Determinanty a matice v theorii a praxi

DETERMINANTY A MATICE

v theorii i v praxi

VÁCLAV VODIČKA

Část první

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$$\mathsf{A} = \left\| \begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{matrix} \right\|, \quad \mathsf{B} = \left\| \begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{matrix} \right\|$$

$$x = B_x : B$$

Jč m+f

CESTA K VĚDĚNÍ SVAZEK 54

CESTA K VĚDĚNÍ

RNDr Václav Vodička:

Determinanty a matice
v theorii i v praxi

Část první.

Různá matematická odvětví a technická praxe používají determinantů a matic, aby zkrátily výpočty a aby si usnadnily vyjadřování svých logických postupů a úvah. Dosahují tím větší přehlednosti a zkracují své výpočty.

Aby se s těmito důležitými pojmy seznámil široký okruh zájemců, podává autor nejdříve v prvé části definici determinantu, zevrubně s ní čtenáře seznamuje a odvozuje základní vlastnosti determinantu. Potom na řadě speciálních determinantů ukazuje jednak užití vět, jednak tím ukazuje čtenáři důležité determinanty, které se vyskytují v různých úlohách algebraických, v analyse, v geometrii a ve fysice.

Matice, které dnes mají velké použití v elektrotechnice a v aerodynamice, zavádí autor jako schemata, pro něž definuje rovnost a základní početní operace. Potom jich používá při lineárních transformacích. Již tím pozná čtenář výhody počtu s maticemi a jejich souvislost s vektorovým počtem.

Knížka je theoretickou příručkou, určenou praktikům, kteří determinanty a matice budou používat anebo se s nimi setkávají.

Brož. Kčs 42,—

RNDR VÁCLAV VODIČKA

DETERMINANTY A MATICE

v theorii i v praxi

ČÁST PRVNÍ

PŘÍRODOVĚDECKÉ NAKLADATELSTVÍ

PŘEDMLUVA.

Spis, jehož první — theoretickou — část tímto předkládám naší technické a fysikální veřejnosti, vzniká na popud mých přátel, pánů *Ing. Dr J. Böhma* a *Ing. A. Tomáška* a to přímo z potřeb technické praxe. Zde se už dávno pociťuje nedostatek spolehlivé a při tom požadavkům a způsobu myšlení inženýrů a fysiků odpovídající příručky o determinantech a maticích, jichž důležitost (buď přímo, nebo v otázkách s touto naukou bezprostředně souvisících) pro zmíněné odborné pracovníky zná autor z několikaleté vlastní zkušenosti.

Je tedy knížka určena především potřebám inženýrů a fysiků a teprve v druhé řadě má na zřeteli matematiky z povolání. Ti již mají v naší odborné literatuře znamenitou theoretickou učebnici Základy teorie determinantů a matic a jich užití z pera mého vzácného učitele, univ. prof. *Dr B. Bydžovského*; jeho kniha mi byla v mnohém ohledu spolehlivým rádcem a snažil jsem se poctivě, aby alespoň stopy nevšedního pedagogického umění autorova byly patrny také v mé práci. Vedle zmíněné učebnice jsem ovšem čerpal i z mnoha jiných pramenů. Všechny budou uvedeny v seznamu literatury na konci celého díla; zde bych se jen výslovně zmínil o *Kowalewskiho* spisu Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909, který mi vydatně posloužil při sepsání stati o nekonečných determinantech a o Fredholmově theorii rovnic integrálních.

V době, kdy tento svazeček vychází, je mi již dobře znám vynikající přínos moderní sovětské vědy matematické k otázkám, jimž bude věnována řada úvah v dalších částech spisu (mám tu na mysli na příklad problémy lineární algebry, theorie integrálních rovnic atd.). Budu hojně čerpat z těchto vydatných zdrojů a budu šťasten, podaří-li se mi alespoň trochu se přiblížit opravdu mistrnému způsobu podání sovětských matematiků.

V souhlase s účelem své knížky jsem také provedl (v mnoha případech s pomocí svých přátel z kruhů techniků a fysiků) výběr a rozvržení celé látky. Z vlastní zkušenosti vím, že inženýrům nejvíce vyhovuje podání nikoli ve formě jediného obsažného svazku, nýbrž spíše rozdělení celé discipliny do menších, látkově ucelených částí (jak to velmi zdařile provedl ku příkladu *B. Baule* ve svém díle Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs). Toto stanovisko vzal jsem též já za základní a připravil rozdělení probírané látky celkem do šesti samostatných svazečků, vesměs asi téhož eventuálně málo většího rozsahu, jako tato první část theoretická.

Jako druhý svazek vyjde záhy pojednání o aplikacích determinantů a matic v algebře, třetí díl bude obsahovati použití v geometrii (zčásti i ve více rozměrech) a v lineární algebře, čtvrtá část má za předmět svých úvah vyložiti roli determinantů a matic v analyse (t. j. v počtu diferenciálním, integrálním a v diferenciálních rovnicích), pátý svazek bude věnován determinantům a maticím s nekonečně mnoha řadami a v souvislosti s tím bude vyložena Fredholmova theorie integrálních rovnic a konečně bude poslední část obsahovati ukázky aplikací determinantů a matic na praktické problémy, v prvé řadě technické a fysikální.

Na konec si pokládám za milou povinnost vysloviti svůj upřímný dík panu *Dr F. Vyčichlovi*, profesoru Českého vysokého učení technického v Praze, za mnoho cenných rad a pokynů rázu odborného i za jeho vzácnou ochotu, se kterou se ujal vydání celého díla. Pracujícím v tiskárně *Prometheus* patří má vděčnost za bezvadné provedení obtížné sazby.

V Plzni dne 28. září 1946. *Václav Vodička.*

ÚVOD.

Mluvit o významu, jaký má theorie determinantů a matic pro téměř všechna odvětví přírodních věd, bylo by, myslím, zbytečné. Důležitost této nauky jest všeobecně známa jak v kruzích matematiků a fysiků, tak i mezi techniky, jejichž potřebám je kniha na rozdíl od jiných, většinou čistě theoreticky zaměřených prací, v prvé řadě určena.

V prvé části si odvodíme řadu theoretických poznatků, na nichž celá nauka o determinantech spočívá, další odstavce pak budou věnovány už výhradně použití této disciplíny ve vědách matematických a přírodních. Vzhledem k tomu, že jde při těchto základních úvahách o fakta celkem všeobecně známá a snadno pochopitelná, budeme se tu vyjadřovati velmi stručně a omezíme se jen na věci vskutku podstatné a pro vybudování dalšího nutné.

1. PERMUTACE.

Definice 1. V řadě čísel

$$1, 2, 3, \ldots, n - 1, n \tag{1}$$

změňme libovolným způsobem pořadí členů. Nová řada

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}, k_n, \tag{2}$$

kterou tím dostaneme, se jmenuje *permutací* čísel řady (1).

Věta 1. Z n navzájem různých prvků $1, 2, 3, \ldots, n - 1, n$ lze vytvořiti celkem

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (n - 1) \,.\, n = n! \tag{3}$$

rozličných permutací.

Důkaz. Předpokládejme, že jsme si nějakým způsobem (na př. přímým výpočtem) ověřili správnost vzorce (3) pro určitý počet k elementů a ukažme, že za tohoto předpokladu platí onen vzorec i pro počet o 1 větší, tedy pro $k + 1$ prvků. Všechny permutace z $k + 1$ čísel $1, 2, 3, \ldots, k, k + 1$ lze rozdělit na $k + 1$ skupin: první obsahuje všechny ty, v nichž je element $k + 1$ na prvém místě, kdežto ostatní prvky se navzájem přemisťují všemi $k!$ možnými způsoby; je tedy těchto permutací prvé skupiny celkem $k!$ Druhá skupina obsahuje všechny permutace, v nichž je prvek $k + 1$ stále na druhém místě, kdežto ostatní elementy se opět všemi $k!$ způsoby permutují; je tedy také v této druhé skupině $k!$ permutací. Tak pokračujeme, až dojdeme ke $(k + 1)$-mu souboru, který má element $k + 1$ na posledním místě a obsahuje zase $k!$ permutací. V těchto $k + 1$ skupinách po $k!$ permutacích jsou obsaženy zřejmě všechny možné permutace prvků $1, 2, 3, \ldots, k, k + 1$, takže jich je celkem $(k + 1) \,.\, k! = (k + 1)!$

Platí-li tedy věta 1. pro určitý počet k prvků, platí též pro počet o jednotku větší. Protože pak je zřejmě správná pro jeden element, platí i pro prvky 2, proto i pro 3 atd. Je tudíž její platnost obecná.

Definice 2. Permutace (2) elementů (1) se nazývá sudou, je-li výraz

$$\Pi(k) = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_4 - k_1) \ldots \\ (k_n - k_1)(k_n - k_2) \ldots (k_n - k_{n-1}) \tag{4}$$

kladný; je-li záporný, je permutace (2) lichou.

Věta 2. Pro $n \geqq 2$ je polovina ze všech $n!$ permutací elementů $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ sudých, polovina lichých.

Důkaz. Z definice 2. snadno nahlédneme (v. také poznámku 3. na konci tohoto paragrafu), že vzájemnou výměnou libovolných dvou prvků se lichá permutace stane sudou a naopak. Představme si nyní všech $n!$ permutací rozděleno na dvě skupiny: první obsahuje všechny sudé — budiž jich celkem s, druhá všechny liché — těch budiž l, takže jest $s + l = n!$ Ve všech těchto permutacích vyměňme navzájem tytéž dva elementy. Tím přejde každá z s permutací původně sudých v lichou a naopak, takže je po této výměně lichých permutací s a sudých l. Protože se však jedná o tytéž permutace daných n prvků (pouze v jiném pořadí), zůstává poměrné zastoupení sudých i lichých stále stejné. Je tedy nový počet s lichých permutací stejný, jako byl původní l, t. j. $s = l$; ze vztahu $s + l = n!$ pak dostaneme opravdu $s = l = \frac{1}{2}n! = 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, (n-1)\, n$.

Poznámky. 1. Permutaci $k_1, k_2, \ldots, k_n$ elementů $1, 2, \ldots, n$ budeme někdy označovati symbolem $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, nebo stručně (k). Podobně budeme mluviti o permutacích (i), (r), (s), … těchto prvků.

2. O dvou daných permutacích stejných prvků říkáme, že jsou téže třídy, jsou-li obě sudé, nebo obě liché. Jinak jsou tříd opačných.

3. Vyměníme-li v libovolné permutaci čísel $1, 2, \ldots, n$ kterékoli dva členy navzájem, říkáme, že jsme provedli transposici. Tím dostaneme z původní permutace novou, jejíž třída je zřejmě opačná, než byla u prvé [dokažte podrobně pomocí výrazu $\Pi(k)$]; jednoduchým důsledkem je skutečnost, že se třída permutace sudým počtem transposic nemění, lichým naproti tomu přejde sudá permutace v lichou a lichá v sudou. Dále je dobře při této příležitosti si uvědomiti, že lze libovolnou permutaci $(r) \equiv (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ elementů $1, 2, \ldots, n$ převésti transposicemi v každou jinou předem danou $(s) \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Převedení samo se může díti nejrozmanitějším způsobem, avšak počet transposic, jichž je k němu zapotřebí, je vždy buď sudý nebo vždy lichý podle toho, jsou-li obě permutace (r), (s) třídy stejné, či tříd navzájem opačných.

2. DETERMINANT A JEHO ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI.

Definice 3. Čtverečné schema

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{5}$$

sestavené z n^2 prvků $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ nazýváme n-řadovou (čtverečnou) *maticí* (matrix) těchto elementů. Nechceme-li ji obšírně vypisovati, užíváme pro ni značky $\|a_{ik}\|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

Poznámka. Protože je celkem $(n^2)!$ různých permutací prvků $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$, lze z nich sestaviti $(n^2)!$ různých n-řadových matic. Tak na př. můžeme ze čtyř prvků 1, 2, 3, 4 zbudovati celkem $4! = 24$ dvouřadových matic.

Definice 4. *V součinu $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$ permutujme při nezměněných posicích indexů prvých (t. zv. řádkových) indexy druhé (sloupcové) a každý nový součin*

$$a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_{nk_n}$$

takto vzniklý opatřeme znaménkem + resp. — podle toho, zda je permutace

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$$

sudá či lichá. Dostaneme tak celkem $n!$ součinů, z nichž má polovina znaménko + a polovina —; tyto součiny sloučíme. Číslo

$$A = \Sigma \operatorname{sgn} \Pi(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_{nk_n} \tag{6}$$

takto vzniklé se nazývá determinantem matice (5) *a užíváme pro ně vedle* (6) *také symbolů*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A = |a_{ik}|;\ i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Poznámky. 1. Čísla a_{ik} se jmenují prvky determinantu A, jednotlivé součiny, o nichž byla právě řeč, jak jeho členy. Determinant má n řádků a n sloupců (říkáme: determinant n-řadový), n^2 prvků a $n!$ členů. Z konstrukce je zřejmo, že každý člen obsahuje právě po jednom prvku z každé řádky a právě po jednom z každého sloupce. Prvky a_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, n$) jsou t. zv. hlavní (tvoří hlavní úhlopříčku determinantu), člen $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ se jmenuje členem hlavním (je zřejmě opatřen znaménkem $+$).

2. Jsou-li (r), (s) dvě permutace prvků $1, 2, \ldots, n$, jest výraz $a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_n s_n}$, opatřený vhodným znaménkem, očividně členem determinantu A. Příslušné znaménko určíme snadno touto úvahou: Pozměníme pořadí faktorů tak, aby onen součin nabyl tvaru $a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$; z něho vidíme ihned, že má ve smyslu definice 4. tento člen daného determinantu znaménko $\operatorname{sgn}\Pi(k)$, takže je také součin $a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \ldots$ $\ldots a_{r_n s_n}$, jakožto člen determinantu A, opatřen tímto znaménkem. Nahlédneme nyní lehko, že jest $\operatorname{sgn}\Pi(k) = +1$, mají-li obě permutace (r), (s) stejnou třídu a $\operatorname{sgn}\Pi(k) = -1$ v případě opačném. Při uvedeném přerovnávání činitelů svrchu zmíněného součinu přešla totiž permutace (r) jistým počtem t transposic v permutaci $1, 2, \ldots, n$ a zároveň (tímto počtem t transposic) permutace (s) v (k). Jsou-li (r), (s) obě sudé (liché), jest t nutně číslo sudé (liché) vzhledem k sudosti permutace $1, 2, \ldots, n$ a proto bude (k) permutací sudou a $\operatorname{sgn}\Pi(k) = +1$, jak bylo dokázati. Analogicky se přesvědčíme o správnosti druhé části tvrzení výše uvedeného a vyslovíme výsledek právě provedené úvahy takto:

Součin $a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_n s_n}$ má, jakožto člen determinantu matice (5), znaménko + v případě, že jsou obě permutace (r), (s) stejné třídy; jinak má znaménko —.

3. Konstrukci determinantu A matice (5) jsme mohli provésti také permutujíce v součinu $a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$ všemi možnými způsoby indexy řádkové při nezměněném pořadí indexů sloupcových. Byli bychom (ve smyslu úvah poznámky 2.) dospěli k témuž determinantu (6) resp. (7) jako dříve. Z toho plyne, že se hodnota determinantu nemění, píšeme-li řádky jako sloupce a naopak a dále, že každý výrok, dokázaný o řádcích, platí také o sloupcích.

Věta 3. Vzájemnou výměnou dvou sloupců (nebo dvou řádků) změní determinant pouze své znaménko.

Důkaz. V determinantu (6) spolu vyměňme na př. řádek r-tý a s-tý. Vznikne determinant $\bar{A}$, jehož r-tý řádek je $a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}$ a s-tý řádek $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$; ostatní řádky mají stejné pořadí, jako měly v A. Obecný člen $\bar{a}$ determinantu $\bar{A}$ (budiž na př. $r < s$) jest

$$\bar{a} = \operatorname{sgn}\Pi(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{r-1,k_{r-1}}a_{sk_r}a_{r+1,k_{r+1}}\dots$$

$$\dots a_{s-1,k_{s-1}}a_{rk_s}a_{s+1,k_{s+1}}\dots a_{nk_n} =$$

$$= \operatorname{sgn}\Pi(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{r-1,k_{r-1}}a_{rk_s}a_{r+1,k_{r+1}}\dots$$

$$\dots a_{s-1,k_{s-1}}a_{sk_r}a_{s+1,k_{s+1}}\dots a_{nk_n} = \operatorname{sgn}\bar{\Pi}(k)\,.\,\frac{a}{\operatorname{sgn}\Pi(k)},$$

kde a značí obecný člen původního determinantu A a $\bar{\Pi}(k)$ výraz, který vznikne z $\Pi(k)$ vzájemnou výměnou veličin k_r, k_s. Je tedy $\operatorname{sgn}\bar{\Pi}(k) = -\operatorname{sgn}\Pi(k)$ a proto $\bar{a} = -a$, takže každý člen nového determinantu je až na znaménko také členem determinantu původního a naopak. Je tedy opravdu $\bar{A} = -A$, jak věta tvrdí.

Jednoduchým důsledkem právě dokázaného je fakt, že determinant, jehož dvě rovnoběžné řady jsou stejné, je roven nule.

Věta 4. *Determinant je homogenní lineární funkcí prvků kterékoli své řady.*

Důkaz. Podle poznámek k definici 4. obsahuje každý z $n!$ členů determinantu A jeden a jen jeden prvek libovolné řady. Máme-li na mysli speciálně na př. řádek r-tý, rozdělí se všech $n!$ členů daného determinantu na n skupin po $(n - 1)!$ členech: První z nich zahrnuje všechny členy determinantu A, které obsahují prvek a_{r1}, druhá ty, které mají za faktor element $a_{r2}, \ldots$, až n-tá ty, v nichž figuruje a_{rn}. Lze tedy psáti

$$A = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn}; \tag{8}$$

výrazy $A_{r1}, A_{r2}, \ldots, A_{rn}$ jsou součty součinů po $n - 1$ činitelích. Protože pak žádný z těchto součinů už neobsahuje jako faktor prvek řádku r-tého, je rovnicí (8) věta 4. dokázána.

Věta 5. Výraz A_{rs} ve vztahu (8) je $(-1)^{r+s}$ násobný determinant stupně $(n - 1)$-ho, který vznikne z A vynecháním těch řad, jež se kříží v prvku a_{rs} (t. j. r-tého řádku a s-tého sloupce). Označíme-li tento determinant znakem M_{rs}, máme tedy

$$A_{rs} = (-1)^{r+s}M_{rs}. \tag{9}$$

Důkaz. Nejprve si objasníme význam výrazu A_{11}. Sloučením všech $(n - 1)!$ členů determinantu A, které obsahují faktor a_{11}, dostaneme podle věty 4. hodnotu $a_{11}A_{11}$, takže je A_{11} součtem $(n - 1)!$ sčítanců tvaru

$$a_{2k_2}a_{3k_3} \ldots a_{nk_n},$$

z nichž má každý znaménko určené třídou příslušné permutace $1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ čísel $1, 2, 3, \ldots, n$, tedy znaménko dané permutací $k_2, k_3, \ldots, k_n$ čísel $2, 3, \ldots, n$. Je tudíž A_{11} podle definice 4. rovno determinantu s hlavním členem $a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}$, t. j. determinantu M_{11}, jak o něm mluví věta 5. Pro $r = s = 1$ jsou tudíž vztah (9) a tím i věta 5. dokázány.

Při obecných hodnotách indexů r, s změníme tvar determinantu A tak, aby se element a_{rs} stal prvním hlavním (t. j. přešel na to místo, kde dříve stál prvek a_{11}) při nezměněném pořadí řad, které prvek a_{rs} neobsahují. Pro determinant $\bar{A}$ takto vzniklý najdeme podle věty 3. snadno (doporučuji provésti podrobně!)

$$\bar{A} = (-1)^{r+s} A.$$

Rozviňme nový determinant $\bar{A}$ podle vzorce (8):

$$\bar{A} = \bar{a}_{11}\bar{A}_{11} + \ldots;$$

nyní však jest $\bar{a}_{11} = a_{rs}$, $\bar{A}_{11} = M_{rs}$, takže máme

$$\bar{A} = (-1)^{r+s} A = a_{rs} M_{rs} + \ldots,$$

kdežto násobením rovnice (8) hodnotou $(-1)^{r+s}$ dostáváme

$$(-1)^{r+s} A = \ldots + (-1)^{r+s} a_{rs} A_{rs} + \ldots$$

Porovnáním obou výrazů (rozmyslete si věc podrobně!) dostaneme

$$M_{rs} = (-1)^{r+s} A_{rs},$$

což je pouze jiný tvar vzorce (9).

Poznámky a doplňky. 1. Vzorci (8) a (9) je determinant A „*rozveden podle elementů r-té řádky*". Výraz M_{rs} je t. zv. *subdeterminant* (minor) prvku a_{rs} v determinantu A, A_{rs} pak t. zv. *doplněk* (komplement) onoho prvku v determinantu A. Determinant A lze ovšem také rozvinout podle elementů s-tého sloupce ve tvaru

$$A = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \ldots + a_{ns}A_{ns}. \tag{10}$$

2. Ze skutečností, vyjádřených větami 4. a 5., nahlédneme snadno správnost tohoto tvrzení: Nahradíme-li ve vzorci (8), jehož A_{rs} jsou dána relacemi (9), veličiny $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ novými $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, dostaneme výraz rovný determinantu A_α, který se od A liší jen tím, že jeho r-tý řádek zní $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, místo původního $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$.

3. O řadě čísel $l_1, l_2, \ldots, l_n$ říkáme, že jest lineární kombinací řad $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$; $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$; $\ldots$; $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, \ldots, a_{mn}$, existují-li veličiny $c_1, c_2, \ldots, c_m$ (mohou býti i vesměs rovny nule) tak, že platí n rovnic

$$l_\nu = c_1 a_{1\nu} + c_2 a_{2\nu} + \ldots + c_m a_{m\nu};\ \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Opírajíce se o tuto definici, dokážeme si jednoduše, že se *hodnota determinantu nemění, když k jeho libovolné řadě* (na př. k r-tému řádku) *přičteme libovolnou lineární kombinaci jiných řad rovnoběžných.* Jsou-li to na př. řady $r_1, r_2, \ldots, r_\varrho$-tá, násobené konstantami $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$, zůstanou všechny elementy determinantu A beze změny, až na řádek r-tý, jehož obecný element bude míti místo původního tvaru a_{rs} nový $a_{rs} + c_1 a_{r_1 s} + c_2 a_{r_2 s} + \ldots + c_\varrho a_{r_\varrho s}$. Rozvedeme-li tento nový determinant $\overline{\overline{A}}$ podle elementů r-tého řádku, vyjde nám podle vzorců (8) a (9) a ve smyslu předchozí poznámky:

$$\overline{\overline{A}} = \sum_{s=1}^{n} (a_{rs} + c_1 a_{r_1 s} + c_2 a_{r_2 s} + \ldots + c_\varrho a_{r_\varrho s}) A_{rs} =$$
$$= A + c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_\varrho A_\varrho = A,$$

protože má každý z determinantů $A_1, A_2, \ldots, A_\varrho$ dvě řádky stejné (A_1 na př. r-tou a r_1-tou) a tedy hodnotu nulovou.

4. Dokažte pomocí vět 3., 4. a 5., že doplňky $A_{r1}, A_{r2}, \ldots \ldots, A_{rn}$ vyhovují těmto n rovnicím:

$$\begin{aligned} a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn} &= A \\ a_{\varrho 1}A_{r1} + a_{\varrho 2}A_{r2} + \ldots + a_{\varrho n}A_{rn} &= 0; \\ \varrho = 1, 2, \ldots, r - 1, r + 1, \ldots, n. & \end{aligned} \tag{12}$$

Pomocí Kroneckerova symbolu, definovaného vzorci

$$\delta_{ik} = 0 \text{ pro } i \neq k,\ \delta_{ii} = 1;\ i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

lze relace (12) psáti ve tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu} A_{r\nu} = \delta_{\varrho r} A;\ \varrho = 1, 2, \ldots, n. \tag{12,1}$$

Přesvědčte se dále o správnosti analogických vztahů

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\sigma} A_{\nu s} = \delta_{\sigma s} A; \ \sigma = 1, 2, \ldots, n. \tag{12,2}$$

Příklady.

1. Jest určiti hodnotu $(n + 1)$-řadového determinantu

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, \ldots, & 0, & 0, & a_0 \\ -x, & 1, & 0, \ldots, & 0, & 0, & a_1 \\ 0, & -x, & 1, \ldots, & 0, & 0, & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & 1, & 0, & a_{n-2} \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & -x, & 1, & a_{n-1} \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & -x, & a_n \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Píšeme-li pro náš účel místo $f(x)$ na okamžik znak f_n, dostaneme rozvedením podle prvků posledního řádku ihned rekurentní vzorec

$$f_n = x \,.\, f_{n-1} + a_n$$

a z něho výsledek

$$f(x) = f_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n. \tag{13'}$$

Vidíme tedy, že lze každý polynom n-tého stupně proměnné x vyjádřiti $(n + 1)$-řadovým determinantem.

2. Jako pěknou aplikaci vzorců (12,1) a (12,2) si dokážeme správnost tohoto tvrzení: *Je-li determinant roven nule, jsou doplňky prvků jeho libovolné řady úměrny doplňkům prvků kterékoli jiné řady s prvou rovnoběžné.*

Doplněk A_{r1} pišme ve tvaru n-řadového determinantu, který z A vznikne tím, že v něm nahradíme elementy r-té řádky po řadě čísly $1, 0, 0, \ldots, 0$ a násobme pak k-tý sloupec $(k \neq 1)$ tohoto doplňku číslem A_{sk} (t. j. komplementem prvku a_{sk} v determinantu A). Determinant, jejž tím dostaneme, má zřejmě hodnotu $A_{r1}A_{sk}$; jeho tvar pozměníme nyní tak, že k jeho k-tému sloupci přičteme prvý znásobený

A_{s1}, druhý násobený $A_{s2}, \ldots$, až konečně A_{sn}-násobný sloupec n-tý. Hodnota determinantu zůstává těmito změnami zřejmě nedotčena, jeho k-tý sloupec však bude složen — rozvažte si věc podrobně, užívajíce vzorců (12,1) a předpokladu, že je $A = 0$ — ze samých nul, jenom na jeho r-tém místě stojí výraz A_{s1}. Rozvedením tohoto determinantu o hodnotě $A_{r1}A_{sk}$ podle elementů k-tého sloupce dostaneme $A_{s1}A_{rk}$ a proto

$$A_{r1}A_{sk} = A_{s1}A_{rk}.$$

Klademe-li sem postupně $k = 2, 3, \ldots, n$, získáváme rovnice vyjadřující vzájemnou úměrnost doplňků prvků řádku r-tého a s-tého, jak o ní mluví výše uvedená věta.

3. VĚTA LAPLACEOVA.

Determinant sestavený z r^2 prvků, v nichž se kříží libovolných r řádků s libovolnými r sloupci daného determinantu A, nazýváme r-řadovým subdeterminantem determinantu A. Subdeterminantem přidruženým v determinantu A k onomu prvému rozumíme pak onen subdeterminant $(n - r)$-řadový, jehož $(n - r)^2$ prvků je vzato z těch řádků a sloupců determinantu A, které se neúčastnily při konstrukci subdeterminantu prvého. K hlavnímu subdeterminantu (t. j. takový, jehož hlavní úhlopříčka je částí hlavní úhlopříčky determinantu původního) je přidružen zase hlavní subdeterminant.

V dalším se budeme zabývati minorem M_1 vznikším z prvků společných prvým r řádkům a prvým r sloupcům determinantu A a minorem M_2 jemu přidruženým.

Věta 6. Znásobením obou subdeterminantů M_1, M_2 dostaneme $r!(n - r)!$ různých členů původního determinantu A.

Důkaz. Podle definice 4. je obecný člen m_1 minoru M_1:

$$m_1 = \mathrm{sgn}\Pi_1(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2} \dots a_{rk_r},$$
$$\Pi_1(k) = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2) \dots (k_r - k_{r-1})$$

a obecný člen m_2 minoru M_2:

$$m_2 = \mathrm{sgn}\Pi_2(k)\, a_{r+1,k_{r+1}}a_{r+2,k_{r+2}} \dots a_{nk_n},$$
$$\Pi_2(k) = (k_{r+2} - k_{r+1})(k_{r+3} - k_{r+1}) \dots (k_n - k_{n-1}).$$

Při násobení minorů M_1, M_2 se tyto obecné členy spolu násobí, takže součin M_1M_2 je složen celkem (v. poznámky k definici 4.) z $r!(n - r)!$ různých sčítanců tvaru

$$m_1 m_2 = \operatorname{sgn}\Pi_1(k)\operatorname{sgn}\Pi_2(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{rk_r}a_{r+1,k_{r+1}}\ldots a_{nk_n} =$$
$$= \operatorname{sgn}\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{rk_r}a_{r+1,k_{r+1}}\ldots a_{nk_n} =$$
$$= \operatorname{sgn}\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)\,.\,\frac{a}{\operatorname{sgn}\Pi(k)} = a\,.\operatorname{sgn}\frac{\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)}{\Pi(k)}.$$

Nyní však je $\Pi(k)$ dáno vzorcem (4), takže bude

$$\frac{\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)}{\Pi(k)} =$$
$$= \frac{1}{(k_{r+1}-k_1)\ldots(k_{r+1}-k_r)(k_{r+2}-k_1)\ldots\ldots(k_{r+2}-k_r)(k_{r+3}-k_1)\ldots(k_n-k_1)\ldots(k_n-k_r)};$$

protože pak značí $k_1, k_2, \ldots, k_r$ permutaci čísel $1, 2, \ldots, r$, kdežto $k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, k_n$ permutaci čísel $r+1, r+2, \ldots, n$, jest $k_{r+\nu} > k_\varrho (\nu = 1, 2, \ldots, n-r;\ \varrho = 1, 2, \ldots, r)$, takže má výraz $\frac{\Pi_1(k)\,\Pi_2(k)}{\Pi(k)}$ znaménko $+$ a platí tedy

$$m_1 m_2 = +\,a,$$

kde a je obecný člen determinantu A. Tím jest věta 6. dokázána.

Definice 5. Budiž $\overline{M}_1$ minor determinantu A vzatý ze společných prvků řádků o pořadových číslech $i_1 < i_2 < \ldots \ldots < i_r$ a sloupců s pořadovými čísly $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ a budiž $\overline{M}_2$ minor přidružený k němu v determinantu A. Zavedeme-li označení $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = S(i)$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = S(k)$, nazýváme výraz $(-1)^{S(i)+S(k)}\,.\,\overline{M}_2$ *doplňkem minoru* $\overline{M}_1$ *v determinantu* A.

Věta 7. Násobíme-li libovolný subdeterminant r-řadový determinantu A jeho doplňkem v A, dostaneme $r!(n-r)!$ různých členů daného determinantu A.

Důkaz. Subdeterminanty, o které zde běží, buďte na př. $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ z definice 5. Upravme daný determinant vzájemnými výměnami napřed řádků a pak sloupců tak, aby řádka i_ϱ-tá přišla na místo ϱ-té a sloupec k_ϱ-tý též na místo ϱ-té ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$). Tím přejde determinant A v nový $\overline{A}$, o němž snadno dokážeme (v. větu 3.)

$$\overline{A} = (-1)^{S(i)+S(k)}A.$$

V tomto novém determinantu $\overline{A}$ však mají subdeterminanty $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ (jejich vnitřní struktura se při výše uvedeném přemisťování řad nezměnila) zcela stejný charakter, jaký měly minory M_1, M_2 z věty 6. vůči svému původnímu determinantu. Lze tedy na determinant $\overline{A}$ a minory $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ přímo aplikovati větu 6. a konstatovati, že součin $\overline{M}_1\overline{M}_2$ je roven právě součtu $r!(n-r)!$ členů determinantu $\overline{A}$, čili že součin $\overline{M}_1 \,.\, (-1)^{S(i)+S(k)}\overline{M}_2$ dává právě $r!(n-r)!$ různých členů determinantu A, jak tvrdí věta 7.

Věta 8. *(Laplaceova): Násobíme-li všechny subdeterminanty r-řadové utvořené z libovolných r řádků (nebo sloupců) daného determinantu A jejich doplňky v A, je součet všech součinů takto vzniklých roven původnímu determinantu A.*

Důkaz. Tato důležitá věta je jednoduchým důsledkem věty 7. Z r rovnoběžných řad lze vzíti celkem $\binom{n}{r}$ subdeterminantů r-řadových a každý z nich dá, násoben svým doplňkem, vznik $r!(n-r)!$ různým členům determinantu A. Postupujíce podle věty 8. dostaneme tedy celkem $\binom{n}{r} r! \,.\, (n-r)! = n!$ různých členů determinantu A, t. j. právě všechny jeho členy.

Poznámka. Věta Laplaceova nám dává možnost rozvésti determinant podle daných r řad. Srovnejte s tímto výsledkem poznatky vyjádřené větami 4. a 5.

Věta 9. *Součin dvou n-řadových determinantů $A = |a_{ik}|$, $B = |b_{ik}|$ je roven n-řadovému determinantu $C = |c_{ik}|$, kde jest*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \ldots + a_{in}b_{kn};$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Důkaz. Podle věty Laplaceovy (rozvedením podle prvých n řádků) máme

$$A \,.\, B = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1n}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots, & a_{2n}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ 1, & 0, \ldots, & 0, & b_{11}, & b_{21}, \ldots, & b_{n1} \\ 0, & 1, \ldots, & 0, & b_{12}, & b_{22}, \ldots, & b_{n2} \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0, & 0, \ldots, & 1, & b_{1n}, & b_{2n}, \ldots, & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tvar (nikoli však hodnotu, v. věty 3., 4., 5. a poznámky k nim) tohoto determinantu pozměníme tak, že od sloupce $(n + \nu)$-tého odečteme prvních n sloupců násobených po řadě čísly $b_{\nu 1}, b_{\nu 2}, \ldots, b_{\nu n}$. Tento sloupec $(n + \nu)$-tý tedy bude míti místo původního tvaru $0, 0, \ldots, 0, b_{\nu 1}, b_{\nu 2}, \ldots, b_{\nu n}$ tvar nový: $-c_{1\nu}, -c_{2\nu}, \ldots, -c_{n\nu}, 0, 0, \ldots, 0$; to učiníme postupně pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$ a máme:

$$A \,.\, B = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1n}, & -c_{11}, & -c_{12}, \ldots, & -c_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots, & a_{2n}, & -c_{21}, & -c_{22}, \ldots, & -c_{2n} \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}, & -c_{n1}, & -c_{n2}, \ldots, & -c_{nn} \\ 1, & 0, \ldots, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & 1, \ldots, & 0, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0, & 0, \ldots, & 1, & 0, & 0, \ldots, & 0 \end{vmatrix}.$$

Rozvedením podle posledních n sloupců pak obdržíme (doporučuji provést podrobně pomocí vět 8., 3., 4. a 5.):

$$A \,.\, B = \begin{vmatrix} -c_{11}, & -c_{12}, \ldots, & -c_{1n} \\ -c_{21}, & -c_{22}, \ldots, & -c_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ -c_{n1}, & -c_{n2}, \ldots, & -c_{nn} \end{vmatrix} . \, (-1)^n \begin{vmatrix} 1, & 0, \ldots, & 0 \\ 0, & 1, \ldots, & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots} \\ 0, & 0, \ldots, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \dots, & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \dots, & c_{nn} \end{vmatrix} = |c_{ik}|.$$

Poznámky. 1. Je-li $m < n$, převedeme determinant m-řádový snadno na n-řadový podle vzorce:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1m}, & 0, & \dots, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2m}, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mm}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 1 \end{vmatrix}.$$

Tento poznatek nám dává možnost násobiti spolu podle věty 9. i determinanty různých stupňů, když je napřed uvedeme na stejný stupeň.

2. Stejně jako jsme vytvořili obecný prvek c_{ik} součinu C dvou n-řadových determinantů A, B znásobením i-tého řádku determinantu A a k-tého řádku determinantu B, mohli jsme vyjádřiti c_{ik} také součinem: buď i-tého řádku v A s k-tým sloupcem v B, nebo i-tého sloupce v A s k-tým řádkem v B, anebo konečně i-tého sloupce A a k-tého sloupce v B. Poznáme to snadno, když event. v jednom, nebo v obou z daných determinantů před prováděním násobení podle věty 9., vzorce (14), vyměníme spolu řádky a sloupce navzájem.

Definice 6. Řádkovým součinem dvou matic

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, & \dots, & b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}, & \dots, & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}, & b_{m2}, & \dots, & b_{mn} \end{matrix} \right\|$$

o stejném počtu (m) řádků a stejném počtu (n) sloupců rozumíme *m-řadový determinant*, jehož obecný element c_{ik} je dán vzorcem

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \ldots + a_{in}b_{kn}; \quad i, k = 1, 2, \ldots, m. \tag{14,1}$$

4. HODNOST MATICE A DETERMINANTU.

Z matice $\|a_{ik}\|$; $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ o m řádcích a n sloupcích lze tvořiti determinanty tím způsobem, že je zbudujeme z prvků společných libovolným r řádkům a libovolným r sloupcům té matice. Takových determinantů r-řadových lze v dané matici nalézti celkem $\binom{m}{r} \cdot \binom{n}{r}$. V souvislosti s nimi pak zavádíme číslo nejvýš důležité v theorii matic i determinantů, t. zv. *hodnost matice*.

Definice 7. ***Matice má hodnost h, jsou-li všechny její determinanty více než h-řadové rovny nule, avšak alespoň jeden determinant h-řadový od nuly různý.***

Poznámka. Úplně stejným způsobem definujeme hodnost determinantu pomocí jeho subdeterminantů.

Věta 10. Hodnost matice se nemění, přičteme-li k některé její řadě c-násobek jiné řady s prvou rovnoběžné.

Důkaz. Nechť se jedná v matici $\|a_{ik}\|$ s hodností h o řádek r-tý a s-tý. Nová matice, vzniklá uvedenou změnou, se liší od původní tím, že má v r-tém řádku prvky $a_{r1} + ca_{s1}$, $a_{r2} + ca_{s2}, \ldots, a_{rn} + ca_{sn}$ místo $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$. Obě matice mají společné všechny $(h + 1)$-řadové determinanty, které neobsahují prvky řádku r-tého; tyto jsou tedy nulové i v matici nové. Ony $(h + 1)$-řadové determinanty, které obsahují prvky řádky r-té, se rozpadají buď každý na součet dvou $(h + 1)$-řadových (a tedy nulových) determinantů matice původní, nebo na součet $(h + 1)$-řadového determinantu původní matice (ten je proto nulový), a determinantu $(h + 1)$-řadového, který má dva řádky stejné a je proto také nulový. Jsou tedy všechny $(h + 1)$-řadové determinanty pozměněné matice rovny nule a její hodnost není větší, než h, t. j. než hodnost matice původní.

Protože pak je $a_{r\nu} = (a_{r\nu} + ca_{s\nu}) - ca_{s\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, lze si původní matici představiti jako vzniklší z nové toutéž změnou, o jaké mluví věta 10. a proto není její hodnost větší, než hodnost matice nové. Jsou tedy obě hodnosti opravdu stejné, jak tvrdí věta 10.

Poznámka. Platnost věty 10. lze zřejmě rozšířit v tom smyslu, že lze k libovolné řadě matice bez vlivu na její hodnost přičíst každou lineární kombinaci jiných řad rovnoběžných.

Věta 11. Změna počtu řad matice připojením nebo vynecháním řady, která je lineární kombinací jiných řad rovnoběžných, nemá vlivu na její hodnost.

Věta je téměř samozřejmá pro případ, že připojená řada je nulová (rozmyslete si věc podrobně!); připojíme-li však k dané matici $\boldsymbol{M}$ řadu, která je lineární kombinací jiných rovnoběžných řad, lze matici $\boldsymbol{M}_1$ tak vzniklou změnit ve smyslu poznámky k větě 10. tak, že nová matice $\boldsymbol{M}_2$ má tutéž hodnost jako $\boldsymbol{M}_1$ a liší se od $\boldsymbol{M}$ pouze tím, že obsahuje o nulovou řadu více. Je tedy hodnost matice $\boldsymbol{M}_2$ rovna hodnosti matice $\boldsymbol{M}$ a zároveň (jak už pověděno) hodnosti matice $\boldsymbol{M}_1$, takže obě matice: původní $\boldsymbol{M}$ a nová $\boldsymbol{M}_1$ mají vskutku stejnou hodnost, jak praví věta 11.

5. DERIVACE DETERMINANTU.

Věta 12. Jsou-li elementy a_{ik} n-řadového determinantu A funkcemi téže proměnné x, je i determinant funkcí této proměnné. Jeho derivace podle x je pak rovna součtu n determinantů, které dostaneme z původního tak, že v něm vždy jednu řádku nahradíme její derivací a ostatní necháme beze změny.

Důkaz. Determinant A je funkcí všech svých prvků a jejich prostřednictvím pak funkcí proměnné x. Je tedy (podle známé věty o derivování složených funkcí)

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \sum_{i,k} \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \frac{\mathrm{d}a_{ik}}{\mathrm{d}x} = \sum_{i,k} a_{ik}' \frac{\partial A}{\partial a_{ik}},$$

při čemž i, k probíhají nezávisle čísla $1, 2, \ldots, n$, takže uvedený součet má n^2 sčítanců. Podle vztahu (8) však máme $\dfrac{\partial A}{\partial a_{rs}} = A_{rs}$, takže můžeme dále psáti (v. důsledky vět 4. a 5.)

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \sum_{i,k} a_{ik}' A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}' A_{ik}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots, & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}, \ldots, & a_{i-1,n} \\ a_{i1}', & a_{i2}', \ldots, & a_{in}' \\ a_{i+1,1}, & a_{i+1,2}, \ldots, & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

čímž je věta dokázána.

6. VĚTA SYLVESTROVA.

K numerickému výpočtu hodnoty daného determinantu se přímo nabízí redukovati jej rozvedením podle elementů určité řady (přirozeně k tomu zvolíme tu, která obsahuje co nejvíce prvků nulových) nebo pomocí věty Laplaceovy na determinanty jednodušší. Tento postup bývá zpravidla dosti zdlouhavý a je nutno dávati velmi bedlivý pozor, aby se do výpočtu nevloudila chyba. Uvedeme si proto jiný způsob redukce daného determinantu, mnohem vhodnější pro praktické použití a z něhož lze činiti ještě jiné důsledky značného theoretického dosahu.

Budiž A daný determinant prvků a_{rs}($r, s = 1, 2, \ldots, n$) a násobme všechny jeho řádky mimo i-tou elementem a_{ik}. Vzniklší determinant o hodnotě $a_{ik}^{n-1}A$ bude míti obecný prvek $a_{ik}a_{rs}$, jenom prvky i-té řádky zůstaly beze změny. Odečteme nyní od r-tého řádku tohoto změněného determinantu řádek i-tý násobený a_{rk} a to učiníme pro $r = 1$, $2, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n$. Hodnota determinantu zůstane stále rovna $a_{ik}^{n-1}A$, jeho tvar se však změní tak, že obecný element, dříve $a_{ik}a_{rs}$, bude nyní $a_{ik}a_{rs} - a_{is}a_{rk}$. Speciálně tedy budou v k-tém sloupci ($s = k$) státi samé nuly, pouze na jeho i-tém místě figuruje element a_{ik}, který zůstal uvedenými změnami nedotčen. Rozvedeme-li determinant podle prvků k-tého sloupce a zkrátíme prvkem a_{ik}, dostaneme výsledek

$$(-1)^{i+k}a_{ik}^{n-2}A = |b_{rs}|;\ r = 1, 2, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots, n,$$

$$s = 1, 2, \ldots, k - 1, k + 1, \ldots, n;\ b_{rs} = \begin{vmatrix} a_{ik}, & a_{is} \\ a_{rk}, & a_{rs} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Výrazy b_{rs} jsou t. zv. superdeterminanty elementu a_{ik} v determinantu A a vzorec (16) ukazuje, jak lze daný determinant

A vyjádřiti $(n - 1)$-řadovým determinantem, utvořeným ze superdeterminantů jeho libovolného prvku. K praktickému výpočtu hodnoty determinantu A použil výsledku (16) F. Chiò.

Věta 13. (Sylvesterova). Determinant vytvořený ze všech $(h + 1)$-řadových superdeterminantů determinantu

$$A_h = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1h} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h1}, & a_{h2}, & \ldots, & a_{hh} \end{vmatrix} \tag{17}$$

je roven původnímu determinantu $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ (jehož je A_h subdeterminantem) násobenému mocninou A_h^{n-h-1}.

Důkaz. Budeme postupovati užívajíce obecné indukce (v. důkaz věty 1.) tak, že předpokládáme platnost Sylvesterovy věty prokázánu pro určitý index m a dokážeme, že za tohoto předpokladu platí i pro index $m + 1$.

Předpokládáme tedy správnost vztahu

$$C = A \,.\, A_m^{n-m-1}, \tag{a}$$

kde jest

$$C = |C_{\varrho\sigma}|;\ \varrho, \sigma = m + 1, m + 2, \ldots, n, \tag{b}$$

$$C_{\varrho\sigma} = \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1m}, & a_{1\sigma} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & \ldots, & a_{mm}, & a_{m\sigma} \\ a_{\varrho 1}, & \ldots, & a_{\varrho m}, & a_{\varrho\sigma} \end{vmatrix}. \tag{c}$$

Vedle relace (a) platí však pro determinant C, který je stupně $(n - m)$-tého, podle vzorce (16) vztah

$$C_{m+1,m+1}^{n-m-2} \,.\, C = |\Gamma_{rs}|;\ r, s = m + 2, m + 3, \ldots, n, \tag{d}$$

při čemž jest

$$\Gamma_{rs} = \begin{vmatrix} C_{m+1,m+1}, & C_{m+1,s} \\ C_{r,m+1}, & C_{rs} \end{vmatrix}. \tag{e}$$

Rovnicemi a vzorci (a), (b), (c), (d), (e) jsme si pouze vyjádřili důsledky platnosti věty Sylvesterovy, předpokládané pro index m. Nyní teprve započneme s prováděním důkazu její platnosti i pro determinant A_{m+1} a jeho $(m + 2)$-řadové superdeterminanty — označme je symboly D_{rs}; je tedy

$$D_{rs} = \begin{vmatrix} a_{11}, \dots, & a_{1m}, & a_{1,m+1}, & a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, \dots, & a_{mm}, & a_{m,m+1}, & a_{ms} \\ a_{m+1,1}, \dots, & a_{m+1,m}, & a_{m+1,m+1}, & a_{m+1,s} \\ a_{r1}, \dots, & a_{rm}, & a_{r,m+1}, & a_{rs} \end{vmatrix}; \qquad \text{(f)}$$

$$r, s = m + 2, m + 3, \dots, n.$$

Na tento $(m + 2)$-řadový determinant aplikujme nyní vzorec (a); vyjde

$$D_{rs} \,.\, A_m = \Gamma_{rs};\ r, s = m + 2, m + 3, \dots, n. \qquad \text{(g)}$$

Takto získaný výsledek dosadíme do vztahu (d):

$$C_{m+1,m+1}^{n-m-2} \,.\, C = |A_m D_{rs}| = A_m^{n-m-1} \,.\, |D_{rs}|,$$

čili za pomoci relace (a):

$$|D_{rs}| = A \,.\, C_{m+1,m+1}^{n-m-2}. \qquad \text{(h)}$$

Protože však jest $C_{m+1,m+1}$ právě A_{m+1} — viz vzorce (c) a (17) — , najdeme konečně

$$|D_{rs}| = A \,.\, A_{m+1}^{n-m-2}. \qquad \text{(k)}$$

To však je právě matematický výraz věty Sylvesterovy pro index $m + 1$; byl odvozen za předpokladu správnosti té věty pro index m. Pro index 1 však věta platí, jak přímo plyne ze vzorce (16), tudíž také pro index 2, pro 3 atd. Je tedy dokázána v plné obecnosti.

7. VĚTA SYLVESTEROVA-FRANKEOVA.

Budiž dán determinant $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ a libovolné celé číslo $1 < r < n$. V determinantu A lze nalézti, jak víme, celkem $N^2 = \binom{n}{r}^2$ subdeterminantů r-řadových a je z nich možno vybudovati obecně $(N^2)! = \left[\binom{n}{r}^2\right]!$ různých determinantů N-řadových. Při vhodném způsobu konstrukce je možno hodnotu determinantu A_r, takto vzniklého, vyjádřiti pomocí výchozího determinantu A.

Označme si čísly $1', 2, \ldots, N = \binom{n}{r}$ jednotlivé kombinace r-té třídy tvořené z řady $1, 2, \ldots, n$. Tak na př. budeme rozuměti znakem 1 kombinaci $1, 2, \ldots, r$, znakem 2 kombinaci $1, 2, \ldots, r-1, r+1$, atd. Na pořadí, v jakém je bereme, při tom ostatně nezáleží — utvoříme jich prostě všech možných $N = \binom{n}{r}$, napíšeme v libovolném pořadí a označíme znaky $1, 2, \ldots, N$. Buďte h, k dvě z nich; pak budeme znakem M_{hk} označovati onen minor determinantu A, který je utvořen z jeho elementů patřících řádkům určeným kombinací h a sloupcům daným kombinací k. Tak je na př.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, a_{2r} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2}, & \ldots, a_{r-1,r} \\ a_{r+1,1}, & a_{r+1,2}, & \ldots, a_{r+1,r} \end{vmatrix}.$$

Budeme pak determinantem A_r rozuměti determinant

$$A_r = \begin{vmatrix} M_{11}, & M_{12} & \ldots & M_{1N} \\ M_{21}, & M_{22}, & \ldots, & M_{2N} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ M_{N1}, & M_{N2}, & \ldots, & M_{NN} \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Nyní však je $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, takže lze ke každé kombinaci r-té třídy elementů $1, 2, \ldots, n$ přiřaditi kombinaci třídy $(n - r)$-té těchto prvků. Je to na př. ta, která se s onou první doplňuje na celou řadu $1, 2, \ldots, n$. Tyto „doplňkové kombinace" určují determinant

$$A_{n-r} = \begin{vmatrix} \overline{M}_{11}, & \overline{M}_{12}, & \ldots, & \overline{M}_{1N} \\ \overline{M}_{21}, & \overline{M}_{22}, & \ldots, & \overline{M}_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{M}_{N1}, & \overline{M}_{N2}, & \ldots, & \overline{M}_{NN} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

jehož obecný element $\overline{M}_{hk}$ je $(n - r)$-řadový minor přidružený v determinantu A k minoru r-řadovému M_{hk}.

Místo subdeterminantů $\overline{M}_{k\nu}$ přidružených v A k minorům $M_{k\nu}$ si zavedeme doplňky $D_{k\nu}$ těchto minorů $M_{k\nu}$. Značí-li $S(k)$, $S(\nu)$ součty čísel v kombinacích k, ν, platí podle definice 5.

$$D_{k\nu} = (-1)^{S(k)+S(\nu)}\overline{M}_{k\nu}, \quad \overline{M}_{k\nu} = (-1)^{S(k)+S(\nu)}D_{k\nu}. \tag{a}$$

Tyto výrazy vložme do determinantu A_{n-r}; vytkneme-li z elementů prvního řádku $(-1)^{S(1)}$, z prvků druhého řádku $(-1)^{S(2)}, \ldots$ až z posledního řádku $(-1)^{S(N)}$ a taktéž naložíme se sloupci, dostaneme A_{n-r} ve tvaru

$$A_{n-r} = \begin{vmatrix} D_{11}, & D_{12}, & \ldots, & D_{1N} \\ D_{21}, & D_{22}, & \ldots, & D_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{N1}, & D_{N2}, & \ldots, & D_{NN} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Znásobme si determinanty A_r a A_{n-r} spolu po řádcích. Obecný člen

$$\alpha_{hk} = \sum_{\nu=1}^{N} M_{h\nu} D_{k\nu} \tag{b}$$

součinu je roven A pro $k = h$ podle věty Laplaceovy. Pro $k \neq h$ jde o součet součinů r-řadových subdeterminantů

$M_{h\nu}$ se soustavou doplňků $D_{k\nu}$ minorů $M_{k\nu}$, stejnolehlých s prvými (t. j. s $M_{h\nu}$) co do sloupců, avšak vzatých z jiných řádků determinantu A, než ze kterých pocházely minory $M_{h\nu}$. Proto má každý subdeterminant $M_{h\nu}$ alespoň jeden řádek společný s $D_{k\nu}$ a α_{hk} je podle Laplaceovy věty rovno determinantu, jehož alespoň dva rovnoběžné řádky jsou stejné. Je tedy $\alpha_{hk} = 0$ pro $k \neq h$ a máme výsledek

$$A_r \,.\, A_{n-r} = A^N = A^{\binom{n}{r}}. \tag{21}$$

To je prvý poznatek, který jsme získali o determinantu A_r a také A_{n-r}. Každý z nich je dělitelem výrazu $A^{\binom{n}{r}}$. Pomocí formule (21) dokážeme už poměrně snadno větu Sylvester-Frankeovu:

Věta 14. Hodnota determinantu A_r, definovaného vztahem (18), je určena vzorcem

$$A_r = A^{\binom{n-1}{r-1}}. \tag{22}$$

Důkaz. Použijeme úplné indukce předpokládajíce, že věta je už dokázána pro determinant složený z minorů $(n-1)$-řadového determinantu.

Pokládáme-li v determinantu A prvek a_{nn} za proměnný (a označíme jej v důsledku toho znakem x), ostatní elementy pak za konstanty, vidíme ze vzorce (21), že také determinanty A_r, A_{n-r} jsou funkcemi proměnné x. Zavedeme-li číslování $1, 2, \ldots, N$ kombinací r-té třídy z prvků $1, 2, \ldots, n$ tak, že napřed dáme ty, které obsahují prvek n — je jich celkem $Q = \binom{n-1}{r-1}$ — bude proměnná x zastoupena pouze v Q^2 prvcích M_{hk} $(h, k = 1, 2, \ldots, Q)$ determinantu A_r a to v každém jen v prvé mocnině, takže jest $M_{hk} = R_{hk} \,.\, x + S_{hk}$. Nyní rozvedeme determinant A_r podle prvých Q řádků:

$$A_r = \begin{vmatrix} M_{11}, \ldots, M_{1Q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{Q1}, \ldots, M_{QQ} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} M_{Q+1,Q+1}, \ldots, M_{Q+1,N} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{N,Q+1}, \quad \ldots, M_{NN} \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{vmatrix} xR_{11} + S_{11}, \ldots, xR_{1Q} + S_{1Q} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ xR_{Q1} + S_{Q1}, \ldots, xR_{QQ} + S_{QQ} \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} M_{Q+1,Q+1}, \ldots, M_{Q+1,N} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{N,Q+1}, \quad \ldots, M_{NN} \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= x^Q . \begin{vmatrix} R_{11}, \ldots, R_{1Q} \\ \cdots\cdots\cdots \\ R_{Q1}, \ldots, R_{QQ} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} M_{Q+1,Q+1}, \ldots, M_{Q+1,N} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{N,Q+1}, \quad \ldots, M_{NN} \end{vmatrix} + \ldots ;$$

členy s nižšími mocninami proměnné x, než je x^Q, jsme nevypisovali.

Snadno však nahlédneme, že jsou R_{hk} minory $(r - 1)$-řadové determinantu $(n - 1)$-řadového

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}, \quad \ldots, a_{1,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1.1}, \ldots, a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

a M_{ij} jeho minory r-řadové. Protože pak pro $(n - 1)$-řadový determinant už předpokládáme platnost vzorce (22) dokázánu a protože minory R_{hk} $(h, k = 1, 2, \ldots, Q)$ a M_{ij} $(i, j = Q + 1, Q + 2, \ldots, N)$ jsou všechny $(r - 1)$-resp. r-řadové, které je vůbec možno z determinantu B utvořit, máme dále

$$A_r = x^Q . B^{\binom{n-2}{r-2}} . B^{\binom{n-2}{r-1}} + \ldots = x^Q . B^{\binom{n-1}{r-1}} + \ldots = \\ = x^Q . B^Q + \ldots \qquad \text{(c)}$$

Uvážíme-li, že jest $A = xB + C$ (C nezávisí na x), máme podle vzorce (21)

$$A_r A_{n-r} = (xB + C)^N,$$

z čehož je patrno, že kořeny racionální celistvé funkce A_r

proměnné x jsou všechny stejné a rovny číslu $-\frac{C}{B}$; je tedy

$$A_r = B^Q \left(x + \frac{C}{B}\right)^Q = (Bx + C)^Q = A^Q = A^{\binom{n-1}{r-1}},$$

čímž je vzorec (22) a tedy i věta 14. dokázána pro determinanty n-řadové za předpokladu, že platí pro $(n - 1)$-řadové. Protože však je pro dvouřadové determinanty samozřejmá, je její platnost obecná.

Poznámka. Pro $r = n - 1$ dostáváme ze vzorce (22) známé pravidlo pro určování hodnoty determinantu *reciprokého* k danému nikoli nulovému (v § 8e).

8. SPECIÁLNÍ DETERMINANTY.

V matematice i ve vědách užitých se často setkáváme s determinanty, jejichž struktura jeví (obyčejně na prvý pohled) zřejmé zákonitosti. Hodnoty takových determinantů lze pak vhodnými obraty vyjádřiti zpravidla ve velmi jednoduchém tvaru. V tomto paragrafu si uvedeme nejznámější z těchto speciálních determinantů; cesty, jichž tu bude při výpočtech užito, nejsou ovšem jediné, jimiž lze dospěti k cíli. V mnoha z uvedených případů existují ještě jiné, často jednodušší obraty — zvolil jsem zde ty, které pokládám z vlastních zkušeností za přístupné také počítajícím technikům, v jejichž řadách by bylo dostatečné zvládnutí theorie i praxe determinantů svrchovaně žádoucí.

a) *Determinant Vandermondeův*

má tvar

$$V_n = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, & \ldots, & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \ldots, & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \ldots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{23}$$

a jeho hodnota se počítá podle vzorce

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1) \ldots$$
$$\ldots (x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1}). \tag{23'}$$

Důkaz. Od každého sloupce determinantu V_n odečteme sloupec předchozí násobený x_1; tím se hodnota V_n, jak víme, nezmění, determinant však bude míti prvou řádku 1, 0, 0, 0, ..., 0, ostatní řádky pak budou $1, x_\nu - x_1, x_\nu^2 - x_1 x_\nu, x_\nu^3 - x_1 x_\nu^2, \ldots, x_\nu^{n-1} - x_1 x_\nu^{n-2}$ ($\nu = 2, 3, \ldots, n$). Rozvedeme-li nyní determinant podle elementů prvního řádku a vytkneme pak z jednotlivých řádek společné faktory, dostaneme

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \dots (x_n - x_1) \,.$$
$$. \begin{vmatrix} 1, & x_2, & x_2^2, & \dots, & x_2^{n-2} \\ 1, & x_3, & x_3^2, & \dots, & x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-2} \end{vmatrix} .$$

Determinant zde vystupující je zcela obdobný původnímu, pouze jeho stupeň je $n - 1$ a základní prvky $x_2, x_3, \dots, x_n$. Naložíme s ním stejně jako dříve s V_n a dostaneme

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \dots$$
$$\dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots (x_n - x_2) \,.$$
$$. \begin{vmatrix} 1, & x_3, & x_3^2, & \dots, & x_3^{n-3} \\ 1, & x_4, & x_4^2, & \dots, & x_4^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-3} \end{vmatrix} .$$

Další aplikací postupu už dvakrát užitého dospějeme nakonec k vyjádření:

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots$$
$$\dots (x_n - x_2)(x_4 - x_3) \dots (x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

To však je pouze jiný tvar vzorce (23′), jehož platnost je tím dokázána.

Poznámky. 1. Pokládáme-li Vandermondeův determinant za funkci proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, tedy $V_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pak tato funkce mění při libovolné permutaci svých proměnných očividně nejvýše své znaménko. Funkcím této vlastnosti se říká alternující.

2. Vandermondeův determinant má stěžejní roli v pojmu diskriminantu algebraické rovnice.

3. Pro $n = 3$ byl determinant (23) po prvé studován Vandermondem (Résolution dès équations, 1770) a pro obecné n Cauchym.

b) *Determinant persymetrický* (také orthosymetrický).

Je to determinant n-tého stupně, zbudovaný z elementů $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}$ tak, že jeho obecný prvek $a_{ik} = c_{i+k-2}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Označíme jej znakem P_n, takže

$$P_n = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & c_2, & c_3, & \ldots, c_{n-1} \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & \ldots, c_n \\ c_2, & c_3, & c_4, & c_5, & \ldots, c_{n+1} \\ c_3, & c_4, & c_5, & c_6, & \ldots, c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1}, & c_n, & c_{n+1}, & c_{n+2}, & \ldots, c_{2n-2} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Zavedeme-li si postupné diference veličin c_ν podle schematu

$$\begin{array}{l} \Delta_0^{(0)} = c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_{2n-6}, c_{2n-5}, c_{2n-4}, c_{2n-3}, c_{2n-2} \\ \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}, \quad \ldots, \quad \Delta_{2n-5}^{(1)}, \Delta_{2n-4}^{(1)}, \Delta_{2n-3}^{(1)}, \Delta_{2n-2}^{(1)} \\ \quad \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(2)}, \Delta_4^{(2)}, \quad \ldots, \quad \Delta_{2n-4}^{(2)}, \Delta_{2n-3}^{(2)}, \Delta_{2n-2}^{(2)} \\ \quad\quad \Delta_3^{(3)}, \Delta_4^{(3)}, \quad \ldots, \quad \Delta_{2n-3}^{(3)}, \Delta_{2n-2}^{(3)} \\ \quad\quad\quad \Delta_4^{(4)}, \quad \ldots, \quad \Delta_{2n-2}^{(4)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \tag{25}$$

kde každá z diferencí je rovna rozdílu veličiny stojící nad ní vpravo minus veličina stojící nad ní vlevo, lze dokázati tuto skutečnost:

Persymetrický determinant veličin $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}$ *je roven persymetrickému determinantu jejich diferencí* $\Delta_0^{(0)}$, $\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(2)}, \ldots, \Delta_{2n-2}^{(2n-2)}$.

Důkaz. Na determinant (24) aplikujeme serii úprav, z nichž každá mění pouze jeho tvar (nikoli hodnotu, v. věty 4. a 5., jakož i poznámky k nim) a skládá se vždy ze dvou kroků. Prvá úprava spočívá v tom, že od každého sloupce P_n mimo první odečteme sloupec předchozí a v determinantu tak vzniklém pak od každé řádky vyjma prvou odečteme řádku předchozí. Dostaneme determinant $P_n^{(1)}$, který podrobíme druhé úpravě: Ode všech sloupců mimo prvé dva odečteme vždy sloupec předchozí a potom ode všech řádků třetím počínaje odečítáme vždy řádek předchozí. Na determinant $P_n^{(2)}$ takto vzniklý aplikujeme úpravu třetí: Každý sloupec čtvrtým počínaje zmenšíme o elementy sloupce předchozího a pak naložíme obdobně s každým řádkem až na prvé tři. Vyjde nám determinant

$$P_n^{(3)} = \begin{vmatrix} \Delta_0^{(0)}, & \Delta_1^{(1)}, & \Delta_2^{(2)}, & \Delta_3^{(3)}, & \ldots, & \Delta_{n-1}^{(3)} \\ \Delta_1^{(1)}, & \Delta_2^{(2)}, & \Delta_3^{(3)}, & \Delta_4^{(4)}, & \ldots, & \Delta_n^{(4)} \\ \Delta_2^{(2)}, & \Delta_3^{(3)}, & \Delta_4^{(4)}, & \Delta_5^{(5)}, & \ldots, & \Delta_{n+1}^{(5)} \\ \Delta_3^{(3)}, & \Delta_4^{(4)}, & \Delta_5^{(5)}, & \Delta_6^{(6)}, & \ldots, & \Delta_{n+2}^{(6)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{n-1}^{(3)}, & \Delta_n^{(4)}, & \Delta_{n+1}^{(5)}, & \Delta_{n+2}^{(6)}, & \ldots, & \Delta_{2n-2}^{(6)} \end{vmatrix}.$$

Takto postupujíce dostaneme po $n - 1$ krocích původní determinant P_n ve tvaru $P_n^{(n-1)}$, t. j. právě v tom tvaru, o němž mluví svrchu uvedená věta.

Doporučuji čtenáři provésti tuto úpravu obecně užitím obecné indukce podle vzoru důkazu věty 1.

Poznámky. 1. Tvoří-li veličiny $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}$ aritmetickou řadu stupně $(n - 1)$-ho (takže je řada n-tých diferencí nulová), má jejich persymetrický determinant hodnotu

$$P_n = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} [\Delta_{n-1}^{(n-1)}]^n; \tag{26}$$

tvoří-li řadu stupně nižšího, než $(n - 1)$-ho, je $P_n = 0$. Tyto skutečnosti jsou přímým důsledkem vyjádření P_n pomocí diferencí veličin $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}$.

2. Persymetrické determinanty jsou důležité v theorii invariantů a rovnic algebraických (Sturmův theorém, diskriminant). Zvláště podrobně se jimi zabývali *Sylvester* (Philos. Trans. 1853) a *Hankel.*

c) *Cyklický determinant.*

Je zvláštním případem determinantu persymetrického, z něhož jej dostaneme, platí-li $c_{n+\nu} = c_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2$). Má tedy tvar

$$C_n = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & c_2, \ldots, c_{n-3}, & c_{n-2}, & c_{n-1} \\ c_1, & c_2, & c_3, \ldots, c_{n-2}, & c_{n-1}, & c_0 \\ c_2, & c_3, & c_4, \ldots, c_{n-1}, & c_0, & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-2}, & c_{n-1}, & c_0, \ldots, c_{n-5}, & c_{n-4}, & c_{n-3} \\ c_{n-1}, & c_0, & c_1, \ldots, c_{n-4}, & c_{n-3}, & c_{n-2} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

O determinantu C_n platí *věta:*

Buď polynom $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}$; *determinant* C_n *lze vyjádřiti ve tvaru*

$$C_n = (-1)^{\frac{1}{2}[(n-1)(n-2)]} \cdot f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n), \tag{28}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *značí kořeny rovnice* $x^n - 1 = 0$.

Důkaz. Ukážeme napřed, že determinant C_n je dělitelný výrazem $f(x)$, je-li jen $x^n - 1 = 0$. Používajíce nějakého kořene x této rovnice upravme C_n tak, že k jeho prvému sloupci přičteme x-násobný druhý, x^2-násobný třetí, ..., až x^{n-1}-násobný poslední. Ostatní sloupce necháme beze změny, takže $(\nu + 1)$-vý řádek bude míti na prvém místě výraz

$$\begin{aligned} c_\nu + c_{\nu+1}x + c_{\nu+2}x^2 + \ldots + c_{n-2}x^{n-\nu-2} + c_{n-1}x^{n-\nu-1} + \\ + c_0x^{n-\nu} + c_1x^{n-\nu+1} + \ldots + c_{\nu-1}x^{n-1} = \\ = \frac{1}{x^\nu}(c_\nu x^\nu + c_{\nu+1}x^{\nu+1} + c_{\nu+2}x^{\nu+2} + \ldots + \\ + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + c_0x^n + c_1x^{n+1} + \ldots + c_{\nu-1}x^{n+\nu-1}) = \\ = \frac{1}{x^\nu}(c_\nu x^\nu + c_{\nu+1}x^{\nu+1} + c_{\nu+2}x^{\nu+2} + \ldots + \\ + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + c_0 + c_1x + \ldots + c_{\nu-1}x^{\nu-1}) = \\ = \frac{1}{x^\nu} f(x), \end{aligned}$$

na ostatních místech pak stojí prvky $c_{\nu+1}, c_{\nu+2}, \ldots, c_{n-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}$.

Obsahují tedy všechny elementy prvého sloupce v takto tvarově pozměněném determinantu C_n výraz $f(x)$, který lze proto vytknouti jako činitel před determinant (v. větu 4.), takže je C_n skutečně dělitelno hodnotou $f(x)$, je-li jenom x kořenem rovnice $x^n - 1 = 0$. Protože pak má tato rovnice n kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$, je C_n dělitelno každým z výrazů $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ a dá se tedy psáti ve tvaru

$$C_n = C \,.\, f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n).$$

Abychom získali určitý názor o veličině C, představme si, že všechny veličiny $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ jsou fysikální s touže dimensí t (na př. cm, sec a pod.); je tedy $c_\varrho = t\gamma_\varrho$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, kde γ_ϱ je číslo bez rozměru. Determinant C_n nabude tvaru $t^n\Gamma_n$, výrazy $f(x_\nu)$ tvaru $t\varphi(x_\nu)$, kde Γ_n a $\varphi(x_\nu)$ jsou čísla snadno představitelného tvaru (proveď podrobně!); veličina C má neznámý rozměr t^ξ, takže přejde v novou $t^\xi\Gamma$. Posléze psané vyjádření C_n tedy nabude tvaru

$$t^n\Gamma_n = t^\xi\Gamma \,.\, t^n\varphi(x_1)\, \varphi(x_2) \ldots \varphi(x_n),$$

z čehož vyplývá pro ξ hodnota 0, takže C je bez rozměru; je to tedy konstanta neobsahující žádný z prvků $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$.

Abychom tuto konstantu určili, uvažujme o speciálním případě determinantu C_n, kdy $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-2} = 0$, $c_{n-1} = 1$. Pak je $f(x_\nu) = c_{n-1}x_\nu^{\,n-1} = x_\nu^{\,n-1}$ a determinant C_n má všechny prvky nulové, až na elementy vedlejší diagonály, které jsou vesměs rovny 1. Je tedy v tomto zvláštním případě

$$C_n = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n+3)]},$$

takže máme pro hodnotu C vztah

$$(-1)^{\frac{1}{2}[n(n+3)]} = C(x_1x_2 \ldots x_n)^{n-1}.$$

Z theorie rovnic však je známo, že v našem případě jest

$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \cdot (-1) = (-1)^{n+1}$ a proto vychází (provésti podrobně!)

$$C = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n+3)]-(n-1)(n+1)} = (-1)^{\frac{1}{2}[(n-1)(n-2)]},$$

jak bylo dokázati.

Poznámka. Pěkným způsobem lze determinant C_n vypočísti, násobíme-li jej determinantem Vandermondeovým ($x_1, x_2, \dots, x_n$ značí stále kořeny rovnice $x^n - 1 = 0$)

$$I = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, & \dots, & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \dots, & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Doporučuji provésti podrobně!

d) *Kontinuant*

je determinant tvaru:

$$K_n = \begin{vmatrix} b_1, & a_2, & 0, & 0, & 0, \dots, 0, & 0 \\ -1, & b_2, & a_3, & 0, & 0, \dots, 0, & 0 \\ 0, & -1, & b_3, & a_4, & 0, \dots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & b_4, & a_5, \dots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1, & b_5, \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \dots, b_{n-1}, & a_n \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \dots, -1, & b_n \end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Vedle označení K_n užijeme pro tento determinant také názorného symbolu $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ a rozvedeme jej (užitím Laplaceovy věty) podle prvých ν sloupců. Z těchto ν sloupců je možno vybrati celkem tyto nenulové ν-řadové determinanty:

Determinant obsahující elementy řádků $1, 2, \dots, \nu$-tého; je to zřejmě $(b_1, b_2, \dots, b_\nu)$ a patří k němu v K_n doplněk $(b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \dots, b_n)$.

Determinant ze řádků o pořadových číslech $1, 2, \dots,$

$\nu - 1, \nu + 1$. Má hodnotu $-(b_1, b_2, \ldots, b_{\nu-1})$ a patří k němu doplněk $-a_{\nu+1}(b_{\nu+2}, b_{\nu+3}, \ldots, b_n)$.

Determinant ze řádků $2, 3, \ldots, \nu + 1$; není třeba jej bráti v úvahu, protože k němu patří nulový doplněk.

Máme tedy pro daný kontinuant redukční vztah

$$\begin{gathered}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_\nu) \, . \, (b_{\nu+1}, \ldots, b_n) + \\ + a_{\nu+1}(b_1, b_2, \ldots, b_{\nu-1})(b_{\nu+2}, \ldots, b_n); \\ \nu = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{30}$$

Pro $\nu = n - 1$ dostáváme odtud přímo rekurentní relaci pro K_n ve tvaru

$$K_n = b_n K_{n-1} + a_n K_{n-2}; \; K_0 = 1. \tag{31}$$

Poznámky. 1. Pro $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 1$ máme t. zv. jednoduchý kontinuant (*Sylvester*, Philos. Magazine, 1853). Je-li mimoto také ještě $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, máme případ zvláště jednoduchý. Vzorec (31) zní pak

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}, \tag{31'}$$

takže pro řadu $K_1, K_2, K_3, \ldots$ dostáváme

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots \tag{31''}$$

Je to známá řada *Fibonacciova* (Lionardo Pisanus, naroz. 1175).

2. Budiž $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$ a $n = 2\nu$. Tu nabude vzorec (30) tvaru

$$K_{2\nu} = K_\nu^2 + K_{\nu-1}^2. \tag{30'}$$

Srovnej s tím vnitřní strukturu řady (31").

3. *Sblížené hodnoty řetězového zlomku*

$$b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

jsou zlomky, jejichž čitatele i jmenovatele lze vyjádřiti ve tvaru (29). Ověřte na př. pro $n = 5$.

e) *Determinant reciproký*

k danému determinantu $A = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ je determinant a, jehož obecný prvek α_{ik} je roven doplňku A_{ik} elementu a_{ik} v determinantu A. Je to tedy determinant

$$a = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & \ldots, & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & A_{n3}, & \ldots, & A_{nn} \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Jeho hodnotu najdeme nejsnáze tak, že jej násobíme původním determinantem A. Výsledkem bude determinant $|c_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takový, že

$$c_{ik} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Podle vzorců (12) jest však $c_{ik} = 0$ pro všechna $i \neq k$ a pouze elementy hlavní $c_{ii} = A$, takže má $|c_{ik}|$ všechny prvky nulové, až na elementy hlavní úhlopříčky. Ty jsou navzájem stejné a rovny A, takže máme $|c_{ik}| = a \,.\, A = A^n$ a odtud v případě $A \neq 0$

$$a = A^{n-1}. \tag{33}$$

Tento vzorec zůstává v platnosti i pro $A = 0$, jak ukážeme později.

Také pro výpočet minorů determinantu a reciprokého k A lze udati poměrně jednoduché pravidlo. Libovolný minor m determinantu a budiž sestaven z elementů řádků s pořadovými čísly $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$ a sloupců $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq n$ a m_1 budiž jeho minor přidružený v a. Násobme si po řádcích determinant A s tím, který vznikne z a, když hlavní elementy subdeterminantu m_1 nahradíme vesměs číslem 1, ostatní pak prvky determinantu a stojící v řádcích, z nichž je vzat m_1, nulami. Výsledkem bude (v. věta Laplaceova) součin $(-1)^{S(i)+S(k)}mA$ ve tvaru determinantu $|c_{\varrho\sigma}|$; $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, pro jehož obecný element máme

$$c_{\varrho\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu}\alpha_{\sigma\nu}; \tag{a}$$

zde je $\alpha_{\sigma\nu}$ obecný prvek determinantu, jímž A násobíme a jehož konstrukci jsme právě popsali. Pokud je σ rovno některému z čísel $i_1, i_2, \ldots i_r$, jest $\alpha_{\sigma\nu} = A_{\sigma\nu}$, takže máme vzorec $c_{\varrho\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu}A_{\sigma\nu}$ pro $\sigma = i_1, i_2, \ldots, i_r$ a ve smyslu vztahů (12) lze psáti:

$$\begin{gathered} c_{\sigma\sigma} = A,\ c_{\varrho\sigma} = 0 \text{ pro } \varrho \neq \sigma; \\ \varrho = 1, 2, \ldots, n,\ \sigma = i_1, i_2, \ldots, i_r. \end{gathered} \tag{b}$$

Jestliže je σ rovno některému z čísel $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{n-r}$ zůstavších v řadě $1, 2, \ldots, n$ po vyškrtání čísel $i_1, i_2, \ldots, i_r$, tedy na př. $\sigma = \iota_\lambda$, je pouze $\alpha_{\iota_\lambda \varkappa_\lambda} = 1$, jinak $\alpha_{\iota_\lambda \nu} = 0$; $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-r}$ jsou čísla zbyvší v řadě $1, 2, \ldots, n$ po vyškrtání $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Máme tedy

$$c_{\varrho\iota_\lambda} = a_{\varrho\varkappa_\lambda};\ \varrho = 1, 2, \ldots, n,\ \lambda = 1, 2, \ldots, n-r. \tag{c}$$

Je tudíž dotčený součin vyjádřen determinantem n-řadovým této vnitřní struktury: Ve sloupcích s pořadovými čísly $i_1, i_2, \ldots, i_r$ jsou všechny elementy rovny nule, až na hlavní, mající vesměs hodnotu A. V ostatních sloupcích stojí elementy původního determinantu A v pořadí udaném vzorci (c). Rozvedením podle sloupců $i_1, i_2, \ldots, i_r$ pak nacházíme výsledek

$$m = A^{r-1} \cdot (-1)^{S(i)+S(k)} \begin{vmatrix} a_{\iota_1\varkappa_1}, & a_{\iota_1\varkappa_2}, & \ldots, a_{\iota_1\varkappa_{n-r}} \\ a_{\iota_2\varkappa_1}, & a_{\iota_2\varkappa_2}, & \ldots, a_{\iota_2\varkappa_{n-r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\iota_{n-r}\varkappa_1}, & a_{\iota_{n-r}\varkappa_2}, & \ldots, a_{\iota_{n-r}\varkappa_{n-r}} \end{vmatrix}, \tag{34}$$

který lze zřejmě vysloviti takto: A^{1-r}-násobná hodnota r-řadového minoru m determinantu a reciprokého k A je rovna doplňku v determinantu A onoho minoru, který je v A s m stejnolehlý.

Poznámka. Determinanty tohoto druhu se zabýval už Cauchy. S jejich aplikacemi se setkáváme na př. v analytické geometrii.

f) *Determinant orthogonální.*

Determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nazýváme orthogonálním, platí-li mezi jeho elementy vztahy

$$\begin{gathered} a_{r1}a_{s1} + a_{r2}a_{s2} + \ldots + a_{rn}a_{sn} = 0 \\ \text{pro } r \neq s;\ r, s = 1, 2, \ldots, n \\ a_{r1}^2 + a_{r2}^2 + \ldots + a_{rn}^2 = A_r^2 \\ \text{pro } r = 1, 2, \ldots, n; \end{gathered} \tag{35}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou při tom určitá čísla (ve zvláštním případě rovna 1).

Hodnotu takového determinantu určíme snadno tím, že jej umocníme dvěma. Všechny elementy čtverce A^2 budou podle vzorců (35) nulové, až na prvky hlavní. Ty mají hodnoty $c_{ii} = A_i^2$, takže dostaneme

$$A^2 = A_1^2 A_2^2 \ldots A_n^2$$

a tedy dále

$$A = \pm A_1 A_2 \ldots A_n. \tag{36}$$

S orthogonálními determinanty se zhusta setkáváme v analytické geometrii a v theorii kvadratických forem. Jejich podrobnějšími vlastnostmi se budeme zabývati později.

g) *Determinant Hermiteův.*

Jsou-li hlavní prvky a_{ii} čísla reálná, každé dva sdružené prvky (t. j. a_{ki}, a_{ik}) pak čísla komplexně sdružená, nazýváme determinant $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ Hermiteovým. Označíme-li, jak jest obvyklé, znakem $\bar{a}_{ik}$ číslo komplexně sdružené s a_{ik}, je tedy $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$ a Hermiteův determinant se objeví ve tvaru

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1n} \\ \bar{a}_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n} \\ \bar{a}_{13}, & \bar{a}_{23}, & a_{33}, & \ldots, & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{1n}, & \bar{a}_{2n}, & \bar{a}_{3n}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{37}$$

Hermiteův determinant má vždy reálnou hodnotu.

Důkaz. Nahraďme v H_n všechny elementy jejich hodnotami komplexně sdruženými. Tím přejde, jak známo z nauky o komplexních číslech, veličina H_n (t. j. hodnota Hermiteova determinantu) ve svou komplexně sdruženou $\bar{H}_n$. Na druhé straně vznikne však uvedeným nahrazením determinant nový, jehož ν-tý sloupec je tentýž, jako byl dříve ν-tý řádek původního determinantu. Lze si tedy představiti, že nový determinant $\bar{H}_n$ vznikl z daného H_n tím, že jsme v něm zaměnili řádky za sloupce a naopak. Takové dva determinanty mají však stejnou hodnotu (v. pozn. k definici 4.), takže dvě komplexně sdružená čísla H_n, $\bar{H}_n$ jsou si rovna. To je však možno jenom tenkráte, jsou-li obě reálná, čímž je věta dokázána.

Doplňky dvou sdružených prvků a_{ik}, a_{ki} v Hermiteově determinantu jsou determinanty o hodnotách komplexně sdružených.

Důkaz. Uvažujme napřed o subdeterminantech M_{ik} a M_{ki}; ν-tý řádek prvého jest: $a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, \ldots, a_{\nu, k-1}, a_{\nu, k+1}, \ldots, a_{\nu n}$ a ϱ-tý jeho sloupec: $a_{1\varrho}, a_{2\varrho}, \ldots, a_{i-1,\varrho}, a_{i+1,\varrho}, \ldots, a_{n\varrho}$.

U determinantu M_{ki} je pak ϱ-tý řádek: $a_{\varrho 1}, a_{\varrho 2}, \ldots, a_{\varrho, i-1}, a_{\varrho, i+1}, \ldots, a_{\varrho n}$ a ν-tý sloupec: $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{k-1\nu}, a_{k+1,\nu}, \ldots, a_{n\nu}$. Tato fakta platí, pokud je $\nu \leqq i - 1$, $\varrho \leqq k - 1$. Pro $\nu \geqq i$, $\varrho \geqq k$ musíme indexy ν, ϱ nahraditi o 1 většími, takže na př. bude ϱ-tý řádek minoru M_{ki} pro $\varrho \geqq k$ míti tvar: $a_{\varrho+1,1}, a_{\varrho+1,2}, \ldots, a_{\varrho+1,i-1}, a_{\varrho+1,i+1}, \ldots, a_{\varrho+1,n}$. Vyměníme-li nyní v M_{ki} řádky a sloupce navzájem, zůstane M_{ki}, pokud jde o hodnotu, beze změny, jeho ν-tý sloupec se však stane ν-tým řádkem a ϱ-tý řádek ϱ-tým sloupcem. Bude tedy na př. pro $\nu \leqq i - 1$ řádek ν-tý tvarově změněného minoru M_{ki}: $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{k-1,\nu}, a_{k+1,\nu}, \ldots, a_{n\nu}$. Protože pak byl původní determinant podle předpokladu Hermiteův, platí $a_{1\nu} = \bar{a}_{\nu 1}, a_{2\nu} = \bar{a}_{\nu 2}, \ldots$ a lze tedy ν-tý řádek subdeterminantu M_{ki} psáti ve tvaru: $\bar{a}_{\nu 1}, \bar{a}_{\nu 2}, \ldots, \bar{a}_{\nu, k-1}, \bar{a}_{\nu, k+1}, \ldots, \bar{a}_{\nu n}$, takže je „komplexně sdružen" s ν-tým řádkem subdeterminantu M_{ik}. Stejně lze tuto skutečnost ukázati i o sloupcích, z čehož je patrno, že M_{ki} dostaneme z M_{ik} jednoduše tak, že všechny prvky minoru M_{ik} nahradíme komplexně sdruženými. Jsou tedy dva sdružené minory M_{ik}, M_{ki} čísla komplexně sdružená a proto i doplňky A_{ik}, A_{ki}, jež z nich vzniknou násobením touže hodnotou $(-1)^{i+k}$. Tím je tvrzení dokázáno a plyne z něho na př. skutečnost, že determinant reciproký k Hermiteovu je opět typu Hermiteova.

Poznámky. 1. Speciálními typy determinantu právě probraného jsou determinant souměrný a polosouměrný, o nichž se zmíníme blíže ve zvláštních odstavcích.

2. Podrobněji studoval determinant H_n po prvé *Hermite* (Journ. f. Math., 1854).

h) *Determinant souměrný (symetrický).*

Jsou-li v Hermiteově determinantu *každé dva sdružené elementy stejné*, t. j. $a_{ik} = a_{ki}$, tudíž reálné, jmenuje se tento determinant symetrický. Doplňky dvou sdružených prvků jsou tu stejné (dokaž podrobně pomocí vlastností obdobných doplňků v determinantu H_n), takže determinant reciproký k souměrnému je opět souměrný.

Čtverec každého determinantu je determinantem souměrným.

Důkaz. Podle věty 9. vzorce (14) je obecný element c_{ik} determinantu vzniklého zdvojmocněním $|a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$:

$$c_{ik} = a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \ldots + a_{in}a_{kn}; \tag{38}$$

je tedy roven elementu sdruženému c_{ki} a věta je tím dokázána.

Studiem souměrných determinantů se zabývali *Cayley* (Journ. f. Math., 1846) a *Frobenius* (Journ. f. Math., 1877). Jsou důležité na př. v analytické geometrii ploch a v nebeské mechanice.

k) *Determinant polosouměrný.*

Specialisujme Hermiteův determinant (37) tím způsobem, že hlavní elementy $a_{rr} = 0$, $r = 1, 2, \ldots, n$, kdežto ostatní a_{rs} budou ryze imaginární: $a_{rs} = \mathrm{i}\alpha_{rs}$, $a_{sr} = \bar{a}_{rs} = -\mathrm{i}\alpha_{rs}$; vznikne tak determinant I_n, z jehož všech elementů vytýkáme faktor i a dostaneme

$$I_n = \mathrm{i}^n Q_n, \tag{39}$$

kdež determinant

$$Q_n = \begin{vmatrix} 0, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \ldots, \alpha_{1n} \\ -\alpha_{12}, & 0, & \alpha_{23}, & \ldots, \alpha_{2n} \\ -\alpha_{13}, & -\alpha_{23}, & 0, & \ldots, \alpha_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_{1n}, & -\alpha_{2n}, & -\alpha_{3n}, & \ldots, 0 \end{vmatrix} \tag{40}$$

se nazývá polosouměrným determinantem reálných prvků α_{rs}.

Z rovnice (39) plyne pro Q_n první zajímavý důsledek: I_n je číslo reálné jakožto hodnota Hermiteova determinantu, Q_n je reálné jakožto hodnota determinantu s reálnými prvky.

Je-li n liché, je však i^n ryze imaginární, takže vztah (39) nutně žádá, aby $Q_n = 0$. Je tedy *polosouměrný determinant lichého stupně roven nule.*

O polosouměrných determinantech sudého stupně si později ukážeme, že jsou kladné a že se dají vyjádřiti jako čtverce jistých celistvých racionálních funkcí svých prvků (t. zv. Pfaffiánů, čili polodeterminantů).

Označme si subdeterminanty dvou sdružených prvků a_{rs}, a_{sr} v determinantu I_n symboly M_{rs}, M_{sr} a korespondující minory polosouměrného determinantu Q_n znaky Q_{rs}, Q_{sr}. Z theorie Hermiteových determinantů víme, že čísla M_{rs} a M_{sr} jsou sdružená, t. j. $M_{sr} = \overline{M}_{rs}$; nyní však je patrně $M_{rs} = i^{n-1}Q_{rs}$, $M_{sr} = i^{n-1}Q_{sr}$ a právě uvedená rovnost se dá psáti ve tvaru $i^{n-1}Q_{sr} = (-i)^{n-1}Q_{rs} = (-1)^{n-1}i^{n-1}Q_{rs}$, čili

$$Q_{sr} = (-1)^{n-1}Q_{rs}. \tag{41}$$

Z tohoto vzorce vyplývá: *Determinant reciproký k polosouměrnému determinantu lichého stupně je souměrný, reciproký k polosouměrnému determinantu stupně sudého je opět polosouměrný.*

Polosouměrnými determinanty se zabývali na př. *Cayley*, *Mertens* a *Frobenius* (Journ. f. Math., 1849, 1877). Jejich nejznámější použití se týká řešení Pfaffova problému v theorii diferenciálních rovnic.

l) *Determinant vroubený.*

Připojíme-li k danému determinantu $A = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ na pravé straně r sloupců a dole r řádků tak, že připojené řady mají společné elementy nulové, dostaneme z něho determinant nový, který byl označen přiléhavým jménem „vroubený“. Jde tedy o determinant

$$R_r = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n}, & y_{11}, & y_{12}, & \ldots, y_{1r} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn}, & y_{n1}, & y_{n2}, & \ldots, y_{nr} \\ x_{11}, \ldots, x_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ x_{21}, \ldots, x_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{r1}, \ldots, x_{rn}, & 0, & 0, & \ldots, 0 \end{vmatrix}. \tag{42}$$

Při jeho výpočtu budeme rozeznávat tři případy:

α) $r = n$; rozvedeme-li R_r podle posledních r řádků (v. věta 8.), dostaneme ihned vzorec

$$R_n = (-1)^n . X . Y, \tag{43}$$

kde značí X, Y determinanty z prvků $x_{\varrho\sigma}$, $y_{\varrho\sigma}$.

β) $r > n$; věta 8. ukazuje ihned, provádíme-li opět rozvoj podle posledních r řádků, že jest

$$R_r = 0. \tag{44}$$

γ) $r < n$; rozvádíme opět podle posledních r řádků. Obecný člen tohoto rozvoje bude

$$(-1)^{nr+\frac{1}{2}[r(r+1)]+\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r} . \begin{vmatrix} x_{1\nu_1}, & x_{1\nu_2}, & \ldots, & x_{1\nu_r} \\ x_{2\nu_1}, & x_{2\nu_2}, & \ldots, & x_{2\nu_r} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{r\nu_1}, & x_{r\nu_2}, & \ldots, & x_{r\nu_r} \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} a_{1\sigma_1}, & a_{1\sigma_2}, & \ldots, & a_{1\sigma_{n-r}}, & y_{11}, & \ldots, & y_{1r} \\ a_{2\sigma_1}, & a_{2\sigma_2}, & \ldots, & a_{2\sigma_{n-r}}, & y_{21}, & \ldots, & y_{2r} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{n\sigma_1}, & a_{n\sigma_2}, & \ldots, & a_{n\sigma_{n-r}}, & y_{n1}, & \ldots, & y_{nr} \end{vmatrix},$$

kde $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r$ jsou libovolná čísla vybraná z řady $1, 2, \ldots, n$ a $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_{n-r}$ čísla, která v ní po tomto vybrání zbudou. Je zřejmo, že celý rozvoj determinantu R_r bude míti $\binom{n}{r}$ sčítanců právě uvedeného tvaru.

Druhý determinant, vystupující jako faktor v obecném členu rozvoje, rozveďme dále podle posledních r sloupců. Obecný člen tohoto druhého rozvoje bude míti tvar

$$(-1)^{r(n-r)+\frac{1}{2}[r(r+1)]+\varrho_1+\varrho_2+\ldots+\varrho_r} \cdot \begin{vmatrix} y_{\varrho_1 1}, & y_{\varrho_1 2}, & \ldots, & y_{\varrho_1 r} \\ y_{\varrho_2 1}, & y_{\varrho_2 2}, & \ldots, & y_{\varrho_2 r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{\varrho_r 1}, & y_{\varrho_r 2}, & \ldots, & y_{\varrho_r r} \end{vmatrix} .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} a_{\tau_1\sigma_1}, & a_{\tau_1\sigma_2}, & \ldots, & a_{\tau_1\sigma_{n-r}} \\ a_{\tau_2\sigma_1}, & a_{\tau_2\sigma_2}, & \ldots, & a_{\tau_2\sigma_{n-r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\tau_{n-r}\sigma_1}, & a_{\tau_{n-r}\sigma_2}, & \ldots, & a_{\tau_{n-r}\sigma_{n-r}} \end{vmatrix} ,$$

kde $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_r$ a $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-r}$ jsou čísla stejných vlastností, jako dříve systémy (ν) a (σ). Takových členů bude celkem $\binom{n}{r}$, takže se obecný člen původního rozvoje dá psáti ve tvaru

$$(-1)^{S(\nu)+S(\varrho)-r} \cdot \begin{vmatrix} x_{1\nu_1}, & x_{1\nu_2}, & \ldots, & x_{1\nu_r} \\ x_{2\nu_1}, & x_{2\nu_2}, & \ldots, & x_{2\nu_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r\nu_1}, & x_{r\nu_2}, & \ldots, & x_{r\nu_r} \end{vmatrix} .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} y_{\varrho_1 1}, & y_{\varrho_1 2}, & \ldots, & y_{\varrho_1 r} \\ y_{\varrho_2 1}, & y_{\varrho_2 2}, & \ldots, & y_{\varrho_2 r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{\varrho_r 1}, & y_{\varrho_r 2}, & \ldots, & y_{\varrho_r r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\tau_1\sigma_1}, & \ldots, & a_{\tau_1\sigma_{n-r}} \\ a_{\tau_2\sigma_1}, & \ldots, & a_{\tau_2\sigma_{n-r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\tau_{n-r}\sigma_1}, & \ldots, & a_{\tau_{n-r}\sigma_{n-r}} \end{vmatrix} , \tag{a}$$

kde $S(\nu) = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r$, $S(\varrho) = \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_r$.

Sloupce o pořadových číslech $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ a řádky s pořadovými indexy $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ určují svými společnými prvky v determinantu A minor, jehož jest poslední faktor členu (a) minorem přidruženým — označíme jej znakem $M_{(\nu)(\varrho)}$. Výraz $(-1)^{S(\nu)+S(\varrho)} M_{(\nu)(\varrho)}$ označme symbolem $A_{(\nu)(\varrho)}$; je to ve smyslu definice 5. doplněk minoru určeného společnými prvky řad, z nichž jsou vybrány subdeterminanty $X_{(\nu)}$, $Y_{(\varrho)}$ ve vztahu (a).

Máme tedy v případě $r < n$ výsledek

$$R_r = (-1)^r \Sigma X_{(\nu)} Y_{(\varrho)} \cdot A_{(\nu)(\varrho)}. \tag{45}$$

Součet zde vystupující má podle předchozích úvah celkem $\binom{n}{r}^2$ sčítanců.

Pěkným příkladem aplikace poznatků o vroubených determinantech je skutečný výpočet součinu dvou matic, jehož výměr jsme podali v definici 6. Postupujeme při tom zcela obdobně, jako při důkazu věty 9. o násobení dvou determinantů, pouze místo determinantu tam užitého vezmeme v úvahu obecnější:

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 0, & \ldots, & 0, & b_{11}, & b_{21}, & \ldots, & b_{m1} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & b_{12}, & b_{22}, & \ldots, & b_{m2} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & b_{1n}, & b_{2n}, & \ldots, & b_{mn} \end{vmatrix}.$$

Způsobem naprosto stejným, jaký byl volen ve větě 9., docházíme k výsledku, že řádkový součin obou matic $\|a_{ik}\|$, $\|b_{ik}\|$, t. j. determinant $|c_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, m$, jak byl definován výměrem 6., souvisí s hodnotou determinantu C_1 vztahem

$$|c_{ik}| = (-1)^{m(m+n)} C_1.$$

Upravme nyní determinant C_1 tak, že jeho $(m+\nu)$-tý řádek přemístíme na místo ν-té a to postupně pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Determinant C_2, který tím dostaneme, je pak vroubený typu (42) a má v našem případě tvar jednoduchý:

$$C_2 = (-1)^{mn} C_1 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & b_{11}, & b_{21}, & \ldots, & b_{m1} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & b_{12}, & b_{22}, & \ldots, & b_{m2} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & b_{1n}, & b_{2n}, & \ldots, & b_{mn} \\ a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}.$$

Máme tedy řádkový součin $|c_{ik}|$ matic $\|a_{ik}\|$, $\|b_{ik}\|$ vyjádřen vroubeným determinantem C_2 takto:

$$|c_{ik}| = (-1)^{m^2} C_2. \qquad (46)$$

Podle výsledků o vroubených determinantech, vyjádřených vzorci (43) a (44), můžeme říci:

Součin dvou matic $\|a_{ik}\|$, $\|b_{ik}\|$ s počtem řádků stejným jako je počet sloupců $(m = n)$ je roven součinu jejich determinantů. Mají-li obě matice více řádků než sloupců $(m > n)$, je jejich součin roven nule.

Pro $m < n$ užijeme vzorce (45); z doplňků $A_{(\nu)(\varrho)}$ jsou ty, kde systémy (ν) a (ϱ) jsou navzájem různé, rovny nule, kdežto ty, v nichž $(\nu) = (\varrho)$, t. j. $\nu_1 = \varrho_1, \nu_2 = \varrho_2, \ldots, \nu_m = \varrho_m$, mají hodnotu 1. Píšeme-li místo $X_{(\nu)}$, $Y_{(\varrho)}$ do vzorce (45) přiměřeně k našemu případu znaky $A_{(\nu)}$, $B_{(\varrho)}$, máme pro C_2 hodnotu $C_2 = (-1)^m . \Sigma A_{(\nu)} B_{(\nu)}$ a tedy pro součin $|c_{ik}|$ obou matic $\|a_{ik}\|$, $\|b_{ik}\|$ vztah:

$$|c_{ik}| = \Sigma A_{(\nu)} B_{(\nu)}, \qquad (47)$$

kde se sčítání děje přese všech $\binom{n}{m}$ kombinací m-té třídy z prvků $1, 2, \ldots, n$. Rozvážíme-li si přesně význam vzorce (47), nahlédneme, že se dá vyjádřiti slovy takto:

Součin dvou matic o společném počtu řádků m a společném počtu n sloupců, kde $m < n$, určíme tak, že každý m-řadový determinant matice prvé násobíme stejnolehlým (t. j. vzatým ze stejně číslovaných sloupců) determinantem matice druhé a všech těchto $\binom{n}{m}$ součinů sečteme.

Poznámky. 1. Determinant

$$\overline{R}_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & y_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, & y_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & t \end{vmatrix} \qquad (48)$$

rozepíšeme takto:

$$\overline{R}_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n}, & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn}, & 0 \\ x_1, \ \ldots, x_n, & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n}, & y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn}, & y_n \\ x_1, \ \ldots, x_n, & 0 \end{vmatrix} = At + R_1; \quad (49)$$

R_1 nalezneme snadno ze vzorce (45).

2. Jsou-li společné elementy vroubících řádků a sloupců nikoli nuly, nýbrž tvoří matici o řádcích $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1r}$; $t_{21}, t_{22}, \ldots, t_{2r}$; $\ldots$; $t_{r1}, t_{r2}, \ldots, t_{rr}$, máme případ determinantu ovroubeného obecně — označíme jej znakem $\overline{R}_r$. Takovýto determinant můžeme vždycky převésti na tvar, kde vroubící řádky tvoří prvých r řádků a vroubící sloupce prvých r sloupců, takže subdeterminant $T = |t_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, r$ stojí v tomto determinantu — označme jej Φ_r — vlevo nahoře. Na determinant Φ_r lze aplikovati větu Sylvesterovu a máme

$$\Phi_r \, . \, T^{n-1} = |S_{\lambda\nu}|; \ \lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

kde jest

$$S_{\lambda\nu} = \begin{vmatrix} t_{11}, & \ldots, t_{1r}, & x_{1\nu} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ t_{r1}, & \ldots, t_{rr}, & x_{r\nu} \\ y_{\lambda 1}, & \ldots, y_{\lambda r}, & a_{\lambda\nu} \end{vmatrix}. \quad (50)$$

Protože pak jest $\Phi_r = \overline{R}_r$ (dokáže se snadno pomocí věty 3.), dávají vztahy (50) přímo vzorec pro výpočet obecně vroubeného determinantu. Snadno lze tento výpočet provést ovšem jen pro malé hodnoty n, r.

Obecné pravidlo pro výpočet determinantu obecně vroubeného je značně složité. Najdeme je, používajíce pravidel o násobení determinantů a o determinantech reciprokých k daným, takto: Determinant obecně vroubený

$$\overline{R}_r = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2r} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, & y_{n1}, & y_{n2}, & \ldots, & y_{nr} \\ x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n}, & t_{11}, & t_{12}, & \ldots, & t_{1r} \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n}, & t_{21}, & t_{22}, & \ldots, & t_{2r} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ x_{r1}, & x_{r2}, & \ldots, & x_{rn}, & t_{r1}, & t_{r2}, & \ldots, & t_{rr} \end{vmatrix} \tag{51}$$

násobme novým

$$U = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & T_{11}, & T_{12}, & \ldots, & T_{1r} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & T_{21}, & T_{22}, & \ldots, & T_{2r} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & T_{r1}, & T_{r2}, & \ldots, & T_{rr} \end{vmatrix},$$

kde A_{ik}, $T_{\iota\varkappa}$ značí doplňky prvků a_{ik}, $t_{\iota\varkappa}$ v determinantech $A = |a_{ik}|$, $T = |t_{ik}|$. Dostaneme

$$U \,.\, \overline{R}_r =$$

$$= \begin{vmatrix} A, & 0, & \ldots, & 0, & (y_1T_1), & (y_1T_2), & \ldots, & (y_1T_r) \\ 0, & A, & \ldots, & 0, & (y_2T_1), & (y_2T_2), & \ldots, & (y_2T_r) \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & A, & (y_nT_1), & (y_nT_2), & \ldots, & (y_nT_r) \\ (x_1A_1), & (x_1A_2), & \ldots, & (x_1A_n), & T, & 0, & \ldots, & 0 \\ (x_2A_1), & (x_2A_2), & \ldots, & (x_2A_n), & 0, & T, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ (x_rA_1), & (x_rA_2), & \ldots, & (x_rA_n), & 0, & 0, & \ldots, & T \end{vmatrix},$$

při čemž symbol $(x_\varrho A_\nu)$ je zkratka za výraz: $x_{\varrho 1}A_{\nu 1} + x_{\varrho 2}A_{\nu 2} + \ldots + x_{\varrho n}A_{\nu n}$ a analogicky $(y_\sigma T_\tau) = y_{\sigma 1}T_{\tau 1} + y_{\sigma 2}T_{\tau 2} + \ldots + y_{\sigma r}T_{\tau r}$.

Determinant $U \,.\, \overline{R}_r$ rozvedeme podle prvých n řádků. Z řady čísel $1, 2, \ldots, n, n + 1, \ldots, n + r$ vezmeme libovolných n: $1 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{n-\varkappa} \leqq n < n + 1 \leqq n + \varrho_1 <$ $< \ldots < n + \varrho_\varkappa \leqq n + r$ a zvolíme je za pořadová čísla sloupců minoru determinantu $U . \overline{R}_r$, jehož řádky jsou tvořeny z prvních n řádek determinantu $U . \overline{R}_r$. Rozvedeme-li tento minor podle prvých $n - \varkappa$ sloupců (rozmyslete si věc ve smyslu úvah paragrafu 3. podrobně), nahlédneme snadno, že jeho hodnota je vyjádřena číslem

$$(-1)^{S(\nu)+\frac{1}{2}(n-\varkappa)(n-\varkappa+1)} \cdot \begin{vmatrix} (y_{\bar{\nu}_1} T_{\varrho_1}), \ldots, (y_{\bar{\nu}_1} T_{\varrho_\varkappa}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (y_{\bar{\nu}_\varkappa} T_{\varrho_1}), \ldots, (y_{\bar{\nu}_\varkappa} T_{\varrho_\varkappa}) \end{vmatrix} . A^{n-\varkappa};$$

$\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_\varkappa$ jsou čísla, která zbudou v řadě $1, 2, \ldots, n$ po vyškrtání čísel $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{n-\varkappa}$.

Doplněk tohoto subdeterminantu v determinantu $U . \overline{R}_r$ je minor přidružený k němu v $U . \overline{R}_r$ a násobený výrazem $(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)+S(\nu)+\varkappa n+S(\varrho)}$. Tento minor je obsažen v posledních r řádcích a ve sloupcích s pořadovými čísly $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots,$ $\bar{\nu}_\varkappa, n + \bar{\varrho}_1, n + \bar{\varrho}_2, \ldots, n + \bar{\varrho}_{r-\varkappa}$, kde $\bar{\varrho}_1, \varrho_2, \ldots, \bar{\varrho}_{r-\varkappa}$ jsou čísla zůstavší v řadě $1, 2, \ldots, r$ po vyškrtání čísel $\varrho_1, \varrho_2, \ldots,$ $\varrho_\varkappa$. Rozvedeme-li tento minor podle posledních $r - \varkappa$ sloupců, poznáme, že má hodnotu (proveď podrobně)

$$(-1)^{S(\varrho)+\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)} \cdot \begin{vmatrix} (x_{\varrho_1} A_{\bar{\nu}_1}), \ldots, (x_{\varrho_1} A_{\bar{\nu}_\varkappa}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{\varrho_\varkappa} A_{\bar{\nu}_1}), \ldots, (x_{\varrho_\varkappa} A_{\bar{\nu}_\varkappa}) \end{vmatrix} . T^{r-\varkappa};$$

$$S(\nu) = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{n-\varkappa}, \quad S(\varrho) = \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_\varkappa.$$

Po jednoduchém výpočtu dostaneme podle Laplaceovy věty vyjádření

$$U . \overline{R}_r = \Sigma(-1)^\varkappa A^{n-\varkappa} T^{r-\varkappa} .$$

$$\begin{vmatrix} (x_{\varrho_1} A_{\bar{\nu}_1}), \ldots, (x_{\varrho_1} A_{\bar{\nu}_\varkappa}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{\varrho_\varkappa} A_{\bar{\nu}_1}), \ldots, (x_{\varrho_\varkappa} A_{\bar{\nu}_\varkappa}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (y_{\bar{\nu}_1} T_{\varrho_1}), \ldots, (y_{\bar{\nu}_1} T_{\varrho_\varkappa}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (y_{\bar{\nu}_\varkappa} T_{\varrho_1}), \ldots, (y_{\bar{\nu}_\varkappa} T_{\varrho_\varkappa}) \end{vmatrix} . \qquad \text{(b)}$$

Determinanty, které se v tomto součinu vyskytují, jsou však podle definice 6. a vzhledem ke stavbě svých prvků každý součinem dvou matic: prvý vzniká násobením matic

$$\left\| \begin{matrix} x_{\varrho_1 1}, & x_{\varrho_1 2}, & \ldots, & x_{\varrho_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{\varrho_\varkappa 1}, & x_{\varrho_\varkappa 2}, & \ldots, & x_{\varrho_\varkappa n} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} A_{\bar{\nu}_1 1}, & A_{\bar{\nu}_1 2}, & \ldots, & A_{\bar{\nu}_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\bar{\nu}_\varkappa 1}, & A_{\bar{\nu}_\varkappa 2}, & \ldots, & A_{\bar{\nu}_\varkappa n} \end{matrix} \right\|$$

a má tedy podle vzorce (47) hodnotu

$$\Sigma \left| \begin{matrix} x_{\varrho_1 \sigma_1}, & \ldots, & x_{\varrho_1 \sigma_\varkappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{\varrho_\varkappa \sigma_1}, & \ldots, & x_{\varrho_\varkappa \sigma_\varkappa} \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} A_{\bar{\nu}_1 \sigma_1}, & \ldots, & A_{\bar{\nu}_1 \sigma_\varkappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\bar{\nu}_\varkappa \sigma_1}, & \ldots, & A_{\bar{\nu}_\varkappa \sigma_\varkappa} \end{matrix} \right|, \qquad \text{(c)}$$

kde se sčítá přese všech $\binom{n}{\varkappa}$ kombinací $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varkappa$ čísel $1, 2, \ldots, n$.

Podobně najdeme pro druhý z determinantů vztahu (b) výraz

$$\Sigma \left| \begin{matrix} y_{\bar{\nu}_1 \lambda_1}, & \ldots, & y_{\bar{\nu}_1 \lambda_\varkappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{\bar{\nu}_\varkappa \lambda_1}, & \ldots, & y_{\bar{\nu}_\varkappa \lambda_\varkappa} \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} T_{\varrho_1 \lambda_1}, & \ldots, & T_{\varrho_1 \lambda_\varkappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{\varrho_\varkappa \lambda_1}, & \ldots, & T_{\varrho_\varkappa \lambda_\varkappa} \end{matrix} \right|, \qquad \text{(d)}$$

při čemž se sčítání vztahuje na všechny $\binom{r}{\varkappa}$ kombinace $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varkappa$ $\varkappa$-té třídy z elementů $1, 2, \ldots, r$.

Uvažme ještě, že jsou determinanty, vystupující jako druhé faktory ve výrazech (c) a (d), reciproké k jistým minorům determinantů A, T a že se proto dají vyjádřiti ve tvaru

$$A^{\varkappa-1} \cdot C_{\binom{\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_\varkappa}{\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa}} \quad \text{resp.} \quad T^{\varkappa-1} \cdot D_{\binom{\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa}{\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa}};$$

při tom je $C_{\binom{\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_\varkappa}{\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa}}$ doplňkem onoho subdeterminantu z A, jehož prvky jsou vzaty z řádků s pořadovými čísly $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_\varkappa$ a ze sloupců o pořadových číslech $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varkappa$. Podobný význam má determinant $D_{\binom{\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa}{\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa}}$ vůči determinantu z T.

Dosadíme-li tyto všechny hodnoty a výsledky do relace (b), vychází nám tento vzorec pro výpočet $U \,.\, \overline{R}_r$:

$$U \,.\, \overline{R}_r = \Sigma(-1)^{\varkappa} A^{n-1} T^{r-1} . \left[\Sigma C_{\binom{\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_\varkappa}{\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa}} . \begin{vmatrix} x_{\varrho_1\sigma_1}, \ldots, x_{\varrho_1\sigma_\varkappa} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\varrho_\varkappa\sigma_1}, \ldots, x_{\varrho_\varkappa\sigma_\varkappa} \end{vmatrix} .\right.$$

$$\left. . \Sigma D_{\binom{\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa}{\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa}} . \begin{vmatrix} y_{\bar{\nu}_1\lambda_1}, \ldots, y_{\bar{\nu}_1\lambda_\varkappa} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{\bar{\nu}_\varkappa\lambda_1}, \ldots, y_{\bar{\nu}_\varkappa\lambda_\varkappa} \end{vmatrix} \right].$$

Protože však je podle theorie determinantů reciprokých $U = A^{n-1}T^{r-1}$, dostáváme pro výpočet obecně vroubeného determinantu $\overline{R}_r$ tento definitivní vzorec:

$$\overline{R}_r = \Sigma(-1)^{\varkappa} . \left[\Sigma C_{\binom{\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_\varkappa}{\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa}} \begin{vmatrix} x_{\varrho_1\sigma_1}, \ldots, x_{\varrho_1\sigma_\varkappa} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\varrho_\varkappa\sigma_1}, \ldots, x_{\varrho_\varkappa\sigma_\varkappa} \end{vmatrix} .\right.$$

$$\left. . \Sigma D_{\binom{\varrho_1, \ldots, \varrho_\varkappa}{\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa}} \begin{vmatrix} y_{\bar{\nu}_1\lambda_1}, \ldots, y_{\bar{\nu}_1\lambda_\varkappa} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{\bar{\nu}_\varkappa\lambda_1}, \ldots, y_{\bar{\nu}_\varkappa\lambda_\varkappa} \end{vmatrix} \right]. \qquad (52)$$

Rozuměti jest mu takto: Poslední součet se provádí přes všechny kombinace $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varkappa$ z elementů $1, 2, \ldots, r$, takže má celkem $\binom{r}{\varkappa}$ sčítanců; prostřední součet jde přes všech $\binom{n}{\varkappa}$ kombinací $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varkappa$ čísel $1, 2, \ldots, n$. Má tedy výraz v lomené závorce celkem $\binom{r}{\varkappa}\binom{n}{\varkappa}$ sčítanců, z nichž každý má ještě volné indexy (t. j. takové, přes něž dosud nebylo sčítáno) $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_\varkappa$ a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\varkappa$, jež jsou resp. libovolná kombinace $\varkappa$-té třídy z prvků $1, 2,, \ldots, n$ a z prvků $1, 2, \ldots, r$. Přes všechny tyto kombinace jest pak nutno prováděti prvý součet, který tedy má při daném $\varkappa$ celkem $\left[\binom{n}{\varkappa}\binom{r}{\varkappa}\right]^2$ členů. Na konec pak všechny tyto výsledky sečteme pro $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$

Obšírně se zabýval theorií vroubených determinantů *Arnaldi* (Giorn. di Battaglini, 1896).

m) *Determinant*

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11}, & a_{12} + \lambda b_{12}, & \ldots, & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ a_{21} + \lambda b_{21}, & a_{22} + \lambda b_{22}, & \ldots, & a_{2n} + \lambda b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + \lambda b_{n1}, & a_{n2} + \lambda b_{n2}, & \ldots, & a_{nn} + \lambda b_{nn} \end{vmatrix} \qquad (53)$$

je polynomem n-tého stupně v λ a píšeme jej tedy ve tvaru

$$D(\lambda) = I_0 + I_1\lambda + I_2\lambda^2 + \ldots + I_{n-1}\lambda^{n-1} + I_n\lambda^n. \qquad (54)$$

Koeficient I_ν dostaneme zřejmě tak, že v ν sloupcích determinantu $D(\lambda)$ ponecháme jen druhé sčítance, kdežto ve zbývajících $n - \nu$ sloupcích jen sčítance první. To je možno provésti celkem $\binom{n}{\nu}$ způsoby a dospíváme tím tedy k $\binom{n}{\nu}$ determinantům, které sečteny dají právě člen $I_\nu\lambda^\nu$. Tak je na př. $I_0 = A$, $I_1 = \sum\limits_{\varrho=1}^{n} A_\varrho$, $I_2 = \Sigma A_{\varrho\sigma}, \ldots, I_n = B$, při čemž A_ϱ je determinant vzniklý z A tak, že v něm nahradíme ϱ-tý sloupec čísly $b_{1\varrho}, b_{2\varrho}, \ldots, b_{n\varrho}$; $A_{\varrho\sigma}$ je determinant vzniklý z A nahrazením elementů sloupců ϱ-tého a σ-tého těmi, jež má v těchto sloupcích determinant B atd. Ve vzorci (54) se tedy vyskytuje celkem

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

n-řadových determinantů, odvozených z prvků determinantů A, B.

n) *Determinant*

$$D(t) = \begin{vmatrix} a_{11} + t, & a_{12} + t, & \ldots, & a_{1n} + t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + t, & a_{n2} + t, & \ldots, & a_{nn} + t \end{vmatrix} \qquad (55)$$

je lineární funkcí t, jak se snadno přesvědčíme odečtením prvého sloupce ode všech následujících. Je tedy

$$D(t) = \alpha + \beta t.$$

Pro $t = 0$ máme ihned $\alpha = D(0) = A$; konstanta β je pak zřejmě $\beta = \frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}$. Podle věty 12., vzorce (15) však máme

$$\frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} + t, & a_{12} + t, \dots, & a_{1n} + t \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{i-1,1} + t, & a_{i-1,2} + t, \dots, & a_{i-1,n} + t \\ 1, & 1, & \dots, 1 \\ a_{i+1,1} + t, & a_{i+1,2} + t, \dots, & a_{i+1,n} + t \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} + t, & a_{n2} + t, \dots, & a_{nn} + t \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \dots, & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}, \dots, & a_{i-1,n} \\ 1, & 1, & \dots, 1 \\ a_{i+1,1}, & a_{i+1,2}, \dots, & a_{i+1,n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\right) = \sum_{i,k} A_{ik}.$$

Máme tudíž výsledek

$$D(t) = A + t\sum_{i,k} A_{ik}. \tag{55,1}$$

Poznámky. 1. Determinant (55) můžeme pokládati za speciální případ $D(\lambda)$ — t. j. determinantu (53) — a napsati pak jeho hodnotu ihned podle vzorce (54). Učiňte tak!

2. Pro $a_{ik} = 0$, $i \neq k$, je $A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, $A_{ik} = 0$, $A_{ii} = \frac{A}{a_{ii}}$, takže v tomto speciálním případě jest

$$D(t) = ta_{11}a_{22} \dots a_{nn}\left(\frac{1}{t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}}\right). \tag{55,2}$$

Jsou-li zvláště všechna $a_{ii} = a$, máme

$$D(t) = a^{n-1}(a + nt). \tag{55,3}$$

p) *Determinant n-řadový*

$$D_n(x;\, a, b) = \begin{vmatrix} x, & a, & a, & \ldots, & a, & a \\ b, & x, & a, & \ldots, & a, & a \\ b, & b, & x, & \ldots, & a, & a \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b, & b, & b, & \ldots, & x, & a \\ b, & b, & b, & \ldots, & b, & x \end{vmatrix} \qquad (56)$$

upravíme odečtením každého sloupce od následujícího na tvar

$$D_n(x;\, a, b) = \begin{vmatrix} x, & a-x, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ b, & x-b, & a-x, & \ldots, 0, & 0 \\ b, & 0, & x-b, & \ldots, 0, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ b, & 0, & 0, & \ldots, x-b, & a-x \\ b, & 0, & 0, & \ldots, 0, & x-b \end{vmatrix};$$

rozvedením podle prvků prvého řádku dostaneme

$$D_n(x;\, a, b) = x \,.\begin{vmatrix} x-b, & a-x, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ 0, & x-b, & a-x, & \ldots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & x-b, & \ldots, 0, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, x-b, & a-x \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, 0, & x-b \end{vmatrix} +$$

$$+ \, b(x-a)\begin{vmatrix} 1, & a-x, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ 1, & x-b, & a-x, & \ldots, 0, & 0 \\ 1, & 0, & x-b, & \ldots, 0, & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1, & 0, & 0, & \ldots, x-b, & a-x \\ 1, & 0, & 0, & \ldots, 0, & x-b \end{vmatrix},$$

kde oba determinanty jsou $(n-1)$-řadové. První má hodnotu $(x-b)^{n-1}$, druhý pak označíme znakem Δ_{n-1} a odvodíme pro něj rekurentní relaci. Rozvedením podle první řádky najdeme ihned

$$\Delta_m = (x - b)^{m-1} + (x - a) \, . \, \Delta_{m-1}, \tag{57}$$

z čehož vypočteme

$$\Delta_m = \sum_{\mu=0}^{m-1} (x - a)^{\mu} (x - b)^{m-\mu-1}. \tag{57,1}$$

Užitím těchto výsledků dostáváme pak definitivní výraz pro hodnotu determinantu (56):

$$D_n(x; a, b) = x(x - b)^{n-1} + b(x - a) \, . \\ . \sum_{\nu=0}^{n-2} (x - a)^{\nu} (x - b)^{n-\nu-2}. \tag{56,1}$$

Často bývají uváděny speciální případy právě řešeného úkolu. Tak na př. jest

$$D_n(x; a, a) = [x + (n - 1) a] (x - a)^{n-1},$$

$$D_n(0; a, b) = (-1)^{n-1} ab \sum_{\nu=0}^{n-2} a^{\nu} b^{n-\nu-2} \text{ a pod.}$$

Poznámky. 1. Jistým zobecněním případu (56) je determinant

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = \begin{vmatrix} x_1, & a, & a, & \ldots, a, & a \\ b, & x_2 & a, & \ldots, a, & a \\ b, & b, & x_3, & \ldots, a, & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b, & b, & b, & \ldots, x_{n-1}, & a \\ b, & b, & b, & \ldots, b, & x_n \end{vmatrix} . \tag{58}$$

Zcela analogickým způsobem jako u (56) nacházíme vzorec

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = x_1 B_2 + b \sum_{\varrho=1}^{n-1} A_{\varrho} B_{\varrho+2}; \; A_{\varrho} = \prod_{\nu=1}^{\varrho} (x_{\nu} - a),$$

$$B_{\sigma} = \prod_{\tau=\sigma}^{n} (x_{\tau} - b), \; B_{n+1} = 1. \tag{58,1}$$

2. Determinant

$$E_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; a, b) = \begin{vmatrix} a, & a, & a, & a, \ldots, a, & a, & a \\ x_1, & a, & a, & a, \ldots, a, & a, & a \\ b, & x_2, & a, & a, \ldots, a, & a, & a \\ b, & b, & x_3, & a, \ldots, a, & a, & a \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ b, & b, & b, & b, \ldots, a, & a, & a \\ b, & b, & b, & b, \ldots, x_{n-2}, & a, & a \\ b, & b, & b, & b, \ldots, b, & x_{n-1}, & a \end{vmatrix} \tag{59}$$

rozvedeme podle elementů prvního sloupce a dostaneme

$$E_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; a, b) =$$
$$= (a - x_1)\, E_{n-1}(x_2, \ldots, x_{n-1}; a, b), \tag{59,1}$$

takže bude

$$E_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; a, b) =$$
$$= a(a - x_1)(a - x_2) \ldots (a - x_{n-1}). \tag{59,2}$$

3. Determinant

$$\overline{D}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = \begin{vmatrix} a, & a, & \ldots, a, & a, & x_1 \\ a, & a, & \ldots, a, & x_2, & b \\ a, & a, & \ldots, x_3, & b, & b \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a, & x_{n-1}, & \ldots, b, & b, & b \\ x_n, & b, & \ldots, b, & b, & b \end{vmatrix} \tag{60}$$

vznikne z determinantu (58) takto: Nejprve vyměníme v (58) poslední sloupec postupně se všemi předchozími, až se dostane na místo prvé, t. j. celkem $n - 1$ výměn. V determinantu tak vzniklém vyměníme opět poslední sloupec se všemi předchozími, až se stane sloupcem druhým; celkem je to $n - 2$ výměn. Tak pokračujeme, až po celkovém počtu

$$(n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1 = \tfrac{1}{2}n(n - 1)$$

výměn dostaneme z $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b)$ právě determinant (60). Podle věty 3. tedy máme

$$\overline{D}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \,.\, D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b), \tag{60,1}$$

při čemž je $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; a, b)$ dáno vzorcem (58,1).

4. Hodnotu determinantu

$$I = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3, \ldots, n-1, & n \\ 2, & 3, & 4, \ldots, n & 1 \\ 3, & 4, & 5, \ldots, 1, & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1, & n, & 1, \ldots, n-3, & n-2 \\ n, & 1, & 2, \ldots, n-2, & n-1 \end{vmatrix} \tag{61}$$

najdeme takto: přičteme všechny sloupce k prvnímu; všechny prvky tohoto prvního sloupce budou pak míti tutéž hodnotu $\frac{1}{2}n(n+1)$, kterou z nich vytkneme. V determinantu takto vzniklém odečteme od každého řádku druhým počínajíce řádek předchozí a dostaneme determinant $\overline{D}_{n-1}(1-n, 1-n, \ldots, 1-n; 1, 1)$, jehož hodnota je podle (60,1) rovna $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}D_{n-1}(1-n, 1-n, \ldots, 1-n; 1, 1)$. Ze vzorce (58,1) však nacházíme

$$D_{n-1}(1-n, 1-n, \ldots, 1-n; 1, 1) = (-1)^{n-1} \,.\, n^{n-2},$$

takže konečně bude

$$I = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tfrac{1}{2}(n+1)\, n^{n-1}. \tag{61,1}$$

q) *Determinant Baltzerův*

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \ldots, & a_{1,2n-1}, & a_{1,2n} \\ -a_{12}, & a_{11}, & -a_{14}, & a_{13}, & \ldots, & -a_{1,2n}, & a_{1,2n-1} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \ldots, & a_{2,2n-1}, & a_{2,2n} \\ -a_{22}, & a_{21}, & -a_{24}, & a_{23}, & \ldots, & -a_{2,2n}, & a_{2,2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & a_{n4}, & \ldots, & a_{n,2n-1}, & a_{n,2n} \\ -a_{n2}, & a_{n1}, & -a_{n4}, & a_{n3}, & \ldots, & -a_{n,2n}, & a_{n,2n-1} \end{vmatrix}, \tag{62}$$

v němž jsou a_{ik} čísla reálná, upravíme tak, že sloupec 2ν-tý násobený imaginární jednotkou i přičteme k předchozímu a pak od řádku 2ν-tého odečteme i-násobný řádek $(2\nu - 1)$-vý. To učiníme postupně pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$ a dostaneme

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11} + \mathrm{i}a_{12}, & a_{12}, & a_{13} + \mathrm{i}a_{14}, & a_{14}, & \ldots \\ 0, & a_{11} - \mathrm{i}a_{12}, & 0, & a_{13} - \mathrm{i}a_{14}, & \ldots \\ a_{21} + \mathrm{i}a_{22}, & a_{22}, & a_{23} + \mathrm{i}a_{24}, & a_{24}, & \ldots \\ 0, & a_{21} - \mathrm{i}a_{22}, & 0, & a_{23} - \mathrm{i}a_{24}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix};$$

rozvedením podle řádků 2-ho, 4-ho, ..., $2n$-ho vyjde

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11} + \mathrm{i}a_{12}, & a_{13} + \mathrm{i}a_{14}, & \ldots, & a_{1,2n-1} + \mathrm{i}a_{1,2n} \\ a_{21} + \mathrm{i}a_{22}, & a_{23} + \mathrm{i}a_{24}, & \ldots, & a_{2,2n-1} + \mathrm{i}a_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + \mathrm{i}a_{n2}, & a_{n3} + \mathrm{i}a_{n4}, & \ldots, & a_{n,2n-1} + \mathrm{i}a_{n,2n} \end{vmatrix} .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} a_{11} - \mathrm{i}a_{12}, & a_{13} - \mathrm{i}a_{14}, & \ldots \\ a_{21} - \mathrm{i}a_{22}, & a_{23} - \mathrm{i}a_{24}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} - \mathrm{i}a_{n2}, & a_{n3} - \mathrm{i}a_{n4}, & \ldots \end{vmatrix},$$

takže je B_n součinem dvou čísel komplexně sdružených $M_n + \mathrm{i}N_n$ (tak značíme hodnotu prvého determinantu) a $M_n - \mathrm{i}N_n$, tedy:

$$B_n = M_n^2 + N_n^2, \tag{62,1}$$

kde M_n a N_n jsou dána vztahem

$$M_n + \mathrm{i}N_n = \begin{vmatrix} a_{11} + \mathrm{i}a_{12}, & a_{13} + \mathrm{i}a_{14}, & \ldots, & a_{1,2n-1} + \mathrm{i}a_{1,2n} \\ a_{21} + \mathrm{i}a_{22}, & a_{23} + \mathrm{i}a_{24}, & \ldots, & a_{2,2n-1} + \mathrm{i}a_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + \mathrm{i}a_{n2}, & a_{n3} + \mathrm{i}a_{n4}, & \ldots, & a_{n,2n-1} + \mathrm{i}a_{n,2n} \end{vmatrix}. \tag{62,2}$$

Příklad. Provedeme zde výpočet velmi důležitý v technické praxi. Ze čtyř daných funkcí proměnné x ($\sinh x$, $\cosh x$ značí hyperbolické funkce)

$$y_1 = \cosh x \cos x, \quad y_2 = \cosh x \sin x,$$
$$y_3 = \sinh x \cos x, \quad y_4 = \sinh x \sin x$$

a z jejich derivací vytvořme determinant tak, že jeho prvá řádka obsahuje tyto funkce v pořadí právě napsaném, ve druhé řádce stojí první derivace oněch funkcí, třetí řádka obsahuje druhé derivace a poslední pak třetí derivace daných čtyř funkcí. Determinant takto sestavený se jmenuje Wronskiho determinantem funkcí y_1, y_2, y_3, y_4 a dostáváme pro něj

$$W = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ -y_2 + y_3, & y_1 + y_4, & y_1 - y_4, & y_2 + y_3 \\ -2y_4, & 2y_3, & -2y_2, & 2y_1 \\ -2(y_2 + y_3), & 2(y_1 - y_4), & -2(y_1 + y_4), & 2(-y_2 + y_3) \end{vmatrix},$$

t. j. po jednoduchých úpravách

$$W = 8 \, . \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ -y_2, & y_1, & -y_4, & y_3 \\ y_4, & -y_3, & y_2, & -y_1 \\ y_3, & y_4, & y_1, & y_2 \end{vmatrix}.$$

Determinant, který tu figuruje, je jednoduchým případem determinantu (62). Podle vzorců (62,1) a (62,2) dostaneme po malém a snadném výpočtu pro něj hodnotu 1, takže je $W = 8$.

Poznámka. Determinanty typu (62) počítal *Baltzer* (Gött. Nachr., 1887).

r) *Determinant*

$$F(c, n) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \binom{c+n-1}{1}, & \binom{c+n}{1}, & \ldots, & \binom{c+2n-2}{1} \\ \binom{c+n}{2}, & \binom{c+n+1}{2}, & \ldots, & \binom{c+2n-1}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{c+2n-4}{n-2}, & \binom{c+2n-3}{n-2}, & \ldots, & \binom{c+3n-5}{n-2} \\ \binom{c+2n-3}{n-1}, & \binom{c+2n-2}{n-1}, & \ldots, & \binom{c+3n-4}{n-1} \end{vmatrix} \tag{63}$$

upravíme — užívajíce vzorce $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ — tak, že od každého sloupce (vyjma první) odčítáme sloupec předcházející. Dostáváme

$$F(c, n) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, 0 \\ \binom{c+n-1}{1}, & 1, & \ldots, 1 \\ \binom{c+n}{2}, & \binom{c+n}{1}, & \ldots, \binom{c+2n-2}{1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \binom{c+2n-4}{n-2}, & \binom{c+2n-4}{n-3}, & \ldots, \binom{c+3n-6}{n-3} \\ \binom{c+2n-3}{n-1}, & \binom{c+2n-3}{n-2}, & \ldots, \binom{c+3n-5}{n-2} \end{vmatrix}$$

Abychom se mohli dále pohodlně vyjadřovati, označíme znakem $\Phi_{\nu\nu}$ subdeterminant přidružený v determinantu $F(c, n)$ tomu jeho minoru, který je složen ze společných elementů posledních ν řádků a prvých ν sloupců determinantu $F(c, n)$. Poslední rovnici lze pak psáti ve tvaru

$$F(c, n) = \Phi_{11}.$$

S minorem Φ_{11} naložíme stejně jako prve s determinantem $F(c, n)$ a najdeme $\Phi_{11} = \Phi_{22}$, takže jest $F(c, n) = \Phi_{22}$. Na Φ_{22} aplikujeme tentýž postup a dostaneme $\Phi_{22} = \Phi_{33}$; nakonec pak nalezneme $F(c, n) = \Phi_{n-1,n-1}$, z čehož plyne konečný výsledek

$$F(c, n) = 1. \tag{63,1}$$

Doporučuji čtenáři provésti naznačený výpočet podrobně použitím úplné indukce.

Poznámka. Ve sbírkách různých matematických úloh se často vyskytuje speciální případ determinantu (63), totiž determinant $F(2-n, n)$. Vznikne otočením Pascalova trojúhelníku z kombinačních čísel a má ovšem také hodnotu 1.

s) *Determinant*

$$U_r = \begin{vmatrix} \frac{1}{(m+r)!}, & \frac{1}{(m+r-1)!}, & \dots, & \frac{1}{m!} \\ \frac{1}{(m+r+1)!}, & \frac{1}{(m+r)!}, & \dots, & \frac{1}{(m+1)!} \\ \frac{1}{(m+r+2)!}, & \frac{1}{(m+r+1)!}, & \dots, & \frac{1}{(m+2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(m+2r-1)!}, & \frac{1}{(m+2r-2)!}, & \dots, & \frac{1}{(m+r-1)!} \\ \frac{1}{(m+2r)!}, & \frac{1}{(m+2r-1)!}, & \dots, & \frac{1}{(m+r)!} \end{vmatrix}, \tag{64}$$

kde m, r jsou čísla celá nezáporná, upravíme tím, že prvý řádek násobíme výrazem $(m + r)!$, druhý $(m + r + 1)!, \dots,$ až poslední hodnotou $(m + 2r)!$ Determinant A_r, který tím dostaneme, je tedy s U_r vázán vztahem

$$A_r = (m + r)!\,(m + r + 1)! \dots (m + 2r)!\; U_r$$

a má — píšeme-li místo $m + r$ symbol α — tvar

$$A_r = \begin{vmatrix} 1, & \alpha, & \alpha(\alpha-1), & \dots, & a_0 \\ 1, & \alpha+1, & (\alpha+1)\,\alpha, & \dots, & a_1 \\ 1, & \alpha+2, & (\alpha+2)(\alpha+1), & \dots, & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & \alpha+r-1, & (\alpha+r-1)(\alpha+r-2), & \dots, & a_{r-1} \\ 1, & \alpha+r, & (\alpha+r)(\alpha+r-1), & \dots, & a_r \end{vmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-r+1) \\ a_1 &= (\alpha+1)\,\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-r+2) \\ a_2 &= (\alpha+2)(\alpha+1)\,\alpha \dots (\alpha-r+3) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r-1} &= (\alpha+r-1)(\alpha+r-2) \dots \alpha \\ a_r &= (\alpha+r)(\alpha+r-1) \dots (\alpha+1). \end{aligned}$$

Odečteme-li od každé řádky, druhou počínajíce, vždy řádku předchozí, najdeme pro determinant A_r vztah $A_r = r!A_{r-1}$, takže lze psáti ihned

$$A_r = 1!2!3! \dots (r-1)!\, r!$$

a pro determinant U_r máme hodnotu

$$U_r = \frac{0! \quad 1! \quad \dots \quad r!}{(m+r)!\,(m+r+1)! \dots (m+2r)!}. \tag{64,1}$$

Poznámka. Determinant Zeipelův

$$Z(n, p; r) = \begin{vmatrix} \binom{n}{p}, & \binom{n}{p+1}, \dots, & \binom{n}{p+r} \\ \binom{n+1}{p}, & \binom{n+1}{p+1}, \dots, & \binom{n+1}{p+r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \binom{n+r}{p}, & \binom{n+r}{p+1}, \dots, & \binom{n+r}{p+r} \end{vmatrix} \tag{65}$$

se redukuje vytčením $n!$ z prvé, $(n+1)!$ ze druhé, ..., až $(n+r)!$ z poslední řádky a pak $\frac{1}{p!}$ z prvého, $\frac{1}{(p+1)!}$ z druhého, ..., $\frac{1}{(p+r)!}$ z posledního sloupce na tvar

$$Z(n, p; r) = \frac{n!(n+1)! \dots (n+r)!}{p!(p+1)! \dots (p+r)!} \, .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{(n-p)!}, & \frac{1}{(n-p-1)!}, & \dots, \frac{1}{(n-p-r)!} \\ \frac{1}{(n-p+1)!}, & \frac{1}{(n-p)!}, & \dots, \frac{1}{(n-p-r+1)!} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-p+r)!}, & \frac{1}{(n-p+r-1)!}, & \dots, \frac{1}{(n-p)!} \end{vmatrix} .$$

Determinant zde vystupující však dostaneme z determinantu (64), klademe-li v něm $n - p - r$ místo m. Podle vzorce (64,1) máme tedy

$$Z(n, p; r) = \frac{(n+r)!\,(n+r-1)!\dots n!}{(p+r)!\,(p+r-1)!\dots p!}\,.$$

$$\cdot\frac{r!\qquad (r-1)!\qquad \dots\qquad 0!}{(n-p+r)!\,(n-p+r-1)!\dots(n-p)!}\,. \tag{65,1}$$

Tomuto výrazu pro hodnotu Zeipelova determinantu lze dáti ještě jiný, v jistém směru přehlednější, tvar. Násobíme-li jej součinem zlomků

$$\frac{(n-1)!\,(n-2)!\dots(n-p+r+1)!}{(p-1)!\,(p-2)!\dots\qquad (r+1)!}\,,$$

$$\frac{(p-1)!\,(p-2)!\dots\qquad (r+1)!}{(n-1)!\,(n-2)!\dots(n-p+r+1)!}\,,$$

který je zřejmě roven 1, dostaneme

$$Z(n, p; r) = \frac{(n+r)!\,(n+r-1)!\dots(n-p+r+1)!}{(p+r)!\,(p+r-1)!\dots\qquad (r+1)!}\,.$$

$$\cdot\frac{(p-1)!\,(p-2)!\dots\qquad 1!\qquad 0!}{(n-1)!\,(n-2)!\dots(n-p+1)!\,(n-p)!}\,,$$

což lze psáti ve tvaru

$$Z(n, p; r) = \frac{\binom{n+r}{r+1}\binom{n+r-1}{r+1}\dots\binom{n+r-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}\binom{p+r-1}{r+1}\dots\binom{r+1}{r+1}}\,. \tag{65,2}$$

t) *Determinant Sternův*

$$S_n = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, 1 \\ \binom{x_1}{1}, & \binom{x_2}{1}, & \dots, \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2}, & \binom{x_2}{2}, & \dots, \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-2}, & \binom{x_2}{n-2}, & \dots, \binom{x_n}{n-2} \\ \binom{x_1}{n-1}, & \binom{x_2}{n-1}, & \dots, \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} \tag{66}$$

upravíme tak, že třetí řádek násobíme číslem 2!, čtvrtý číslem 3! ..., až poslední hodnotou $(n - 1)!$ Dostáváme tím Sternův determinant (66) vázaný vztahem

$$1!\,2!\,3! \dots (n-1)!\, S_n =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, 1 \\ x_1, & x_2, & \dots, x_n \\ x_1(x_1 - 1), & x_2(x_2 - 1), & \dots, x_n(x_n - 1) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \dots, a_{n-1,n} \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

při čemž

$$\begin{aligned} a_{n-1,1} &= x_1(x_1 - 1)(x_1 - 2) \dots (x_1 - n + 3), \\ a_{n-1,2} &= x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2) \dots (x_2 - n + 3), \\ &\dots \\ a_{n-1,n} &= x_n(x_n - 1)(x_n - 2) \dots (x_n - n + 3), \\ a_{n1} &= x_1(x_1 - 1)(x_1 - 2) \dots (x_1 - n + 2), \\ a_{n2} &= x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2) \dots (x_2 - n + 2), \\ &\dots \\ a_{nn} &= x_n(x_n - 1)(x_n - 2) \dots (x_n - n + 2). \end{aligned}$$

Protože však platí

$$(x-1)(x-2)\dots(x-m) = \\ = x^m + a_1^{(m)}x^{m-1} + a_2^{(m)}x^{m-2} + \dots + \\ + a_{m-1}^{(m)}x + a_m^{(m)}, \tag{a}$$

kde $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \dots, a_{m-1}^{(m)}, a_m^{(m)}$ jsou t. zv. základní symetrické funkce čísel $1, 2, \dots, m-1, m$ (na jejich přesném tvaru pro naše účely nezáleží), lze determinant pro $1!\,2!\,3!\dots(n-1)!S_n$ psáti ve tvaru

$$x_1x_2\dots x_n \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1}, & \frac{1}{x_2}, & \dots, & \frac{1}{x_n} \\ 1, & 1, & \dots, & 1 \\ f_1(x_1), & f_1(x_2), & \dots, & f_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-3}(x_1), & f_{n-3}(x_2), & \dots, & f_{n-3}(x_n) \\ f_{n-2}(x_1), & f_{n-2}(x_2), & \dots, & f_{n-2}(x_n) \end{vmatrix}, \tag{b}$$

$$f_m(x) = x^m + a_1^{(m)}x^{m-1} + \dots + a_m^{(m)}.$$

Nyní však je možno vyjádřiti $f_m(x)$ jako součet z mocniny x^m a jisté lineární kombinace polynomů $f_{m-1}(x)$, $f_{m-2}(x)$, $\dots, f_1(x)$, 1 (přesvědčte se o tom pro $m = 1, 2, 3, 4$ pomocí methody neurčitých součinitelů; obecně bude tato věc provedena ve druhé části tohoto spisu jako příklad na řešení soustavy lineárních rovnic)

$$f_m(x) = x^m + c_1f_{m-1}(x) + c_2f_{m-2}(x) + \dots + \\ + c_{m-1}f_1(x) + c_m. \tag{c}$$

Odečteme-li tedy od posledního řádku determinantu posléze napsaného vhodnou lineární kombinaci všech řádků předchozích druhým počínajíce, nabude tento poslední řádek tvaru $x_1^{n-2}, x_2^{n-2}, \dots, x_n^{n-2}$. Podobným způsobem lze řádek předposlední změniti ve tvar $x_1^{n-3}, x_2^{n-3}, \dots, x_n^{n-3}$ atd., takže nakonec dostáváme

$$x_1 x_2 \ldots x_n \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1}, & \frac{1}{x_2}, & \ldots, \frac{1}{x_n} \\ 1, & 1, & \ldots, 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots, x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-3}, & x_2^{n-3}, & \ldots, x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2}, & x_2^{n-2}, & \ldots, x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots, x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & \ldots, x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-2}, & x_2^{n-2}, & \ldots, x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots, x_n^{n-1} \end{vmatrix} = V_n,$$

kde je V_n známý determinant Vandermondeův, jehož hodnota je stanovena vzorcem (23′).

Pro výpočet Sternova determinantu tak dostáváme vztah

$$S_n = \frac{V_n}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}, \tag{66′}$$

čili v jiném tvaru $S_n = \dfrac{V_n}{1^{n-1}\,.\,2^{n-2}\,.\,3^{n-3}\ldots(n-1)}$. (66″)

Poznámka. Determinant Zeipelův (65) přechází pro $p = 0$ přímo v determinant (66), jehož hodnota je v tomto zvláštním případě 1. Totéž ovšem vychází ze vzorce (65,1), kdežto formule (65,2) se zde nedá bezprostředně aplikovati (nechceme-li se zvláště zmiňovati o jejím jmenovateli).

u) *Determinant E. Pascala*

$$R_n = \begin{vmatrix} a_{10}, & -t, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ a_{20}, & a_{21}, & -t, & \ldots, 0, & 0 \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & \ldots, 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,0}, & a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \ldots, a_{n-1,n-2}, & -t \\ a_{n0}, & a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, a_{n,n-2}, & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \tag{67}$$

rozvedeme podle elementů posledního sloupce a najdeme

$$R_n = a_{n,n-1}R_{n-1} + t\Delta_{n-1}(a_{10}, a_{21}, \ldots, a_{n-2,n-3}, a_{n,n-2}),$$

při čemž je $\Delta_{n-1}(a_{10}, a_{21}, \ldots, a_{n-2,n-3}, a_{n,n-2})$ determinant analogického tvaru jako R_n, pouze je stavěn z jiných prvků (hlavní úhlopříčka je připsána v závorce). Rozvedeme jej opět podle elementů posledního sloupce, čímž nacházíme

$$\Delta_{n-1}(a_{10}, a_{21}, \ldots, a_{n-2,n-3}, a_{n,n-2}) =$$
$$= a_{n,n-2}R_{n-2} + t\Delta_{n-2}(a_{10}, a_{21}, \ldots, a_{n-3,n-4}, a_{n,n-3}).$$

Takto pokračujíce získáme pro determinant R_n konečně rekurentní relaci

$$R_n = a_{n,n-1}R_{n-1} + ta_{n,n-2}R_{n-2} + t^2a_{n,n-3}R_{n-3} + \\ + \ldots + t^{n-3}a_{n2}R_2 + t^{n-2}a_{n1}R_1 + t^{n-1}a_{n0}. \qquad (67')$$

Poznámky. Klademe-li ve vzorci (67') $a_{r\varrho} = \binom{2r}{2\varrho}$, $r = 1, 2, \ldots, n$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ a $t = -1$, dostaneme

$$0 = R_n - \binom{2n}{2}R_{n-1} + \binom{2n}{4}R_{n-2} - \binom{2n}{6}R_{n-3} + \ldots + \\ + (-1)^{n-2}\binom{2n}{2n-4}R_2 + (-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-2}R_1 + \\ + (-1)^n R_0, \qquad (67'')$$

kde položíme $R_0 = 1$. To však je rekurentní formule pro výpočet *Eulerových* čísel $E_0, E_1, E_2, \ldots$, jež se vyskytují na př. při rozvoji funkce $\sec x$ v potenční řadu. Lze tedy *Eulerova* čísla vyjádřiti vzorcem

$$E_n = \begin{vmatrix} \binom{2}{0}, & 1, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ \binom{4}{0}, & \binom{4}{2}, & 1, & \ldots, 0, & 0 \\ \binom{6}{0}, & \binom{6}{2}, & \binom{6}{4}, & \ldots, 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{2n}{0}, & \binom{2n}{2}, & \binom{2n}{4}, & \ldots, \binom{2n}{2n-4}, & \binom{2n}{2n-2} \end{vmatrix}, \quad E_0 = 1. \qquad (67''')$$

Také ostatní známá čísla analysy (na př. *Bernoulliova)*, vystupující hlavně jako součinitelé při rozvojích funkcí goniometrických a hyperbolických v potenční řady, lze vyjádřiti analogicky jako *Eulerova* pomocí determinantů Pascalova typu.

Podrobně se těmito determinanty zabýval *E. Pascal* (Rend. Ist. Lomb., 1907).

v) *Determinant Smithův.*

Jako poslední příklad uvedeme determinant poněkud zvláštního charakteru, jehož elementy jsou konstruovány, smíme-li se tak vyjádřiti, číselně theoreticky. Je to symetrický determinant

$$S_n = \begin{vmatrix} (1,1), & (1,2), & \ldots, & (1,n) \\ (2,1), & (2,2), & \ldots, & (2,n) \\ (3,1), & (3,2), & \ldots, & (3,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n,1), & (n,2), & \ldots, & (n,n) \end{vmatrix}, \qquad (68)$$

kde (k, l) značí největší společný dělitel (míru) čísel k, l.

Abychom určili hodnotu determinantu S_n, musíme uvésti několik poznatků charakteru číselně theoretického.

Eulerovu číselně theoretickou funkci definujeme tak, že ke každému celému číslu $m \geq 1$ přiřadíme jako funkční hodnotu $\varphi(m)$ počet čísel z řady $1, 2, 3, \ldots, m - 1, m$, jež jsou s číslem m nesoudělná. Je tedy na př. $\varphi(6) = 2$, $\varphi(p) = p - 1$, je-li p prvočíslem. Pro $m \leq 0$, nebo m nikoli celá není Eulerova funkce definována. Hodnotu $\varphi(m)$ lze při daném m vypočísti; to jest ovšem úkol, který zde řešit nebudeme, už z toho důvodu, že toho v dalších vývodech nepotřebujeme (věc jest ostatně zcela jednoduchá).

Budiž nyní d libovolný dělitel čísla m; pak jsou v řadě $1, 2, 3, \ldots, m - 1, m$ čísla $d, 2d, 3d, \ldots, \frac{m}{d} \cdot d$ v počtu $\frac{m}{d}$ vesměs dělitelna d, žádné z ostatních čísel oné řady pak už tuto vlastnost nemá. Jen mezi čísly $d, 2d, 3d, \ldots, \frac{m}{d} \cdot d$ tedy najdeme ta, jež mají s m největší společný dělitel právě d. Kolik jich jest? Protože dvě čísla $\alpha d, \beta d$ (α, β celá kladná) mají největšího společného dělitele d, když a jen když jsou α, β nesoudělná, bude hledaný počet roven číslu $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$. Můžeme tedy vysloviti *větu*:

Je-li $m \geqq 1$ celé číslo a d nějaký jeho dělitel, je v řadě $1, 2, 3, \ldots, m-1, m$ celkem $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$ čísel, která mají s m největšího společného dělitele právě d.

Tak je na př. v řadě 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 celkem $\varphi(5) = 4$ čísla, která mají s číslem 15 největšího společného dělitele právě 3; jsou to čísla 3, 6, 9, 12.

Nechť jsou $d_1, d_2, \ldots, d_\mu$ všechny možné dělitele čísla m (počítáme v ně také čísla $1, m$). Vybereme-li z řady $1, 2, 3, \ldots, m-1, m$ jakožto první skupinu všech těch $\varphi\left(\frac{m}{d_1}\right)$ čísel, která mají s m největší společnou míru d_1, jakožto druhou skupinu $\varphi\left(\frac{m}{d_2}\right)$ čísel, z nichž každé má s m největšího společného dělitele d_2 atd., dostaneme celkem μ skupin. Protože pak má každé z čísel $1, 2, 3, \ldots, m-1, m$ s číslem m největší společnou míru buď d_1, nebo $d_2, \ldots$, jsou v těchto μ skupinách obsažena všechna čísla oné řady, takže jest

$$\varphi\left(\frac{m}{d_1}\right) + \varphi\left(\frac{m}{d_2}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{m}{d_\mu}\right) = m. \tag{69}$$

Číslo $m = 15$ má dělitele: $d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 5, d_4 = 15$, takže je μ rovno 4 a dostaneme 4 skupiny:

α) $\varphi(\frac{15}{1}) = \varphi(15) = 8$ čísel s 15 nesoudělných: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14;

β) $\varphi(\frac{15}{3}) = \varphi(5) = 4$ čísla mající s 15 nejv. spol. míru 3: 3, 6, 9, 12;

γ) $\varphi(\frac{15}{5}) = \varphi(3) \;\; = 2$ čísla mající s 15 nejv. spol. míru 5: 5, 10;

δ) $\varphi(\frac{15}{15}) = \varphi(1) \;\; = 1$ číslo mající s 15 nejv. spol. míru 15: 15.

Vzorci (69) je možno dáti ještě jednodušší tvar. Je-li totiž d dělitelem čísla m, je také číslo $\frac{m}{d}$ jeho dělitelem, jak patrno ze vztahu $m = d \cdot \frac{m}{d}$. Jsou tedy veličiny $\frac{m}{d_1}, \frac{m}{d_2}, \ldots, \frac{m}{d_\mu}$ různí dělitelé čísla m a ježto je jich μ, jsou to právě všichni dělitelé čísla m, t. j. ony veličiny jsou jen jistou permutací dělitelů $d_1, d_2, \ldots, d_\mu$, takže lze vztah (69) psáti pohodlněji

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_\mu) = m. \qquad (69')$$

Nyní už můžeme přikročiti k určení hodnoty determinantu (68). Utvořme si determinant $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, v němž je $a_{ik} = 0$, když i není dělitelno číslem k; v opačném případě pak budiž $a_{ik} = 1$. Tento determinant má tedy tvar

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ a_{31}, & a_{32}, & \ldots, & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ a_{21}, & 1, & 0, & \ldots, 0 \\ a_{31}, & a_{32}, & 1, & \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \ldots, 1 \end{vmatrix}$$

a hodnotu zřejmě rovnou 1. Násobme jej po řádcích determinantem

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{11}\varphi(1), & a_{12}\varphi(2), & \ldots, & a_{1n}\varphi(n) \\ a_{21}\varphi(1), & a_{22}\varphi(2), & \ldots, & a_{2n}\varphi(n) \\ a_{31}\varphi(1), & a_{32}\varphi(2), & \ldots, & a_{3n}\varphi(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\varphi(1), & a_{n2}\varphi(2), & \ldots, & a_{nn}\varphi(n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(1), & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ a_{21}\varphi(1), & \varphi(2), & 0, & \ldots, 0 \\ a_{31}\varphi(1), & a_{32}\varphi(2), & \varphi(3), & \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\varphi(1), & a_{n2}\varphi(2), & a_{n3}\varphi(3), & \ldots, \varphi(n) \end{vmatrix}$$

o hodnotě $\Phi = \varphi(1) \,.\, \varphi(2) \,.\, \varphi(3) \,.\, \ldots \,.\, \varphi(n)$. Dostaneme tak determinant $|c_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, jehož obecný prvek c_{ik} bude

$$c_{ik} = a_{i1}a_{k1}\varphi(1) + a_{i2}a_{k2}\varphi(2) + \ldots + a_{in}a_{kn}\varphi(n) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}a_{k\nu}\varphi(\nu).$$

Nyní však jest $a_{i\nu}a_{k\nu}$ rovno nule pro všechna ν, která nejsou současně obsažena jak v čísle i, tak i v čísle k. Je-li však ν společným dělitelem čísel i, k, je $a_{i\nu}a_{k\nu} = 1$, takže

$$c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}a_{k\nu}\varphi(\nu) = \sum \varphi(\nu),$$

při čemž druhý součet jde jen přes ta ν, která jsou společným dělitelem čísel i, k, t. j. přes ta ν, která jsou děliteli největší společné míry (i, k) obou těch čísel. Je tedy podle vzorce (69′) $c_{ik} = (i, k)$ a součin obou determinantů A, Φ je právě determinant S_n. Vychází tedy pro hodnotu Smithova determinantu výraz

$$S_n = \varphi(1) \,.\, \varphi(2) \ldots \varphi(n). \tag{68′}$$

Poznámka. Výpočet, který jsme tu naznačili, provedl po prvé *J. St. Smith* (Coll. math. papers, 161).

9. ZÁKLADY POČÍTÁNÍ MATICEMI.

V předchozích výkladech jsme se už častěji setkali s pojmem matice. Avšak teprve v theorii forem, transformací a elementárních dělitelů se maticím dostává plného uplatnění a to důsledným použitím t. zv. maticového počtu, který se opírá o několik jednoduchých definic a pojmů. V tomto paragrafu je stručně a přehledně nastíníme předpokládajíce, že jde o matice n-řadové a *vesměs čtverečné*. Že není tento předpoklad na újmu obecnosti, nahlédneme snadno, když event. doplníme příslušné matice řádky a sloupci nulovými, čímž se ve smyslu věty 11. nemění hodnost matice — a ta je pro všechny výpočty směrodatná. Čtverečné n-řadové matice, které se při počítání vyskytnou, budeme v tomto paragrafu označovati půltučnými písmeny (většinou velkými, ale podle potřeby i malými), jejich determinanty pak příslušnými kursivou tištěnými písmeny latinské abecedy.

a) *Rovnost dvou matic.*

Dvě matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *elementů resp.* a_{ik}, b_{ik} *pokládáme za stejné, když a jen když platí* n^2 *rovnic*

$$a_{ik} = b_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{70}$$

Jsou-li takové dvě matice stejné, jsou ovšem stejné i jejich determinanty. Opak však neplatí. Determinant A matice $\mathbf{A}$ je roven determinantu matice, jež z ní vznikne vzájemnou výměnou řádek a sloupců a přece obě tyto matice nejsou podle definice (70) sobě rovny.

Matici nazýváme *nulovou*, jsou-li všechny její elementy rovny nule, *jednotkovou* (značka $\mathbf{I}$), jsou-li *hlavní* její prvky rovny 1, ostatní pak všechny rovny nule. Nulovou matici značíme znakem $\mathbf{O}$.

b) *Sčítání matic.*

Součtem $\mathbf{S}$ *dvou matic* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *jmenujeme matici, jejíž elementy* s_{ik} *jsou dány vzorci*

$$s_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{71}$$

Píšeme pak

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}. \tag{72}$$

Pro toto sčítání ověříme pomocí vzorců (70) snadno platnost zákona komutativního i asociativního.

Příklad. Řešit rovnici

$$\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{O}. \tag{73}$$

Podle vzorců (70) jsou neznámé prvky x_{ik} druhé matice určeny rovnicemi

$$a_{ik} + x_{ik} = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

takže jest

$$x_{ik} = -a_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Takto získanou matici označujeme znakem $-\mathbf{A}$ a píšeme tedy řešení rovnice (73) ve tvaru

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A}. \tag{74}$$

c) *Násobení matic.*

Součinem dvou matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *rozumíme matici* $\mathbf{P}$, *jejíž prvky* p_{ik} *jsou dány vzorci*

$$p_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{75}$$

Značíme pak toto násobení symbolicky rovnicí

$$\mathbf{P} = \mathbf{AB}. \tag{76}$$

Poznámky. Násobení matic je úkon *asociativní, nikoli však* (obecně) *komutativní.* Mimo to *platí* zde — dokažte pomocí vzorců (70), (71), (75), (76) — *zákon distributivní*:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \tag{77}$$

Pro determinant P, příslušný k součinu dvou matic, platí vztah

$$P = A \,.\, B = B \,.\, A. \tag{78}$$

Je-li aspoň jedna z obou spolu násobených matic rovna nule, je i jejich součin maticí nulovou.

Násobení maticí jednotkovou je komutativní; výsledkem takového násobení je zase matice původní, takže lze jednotkovou matici v součinu vynechati.

Je-li k libovolné číslo, pak násobíme danou matici tímto číslem tak, že jím násobíme všechny její prvky.

Příklad. Řešit rovnici

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}. \tag{79}$$

Podle definice jednotkové matice a podle vzorce (75) musí pro neznámé elementy x_{ik} platit rovnice

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\nu k} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n;$$

δ_{ik} je tak řečený Kroneckerův symbol, definovaný vztahy $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$. Při pevném k zde máme systém rovnic pro neznámé $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$ s determinantem A. Řešitelnost žádá v důsledku relace — v. (78) —

$$A \,.\, X = 1,$$

aby A bylo různé od nuly. Pak je ale podle Cramerova pravidla (podrobnosti viz v II. díle tohoto spisu)

$$x_{\nu k} = \frac{A_\nu}{A}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

při čemž A_ν je determinant, který vznikne z A tak, že prvky ν-tého sloupce nahradíme čísly $\delta_{1k}, \delta_{2k}, \ldots, \delta_{nk}$. Rozvedením podle těchto prvků najdeme $A_\nu = A_{k\nu}$, takže má hledaná matice elementy

$$x_{\nu k} = \frac{A_{k\nu}}{A}, \quad k, \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{79'}$$

Nazýváme pak matici takto určenou maticí reciprokou k $\mathbf{A}$ a píšeme

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}. \tag{80}$$

Existuje tedy k regulární matici (tak nazýváme tu, jejíž *determinant je různý od nuly*) *jediná matice reciproká* (také inversní); její prvky se určí ze vztahů (79′). Tato matice je co do násobení komutativní s maticí původní.

Příklad. Provésti násobení matice $\boldsymbol{A}$ maticí

$$\boldsymbol{x} = \left\| \begin{matrix} x_1, & 0, \ldots, 0 \\ x_2, & 0, \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots \\ x_n, & 0, \ldots, 0 \end{matrix} \right\| . \tag{81}$$

Pro elementy y_{ik} výsledné matice $\boldsymbol{y}$ máme obecně [prvky matice (81) značme pro okamžik x_{ik}] vzorce

$$y_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\nu k}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Je však $x_{\nu k} = 0$ pro $k = 2, 3, \ldots, n$, takže je také $y_{ik} = 0$ pro $k \neq 1$ a $y_{i1} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu$; máme tedy výsledek

$$y_{i1} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu, \; y_{ik} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; k = 2, 3, \ldots, n. \tag{82}$$

Lze tudíž vysloviti tuto skutečnost: Násobíme-li matici $\boldsymbol{A}$ maticí (81), dostáváme jako výsledek matici, která vznikne z (81) tím, že prvý sloupec nahradíme veličinami

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

d) *Podobnost dvou matic.*

Matici $\boldsymbol{C}$ nazýváme podobnou s maticí $\boldsymbol{A}$, existuje-li regulární matice $\boldsymbol{R}$ tak, že jest

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{RAR}^{-1}. \tag{83}$$

Tak je na př. matice

$$\left\| \begin{matrix} -1, & 0, & 1 \\ 2, & 3, & 4 \\ -1, & 1, & 0 \end{matrix} \right\| \text{ podobná matici } \left\| \begin{matrix} 1, & -\frac{4}{3}, & \frac{2}{3} \\ 6, & -4, & 3 \\ 6, & -3, & 5 \end{matrix} \right\| ;$$

matice $\boldsymbol{R}$ zde má tvar (ověřte si to)

$$\boldsymbol{R} = \begin{Vmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 3, & 1, & -1 \\ 0, & 2, & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (83')$$

Z rovnice (83) plyne

$$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}$$

a dále

$$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}; \qquad (83'')$$

protože pak matice inversní k matici reciproké je rovna matici původní (vhodné cvičení pro čtenáře), lze poznatek (83″) vyslovit větou, že podobnost matice $\boldsymbol{C}$ s maticí $\boldsymbol{A}$ má za důsledek podobnost matice $\boldsymbol{A}$ s maticí $\boldsymbol{C}$.

Jsou-li matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ navzájem podobné a k libovolné číslo, tu jsou také matice $k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ a $k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}$ navzájem podobné.

Je totiž $k\boldsymbol{I}$ matice, jejíž hlavní úhlopříčka má všechny prvky rovny číslu k, ostatní pak elementy jsou rovny nule. Takováto matice (říká se jí diagonální) je (jak se snadno zjistí) co do násobení komutativní s každou jinou, takže platí

$$\boldsymbol{R} \,.\, k\boldsymbol{I} \,.\, \boldsymbol{R}^{-1} = k\boldsymbol{I} \,.\, \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1} = k\boldsymbol{I} \,.\, \boldsymbol{I} = k\boldsymbol{I}$$

a můžeme psáti

$$k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}k\boldsymbol{I}\boldsymbol{R}^{-1} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1} = (\boldsymbol{R}k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{R}^{-1} = \\ = \boldsymbol{R}(k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{R}^{-1};$$

tato rovnice však vyjadřuje podobnost obou matic $k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}$ a $k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$.

Snadno se dá ukázati také fakt, že dvě matice, podobné třetí, jsou též navzájem podobné. Provedení tohoto důkazu je zcela jednoduché, dokážeme-li si napřed pomocnou větu, že matice inversní k součinu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ je rovna součinu $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. Předpokládejme ovšem, že jsou oba faktory maticemi regulárními; pak je také jejich součin $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ maticí regulární v. vzorec (78) — a proto k němu existuje matice inversní $\boldsymbol{P}^{-1}$. O té ovšem platí $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ a proto také

$$IB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1} = P^{-1}ABB^{-1}A^{-1} = P^{-1}.$$

Je tedy opravdu

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{84}$$

Buďte nyní obě matice A, B podobny třetí matici C. Lze pak psáti

$$A = RCR^{-1} = RSBS^{-1}R^{-1} = TBT^{-1},$$

což je právě matematický výraz podobnosti matic A a B.

e) *Charakteristická funkce dané matice.*

V tomto odstavci se jen letmo a většinou bez důkazů dotkneme jistých fakt, která stojí na samém počátku vlastní theorie matic a jejichž dalším rozvedením lze vybudovati celou zajímavou nauku o elementárních dělitelích. Ačkoli tyto věci beze sporu patří do theorie determinantů, musíme zde od jejich podrobnějšího studia upustit, už také proto, aby tato kniha, určená praktické potřebě techniků, nebyla přetížena abstraktními úvahami. Čtenář, který by chtěl tyto věci poznati blíže, najde poučení o nich v každé dobré učebnici algebry.

Charakteristickou funkcí $\varphi(\varrho)$ dané matice A nazýváme determinant matice $\varrho I - A$, takže

$$\varphi(\varrho) = \begin{vmatrix} \varrho - a_{11}, & -a_{12}, & -a_{13}, \ldots, & -a_{1n} \\ -a_{21}, & \varrho - a_{22}, & -a_{23}, \ldots, & -a_{2n} \\ -a_{31}, & -a_{32}, & \varrho - a_{33}, \ldots, & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & -a_{n3}, \ldots, & \varrho - a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{85}$$

Tato funkce je zřejmě polynom proměnné ϱ stupně n-tého a lze ji tedy psáti ve tvaru

$$\varphi(\varrho) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}\varrho + \frac{\varphi''(0)}{2!}\varrho^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\varrho^{n-1} + \frac{\varphi^{n}(0)}{n!}\varrho^{n}.$$

Nyní však je $\varphi(0) = (-1)^n A$; $\varphi'(\varrho)$ je pak podle věty o derivování determinantu (v. § 5) rovno součtu všech hlavních minorů $(n-1)$-řadových determinantu (85), takže

$$\varphi'(0) = (-1)^{n-1}(A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn}) = (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Derivujeme-li $\varphi'(\varrho)$ dále podle ϱ, dostaneme za výsledek 2!-násobný (rozvažte si tuto věc podrobně) součet všech hlavních minorů $(n-2)$-řadových determinantu $\varphi(\varrho)$, takže je

$$\varphi''(0) = (-1)^{n-2} \,.\, 2!\alpha_{n-2}.$$

Dalším derivováním se objeví $\varphi'''(\varrho)$ jako 3!-násobný součet všech $(n-3)$-řadových hlavních subdeterminantů determinantu $\varphi(\varrho)$ a proto jest

$$\varphi'''(0) = (-1)^{n-3} \,.\, 3!\alpha_{n-3}.$$

Je jasno (a lze to dokázati na př. úplnou indukcí), že obecně platí

$$\varphi^{(k)}(0) = (-1)^{n-k}k!\alpha_{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{86}$$

při čemž značí α_{n-k} součet všech $(n-k)$-řadových hlavních minorů determinantu A. Je tedy možno psáti charakteristickou funkci matice $\boldsymbol{A}$ ve tvaru

$$\varphi(\varrho) = \varrho^n - \alpha_1\varrho^{n-1} + \alpha_2\varrho^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-2}\alpha_{n-2}\varrho^2 + \\ + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}\varrho + (-1)^n A. \tag{87}$$

Tak má ku příkladu matice (83′) charakteristickou funkci

$$\varphi(\varrho) = \begin{vmatrix} \varrho-2, & 0, & 0 \\ -3, & \varrho-1, & 1 \\ 0, & -2, & \varrho-1 \end{vmatrix} = \varrho^3 - 4\varrho^2 + 7\varrho - 6. \quad (87')$$

Je-li $\vartheta(\varrho)$ největší společný dělitel všech $(n-1)$-řadových subdeterminantů determinantu $\varphi(\varrho)$, je funkce proměnné ϱ

$$\lambda(\varrho) = \frac{\varphi(\varrho)}{\vartheta(\varrho)} \tag{88}$$

celistvá racionální a říká se jí n-tý elementární dělitel charakteristické funkce $\varphi(\varrho)$.

Důkaz provedeme snadno pomocí theorie determinantu reciprokého k $\varphi(\varrho)$. Budiž tento označen znakem $\Phi(\varrho)$ a jeho elementy [doplňky to prvků determinantu $\varphi(\varrho)$] symboly $F_{ik}(\varrho)$. Je tedy

$$\Phi(\varrho) = \varphi^{n-1}(\varrho) = |F_{ik}(\varrho)|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

a protože podle předpokladu platí

$$F_{ik}(\varrho) = \vartheta(\varrho) f_{ik}(\varrho), \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

máme dále

$$\varphi^{n-1}(\varrho) = |\vartheta(\varrho)\, f_{ik}(\varrho)| = \vartheta^n(\varrho)\, |f_{ik}(\varrho)|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

takže konečně

$$\lambda^{n-1}(\varrho) = \left[\frac{\varphi(\varrho)}{\vartheta(\varrho)}\right]^{n-1} = \vartheta(\varrho)\, |f_{ik}(\varrho)|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{89}$$

Protože však jsou $\vartheta(\varrho)$ a $f_{ik}(\varrho)$ polynomy proměnné ϱ, je $\lambda^{n-1}(\varrho)$ též polynom v této proměnné a tedy i $\lambda(\varrho)$ samo (umocněním racionální lomené funkce vzniká totiž funkce zase taková).

Tak je na př. pro funkci (87′) $\vartheta(\varrho) = 1$, takže je tato funkce identická se svým třetím elementárním dělitelem.

O výrazu $\lambda(\varrho)$ a matici $\boldsymbol{A}$ se pak dokazuje v algebře tato věta: Rovnice nejnižšího stupně, které hoví matice $\boldsymbol{A}$, je rovnice $\lambda(\boldsymbol{A}) = 0$ (mocniny matice se při tom získají násobením); říkává se jí fundamentální rovnice matice $\boldsymbol{A}$. Samozřejmě vyhovuje pak každá matice ve smyslu relace (88) také rovnici $\varphi(\boldsymbol{A}) = 0$, tedy své charakteristické rovnici [charakteristickou rovnicí matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme rovnici $\varphi(\varrho) = 0$].

Důkaz této věty, která je základem pro celou vyšší theorii matic, podal *Frobenius* — bohužel vybočuje tato věc už zcela z rámce našeho pojednání. Ověříme si jen její správnost pro matici (83′). Její druhá a třetí mocnina (proveďte podrobně) jsou matice

$$\begin{Vmatrix} 4, & 0, & 0 \\ 9, & -1, & -2 \\ 6, & 4, & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 8, & 0, & 0 \\ 15, & -5, & -1 \\ 24, & 2, & -5 \end{Vmatrix},$$

což dosazeno do $\varphi(\varrho)$ — v. (87′) — dává

$$\begin{Vmatrix} 8, & 0, & 0 \\ 15, & -5, & -1 \\ 24, & 2, & -5 \end{Vmatrix} - 4 \begin{Vmatrix} 4, & 0, & 0 \\ 9, & -1, & -2 \\ 6, & 4, & -1 \end{Vmatrix} + 7 \begin{Vmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 3, & 1, & -1 \\ 0, & 2, & 1 \end{Vmatrix} -$$

$$- 6 \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8, & 0, & 0 \\ 15, & -5, & -1 \\ 24, & 2, & -5 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 16, & 0, & 0 \\ 36, & -4, & -8 \\ 24, & 16, & -4 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} 14, & 0, & 0 \\ 21, & 7, & -7 \\ 0, & 14, & 7 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 6, & 0, & 0 \\ 0, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix},$$

takže matice (83′) vskutku splňuje svou rovnici charakteristickou, která je v tomto případě zároveň její rovnicí fundamentální. Podle věty Frobeniovy pak víme, že neexistuje žádná rovnice stupně prvého nebo druhého, kterou by tato matice splňovala.

Příklady. Propočítáme nyní jako aplikace předchozích vývodů několik příkladů, jejichž výsledků použijeme v dalších částech tohoto spisu.

Příklad 1. Dokázati, že hodnost součinu dvou matic nemůže překročiti hodnost žádné z nich.

Každý r-řadový subdeterminant součinu $\boldsymbol{AB}$ dvou matic je — v. vzorce (75), (76) a pak vzorec (47) — řádkovým součinem dvou matic: prvá je tvořena jistými r řádky matice $\boldsymbol{A}$, druhá pak r řádky matice vzhledem k $\boldsymbol{B}$ transponované (to je matice, která vznikne, když v $\boldsymbol{B}$ vyměníme řádky a sloupce navzájem; tím se ovšem hodnost matice nemění). Je tedy každý takový subdeterminant součtem $\binom{n}{r}$ součinů po dvou faktorech: jeden je r-řadovým subdeterminantem matice $\boldsymbol{A}$, druhý r-řadovým subdeterminantem matice $\boldsymbol{B}$. Je-li hodnost prvé matice h, jsou její determinanty $(h + 1)$-řadové rovny všechny nule a tedy také všechny $(h + 1)$-řadové determinanty součinu $\boldsymbol{AB}$; proto nemá tento součin hodnost větší než h a věta je dokázána.

Jednoduchým jejím důsledkem je, že se hodnost matice nemění, když ji násobíme maticí regulární.

Příklad 2. Násobte spolu matice

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} A_{11}, \ldots, A_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}, \ldots, A_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Obecný element součinu bude (δ_{ik} je známý Kroneckerův symbol)

$$p_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_{k\nu} = \delta_{ik} A,$$

takže má součin obou matic tvar

$$\begin{Vmatrix} A, & 0, \ldots, 0 \\ 0, & A, \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ 0, & 0, \ldots, A \end{Vmatrix}.$$

Je-li hodnost prvé z nich $n - 1$, jsou obě nenulové, kdežto součin je matice nulová. Může tedy nulová matice zcela dobře vzniknouti násobením dvou nenulových.

Příklad 3. Budiž $\boldsymbol{A}$ matice regulární, $\boldsymbol{A}^{-1}$ matice k ní inversní, $\bar{\boldsymbol{A}}$ matice k $\boldsymbol{A}$ transponovaná (to je ta, jež vznikne z $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou řádků a sloupců) a $(\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}$ matice k této inversní. Studovati různé vlastnosti těchto matic.

Prvek stojící v i-tém řádku a k-tém sloupci je pro jednotlivé matice

$$a_{ik}, \ \frac{A_{ki}}{A}, \ a_{ki}, \ \frac{A_{ik}}{A}. \tag{90}$$

a) Čemu je rovno $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$, t. j. matice reciproká k inversní?

Protože je obecný element γ_{ik} matice $\mathbf{A}^{-1}$ roven $\dfrac{A_{ki}}{A}$, má hledaná matice obecný prvek $\varepsilon_{ik} = \dfrac{\Gamma_{ki}}{\Gamma}$, kde jest $\Gamma = |\gamma_{ik}| = \left|\dfrac{A_{ki}}{A}\right| = \dfrac{1}{A^n} \cdot |A_{ki}| = A^{-n}A^{n-1} = \dfrac{1}{A}$ a Γ_{ki} doplněk prvku γ_{ki} v determinantu Γ. Ten je však roven [v. vzorec (34)] výrazu $\dfrac{a_{ik}}{A}$, takže máme $\varepsilon_{ik} = a_{ik}$ a lze psáti vztah

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}. \tag{91}$$

Odtud a ze vzorců (73), (74) plyne snadno relace

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{92}$$

b) Čemu je rovno $(\overline{\mathbf{A}^{-1}})$, t. j. matice transponovaná k matici reciproké?

Obecný prvek ε_{ik} hledané matice je zřejmě roven $\dfrac{A_{ik}}{A}$, tedy stejnolehlému prvku matice $(\overline{\mathbf{A}})^{-1}$; proto platí vzorec

$$(\overline{\mathbf{A}^{-1}}) = (\overline{\mathbf{A}})^{-1}. \tag{93}$$

c) Čemu je rovna matice inversní k $(\overline{\mathbf{A}^{-1}})$, tedy matice $[(\overline{\mathbf{A}^{-1}})]^{-1}$?

Podle vzorců (93) a (91) máme ihned

$$[(\overline{\mathbf{A}^{-1}})]^{-1} = \overline{\mathbf{A}}. \tag{94}$$

d) Čemu je rovno $(\overline{\overline{\mathbf{A}}})$, t. j. matice transponovaná k transponované?

Protože obecný element γ_{ik} matice $\overline{\mathbf{A}}$ je a_{ki}, má dotčená matice obecný prvek $\varepsilon_{ik} = a_{ik}$ a je

$$(\overline{\overline{\mathbf{A}}}) = \mathbf{A}, \tag{95}$$

jak je ostatně ihned patrno z prostého názoru.

Příklad 4. Potvrďte identitu

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} A_{11} + A_{11}, & A_{12} + A_{21}, & \ldots, & A_{1n} + A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} + A_{1n}, & A_{n2} + A_{2n}, & \ldots, & A_{nn} + A_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11}, & a_{12} + a_{21}, & \ldots, & a_{1n} + a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + a_{1n}, & a_{n2} + a_{2n}, & \ldots, & a_{nn} + a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Z rovnosti

$$\mathbf{A}[(\overline{\mathbf{A}})^{-1} + \mathbf{A}^{-1}] = (\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{A})(\overline{\mathbf{A}})^{-1}$$

dostáváme, násobíce ji determinantem A, novou:

$$\mathbf{A}[A(\overline{\mathbf{A}})^{-1} + A\mathbf{A}^{-1}] = (\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{A}) \,.\, A(\overline{\mathbf{A}})^{-1}.$$

Napíšeme rovnost mezi determinanty, která z této maticové rovnice plyne ve smyslu vzorce (78) a dostaneme přímo svrchu uvedenou identitu.

REJSTŘÍK.

(Čísla za jednotlivými hesly udávají stránky.)

OBSAH.

Spisovatel	*RNDr Václav Vodička*
Název díla	*Determinanty a matice v theorii i v praxi, část první*
Nákladem	*Přírodovědeckého nakladatelství v Praze*
vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1950*
v edici	*Cesta k vědění, svazek 54*
za redakce	*Dr F. Vyčichla*
Stran	*96*
Vytiskly	*Středočeské tiskárny, n. p., závod Prometheus*
Vydání	*první (3300 výt.)*
Cena	*Kčs 42,—*