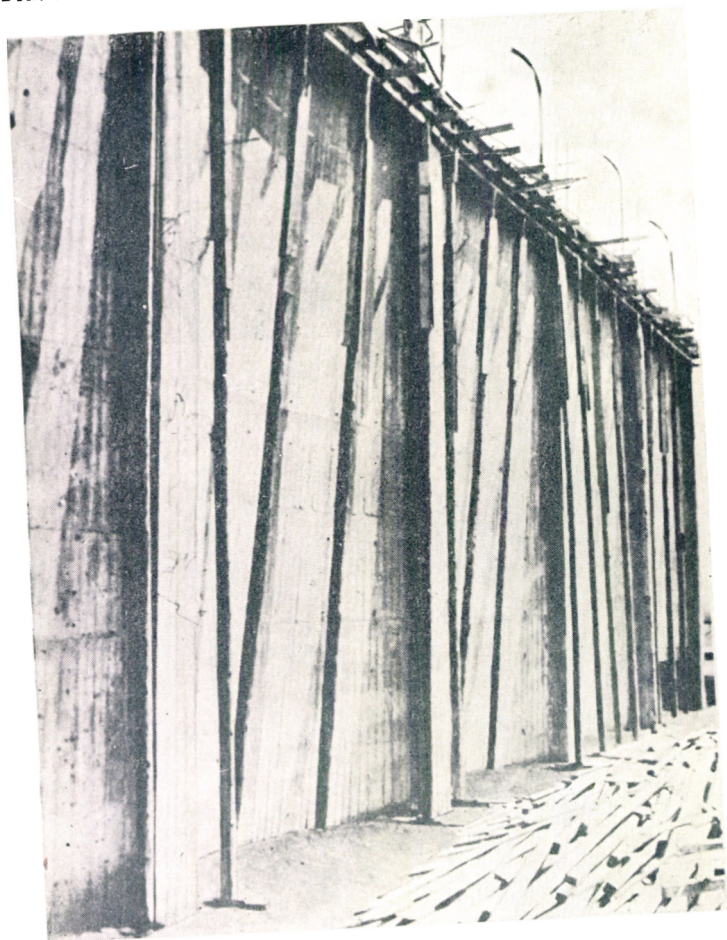


Forma pro zhotovování Aimondových bání.



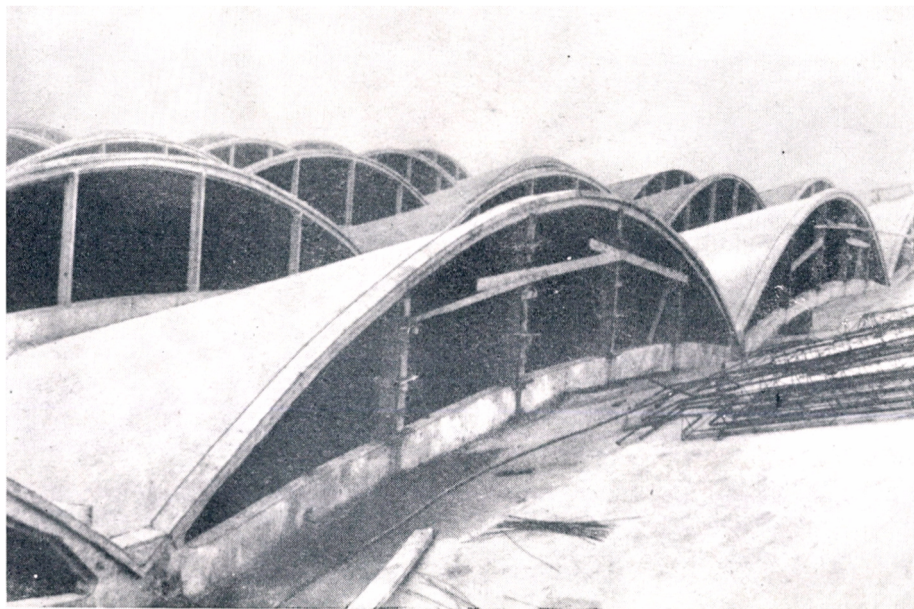
Studie na bání složenou z částí rotačních zborcených hyperboloidů.

Příl. XII.



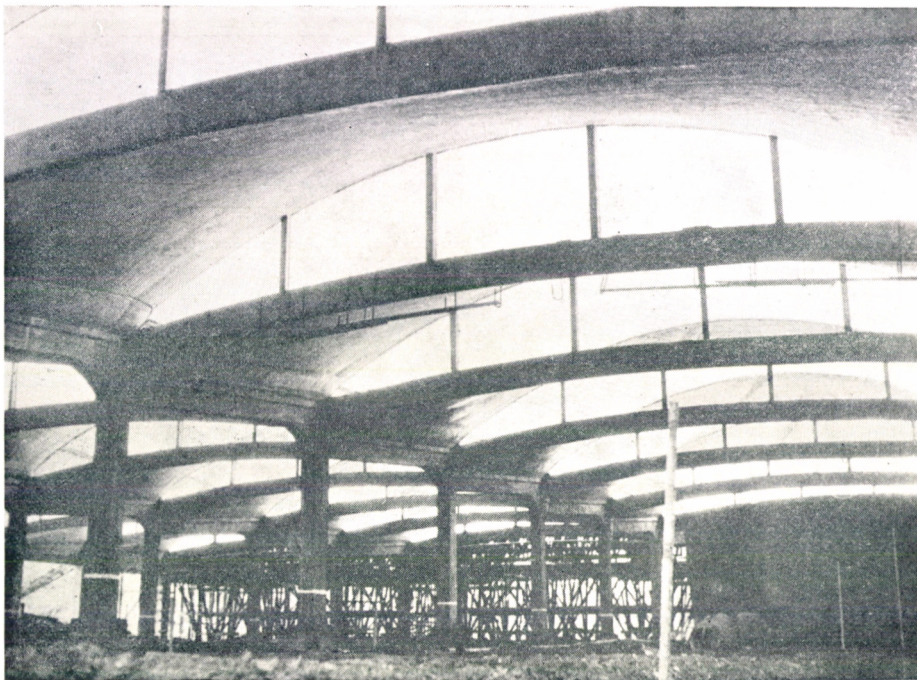
Spodek stěny skladiště pro sypké hmoty, vytvořený řadou konoidů.

Příl. XIII.



Střeška vytvořená z 65 konoidů nad plochou 100 × 130 m. Pohled zevně.

Přil. XIV.

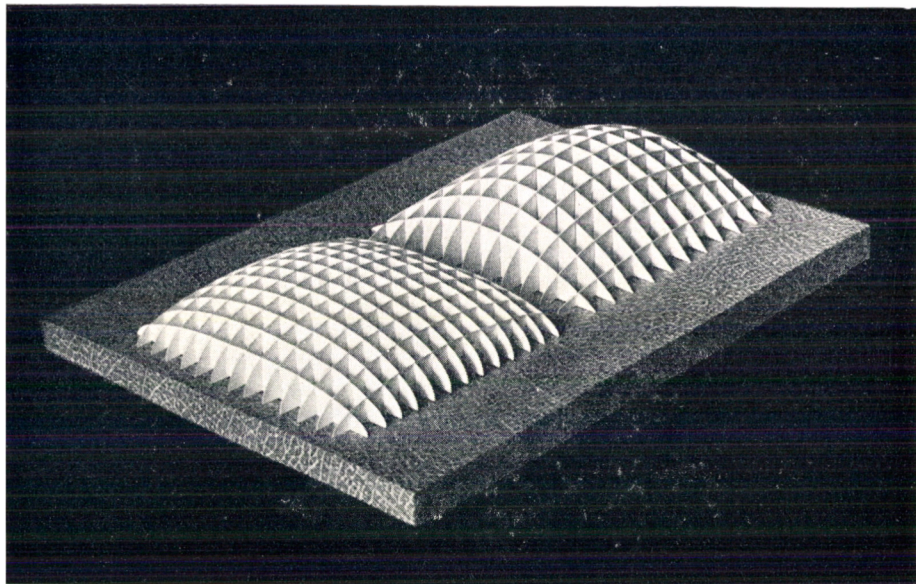


Táž střecha jako v přil. XIII, pohled zevnitř před zasklením oken.



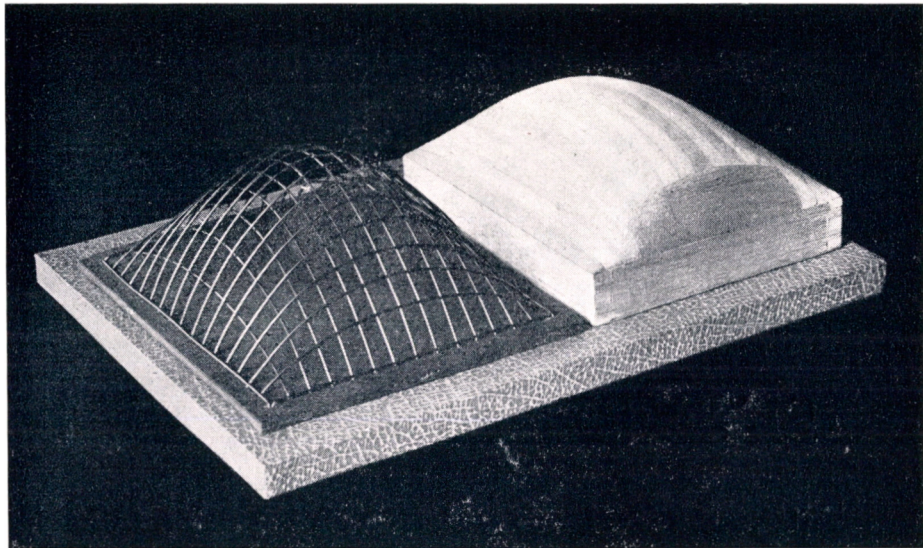
Corne de vache na klenbách mostu legii u Národního divadla v Praze.

Přil. XVI.



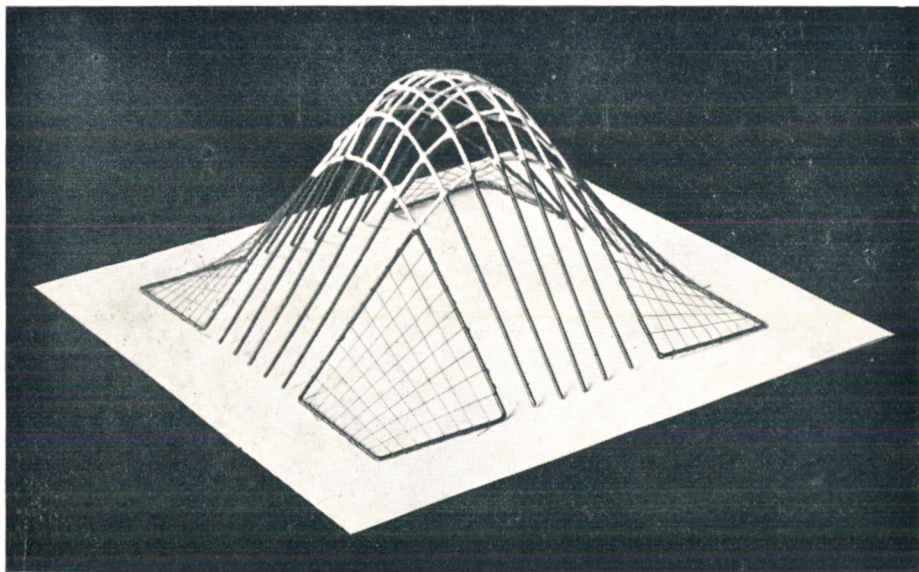
Papírové modely klínových ploch a to elipticko-eliptické, elipticko-parabolické.

Přil. XVII.

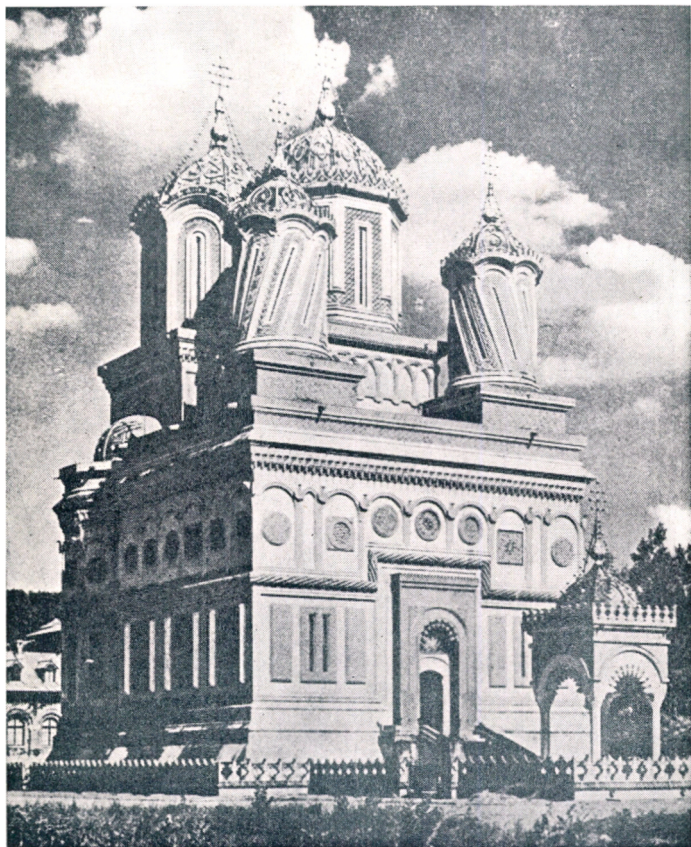


Modely klínové plochy parabolicko-parabolické z drátu a elipticko-parabolické ze dřeva.

Přil. XVIII.

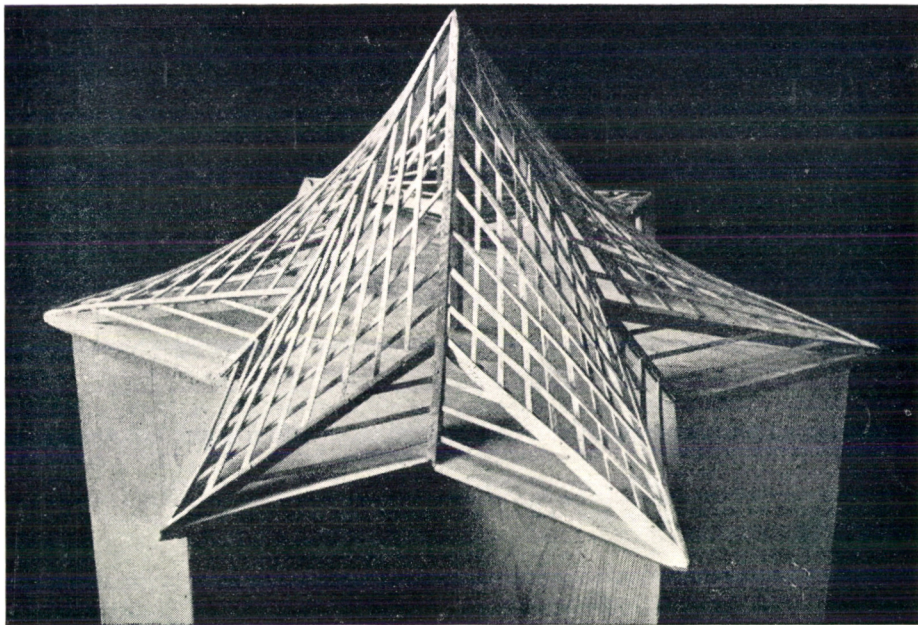


Model bány nad čtvercovým půdorysem, tvořené klínovou plochou parabolicko-parabolickou, prodlouženou čtyřmi konoidy, jejichž spojení v rozích bylo provedeno čtyřmi hyperbolickými paraboloidy.



Klášterní kostel v Curtea de Argeș v Rumunsku postavený v letech 1512—15 od Neagoe Basaraba.

Pl. XX.



Model návrhu střechy nad letohrádek Hvězda v Praze z hyp. paraboloidů.

CESTA K VĚDĚNÍ

ních hal, lze v nich provádět jemné práce mechanické a konečně jsou výhodné proto, že mnohdy je možno použití několikrát dřevěných skruží, kterých bylo při jejich stavbě třeba. Skořepinové plochy daly vznik mnohé nové ploše zborcené a jiným plochám geometricky významným.

Knížka Kadeřávkova ukazuje čtenáři plochy ze zmíněného vývoje stavitelství, popisuje jejich konstrukci, základní vlastnosti geometrické a přináší u každé z nich průměty, případně obrázek nebo fotografií, z níž by si čtenář učinil dobrou představu jednak o tvaru a jednak o praktickém použití této plochy.

Takovým způsobem pozná čtenář plochy jak minulé doby — a je toho třeba pro opravy a rekonstrukce památek — tak nové moderní stavebně-inženýrské prvky. Buďte udiven jednoduchou definicí, vlastnostmi i vzhledem.

Knížka tak dokumentuje spojení deskriptivní geometrie a praxí a je praktikům i teoretikům pomocníkem při jejich práci.

