Počítání s neúplnými čísly

POČÍTÁNÍ S NEÚPLNÝMI ČÍSLY

KAREL HRUŠA

Jč
m+f

CESTA K VĚDĚNÍ SVAZEK 52

CESTA K VĚDĚNÍ

Karel Hruša:

Počítání s neúplnými čísly

Vedle obsáhlé a dnes již rozebrané knihy profesorů Lásky a Hrušky, která pojednává souborně o numerických methodách početních, nemáme u nás knihy, která by se blíže zabývala počítáním s čísly, získanými měřením, t. j. s čísly běžné praxe, nebo s čísly vzniklými zaokrouhlením. Knížka Hrušova chce tuto mezeru částečně vyplnit tím, že přináší čtenářům odpovědi na mnohé otázky, které vznikají při počítání s takovými čísly.

Autor pod *neúplným číslem* rozumí číselný interval, v němž může číslo být, a ukazuje jednoduché početní úkony s takovými čísly. Pochopitelně, že hlavní otázkou je zde, jaká je chyba výsledku.

Dále se autor zabývá t. zv. *zkráceným počítáním,* t. j. početními výkony tak uspořádanými, aby nezaručených

JČMF Brož. Kčs 36,—

KAREL HRUŠA

POČÍTÁNÍ S NEÚPLNÝMI ČÍSLY

Milému příteli
Rudolfu Želinkovi

6/1 1950.

Karel Hruša

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

I. POJEM ČÍSLA NEÚPLNÉHO

1. Základní úvahy. Velkou většinu čísel, s nimiž provádíme početní operace, neznáme zcela přesně, nýbrž jenom více méně přibližně. Příčiny tohoto faktu jsou několikeré, zmíníme se podrobněji o několika z nich.

1,1. U mnohých čísel je sice znám předpis, podle něhož se lze k hodnotám těchto čísel přiblížiti s libovolnou předem danou přesností, ale k přesnému vyjádření takových čísel nemůžeme dospěti konečným počtem kroků. Jako příklad uvedeme číslo psané znakem $\sqrt{2}$, t. j. číslo, jehož druhá mocnina je rovna dvěma. K jeho výpočtu lze použíti výkonu zvaného odmocňování a stanoviti libovolný počet míst tohoto čísla, ale přesně je stanoviti nedovedeme. V tabulkách bývá uváděna jeho hodnota číslem 1,41421, ale to značí toliko, že

$$1{,}414205 < \sqrt{2} < 1{,}414215$$

a více nic. Ostatně snadným výpočtem shledáme, že $1{,}41421^2 = 1{,}9999899241$; odtud je vidno, že číslo 1,41421 není přesná hodnota čísla $\sqrt{2}$. Rozdíl obou čísel, mezi nimiž je $\sqrt{2}$, je 10^{-5}. Kdybychom pokračovali v odmocňování dále, podařilo by se nám lehko číslo $\sqrt{2}$ sevřít mezi dvě čísla o rozdílu ještě menším, ale nalézti desetinné číslo, jež by se přesně rovnalo $\sqrt{2}$, není možno. Obdobně číslo $\sqrt{3}$ je udáno v tabulkách hodnotou 1,73205, což znamená, že

$$1{,}732045 < \sqrt{3} < 1{,}732055.$$

Jestliže však nějaká úloha vede třebas k výpočtu čísla $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, nedovedeme tento výpočet číselně vůbec provést. Z napsaných nerovností vyplývá, že

$$3{,}14625 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}14627,$$

ale žádné z obou posledních čísel není rovno výrazu $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

V praxi ovšem nahrazujeme číslo $\sqrt{2}$ číslem 1,41421 a číslo $\sqrt{3}$ číslem 1,73205 a s těmito náhradními čísly provádíme výpočty, ale musíme si být jasně vědomi toho, že máme co činiti pouze s přibližným vyjádřením daných čísel a že proto také výsledek výpočtu je zase jen přibližný.

1,2. Většina praktických výpočtů vychází z čísel, jež jsme získali nějakým měřením. Každé měření je zatíženo spoustou chyb, spočívajících v nedokonalosti měřicích přístrojů a pozorovatelů, jež nikdy úplně vyloučiti nelze. Ale i kdyby se nám podařilo takové chyby vyloučiti, ani potom by nebylo lze žádné měření provésti zcela přesně. Stupnice každého měřicího přístroje obsahuje totiž určité nejmenší dílky, jejichž počet lze vyčísti přesně, ale můžeme tvrdit, že je naprosto nepravděpodobno, ne-li zcela vyloučeno, aby se krajní bod měřené veličiny přesně kryl s některou dělicí čárkou stupnice, a i kdyby to snad přece nastalo, pak bychom to vůbec nepoznali, neboť nemáme jistotu, nastalo-li opravdu přesné krytí, či je-li to působeno pouze naší nedostatečnou rozlišovací schopností. Můžeme tedy přesně zjistit pouze počet nejmenších jednotek nanesených na stupnici a jejich části můžeme pouze přibližně odhadovat. Užijeme-li jemněji dělené stupnice a dokonalejších pozorovacích method, změříme danou veličinu přesněji, ale i nejjemněji konstruovaný měřicí přístroj musí nutně obsahovati určité dílky jako nejmenší, takže měření dílků ještě menších již nelze provádět. Proto se musíme spokojit tím, že vyslovíme tvrzení, že měřená veličina je sevřena mezi dvěma spolehlivě zjištěnými údaji. Ježto žádná měřená veličina nemůže být změřena přesně, nemůže být ovšem také přesný výsledek, k jehož výpočtu jsme užili naměřených čísel.

1,3. Vedle toho je otázka, do jaké míry je vůbec měřená veličina definována. Měříme-li třeba vzdálenost dvou „bodů" v terénu, nejde nikdy o dva body v tom smyslu, jak tomuto názvu rozumíme v geometrii. Ve skutečnosti můžeme realisovati „bod" jen jako určitou plošku konečných, byť i malých rozměrů, při čemž nevíme, který bod této plošky je právě ten, ke kterému máme měřiti. Tím docházíme k určité hranici přesnosti měření, kterou překročiti nelze.

1,4. Často se setkáváme s čísly, která vyjadřují okamžitý stav nějaké veličiny proměnné. Byl-li na příklad při statistickém šetření zjištěn počet obyvatelů města Prahy o půlnoci ze dne 22. května na den 23. května 1947 číslem 922 284, nemáme nejmenšího důvodu pochybovat o správnosti tohoto čísla. Přece však je zpravidla nahrazujeme jednodušším a snadněji zapamatovatelným číslem jiným, třebas číslem 920 000, neboť počet obyvatelů města Prahy se od té doby dávno změnil, takže by vůbec nemělo smysl pamatovat si jeho přesnou hodnotu. Přitom ovšem víme, že přesná hodnota leží mezi čísly 915 000 a 925 000.

Z uvedených příkladů je patrno, že se s nepřesně stanovenými čísly setkáváme velice často, a to zejména při úvahách, jejichž účel je čistě praktický. Abychom však mohli náležitě zhodnotit význam takových čísel, musíme vědět, do jaké míry se liší od hodnot přesných a vzít to v úvahu při výpočtech.

V této knížce se budeme zabývati početními operacemi s čísly, jejichž hodnotu přesně neznáme nebo se o ni nezajímáme. Předpokládáme, že čtenáři jsou běžné základy matematiky asi v tom rozsahu, jak se probíraly na bývalé střední škole. Vedle toho budeme potřebovati některá pravidla o počítání s nerovnostmi a s absolutními hodnotami, jakož i některé základní věty z počtu diferenciálního asi v tom rozsahu, jak jsou uvedeny v informativní a dobře srozumitelné příručce prof. *E. Čecha*: Co je a nač je vyšší matematika?, která vyšla r. 1942 jako 20. svazek této sbírky a kterou budeme v dalším stručně označovati názvem Čech.

V české literatuře se počítání s čísly nepřesnými soustavně probírá v knize *V. Lásky* a *V. Hrušky*: Theorie a praxe numerického počítání, Praha 1934, JČMF, z níž jsou některé naše úvahy převzaty.

2. Chyba prostá a poměrná. Čísla, jimiž se budeme zabývati, označujeme názvem *čísla neúplná*. Rozumíme tím *dvojici čísel, z nichž jedno je menší a druhé větší než přesná hodnota*, kterou zpravidla neznáme nebo se o ni nezajímáme. Přitom vyslovujeme ještě požadavek, aby rozdíl obou čísel, jimiž je neúplné číslo stanoveno, byl poměrně malý vzhledem k přesné hodnotě neúplného čísla.

Přesnou hodnotu čísla budeme v dalším označovati velkým písmenem, přibližné hodnoty stejně znějícími písmeny malými. Obě daná čísla a_1, a_2, jimiž je neúplné číslo definováno, a pro něž platí

$$a_1 < A < a_2,$$

budeme nazývati *přibližnými hodnotami* čili *aproximacemi* čísla A, a to menší z nich a_1 aproximací *dolní*, větší z nich a_2 aproximací *horní*. Aritmetický průměr a dolní a horní aproximace budeme nazývati aproximací *střední*. Podle toho je

$$a = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

Rozdíl

$$A - a,$$

se nazývá *prostá (absolutní) chyba* čili *nepřesnost* střední aproximace neúplného čísla. Tuto chybu zpravidla udat nedovedeme, ježto neznáme přesnou hodnotu A, ale vzhledem k definici dolní a horní aproximace víme, že

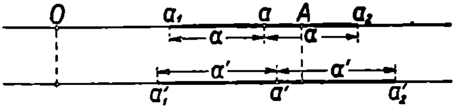
$$\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2) = a_1 - a < A - a < a_2 - a = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1).$$

Číslo $\frac{1}{2}(a_2 - a_1) = \alpha$ budeme nazývati *horní hranice prosté chyby* a budeme je označovati odpovídajícím písmenem řecké abecedy. Z předcházejícího je vidno, že

$$|A - a| < \alpha, \text{ takže } a - \alpha < A < a + \alpha.$$

Je tedy lhostejno, definujeme-li neúplné číslo jeho dolní a horní aproximací nebo střední aproximací a horní hranicí prosté chyby. Číslo α je podstatně kladné, nejvýše ještě připouštíme $\alpha = 0$, ale pak $A = a$, t. j. číslo A je dáno přesně.

Znázorníme-li vše na ose číselné (obr. 1), vidíme, že přesná hodnota A leží vždy uvnitř intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ o šířce 2α, jehož krajními body jsou dolní a horní aproximace a_1, a_2 a který je půlen střední aproximací a. Vzhledem k tomu, že o čísle A jinak nic nevíme, musíme připustit možnost, že jím může býti kterékoliv číslo, pro něž platí $a - \alpha < A < a + \alpha$, takže neúplné číslo je vlastně znázorněno *intervalem* $[a - \alpha, a + \alpha]$ a pravidla o počítání s neúplnými čísly, jež v dalším odvodíme, jsou vlastně pravidly o počítání s intervaly.



Obr. 1.

Z důvodů, které zakrátko vysvitnou, bude výhodné, když v napsaných nerovnostech připustíme na některé straně i znaménko $=$, takže přesná hodnota neúplného čísla by se v krajním případě mohla rovnat i své dolní nebo horní aproximaci, čili

$$a - \alpha \leqq A \leqq a + \alpha, \text{ t. j. } |A - a| \leqq \alpha,$$

kde ovšem $\alpha \geqq 0$. Tyto nerovnosti lze nahraditi rovnicí

$$A = a \pm \Theta\alpha, \text{ kde } 0 \leqq \Theta \leqq 1,$$

což se často méně přesně, avšak stručněji psává

$$A = a \pm \alpha.$$

Této rovnici jest vždy rozuměti tak, jak bylo právě uvedeno.

Nebude-li výslovně uveden opak, omezíme se ve svých úvahách výhradně na čísla kladná. Na počátku tohoto odstavce jsme uvedli požadavek, aby rozdíl mezi horní a dolní aproximací byl poměrně malý vzhledem k přesné hodnotě, čili aby interval, jímž je neúplné číslo definováno, byl dosti úzký. Proto budeme předpokládati, že tento interval obsahuje pouze kladná čísla t. j. že $a > \alpha$.

O tom, jakou úlohu hraje prostá chyba neúplného čísla, učiníme si jasnou představu teprve tehdy, porovnáme-li ji s velikostí některého z čísel, jimiž je neúplné číslo stanoveno. Proto zavádíme pojem *poměrné (relativní) chyby* čili *nepřesnosti*, kterou definujeme některým ze zlomků

$$\frac{A-a}{A}, \quad \frac{A-a}{a}, \quad \frac{A-a}{a-\alpha}, \quad \frac{A-a}{a+\alpha}.$$

Pro určitost můžeme nazývati první zlomek poměrnou chybou neúplného čísla *vzhledem k přesné hodnotě*, další pak poměrnými chybami *vzhledem k střední, dolní a horní aproximaci*. Ježto čitatele těchto zlomků zpravidla neznáme, zavedeme i tu *horní hranici poměrné chyby* vzhledem k přesné hodnotě nebo vzhledem k některé aproximaci, čímž rozumíme zlomky

$$\frac{\alpha}{A}, \quad \frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\alpha}{a-\alpha}, \quad \frac{\alpha}{a+\alpha}.$$

Podle výše vysloveného požadavku je čitatel každého z těchto zlomků proti jmenovateli poměrně malý, takže se hodnoty těchto zlomků navzájem liší jen nepatrně, a proto je celkem lhostejno, který z nich učiníme východiskem svých úvah. Pokud $\alpha > 0$, platí o horních hranicích poměrných chyb

$$\frac{\alpha}{a-\alpha} > \frac{\alpha}{a} > \frac{\alpha}{a+\alpha} \quad \text{a také} \quad \frac{\alpha}{a-\alpha} \geqq \frac{\alpha}{A} \geqq \frac{\alpha}{a+\alpha}.$$

Někdy místo napsaných zlomků bereme jejich stonásobné hodnoty, a pak hovoříme o horních hranicích poměrných chyb vyjádřených v procentech.

Vyslovíme toto pravidlo: Ze dvou neúplných čísel považujeme za přesnější to, jež má menší poměrnou chybu, případně její horní hranici.

Příklad. Měříme-li nějakou délku a shledáme-li že přesná její velikost je větší než třeba 52,3 cm a menší než 52,4 cm, vyjádříme její velikost neúplným číslem $(52,35 \pm 0,05)$ cm. Horní hranice poměrné chyby tohoto údaje vzhledem ke střední aproximaci je $0,05 : 52,35$ čili asi 0,0009551; horní hranice poměrné chyby vzhledem k dolní aproximaci je $0,05 : 52,3$, t. j. asi 0,0009560, a horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci je $0,05 : 52,4$, t. j. 0,0009542. Tyto tři hodnoty se navzájem liší jen nepatrně, takže je lze zhruba vyjádřiti číslem 0,001, čili 0,1%. Naproti tomu údaj $(5,26 \pm 0,02)$ cm, jenž má menší horní hranici prosté chyby, totiž 0,02 cm, je méně přesný, neboť horní hranice jeho poměrné chyby třebas vzhledem ke střední aproximaci $0,02 : 5,26$ dosahuje téměř 0,004, čili 0,4%.

Při zběžném odhadu se podaří cvičenému oku provésti tento odhad s poměrnou chybou asi tak 10^{-1}, při hrubém měření jednoduchými měřicími prostředky (jako na příklad měření a vážení v obchodech) zmenší se poměrná chyba asi na 10^{-2}, při přesnějším měření obyčejnými prostředky (viz výše uvedený příklad) snížíme poměrnou chybu asi na 10^{-3} a při velice jemném a pečlivě provedeném měření podaří se nám snížit poměrnou chybu nejvýše asi tak na 10^{-4}. Chceme-li dosáhnouti přesnosti ještě vyšší, třeba užít speciálních měřicích method a přístrojů, jakož i odborně vycvičených pozorovatelů. Je-li číslo určeno přesně, je $\alpha = 0$ a pak také jeho poměrná chyba je rovna nule.

Třeba si uvědomit, že horní a dolní aproximaci, a v důsledku toho i střední aproximaci a horní hranici prosté chyby, lze u neúplného čísla *volit* (aspoň do jisté míry) *libovolně*. To značí, že interval $[a - \alpha, a + \alpha]$, jímž je neúplné číslo $A = a \pm \alpha$ znázorněno, lze nahraditi intervalem jiným $[a' - \alpha', a' + \alpha']$, ovšem takovým, aby všecky hodnoty intervalu původního byly zahrnuty mezi hodnotami intervalu nového. Toho dosáhneme, když bude současně

$$a' - \alpha' \leqq a - \alpha,$$
$$a' + \alpha' \geqq a + \alpha.$$

Platí-li znaménko rovnosti v obou řádcích současně, jsou oba intervaly totožné. Tohoto případu si nebudeme dále všímati.

Odečteme-li prvou nerovnost od druhé, dostaneme $\alpha' > \alpha$, takže nový interval je širší než byl interval původní. Z napsaných nerovností plyne

$$a' - a \leqq \alpha' - \alpha,$$
$$a - a' \leqq \alpha' - \alpha,$$

čili

$$|a' - a| \leqq \alpha' - \alpha,$$

neboť $\alpha' - \alpha$ je kladné, takže

$$\alpha' \geqq \alpha + |a' - a|.$$

Horní hranice prosté chyby se zvětší aspoň o absolutní hodnotu rozdílu středních aproximací, jak je názorně patrno na obr. 1. Znaménko rovnosti však nemůže platit pro $|a' - a| = 0$, neboť pak by oba intervaly byly totožné.

V dalším budeme často libovolně voliti střední aproximaci neúplného čísla i horní hranici jeho prosté chyby, abychom dostali jednoduché výsledky. Budeme se při tom snažit, aby byla splněna právě nalezená nerovnost.

Ježto $\alpha' > \alpha$, je také $\frac{\alpha'}{A} > \frac{\alpha}{A}$. Vzhledem k tomu, že $\alpha' \geqq \alpha + |a' - a|$, je také $\alpha' a - \alpha a' \geqq |a' - a| \,.\, a + \alpha(a - a')$. Mohou nastati dvě možnosti:

1. Buď je $a - a' = |a' - a|$ a pak je $\alpha' a - \alpha a' \geqq |a' - a| \,.\, (a + \alpha)$.
2. Nebo je $a - a' = -|a' - a|$ a pak je $\alpha' a - \alpha a' \geqq |a' - a| \,.\, (a - \alpha)$.

Vzhledem k požadavku, který jsme vytkli před chvilkou, je $a > \alpha \geqq 0$, takže pro $|a' - a| > 0$ je pravá strana vždy kladná a vedle toho pro $|a' - a| = 0$ nemůže platit znaménko rovnosti. Odtud následuje $\alpha' a - \alpha a' > 0$, čili

$$\frac{\alpha'}{a'} > \frac{\alpha}{a} \text{ a zároveň také}$$

$$\frac{\alpha'}{a' + \alpha'} > \frac{\alpha}{a + \alpha}, \quad \frac{\alpha'}{a' - \alpha'} > \frac{\alpha}{a - \alpha}.$$

To však znamená: *Nahradíme-li neúplné číslo znázorněné intervalem $[a - \alpha,\ a + \alpha]$ jiným neúplným číslem, které je znázorněno širším intervalem $[a' - \alpha',\ a' + \alpha']$, zvětší se tím horní hranice poměrné chyby.* To má podle předcházejícího za následek snížení přesnosti.

Cvičení. 1. Československý národní prototyp metru má při 0° C délku 1 m + 0,1μ ± 0,1μ a československý národní prototyp kilogramu má hmotu 1 kg + 0,504 mg ± 0,002 mg. Stanovte horní hranice poměrných chyb a porovnejte přesnost obou měření. — [U kilogramu je asi 50krát větší.]

2. Podle našeho cejchovního řádu jsou povoleny u dřevěných měřítek horní hranice poměrných chyb ve výši 0,75‰. Jaká je horní hranice povolené prosté chyby u měřítka délky 1 m, 2 m, 4 m?

3. Zaokrouhlování čísel dekadických. Velká většina čísel, s nimiž počítáme, bývá vyjádřena v desítkové soustavě. Chceme-li je nahraditi přibližnými hodnotami, činíme tak několikerým způsobem.

3,1. Zaokrouhlování bez opravy. Z čísla ponecháme jen několik nejvyšších míst a ostatní vynecháme. Abychom naznačili, že některé číslice jsou vynechány, píšeme místo nich, je-li to za desetinnou čárkou, několik teček, a je-li to před desetinnou čárkou, nahrazujeme vynechané číslice malými nulami. Horní hranice prosté chyby takto zaokrouhleného čísla je rovna polovině jednotky posledního ponechaného místa. Je-li v zaokrouhleném čísle ponecháno n desetinných míst, je horní hranice prosté chyby $0{,}5 \cdot 10^{-n} = 5 \cdot 10^{-n-1}$.

Tak na příklad číslo π zaokrouhlujeme bez opravy na čtyři desetinná místa hodnotou 3,1415 ..., což znamená, že $\pi = 3{,}14155 \pm 0{,}00005$. Zaokrouhlený počet obyvatelů města Prahy, uvedený v odst. 1, lze zapsati znakem 92o ooo, což je totéž jako 925 000 ± 5000. Číslo $\sqrt{3}$ zaokrouhlené bez opravy na čtyři desetinná místa je 1,7320 .... Horní hranice prosté chyby tu je $5 . 10^{-5}$. Nulu na posledním místě vynechati nelze, neboť údaj 1,732 ... znamená $1{,}7325 \pm \pm 5 . 10^{-4}$, t. j. neúplné číslo, jehož horní hranice prosté, a tedy i poměrné chyby je desetkrát větší.

3,2. Zaokrouhlování s opravou. Z čísla ponecháme jen několik míst nejvyššího řádu a ostatní vynecháme, při čemž poslední ponechanou číslici:

a) necháme beze změny, je-li prvá z vynechaných číslic menší než 5 (zaokrouhlování sestupné) nebo

b) zvýšíme ji o 1, je-li prvá z vynechaných číslic pětka, za níž následuje (na kterémkoliv dalším místě) aspoň jedna číslice různá od nuly, nebo je-li prvá z vynechaných číslic větší než 5 (zaokrouhlování vzestupné).

Je-li prvá z vynechaných číslic pětka, za níž následují vesměs nuly, je lhostejno, kterého způsobu použijeme. Jestliže při zaokrouhlování vzestupném jedna nebo několik posledních ponechaných číslic jsou devítky, nahradíme je nulami a zvýšíme o 1 tu poslední číslici, jež je různá od devítky.

I tu je horní hranice prosté chyby rovna polovině jednotky posledního ponechaného místa. Je-li ponecháno n desetinných míst, je horní hranice prosté chyby $5 . 10^{-n-1}$. Abychom mohli zaokrouhliti i přesná čísla končící pětkou, připustili jsme v odst. 2, že přesná hodnota se může rovnat své dolní nebo horní aproximaci.

Tohoto způsobu zaokrouhlování se užívá častěji, neboť při stejné horní hranici prosté chyby jako při zaokrouhlování bez opravy je střední aproximace vyjádřena číslem, jež má o jednu číslici méně.

Čísla zaokrouhlená s opravou zpravidla neoznačujeme žádným zvláštním způsobem, toliko čísla celá zakončená nulami se doporučuje psát ve tvaru součinu, jehož jedním činitelem je celistvá mocnina deseti, aby nemohla vzniknout pochybnost, které z nul jest považovati za přesné. Že jde o zaokrouhlování s opravou, vyznačujeme tím, že mezi znaky, jimiž zapisujeme přesnou hodnotu, a mezi hodnotu zaokrouhlenou klademe rovnítko, nad něž děláme tečku. V tomto smyslu také budeme znaku $\doteq$ v celé této knížce užívat.

Podle toho je na příklad $\pi \doteq 3{,}1416$, což znamená $\pi = 3{,}1416 \pm 5 \,.\, 10^{-5}$. Počet obyvatelů města Prahy lze zapsati číslem $9{,}2 \,.\, 10^5$ nebo také $92 \,.\, 10^4$, což obojí je $920\,000 \pm 5000$. Napíšeme-li, že $\log 2 \doteq 0{,}3010$, znamená to $\log 2 = 0{,}3010 \pm 5 \,.\, 10^{-5}$, kdežto $\log 2 \doteq 0{,}301$ by znamenalo jen, že $\log 2 = 0{,}301 \pm 5 \,.\, 10^{-4}$. Ani tu tedy nelze nulu na posledním místě vynechat.

Jakási potíž vzniká, máme-li znovu zaokrouhlovati číslo, jež bylo již jednou zaokrouhleno, a je-li pětka, jež stojí na posledním místě, tou číslicí, kterou máme vynechat. Tak na příklad podle pětimístné tabulky je $\sqrt{3} \doteq 1{,}73205$. Chceme-li tuto hodnotu zaokrouhlit na čtyři desetinná místa, jsme na rozpacích, máme-li psát 1,7320 či 1,7321, neboť nevíme, zda číslo 1,73205 vzniklo zaokrouhlením sestupným či vzestupným. Proto bývá zvykem pětku vzniklou vzestupným zaokrouhlením nějak označovati (Valouchovy tabulky logaritmické užívají znaku $\bar{5}$). Pak se tyto označené pětky zaokrouhlují sestupně a pětky neoznačené se zaokrouhlují vzestupně. Ježto je v tabulce uvedeno $\sqrt{3} \doteq 1{,}73205$, zaokrouhlíme na 1,7321. Naproti tomu $\operatorname{tg} 15° \doteq 0{,}2679\bar{5}$ zaokrouhlíme na 0,2679. Podobně je tomu, vyskytují-li se v zaokrouhleném čísle za pětkou vesměs nuly. Podle toho $\sqrt[3]{57} \doteq 3{,}84850$ zaokrouhlíme na 3,849 kdežto $\sqrt{39} \doteq 6{,}24\bar{5}00$ třeba zaokrouhliti na 6,24.*)

*) Při zaokrouhlování *přesných* čísel se ustálila v účetnické praxi tato konvence: Jestliže číslo končí pětkou a je-li předposlední číslice sudá, při vynechávání této pětky zaokrouhlujeme sestupně, je-li předposlední číslice lichá, zaokrouhlujeme vzestupně. Podle toho číslo 2,365 zaokrouhlíme na 2,36, kdežto 6,095 zaokrouhlíme na 6,10. Pro nás však toto pravidlo nemá žádný význam.

3.3. Při výpočtu horních hranic chyb třeba dbát toho, abychom zaokrouhlováním horní hranici nesnížili pod přípustnou hodnotu. Proto hranice chyb zpravidla zaokrouhlujeme vzestupně i tehdy, když poslední ponechaná číslice je menší než 5. Toliko tehdy, když sestupným zaokrouhlením horní hranici chyby snížíme jen nepatrně, lze připustiti zaokrouhlování sestupné. Tak na příklad číslo $47{,}262 \pm \pm 0{,}034$ zaokrouhlíme na $47{,}26 \pm 0{,}04$, kdežto u čísla $1{,}35687 \pm 0{,}00112$ lze připustit zaokrouhlování hodnotou $1{,}357 \pm 0{,}001$. Vždy však je radno přezkoušet, zda se dolní a horní aproximace zaokrouhlením příliš nezmění. Viz nerovnosti na konci odst. 2.

Cvičení. 3. Byla-li střední aproximace čísla A vypočtena tak, aby horní hranice prosté chyby byla menší než 10^{-n-1}, a byla-li vypočtená aproximace potom zaokrouhlena s opravou na n desetinných míst, stojí na posledním místě táž číslice, jako kdybychom číslo A přímo zaokrouhlili s opravou na n desetinných míst, s jedinou výjimkou, která může nastati, je-li na $(n + 1)$ním desetinném místě ve střední aproximaci čtyrka nebo pětka. Dokažte! — [Posuďte, které číslice mohou být na $(n + 1)$ním desetinném místě dolní a horní aproximace.]

4. Horní hranice poměrné chyby čísla zaokrouhleného na p cifer je menší než $5 \,.\, 10^{-p} : a_0$, kde a_0 je nejvyšší číslice zaokrouhleného čísla. Dokažte!*)

*) Mluvíme-li o číslicích (cifrách), jimiž je nějaké číslo zapsáno, máme vždy na mysli pouze t. zv. *platné číslice*, k nimž nepočítáme nuly, které jsou na počátku čísla. První platnou číslici zleva budeme označovati názvem *nejvyšší číslice*. Jednotku stojící na místě p-té platné číslice zleva budeme nazývat *jednotka p-tého místa*.

II. JEDNODUCHÉ POČETNÍ VÝKONY

4. Sčítání. Je-li dáno několik neúplných čísel a provedeme-li s nimi nějaký početní výkon, je výsledkem zase neúplné číslo. Jde nám nyní o to, abychom výsledek sevřeli do určitých mezí, čili abychom stanovili neúplné číslo, jež určuje výsledek tohoto výkonu. Proto si všimneme nejprve jednotlivých základních početních výkonů podrobně.

Nechť jsou dána dvě čísla, jejichž přesné hodnoty jsou A, B, svými středními aproximacemi a, b a horními hranicemi prostých chyb α, β. Součet obou čísel je $A + B$, za střední aproximaci tohoto součtu zvolíme výraz $a + b$, t. j. součet středních aproximací obou sčítanců. Pak je prostá chyba součtu dána výrazem

$$(A + B) - (a + b),$$

podle definice prosté chyby uvedené v odst. 2. O horních hranicích prostých chyb sčítanců platí

$$|A - a| \leqq \alpha, \quad |B - b| \leqq \beta.$$

Podle známé věty o absolutní hodnotě součtu je

$$|(A + B) - (a + b)| = |(A - a) + (B - b)| \leqq |A - a| + \\ + |B - b| \leqq \alpha + \beta.$$

To značí: *absolutní hodnota prosté chyby součtu dvou sčítanců je menší nebo nejvýše rovna součtu horních hranic prostých chyb obou sčítanců*; můžeme tedy tento součet horních hranic prostých chyb obou sčítanců prohlásiti za horní hranici prosté chyby součtu.

Příklad. Je-li $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142$, $\sqrt{3} \doteq 1{,}7321$, čili obšírněji $\sqrt{2} = 1{,}4142 \pm 5 \,.\, 10^{-5}$, $\sqrt{3} = 1{,}7321 \pm 5 \,.\, 10^{-5}$, je $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1463 \pm 10^{-4}$, neboť $5 \,.\, 10^{-5} + 5 \,.\, 10^{-5} = 10^{-4}$. To je v souhlasu s tím, co bylo vyšetřeno v odst. **1**, kde jsme nalezli, že $3{,}14625 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}14627$.

Nalezený výsledek lze bez obtíží rozšířiti na součet většího počtu sčítanců. Zvolíme-li za střední aproximaci součtu opět součet středních aproximací sčítanců, můžeme tvrditi, že horní hranice prosté chyby součtu libovolného počtu sčítanců je nejvýš rovna součtu horních hranic prostých chyb daných sčítanců. Důkaz provedeme úplnou indukcí.

(1) Předpokládejme, že věta platí pro n sčítanců $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta, \ldots, M = m \pm \mu$. Součet jejich přesných hodnot označme $S = A + B + \ldots + M$, střední aproximaci tohoto součtu označme $s = a + b + \ldots + m$. O horní hranici σ prosté chyby součtu S platí podle předpokladu $\sigma \leqq \alpha + \beta + + \ldots + \mu$. Přidáme-li dalšího sčítance $T = t \pm \tau$, je podle právě dokázaného $|(S + T) - (s + t)| \leqq \sigma + \tau$, čili

$$|(A + B + \ldots + M + T) - (a + b + \ldots + m + t)| \leqq \\ \leqq \alpha + \beta + \ldots + \mu + \tau,$$

takže věta platí i pro součet $n + 1$ sčítanců.

(2) Protože věta platí pro dva sčítance (důkaz viz výše), platí podle bodu (1) i pro tři; protože platí pro tři, platí i pro čtyři, atd. bez jakéhokoli omezení.

Všimněme si ještě horní hranice poměrné chyby součtu dvou sčítanců, při čemž se omezíme na poměrnou chybu součtu třeba vzhledem k jeho střední aproximaci. Ta je podle odst. 2 a podle předcházejícího dána výrazem

$$\frac{\alpha + \beta}{a + b}.$$

Budeme předpokládati, že

$$\frac{\alpha}{a} \geqq \frac{\beta}{b}.$$

Kdyby tomu tak nebylo, lze pořádek obou sčítanců zaměniti. Z toho plyne $\alpha b \geqq \beta a$ (čísla a, b jsou kladná podle úmluvy učiněné v odst. 2). Pak ale také

$$\alpha a + \alpha b \geqq \alpha a + \beta a \text{ a zároveň } \alpha b + \beta b \geqq \beta a + \beta b.$$

Z těchto nerovností však plyne

$$\frac{\alpha}{a} \geqq \frac{\alpha + \beta}{a + b} \geqq \frac{\beta}{b}.$$

Mimo to je

$$\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha + \beta}{a + b} = \frac{\alpha b - \beta a}{a + b} \cdot \frac{1}{a}, \quad \frac{\alpha + \beta}{a + b} - \frac{\beta}{b} = \frac{\alpha b - \beta a}{a + b} \cdot \frac{1}{b},$$

takže za předpokladu $\alpha b > \beta a$ ze vztahu

$$\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha + \beta}{a + b} \gtreqqless \frac{\alpha + \beta}{a + b} - \frac{\beta}{b}$$

vyplývá, že $b \gtreqqless a$. Můžeme tedy vysloviti o horních hranicích poměrných chyb vzhledem ke středním aproximacím tuto větu: *Jsou-li horní hranice poměrných chyb obou sčítanců navzájem rovny, jsou také rovny horní hranici poměrné chyby součtu; jestliže však horní hranice poměrných chyb obou sčítanců jsou navzájem různé, leží horní hranice poměrné chyby součtu co do velikosti mezi oběma, a to blíže k horní hranici poměrné chyby toho čísla, jehož střední aproximace je větší.*

Příklad. Součet dvou úseček, jejichž délky jsou udány neúplnými čísly $(52{,}35 \pm 0{,}05)$ cm a $(5{,}26 \pm 0{,}02)$ cm je $(57{,}61 \pm 0{,}07)$ cm. Horní hranice jeho poměrné chyby je $0{,}07 : 57{,}61 \doteq 0{,}0012$, kdežto horní hranice poměrných chyb sčítanců jsou $0{,}05 : 52{,}35 \doteq 0{,}0010$ a $0{,}02 : 5{,}26 \doteq$ $\doteq 0{,}0038$. Skutečně je horní hranice poměrné chyby součtu blíže horní hranici poměrné chyby většího sčítance.

Cvičení. **5.** Dokažte a vyslovte větu o horní hranici poměrné chyby součtu vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci, zcela obdobnou k větě vyslovené na konci tohoto odstavce o horní hranici poměrné chyby součtu vzhledem k jeho střední aproximaci. — [Ve výpočtu stačí místo a, b položiti $a - \alpha$, $b - \beta$, příp. $a + \alpha$, $b + \beta$.]

6. Dokažte větu: Horní hranice poměrné chyby součtu libovolného počtu sčítanců je větší než horní hranice poměrné chyby sčítance nejpřesnějšího a menší než horní hranice poměrné chyby sčítance nejméně přesného. Přitom jest bráti všechny horní hranice poměrných chyb současně buď vzhledem ke střední nebo k dolní nebo k horní aproximaci.

5. Odčítání. Obdobně jako u součtu budeme za střední aproximaci rozdílu dvou neúplných čísel volit rozdíl středních aproximací obou daných čísel. Jsou-li dána čísla $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, jejich rozdíl $A - B$ má střední aproximaci $a - b$, takže prostá chyba rozdílu je

$$(A - B) - (a - b).$$

Pak absolutní hodnota této chyby

$$|(A - B) - (a - b)| = |(A - a) - (B - b)| \leqq |A - a| + \\ + |B - b| \leqq \alpha + \beta.$$

Absolutní hodnota prosté chyby rozdílu není větší než součet horních hranic prostých chyb menšence a menšitele, takže tento součet horních hranic lze považovati za horní hranici prosté chyby rozdílu.

Jde-li o algebraický součet většího počtu členů (z nichž některé mají znaménko + a některé —), je horní hranice jeho prosté chyby také rovna součtu horních hranic prostých chyb jednotlivých členů, neboť lze v něm nejprve sečísti všecky členy se znaménkem + a pak všecky členy se znaménkem — a daný výraz je pak rozdílem dvou součtů. Pro rozdíl platí právě dokázaná věta, ale táž věta platí podle odst. 4 i pro oba součty.

Horní hranice poměrné chyby rozdílu vzhledem k jeho střední aproximaci je

$$\frac{\alpha + \beta}{a - b}.$$

Ta je na prvý pohled větší než horní hranice poměrné chyby menšence vzhledem k jeho střední aproximaci, neboť je vždy

$$\frac{\alpha + \beta}{a - b} > \frac{\alpha}{a}$$

a může nabýti značně velkých hodnot, zejména tehdy, je-li rozdíl středních aproximací menšence a menšitele dosti malý. Proto se doporučuje zařídit měření pokud možno tak, aby nebylo třeba odčítati dvě neúplná čísla, jež se navzájem liší jen nepatrně.

Příklad. Pro $\sqrt{3} = 1,7321 \pm 5 \cdot 10^{-5}$, $\sqrt{2} = 1,4142 \pm$ $\pm 5 \cdot 10^{-5}$ dostáváme $\sqrt{3} - \sqrt{2} = 0,3179 \pm 10^{-4}$. Horní hranice poměrné chyby rozdílu je $0,0001 : 0,3179 \doteq 0,00031$, kdežto horní hranice poměrné chyby menšence je jen asi $5 \cdot 10^{-5} : 1,7321 < 3 \cdot 10^{-5}$ a menšitele $5 \cdot 10^{-5} : 1,4142 <$ $< 4 \cdot 10^{-5}$.

Cvičení. **7.** Tloušťka stěn válcové nádoby byla měřena jednak přímo, jednak tak, že byl změřen vnější a vnitřní průměr. Při každém použití měřítka jest počítati s touž horní hranicí prosté chyby α. Porovnejte horní hranice poměrné chyby obou měření vzhledem k jejich střední aproximaci. — [Jsou stejné $\alpha : a$, kde a je tloušťka stěny.]

8. Dokažte správnost vět: a) Horní hranice poměrné chyby rozdílu vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci je vždy větší než horní hranice poměrné chyby menšence vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci. b) Horní hranice poměrné chyby rozdílu vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci je větší než horní hranice poměrné chyby menšitele vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci tehdy a jen tehdy, je-li horní hranice poměrné chyby rozdílu vzhledem k jeho střední aproximaci větší než horní hranice poměrné chyby menšitele vzhledem k jeho střední aproximaci.

6. Násobení. Při násobení za střední aproximaci součinu neúplných čísel zvolíme součin středních aproximací činitelů. Jsou-li dány dva činitelé $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, jejich součin AB má podle toho střední aproximaci ab a prostá chyba součinu je $AB - ab$. Ježto je

$$AB - ab = (A - a)b + a(B - b) + (A - a)(B - b),$$

jak se snadno přesvědčíme, provedeme-li naznačená násobení, je také

$$|AB - ab| \leqq |A - a|\, b + a\, |B - b| +$$
$$+ |A - a| \cdot |B - b| \leqq \alpha b + a\beta + \alpha\beta.$$

Napsaná nerovnost bude však tím spíše splněna, přidáme-li na pravou stranu kladné číslo $\alpha\beta$, takže lze psát

$$|AB - ab| < \alpha(b + \beta) + (a + \alpha)\beta.$$

Podle toho *prostá chyba součinu je menší než součet dvou čísel, která vzniknou, násobíme-li horní hranici prosté chyby jednoho činitele horní aproximací druhého činitele.* Proto budeme takto utvořený výraz pokládati za horní hranici prosté chyby součinu.

Příklad. Počítáme-li výraz $\sqrt{2} \cdot \pi$ ze zaokrouhlených hodnot $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142$, $\pi \doteq 3{,}1416$, vyjde střední aproximace součinu zaokrouhlená na pět desetinných míst 4,44285. Horní hranice prosté chyby je podle toho, co jsme právě uvedli, rovna výrazu $5 \cdot 10^{-5} \cdot 3{,}14165 + 5 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}41425 = 5 \cdot 10^{-5} \cdot 4{,}5559 \doteq 23 \cdot 10^{-5}$. Je tedy $\sqrt{2} \cdot \pi = 4{,}44285 \pm 23 \cdot 10^{-5}$.

V praxi ovšem počítáme horní hranici prosté chyby ze zaokrouhlených horních aproximací činitelů, jež však jsou zpravidla rovny jejich zaokrouhleným středním aproximacím, takže za horní hranici prosté chyby bereme nejčastěji výraz

$$\alpha b + a\beta,$$

který zaokrouhlíme vzestupně. V našem případě vyjde táž hodnota $23 \cdot 10^{-5}$.

Za horní aproximaci součinu čísel $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, lze považovati výraz $(a + \alpha)(b + \beta)$, neboť je to největší možná hodnota, jíž může nabýt součin dvou čísel z intervalů $[a - \alpha, a + \alpha]$ a $[b - \beta, b + \beta]$. Jednoduchý výraz dostaneme, budeme-li počítati poměrnou chybu součinu vzhledem k této horní aproximaci. Vyjde

$$\frac{|AB - ab|}{(a + \alpha)(b + \beta)} < \frac{\alpha}{a + \alpha} + \frac{\beta}{b + \beta} < \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}.$$

Podle toho *poměrná chyba součinu vzhledem k horní aproximaci je menší než součet horních hranic poměrných chyb činitelů vzhledem k jejich horním aproximacím a je také menší než součet horních hranic poměrných chyb činitelů vzhledem k jejich aproximacím středním.* Ježto však v praxi počítáme horní hranice poměrných chyb jen ze zaokrouhlených hodnot, lze při praktických výpočtech nalezené číslo považovati za horní hranici poměrné chyby součinu vzhledem k jeho střední aproximaci a počítati je jako součet horních hranic poměrné chyby činitelů vzhledem k jejich středním aproximacím.

V příkladě svrchu uvedeném horní hranice poměrné chyby čísla $\sqrt{2}$ je $5 \,.\, 10^{-5} : \sqrt{2} \doteq 3{,}54 \,.\, 10^{-5}$ a horní hranice poměrné chyby čísla π je $5 \,.\, 10^{-5} : \pi \doteq 1{,}59 \,.\, 10^{-5}$, takže horní hranice poměrné chyby součinu je $3{,}54 \,.\, 10^{-5} + 1{,}59 \,.\, 10^{-5} = 5{,}13 \,.\, 10^{-5}$. Odtud můžeme zjistit horní hranici prosté chyby součinu jako výraz $5{,}13 \,.\, 10^{-5} \,.\, \sqrt{2} \,.\, \pi \doteq 23 \,.\, 10^{-5}$ v souhlase s výpočtem předešlým. Horní hranici prosté chyby součinu vypočteme z horních hranic poměrných chyb činitelů velice pohodlně, použijeme-li ke všem těmto výpočtům logaritmického pravítka. Jeho přesnost při všech výpočtech tohoto druhu zcela postačí, neboť vždy jde jen o hodnoty zaokrouhlené na několik málo cifer.

Nalezený výsledek lze rozšířiti na součin libovolného počtu činitelů podobně, jako jsme to udělali při součtu.

(1) Předpokládejme, že pro součin S n čísel $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta, \ldots, M = m \pm \mu$, jehož střední aproximace je $s = ab \ldots m$ a horní aproximace je $s_2 = (a + \alpha)(b + \beta) \ldots \ldots (m + \mu)$, platí

$$\frac{|S - s|}{s_2} < \frac{\sigma}{s_2} = \frac{\alpha}{a + \alpha} + \frac{\beta}{b + \beta} + \ldots + \frac{\mu}{m + \mu}$$

a přidejme k němu dalšího činitele $T = t \pm \tau$. Horní hranice poměrné chyby součinu ST vzhledem k jeho horní aproximaci je

$$\frac{|ST - st|}{s_2(t + \tau)} < \frac{\sigma}{s_2} + \frac{\tau}{t + \tau} = \frac{\alpha}{a + \alpha} + \frac{\beta}{b + \beta} + \ldots + \frac{\mu}{m + \mu} + \frac{\tau}{t + \tau},$$

takže nalezená věta platí i pro součin $n + 1$ činitelů.

(2) Poněvadž věta platí pro dva činitele, platí podle bodu (1) také pro tři; protože platí pro tři, platí i pro čtyři atd. bez omezení.

Jestliže v součinu n činitelů $AB \ldots M$ je $A = B = \ldots = M$, dostáváme odtud ihned, že horní hranice poměrné chyby n-té mocniny čísla $A = a \pm \alpha$ vzhledem k její horní aproximaci je rovna n-násobné horní hranici poměrné chyby mocněnce vzhledem k jeho horní aproximaci, t. j. $n\alpha :$ $: (a + \alpha)$. Násobíme-li horní aproximací této mocniny, t. j. číslem $(a + \alpha)^n$, shledáme, že pro prostou chybu mocniny s mocnitelem celým a kladným platí

$$|A^n - a^n| < n\alpha(a + \alpha)^{n-1}.$$

Poznámka. Součin dvou neúplných čísel $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$ lze stanoviti také takto: Dolní aproximace tohoto součinu je $c_1 =$ $= (a - \alpha)(b - \beta)$, jeho horní aproximace je $c_2 = (a + \alpha)(b + \beta)$, takže součin obou čísel lze vyjádřiti intervalem $[c_1, c_2]$. Tu jsme volili za střední aproximaci součinu číslo $c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = ab + \alpha\beta$ a za horní hranici jeho prosté chyby číslo $\gamma = \frac{1}{2}(c_2 - c_1) = \alpha b + a\beta$. Pak je horní hranice poměrné chyby součinu vzhledem k jeho střední aproximaci

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha b + a\beta}{ab + \alpha\beta} \leqq \frac{\alpha b + a\beta}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}.$$

Rovnost nastane, je-li jeden z činitelů dán přesně.

Cvičení. **9.** Jestliže horní hranice prosté chyby každého ze dvou činitelů je menší než ε jednotek stojících na p-tém místě toho činitele (počítáno zleva) a je-li řád nejvyšší číslice součinu roven součtu řádů nejvyšších číslic činitelů, je horní hranice prosté chyby součinu menší než $\varepsilon(a_0 + b_0 + 2)$ jednotek stojících na p-tém místě součinu (opět počítáno zleva); je-li však řád nejvyšší číslice součinu vyšší než součet řádů nejvyšších číslic činitelů, je horní hranice prosté chyby součinu menší než $0,1 \,.\, \varepsilon(a_0 + b_0 + 2)$ jednotek stojících na p-tém místě součinu; přitom a_0, b_0 jsou nejvyšší číslice obou činitelů. Dokažte! — [Jsou-li r, s řády nejvyšších číslic činitelů, je $\alpha < \varepsilon \,.\, 10^{r-p+1}$, $\beta < \varepsilon \,.\, 10^{s-p+1}$, při čemž lze předpokládati, že $a < (a_0 + 1) \,.\, 10^r$, $b < (b_0 + 1) \,.\, 10^s$.]

10. K tomu, aby horní hranice prosté chyby součinu dvou činitelů nepřesáhla ε jednotek p-tého místa (počítáno zleva), stačí, aby horní hranice prosté chyby činitelů nebyla větší než $\varepsilon : (a_0 + b_0 + 2)$

jednotek p-tého místa (počítáno zleva), je-li řád nejvyšší číslice součinu roven součtu řádů nejvyšších číslic činitelů, a $10\varepsilon : (a_0 + b_0 + 2)$ jednotek p-tého místa, je-li řád nejvyšší číslice součinu větší než součet řádů nejvyšších číslic činitelů. Přitom a_0, b_0 značí nejvyšší číslice činitelů.

11. K tomu, aby součin dvou zaokrouhlených čísel zaokrouhlený na p cifer se v těchto p cifrách shodoval s přesným výsledkem zaokrouhleným rovněž na p cifer (nejvýše s výjimkou, kdy první vynechaná číslice je čtyrka nebo pětka — viz cvič. **8**), stačí součin počítati z činitelů zaokrouhlených na $p + 2$ cifry, je-li řád nejvyšší číslice součinu roven součtu řádů nejvyšších číslic činitelů, a na $p + 1$ cifru, je-li řád nejvyšší číslice součinu větší než součet řádů nejvyšších číslic činitelů.

7. Dělení. Také při dělení dvou neúplných čísel budeme za střední aproximaci podílu voliti podíl střední aproximace dělence a střední aproximace dělitele. Je-li dělenec $A = a \pm \alpha$ a dělitel $B = b \pm \beta$, jejich podíl má střední aproximaci $\frac{a}{b}$ a prostou chybu $\frac{A}{B} - \frac{a}{b}$. Dále je

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|Ab - aB|}{Bb} = \frac{|(A-a)b - a(B-b)|}{Bb}.$$

Ježto $|(A-a)b - a(B-b)| \leqq |A-a|b + a|B-b| \leqq \alpha b + a\beta$ a $B \geqq b - \beta$, je

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{\alpha b + a\beta}{(b-\beta)b}.$$

Násobíme-li pravou stranu činitelem $\frac{a+\alpha}{a}$, který není menší než 1, nezmenšíme ji, a proto bude platit tím spíše

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{\alpha b + a\beta}{ab} \cdot \frac{a+\alpha}{b-\beta}.$$

Podle toho horní hranice prosté chyby podílu není větší než nalezený výraz. Rovnost může nastati jen tehdy, je-li dělenec dán přesně a je-li přesná hodnota dělitele rovna své dolní aproximaci. Tento neobvyklý případ můžeme ze svých úvah vyloučiti.

Výsledek nabude na přehlednosti, uvědomíme-li si, že $(a + \alpha) : (b - \beta)$ je největší možná hodnota, které může dosáhnouti podíl, jehož dělenec je obsažen v intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ a dělitel v intervalu $[b - \beta, b + \beta]$. Je to tedy horní aproximace podílu $A : B$. Odtud plyne, že

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| : \frac{a + \alpha}{b - \beta} < \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b},$$

takže dostáváme větu: *Poměrná chyba podílu vzhledem k jeho horní aproximaci je menší než součet horních hranic poměrné chyby dělence i dělitele vzhledem k jejich středním aproximacím.**)

V praxi, kde se počítají horní hranice poměrné chyby zaokrouhlené jen na několik málo číslic, se ovšem poměrná chyba vzhledem k horní aproximaci opět neliší od poměrné chyby vzhledem k střední aproximaci.

Příklad. Počítejme chybu podílu $\sqrt{2} : \pi$ z hodnot $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142$, $\pi \doteq 3{,}1416$. Střední aproximace podílu je $1{,}4142 : 3{,}1416 \doteq 0{,}450153$. Pro horní hranici poměrné chyby vyjde podle příkladu v odst. 6 týž výraz jako při násobení, t. j. $5{,}13 \cdot 10^{-5}$. Je tedy horní hranice prosté chyby podílu rovna

$$5{,}13 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \doteq 2{,}3 \cdot 10^{-5}, \text{ takže } \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}450153 \pm 23 \cdot 10^{-6}.$$

Je-li ve zvl. případě $\alpha = 0$, $A = a = 1$, je

$$\left|\frac{1}{B} - \frac{1}{b}\right| : \frac{1}{b - \beta} < \frac{\beta}{b},$$

t. j. poměrná chyba převrácené hodnoty neúplného čísla vzhledem k její horní aproximaci je menší než horní hranice poměrné chyby původní hodnoty vzhledem k její střední aproximaci.

Chceme-li vyšetřit poměrnou chybu složitějšího výrazu $\frac{A \cdot B \cdot C \ldots}{P \cdot R \cdot S \ldots}$, kde $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, $C = c \pm \gamma, \ldots$,

*) Na tuto formulaci věty o poměrné chybě podílu mě upozornil p. prof. Dr. *Vl. Knichal*, jemuž za to srdečně děkuji.

$P = p \pm \pi$, $R = r \pm \varrho$, $S = s \pm \sigma, \ldots$, stačí jej přepsati do tvaru součinu $A \,.\, B \,.\, C \ldots \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{S} \ldots$ a pak podle věty o poměrné chybě součinu většího počtu činitelů poměrná chyba daného výrazu vzhledem k jeho horní aproximaci je menší než součet

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots + \frac{\pi}{p} + \frac{\varrho}{r} + \frac{\sigma}{s} + \ldots .$$

Je-li konečně $A = B = C = \ldots = 1$, $P = R = S = \ldots$, t. j. jde-li o výraz $1 : P^n = P^{-n}$, dostáváme odtud, že jeho poměrná chyba vzhledem k horní aproximaci je menší než $n\pi : p$. Násobíme-li horní aproximací výrazu P^{-n}, t. j. číslem $(p - \pi)^{-n}$, vychází pro odhad absolutní hodnoty prosté chyby mocniny se záporným celým mocnitelem

$$|P^{-n} - p^{-n}| < \frac{n\pi}{p}(p - \pi)^{-n} < n\pi(p - \pi)^{-n-1} .$$

Poznámka. Podíl $A : B$ dvou neúplných čísel $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$ lze stanoviti také takto: Dolní aproximace tohoto podílu je $c_1 = \frac{a - \alpha}{b + \beta}$, jeho horní aproximace je $c_2 = \frac{a + \alpha}{b - \beta}$, takže podíl obou čísel lze vyjádřiti intervalem $[c_1, c_2]$. Tu jsme volili za střední aproximaci podílu číslo $c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{ab + \alpha\beta}{b^2 - \beta^2}$ a za horní hranici jeho prosté chyby číslo $\gamma = \frac{1}{2}(c_2 - c_1) = \frac{\alpha b + a\beta}{b^2 - \beta^2}$. Pak je horní hranice poměrné chyby podílu vzhledem k jeho střední aproximaci

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha b + a\beta}{ab + \alpha\beta} \leqq \frac{\alpha b + a\beta}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} .$$

Rovnost nastane, je-li dělenec nebo dělitel dán přesně.

Cvičení **12.** Horní hranice poměrné chyby převrácené hodnoty čísla zaokrouhleného na p číslic je menší než $5 \,.\, 10^{-p} : a_0$, kde a_0 je nejvyšší číslice daného čísla od nuly různá. Dokažte!

13. Dělíme-li spolu dvě zaokrouhlená čísla, z nichž méně přesné má p číslic, a je-li řád nejvyšší číslice podílu roven rozdílu řádu nejvyšší číslice dělence a řádu nejvyšší číslice dělitele, shoduje se vzniklý podíl zaokrouhlený na $p - 2$ cifry s přesným výsledkem zaokrouhleným rovněž na $p - 2$ cifry; je-li však řád nejvyšší číslice podílu menší než rozdíl řádu nejvyšší číslice dělence a řádu nejvyšší číslice dělitele, shoduje se vzniklý podíl zaokrouhlený na $p - 3$ cifry s přesným výsledkem zaokrouhleným na $p - 3$ cifry. Dokažte! Může nastati výjimka z tohoto pravidla?

14. Násobíme-li nebo dělíme-li neúplné číslo číslem přesným, nemění se horní hranice poměrné chyby, naproti tomu horní hranice prosté chyby výsledku je rovna horní hranici prosté chyby daného neúplného čísla násobené nebo dělené daným přesným číslem. Dokažte!

8. Odmocňování. Za střední aproximaci n-té odmocniny čísla $A = a \pm \alpha$ budeme opět voliti n-tou odmocninu střední aproximace odmocněnce, t. j. výraz $\sqrt[n]{a}$.*) Pak platí

$$\left|\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{a}\right| = \frac{|A - a|}{\sqrt[n]{A^{n-1}} + \sqrt[n]{A^{n-2}a} + \sqrt[n]{A^{n-3}a^2} + \ldots + \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

vzhledem k tomu, že

$$(\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{A^{n-1}} + \sqrt[n]{A^{n-2}a} + \sqrt[n]{A^{n-3}a^2} + \ldots + \sqrt[n]{a^{n-1}}) = \\ = A - a.$$

Ježto však vždy $A \geqq a - \alpha$ a rovněž $a > a - \alpha$, pokud $\alpha > 0$, je jmenovatel vždy větší než $n\sqrt[n]{(a - \alpha)^{n-1}}$, takže platí

$$\left|\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{a}\right| < \frac{\alpha}{n\sqrt[n]{(a - \alpha)^{n-1}}}.$$

Počítáme-li poměrnou chybu vzhledem k dolní aproximaci $\sqrt[n]{a - \alpha}$, dostaneme pro ni výraz menší než n-tinu

---

*) Znakem $\sqrt[n]{a}$, kde $a > 0$, rozumíme kladné číslo x, pro které platí $x^n = a$.

poměrné chyby odmocněnce vzhledem k jeho dolní aproximaci, neboť jest

$$\frac{\left|\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{a}\right|}{\sqrt[n]{a - \alpha}} < \frac{\alpha}{n(a - \alpha)} .$$

Poněvadž v praxi zase počítáme poměrnou chybu vždy z hodnot zaokrouhlených, lze napsaný výraz s dostatečnou přesností počítati z horní hranice poměrné chyby vzhledem k zaokrouhlené střední aproximaci.

Příklad 1. Počítejme $\sqrt{\pi}$ z hodnoty $\pi \doteq 3{,}1416$. Střední aproximace této odmocniny je 1,772456, poměrná chyba je menší než $5 . 10^{-5} : 2 . 3{,}14 \doteq 0{,}8 . 10^{-5}$, takže $\sqrt{\pi} = 1{,}772456 \pm 8 . 10^{-6}$.

Příklad 2. Vypočteme ještě přeponu C pravoúhlého trojúhelníka, jsou-li dány odvěsny $A = (32{,}5 \pm 0{,}02)$ cm, $B = (16{,}3 \pm 0{,}02)$ cm. Podle věty Pythagorovy je $C = \sqrt{A^2 + B^2}$; střední aproximace tohoto výrazu je $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{32{,}5^2 + 16{,}3^2} = \sqrt{1321{,}94} \doteq 36{,}36$. Abychom odhadli horní hranici prosté chyby, třeba si uvědomiti, že podle odst. 6 je A^2 dáno s prostou chybou menší než $2\alpha(a + \alpha)$, B^2 je dáno s prostou chybou menší než $2\beta(b + \beta)$, výraz $A^2 + B^2$ lze tedy podle odst. 4 vypočísti s prostou chybou menší než $2\alpha(a + \alpha) + 2\beta(b + \beta)$ a tedy C je podle předcházejícího stanoveno s prostou chybou, jež je menší než

$$\frac{2\alpha(a + \alpha) + 2\beta(b + \beta)}{2\sqrt{(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2}} .$$

Ježto tuto hranici prosté chyby zaokrouhlíme na několik málo míst, lze pro její odhad s dostatečnou přesností vzíti výraz

$$\frac{\alpha a + \beta b}{c} = \frac{0{,}02 . 48{,}8}{36{,}36} \doteq 0{,}027,$$

což zaokrouhlíme na 0,03. Je tedy $C = (36{,}36 \pm 0{,}03)$ cm.

Příklad 3. Podobně lze počítati odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka, je-li dána přepona $C = (12{,}25 \pm 0{,}01)$ cm a odvěsna $A = (10{,}40 \pm 0{,}01)$ cm. Obdobně jako v příkladě předcházejícím je $B = \sqrt{C^2 - A^2}$, střední aproximace $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{150{,}0625 - 108{,}16} = \sqrt{41{,}9025} \doteq 6{,}47$. Také tu je C^2 dáno s chybou menší než $2\gamma(c + \gamma)$, A^2 s chybou menší než $2\alpha(a + \alpha)$, $C^2 - A^2$ s chybou menší než $2\gamma(c + \gamma) + 2\alpha(a + \alpha)$ a B vyjde s chybou menší než

$$\frac{2\gamma(c + \gamma) + 2\alpha(a + \alpha)}{2\sqrt{(c - \gamma)^2 - (a + \alpha)^2}},$$

což lze vzhledem k požadované přesnosti nahraditi výrazem $(\gamma c + \alpha a) : b = 0{,}01 \,.\, 22{,}65 : 6{,}47 \doteq 0{,}04$. Je tedy celkem $B = (6{,}47 \pm 0{,}04)$ cm.

Poznámka. Výpočet v příkladě 3 lze provésti také tak, že výraz $B = \sqrt{C^2 - A^2}$ upravíme na tvar $B = \sqrt{(C + A)(C - A)}$, ale tu třeba při odhadu chyby dát náležitý pozor. Je-li C dáno s prostou chybou menší než γ, A s prostou chybou menší než α, je $C + A$ i $C - A$ dáno s prostou chybou menší než $\alpha + \gamma$, takže bychom mohli být svedeni k domněnce, že horní hranice prosté chyby výrazu $(C + A)(C - A)$ je $(\alpha + \gamma)(c - a + \alpha + \gamma) + (\alpha + \gamma)(c + a + \alpha + \gamma) = 2(\alpha + \gamma) \,.$ $.\, (c + \alpha + \gamma)$, což by mohlo být podstatně větší než výraz $2\gamma(c + \gamma) + 2\alpha(a + \alpha)$, který jsme obdrželi při předcházejícím výpočtu, zejména kdyby bylo c značně větší než a. Třeba si uvědomit, že prosté chyby výrazů $C + A$ a $C - A$ nejsou navzájem nezávislé, neboť v dvojčlenu $C + A$ se chyba čísla A přičítá, kdežto v dvojčlenu $C - A$ se táž chyba odčítá. Naše vzorce pro odhad chyby však byly odvozeny za předpokladu, že chyby čísel, s nimiž se výpočet provádí, jsou navzájem nezávislé, takže jich k výpočtu uvedeného výrazu v tomto případě použít nelze. V dalším bude odvozena obecná methoda k výpočtu horní hranice chyby, která ukáže, jak lze tuto nesnáz obejíti.

Cvičení. **15.** Horní hranice poměrné chyby n-té odmocniny čísla zaokrouhleného na p cifer je menší než $5 \,.\, 10^{-p} : na_0$, kde a_0 je nejvyšší číslice daného čísla. Dokažte!

16. K tomu, aby druhá odmocnina čísla, jehož nejvyšší číslice a_0 je řádu r-tého, měla horní hranici prosté chyby menší než ε jednotek p-tého místa (počítáno odleva), stačí, aby odmocněnec byl aproximován s horní hranicí prosté chyby menší než $2\varepsilon\sqrt{a_0}$ jednotek stojících na p-tém místě (počítáno odleva), je-li r sudé, a $6\varepsilon\sqrt{a_0}$ jednotek $(p + 1)$ho místa (opět počítáno odleva), je-li r liché. Dokažte!

17. Při pokusu odkapávala kapalina ze silnostěnné kapiláry v kapkách. Bylo zváženo 200 kapek a zjištěno, že váží $(6{,}72 \pm 0{,}01)$g. Hustota kapaliny je $(0{,}845 \pm 0{,}001)$g/cm^3. S jakou přesností lze z těchto údajů stanoviti průměr kapky za předpokladu, že jsou všecky kapky stejné? ($\pi \doteq 3{,}1416$.) — [$2r = (0{,}4235 \pm 0{,}0004)$ cm.]

III. ZKRÁCENÉ POČÍTÁNÍ

9. Chyba primární a sekundární. V této kapitole odvodíme pravidla t. zv. zkráceného počítání. K tomuto způsobu počítání jsme vedeni zkušeností, že při vypočítávání výsledků obvyklým způsobem dostáváme značný počet míst, jež obsahují číslice nezaručené, a proto zbytečné. Ve výpočtu lze však vynechati určité elementární výkony a uspořádati jej tak, abychom nezaručených číslic dostali co nejméně. Takto uspořádané početní výkony se označují názvem *zkrácené počítání*.

Jak jsme již ukázali v předcházející kapitole (a jak ukážeme i v následující) střední aproximaci r_1 správného výsledku R dostaneme, provedeme-li výpočet tohoto výsledku ze středních aproximací daných čísel obvyklým (nezkráceným) způsobem počítání, jak jsme se mu naučili ve škole. Při tom vzniká chyba $R - r_1$, kterou jsme v odst. 2 nazvali (prostá) *chyba střední aproximace* a kterou budeme také nazývati *chyba primární*. Jestliže však početní operace upravíme tak, že místo zbytečně přesného čísla r_1 dostaneme jiným početním postupem méně přesné číslo r_2, vzniká nová chyba, jež je dána rozdílem $r_1 - r_2$ a pro niž zavedeme název *chyba výpočtu* čili *chyba sekundární*. Nám ovšem jde o to, oč se číslo r_2 liší od přesného výsledku R, čili o rozdíl

$$R - r_2 = (R - r_1) + (r_1 - r_2).$$

Tento rozdíl se jmenuje *chyba úhrnná* (*totální*). Jak je vidno, chyba úhrnná je rovna součtu chyby primární a chyby sekundární.

Je-li ϱ_1 horní hranice chyby primární, t. j. je-li $|R - r_1| \leqq \varrho_1$, a je-li ϱ_2 horní hranice chyby sekundární, t. j. je-li $|r_1 - r_2| \leqq \varrho_2$, je horní hranice chyby úhrnné

$$|R - r_2| = |(R - r_1) + (r_1 - r_2)| \leqq |R - r_1| + |r_1 - r_2| \leqq \\ \leqq \varrho_1 + \varrho_2.$$

V předcházející kapitole jsme vyšetřili horní hranici chyby primární při některých jednoduchých početních výkonech; v této kapitole podrobíme rozboru chybu sekundární při týchž početních výkonech.

Především víme, že chyba primární závisí toliko na středních aproximacích daných čísel a na jejich chybách prostých; jsou-li daná čísla aproximována s určitými chybami, je tím již určena velikost primární chyby. Chceme-li ji zmenšit, musíme užíti přesnějších aproximací. Naproti tomu velikost chyby sekundární závisí na tom, jak uspořádáme početní výkon, t. j. kolik a jaké elementární výkony vynecháme a do jaké míry se tak přiblížíme nezkrácenému početnímu výkonu. Proto lze velikost sekundární chyby zpravidla libovolně snížiti tak, aby neměla příliš velký vliv na úhrnnou chybu výsledku.

Cvičení. 18. Nutná a dostačující podmínka pro to, aby absolutní hodnota úhrnné chyby nebyla větší než absolutní hodnota primární chyby, je, aby chyba primární a sekundární byly opačných znamének a aby absolutní hodnota sekundární chyby nebyla větší než dvojnásobek absolutní hodnoty primární chyby. Dokažte! — [Označíme-li primární chybu p, sekundární chybu s, má platit $|p + s| \leqq |p|$. Vezměte v úvahu všechny kombinace znamének, jichž mohou nabýti čísla $p + s$ a p.]

10. Zkrácené sčítání a odčítání. Ježto budeme vyšetřovati pouze sekundární chybu, můžeme předpokládati, že čísla $A, B, C, \ldots$, s nimiž provádíme výpočty, jsou dána přesně. Je-li dáno číslo A, lze vždy najít takového mocnitele r, aby

$$10^r \leqq A < 10^{r+1}.$$

Dělíme-li číslo A číslem 10^r, vyjde podíl a_r a zbytek z_r; a_r je číslo celé, pro něž platí $1 \leqq a_r \leqq 9$, a vedle toho $0 \leqq z_r < 10^r$. Dělíme-li dále číslo z_r číslem 10^{r-1}, vyjde podíl a_{r-1} a zbytek z_{r-1}; přitom a_{r-1} je číslo celé, pro něž platí $0 \leqq a_{r-1} \leqq 9$, a $0 \leqq z_{r-1} < 10^{r-1}$. Tak lze pokračovati libovolně daleko. Provedeme-li takových kroků celkem p, dostaneme nakonec čísla a_{r-p+1}, z_{r-p+1}, jež mají obdobné vlastnosti jako čísla a_{r-1}, z_{r-1}. Označme stručně $r - p + 1 = k$.

Pak lze celý postup vyjádřit řadou rovnic, jichž je $p = r - k + 1$:

$$\begin{aligned}
A &= a_r \,.\, 10^r + z_r \,, \\
z_r &= a_{r-1} \,.\, 10^{r-1} + z_{r-1}, \\
z_{r-1} &= a_{r-2} \,.\, 10^{r-2} + z_{r-2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
z_{k+1} &= a_k \,.\, 10^k + z_k \,.
\end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovnic vyjde

$$A = a_r \,.\, 10^r + a_{r-1} \,.\, 10^{r-1} + a_{r-2} \,.\, 10^{r-2} + \dots + \\ + a_k \,.\, 10^k + z_k.$$

Čísla $a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, \dots, a_k$, jichž je $p = r - k + 1$, jsou *číslice*, jimiž je A vyjádřeno v desítkové soustavě číselné. O číslici a_r říkáme, že je řádu r-tého, a_{r-1} je řádu $r - 1$ atd. Číslo z_k, pro něž platí $0 \leqq z_k < 10^k$, budeme nazývati *zbytek čísla A po číslici řádu k-tého*. Označme A_k číslo

$$A_k = a_r \,.\, 10^r + a_{r-1} \,.\, 10^{r-1} + a_{r-2} \,.\, 10^{r-2} + \dots + a_k \,.\, 10^k.$$

Je to číslo, které vznikne, zaokrouhlíme-li číslo A bez opravy na $p = r - k + 1$ míst; jeho poslední číslice je řádu k-tého. Vzhledem k vlastnostem čísla z_k platí

$$A_k \leqq A < A_k + 10^k, \text{ t. j. } A = A_k + 0{,}5 \,.\, 10^k \pm 0{,}5 \,.\, 10^k.$$

Je-li dáno n čísel $A, B, C, \dots$ a máme-li utvořit součet

$$A + B + C + \dots,$$

můžeme daná čísla nahraditi čísly $A_k, B_k, C_k, \dots$, jež vzniknou zaokrouhlením bez oprav tak, aby poslední číslice byla řádu k-tého. Utvoříme-li z nich součet

$$A_k + B_k + C_k + \dots,$$

lze jej považovati za dolní aproximaci hledaného součtu. Střední aproximace je pak o $n \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^k$ větší a horní hranice prosté chyby není podle odst. 4 větší než $n \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^k$. Je tedy

$$A + B + C + \dots = A_k + B_k + C_k + \dots + \\ + n \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^k \pm n \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^k.$$

Odtud plyne pravidlo: *Sečteme-li z n daných sčítanců jen ty číslice, jež jsou řádu k-tého a vyššího, dostaneme dolní aproximaci součtu s chybou, jejíž horní hranice nepřesahuje číslo* $n \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^k$ *(zkrácené sčítání bez braní oprav).*

Příklad. Níže napsaná čísla chceme sečísti počínajíc jednotkami řádu — 1. Vynecháme tedy všecky číslice, jež jsou řádu nižšího než — 1, t. j. ty, jež jsou napravo od svislé čáry, a vzniklý součet zvětšíme o $5 \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^{-1} = 0{,}25$. Výpočet je tento:

$$\begin{array}{r|l} 27{,}5 & 268 \\ 3{,}2 & 8973 \\ 412{,}5 & 27 \\ 42{,}0 & 368 \\ 0{,}0 & 75 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{485{,}2 + 0{,}25 \pm 0{,}25,} \end{array}$$

což lze psáti ve tvaru $485{,}4 \pm 0{,}3$ nebo také $485{,}5 \pm 0{,}3$. Přesná hodnota je 485,45533.

Poznámka. Abychom snížili horní hranici chyby, lze postupovati také tak, že sečteme ještě číslice řádu o 1 nižšího, tento součet zaokrouhlíme (s opravou) na jednotky toho řádu, na které chceme počítat, a takto vzniklé číslo, jež se nazývá *oprava*, k součtu přičteme (*zkrácené sčítání s opravou*). Tím se dolní aproximace součtu stane neúplným číslem s prostou chybou, jejíž horní hranice je $0{,}5 \,.\, 10^k$, řád sekundární chyby se tím sníží o 1, neboť vlastně zanedbáváme jednotky teprve řádu $k - 2$. Provedeme-li takto týž výpočet znovu, dostaneme

$$\begin{array}{r|l} 27{,}5 & 268 \\ 3{,}2 & 8973 \\ 412{,}5 & 27 \\ 42{,}0 & 368 \\ 0{,}0 & 75 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{485{,}4 \pm 0{,}05 + 0{,}025 \pm 0{,}025,} \end{array}$$

což zaokrouhleno dá $485{,}43 \pm 0{,}08$. Počítáme: $7 + 3 + 2 + 8 + 2 = 22$, oprava 2; $2 + 0 + 0 + 5 + 2 + 5 = 14$ atd. Je ovšem otázka, není-li výhodnější počítat při téže práci raději součet bez braní oprav o jedno místo přesněji; v našem případě vyjde $485{,}44 \pm 0{,}03$.

Jde-li o rozdíl dvou čísel $A = A_k + 0{,}5 \,.\, 10^k \pm 0{,}5 \,.\, 10^k$, $B = B_k + 0{,}5 \,.\, 10^k \pm 0{,}5 \,.\, 10^k$, dostáváme

$$A - B = (A_k + 0{,}5 \,.\, 10^k) - (B_k + 0{,}5 \,.\, 10^k) \pm$$
$$\pm\, 2 \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^k = A_k - B_k \pm 10^k.$$

Zcela obdobně pro algebraický součet n členů kladných $A, B, \ldots$ a m členů záporných $P, Q, \ldots$ vyjde

$$A + B + \ldots - P - Q - \ldots = A_k + B_k + \ldots - P_k - Q_k - \ldots +$$
$$+ (n - m)\, 0{,}5 \,.\, 10^k \pm (m + n)\, 0{,}5 \,.\, 10^k.$$

Cvičení. **19.** Provedeme-li zkrácené sčítání nejvýše 20 sčítanců počínajíc řádem $k - 2$ a zaokrouhlíme-li (s opravou) poslední dvě místa výsledku tak, aby poslední číslice byla řádu k-tého, je vzniklé číslo rovno číslu, jež vznikne, zaokrouhlíme-li (s opravou) přesný výsledek tak, aby poslední číslice byla řádu k-tého, nejvýše snad s jedinou výjimkou, je-li první číslice vynechaná při zaokrouhlování čtyřka nebo pětka. Dokažte! — [Viz cvič. **3**.]

20. Jestliže před sčítáním zaokrouhlíme každého sčítance s opravou tak, aby jeho nejnižší číslice byla řádu k-tého, a takto zaokrouhlené sčítance sečteme, dostaneme výsledek s touž horní hranicí prosté chyby, jako kdybychom daná čísla sečtli zkráceně bez oprav počínajíc číslicemi řádu k-tého. Dokažte!

11. Zkrácené násobení. Buďte dána dvě čísla

$$A = a_r \,.\, 10^r + a_{r-1} \,.\, 10^{r-1} + a_{r-2} \,.\, 10^{r-2} + \ldots +$$
$$+ a_{r-p+1} \,.\, 10^{r-p+1},$$

$$B = b_s \,.\, 10^s + b_{s-1} \,.\, 10^{s-1} + b_{s-2} \,.\, 10^{s-2} + \ldots +$$
$$+ b_{s-q+1} \,.\, 10^{s-q+1},$$

z nichž prvé má p cifer a jeho nejvyšší číslice je řádu r-tého a druhé má q cifer a jeho nejvyšší číslice je řádu s-tého. Značky $a_r, a_{r-1}, \ldots, a_{r-p+1}, b_s, b_{s-1}, \ldots, b_{s-q+1}$ značí číslice a indexy značí řády těchto číslic. Znásobíme-li spolu daná dvě čísla, lze jejich součin $C = AB$ psát

$$
\begin{array}{rl|l}
C = a_r b_s \,.\, 10^{r+s} + a_{r-1} b_s \,.\, 10^{r+s-1} + & & \\
+ a_{r-2} b_s \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + a_{k-s} b_s \,.\, 10^k & & + \ldots + \\
+ a_r b_{s-1} \,.\, 10^{r+s-1} + & & \\
+ a_{r-1} b_{s-1} \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + a_{k-s+1} b_{s-1} \,.\, 10^k & & + \ldots + \\
+ a_r \; b_{s-2} \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + a_{k-s+2} b_{s-2} \,.\, 10^k & & + \ldots + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots + \\
+ a_r \; b_{k-r} \,.\, 10^k & & + \ldots + \\
& & + \ldots,
\end{array}
$$

kde jsou pod sebou psány součiny cifer, jež udávají počet jednotek téhož řádu. V každém řádku napsaného schematu je určitý násobek čísla A.

Zahrneme-li do násobení pouze jednotky řádu k-tého a vyššího, t. j. ponecháme-li pouze členy stojící vlevo od svislé čáry naznačené v našem schematu, dostaneme číslo, jež je menší než součin AB, neboť při tom zanedbáváme členy řádů nižších. Takto vzniklé číslo označíme c_1 a budeme je považovati za dolní aproximaci součinu C.

Ježto dále platí pro každé m

$$10^m > a_{m-1} \,.\, 10^{m-1} + a_{m-2} \,.\, 10^{m-2} + a_{m-3} \,.\, 10^{m-3} + \ldots ,$$

kde $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots$ jsou číslice řádu $m - 1$, $m - 2, \ldots$, lze tvrdit, že součet členů v jednotlivých řádcích výše uvedeného schematu za svislou čarou je menší než $b_s \,.\, 10^k$, $b_{s-1} \,.\, 10^k$, $b_{s-2} \,.\, 10^k, \ldots$, takže platí

$$
\begin{aligned}
C < a_r b_s \,.\, 10^{r+s} &+ a_{r-1} b_s \,.\, 10^{r+s-1} + \\
&+ a_{r-2} b_s \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + (a_{k-s} + 1) b_s \,.\, 10^k + \\
&+ a_r b_{s-1} \,.\, 10^{r+s-1} + \\
&+ a_{r-1} b_{s-1} \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + (a_{k-s+1} + 1) b_{s-1} \,.\, 10^k + \\
&+ a_r \; b_{s-2} \,.\, 10^{r+s-2} + \ldots + (a_{k-s+2} + 1) b_{s-2} \,.\, 10^k + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ (a_r + 1) b_{k-r} \,.\, 10^k + \\
&+ 100 \,.\, 10^{k-1},
\end{aligned}
$$

při čemž poslední člen vpravo je větší než součet všech ostatních členů v dalších řádcích. Považujme tento výraz za horní aproximaci c_2 součinu C. Je tedy

$$c_2 - c_1 = (b_s + b_{s-1} + b_{s-2} + \ldots + b_{k-r} + 10) \cdot 10^k.$$

Abychom snadno nalezli číslo c_1, uspořádáme výpočet takto: *Napíšeme číslice násobitele pod číslice násobence v opačném pořádku tak, aby nejvyšší číslice násobitele (b_s řádu s-tého) přišla pod číslici a_{k-s} řádku (k—s)tého. Každou číslici násobitele násobíme tu číslici násobence, jež stojí přímo nad ní, a všecky ostatní, jež od ní stojí vlevo. Takto vzniklé součiny napíšeme tak, aby přišly pod sebe poslední číslice na pravém kraji (řádu k-tého) a sečteme. Vzniklé číslo je dolní aproximací součinu; přitom horní hranice prosté chyby je menší než tolik jednotek posledního řádu, kolik činí polovina součtu těch číslic násobitele, jichž jsme při násobení užili, zvětšeného o 10, nebo* (vzhledem ke komutativnosti násobení) *horní hranice prosté chyby je také menší, než tolik jednotek posledního řádu, kolik činí polovina součtu těch číslic násobence, jichž jsme při násobení použili, zvětšeného o 10 (zkrácené násobení bez oprav).*

Příklad. Násobme čísla $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142136$, $\pi \doteq 3{,}1415927$ tak, aby ve výsledku vyšly číslice řádu — 5 a vyššího. Tu je $r = s = 0$, $k = -5$. Napíšeme tedy nejvyšší číslici násobitele pod tu číslici násobence, jež je řádu — 5. Výpočet vypadá takto:

$$\begin{array}{r}
1{,}4142136 \times 3{,}1415927 \\
729\,51413 \\
\hline
4\,24263 \\
14142 \\
5656 \\
141 \\
70 \\
9 \\
\hline
4{,}44281 + 12 \cdot 10^{-5} \pm 12 \cdot 10^{-5}.
\end{array}$$

Ježto součet číslic násobence, jichž jsme použili k výpočtu a jež jsou v násobenci podtrženy, je menší než součet číslic násobitele k výpočtu použitých, je horní hranice prosté chyby menší než

$$\tfrac{1}{2}(1 + 4 + 1 + 4 + 2 + 1 + 10) \,.\, 10^{-5} \doteq 12 \,.\, 10^{-5}.$$

Tuto hodnotu třeba k nalezené dolní aproximaci přičísti, takže je

$$\sqrt{2} \,.\, \pi = 4{,}44293 \pm 12 \,.\, 10^{-5}.$$

Přitom jsme zanedbali (nepatrnou) chybu primární, jež je menší než $0{,}5 \,.\, 10^{-7} \,.\, 1{,}4 + 0{,}5 \,.\, 10^{-7} \,.\, 3{,}1 \doteq 2{,}3 \,.\, 10^{-7}$.

Umístění desetinné čárky ve výsledku lze provésti buď podle pravidla, že řád součinu nejvyšších cifer činitelů je roven součtu řádů těchto nejvyšších cifer, nebo mechanicky, uvědomíme-li si, že řád nejnižší číslice výsledku je roven součtu řádů kterékoli číslice násobence a té číslice násobitele, jež je pod ní v našem schematu napsána.

Poznámka. Horní hranici prosté chyby při zkráceném násobení lze snížiti tím, že se násobí i číslice, která stojí o jedno místo dále vpravo nad číslicí násobitele, kterou právě násobíme, a vzniklý součin těchto dvou číslic zaokrouhlíme na číslici jedinou, již přičteme k součinu číslic nad sebou stojících (*zkrácené násobení s braním oprav*). To je totéž, jako kdybychom zkráceným násobením bez oprav počítali o jedno místo více a v každém řádku poslední číslici zaokrouhlili. Tím se vypočtená dolní aproximace součinu sama stane neúplným číslem s horní hranicí chyby $n \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^k$, kde $n = s - (k - r - 1) + 1 = r + s - k + 2$ je počet řádků,*) neboť v každém řádku může vzniknout chyba až o polovinu jednotky posledního místa; naproti tomu horní hranice (sekundární) chyby se tím sníží, ježto jde vlastně o zanedbané jednotky řádu $k - 1$. Provedeme-li podle toho výše vypočtený příklad znovu, dostaneme

*) Tím, že násobíme číslicí stojící o jedno místo dále vpravo, zvětší se počet řádků o 1; v posledním řádku může být po zaokrouhlení nula.

$$
\begin{array}{r}
1{,}4142136 \times 3{,}1415927 \\
729\;51413 \\
\hline
4\;24264 \\
14142 \\
5657 \\
141 \\
70 \\
13 \\
\hline
4{,}44287 \pm 3{,}5 \,.\, 10^{-5} + 13 \,.\, 10^{-6} \pm 13 \,.\, 10^{-6}.
\end{array}
$$

Přitom počítáme prvý řádek: $3 \,.\, 3 = 9$, oprava 1, $3 \,.\, 1 = 3$, $3 + 1 = 4$ a zapíšeme 4 atd. Ježto $n = 7$, je horní hranice chyby vzniklé zaokrouhlováním $7 \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^{-5} = 3{,}5 \,.\, 10^{-5}$. Horní hranice chyby vzniklé zanedbáním členů nižšího řádu je $\frac{1}{2}(1 + 4 + 1 + 4 + 2 + + 1 + 3 + 10) \,.\, 10^{-6} = 13 \,.\, 10^{-6}$ a musíme ji k vypočtené dolní aproximaci přičísti. Je tedy celkem

$$\sqrt{2} \,.\, \pi = 4{,}44288 \pm 5 \,.\, 10^{-5}.$$

I tu je otázka, je-li tento způsob ekonomický a není-li výhodnější počítat raději bez oprav o jedno místo přesněji. Výpočet není o nic delší:

$$
\begin{array}{r}
1{,}4142136 \times 3{,}1415927 \\
72\;951413 \\
\hline
4\;242639 \\
141421 \\
56568 \\
1414 \\
705 \\
126 \\
2 \\
\hline
4{,}442875 + 13 \,.\, 10^{-6} \pm 13 \,.\, 10^{-6}.
\end{array}
$$

Přesná hodnota je $\sqrt{2} \,.\, \pi \doteq 4{,}44288294$.

Cvičení. **21.** Pokud při zkráceném násobení nenásobíme více než deseti číslicemi od nuly různými, nepřekročí horní hranice sekundární chyby součinu a) 50 jednotek posledního místa, počítáme-li zkráceně bez oprav, a b) 10 jednotek posledního místa, počítáme-li s braním oprav. Dokažte!

22. Součin dvou čísel, z nichž každé má méně než 10 číslic, vypočteme zkráceným násobením bez braní oprav, ve výsledku vynecháme dvě poslední číslice a poslední zbylou číslici zvětšíme o 1. Toto číslo se liší od střední aproximace součinu o méně než o polovinu jednotky posledního ponechaného místa. Dokažte!

23. Má-li sekundární chyba součinu být menší než ε jednotek m-tého řádu, stačí počítati tento součin zkráceným násobením bez braní oprav tak, aby nejnižší číslice součinu byla k-tého řádu, kde

$$k \leqq m + \log \frac{2\varepsilon}{s + 10};$$

přitom s je součet číslic jednoho činitele. Dokažte!

12. Zkrácené dělení. Nechť jsou dána dvě čísla A, B, o nichž budeme předpokládati, že

$$1 \leqq B < 10, \qquad B \leqq A < 10B.$$

Ponecháme-li v čísle A k desetinných míst a ostatní vynecháme, dostaneme číslo, jež označíme A_k; jeho nejnižší číslice je řádu — k-tého. Podobný smysl bude mít znak B_k. Je-li na př. $B = 3{,}14159\ldots$, je $B_0 = 3$, $B_1 = 3{,}1$, $B_2 = 3{,}14$, $B_3 = 3{,}141$ atd.

Je vidno, že platí

$$B_0 \leqq B_1 \leqq B_2 \leqq \ldots \leqq B_{k-1} \leqq B_k;$$

znaménko rovnosti je přípustno jen mezi takovými dvěma čísly, z nichž druhé má na posledním místě nulu. Vedle toho je

$$B_i \leqq B \text{ pro každé } i.$$

Znaménko rovnosti platí jen tehdy, má-li číslo B na všech místech řádu nižšího než $-i$ vesměs nuly. Podobně je $A_i \leqq A$. Dále platí

$$B_0 + 1 \geqq B_1 + 10^{-1} \geqq B_2 + 10^{-2} \geqq \ldots \geqq \\ \geqq B_{k-1} + 10^{-(k-1)} \geqq B_k + 10^{-k};$$

znaménko rovnosti platí jen mezi takovými dvěma čísly, z nichž druhé má na posledním místě devítku. Vedle toho je pro každé i

$$B_i + 10^{-i} > B, \text{ čili } B_i > B - 10^{-i} \text{ a také } A_i > A - 10^{-i}.$$

Podle předpokladu je $B \leqq A$, pak musí také $B_i \leqq A_i$ pro každé i. A_i je totiž největší číslo mající i desetinných míst, jež není větší než A, podobně B_i je největší číslo mající i desetinných míst, jež není větší než B. Ale $B_i \leqq B \leqq A$.

Kdyby bylo $B_i > A_i$, nebylo by A_i největší číslo mající i desetinných míst, jež je menší než A, nýbrž B_i by bylo větší.

Naproti tomu z předpokladu $A < 10B$ nikterak neplyne, že by také musilo $A_i < 10B_i$; může se stát, že $A_i \geqq 10B_i$, ale vždy je $A_i < 10B_i + 10^{-i+1}$, neboť $A_i \leqq A$, $B < B_i + 10^{-i}$ pro každé i.

Dělíme-li číslo A_k číslem B_k, dostaneme podíl c_0 a zbytek z_0, t. j.

$$A_k = c_0 B_k + z_0, \text{ kde } 0 \leqq z_0 < B_k.$$

Podle toho, co bylo právě řečeno, je

$$1 \leqq \frac{A_k}{B_k} = c_0 + \frac{z_0}{B_k} < 10 + \frac{10^{-k+1}}{B_k}.$$

Odečteme-li ode všech členů této nerovnosti číslo $z_0 : B_k$, které je menší než 1, vidíme, že

$$0 < 1 - \frac{z_0}{B_k} \leqq c_0 < 10 + \frac{10^{-k+1}}{B_k} - \frac{z_0}{B_k} \leqq 10 + \frac{10^{-k+1}}{B_k}.$$

Předpokládáme-li, že $k > 0$ a že c_0 je celé, je c_0 vázáno nerovností

$$1 \leqq c_0 \leqq 10.$$

Přitom nejnižší číslice zbytku z_0 je řádu $-k$.

Utvořme nyní výraz $10z_0$ a dělme jej číslem B_{k-1}. Ježto $B_{k-1} + 10^{-(k-1)} \geqq B_k + 10^{-k}$, je $0 \leqq 10z_0 < 10B_k \leqq \leqq 10B_{k-1} + 10^{-k+2} - 10^{-k+1}$. Je-li podíl c_1 a zbytek z_1, t. j. je-li

$$10z_0 = c_1 B_{k-1} + z_1, \text{ kde } 0 \leqq z_1 < B_{k-1},$$

je také

$$0 \leqq \frac{10z_0}{B_{k-1}} = c_1 + \frac{z_1}{B_{k-1}} < 10 + \frac{10^{-k+2} - 10^{-k+1}}{B_{k-1}}.$$

Odečteme-li ode všech členů této nerovnosti číslo $z_1 : B_{k-1}$, které je menší než 1 vyjde

$$-1 < -\frac{z_1}{B_{k-1}} \leqq c_1 < 10 + \frac{10^{-k+2} - 10^{-k+1}}{B_{k-1}} - \frac{z_1}{B_{k-1}} \leqq$$
$$\leqq 10 + \frac{10^{-k+2} - 10^{-k+1}}{B_{k-1}}.$$

Je-li $k > 1$ a je-li také c_1 číslo celé, je

$$0 \leqq c_1 \leqq 10.$$

Pak je nejnižší číslice zbytku z_1 řádu $-(k-1)$. Obdobně lze v dělení pokračovati dále. Nakonec dojdeme k dělení číslem B_0. Dostáváme tak $k+1$ celých čísel c_i a $k+1$ zbytků z_i, pro něž platí $k+1$ rovnic

$$\left.\begin{array}{l} A_k = c_0 B_k + z_0 \\ 10z_0 = c_1 B_{k-1} + z_1 \\ 10z_1 = c_2 B_{k-2} + z_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 10z_{k-2} = c_{k-1} B_1 + z_{k-1} \\ 10z_{k-1} = c_k B_0 + z_k \end{array}\right\} \text{kde} \left\{\begin{array}{ll} 1 \leqq c_0 \leqq 10, & 0 \leqq z_0 < B_k \\ 0 \leqq c_1 \leqq 10, & 0 \leqq z_1 < B_{k-1} \\ 0 \leqq c_2 \leqq 10, & 0 \leqq z_2 < B_{k-2} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ 0 \leqq c_{k-1} \leqq 10, & 0 \leqq z_{k-1} < B_1 \\ 0 \leqq c_k \leqq 18,^{*)} & 0 \leqq z_k < B_0 \end{array}\right.$$

Násobíme-li tyto rovnice postupně čísly $1 = 10^0$, 10^{-1}, $10^{-2}, \dots, 10^{-(k-1)}, 10^{-k}$ a sečteme, zruší se čísla $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ a vyjde rovnice

$$\left.\begin{array}{l} A_k = c_0 B_k + c_1 B_{k-1} \cdot 10^{-1} + c_2 B_{k-2} \cdot 10^{-2} + \dots + \\ \quad + c_{k-1} B_1 \cdot 10^{-(k-1)} + c_k B_0 \cdot 10^{-k} + z_k \cdot 10^{-k}, \end{array}\right\} (*)$$

při čemž z_k je jedna číslice, pro niž platí $0 \leqq z_k < B_0$. Pak také $z_k + 1 \leqq B_0 \leqq B$. Ježto dále

$$A - 10^{-k} < A_k,\ B_k \leqq B,\ B_{k-1} \leqq B,$$
$$B_{k-2} \leqq B, \dots, B_1 \leqq B,\ B_0 \leqq B,$$

---

*) Je totiž $B_1 + 10^{-1} \leqq B_0 + 1$, takže $z_{k-1} < B_0 + 0{,}9$; proto $c_k B_0 + z_k = 10 z_{k-1} < 10 B_0 + 9$, čili $c_k < 10 + \frac{9 - z_k}{B_0}$. Pro $B_0 = 1$ je $z_k = 0$, takže $c_k < 19$.

plyne z rovnice (*)

$$A - 10^{-k} < (c_0 + c_1 . 10^{-1} + c_2 . 10^{-2} + \ldots + \\ + c_{k-1} . 10^{-(k-1)} + c_k . 10^{-k})B + z_k . 10^{-k},$$

čili

$$\frac{A}{B} < c_0 + c_1 . 10^{-1} + c_2 . 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} . 10^{-(k-1)} + \\ + (c_k + 1) . 10^{-k},$$

neboť $z_k + 1 \leqq B$. Naproti tomu jest

$$A \geqq A_k,\ B_k > B - 10^{-k},\ B_{k-1} > B - 10^{-(k-1)},$$
$$B_{k-2} > B - 10^{-(k-2)}, \ldots,\quad B_1 > B - 10^{-1},\quad B_0 > B - 1,$$

$z_k \geqq 0$, takže z rovnice (*) dostáváme také

$$A > (c_0 + c_1 . 10^{-1} + c_2 . 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} . 10^{-(k-1)} + \\ + c_k . 10^{-k})\, B - (c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k) . 10^{-k},$$

čili

$$\frac{A}{B} > c_0 + c_1 . 10^{-1} + c_2 . 10^{-2} \ldots + c_{k-1} . 10^{-(k-1)} + \\ + (c_k + 1) . 10^{-k} - \left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{B} + 1\right) . 10^{-k}.$$

Lze tedy tvrdit, že výraz

$$c_0 + c_1 . 10^{-1} + c_2 . 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} . 10^{-(k-1)} + (c_k + 1) . 10^{-k}$$

je horní aproximací podílu $A : B$, při čemž horní hranice chyby je menší než

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{B} + 1\right) . 10^{-k}.$$

Kdyby byla nejvyšší číslice čísla B řádu s-tého, lze psát $B = \bar{B} . 10^s$, kde $1 \leqq \bar{B} < 10$, a pak lze položit $A = \bar{A} . 10^r$ tak, aby $\bar{B} \leqq \bar{A} < 10\bar{B}$. Při tom r je řád nejvyšší číslice čísla A nebo je to řád jeho druhé číslice zleva. Pak je

$$\frac{A}{B} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \cdot 10^{r-s}.$$

Pro číslo $\bar{A} : \bar{B}$ platí všecky výše odvozené výsledky; platí tedy i pro číslo $A : B$ s tou změnou, že řád každé číslice třeba zvýšit o $r - s$.

Předcházející úvahy jsou podkladem zkráceného dělení. Při něm postupujeme takto: *Z dělitele B ponecháme určitý počet číslic; z dělence A jich ponecháme tolik, aby číslo, jež vzniklo z B, bylo v něm obsaženo aspoň jednou a ne více než desetkrát, při čemž nebereme zřetel na desetinnou čárku. Dělíme-li upravené číslo A upraveným číslem B, dostaneme první číslici podílu. Pak vynecháme v upraveném děliteli poslední číslici a takto upraveným dělitelem dělíme zbytek předcházejícího dělení. Tím vyjde druhá číslice podílu. Nato vynecháme v děliteli další číslici a pokračujeme v dělení tak dlouho, pokud to lze, t. j. až zbude v děliteli jen jediná číslice. Zvětšíme-li poslední číslici výsledku o 1, dostaneme horní aproximaci hledaného podílu s chybou, jejíž horní hranice je menší než polovina ciferného součtu podílu děleného dělitelem a zvětšeného o 1 (zkrácené dělení bez oprav).* Budiž ještě poznamenáno, že při zkráceném dělení se může stát, že některá „číslice" podílu vyjde rovna deseti, což není možné při dělení obyčejném. Pak napíšeme místo ní nulu a předcházející číslici zvýšíme o jednotku. Poslední „číslice" by mohla být dokonce i rovna 18.

Příklad. Počítejme podíl $\sqrt{2} : \pi$ z aproximací $\sqrt{2} \doteq 1,4142136$, $\pi \doteq 3,1415927$, při čemž se v děliteli omezíme na číslice řádu -5 a vyššího. Dostaneme

$$\begin{array}{rl}
\overset{-1}{1},414213|6 : \overset{0}{3},\underline{1}\underline{4}\underline{1}\underline{5}\underline{9}|27 = & \\
157577 & \\
502 & = \overset{-1}{0},450160 + 1 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-6} \pm 3 \cdot 10^{-6}. \\
188 & \\
2 &
\end{array}$$

Číslo 1414213 dělíme číslem 314159 (desetinné čárky si nevšímáme); vyjde prvá číslice podílu 4 a zbytek 157577, který dělíme číslem 31415. Dostaneme další číslici podílu 5 a zbytek 502. Ten dělíme číslem 3141 atd. až poslední zbytek 2 dělíme číslem 3. Vyjde poslední číslice podílu 0, kterou zvýšíme o 1. Vynechané číslice v děliteli označujeme zatržením. Horní hranice chyby je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4+5+0+1+6+0}{3{,}14}+1\right) \doteq 3 \text{ jednotky posledního místa.}$$

Drobné číslice nadepsané nad jednotkami čísel $\bar{A}$, $\bar{B}$ udávají řády těchto cifer a slouží k určení řádu nejvyšší číslice podílu. Ježto $-1-0=-1$, je nejvyšší číslice výsledku řádu -1. Je tedy celkem

$$\sqrt{2} : \pi = 0{,}450158 \pm 3 \,.\, 10^{-6}.$$

Přitom jsme zanedbali (nepatrnou) chybu primární, která je menší než

$$\left(\frac{0{,}5 \,.\, 10^{-7}}{1{,}41} + \frac{0{,}5 \,.\, 10^{-7}}{3{,}14}\right) . \, 0{,}450 \doteq 2{,}3 \,.\, 10^{-8}.$$

Poznámka: Podobně jako ostatní početní výkony provádí se někdy i zkrácené dělení *s braním oprav*, t. j. do výpočtu bereme o jednu číslici více a výsledky výkonů s těmito přidanými číslicemi zaokrouhlujeme na jedno místo a přičítáme je jako opravu. To znamená, že v rovnici (*) se zvýší indexy čísel A_k, B_k, B_{k-1}, $B_{k-2}, \ldots, B_1, B_0$ o jednu a v číslech A_{k+1}, c_0B_{k+1}, $c_1B_k \,.\, 10^{-1}$, $c_2B_{k-1} \,.\, 10^{-2}, \ldots$, $c_{k-1}B_2 \,.\, 10^{-(k-1)}$, $c_kB_1 \,.\, 10^{-k}$, jež tak vzniknou, se zaokrouhlí poslední číslice, jež je řádu $-(k-1)$. Tím se každé z těchto čísel nahradí neúplným číslem s horní hranicí chyby $0{,}5 \,.\, 10^{-k}$. Rovnice (*) nabude tak tvaru

$$A_{k+1} \pm 0{,}5 \,.\, 10^{-k} = c_0B_{k+1} + c_1B_k \,.\, 10^{-1} + c_2B_{k-1} \,.\, 10^{-2} + \\ + \ldots + c_{k-1}B_2 \,.\, 10^{-(k-1)} + c_kB_1 \,.\, 10^{-k} \pm (k+1) \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^{-k} + \\ + z_k \,.\, 10^{-k},$$

z níž odvodíme jednak

$$\frac{A}{B} < c_0 + c_1 \cdot 10^{-1} + c_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} \cdot 10^{-(k-1)} + $$
$$+ (c_k + 1) \cdot 10^{-k} \pm \frac{(k+2) \cdot 0{,}5}{B} \cdot 10^{-k},$$

neboť $z_k < B_1$, $z_k + 10^{-1} \leq B_1 \leq B$, a jednak

$$\frac{A}{B} > c_0 + c_1 \cdot 10^{-1} + c_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} \cdot 10^{-(k-1)} + $$
$$+ (c_k + 1) \cdot 10^{-k} - \left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{10B} + 1\right) \cdot 10^{-k} \pm$$
$$\pm \frac{(k+2) \cdot 0{,}5}{B} \cdot 10^{-k}.$$

V posledním členu číslo $k + 2$ značí počet číslic podílu různých od nuly zvětšený o 1. Je tedy podíl $A : B$ vyjádřen střední aproximací

$$c_0 + c_1 \cdot 10^{-1} + c_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + c_{k-1} \cdot 10^{-(k-1)} +$$
$$+ (c_k + 1) \cdot 10^{-k} -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{10B} + 1\right) \cdot 10^{-k},$$

při čemž horní hranice chyby je menší než

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1} + c_k}{10B} + 1 + \frac{k+2}{B}\right) \cdot 10^{-k}.$$

Zvýšení přesnosti, jehož tím dosáhneme, je celkem nepatrné, proto je výhodnější raději počítat bez oprav o jedno místo přesněji. Pro srovnání uvádíme oba způsoby výpočtu:

```
1,414213|6 : 3,14159|27 ≈ 0,450158*)
  157576
     496
     182
      25
       0
```

*) Znaménka $\approx$ budeme užívati pro přibližnou rovnost, nestarajíce se o chybu, jež touto aproximací vzniká.

$$\begin{array}{l} 1{,}4142136 : 3{,}141592|7 \approx 0{,}4501584 \\ \;\;1575768 \\ \;\;\;\;\;\;4973 \\ \;\;\;\;\;\;1832 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;262 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;14 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2 \end{array}$$

V prvém případě je

$$\sqrt{2} : \pi = 0{,}450159 - 0{,}9 \,.\, 10^{-6} \pm (0{,}9 + 1{,}0) \,.\, 10^{-6} = \\ = 0{,}450158 \pm 2 \,.\, 10^{-6},$$

kdežto ve druhém po téměř stejné námaze

$$\sqrt{2} : \pi = 0{,}4501585 - 5 \,.\, 10^{-7} \pm 5 \,.\, 10^{-7} = 0{,}4501580 \pm 5 \,.\, 10^{-7}$$

s přesností daleko větší.

Cvičení. **24**. Jestliže při zkráceném dělení bez oprav vyjde některá „číslice" podílu rovna 10, následují za ní vesměs nuly nejvýše s výjimkou poslední číslice podílu. Dokažte! — [Uvědomte si, jaký zbytek může vyjíti, je-li některá číslice podílu rovna 10.]

25. Je-li dělitel větší než 4,5 a určíme-li zkráceným dělením bez oprav podíl na n míst, je horní hranice sekundární chyby menší než $n + 1$ jednotek posledního místa. Dokažte!

26. Jestliže při dělení stanovíme několik prvních číslic podílu dělením obyčejným a teprve další číslice dělením zkráceným, lze ve výrazu pro odhad horní hranice chyby vynechat ty číslice, jež byly stanoveny obyčejným dělením. Dokažte! — [Je-li obyčejným dělením stanoveno i číslic, je $B_k = B_{k-1} = B_{k-2} = \ldots = B_{k-i+1} = B$.]

13. Zkrácené odmocňování. Máme-li vypočítat $\sqrt[m]{A}$, předpokládejme, že jsme nějak již stanovili několik prvních číslic této odmocniny, při čemž poslední stanovená číslice buď řádu k-tého. Označme takto nalezené číslo písmenem B. To značí

$$\sqrt[m]{A} > B, \quad \text{ale} \quad \sqrt[m]{A} < B + 10^k,$$

čili

$$\sqrt[m]{A} = B + c, \quad \text{kde} \quad 0 < c < 10^k.$$

Kdyby bylo $c = 0$, bylo by přesně $\sqrt[m]{A} = B$. Umocněním a použitím binomické věty dostaneme z nalezené rovnice

$$A = B^m + m \,.\, B^{m-1}c + \binom{m}{2} B^{m-2}c^2 + \binom{m}{3} B^{m-3}c^3 + \ldots + c^m. \qquad (*)$$

Na pravé straně ponechme pouze prvé dva členy a ostatní, jichž je $m - 1$, vynechme. Tím se zmenší hodnota pravé strany, takže je

$$A > B^m + m \,.\, B^{m-1}c.$$

Odtud plyne

$$c < \frac{A - B^m}{m \,.\, B^{m-1}}.$$

Zavedeme-li označení

$$\frac{A - B^m}{m \,.\, B^{m-1}} = c_2,$$

dostáváme

$$c < c_2.$$

Jestliže za druhé na pravé straně rovnice (*) necháme prvé dva členy beze změny a píšeme-li v ostatních $m - 1$ členech c_2 místo c, zvětší se pravá strana rovnice, takže je

$$A < B^m + m \,.\, B^{m-1}c + \binom{m}{2} B^{m-2}c_2^2 + \binom{m}{3} B^{m-3}c_2^3 + \ldots + c_2^m.$$

Odtud dostáváme

$$c > c_2 - \frac{c_2}{m}\left[\binom{m}{2}\frac{c_2}{B} + \binom{m}{3}\left(\frac{c_2}{B}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{c_2}{B}\right)^{m-1}\right].$$

Tím jsme sevřeli číslo c mezi dvě meze, z nichž jednu můžeme považovati za horní a druhou za dolní aproximaci čísla c. Horní aproximace c_2 vyjde, dělíme-li zbytek při odmocňování $A - B^m$ číslem $m \,.\, B^{m-1}$.

Pro druhou odmocninu je $m = 2$. Podle toho máme

$$c < c_2 = \frac{A - B^2}{2B},\ c > c_2 - \frac{c_2{}^2}{2B},$$

takže

$$c = c_2 - \frac{c_2{}^2}{4B} \pm \frac{c_2{}^2}{4B}.$$

Stanovíme tedy u druhé odmocniny určitý počet míst (třebas podle tabulek nebo odmocňováním) a pak lze další místa přibližně určiti tak, že zbytek při odmocňování $A - B^2$ dělíme dvojnásobným dosud známým částečným výsledkem. Tím dostaneme horní aproximaci druhé odmocniny. Horní hranice sekundární chyby je menší než druhá mocnina nalezeného podílu dělená čtyrnásobným částečným výsledkem.

Příklad 1. Určeme $\sqrt{10}$. Odmocněním nalezneme čtyři číslice výsledku:

$$\sqrt{10} > 3{,}162,\ \sqrt{10} < 3{,}163,\ \text{při čemž}\ 10 - 3{,}162^2 = 0{,}001756.$$

Další místa dostaneme dělením

$$c_2 = 0{,}001756 : 6{,}324 \doteq 0{,}000277672.$$

Pro horní hranici chyby dostaneme odhad

$$\frac{c_2{}^2}{4B} < \frac{(28 \,.\, 10^{-5})^2}{4 \,.\, 3{,}16} \doteq 62 \,.\, 10^{-10}.$$

Je tedy celkem

$$\begin{aligned}\sqrt{10} &= 3{,}162277672 - 62 \,.\, 10^{-10} \pm 5 \,.\, 10^{-10} \pm 62 \,.\, 10^{-10} = \\ &= 3{,}162277666 \pm 7 \,.\, 10^{-9},\end{aligned}$$

neboť výše vypočtený podíl je určen s chybou $5 \,.\, 10^{-10}$. Jestliže místo dělení obyčejného užijeme dělení zkráceného zvětší se chyba výsledku o chybu tohoto zkráceného dělení.

Příklad 2. Počítejme ještě $\sqrt{e}$, kde $e \doteq 2{,}71828$ je základ přirozených logaritmů. Odmocněním dostaneme čtyři místa výsledku 1,648 se zbytkem 0,002376. Primární chyba je podle odst. 8 menší než

$$\frac{0{,}5\ .\ 10^{-5}}{2\ .\ 2{,}7}\ .\ 1{,}65 \doteq 0{,}15\ .\ 10^{-5}.$$

Další místa výsledku dostaneme zkráceným dělením bez oprav

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}002\overset{\cdot 4}{3}76 : \overset{0}{3}{,}296 \approx 0{,}000\overset{\cdot 4}{7}20 \\ \qquad 688 \qquad\qquad\qquad\quad 10 \\ \qquad\ \ 30 \\ \qquad\quad 0 \end{array}\right\}$$

s chybou, jež je menší než

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2+10}{3{,}3}+1\right).\ 10^{-7} \doteq 2{,}3\ .\ 10^{-7},\text{*)}$$

takže jest

$$c_2 = 0{,}0007211 - 2{,}3\ .\ 10^{-7} \pm 2{,}3\ .\ 10^{-7}.$$

Chyba vzniklá tím, že jsme odmocňování nahradili dělením, je menší než $c_2{}^2 : 4B = 52\ .\ 10^{-8} : 6{,}6 \doteq 8\ .\ 10^{-8}$. Je tedy celkem

$$\sqrt{e} = 1{,}6487211 - 2{,}3\ .\ 10^{-7} - 0{,}8\ .\ 10^{-7} \pm 15\ .\ 10^{-7} \pm \\ \pm 2{,}3\ .\ 10^{-7} \pm 0{,}8\ .\ 10^{-7} = 1{,}648721 \pm 2\ .\ 10^{-6}.$$

Podobně pro třetí odmocninu je $m = 3$, takže

$$c < c_2 = \frac{A - B^3}{3B^2},\ c > c_2 - \frac{c_2{}^2}{B}\left(1 + \frac{c_2}{3B}\right).$$

Předpokládáme-li, že B má aspoň 3 číslice, z nichž poslední je řádu k-tého, je $B \geqq 100\ .\ 10^k$, $c < 10^k$, takže

$$\frac{c_2}{3B} = \frac{(B+c)^3 - B^3}{9B^3} = \frac{c}{3B}\left(1 + \frac{c}{B} + \frac{c^2}{3B^2}\right) < 0{,}0034.$$

---

*) Ježto zkrácené dělení začíná teprve stanovením druhé číslice podílu, není třeba při odhadování horní hranice chyby brát zřetel na první číslici (viz cvič. **26**).

Ježto chybu neudáváme nikdy přesněji než na dvě místa, lze v dolní aproximaci čísla c člen $c_2 : 3B$ vynechat, takže je s dostatečnou přesností

$$c = c_2 - \frac{c_2^2}{2B} \pm \frac{c_2^2}{2B}.$$

Příklad 3. Podle toho dostáváme pro $\sqrt[3]{\pi}$, kde $\pi \doteq 3{,}14159$, z tabulky třetích mocnin přibližnou hodnotu $1{,}46 < \sqrt[3]{3{,}14159}$ se zbytkem 0,029454. Primární chyba je menší než $\frac{0{,}5 \,.\, 10^{-5}}{3 \,.\, 3{,}1} \,.$ $. \, 1{,}5 \doteq 8 \,.\, 10^{-7}$. Vedle toho je $1{,}46^2 = 2{,}1316$, takže zkráceným dělením dostaneme další místa výsledku

$$\begin{array}{l} \phantom{c_2 = {}}\overset{-3}{}\qquad\overset{0}{}\qquad\quad\overset{-3}{} \\ c_2 = 0{,}029454 : 6{,}3948 \approx 0{,}0046061 \\ \phantom{c_2 = 0{,}0}38748 \\ \phantom{c_2 = 0{,}029}384 \\ \phantom{c_2 = 0{,}02945}6 \\ \phantom{c_2 = 0{,}02945}0 \end{array}$$

s chybou menší než $\frac{1}{2}\left(\frac{6 + 6 + 1}{6{,}4} + 1\right) . \, 10^{-7} \doteq 1{,}5 \,.\, 10^{-7}$.

Tím, že jsme odmocňování nahradili dělením, vzniká chyba menší než $c_2^2 : 2B = 21 \,.\, 10^{-6} : 2{,}92 \doteq 7{,}2 \,.\, 10^{-6}$, takže je celkem

$$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4646062 - 1{,}5 \,.\, 10^{-7} - 72 \,.\, 10^{-7} \pm 8 \,.\, 10^{-7} \pm$$
$$\pm\, 1{,}5 \,.\, 10^{-7} \pm 72 \,.\, 10^{-7} = 1{,}464599 \pm 9 \,.\, 10^{-6}.$$

Poznámka. I tu by bylo lze při zkráceném dělení bráti opravy, ale zvýšení přesnosti by bylo většinou bezvýznamné.

Cvičení. **27.** První „číslice“, která vznikne, jestliže počítáme další místa v odmocnině (nezkráceným) dělením, může být rovna 10. Dokažte! — [Vyjádřete c_2 s pomocí B a c a uvědomte si, jakých hodnot může B a c nabýti.]

28. Jestliže při hledání druhé odmocniny stanovíme odmocňováním n míst výsledku (při čemž $n \geqq 2$) a určíme-li další místa (nezkráceným) dělením, načež vzniklý podíl zaokrouhlíme na $n - 1$ místo (takže obdržíme celkem $2n - 1$ míst ve výsledku), je chyba výsledku menší než 0,8 jednotky stojící na posledním místě. Dokažte!

29. Počítáme-li týmž způsobem třetí odmocninu, mohlo by se v krajním případě státi, že horní hranice chyby překročí zcela nepatrně jednu jednotku posledního místa. Dokažte!

IV. OBECNÁ METHODA K VÝPOČTU HORNÍ HRANICE CHYBY

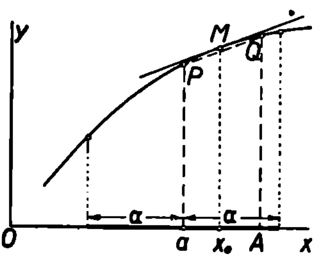
14. Funkce jedné proměnné. V této kapitole budeme potřebovat několik vět z diferenciálního počtu. Uvedeme je většinou bez důkazu s odkazy, kde lze přesný důkaz nalézti.

Je-li dána funkce $y = f(x)$ jedné proměnné x a dosadíme-li sem za x neúplné číslo $A = a \pm \alpha$, bude také hodnota této funkce neúplným číslem. Chceme nalézti horní hranici chyby tohoto neúplného čísla.

Omezíme se jen na takové funkce $f(x)$, jež jsou spojité a mají derivaci $f'(x)$ v celém intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, určeném dolní a horní aproximací čísla A, i na jeho hranicích. Všechny funkce, s nimiž se v praxi setkáváme, tomuto předpokladu vyhovují.

Pro jednoduchost budeme ještě předpokládati, že třeba $a < A$. Ježto interval $[a, A]$ je celý obsažen v intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, funkce $f(x)$ je spojitá a má derivaci i ve všech bodech intervalu $[a, A]$. Pak pro tuto funkci platí *věta o střední hodnotě*, známá z diferenciálního počtu.*) Podle této věty existuje aspoň jedno číslo x_0, pro něž $a < x_0 < A$, které má tu vlastnost, že

$$f(A) - f(a) = (A - a) f'(x_0).$$



Obr. 2.

Znázorníme-li si průběh funkce $y = f(x)$ geometricky v pravoúhlé soustavě souřadnic x, y křivkou (viz obr. 2), na níž argumentu a odpovídá bod P a argumentu A bod Q, neznamená věta o střední hodnotě nic jiného, než to, že na křivce existuje mezi body P, Q aspoň jeden bod M té vlastnosti, že tečna v něm je rovnoběžná s tětivou PQ.

*) Její důkaz je v každé učebnici diferenciálního počtu. Viz na př. Čech str. 110, věta II.

Hodnotě argumentu A odpovídá hodnota funkce $f(A)$ a hodnotě argumentu a odpovídá hodnota funkce $f(a)$. Jestliže místo přesné hodnoty argumentu A dosadíme střední aproximaci a a považujeme-li $f(a)$ za střední aproximaci hodnoty $f(A)$, dostaneme hodnotu funkce s chybou $f(A)$ — — $f(a)$, jež je podle předcházejícího rovna výrazu $(A-a)f'(x_0)$, kde x_0 je vhodně volené číslo z intervalu $[a, A]$. Kdybychom předpokládali, že $a > A$, nic by se na naší úvaze nezměnilo, až na to, že by se na obr. 2 body P, Q navzájem vyměnily.

Nám jde o absolutní hodnotu nalezené chyby. Pro ni platí

$$|f(A) - f(a)| = |A - a| \,.\, |f'(x_0)|.$$

První činitel na pravé straně je $|A - a| \leqq \alpha$. Probíhá-li x různé hodnoty z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, nabývá výraz $|f'(x)|$ určitých hodnot a pro jakési $x_0{}'$ z tohoto intervalu se stává největším, takže platí $|f'(x)| \leqq |f'(x_0{}')|$ pro všecka x z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, a tedy také pro x_0 je $|f'(x_0)| \leqq$ $\leqq |f'(x_0{}')|$. Dosadíme-li do pravé strany α místo $|A - a|$ a $|f'(x_0{}')|$ místo $|f'(x_0)|$, nezmenší se tím pravá strana, takže

$$|f(A) - f(a)| \leqq \alpha |f'(x_0{}')|.$$

Tento výraz lze považovati za horní hranici chyby, s níž byla aproximována hodnota $f(A)$. Rovnost by mohla nastati, kdyby A padlo právě na hranici intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ a kdyby zároveň $|f'(x_0)|$ bylo maximem, jehož $|f'(x)|$ nabude v $[a - \alpha, a + \alpha]$. To však je možná, jen když $f(x)$ má tvar $kx + q$, kde k, q jsou konstanty.

Ježto $|f'(x)|$ se stoupajícím x zpravidla v celém intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ buď stoupá nebo klesá, bývá buď $x_0{}' = a + \alpha$, je-li absolutní hodnota derivace $|f'(x)|$ funkcí stoupající, nebo $x_0{}' = a - \alpha$, je-li absolutní hodnota derivace $|f'(x)|$ funkcí klesající. Je-li však dále interval $[a - \alpha, a + \alpha]$ dosti úzký a počítáme-li v praxi horní hranici chyby ze zaokrouhlených hodnot, lze za horní hranici prosté chyby považovati s dostatečnou přesností výraz

$$\alpha |f'(a)|.$$

Příklad. Vyšetříme podle toho horní hranici prosté chyby funkce

$$f(x) = x^r,\ r \neq 1,$$

kde r je libovolné číslo. Pro tuto funkci je $f'(x) = rx^{r-1}$. Předpokládáme-li, že $x > 0$, pak je také $x^{r-1} > 0$ a absolutní hodnota derivace je $|f'(x)| = |r| \,.\, x^{r-1}$. Aproximujeme-li přesnou hodnotu A^r střední aproximací a^r, je podle předcházejícího výkladu absolutní hodnota prosté chyby

$$|A^r - a^r| < \alpha|r| \,.\, x_0'^{r-1},$$

kde x_0' je ta hodnota z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, pro niž je x^{r-1} co největší. Třeba rozeznávati dva případy:

a) Je-li $r > 1$, je $r - 1 > 0$ a x^{r-1} je funkce stoupající, takže položíme $x_0' = a + \alpha$. Pak je

$$|A^r - a^r| < \alpha r(a + \alpha)^{r-1}$$

v souhlase s tím, co bylo odvozeno jinou cestou na konci odst. 6 pro $r = n > 1$ celé. Poměrná chyba vzhledem k horní aproximaci je pak co do absolutní hodnoty menší než

$$r \,.\, \frac{\alpha}{a + \alpha}.$$

b) Je-li $r < 1$, je $r - 1 < 0$ a x^{r-1} je funkce klesající; proto položíme $x_0' = a - \alpha$. Pak je

$$|A^r - a^r| < \alpha|r|(a - \alpha)^{r-1}$$

opět v souhlase s tím, co bylo odvozeno pro $r = -n$, kde n je celé kladné, na konci odst. 7 a pro $r = 1 : n$, n celé kladné, v odst. 8. Z nalezeného výrazu plyne

$$\frac{|A^r - a^r|}{(a - \alpha)^r} < |r| \,.\, \frac{\alpha}{a - \alpha},$$

což je pro $r > 0$ výraz pro odhad poměrné chyby vzhledem k dolní aproximaci a pro $r < 0$ odhad poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci.

Cvičení. **30**. Stanovte horní hranici prosté chyby funkcí a) $\frac{1-x}{1+x}$ pro $x > 0$; b) $\frac{1+x}{1-x}$ pro $x > 0$, $x \neq 1$; c) $\sqrt{1+x^2}$ pro $x > 0$; d) $\sqrt{1-x^2}$ pro $0 < x < 1$; e) $\sqrt{x^2-1}$ pro $x > 1$, dosadíme-li za x neúplné číslo $A = a \pm \alpha$. — [a) $\frac{2x}{(1+a-\alpha)^2}$; b) $\frac{2\alpha}{(1-a-\alpha)^2}$ pro $a + \alpha < 1$, $\frac{2\alpha}{(1-a+\alpha)^2}$ pro $a - \alpha > 1$; c) $\frac{\alpha(a+\alpha)}{\sqrt{1+(a+\alpha)^2}}$; d) $\frac{\alpha(a+\alpha)}{\sqrt{1-(a+\alpha)^2}}$; e) $\frac{\alpha(a-\alpha)}{\sqrt{(a-\alpha)^2-1}}$.]

15. Logaritmus. Jestliže $y = \lg x$,*) je $y' = \frac{1}{x}$ funkce klesající pro $x > 0$, takže

$$|\lg A - \lg a| < \frac{\alpha}{a-\alpha},$$

t. j. horní hranice prosté chyby přirozeného logaritmu je menší než horní hranice poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho dolní aproximaci.

Jde-li o dekadický logaritmus $y = \log x$, je $y' = \frac{\mu}{x}$, kde $\mu \doteq 0{,}434$ je t. zv. modul dekadických logaritmů. Pak ovšem

$$|\log A - \log a| < \frac{\alpha\mu}{a-\alpha}. \tag{1}$$

O horní hranici prosté chyby logaritmu tedy rozhoduje horní hranice poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k dolní aproximaci, kterou lze však s dostatečnou přesností nahraditi horní hranicí poměrné chyby vzhledem ke střední aproximaci.

Hledáme-li obráceně k danému logaritmu x číslo y, běží u přirozených logaritmů o funkci $y = e^x$, neboť z té plyne

*) Přirozené logaritmy (t. j. logaritmy o základu $e \doteq 2{,}71828$) označujeme symbolem $\lg x$; dekadické logaritmy (o základu 10) označujeme $\log x$. Mezi oběma platí $\log x = \mu \lg x$, kde $\mu \doteq 0{,}434$. Pro $x = e$ plyne odtud $\mu = \log e$ a pro $x = 10$ je $\mu = 1 : \lg 10$ (Čech str. 85).

$x = \lg y$. Pak je $y' = e^x$, což je funkce stoupající, a proto

$$|e^A - e^a| < \alpha e^{a+\alpha}, \text{ čili } \frac{|e^A - e^a|}{e^{a+\alpha}} < \alpha.$$

To znamená, že horní hranice poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho horní aproximaci je menší než horní hranice prosté chyby jeho přirozeného logaritmu.

Jde-li o dekadický logaritmus, jde o funkci $y = 10^x = e^{x\lg 10} = e^{\frac{x}{\mu}}$, takže $y' = \frac{1}{\mu} e^{\frac{x}{\mu}} = \frac{1}{\mu}10^x$. Pak je

$$|10^A - 10^a| < \frac{\alpha}{\mu} 10^{a+\alpha}, \text{ čili } \frac{|10^A - 10^a|}{10^{a+\alpha}} < \frac{\alpha}{\mu}. \tag{2}$$

O horní hranici poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho horní aproximaci, kterou ovšem lze s dostatečnou přesností nahraditi horní hranicí poměrné chyby vzhledem ke střední aproximaci, *rozhoduje horní hranice prosté chyby logaritmu.*

Vyšetříme nyní horní hranici chyby součinu nebo podílu dvou čísel A, B počítaného logaritmicky. Podle toho, co bylo právě uvedeno, je

$$|\log AB - \log ab| = |(\log A + \log B) - (\log a + \log b)| \leqq$$
$$\leqq |\log A - \log a| + |\log B - \log b| < \frac{\mu\alpha}{a-\alpha} + \frac{\mu\beta}{b-\beta},$$

$$\left|\log\frac{A}{B} - \log\frac{a}{b}\right| = |(\log A - \log B) - (\log a - \log b)| \leqq$$
$$\leqq |\log A - \log a| + |\log B - \log b| < \frac{\mu\alpha}{a-\alpha} + \frac{\mu\beta}{b-\beta}.$$

Výrazy na pravých stranách jsou větší, než je horní hranice prosté chyby logaritmů součinu a podílu. Těmto logaritmům odpovídají čísla, jejichž horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci jsou μ-kráte menší než horní hranice prostých chyb jejich logaritmů. Je tedy v obou případech horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci menší než

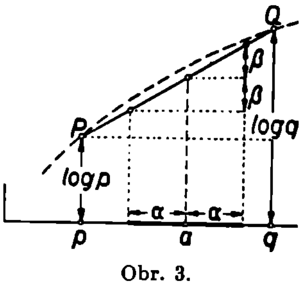
$$\frac{\alpha}{a-\alpha}+\frac{\beta}{b-\beta}.$$

Počítáme-li součin nebo podíl dvou čísel logaritmicky, je horní hranice poměrné chyby výsledku vzhledem k jeho horní aproximaci menší než součet horních hranic poměrných chyb obou daných čísel vzhledem k jejich dolní aproximaci. Platnost této věty lze bez obtíží rozšířiti na součin nebo podíl většího počtu čísel.

Porovnáme-li tento výsledek s výsledkem úvah v odst. **6** a **7**, lze říci, že logaritmickým počítáním je nepřesnost výsledku dotčena jen velmi nepatrně, takže v praxi lze takto vzniklý rozdíl bez obavy zanedbati, pokud ovšem užíváme k výpočtům dostatečně přesných logaritmů. Užití tabulek ne dosti přesných může míti značný vliv na přesnost výsledku, jak uvidíme ještě v dalších odstavcích.

Při výpočtech v praxi zpravidla neužíváme výše odvozených vzorců pro výpočet chyby. Pokud se pohybujeme v dosti úzkém rozmezí, můžeme předpokládati, že přírůstek logaritmů je velmi přibližně úměrný přírůstku argumentu. Do jaké míry je tento přepoklad splněn, vyšetříme podrobněji v odst. **22**.

Nalezneme-li dvě čísla p, q taková, aby $p \leqq a-\alpha < a+ +\alpha \leqq q$ a aby jejich rozdíl $q-p$ byl dosti malý, a známe-li hodnoty $\log p$, $\log q$, lze v obr. 3 oblouk logaritmické křivky $y=\log x$ mezi body P, Q, jež odpovídají hodnotám $\log p$, $\log q$, s dostatečnou přesností nahraditi úsečkou.



Obr. 3.

Označíme-li horní hranici prosté chyby logaritmu čísla A písmenem β, platí podle věty o podobných trojúhelnících

$$\beta : \alpha = (\log q - \log p) : (q - p), \quad \text{takže } \beta = \alpha \,.\, \frac{\log q - \log p}{q - p}\,.$$

Rozdíl $\log q - \log p$ lze vyčísti z tabulky (je-li $q = p + 1$, je to t. zv. *tabulková diference*) a odtud snadno vypočteme β.

Příklad 1. Hledáme $\log(45{,}37 \pm 0{,}005)$ třebas v pětimístné tabulce; nalezneme $\log 45{,}37 \doteq 1{,}65677$; zvětší-li se argument z 45,36 na 45,38 (mezi těmito čísly jsou všecka čísla intervalu $[45{,}37 - 0{,}005,\ 45{,}37 + 0{,}005]$), t. j. o 0,02, zvětší se logaritmus o 19 jednotek posledního desetinného místa. Horní hranici chyby 0,005 odpovídá tedy přírůstek $0{,}005 \,.\, \dfrac{19}{0{,}02} \doteq 5$ jednotek posledního místa. Je tedy $\log(45{,}37 \pm 0{,}005) = 1{,}65677 \pm 5 \,.\, 10^{-5}$. Podle vzorce (1) uvedeného na počátku tohoto odstavce dostáváme pro horní hranici chyby tohoto logaritmu hodnotu $\dfrac{0{,}434 \,.\, 0{,}005}{45{,}4} \doteq 5 \,.\, 10^{-5}$ jako předtím.

Příklad 2. Je-li $\log A = 2{,}51374 \pm 25 \,.\, 10^{-5}$, je $a \doteq 326{,}4$; číslům 326,2 a 326,6, jejichž rozdíl je 0,4 a mezi nimiž očekáváme hledané číslo, odpovídají logaritmy 2,51348 a 2,51402, jejichž rozdíl je 54 jednotek posledního desetinného místa. Horní hranici prosté chyby logaritmu, jež je rovna 25 jednotkám posledního desetinného místa, odpovídá přírůstek čísla o $25 \,.\, \dfrac{0{,}4}{54} \doteq 0{,}2$, takže $A = 326{,}4 \pm 0{,}2$. Podle vzorce (2) dostáváme horní hranici prosté chyby čísla A ve tvaru $\dfrac{25 \,.\, 10^{-5}}{0{,}434} \,.\, 326{,}4 \doteq 0{,}2$, což je opět v souhlasu s předcházejícím odhadem.*)

Poznámka. K rychlým výpočtům tohoto druhu lze s výho-

*) V těchto příkladech jsme nebrali zřetel na to, že logaritmy uvedené v tabulkách jsou čísla zaokrouhlená. To vyšetříme podrobně v odst. **20**.

dou užívati logaritmického pravítka, jehož přesnost je zcela postačující.

Cvičení. **31.** Horní hranici prosté chyby dekadického logaritmu lze nahraditi méně přesným výrazem $\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a}$, pokud horní hranice poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho střední aproximaci není větší než 0,13. Dokažte!

32. Horní hranici poměrné chyby logaritmovaného čísla vzhledem k jeho střední aproximaci lze nahraditi číslem $2{,}5 \cdot \alpha$, pokud horní hranice prosté chyby dekadického logaritmu není větší než 0,035. Dokažte!

33. a) Je-li logaritmované číslo zaokrouhleno na n cifer (kde $n \geqq 2$), je horní hranice prosté chyby jeho dekadického logaritmu menší než čtvrtina $(n - 1)$ho desetinného místa. b) Je-li dekadický logaritmus zaokrouhlen na n desetinných míst (kde $n \geqq 2$), je horní hranice prosté chyby logaritmovaného čísla menší než osmina jednotky stojící na $n - 1$ místě (počítáno zleva). Dokažte!

34. Jestliže počítáme součin nebo podíl dvou čísel logaritmicky s použitím dekadických logaritmů, zvětší se horní hranice jeho prosté chyby méně než v poměru 5 : 4 proti horní hranici prosté chyby, která by mohla vzniknouti, počítáme-li přímo bez použití logaritmů. Dokažte! — [Užijte výsledků cvičení 31 a 32.]

16. Funkce goniometrické a cyklometrické. Při vyšetřování funkcí goniometrických a cyklometrických, jež budeme provádět v tomto odstavci, omezíme se na úhly z intervalu $[0, \frac{1}{2}\pi]$.*)

Je-li $y = \sin x$, je $y' = \cos x$, což je pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ funkce klesající. Proto podle odst. 14 pro horní hranici prosté chyby sinu úhlu $A \doteq a \pm \alpha$ platí

$$|\sin A - \sin a| < \alpha \cos(a - \alpha).$$

Dělíme-li obě strany této nerovnosti číslem $\sin(a - \alpha)$, což je nejmenší hodnota, jíž dosáhne $\sin x$ v intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, dostaneme, že horní hranice poměrné chyby sinu úhlu vzhledem k jeho dolní aproximaci je

*) Úhly měříme v t. zv. *míře obloukové*, v níž je pravý úhel vyjádřen číslem $\frac{1}{2}\pi$, přímý úhel číslem π a plný úhel číslem 2π. Jednotkou je úhel zvaný *radián*, jehož velikost v míře stupňové je 57°17′45″.

$$\frac{|\sin A - \sin a|}{\sin(a - \alpha)} < \alpha \operatorname{cotg}(a - \alpha).$$

Je-li α stálé, pak $\cos(a - \alpha)$ a rovněž tak i $\operatorname{cotg}(a - \alpha)$ se stoupajícím úhlem a klesá, proto *táž chyba, se kterou je naměřena velikost úhlu, má tím větší vliv na chybu jeho sinu, čím je měřený úhel menší.*

Jde-li o funkci $y = \cos x$, je $y' = -\sin x$ a funkce $|y'| = = \sin x$ je pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ funkce stoupající, takže pro horní hranici prosté chyby kosinu úhlu $A = a \pm \alpha$ platí

$$|\cos A - \cos a| < \alpha \sin(a + \alpha).$$

Ježto $\cos(a + \alpha)$ je nejmenší hodnota, jíž může dosáhnouti $\cos x$ v intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$, je horní hranice poměrné chyby kosinu úhlu vzhledem k jeho dolní aproximaci vázána nerovností

$$\frac{|\cos A - \cos a|}{\cos(a + \alpha)} < \alpha \operatorname{tg}(a + \alpha).$$

Ježto $\sin(a + \alpha)$ a rovněž tak i $\operatorname{tg}(a + \alpha)$ se stoupajícím a stoupá, *táž chyba, se kterou je určen úhel, má tím větší vliv na jeho kosinus, čím větší je měřený úhel.*

Obdobně pro $y = \operatorname{tg} x$ je $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, což je funkce stoupající, pokud $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, proto je pro $A = a \pm \alpha$ horní hranice prosté chyby

$$|\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} a| < \frac{\alpha}{\cos^2(a + \alpha)}$$

a horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci

$$\frac{|\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} a|}{\operatorname{tg}(a + \alpha)} < \frac{\alpha}{\cos^2(a + \alpha) \operatorname{tg}(a + \alpha)} = \frac{2\alpha}{\sin 2(a + \alpha)}.$$

Zcela stejně pro $y = \operatorname{cotg} x$ je $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $|y'| = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, což je funkce klesající, takže horní hranice prosté chyby je

$$|\mathrm{cotg} A - \mathrm{cotg} a| < \frac{\alpha}{\sin^2(a - \alpha)}$$

a horní hranice poměrné chyby vzhledem k horní aproximaci

$$\frac{|\mathrm{cotg} A - \mathrm{cotg} a|}{\mathrm{cotg}(a - \alpha)} < \frac{\alpha}{\sin^2(a - \alpha)\,\mathrm{cotg}(a - \alpha)} = \frac{2\alpha}{\sin 2(a - \alpha)},$$

neboť $\mathrm{cotg}(a - \alpha)$ je největší hodnota z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$.

Odtud je viděti, že *horní hranice prosté chyby tangenty úhlu je tím větší, čím je úhel větší; u kotangenty je tomu obráceně.* Proto stanovíme sinus a tangentu přesněji u úhlů malých, naproti tomu kosinus a kotangentu stanovíme přesněji u úhlů blízkých úhlu pravému. Ježto vždy $\sin x \leqq 1$, $\cos x \leqq 1$, plyne odtud, že horní hranice prosté chyby u sinu nebo kosinu je vždy menší než horní hranice prosté chyby tangenty a kotangenty. Proto *k výpočtu různých veličin s pomocí goniometrických funkcí užíváme raději sinu nebo kosinu než tangenty nebo kotangenty,* a to sinu tehdy, jde-li o úhly malé, kdežto kosinu tehdy, jde-li o úhly blízké úhlu pravému.

Ježto v praxi vždy čísla zaokrouhlujeme, je poměrná chyba tangenty prakticky táž jako poměrná chyba kotangenty. Odvozených formulí se ovšem užívá jen k úvahám theoretického rázu, při praktickém počítání se horní hranice chyb určují podle diferencí funkčních hodnot v tabulkách uvedených obdobně, jako to bylo vyloženo v odst. **15** při stanovení horní hranice chyby logaritmu.

Hledáme-li obráceně k dané goniometrické funkci úhel, jde o funkce

$$y = \arcsin x,\ y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

takže $$|\arcsin A - \arcsin a| < \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (a + \alpha)^2}};$$

$$y = \operatorname{arccos} x, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{takže} \quad |\operatorname{arccos} A - \operatorname{arccos} a| < \frac{\alpha}{\sqrt{1-(a+\alpha)^2}};$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{takže} \quad |\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} a| < \frac{\alpha}{1+(a-\alpha)^2};$$

$$y = \operatorname{arccotg} x, y' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{takže} \quad |\operatorname{arccotg} A - \operatorname{arccotg} a| < \frac{\alpha}{1+(a-\alpha)^2}.$$

Jde-li tedy o úhel $B = b \pm \beta$, pro který platí $B = \operatorname{arcsin} A$, čili $A = \sin B$, horní hranice jeho prosté chyby je podle prvního vzorce

$$|B - b| < \frac{\alpha}{\cos(b+\beta)}.$$

Je-li úhel B určen kosinem, t. j. je-li $B = \operatorname{arccos} A$, čili $A = \cos B$, je

$$|B - b| < \frac{\alpha}{\sin(b-\beta)},$$

neboť hodnotě $a + \alpha$ odpovídá $\cos(b - \beta)$, ježto $\operatorname{arccos} x$ se stoupajícím x klesá. Je-li úhel B určen tangentou, t. j. je-li $B = \operatorname{arctg} A$, čili $A = \operatorname{tg} B$, je horní hranice jeho prosté chyby

$$|B - b| < \alpha \cos^2(b - \beta).$$

Konečně je-li B určeno kotangentou, t. j. je-li $B = \operatorname{arccotg} A$, $A = \operatorname{cotg} B$, je

$$|B - b| < \alpha \sin^2(b + \beta),$$

ježto $\operatorname{arccotg} x$ se stoupajícím x klesá. Ježto pak vždy $\sin x \leqq 1$, $\cos x \leqq 1$, je výraz pro horní hranici chyby úhlu B menší u tangenty a kotangenty než u sinu a kosinu, pokud hodnoty těchto funkcí jsou určeny s touž horní hranicí prosté chyby α. Proto *úhel dostaneme přesněji, počítáme-li jej s pomocí tangenty nebo kotangenty, než počítáme-li jej s pomocí sinu nebo kosinu.*

Cvičení. **35.** Dokažte správnost vět: a) Je-li úhel určen s chybou, která je menší než 10″, je jeho sinus nebo kosinus určen s chybou, jež je menší než 0,5 jednotky čtvrtého desetinného místa. b) Je-li tangenta nebo kotangenta úhlu dána s chybou, která je menší než 0,5 jednotky čtvrtého desetinného místa, je úhel určen s chybou, jež je zpravidla menší než 10″.

36. Vyšetřte prostou chybu funkcí a) $y = \log \sin x$, b) $y = \log \cos x$, c) $y = \log \operatorname{tg} x$, d) $\log \operatorname{cotg} x$, která vznikne, dosadíme-li za x neúplné číslo $A = a \pm \alpha$.

[a) $\alpha\mu \operatorname{cotg}(a - \alpha)$, b) $\alpha\mu \operatorname{tg}(a + \alpha)$, c), d) $\dfrac{2\alpha\mu}{\sin 2(a - \alpha)}$ pro $a < \frac{1}{4}\pi$,

$$\frac{2\alpha\mu}{\sin 2(a + \alpha)} \text{ pro } a > \tfrac{1}{4}\pi.]$$

37. Vyšetřete prostou chybu funkcí inversních k funkcím uvedeným v předcházejícím cvičení. — [Jsou-li logaritmy goniometrických funkcí dány s chybou α a odpovídá-li jim úhel $B = b \pm \beta$, je horní hranice chyby tohoto úhlu menší než a) $\dfrac{\alpha}{\mu} \operatorname{tg}(b + \beta)$, b) $\dfrac{\alpha}{\mu} \operatorname{cotg}(b - \beta)$, c), d) $\dfrac{\alpha}{2\mu} \sin 2(b + \beta)$ pro $b < \frac{1}{4}\pi$ a $\dfrac{\alpha}{2\mu} \sin 2(b - \beta)$ pro $b > \frac{1}{4}\pi$.]

38. Je-li logaritmus tangenty nebo kotangenty dán s chybou, která je menší než 0,5 jednotky čtvrtého desetinného místa, je jím úhel určen s chybou, jež je menší než 12″. Dokažte!

17. Funkce více proměnných. Je-li dána funkce $u = f(x, y)$ dvou proměnných x, y a dosadíme-li sem za x a y neúplná čísla $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, je také hodnota této funkce neúplným číslem. Přesná hodnota funkce je $f(A, B)$ a za její střední aproximaci budeme považovati číslo $f(a, b)$. Prostá chyba při této aproximaci je dána rozdílem

$$f(A, B) - f(a, b).$$

Omezíme se jen na takové funkce $f(x, y)$ dvou proměnných x, y, jež jsou spojité a mají spojité parciální derivace pro všecka x z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ a pro všecka y z intervalu $[b - \beta, b + \beta]$.*)

Výraz udávající chybu lze psáti ve tvaru

$$f(A, B) - f(a, B) + f(a, B) - f(a, b),$$

a proto

$$|f(A, B) - f(a, b)| \leqq |f(A, B) - f(a, B)| + |f(a, B) - f(a, b)|.$$

Rozdíl $f(A, B) - f(a, B)$ závisí jenom na chybě, s níž je dáno číslo $A = a \pm \alpha$, neboť B je v něm konstantní. Jde tedy o chybu funkce jedné proměnné, jež podle odst. **14** vyhovuje nerovnosti

$$|f(A, B) - f(a, B)| \leqq \alpha \max \left|\frac{\partial f(x, B)}{\partial x}\right|,$$

kde znakem $\max \left|\frac{\partial f(x, B)}{\partial x}\right|$ rozumíme největší hodnotu, jíž nabývá absolutní hodnota parciální derivace $\frac{\partial f(x, B)}{\partial x}$ pro

---

*) O funkci $f(x, y)$ dvou proměnných x, y říkáme, že je spojitá pro $x = a, y = b$, jestliže ke každému kladnému číslu ε dovedeme nalézti taková dvě kladná čísla δ_1, δ_2, aby pro všecka x a pro všecka y, pro něž platí $|x - a| < \delta_1$, $|y - b| < \delta_2$, bylo $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$. Tento výrok lze vysloviti také takto: funkce $f(x, y)$ je spojitá pro $x = a$, $y = b$, existuje-li limita $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$.

Jestliže ve funkci $f(x, y)$ považujeme y za konstantní a utvoříme-li derivaci této funkce podle x, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce $f(x, y)$ podle x a označujeme ji symbolem

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Podobně považujeme-li x za konstantní a utvoříme-li derivaci podle y, nazýváme tuto derivaci parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle y a označujeme ji symbolem

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

některé vhodně zvolené x z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$. Ježto jde o derivaci podle x, při čemž $y = B$ je konstantní, dostáváme skutečně parciální derivaci funkce $f(x, y)$.

Podobně rozdíl $f(a, B) - f(a, b)$ závisí pouze na chybě, s níž je dáno číslo $B = b \pm \beta$, neboť tentokrát je a konstantní. To značí, že

$$|f(a, B) - f(a, b)| \leqq \beta \max \left|\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}\right|,$$

kde znak $\max \left|\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}\right|$ značí největší hodnotu, jíž nabývá $\left|\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}\right|$ pro některé vhodně zvolené y z intervalu $[b - \beta, b + \beta]$.

Podle předpokladu jsou parciální derivace $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ funkce spojité. Proto také jejich absolutní hodnoty jsou funkce spojité pro všecka x z intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ a pro všecka y z intervalu $[b - \beta, b + \beta]$ a nabývají pro určité vhodně zvolené hodnoty x a y z těchto intervalů nejvyšších hodnot. Tyto nejvyšší hodnoty označíme symboly $\max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|$, $\max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|$. Přitom není ovšem třeba, aby obě tyto funkce nabývaly nejvyšších hodnot současně pro totéž x a y. Tak dostáváme konečně pro horní hranici prosté chyby funkce dvou proměnných odhad

$$|f(A, B) - f(a, b)| \leqq \alpha \max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right| + \beta \max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|,$$

neboť

$$\max \left|\frac{\partial f(x, B)}{\partial x}\right| \leqq \max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|, \max \left|\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}\right| \leqq \max \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|.$$

Platnost nalezených výsledků lze snadno rozšířiti na funkce o více proměnných, a to úplnou indukcí. O těchto funkcích budeme předpokládati, že jsou spojité a mají spojité parciální derivace pro všecky hodnoty proměnných v těch intervalech, ve kterých to budeme potřebovati.

(1) Předpokládejme, že pro funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jejichž hodnoty $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou dány neúplnými čísly $A_1 = a_1 \pm \alpha_1$, $A_2 = a_2 \pm \alpha_2, \ldots$, $A_n = a_n \pm \alpha_n$, platí

$$|f(A_1, A_2, \ldots, A_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)| \leqq$$
$$\alpha_1 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + \alpha_2 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| + \ldots + \alpha_n \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|,$$

kde znakem $\max \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ rozumíme maximální hodnotu, jíž může $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ dosíci. Jde-li o funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ $n + 1$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, jejichž hodnoty $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B jsou dány neúplnými čísly $A_1 = a_1 \pm \alpha_1$, $A_2 = a_2 \pm \pm \alpha_2, \ldots, A_n = a_n \pm \alpha_n$, $B = b \pm \beta$, je absolutní hodnota prosté chyby

$$\begin{aligned}
&|f(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)| = \\
&= |f(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, B) + \\
&+ f(a_1, a_2, \ldots, a_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)| \leqq \\
&\leqq |f(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, B)| + \\
&+ |f(a_1, a_2, \ldots, a_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)|.
\end{aligned}$$

Ale prvý člen podle předpokladu není větší

$$\alpha_1 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|' + \alpha_2 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|' + \ldots + \alpha_n \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|',$$

kde ovšem maxima prostých hodnot parciálních derivací obsahují místo y hodnotu B, což je naznačeno akcentem. Druhý člen podle odst. 14 není větší než $\beta \max \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|'$, kde akcent upozorňuje, že $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$. Ale jistě je $\max \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|' \leqq \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$, $\max \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|' \leqq \max \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$, kde pravé strany značí maximum prosté hodnoty, které dosáhne parciální derivace vůbec, kdykoli je vyhověno nerovnostem $a_1 - \alpha_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + \alpha_1$, $a_2 - \alpha_2 \leqq x_2 \leqq a_2 + \alpha_2, \ldots,$ $a_n - \alpha_n \leqq x_n \leqq a_n + \alpha_n$, $b - \beta \leqq y \leqq b + \beta$. Je tedy také pro $n + 1$ proměnných

$$|f(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)| \leqq$$

$$\leqq \alpha_1 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + \alpha_2 \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| + \ldots + \alpha_n \max \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| + $$

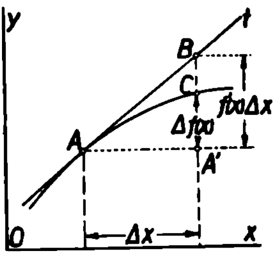
$$+ \beta \max \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

(2) Na počátku tohoto odstavce bylo dokázáno, že věta platí pro $n = 2$, proto platí i pro $n = 3$. Protože platí pro $n = 3$, platí i pro $n = 4$ atd. bez jakéhokoli omezení.

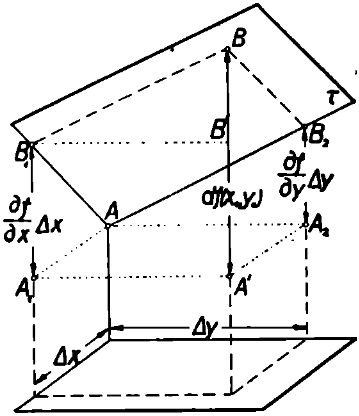
18. Diferenciál. V tomto odstavci osvětlíme předcházející úvahy s jiné strany.

Budiž dána funkce $f(x)$ jedné nezávisle proměnné x, o níž budeme předpokládati, že je spojitá pro $x = x_0$ a že má pro tuto hodnotu derivaci. Znázorníme-li tuto funkci graficky, t. j. nanášíme-li hodnoty argumentu jako úsečky a hodnoty funkce jako pořadnice, dostaneme křivku znázorněnou na obr. 4. Argumentu $x = x_0$ nechť odpovídá bod A. Vzhledem k učiněným přepokladům křivka má v bodě A tečnu t, jejíž směrnice je, jak známo, rovna derivaci $f'(x_0)$ funkce $f(x)$ pro $x = x_0$. Zvětší-li se argument x_0 o Δx, dostaneme na tečně bod B. Označíme-li přírůstek pořadnice $\overline{A'B}$ znakem $\mathrm{d}f(x_0)$, je $\mathrm{d}f(x_0) : \Delta x = f'(x_0)$, čili $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \,.\, \Delta x$. Tento přírůstek se v diferenciálním počtu označuje názvem *diferenciál* funkce $f(x)$ pro $x = x_0$. Jest jej ovšem odlišovati od přírůstku funkce $\overline{A'C}$, který se označuje znakem $\Delta f(x_0)$ a jest obecně různý od právě zavedeného diferenciálu. Je-li $f(x) = x$, je $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x$, ale podle právě vyslovené definice je také $\mathrm{d}f(x) = 1 \,.\, \Delta x$, neboť derivace funkce $f(x) = x$ je rovna 1. Proto lze přírůstek Δx také nazývati diferenciálem nezávisle proměnné a označovati jej $\mathrm{d}x$. Pak se rovnice, jíž jest definován diferenciál, psává obyčejně ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \,.\, \mathrm{d}x.$$



Obr. 4.*)



Obr. 5.

Podobný postup lze zvoliti i pro funkci $f(x, y)$ dvou nezávisle proměnných x, y, o níž budeme předpokládati, že je spojitá pro $x = x_0$, $y = y_0$ a že má pro tyto hodnoty obě parciální derivace. Znázorníme-li tuto funkci graficky v prostoru, t. j. nanášíme-li hodnoty nezávisle proměnných jako souřadnice x, y a jim odpovídající hodnoty funkce jako souřadnici z, dostaneme plochu. Argumentům $x = x_0$, $y = y_0$ odpovídá bod A. Vzhledem k učiněných předpokladům má plocha v bodě A tečnou rovinu τ (viz obr. 5, kde však není zmíněná plocha pro jednoduchost zakreslena).

---

*) V obr. 4 úsečka $\overline{A'B}$ má býti označena $f'(x_0).\Delta x$ a úsečka $\overline{A'C}$ má být označena $\Delta f(x_0)$.

Zvětší-li se argument x_0 o Δx a argument y_0 o Δy, dostaneme na tečné rovině bod B. Přírůstek $\overline{A'B}$ označíme zcela analogicky znakem $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ a nazveme jej *totálním diferenciálem* funkce $f(x, y)$ pro $x = x_0$, $y = y_0$. Jde o to, abychom jej vyjádřili s pomocí přírůstků Δx, Δy. Je-li $\Delta y = 0$, dostáváme funkci $f(x, y_0)$ jedné proměnné x, neboť druhá proměnná $y = y_0$ je konstantní. Tu je podle předcházejícího přírůstek $\overline{A_1B_1} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \,.\, \Delta x$. Podobně pro $\Delta x = 0$, čili $x = x_0$ jde o funkci $f(x_0, y)$ jedné proměnné y, jejíž přírůstek je $\overline{A_2B_2} = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \,.\, \Delta y$. Avšak vzhledem ke shodnosti trojúhelníků $\triangle B_1B'B \cong \triangle AA_2B_2$, kde $B_1B' \parallel A_1A'$, je $\overline{B'B} = \overline{A_2B_2}$. Vedle toho $\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}$, takže $\overline{A'B} = \overline{A'B'} + \overline{B'B} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2}$. Potom je

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \,.\, \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \,.\, \Delta y.$$

Je-li $f(x, y) = x$, je jednak $\mathrm{d}f(x, y) = \mathrm{d}x$, jednak $\mathrm{d}f(x, y) = 1 \,.\, \Delta x$, čili $\mathrm{d}x = \Delta x$. Podobně pro $f(x, y) = y$ je $\mathrm{d}f(x, y) = \mathrm{d}y$ a také $\mathrm{d}f(x, y) = 1 \,.\, \Delta y$, takže $\mathrm{d}y = \Delta y$. Proto přírůstky Δx, Δy nazýváme diferenciály nezávisle proměnných a označujeme je $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. Pak se totální diferenciál obyčejně vyjadřuje ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \mathrm{d}y.$$

Zcela obdobně lze zavésti pojem totálního diferenciálu i u funkce $f(x, y, z, \ldots)$ více proměnných $x, y, z, \ldots$. Pro $x = x_0, y = y_0, z = z_0, \ldots$ je totální diferenciál této funkce

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0, z_0, \ldots) = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots)}{\partial x} \mathrm{d}x + \\ + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots)}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \ldots)}{\partial z} \mathrm{d}z + \ldots .$$

Porovnáme-li tento výsledek s výsledkem úvah v předcházejícím odstavci, lze uvésti obecný předpis, jak stanoviti horní hranici prosté chyby funkce několika proměnných:

Horní hranice prosté chyby funkce několika nezávisle proměnných, jejichž hodnoty jsou dány neúplnými čísly, není větší než výraz, který vznikne, utvoříme-li absolutní hodnotu totálního diferenciálu této funkce, do níž místo absolutních hodnot diferenciálů nezávisle proměnných dosadíme horní hranice chyb těchto proměnných a místo absolutních hodnot parciálních derivací funkce dosadíme jejich maximální hodnoty, jichž nabudou v intervalech, jimiž jsou daná neúplná čísla definována.

Příklad 1. Je-li $f(x, y) = x + y$, je $\mathrm{d}f(x, y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ a $|\mathrm{d}x + \mathrm{d}y| \leqq |\mathrm{d}x| + |\mathrm{d}y|$. Pro $x = A = a \pm \alpha$, $y = B = b \pm \beta$ dostáváme

$$|(A + B) - (a + b)| \leqq \alpha + \beta$$

v souhlasu s odst. **4**.

Příklad 2. Je známo, že $\mathrm{d}(xy) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, $|y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y| \leqq |y| \,.\, |\mathrm{d}x| + |x| \,.\, |\mathrm{d}y|$, takže

$$|AB - ab| \leqq (b + \beta)\alpha + (a + \alpha)\beta$$

podobně jako v odst. **6**.

Příklad 3. Ježto

$$\left|\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)\right| = \left|\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}\right| \leqq \left|\frac{1}{y}\right| . |\mathrm{d}x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| . |\mathrm{d}y|,$$

vychází pro prostou chybu podílu výraz

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{\alpha}{b - \beta} + \frac{(a + \alpha)\beta}{(b - \beta)^2} = \frac{\alpha b + \beta a}{(b - \beta)^2},$$

což je výsledek jen nepatrně větší než výraz odvozený v odst. **7**.

Poznámka. Při praktickém počítání netřeba úzkostlivě hledati maximální hodnoty, jichž dosáhnou absolutní hodnoty parciálních derivací, nýbrž s dostačující přesností lze do absolutních hodnot parciálních derivací přímo dosaditi střední aproximace daných veličin. Rozdíly, jež tak vzniknou, jsou bezvýznamné, neboť horní hranici prosté chyby odhadujeme vždy jen na jednu nebo nejvýše dvě platné cifry a raději je zaokrouhlujeme vzestupně.

Příklad 4. Určiti přeponu pravoúhlého trojúhelníka jsou-li dány odvěsny $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$. Jde o funkci $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tu je

$$|\mathrm{d}f| = \left|\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leq \left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| . |\mathrm{d}x| + \left|\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| . |\mathrm{d}y| .$$

Pak horní hranice prosté chyby, s níž je vypočtena přepona, není větší než výraz*)

$$\frac{(a + \alpha)\alpha}{\sqrt{(a + \alpha)^2 + (b - \beta)^2}} + \frac{(b + \beta)\beta}{\sqrt{(a - \alpha)^2 + (b + \beta)^2}},$$

což však lze s dostatečnou přesností nahraditi výrazem

$$\frac{a\alpha + b\beta}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

jako v příkladě 2. v odst. 8.

Příklad 5. V trojúhelníku jsou dány strany $a = (32{,}4 \pm 0{,}05)$ cm, $b = (46{,}5 \pm 0{,}05)$ cm, $c = (24{,}8 \pm 0{,}05)$ cm. Určiti jeho úhly a obsah.

Z kosinové věty

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

dostáváme diferencováním

$$a\,\mathrm{d}a = b\,\mathrm{d}b + c\,\mathrm{d}c - c\cos\alpha\,\mathrm{d}b - b\cos\alpha\,\mathrm{d}c + bc\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

a odtud

$$bc\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = a\,\mathrm{d}a - (b - c\cos\alpha)\,\mathrm{d}b - (c - b\cos\alpha)\,\mathrm{d}c.$$

---

*) Výraz $\left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}$ je největší, když $\left(\frac{y}{x}\right)^2$ je co nejmenší, t. j. pro $y = b - \beta$, $x = a + \alpha$. Podobně zjistíme, že druhý výraz je největší pro $x = a - \alpha$, $y = b + \beta$.

Ježto však $bc \sin\alpha = 2P$, kde P je obsah trojúhelníka, $b - c\cos\alpha = a\cos\gamma$, $c - b\cos\alpha = a\cos\beta$, je

$$2P\,\mathrm{d}\alpha = a(\mathrm{d}a - \cos\gamma\,\mathrm{d}b - \cos\beta\,\mathrm{d}c),$$

takže výraz

$$|\mathrm{d}\alpha| \leqq \frac{a}{2P}(|\mathrm{d}a| + |\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}c|)$$

lze přibližně vzíti za horní hranici chyby úhlu α, měřenou ovšem v míře obloukové.*) Přitom $|\mathrm{d}a|$, $|\mathrm{d}b|$, $|\mathrm{d}c|$ značí horní hranice chyby daných stran. Podobné dva výrazy, které vzniknou cyklickou záměnou, lze považovati za horní hranice chyby ostatních úhlů. Dále z rovnice $2P = bc\sin\alpha$ dostaneme diferencováním

$$2\,\mathrm{d}P = c\sin\alpha\,\mathrm{d}b + b\sin\alpha\,\mathrm{d}c + bc\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

a dosadíme-li sem za $\mathrm{d}\alpha$ podle předcházejícího, vyjde

$$4P\,\mathrm{d}P = abc\cos\alpha\,\mathrm{d}a + c(2P\sin\alpha - ab\cos\alpha\cos\gamma)\,\mathrm{d}b + \\ + b(2P\sin\alpha - ac\cos\alpha\cos\beta)\,\mathrm{d}c.$$

Ježto však

$$2P\sin\alpha - ab\cos\alpha\cos\gamma = ab(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma) = \\ = ab\cos\beta,$$

$$2P\sin\alpha - ac\cos\alpha\cos\beta = ac\cos\gamma,$$

je

$$4P\,\mathrm{d}P = abc(\cos\alpha\,\mathrm{d}a + \cos\beta\,\mathrm{d}b + \cos\gamma\,\mathrm{d}c).$$

Lze tedy výraz

$$|\mathrm{d}P| \leqq \frac{abc}{4P}(|\cos\alpha| \,.\, |\mathrm{d}a| + |\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}c|)$$

vzíti za horní hranici chyby, se kterou je určen obsah.

Počítáme-li střední aproximaci úhlů a obsahu ze středních aproximací stran, vyjde podle pravidel známých z trigonometrie: $\alpha \approx 41°30'$, $\beta \approx 108°2'$, $\gamma \approx 30°28'$, $P \approx 382\ \mathrm{cm}^2$; přitom není vzat zřetel na sekundární chybu, která vzniká

*) Násobíme-li nalezený výsledek číslem $180 \,.\, 60 : \pi \doteq 3438$, dostaneme horní hranici chyby v úhlových minutách.

tím, že logaritmy, jichž jsme používali k výpočtům, jsou čísla zaokrouhlená, a která při užití čtyrmístných tabulek je u všech úhlů menší než 1′ a při určení obsahu menší než 0,14 cm². Primární chyba je pak podle odvozených vzorců

$$|\mathrm{d}\alpha| \leqq \frac{a}{2P}\,(|\mathrm{d}a| + |\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}c|) < 16',$$

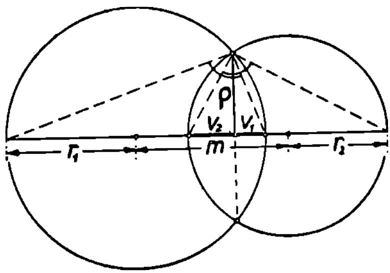
$$|\mathrm{d}\beta| \leqq \frac{b}{2P}\,(|\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}a| + |\mathrm{d}b| + |\cos\alpha| \,.\, |\mathrm{d}c|) < 28',$$

$$|\mathrm{d}\gamma| \leqq \frac{c}{2P}\,(|\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}a| + |\cos\alpha| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\mathrm{d}c|) < 12',$$

$$|\mathrm{d}P| \leqq \frac{abc}{4P}\,(|\cos\alpha| \,.\, |\mathrm{d}a| + |\cos\beta| \,.\, |\mathrm{d}b| + |\cos\gamma| \,.\, |\mathrm{d}c|) < 2{,}4.$$

Je tedy celkem $\alpha = 41°30' \pm 16'$, $\beta = 108°2' \pm 28'$, $\gamma = 30°28' \pm 12'$, $P = (382 \pm 2{,}4)\ \mathrm{cm}^2$. Mohli jsme tedy vskutku sekundární chybu vynechat.

Příklad 6. Dány dvě koule s poloměry $r_1 = (13 \pm 0{,}05)$ cm, $r_2 = (11 \pm 0{,}05)$ cm, jejich středy jsou navzájem vzdáleny o $m = (20 \pm 0{,}1)$ cm. Jaký je objem tělesa čočkovitého tvaru oběma koulím společného?



Obr. 6.

Obě koule se protínají v kružnici o poloměru ϱ, jejíž rovina odtíná od koulí kulové úseče o výškách v_1, v_2. Pro ně platí (viz obr. 6)

$$\varrho^2 = v_1(2r_1 - v_1),$$
$$\varrho^2 = v_2(2r_2 - v_2),$$
$$m = r_1 - v_1 + r_2 - v_2.$$

Odtud třeba určiti ϱ, v_1, v_2 a dosaditi do výrazu pro objem, který je podle známých vzorců ze stereometrie

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{2}\pi\varrho^2(v_1 + v_2) + \tfrac{1}{6}\pi(v_1^3 + v_2^3) = \\ &= \tfrac{1}{2}\pi v_1^2(2r_1 - v_1) + \tfrac{1}{2}\pi v_2^2(2r_2 - v_2) + \tfrac{1}{6}\pi(v_1^3+v_2^3) = \\ &= \pi(r_1v_1^2 + r_2v_2^2) - \tfrac{1}{3}\pi(v_1^3 + v_2^3). \end{aligned}$$

Utvoříme-li diferenciály, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \pi(v_1^2\,\mathrm{d}r_1+2r_1v_1\,\mathrm{d}v_1 + v_2^2\,\mathrm{d}r_2 + 2r_2v_2\,\mathrm{d}v_2) - \\ &\quad - \pi(v_1^2\,\mathrm{d}v_1+v_2^2\,\mathrm{d}v_2) = \\ &= \pi[v_1^2\,\mathrm{d}r_1+v_2^2\,\mathrm{d}r_2+v_1(2r_1 - v_1)\,\mathrm{d}v_1+v_2(2r_2-v_2)\,\mathrm{d}v_2]= \\ &= \pi(v_1^2\,\mathrm{d}r_1+v_2^2\,\mathrm{d}r_2+\varrho^2\,\mathrm{d}v_1+\varrho^2\mathrm{d}v_2). \end{aligned}$$

Ježto $\mathrm{d}m = \mathrm{d}r_1 - \mathrm{d}v_1 + \mathrm{d}r_2 - \mathrm{d}v_2$, je $\mathrm{d}v_1 + \mathrm{d}v_2 = \mathrm{d}r_1 + \mathrm{d}r_2 - \mathrm{d}m$, takže

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \pi(v_1^2\,\mathrm{d}r_1+v_2^2\,\mathrm{d}r_2+\varrho^2\,\mathrm{d}r_1+\varrho^2\,\mathrm{d}r_2 - \varrho^2\,\mathrm{d}m) = \\ &= \pi(2r_1v_1\,\mathrm{d}r_1 + 2r_2v_2\,\mathrm{d}r_2 - \varrho^2\,\mathrm{d}m). \end{aligned}$$

Pro horní hranici prosté chyby odtud dostaneme

$$|\mathrm{d}V| \leqq \pi(2r_1v_1\,|\mathrm{d}r_1| + 2r_2v_2\,|\mathrm{d}r_2| + \varrho^2\,|\mathrm{d}m|).$$

Počítáme-li v_1, v_2, ϱ, V z daných středních aproximací, dostaneme střední aproximace $v_1 \approx 1{,}8$, $v_2 \approx 2{,}2$, $\varrho \approx 6{,}6$, $V \approx 282$, takže

$$|\mathrm{d}V|\leqq\pi(26\,.\,1{,}8\,.\,0{,}05+22\,.\,2{,}2\,.\,0{,}05+6{,}6^2\,.\,0{,}1)=\pi\,.\,9{,}116<29.$$

Odtud vychází $V = (282 \pm 29)\ \mathrm{cm}^3$.

Cvičení. **39.** Zorný úhel optického přístroje (t. j. úhel sevřený krajními paprsky, které vytvořují ještě ostrý obrázek) je $2x$. Jakou část oblohy přehlédneme přístrojem, jehož zorný úhel byl stanoven hodnotou $40° \pm 1°$? — $\left[\left|\mathrm{d}\dfrac{P}{S}\right| \leqq \sin\alpha|\mathrm{d}\alpha|,\ \dfrac{P}{S} = 0{,}060 \pm 0{,}006\right.$, t. j. zhruba 6%.]

40. Měříme-li neznámý odpor X vodiče methodou Wheatstoneova můstku, dospíváme k úměře $X : R = a : (l - a)$, kde R je známý odpor, l je délka můstku a a určuje polohu posuvného kontaktu. Považujeme-li R a l za přesné, určete horní hranici poměrné chyby měřeného odporu na základě horní hranice chyby $|\mathrm{d}a|$, s níž byla určena poloha posuvného kontaktu. Kdy je poměrná chyba výsledku nejmenší? — $\left[\dfrac{|\mathrm{d}X|}{X} \leqq \dfrac{l}{a(l-a)}\,|\mathrm{d}a|\right.$, nejmenší pro $a = \tfrac{1}{2}l.\Big]$

41. Kámen byl volně puštěn do propasti a jeho náraz na dno bylo slyšeti po $t \pm |\mathrm{d}t|$ vteřinách. Určete horní hranici poměrné chyby, s níž lze vypočísti hloubku propasti. (Gravitační zrychlení g a rychlost zvuku c považujte za přesné.) — [Je-li h hloubka propasti, je doba pádu $\sqrt{\frac{2h}{g}}$; doba, jíž potřebuje zvukový signál na cestu zpět, je $\frac{h}{c}$, takže platí $\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} = t$, odtud $\frac{|\mathrm{d}h|}{h} \leqq \left(1 + \sqrt{\frac{c}{c+2gt}}\right)\frac{|\mathrm{d}t|}{t} <$ $< 2 \cdot \frac{|\mathrm{d}t|}{t}$.]

42. V praxi se pravý úhel vytyčuje tak, že se sestrojí trojúhelník o stranách $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 5$ m. Je-li horní hranice chyby každé strany 0,1 m, stanovte horní hranici chyby, jež odtud vyplývá pro sestrojený úhel. — $\left[\frac{a|\mathrm{d}a| + b|\mathrm{d}b| + c|\mathrm{d}c|}{ab} < 6°.\right]$

43. Souřadnice bodů $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ byly změřeny s chybami, jejichž horní hranice jsou $|\mathrm{d}x_1|$, $|\mathrm{d}y_1|$, $|\mathrm{d}x_2|$, $|\mathrm{d}y_2|$. S jakou chybou lze odtud vypočísti vzdálenost $s = \overline{AB}$ a úhel φ, sevřený kladným smyslem osy x a přímkou AB? — $[(|\mathrm{d}x_1| + |\mathrm{d}x_2|)\,|\cos\varphi| + (|\mathrm{d}y_1| +$ $+ |\mathrm{d}y_2|)\,|\sin\varphi|$, $[(|\mathrm{d}x_1| + |\mathrm{d}x_2|)\,|\sin\varphi| + (|\mathrm{d}y_1| + |\mathrm{d}y_2|)\,|\cos\varphi|] : s.]$

44. Byly změřeny hrany kvádru: $a = (48{,}2 \pm 0{,}1)$ cm, $b =$ $= (27{,}5 \pm 0{,}1)$ cm, $c = (16{,}3 \pm 0{,}1)$ cm. Určete délku tělesné úhlopříčky! — $[|\mathrm{d}u| \leqq \cos\alpha|\mathrm{d}a| + \cos\beta|\mathrm{d}b| + \cos\gamma|\mathrm{d}c|$, kde α, β, γ jsou úhly, jež svírá úhlopříčka s hranami; $u = (57{,}8 \pm 0{,}2)$ cm.]

45. Na vodorovné rovině stojí stožár, jehož vrchol spatřujeme od severu ve výškovém úhlu $\alpha = 30°10' \pm 10'$, pokročíme-li o $a =$ $= (25{,}2 \pm 0{,}1)$ m na západ, uzříme jej ve výškovém úhlu $\beta =$ $= 19°30' \pm 10'$. Určete výšku stožáru! — $\left[|\mathrm{d}x| \leqq \frac{x}{a}|\mathrm{d}a| +\right.$ $\left.+ \frac{x^3}{a^2}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}|\mathrm{d}\alpha| + \frac{\cos\beta}{\sin^3\beta}|\mathrm{d}\beta|\right),\ x = (11{,}3 \pm 0{,}3)\text{ m.}\right]$

46. Dána koule o poloměru $r = (20 \pm 0{,}1)$ cm a svítící bod vzdálený od jejího středu o $m = (50 \pm 0{,}5)$ cm. Jaká část povrchu koule je osvětlena? — $\left[\left|\mathrm{d}\frac{P}{S}\right| \leqq \frac{r|\mathrm{d}m| + m|\mathrm{d}r|}{2m^2},\ \frac{P}{S} = 0{,}3 \pm 0{,}003.\right]$

47. V trojúhelníku byly změřeny strany $a = (23{,}4 \pm 0{,}05)$ m, $b = (46{,}8 \pm 0{,}05)$ m a úhel $\gamma = 73°26' \pm 3'$. Stanovte třetí stranu, zbývající úhly a obsah! — [$c = (45{,}97 \pm 0{,}08)$ m, $\alpha = 29°12' \pm 6'$,

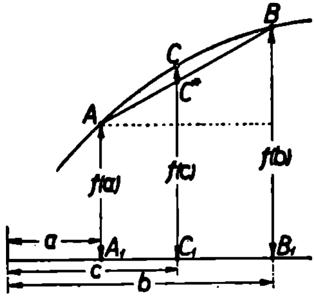
$\beta = 77°22' \pm 8'$, $P = (525 \pm 2)\ \mathrm{m}^2$; $|\mathrm{d}c| \leqq |\cos\beta||\mathrm{d}a| + |\cos\alpha||\mathrm{d}b| + \frac{2P}{c}|\mathrm{d}\gamma|$, $c|\mathrm{d}\alpha| \leqq \sin\beta|\mathrm{d}a| + \sin\alpha|\mathrm{d}b| + a|\cos\beta||\mathrm{d}\gamma|$, $\frac{|\mathrm{d}P|}{P} \leqq \frac{|\mathrm{d}a|}{a} + \frac{|\mathrm{d}b|}{b} + |\mathrm{cotg}\gamma||\mathrm{d}\gamma|$.]

48. V trojúhelníku byla změřena strana $a = (46{,}2 \pm 0{,}05)$ m a úhly $\beta = 68°54' \pm 3'$, $\gamma = 78°18' \pm 3'$. Určete třetí úhel, zbývající strany a obsah! — [$\alpha = 32°48' \pm 6'$, $b = (79{,}6 \pm 0{,}4)$ m, $c = (83{,}5 \pm 0{,}4)$ m, $P = (1800 \pm 10)\ \mathrm{m}^2$; $|\mathrm{d}\alpha| \leqq |\mathrm{d}\beta| + |\mathrm{d}\gamma|$, $\sin\alpha|\mathrm{d}b| \leqq \sin\beta|\mathrm{d}a| + c|\mathrm{d}\beta| + b|\cos\alpha|\,|\mathrm{d}\gamma|$, $|\mathrm{d}P| \leqq \frac{2P}{a}|\mathrm{d}a| + \frac{1}{2}(c^2|\mathrm{d}\beta| + b^2|\mathrm{d}\gamma|)$.]

V. LINEÁRNÍ INTERPOLACE

19. Zbytek interpolace. Funkční hodnoty mnohých funkcí, jichž užíváme k výpočtům, bývají sestaveny v tabulky. Tabulka obsahuje vždy jen takové hodnoty funkcí, jež odpovídají argumentům vybraným nějakým přesně stanoveným způsobem, ale v praxi často potřebujeme funkční hodnoty argumentů, které v tabulce přímo obsaženy nejsou. Tuto kapitolu věnujeme postupu, jímž lze takové funkční hodnoty stanoviti, a provedeme jeho rozbor. Argumenty funkcí uvedených v tabulce jsou zpravidla čísla přesná; v dalším je budeme označovati malými písmeny.

Buď dána funkce $f(x)$ spojitá pro všecka x z intervalu $[a,b]$, při čemž předpokládáme, že $a < b$. Funkce $f(x)$ nechť má pro všecka x z tohoto intervalu první i druhou derivaci. Jejím grafickým znázorněním v pravoúhlé soustavě souřadnicové jest křivka $y = f(x)$ (obr. 7). Jsou-li dány dvě hodnoty $f(a)$, $f(b)$ této funkce a chceme-li vyjádřiti $f(c)$, kde $a < c < b$, často si pomáháme tak, že oblouk křivky $y = f(x)$ mezi body A, B nahrazujeme úsečkou $\overline{AB}$, a místo, abychom brali správnou funkční hodnotu $\overline{C_1C} = f(c)$, spokojíme se s přibližnou hodnotou $\overline{C_1C^*}$, kde C^* leží na úsečce $\overline{AB}$. Tu platí, jak je zřejmo z obrázku,



Obr. 7.

$$\overline{C_1C^*} = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a).$$

Tento postup, při němž se oblouk křivky nahrazuje částí přímky, se nazývá *lineární interpolace*. Jím se dopouštíme určité chyby v určení hodnoty $f(c)$, jež je znázorněna úsečkou $\overline{C^*C}$ a kterou budeme nazývati *zbytek interpolace*. Budeme ji označovati znakem $z(c)$. Přitom platí

$$z(c) = \overline{C_1C} - \overline{C_1C^*} = f(c) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (c - a).$$

Nahlížíme-li na zbytek interpolace jako na funkci x, je

$$z(x) \doteq f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Pro $x = a$ dostáváme $z(a) = 0$, pro $x = b$ dostáváme $z(b) = 0$, jak se lze dosazením přesvědčit. Proto je možno předpokládat, že $z(x)$ lze vyjádřiti ve tvaru

$$z(x) = (x - a)(x - b)v(x),$$

kde $v(x)$ je jakási vhodně zvolená funkce x;*) pro $x = c$ je $z(c) = (c - a)(c - b)v(c)$. Utvoříme-li funkci

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - (x - a)(x - b)v(c),$$

je tato funkce rovna nule pro $x = a$, $x = b$, $x = c$, při čemž $a < c < b$. Podle předpokladu, který jsme učinili o $f(x)$, je také $F(x)$ funkce spojitá pro všecka x z intervalu $[a, b]$ a má pro všecka x z tohoto intervalu prvou i druhou derivaci.

V diferenciálním počtu se dokazuje věta zvaná Rolleova: Je-li $F(a) = F(c) = 0$ a je-li $F(x)$ funkce spojitá, která má pro všecka x z intervalu $[a, c]$ derivaci, pak existuje aspoň jedna hodnota x_1, pro niž $a < x_1 < c$, taková, že derivace $F'(x_1) = 0$.**) Pro naši funkci $F(x)$ jsou předpoklady splněny, proto věta platí. Předpoklady jsou však také splněny pro všecka x z intervalu $[c, b]$, proto také existuje takové x_2,

---

*) Pro $x \neq a$, $x \neq b$ je $v(x) = \dfrac{z(x)}{(x - a)(x - b)}$; hodnoty $v(a)$, $v(b)$, jichž ostatně potřebovati nebudeme, můžeme volit libovolně.

**) Její důkaz je v každé učebnici diferenciálního počtu. Je to na př. věta I na str. 109 příručky E. Čecha.

pro něž $c < x_2 < b$, že $F'(x_2) = 0$. Derivace funkce $F(x)$ je

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - (2x - a - b)v(c).$$

Ježto také $F'(x)$ je funkce spojitá, a jak jsme právě dokázali, existují čísla x_1, x_2 taková, že $F'(x_1) = F'(x_2) = 0$, a ježto dále funkce $F'(x)$ má derivaci, která je rovna druhé derivaci $F''(x)$ původní funkce $F(x)$, platí věta Rolleova i pro funkci $F'(x)$. To znamená, že existuje aspoň jedno x_0 té vlastnosti, že $x_1 < x_0 < x_2$, pro něž $F''(x_0) = 0$. Číslo x_0 náleží také do intervalu $[a, b]$. Druhá derivace funkce $F(x)$ je

$$F''(x) = f''(x) - 2v(c).$$

Pro $x = x_0$ odtud plyne $f''(x_0) - 2v(c) = 0$, čili $v(c) = \frac{1}{2}f''(x_0)$. Je tedy zbytek interpolace $z(c)$ vyjádřen ve tvaru

$$z(c) = (c - a)(c - b)v(c) = \tfrac{1}{2}(c - a)(c - b)f''(x_0).$$

Provedenou úvahu lze doslova opakovati i v tom případě, když c není uvnitř intervalu $[a, b]$. Jen je třeba předpokládati, že $f(x)$ je spojitá a má prvou i druhou derivaci pro všecka x z takového intervalu $[a_1, b_1]$, v němž jsou obsažena všecka tři čísla a, b, c. Pak je x_0 vhodně vybrané číslo z intervalu $[a_1, b_1]$, které nemusí nutně náležeti do intervalu $[a, b]$.

Máme tedy výsledek: *Nechť $f(x)$ je funkce spojitá v intervalu $[a_1, b_1]$ a má pro všecka x z tohoto intervalu prvou i druhou derivaci. Jsou-li a, b, c, tři libovolná čísla z daného intervalu, je vždy*

$$\left.\begin{aligned} f(c) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) + \\ + \tfrac{1}{2}(c - a)(c - b)f''(x_0), \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

kde x_0 je vhodně vybrané číslo z intervalu $[a_1, b_1]$.

Tabulky bývají zpravidla sestaveny pro argumenty, jež se postupně zvětšují o určitou konstantu, zvanou *krok tabulky*, která bývá pro celou tabulku nebo aspoň pro značnou její část stejná. Krok tabulky označíme písmenem h. Dva argumenty v tabulce po sobě jdoucí jsou podle toho a, $b = a + h$ a rozdíl funkčních hodnot těchto dvou argumentů se nazývá *tabulkový rozdíl (tabulková diference)*. Pro tabulkový rozdíl zavedeme stručné označení

$$f(a + h) - f(a) = \Delta f(a).$$

Hledáme hodnotu funkce odpovídající argumentu $c = a + \Theta h$, kde $0 \leqq \Theta < 1$. Přírůstek funkce odpovídající části kroku Θh dostaneme lineární interpolací jako úměrnou část tabulkového rozdílu ve tvaru

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot \Theta h = \Delta f(a) \cdot \Theta.$$

Nahradíme-li správný přírůstek funkce $f(a + \Theta h) - f(a)$ nalezeným přibližným výrazem $\Delta f(a) \cdot \Theta$, dopouštíme se určité chyby, kterou jsme výše nazvali zbytek interpolace. Položíme-li $b = a + h$, $c = a + \Theta h$, je podle svrchu odvozeného pravidla tento zbytek interpolace roven výrazu

$$z(a + \Theta h) = -\tfrac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)h^2 f''(x_0),$$

kde x_0 je vhodně zvolené číslo z intervalu $[a, a + h]$. Je tedy celkem

$$f(a + \Theta h) = f(a) + \Delta f(a) \cdot \Theta - \tfrac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)h^2 f''(x_0).$$

Nám půjde o absolutní hodnotu zbytku interpolace. Pro tu platí

$$|z(a + \Theta h)| = \tfrac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)h^2 |f''(x_0)|,$$

neboť výraz $\Theta(1 - \Theta)$ není pro $0 \leqq \Theta < 1$ nikdy záporný. Maximální hodnoty dosáhne pro $\Theta = \frac{1}{2}$, a to rovné $\frac{1}{4}$. Je tedy vždy $\Theta(1 - \Theta) \leqq \frac{1}{4}$. Druhá derivace $f''(x)$ nabývá pro různá x z intervalu $[a, a + h]$ různých hodnot; označme znakem x_0' takový argument z tohoto intervalu, pro který je $|f''(x_0')|$ maximální, pak je $|f''(x_0)| \leqq |f''(x_0')|$. Je tedy vždy

$$|z(a + \Theta h)| \leqq \tfrac{1}{8}h^2 |f''(x_0')|. \qquad (**)$$

Tohoto výrazu lze použíti pro odhad horní hranice chyby, které se dopustíme, jestliže správnou hodnotu funkce

$f(a + \Theta h)$ nahradíme hodnotou $f(a) + \Delta f(a) \,.\, \Theta$ vzniklou lineární interpolací.

Zpravidla žádáme, aby absolutní hodnota zbytku interpolace nebyla větší než jakési pevně zvolené číslo ζ, t. j. aby $|z(a + \Theta h)| \leqq \zeta$. To nastane zcela jistě, bude-li

$$\tfrac{1}{8}h^2|f''(x_0')| \leqq \zeta.$$

Toho lze dosáhnouti vhodnou volbou kroku tabulky. Stačí voliti h tak, aby

$$h \leqq \sqrt{\frac{8\zeta}{|f''(x_0')|}}.$$

Chceme-li naopak k dané funkční hodnotě y určiti argument x, t. j. chceme-li rozřešiti rovnici $y = f(x)$ podle x, užíváme zpravidla téže tabulky, jíž užíváme k určení hodnoty funkce. Je-li y rovno některé funkční hodnotě $f(a)$ uvedené v tabulce, je $x = a$ a úloha je rozřešena. Není-li tomu tak, najdeme takový argument a, aby platilo $f(a) <$ $< y < f(a + h)$, jde-li o funkci rostoucí, nebo $f(a) > y >$ $> f(a + h)$, jde-li o funkci klesající. Tu musí platit

$$y = f(a) + \Delta f(a) \,.\, \Theta + z(a + \Theta h).$$

Odtud vypočteme

$$\Theta - \frac{y - f(a)}{\Delta f(a)} = - \frac{z(a + \Theta h)}{\Delta f(a)}.$$

Položíme-li $|z(a + \Theta h)| \leqq \zeta$, je

$$\left|\Theta - \frac{y - f(a)}{\Delta f(a)}\right| \leqq \frac{\zeta}{|\Delta f(a)|}.$$

To znamená: Číslo $\dfrac{y - f(a)}{\Delta f(a)}$ je střední aproximací čísla Θ a číslo $a + \dfrac{y - f(a)}{\Delta f(a)} \,.\, h$ je střední aproximací čísla x, které řeší rovnici $y = f(x)$, při čemž horní hranice prosté chyby argumentu x nepřesáhne $\zeta h : |\Delta f(a)|$. Odtud dále plyne, že argument funkce určíme tím přesněji, čím větší je absolutní hodnota tabulkového rozdílu, čili čím funkce rychleji stoupá nebo klesá.

Poznámka. Ježto zpravidla zaokrouhlujeme horní hranici zbytku interpolace jen na jedno nebo nejvýše na dvě místa, lze v předcházejících vzorcích s dostatečnou přesností položiti $|f''(a)|$ místo $|f''(x_0')|$, neboť tyto hodnoty se navzájem liší zcela nepatrně.

Cvičení. **49.** Nalezněte horní hranice pro zbytky lineární interpolace v intervalu $[a, a + h]$, jakož i horní hranice poměrných chyb, s nimiž je funkční hodnota v daném intervalu stanovena, u funkcí: a) x^2, b) x^3, c) $\sqrt{x}$, d) $\sqrt[3]{x}$. — [a) $\frac{1}{4}h^2$, $\frac{h^2}{4a^2}$, b) $\frac{3}{4}(a + h)h^2$, $\frac{3h^2}{4a^2}\left(1 + \frac{h}{a}\right)$, c) $\frac{h^2}{32\sqrt{a^3}}$, $\frac{h^2}{32a^2}$, d) $\frac{h^2}{36\sqrt[3]{a^5}}$, $\frac{h^2}{36a^2}$.]

50. Druhou a třetí odmocninu lze stanoviti také z tabulek druhých a třetích mocnin tak, že k dané hodnotě funkce $y = x^2$, resp. $y = x^3$ hledáme příslušný argument. Stanovte horní hranici poměrné chyby, jíž se dopustíme použitím lineární interpolace a porovnejte ji s výsledkem předcházejícího cvičení. — [Je zhruba a) čtyřikrát, b) devětkrát větší.]

20. Tabulková chyba. Funkční hodnoty uvedené v tabulkách jsou zpravidla zaokrouhleny na určitý počet desetinných míst. Jsou-li zaokrouhleny na k desetinných míst, mluvíme o k-místné tabulce. Zaokrouhlování se děje nejčastěji s opravou podle zásad vyložených v odst. **3**. Podle toho čísla uvedená v tabulce jsou čísla neúplná s chybou, jejíž horní hranice je polovina jednotky posledního ponechaného místa, t. j. $0{,}5 \cdot 10^{-k}$. Tuto chybu budeme v dalším označovati názvem *tabulková chyba.* Její vliv se projevuje jako sekundární chyba výpočtu. S čísly vyčtenými z tabulek musíme proto zacházeti jako s čísly neúplnými a počítati s nimi podle pravidel odvozených v kapitole II. Musíme si být jasně vědomi toho, že výsledek nemůže být přesný, i když jsou daná čísla přesná.

Tabulková chyba má ovšem také vliv na výpočet tabulkového rozdílu funkčních hodnot dvou argumentů v tabulce po sobě jdoucích. Přesná hodnota $f(a)$ buď zaokrouhlena na $f_1(a)$ a přesná hodnota $f(a + h)$ buď zaokrouhlena na $f_1(a + h)$. Tabulkovou chybu čísla $f(a)$ označíme písmenem τ_1 a tabulkovou chybu čísla $f(a + h)$ písmenem τ_2, t. j. položíme

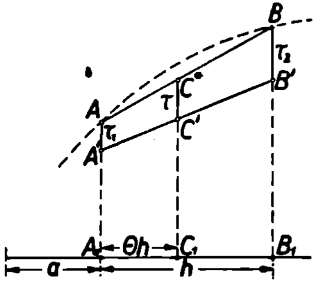
$$f(a) - f_1(a) = \tau_1, \; f(a + h) - f_1(a + h) = \tau_2.$$

Tabulkový rozdíl, který vyčteme z tabulky, je $f_1(a + h) - f_1(a)$ místo správné hodnoty $f(a + h) - f(a)$, při čemž

$$|[f(a + h) - f(a)] - [f_1(a + h) - f_1(a)]| \leqq |\tau_1| + |\tau_2|.$$

Ježto $|\tau_1| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k}$, $|\tau_2| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k}$, lze z tabulky stanoviti tabulkový rozdíl s chybou, jejíž horní hranice je 10^{-k}.

Tabulková chyba se také projevuje, provádíme-li v tabulce lineární interpolaci. Jestliže místo správné hodnoty $\overline{A_1A} = f(a)$ bereme $\overline{A_1A'} = f_1(a)$ a místo správné hodnoty $\overline{B_1B} = f(a + h)$ bereme $\overline{B_1B'} = f_1(a + h)$, znamená to, že místo podél přímky AB interpolujeme podél přímky $A'B'$ (viz obr. 8). Přírůstek funkce odpovídající části kroku Θh, kde $0 \leqq \Theta < 1$, je podle odst. 19 roven $[f(a + h) - f(a)] \,.\, \Theta$, takže $\overline{C_1C^*} = f(a) + [f(a + h) - f(a)] \,.\, \Theta$. Dosadíme-li sem $f(a) = f_1(a) + \tau_1$, $f(a + h) = f_1(a + h) + \tau_2$, dostaneme $\overline{C_1C^*} = \overline{C_1C'} + \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \,.\, \Theta$, neboť $\overline{C_1C'} = f_1(a) + [f_1(a + h) - f_1(a)] \,.\, \Theta$. Je tedy chyba interpolované hodnoty rovna výrazu $\tau = \overline{C_1C^*} - \overline{C_1C'} = (1 - \Theta)\tau_1 + \Theta\tau_2$, takže



Obr. 8.

$$|\tau| \leqq (1 - \Theta)|\tau_1| + \Theta|\tau_2| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k},$$

neboť, jak víme, $|\tau_1| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k}$, $|\tau_2| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-k}$.

Počítáme-li přírůstek funkce, vyčteme z tabulky $f_1(a)$ a $f_1(a + h)$, utvoříme tabulkový rozdíl a násobíme jej číslem Θ. Zpravidla však nevyjde číslo obsahující celistvý počet jednotek posledního (k-tého) desetinného místa. Proto vypočtenou opravu zaokrouhlujeme na jednotky k-tého desetinného místa, čímž se dopouštíme další chyby, jejíž horní hranice je opět $0{,}5 \cdot 10^{-k}$; může se tedy stát, že celková chyba se značně přibližuje k horní hranici, která jest $0{,}5 \cdot 10^{-k} + 0{,}5 \cdot 10^{-k} = 10^{-k}$.

Abychom zbytečně nezvyšovali horní hranici chyby čísla stanoveného lineární interpolací z k-místné tabulky, zaokrouhlíme opravu vzniklou při interpolaci raději o jedno desetinné místo přesněji, než je počet desetinných míst tabulky (tedy až na $k + 1$ desetinné místo). Takto vypočtená funkční hodnota nemá horní hranici chyby zcela jistě větší než 0,55 jednotky k-tého desetinného místa. Přitom neuděláme příliš velkou chybu, budeme-li pro zjednodušení oceňovati tuto horní hranici jen polovinou jednotky posledního desetinného místa. Nesmíme se ovšem nechat mást tím, že funkční hodnota vyčtená podle toho pravidla má o jedno desetinné místo více než hodnoty uvedené v tabulce. Proto toto přidané desetinné místo zpravidla označujeme drobnější číslicí.

Tabulky, v nichž se často provádí lineární interpolace, mívají pro urychlení výpočtu násobky desetiny tabulkového rozdílu (a u měr úhlových někdy i násobky šedesátiny tabulkového rozdílu) již předem vypočteny a sestaveny ve zvláštní pomocné tabulce nadepsané P. P. (partes proportionales = = části úměrné). Ve Valouchových pětimístných tabulkách*) jsou v této pomocné tabulce u logaritmů čísel uvedeny přesné hodnoty a u logaritmů goniometrických funkcí hodnoty zaokrouhlené na jedno desetinné místo. Jejich poslední číslice (desetiny) představují šesté (přidané) místo desetinné. Naproti tomu tabulka čtyrmístná (str. 2—3)

*) *Valouch,* Tabulky logaritmické 10.—12. vyd., str. 10—76.

obsahuje tyto hodnoty zaokrouhlené na jednotky čtvrtého desetinného místa tabulky, takže tabulková chyba se užíváním pomocné tabulky zbytečně zvětšuje.

I při opačném výkonu se projevuje vliv tabulkové chyby. Nebudeme-li přihlížet ke zbytku interpolace, jehož vliv jsme vyšetřili dříve, a označíme-li $f(a + \Theta h) - z(a + \Theta h) = y$, dostaneme vzorec pro lineární interpolaci z odst. **19** ve tvaru

$$y = f(a) + \Delta f(a) \,.\, \Theta.$$

Odtud vypočteme

$$\Theta = \frac{y - f(a)}{\Delta f(a)}.$$

Ponecháme dřívější označení $f(a) = f_1(a) + \tau_1$, $f(a + h) = f_1(a + h) + \tau_2$, kde τ_1, τ_2 jsou tabulkové chyby čísel $f(a)$, $f(a + h)$, a tabulkový rozdíl zaokrouhlených hodnot z tabulky vyčtených označíme $\Delta f_1(a) = f_1(a + h) - f_1(a)$. Pak je $\Delta f(a) = \Delta f_1(a) + \tau_2 - \tau_1$. Za střední aproximaci čísla Θ budeme považovati podíl $[y - f_1(a)] : \Delta f_1(a)$, utvořený z čísel vyčtených z tabulky. Chyba této aproximace je rovna rozdílu

$$\frac{y - f(a)}{\Delta f(a)} - \frac{y - f_1(a)}{\Delta f_1(a)} = - \frac{\tau_1[f_1(a + h) - y] + \tau_2[y - f_1(a)]}{[\Delta f_1(a) + \tau_2 - \tau_1]\Delta f_1(a)},$$

jak zjistíme snadnou úpravou. Ježto obě lomené závorky v čitateli jsou současně téhož znaménka, je

$$|\tau_1[f_1(a + h) - y] + \tau_2[y - f_1(a)]| \leqq$$
$$\leqq |f_1(a + h) - f_1(a)| \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^{-k} = |\Delta f_1(a)| \,.\, 0{,}5 \,.\, 10^{-k}.$$

Vedle toho je $|\Delta f_1(a) + \tau_2 - \tau_1| \geqq |\Delta f_1(a)| - 10^{-k}$ za předpokladu, že $|\Delta f_1(a)| > 10^{-k}$, takže pro absolutní hodnotu výše uvedeného rozdílu dostaneme výraz

$$\left|\frac{y - f(a)}{\Delta f(a)} - \frac{y - f_1(a)}{\Delta f_1(a)}\right| \leqq \frac{0{,}5 \,.\, 10^{-k}}{|\Delta f_1(a)| - 10^{-k}}.$$

Interpolujeme-li podle tabulek, klademe

$$y = f_1(a) + \Delta f_1(a) \,.\, \Theta,$$

kde Θ je dáno s určitou chybou. To má ovšem týž následek, jako kdyby číslo y bylo dáno s chybou $|\Delta f_1(a)|$ krát větší než vypočtený výraz, t. j.

$$\frac{0{,}5\,.\,10^{-k}}{|\Delta f_1(a)| - 10^{-k}}\,.\,|\Delta f_1(a)|,$$

jež se liší jen nepatrně od čísla $0{,}5\,.\,10^{-k}$, takže vliv tabulkové chyby na výsledek lze zhruba vystihnouti tím, že chybu, s níž je stanovena hodnota funkce, zvětšíme ještě jednou o $0{,}5\,.\,10^{-k}$.

Příklad 1. Počítejme logaritmicky součin 11 . 13 . 18 . 19 s použitím pětimístné tabulky. Daná čísla jsou přesná. Je $\log 11 + \log 13 + \log 18 + \log 19 = 1{,}04139 + 1{,}11394 + 1{,}25527 + 1{,}27875 \pm 4\,.\,0{,}5\,.\,10^{-5} = 4{,}68935 \pm 2\,.\,10^{-5}$. Vzhledem k možné tabulkové chybě výsledku třeba zvětšiti horní hranici chyby výsledku na $2{,}5\,.\,10^{-5}$, takže výsledkem je neúplné číslo 48904 ± 3, jež zjistíme podle pravidla v odst. 15. Kdybychom počítali přímo, obdržíme 48906, což je opravdu v nalezených mezích. Vzniklá chyba může mít značný vliv, zejména jde-li o logaritmický výpočet výrazů složených z většího počtu čísel.

Příklad 2. Čtyrmístnými logaritmickými tabulkami počítejme výraz

$$\frac{(326{,}6 \pm 0{,}05)\sin(26°33' \pm 1')\sin(48°25' \pm 1')}{\sin(32°41' \pm 1')\sin(56°18' \pm 1')},$$

ponechávajíce páté desetinné místo nezaokrouhleno. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\log(326{,}6 \pm 0{,}05) &= 2{,}5139_8 \pm 0{,}65\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4}\\
\log\sin(26°33' \pm 1') &= 9{,}6502_8 \pm 2{,}6\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4}\\
\log\sin(48°25' \pm 1') &= 9{,}8739_0 \pm 1{,}2\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4}\\
\hline
&2{,}0381_6 \pm 4{,}45\,.\,10^{-4} \pm 1{,}5\,.\,10^{-4}\\
-\log\sin(32°41' \pm 1') &= -9{,}7324_0 \pm 2{,}0\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4}\\
-\log\sin(56°18' \pm 1') &= -9{,}9201_2 \pm 0{,}9\,.\,10^{-4} \pm 0{,}5\,.\,10^{-4}\\
\hline
&2{,}3856_4 \pm 7{,}35\,.\,10^{-4} \pm 2{,}5\,.\,10^{-4}
\end{aligned}$$

Horní hranici chyby výsledku třeba zvýšiti na $(7{,}35 + 2{,}5 + 0{,}5)10^{-4} = 10{,}35 \,.\, 10^{-4}$, takže hledaná hodnota je $243{,}0 \pm \pm 0{,}6$. Přitom jsme nebrali v úvahu vliv zbytku interpolace, neboť ten je, jak v dalším uvidíme, tak nepatrný, že jej lze zanedbat.

Cvičení. **51.** Jestliže provádíme násobení nebo dělení n přesných čísel logaritmicky s použitím k-místné tabulky (při čemž při lineární interpolaci ponecháváme $(k + 1)$ní desetinné místo nezaokrouhleno), je absolutní hodnota prosté chyby výsledku menší než $1{,}25(n + 1)$ jednotek stojících na k-tém místě výsledku (počítáno zleva). Dokažte! — [Užijte výsledku cvičení **32**.]

21. Druhá diference. Předpokládáme, že funkce $f(x)$ je spojitá a má prvou a druhou derivaci pro všechna x z intervalu $[a, a + 2h]$. Do vzorce (*) odvozeného v odst. **19** dosaďme $b = a + h$, $c = a + 2h$. Podmínky tam uvedené jsou splněny, takže platí

$$f(a + 2h) = f(a) + 2[f(a + h) - f(a)] + h^2 f''(x_0),$$

kde x_0 je vhodně zvolené číslo z intervalu $[a, a + 2h]$. To lze přepsat

$$[f(a + 2h) - f(a + h)] - [f(a + h) - f(a)] = h^2 f''(x_0).$$

Podle toho, co bylo dříve řečeno, je $f(a + h) - f(a) = \Delta f(a)$ tabulkový rozdíl funkčních hodnot dvou argumentů $a, a + h$ po sobě následujících. Výraz v druhé lomené závorce označíme $f(a + 2h) - f(a + h) = \Delta f(a + h)$. Je to tabulkový rozdíl funkčních hodnot dalších dvou argumentů $a + h$, $a + 2h$ po sobě následujících.

Rozdíl dvou bezprostředně po sobě jdoucích tabulkových rozdílů se označuje názvem *druhá diference**) a zavedeme pro ni označení

$$\Delta f(a + h) - \Delta f(a) = \Delta_2 f(a).$$

Podle toho tedy platí

$$\Delta_2 f(a) = h^2 f''(x_0),$$

*) K vyvarování omylu budeme dříve zavedený tabulkový rozdíl $\Delta f(a)$ nazývati *první diference.*

kde x_0 je vhodně zvolené číslo z intervalu $[a, a+2h]$. Označme x_0'' tu hodnotu, pro kterou platí $|f''(x)| \leqq |f''(x_0'')|$ pro všecka x z intervalu $[a, a+2h]$. Pak je absolutní hodnota druhé diference

$$|\Delta_2 f(a)| \leqq h^2 |f''(x_0'')|.$$

Připusťme v nerovnosti (**), jíž jsme v odst. **19** omezili absolutní hodnotu zbytku interpolace, za x_0' zde nalezenou hodnotu x_0'', pro kterou $|f''(x)| \leqq |f''(x_0'')|$ pro všecka x z celého intervalu $[a, a+2h]$ a ne jen z intervalu $[a, a+h]$, jak jsme předpokládali o x_0'. Tím pravou stranu této nerovnosti nezmenšíme, a proto bude tím spíše platit

$$|z(a+\Theta h)| \leqq \tfrac{1}{8} h^2 |f''(x_0'')|.$$

Lze tedy tvrdit vzhledem k výsledku odst. **19**:

Žádáme-li, aby absolutní hodnota zbytku interpolace nebyla větší než určité pevně zvolené číslo ζ, dosáhneme toho, bude-li $\frac{1}{8} h^2 |f''(x_0'')| \leqq \zeta$, ale pak bude také

$$|\Delta_2 f(a)| \leqq 8\zeta,$$

t. j. absolutní hodnota druhé diference nebude větší než osminásobek tohoto dovoleného zbytku interpolace.

Toho lze s výhodou použíti při zkoumání, nepřekročí-li zbytek interpolace stanovenou hodnotu, neboť druhou diferenci lze z tabulky pohodlně vyčíst. Avšak vzhledem k tomu, že funkční hodnoty v tabulce jsou zpravidla zatíženy určitou tabulkovou chybou, nevyčteme z tabulky ani druhou diferenci zcela přesně.

V předcházejícím odstavci jsme zjistili, že první diferenci lze z tabulek vyčíst s chybou, jejíž horní hranice je 10^{-k}, proto druhou diferenci, jakožto rozdíl dvou po sobě jdoucích prvních diferencí, lze z tabulky vyčíst s chybou, jejíž horní hranice je $2 \cdot 10^{-k}$. Může se tedy hodnota druhé diference vyčtená z tabulky lišiti od své přesné hodnoty až o 2 jednotky posledního desetinného místa.

Abychom mohli spolehlivěji zjistiti vliv zbytku interpolace, stačí si všimnout, že druhá diference zůstává během dosti dlouhého úseku tabulky téměř konstantní, takže lze s dostatečnou přesností vzíti v úvahu její hodnotu průměrnou. Utvoříme-li součet řady po sobě jdoucích druhých diferencí, t. j. výraz

$$\Delta_2 f(a) + \Delta_2 f(a + h) + \ldots + \Delta_2 f(a + (n - 1)h) =$$
$$= \Delta f(a + h) - \Delta f(a) + \Delta f(a + 2h) - \Delta f(a + h) + \ldots +$$
$$+ \Delta f(a + nh) - \Delta f(a + (n - 1)h) = \Delta f(a+nh) - \Delta f(a),$$

je také stanoven s chybou, jejíž horní hranice je $2 \cdot 10^{-k}$, takže průměrná hodnota druhé diference je určena s chybou, jejíž absolutní hodnota není větší než $\frac{2}{n} \cdot 10^{-k}$. Vezmeme-li tedy průměr třeba z deseti po sobě jdoucích druhých diferencí, je stanoven s chybou co do absolutní hodnoty ne větší než $0{,}2 \cdot 10^{-k}$, což je zcela postačitelné. Pak je horní hranice zbytku interpolace určena s chybou, jejíž absolutní hodnota není větší než $0{,}025 \cdot 10^{-k}$, t. j. čtvrtina jednotky $(k + 1)$ho desetinného místa.

Zpravidla žádáme, aby absolutní hodnota zbytku interpolace nepřesáhla desetinu jednotky posledního desetinného místa, t. j. $0{,}1 \cdot 10^{-k}$. Tomu bude vyhověno, nebude-li absolutní hodnota druhé diference přesahovati 0,8 jednotky téhož místa. Zaokrouhlíme-li pak na k desetinných míst funkční hodnoty získané lineární interpolací (ovšem bez tabulkové chyby, jejíž horní hranice je $0{,}5 \cdot 10^{-k}$), obdržíme totéž číslo, které bychom obdrželi, kdybychom zaokrouhlili na k desetinných míst přesné funkční hodnoty, nejvýše snad s výjimkami, je-li na $(k + 1)$ním desetinném místě přesné hodnoty čtyrka nebo pětka (viz cvič. **3**).

Cvičení. **52**. Kdyby byla v tabulce uvedena hodnota $f(a)$ s početní chybou ε, jaký vliv by to mělo na první a na druhé diference? Bylo by lze podle druhých diferencí zjistiti chybu ε? — [Je-li v tabulce uvedeno $f(a) + \varepsilon$ místo $f(a)$, vyčteme místo správných prvních a druhých diferencí hodnoty $\Delta f(a - h) + \varepsilon$, $\Delta f(a) - \varepsilon$, $\Delta_2 f(a - 2h) + \varepsilon$, $\Delta_2 f(a - h) - 2\varepsilon$, $\Delta_2 f(a) + \varepsilon$; vzhledem k tabulkové chybě a k dovolenému zbytku interpolace musí se přítomnost chyby projevit, jakmile $|\varepsilon| > 1{,}4 \cdot 10^{-k}$.]

22. Tabulky nejjednodušších funkcí. V tomto odstavci provedeme rozbor tabulek, jichž se při numerickém počítání nejčastěji užívá.

1. *Tabulka logaritmů.* Je-li $f(x) = \log x$, je $f'(x) = \frac{\mu}{x}$, $f''(x) = -\frac{\mu}{x^2}$, kde $\mu \doteq 0{,}434$ je modul dekadických logaritmů. Ježto $1 : x^2$ s rostoucím argumentem klesá, volíme $x_0' = x_0'' = a$, takže pro zbytek interpolace a pro druhou diferenci dostaneme

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu h^2}{8a^2}, \quad |\Delta_2 f(a)| < \frac{\mu h^2}{a^2}.$$

V logaritmických tabulkách je zpravidla $h = 1$, t. j. jsou tabelovány logaritmy čísel vzrůstajících o jednotku. Pak je pro $a \geqq 100$

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu}{8 \cdot 10^4} \doteq 5{,}4 \cdot 10^{-6},$$

$$|\Delta_2 f(a)| < \frac{\mu}{10^4} \doteq 4{,}3 \cdot 10^{-5}$$

a tyto horní hranice se se vzrůstajícím a zmenšují. Pro $a \geqq 1000$ je

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu}{8 \cdot 10^6} \doteq 5{,}4 \cdot 10^{-8},$$

$$|\Delta_2 f(a)| < \frac{\mu}{10^6} \doteq 4{,}3 \cdot 10^{-7}$$

atd. Čtyrmístné tabulky, v nichž jsou logaritmy zaokrouhleny na čtyři desetinná místa, obsahují zpravidla logaritmy argumentů od 100 do 1000 (nebo ještě také něco málo přes 1000); zbytek interpolace v nich nepřekročí 5,4 jednotky šestého desetinného místa, je tedy tak nepatrný, že jej lze v praxi zanedbat. V pětimístných tabulkách bývají tabelovány logaritmy argumentů od 1000 do 10 000; tam je zbytek interpolace menší než 5,4 jednotky osmého desetinného místa, takže jej lze také zanedbat.

Žádáme-li, aby zbytek interpolace byl menší než 0,1 jednotky posledního desetinného místa tabulky, je tomu vyhověno, je-li

$$\frac{\mu h^2}{8a^2} \leqq 0{,}1 \,.\, 10^{-k}, \text{ čili } a \geqq h \sqrt{\frac{\mu}{8} \,.\, 10^{k+1}},$$

kde k je počet desetinných míst tabulky. Jde-li o tabulky čtyrmístné ($k = 4, h = 1$), musí $a \geqq 74$; volba argumentů od 100 do 1000 tomu odpovídá. U tabulek pětimístných ($k = 5$) je $a \geqq 233$, takže lze tabelovat logaritmy čísel větších než 233. Pro $k = 7$ dostaneme $a \geqq 2330$; proto se v sedmimístných tabulkách uvádějí zpravidla argumenty od 10 000 do 100 000.

2. *Tabulky goniometrických funkcí.* Je-li $f(x) = \sin x$, při čemž se lze omeziti jen na taková x, pro něž platí $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, je $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. Ježto $\sin x$ je funkce stoupající (pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$), volíme $x_0' = x_0'' = a + 2h$, takže

$$|z(a + \Theta h)| < \tfrac{1}{8}h^2 \sin(a + 2h) \leqq \tfrac{1}{8}h^2,$$
$$|\Delta_2 f(a)| < h^2 \sin(a + 2h) \leqq h^2$$

v celém rozsahu tabulky, neboť $\sin(a + 2h) \leqq 1$. Je-li na př. $h = 10'$ čili v míře obloukové $h = \pi : (180 \,.\, 6) \doteq 0{,}003$, je $|z(a + \Theta h)| < \frac{1}{8}\, 0{,}000009 \doteq 10^{-6}$. Jde-li tedy o tabulku pětimístnou, zbytek interpolace nepřekročí desetinu posledního místa v celém rozsahu tabulky. Kdyby šlo o tabulku čtyrmístnou, stačí volit h tak, aby platilo $\frac{1}{8}h^2 \leqq 0{,}1 \,.\, 10^{-4}$, t. j. $h \leqq 0{,}0089 \doteq 30'$. Volíme-li tedy krok čtyrmístné tabulky sinů rovný $30'$ nebo menší, zbytek interpolace nepřevýší nikdy desetinu posledního desetinného místa.

Jinak je tomu u funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$. Tu je $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x) = \dfrac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. Ježto funkce $f''(x)$ je funkce rostoucí, volíme

$x_0' = x_0'' = a + 2h$, takže

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{h^2 \sin(a + 2h)}{4 \cos^3(a + 2h)}, \; |\Delta_2 f(a)| < \frac{2h^2 \sin(a + 2h)}{\cos^3(a + 2h)}.$$

Zbytek interpolace i druhá diference jsou poměrně malé u malých úhlů, se vzrůstajícím argumentem velmi rychle stoupají. Volíme-li na př. $h = 10'$, lze vypočítati, že horní hranice zbytku interpolace nepřekročí čísla, jež jsou uvedena v následující tabulce (vesměs v jednotkách šestého desetinného místa):

a	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\lvert z(a + \Theta h)\rvert$	0	0,6	1,6	4,2	14,7	118	∞

Jde-li o tabulku pětimístnou, je podmínka, aby zbytek interpolace nepřekročil 0,1 jednotky posledního desetinného místa, splněna jen pro velmi malé úhly nepřesahující příliš 15°; naproti tomu u tabulky čtyrmístné je podmínka splněna při témže kroku $h = 10'$ o něco dále než pro 45°. Pro větší hodnoty úhlů však nelze v tabulce spolehlivě interpolovat.

Poznámka. Lineární interpolaci lze zlepšiti, uvědomíme-li si, že zbytek interpolace $z(a + \Theta h) = -\frac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)h^2 f''(x_0)$, při čemž $h^2 f''(x_0)$ je velmi přibližně rovno druhé diferenci $\Delta_2 f(a)$. Lze tedy psát přibližnou rovnost $z(a + \Theta h) \approx -\frac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)\Delta_2 f(a)$, takže lepšího souhlasu dosáhneme, opravíme-li lineární interpolaci přidáním tohoto členu. Pak bude

$$f(a + \Theta h) \approx f(a) + \Theta \, . \, \Delta f(a) - \tfrac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)\Delta_2 f(a).$$

Bylo by lze ukázat, že chyba tohoto přiblížení je nepatrná.

Hledáme-li na příklad v pětimístné tabulce o kroku 10′ hodnotu tg67°26′, nalezneme tg67°20′ $\doteq$ 2,39449, tg67°30′ $\doteq$ 2,41421, tg67°40′ $\doteq$ 2,43422; pak je Δtg67°20′ = 0,01972, Δtg67°30′ = 0,02001, $\Delta_2$tg67°20′ = 0,00029, takže tg67°26′ $\approx$ 2,39449 + 0,6 . 0,01972 — — $\frac{1}{2}$. 0,6 . 0,4 . 0,00029 $\doteq$ 2,406287 s chybou co do absolutní hodnoty menší než $0.5 \, . \, 10^{-5}$.

Hledáme-li naopak argument k dané funkční hodnotě, vypočteme z nalezené přibližné rovnosti

$$\Theta \approx \frac{f(a + \Theta h) - f(a)}{\Delta f(a)} + \frac{\frac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)\Delta_2 f(a)}{\Delta f(a)}.$$

Lineární interpolací dostaneme

$$\Theta_1 = \frac{f(a + \Theta h) - f(a)}{\Delta f(a)}$$

a pak je velmi přibližně

$$\Theta \approx \Theta_1 + \frac{\frac{1}{2}\Theta(1 - \Theta)\Delta_2 f(a)}{\Delta f(a)} \approx \Theta_1 + \frac{\frac{1}{2}\Theta_1(1 - \Theta_1)\Delta_2 f(a)}{\Delta f(a)},$$

neboť správná hodnota Θ a nalezená hodnota Θ_1 se navzájem liší jen velmi nepatrně.

Podle toho hledáme-li úhel α daný tangentou $\mathrm{tg}\alpha = 3{,}38856 \pm \pm 0{,}5 \,.\, 10^{-5}$, nalezneme v pětimístné tabulce $\mathrm{tg}73°30' \doteq 3{,}37594$, $\mathrm{tg}73°40' \doteq 3{,}41236$, $\Delta\mathrm{tg}73°30' = 0{,}03642$ a odtud určíme $\Theta_1 = = 0{,}01262 : 0{,}03642 \doteq 0{,}3465$. Vedle toho je $\mathrm{tg}73°50' \doteq 3{,}44951$, $\Delta\mathrm{tg}73°40' = 0{,}03715$, $\Delta_2\mathrm{tg}73°30' = 0{,}00073$, takže $\Theta \approx 0{,}3465 + + \frac{1}{2} \,.\, 0{,}3465 \,.\, 0{,}6535 \,.\, 0{,}00073 : 0{,}03642 \doteq 0{,}3465 + 0{,}0023 = 0{,}3488$. Je tedy $\alpha \approx 73°33{,}488'$, čili $\alpha = 73°33'29{,}3'' \pm 0{,}2''$, kde chyba $0{,}2''$ odpovídá chybě $0{,}5 \,.\, 10^{-5}$, s níž byla dána hodnota tangenty, a chybě $0{,}5 \,.\, 10^{-5}$, jež podle konce odst. **20** vystihuje tabulkovou chybu.

3. *Tabulka logaritmů goniometrických funkcí.* Je-li $f(x) = = \log \sin x$, je $f'(x) = \mu \,\mathrm{cotg} x$, $f''(x) = -\frac{\mu}{\sin^2 x}$, takže $|f''(x)|$ je funkce klesající. Proto položíme $x_0' = x_0'' = a$, a pak

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu h^2}{8 \sin^2 a}, \quad |\Delta_2 f(a)| < \frac{\mu h^2}{\sin^2 a}.$$

Zbytek interpolace i druhá diference zmenšují svou absolutní hodnotu se vzrůstajícím argumentem a.

Zbytek interpolace nepřesáhne číslo $0{,}1 \,.\, 10^{-k}$, bude-li

$$\frac{\mu h^2}{8 \sin^2 a} \leqq 0{,}1 \,.\, 10^{-k}, \text{ t. j. } \sin a \geqq h \sqrt{\frac{10^{k+1}\mu}{8}}.$$

Pro $k = 5$, $h = 1' \doteq 2{,}9 \,.\, 10^{-4}$ v míře obloukové je $\sin a \geqq \geqq 0{,}0678$, t. j. $a > 4°$. V pětimístné tabulce o kroku $1'$ lze lineárně interpolovat pro argumenty od $4°$. Pro $k = 4$, $h = 10' \doteq 2{,}9 \,.\, 10^{-3}$ je $\sin a \geqq 0{,}214$, t. j. $a > 12\frac{1}{2}°$, proto ve čtyrmístné tabulce o kroku $10'$ lze interpolovat teprve asi od $12\frac{1}{2}°$.

Podobně pro $f(x) = \log\mathrm{tg}x$ je $f'(x) = \frac{\mu}{\sin x \cos x} = \frac{2\mu}{\sin 2x}$, $f''(x) = -\frac{4\mu \cos 2x}{\sin^2 2x}$. Funkce $f''(x)$ je rostoucí, pro $x < 45°$ záporná a pro $x > 45°$ kladná. Je-li však h dostatečně malé, lze přibližně položiti $x_0' = x_0'' = a$; tím se výsledek změní jen nepatrně, takže zhruba platí

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{\mu h^2 |\cos 2a|}{2 \sin^2 2a}, \; |\Delta_2 f(\dot{a})| < \frac{4\mu h^2 |\cos 2a|}{\sin^2 2a}.$$

Zbytek interpolace nabývá nejmenší absolutní hodnoty pro $a = 45°$. Tato absolutní hodnota se zvětšuje, jestliže a stoupá k 90° nebo klesá k 0°.

Zbytek interpolace nepřesáhne $0{,}1 \,.\, 10^{-k}$, bude-li

$$\frac{\mu h^2 |\cos 2a|}{2 \sin^2 2a} \leqq 0{,}1 \,.\, 10^{-k}.$$

Ježto $\sin^2 2a = 1 - |\cos 2a|^2$, plyne odtud

$$2|\cos 2a|^2 + \mu h^2 \,.\, 10^{k+1} |\cos 2a| - 2 \leqq 0,$$

$$|\cos 2a| \leqq \tfrac{1}{4}(-\mu h^2 \,.\, 10^{k+1} + \sqrt{\mu^2 h^4 \,.\, 10^{2(k+1)} + 16}),$$

neboť $|\cos 2a|$ nemůže být záporné. Pro $k = 5$, $h = 1' \doteq 2{,}9 \,.\, 10^{-4}$ je $|\cos 2a| \leqq 0{,}991$, t. j. $4° < a < 86°$, pro kteréžto hodnoty lze lineárně interpolovat. Podobně pro $k = 4$, $h = 10' \doteq 2{,}9 \,.\, 10^{-3}$ je $|\cos 2a| \leqq 0{,}912$, takže $12° < a < 78°$, kdy je přípustná lineární interpolace v tabulce čtyrmístné.

Poznámka. Pro malé úhly, pro něž není lineární interpolace dostatečně spolehlivá, bývá často sestavena zvláštní tabulka o malém kroku (viz na př. Valouchovy tabulky str. 31, kde jsou uvedeny hodnoty funkcí $\log \sin a$, $\log \mathrm{tg} a$ úhlů menších než 5' při kroku 1''). Lze také užít obratu, který byl popsán výše při tabulce tangent. Nejčastěji se však postupuje takto: Je možno položit $\sin a = k_1 a$, $\mathrm{tg} a = k_2 a$; pokud je úhel a dosti malý, jsou čísla k_1, k_2 (velmi přibližně) nezávislá na argumentu a. Označíme-li $\log k_1 = S$, $\log k_2 = T$, je $\log \sin a = \log a + S$, $\log \mathrm{tg} a = \log a + T$. Hodnoty S a T, jež odpovídají argumentu a, zpravidla měřenému ve vteřinách, bývají tabelovány ve zvláštní tabulce připojené k tabulce logaritmů (viz na př. Valouchovy tabulky str. 4 a 5 dole a str. 8—29 dole).

Cvičení. **53.** Ukažte, že v tabulce, která obsahuje pětimístné logaritmy čísel od 1000 výše, lze při kroku $h = 4$ ještě lineárně interpolovat.

54. Jak daleko lze v sedmimístné tabulce sinů s krokem $h = 1'$ ještě lineárně interpolovat? — [Asi do 71°.]

55. Jak daleko lze lineárně interpolovat v pětimístné tabulce tangent při kroku a) 10′, b) 1′? — [Asi do a) 22°, b) 74°.]

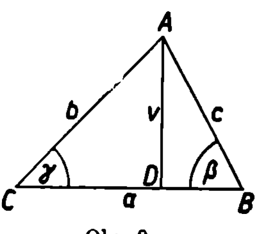
56. S pomocí hodnoty T lze určiti logaritmus tangenty malého úhlu a. Jak stanovíme $\log \mathrm{tg}(\frac{1}{2}\pi - a)$? — [$\log \mathrm{tg}(\frac{1}{2}\pi - a) = - \log a - T$.]

23. Počítání s logaritmy. Při logaritmickém počítání se vedle primární chyby, která byla systematicky vyšetřena v kapitole IV., uplatňuje chyba sekundární působená jednak zbytkem interpolace a jednak tabulkovou chybou. Jak jsme seznali v předcházejícím odstavci, bývají tabulky uspořádány tak, aby bylo lze zbytek interpolace zanedbat, proto se při odhadu sekundární chyby omezíme toliko na vyšetření vlivu tabulkové chyby. Nelze udati obecné pravidlo, podle něhož bychom mohli sekundární chybu vypočísti, nýbrž je třeba postupně sledovati jednotlivé početní operace a vyšetřovati jejich vliv na sekundární chybu. Toto vyšetřování bývá někdy dosti složité.

Ukážeme to na *příkladě* a vyšetříme sekundární chybu v úloze z cvič. **47**, při čemž budeme považovati daná čísla za přesná. Podle nalezeného výsledku a podle primární chyby pak posoudíme, jakých tabulek je třeba použíti při výpočtu. Jde o úlohu:

V trojúhelníku jsou dány strany a, b a úhel γ; stanoviti třetí stranu a zbývající úhly.

Lze voliti různé způsoby výpočtu. Probereme je postupně.



Obr. 9.

I. Vedeme-li v trojúhelníku ABC výšku $\overline{AD} = v$, vzniknou dva pravoúhlé trojúhelníky ACD, ABD (obr. 9), z nichž lze postupně vypočísti

$$v = b \sin\gamma, \quad \overline{CD} = b \cos\gamma, \quad \overline{DB} = a - b \cos\gamma,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{a - b\cos\gamma},\ \alpha = 180 - \beta - \gamma,\ c = \frac{v}{\sin\beta}.$$

Užíváme-li k-místných logaritmů, je číslo $\log b$ stanoveno s chybou, jejíž absolutní hodnota je menší než $0{,}5 \,.\, 10^{-k}$, s touž horní hranicí chyby je stanoveno i číslo $\log\sin\gamma$, takže $\log v$ je stanoven se sekundární chybou co do absolutní hodnoty menší než 10^{-k}. Rovněž tak absolutní hodnota chyby čísla $\log b\cos\gamma$ je menší než 10^{-k}. Při hledání čísla $b\cos\gamma$ se uplatňuje jednak tato chyba, jednak chyba vznikající lineární interpolací podle konce odst. **20**, tedy celkem $1{,}5 \,.\, 10^{-k}$, takže horní hranice prosté chyby čísla $b\cos\gamma$ je podle odst. **15** menší než

$$1{,}5 \,.\, 10^{-k} \,.\, |b\cos\gamma| : \mu$$

a s touž chybou je určeno i číslo $a - b\cos\gamma$, neboť střední aproximaci čísla a považujeme pro výpočet sekundární chyby za přesnou. Určujeme-li $\log(a - b\cos\gamma)$, dostáváme při hledání logaritmu jednak tabulkovou chybu s horní hranicí menší než $0{,}5 \,.\, 10^{-k}$ a jednak chybu, která vzniká tím, že číslo $a - b\cos\gamma$ je nepřesné. Tato chyba je podle odst. **15** co do absolutní hodnoty menší než

$$\mu \,.\, \frac{1}{\mu} \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} \,.\, \frac{|b\cos\gamma|}{|a - b\cos\gamma|} = 1{,}5 \,.\, 10^{-k} \,.\, |\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|.$$

Je tedy číslo $\log(a - b\cos\gamma)$ určeno s chybou, jejíž horní hranice je menší než $0{,}5 \,.\, 10^{-k} + 1{,}5 \,.\, 10^{-k} \,.\, |\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|$. Pak je $\log\operatorname{tg}\beta$ určen s chybou o horní hranici menší než

$$10^{-k} + 0{,}5 \,.\, 10^{-k} + 1{,}5 \,.\, 10^{-k} \,.\, |\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|$$

a β samo má horní hranici prosté chyby, která je podle cvič. **37** c) menší než výraz

$$\frac{1}{2\mu}\,(2 + 1{,}5\,|\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|)\,|\sin 2\beta| \,.\, 10^{-k},$$

neboť na tabulkovou chybu při zpětném hledání úhlu β jest opět přičísti $0{,}5 \,.\, 10^{-k}$. Touž horní hranici chyby má i úhel α.

Pokračujeme dále a hledáme $\log\sin\beta$. Horní hranice jeho chyby obsahuje opět člen $0{,}5 \,.\, 10^{-k}$ způsobený tabulkovou chybou a vedle toho podle cvič. **36** a) člen

$$\mu \cdot \frac{1}{2\mu} = (2 + 1{,}5\,|\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|)\,|\sin 2\beta| \,.\, |\operatorname{cotg}\beta| \,.\, 10^{-k} =$$
$$= (2 + 1{,}5\,|\operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\gamma|)\cos^2\beta \,.\, 10^{-k}.$$

Proto číslo logc má horní hranici chyby menší než

$$10^{-k} + 0{,}5 \,.\, 10^{-k} + (2 + 1{,}5\,|\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{cotg}\gamma|)\,\cos^2\beta \,.\, 10^{-k}$$

a pak je c určeno s chybou, jež je co do absolutní hodnoty menší než výraz

$$\frac{1}{\mu}[2 + (2 + 1{,}5\,|\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{cotg}\gamma|)\,\cos^2\beta]\,c \,.\, 10^{-k}.$$

Dosadíme-li sem číselné hodnoty z cvič. **47**: $\alpha = 29°12'$, $\beta = 77°22'$, $\gamma = 73°26'$, $a = 23{,}4$, $b = 46{,}8$, $c = 45{,}97$, vyjde, že sekundární chyba úhlů α, β je co do absolutní hodnoty menší než $1{,}96 \,.\, 10^{-k}$ v míře obloukové neboli $6740 \,.\, 10^{-k}$ minut v míře úhlové. Podobně sekundární chyba strany c je co do absolutní hodnoty menší než $232 \,.\, 10^{-k}$. Použijeme-li čtyrmístných tabulek, t. j. položíme-li $k = 4$, jsou horní hranice sekundárních chyb: u úhlů α, β menší než $0{,}7'$ a u strany c menší než $0{,}03$ m. Porovnáme-li tyto hodnoty s horními hranicemi primárních chyb, stanovenými ve cvič. **47**, vidíme, že čtyrmístné tabulky k řešení úlohy plně stačí.

Bylo by možno také užíti výšky spuštěné s vrcholu B; pak by zůstal výpočet týž, jen by se strany a, b a úhly α, β navzájem vyměnily. Dostali bychom horní hranici sekundární chyby úhlu α (a také β) ve tvaru $\frac{1}{2\mu}(2 + 1{,}5\,|\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{cotg}\gamma|)\,|\sin 2\alpha| \,.\, 10^{-k} \doteq 2{,}21 \,.\, 10^{-k}$ a horní hranici sekundární chyby strany c ve tvaru

$$\frac{1}{\mu}[2 + (2 + 1{,}5\,|\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{cotg}\gamma|)\,\cos^2\alpha]\,c \,.\, 10^{-k} \doteq 393 \,.\, 10^{-k},$$

takže při užit čtyrmístných tabulek je chyba při určení úhlů menší než $0{,}8'$ a při určení strany c menší než $0{,}04$ m.

2. Provedeme-li týž výpočet s použitím věty tangentové, dostáváme $\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \mathrm{cotg}\frac{1}{2}\gamma \,.\, \frac{a - b}{a + b}$, $\alpha = (90 - \frac{1}{2}\gamma) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\beta = (90 - \frac{1}{2}\gamma) - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $c = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ nebo také $c = b\,\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. Číslo $\log\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ lze stanovit s horní hranicí chyby $1{,}5 \,.\, 10^{-k}$; odtud plyne (cvič. **37** c) s ohledem na tabulkovou chybu tohoto čísla, že úhel $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ lze určiti s chybou, jejíž absolutní hodnota je menší než výraz $\frac{1}{2\mu} \,.\, 2 \,.\, 10^{-k} \,.\, |\sin(\alpha - \beta)|$ a s touž chybou pak lze určiti α i β. Pak $\log\sin\alpha$ je stanoven s chybou co do absolutní hodnoty menší než $0{,}5 \,.\, 10^{-k} + \mu \,.\, \frac{1}{\mu} \,.\, 10^{-k} \,.\, |\sin(\alpha - \beta)\,\mathrm{cotg}\alpha|$, logc s chybou

menší než $(1{,}5 + |\sin(\alpha - \beta)\operatorname{cotg}\alpha|) \cdot 10^{-k}$ a číslo c samo s chybou, jejíž horní hranice je menší než výraz

$$\frac{1}{\mu}(2 + |\sin(\alpha - \beta)\operatorname{cotg}\alpha|)\, c \cdot 10^{-k}.$$

Počítáme-li stranu c s pomocí strany b a úhlu β, vyjde horní hranice sekundární chyby menší než

$$\frac{1}{\mu}(2 + |\sin(\alpha - \beta)\operatorname{cotg}\beta|)c \cdot 10^{-k}.$$

Dosadíme-li sem daná čísla, dostaneme horní hranice sekundární chyby: u úhlů α, β menší než $1{,}72 \cdot 10^{-k}$ v míře obloukové, čili $5900 \cdot 10^{-k}$ minut v míře úhlové a u strany c, je-li počítána ze strany a, $353 \cdot 10^{-k}$, a je-li počítána ze strany b, $229 \cdot 10^{-k}$. Horní hranice sekundární chyby jsou zhruba stejné jako v případě předešlém. Čtyrmístnými tabulkami nalezneme úhly s chybou menší než 0,6, a stranu c s chybou menší než 0,04 m, resp. 0,03 m.

3. Při užití věty kosinové je výpočet tento:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}, \quad \sin\alpha = \sin\gamma \cdot \frac{a}{c}, \quad \sin\beta = \sin\gamma \cdot \frac{b}{c}.$$

a) Výraz pro c lze počítat tak, že vypočteme zvlášť jednotlivé členy pod odmocnítkem. Hodnotu $\log a$ stanovíme s chybou absolutně menší než $0{,}5 \cdot 10^{-k}$, $\log a^2$ s chybou absolutně menší než 10^{-k} a odtud vzhledem k tabulkové chybě určíme číslo a^2 s chybou co do absolutní hodnoty menší než $1{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot a^2 : \mu$. Obdobně stanovíme b^2 s chybou co do absolutní hodnoty menší než $1{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot b^2 : \mu$ a číslo $2ab\cos\gamma$ s chybou, jež je co do absolutní hodnoty menší než

$$2{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot 2ab\,|\cos\gamma| : \mu,$$

neboť logaritmus každého z jeho čtyř činitelů má horní hranici chyby menší než $0{,}5 \cdot 10^{-k}$. Je tedy výraz pod odmocnítkem určen s chybou, jejíž horní hranice nedosáhne čísla

$$\frac{1}{\mu}(1{,}5a^2 + 1{,}5b^2 + 5ab\,|\cos\gamma|)10^{-k}.$$

Jeho logaritmus má chybu s horní hranicí menší než

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} + \mu \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1{,}5a^2 + 1{,}5b^2 + 5ab\,|\cos\gamma|}{c^2} \cdot 10^{-k}.$$

Horní hranice chyby čísla $\log c$ je rovna polovině tohoto výrazu a číslo c, jež mu odpovídá, má horní hranici chyby menší než

$$\frac{1}{\mu}\left[0{,}5 \,.\, 10^{-k} + \frac{0{,}5 \,.\, 10^{-k}}{2}\left(1 + \frac{3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{c^2}\right)\right] c =$$

$= \dfrac{3c^2 + 3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{4\mu c} \,.\, 10^{-k}$, což lze pro $\gamma \leqq R$ psát v tvaru $\dfrac{4a^2 + 4b^2 - c^2}{2\mu c} \,.\, 10^{-k}$ a pro $\gamma \geqq R$ v tvaru $\dfrac{4c^2 - a^2 - b^2}{2\mu c} \,.\, 10^{-k}$.

Výraz pro $\log c$ má horní hranici chyby

$$\frac{0{,}5 \,.\, 10^{-k}}{2}\left(1 + \frac{3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{c^2}\right),$$

proto horní hranice chyby čísla $\log\sin\alpha$ je

$$\frac{0{,}5 \,.\, 10^{-k}}{2}\left(5 + \frac{3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{c^2}\right),$$

takže α je určeno s chybou menší než

$$\frac{1}{\mu} \,.\, \frac{0{,}5 \,.\, 10^{-k}}{2}\left(7 + \frac{3a^2 + 3b^2 + 10ab\,|\cos\gamma|}{c^2}\right) . \,|\mathrm{tg}\,\alpha|,$$

což lze pro $\gamma \leqq R$ vyjádřit v tvaru $\dfrac{4a^2 + 4b^2 + c^2}{2\mu c^2} \,.\, |\mathrm{tg}\,\alpha| \,.\, 10^{-k}$ a pro $\gamma \geqq R$ v tvaru $\dfrac{6c^2 - a^2 - b^2}{2\mu c^2} \,.\, |\mathrm{tg}\,\alpha| \,.\, 10^{-k}$. Obdobně je úhel β určen s chybou co do absolutní hodnoty menší než

$$\frac{4a^2 + 4b^2 + c^2}{2\mu c^2} \,.\, |\mathrm{tg}\,\beta| \,.\, 10^{-k} \text{ pro } \gamma \leqq R$$

a s chybou co do absolutní hodnoty menší než

$$\frac{6c^2 - a^2 - b^2}{2\mu c^2} \,.\, |\mathrm{tg}\,\beta| \,.\, 10^{-k} \text{ pro } \gamma \geqq R.$$

Pro naše daná čísla je horní hranice chyby pro stranu c menší než $221 \,.\, 10^{-k}$, pro úhel α menší než $3{,}98 \,.\, 10^{-k}$ v míře obloukové čili $13700 \,.\, 10^{-k}$ minut v míře úhlové a pro úhel β menší než $31{,}8 \,.\, 10^{-k}$ v míře obloukové čili $109000 \,.\, 10^{-k}$ minut v míře úhlové. Tento postup stanoví stranu c přibližně s touž přesností jako oba postupy předcházející, naproti tomu úhly jsou jím určeny daleko méně přesně. To jsme mohli předem očekávat, neboť úhly jsou sinem určeny méně přesně než tangentou, zejména neliší-li se příliš od úhlu pravého. K určení úhlů čtyrmístná tabulka nestačí.

b) Výraz pod odmocnítkem lze upraviti takto:

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab(1 + \cos\gamma) = (a + b)^2 - 4ab\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma = \\ = (a + b + p)(a + b - p),$$

kde $p = 2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\gamma$. Číslo p počítáme logaritmicky, $\log p$ je určen s chybou o horní hranici $1{,}5 \cdot 10^{-k}$, číslo p samo s chybou absolutně menší než $2 \cdot 10^{-k} \cdot p : \mu$. S touž chybou jsou pak určena i čísla $a+b+p$, $a+b-p$, ale tu třeba dát pozor, neboť jednou se chyba čísla p přičítá a po druhé odčítá (viz konec odst. 8). Číslo $\log(a + b + p) + \log(a + b - p)$ je dáno s chybou o horní hranici

$$10^{-k} + \mu \cdot \frac{2 \cdot 10^{-k}}{\mu}\left|\frac{p}{a + b + p} - \frac{p}{a + b - p}\right| = \left(1 + \frac{4p^2}{c^2}\right) 10^{-k}.$$

Přitom prvý člen vzniká sečtením tabulkových chyb obou logaritmů a druhý člen je působen chybou, jíž je zatíženo číslo p. Chyba čísla $\log c$ je pak poloviční, takže c samo má chybu co do absolutní hodnoty menší než $\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{2p^2}{c^2}\right) c \cdot 10^{-k}$ vzhledem k tomu, že i při $\log c$ se uplatňuje tabulková chyba. Dosadíme-li dané hodnoty, je $p \approx \approx 53{,}05$ a strana c je určena s chybou co do absolutní hodnoty menší než $388 \cdot 10^{-k}$, tedy o něco větší než v případě a). Pak ovšem také chyby úhlů α, β vyjdou větší.

c) Lze však také položiti

$$\frac{p}{a + b} = \frac{2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\gamma}{a + b} = \sin\varphi,$$

$$c = (a + b)\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = (a + b)\cos\varphi.$$

Sekundární chyba výrazu pro $\log\sin\varphi$ je $2 \cdot 10^{-k}$, pak je φ určeno s chybou menší než $\frac{1}{\mu} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot \operatorname{tg}\varphi$. Horní hranice chyby čísla $\log\cos\varphi$ je $0{,}5 \cdot 10^{-k} + \mu \cdot \frac{1}{\mu} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot \operatorname{tg}^2\varphi$. Číslo $\log c$ má chybu co do absolutní hodnoty menší než $(1 + 2{,}5 \cdot \operatorname{tg}^2\varphi) \cdot 10^{-k}$ a konečně číslo c má chybu, jejíž horní hranice je $\frac{1}{\mu}(1{,}5 + 2{,}5 \cdot \operatorname{tg}^2\varphi) c \cdot 10^{-k}$. Dosadíme-li sem daná čísla, vyjde $\varphi \approx 49°5'$ a podle toho horní hranice chyby čísla c je $511 \cdot 10^{-k}$, tedy opět o něco vyšší.

d) Upravíme-li odmocninu na tvar

$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab(1 - \cos\gamma) = (a - b)^2 + 4ab \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma$$

a položíme-li

$$\frac{2\sqrt{ab}\sin\frac{1}{2}\gamma}{|a - b|} = \operatorname{tg}\psi, \text{ vyjde } c = \frac{|a - b|}{\cos\psi}.$$

Pak je $\log\operatorname{tg}\psi$ určen s chybou menší než $2 \cdot 10^{-k}$, odtud plyne pro ψ horní hranice chyby $2{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot \sin 2\psi : 2\mu$ a pro $\log\cos\psi$ je chyba co do absolutní hodnoty menší než

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} + \mu \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^{-k}}{2\mu} \cdot \sin 2\psi \operatorname{tg}\psi = (0{,}5 + 2{,}5 \cdot \sin^2\psi) \cdot 10^{-k},$$

takže $\log c$ má chybu co do absolutní hodnoty menší než

$$(1 + 2{,}5 \cdot \sin^2\psi) \cdot 10^{-k}.$$

Horní hranice chyby čísla c je tedy $\dfrac{1}{\mu}(1{,}5 + 2{,}5 \cdot \sin^2\psi)\, c \cdot 10^{-k}$. Dosadíme-li daná čísla, vyjde $\psi \approx 59°24'$ a chyba pro c je co do absolutní hodnoty menší než $355 \cdot 10^{-k}$. Odtud jest viděti, že různým způsobem výpočtu dostaneme různou sekundární chybu.

Při logaritmování součinu (nebo podílu) n čísel je tabulková chyba nejvýše rovna $(n + 1)\tau$, kde τ je horní hranice tabulkové chyby každého logaritmu. Poměrná chyba výsledku pak nedosáhne $\dfrac{1}{\mu}(n + 1)\tau$. Předpokládáme-li, že všechna čísla, s nimiž provádíme výpočet, mají (aspoň přibližně) touž poměrnou primární chybu ϱ, je poměrná chyba výsledku $n\varrho$. Nechceme-li, aby sekundární chyba výsledku byla větší než pětina chyby primární, t. j. má-li být

$$\frac{1}{\mu}(n + 1)\tau \leqq 0{,}2 \cdot n\varrho, \text{ musí } \tau \leqq 0{,}2 \cdot \mu \cdot \frac{n}{n + 1} \cdot \varrho < 0{,}1\varrho.$$

To značí, že k výpočtu třeba volit takovou tabulku, aby tabulková chyba byla menší než desetina průměrné poměrné chyby čísel, s nimiž provádíme výpočet. Ježto čísla, k nimž vede praktické měření prováděné obyčejnými prostředky, jsou zatížena poměrnou chybou tak asi 10^{-3} (viz odst. 2), plyne odtud, že k výpočtům s takovými čísly plně stačí tabulka čtyrmístných logaritmů. Při trigonometrických výpočtech je však třeba, abychom se pokud možno vyhýbali určení úhlů (zejména blízkých k pravému) pomocí sinu a určení úhlů (zejména hodně ostrých) pomocí kosinu.

Cvičení. **57.** Jsou-li dány odvěsny a, b pravoúhlého trojúhelníka, lze počítati přeponu c buď podle věty Pythagorovy nebo trigonometricky s pomocí některého úhlu trojúhelníka. Který výpočet poskytuje při logaritmickém počítání menší sekundární chybu? — [Prvý, totiž $c \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu$, při druhém vyjde $(1 + \cos^2\alpha)\, c \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu$, resp. $(1 + \cos^2\beta)\, c \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu$.]

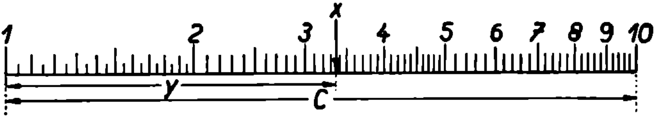
58. Úhel φ je dán vztahem $\sin\varphi = a : b$. Odtud lze určiti φ buď přímo nebo tak, že píšeme $\operatorname{tg}\varphi = a : \sqrt{(b + a)(b - a)}$. Porovnejte sekundární chyby, které vzniknou, určujeme-li φ logaritmicky! — [$a \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu\sqrt{b^2 - a^2}$, $a\sqrt{b^2 - a^2} \,.\, 1{,}5 \,.\, 10^{-k} : \mu b^2$; druhý způsob je přesnější.]

24. Logaritmické pravítko. Při odhadech horních hranic chyb se vyskytuje řada výpočtů, při nichž stačí zjistit jen několik málo prvních číslic. K rychlému stanovení těchto číslic užíváme s výhodou logaritmického pravítka, jak již dříve bylo podotčeno. Budu předpokládati, že čtenář zná zásady, podle nichž se na logaritmickém pravítku počítá. V tomto odstavci se budeme zabývati pouze otázkou, s jakou přesností lze na logaritmickém pravítku provádět výpočty.

Na logaritmickém pravítku jsou naneseny *logaritmické stupnice*, t. j. stupnice, které znázorňují funkci $y = C \log x$, kde C je vhodná konstanta. Část logaritmické stupnice je zobrazena na obr. 10. Bod logaritmické stupnice, označený číslem x, dostaneme, naneseme-li od počátku úsečku délky y, jež vyhovuje vztahu $y = C \log x$. Ježto $\log 1 = 0$, je počátek stupnice označen číslem 1; ježto dále $\log 10 = 1$, je číslem 10 označen ten bod stupnice, jehož vzdálenost od počátku je C. Vedle toho platí $\log 10^n \,.\, x = n + \log x$, a proto se logaritmická stupnice skládá z úseků o délce C, které vesměs jsou shodné, a každý z nich znázorňuje čísla z intervalu $[10^n$,

10^{n+1}]. Úsek logaritmické stupnice znázorněný na obr. 10 představuje čísla z intervalu [1, 10].

Logaritmické pravítko obsahuje zpravidla dvě základní stupnice, jednu, která je na horní části pravítka, stručně nazveme horní, druhou, která je na dolní části pravítka, nazveme dolní. Obě mají touž délku, zpravidla 250 mm. Horní stupnice obsahuje úsek od 1 do 100; konstantu této stupnice označme C_1, je tedy $250 = C_1 \log 100$, takže $C_1 = 125$. Dolní stupnice obsahuje úsek od 1 do 10 při téže



Obr. 10.

celkové délce; konstantu této stupnice označme C_2, proto $250 = C_2 \log 10$, takže $C_2 = 250$. Stupnice některých kapesních pravítek mívají délku menší, na př. poloviční, pak jsou hodnoty těchto konstant také poloviční.

Předpokládejme, že lze bez optických prostředků pouhým okem odlišiti od sebe dva body, jejichž vzdálenost je 0,1 mm, t. j. že lze délku y určiti s chybou, jejíž horní hranice je menší než 0,1 mm. Ptáme se, jakou částí délky C je tato horní hranice chyby. U stupnice horní je to zlomek $\frac{0,1}{C_1} = 0,8 \,.\, 10^{-3}$ a u stupnice dolní $\frac{0,1}{C_2} = 0,4 \,.\, 10^{-3}$. Délka C představuje vzrůst logaritmu o jednotku, takže přesnost dolní stupnice odpovídá zhruba přesnosti trojmístných logaritmů, přesnost horní stupnice je poloviční. Toto číslo, $0,8 \,.\, 10^{-3}$, resp. $0,4 \,.\, 10^{-3}$, je to, co se v logaritmických tabulkách označuje názvem tabulková chyba; u trojmístných logaritmů je, jak víme, menší než $0,5 \,.\, 10^{-3}$.

Považujeme-li y za střední aproximaci přesné hodnoty Y, je $|Y - y| \leqq \eta$, kde $\eta < 0{,}1$. Odpovídá-li délce Y číslo X a délce y číslo x, je $|Y - y| = |C \log X - C \log x|$. Avšak podle odst. 15 je

$$|C \log X - C \log x| < \frac{C\mu\xi}{x - \xi},$$

kde ξ je horní hranice prosté chyby čísla X. Je-li dáno η a volíme-li ξ tak, aby bylo

$$\frac{C\mu\xi}{x - \xi} \leqq \eta,$$

bude také $|Y - y| < \eta$. To ale znamená, že ξ vyhovuje nerovnosti

$$\frac{\xi}{x} \leqq \frac{\eta}{C\mu + \eta} < \frac{\eta}{C\mu}.$$

Dovedeme-li tedy délku Y určiti s chybou, jejíž horní hranice $\eta < 0{,}1$ mm, můžeme na stupnici určiti číslo X tak, že horní hranice jeho poměrné chyby vzhledem ke střední aproximaci $\dfrac{\xi}{x}$ vyhovuje napsané nerovnosti. Dosadíme-li za C, μ, η naše hodnoty, shledáme, že tato horní hranice poměrné chyby je u horní stupnice $1{,}84 \,.\, 10^{-3}$ a u dolní stupnice $0{,}92 \,.\, 10^{-3}$, čili zhruba $2^0/_{00}$ u stupnice horní a $1^0/_{00}$ u stupnice dolní.

Odhadujeme-li části dílků nanesených na stupnici, dělíme je (od oka) na stejné části. Ježto dílky logaritmické stupnice nejsou stejně velké, je otázka, do jaké míry je to oprávněno. Dělíme-li dílky stupnice na stejné části, provádíme vlastně lineární interpolaci a vyslovíme pro ni požadavek, aby zbytek interpolace nedosáhl desetinu z 0,1 mm, t. j. z délky, kterou ještě dovedeme rozlišit. Ježto jde o funkci $y = C \log x$, je podle odst. 22 zbytek interpolace

$$|z(a + \Theta h)| < \frac{C\mu h^2}{8a^2}.$$

Našemu požadavku vyhovíme, bude-li

$$\frac{C\mu h^2}{8a^2} \leqq 0{,}01, \text{ t. j. } h \leqq a \sqrt{\frac{0{,}08}{C\mu}},$$

čili $h \leqq 0{,}038 \,.\, a$ u stupnice horní a $h \leqq 0{,}027 \,.\, a$ u stupnice dolní. To značí, že na logaritmické stupnici musí býti naneseny tak velké dílky, aby jejich délka h, jež odpovídá kroku tabulky, vyhovovala odvozeným nerovnostem. Zpravidla bývá voleno na horní stupnici

$$\begin{array}{llll} h = 0{,}02 & \text{pro} \quad 1 \leqq a \leqq 2, & h = 0{,}2 & \text{pro} \quad 10 \leqq a \leqq 20, \\ h = 0{,}05 & \text{pro} \quad 2 \leqq a \leqq 5, & h = 0{,}5 & \text{pro} \quad 20 \leqq a \leqq 50, \\ h = 0{,}1 & \text{pro} \quad 5 \leqq a \leqq 10, & h = 1 & \text{pro} \quad 50 \leqq a \leqq 100 \end{array}$$

a na dolní stupnici

$$\begin{array}{ll} h = 0{,}01 & \text{pro} \quad 1 \leqq a \leqq 2, \\ h = 0{,}02 & \text{pro} \quad 2 \leqq a \leqq 4, \\ h = 0{,}05 & \text{pro} \quad 4 \leqq a \leqq 10. \end{array}$$

Tyto hodnoty nalezeným nerovnostem vyhovují, takže na logaritmickém pravítku lze lineárně interpolovat bez nesnází.

Každé logaritmické pravítko obsahuje také chyby spočívající v nesprávném umístění dělicích čárek. Můžeme však od dobrého pravítka očekávati, že tyto chyby jsou proti chybám vznikajícím nepřesným čtením čísel tak nepatrné, že jejich vliv lze zanedbat.

Cvičení. **59.** Hodnotu zlomku, jehož čitatelem je součin m činitelů a jmenovatelem součin n činitelů, počítáme na logaritmické pravítku tak, že dělení a násobení provádíme střídavě (pokud to lze). Při tomto postupu poměrná chyba výsledku nepřesáhne a) $2(m + p)\,\tau$, je-li $m > n$, b) $(2n + 1 + 2p)\,\tau$, je-li $m \leqq n$, c) $2(n + p)\,\tau$, je-li čitatel roven 1, kde $\tau = 0{,}4 \,.\, 10^{-3} : \mu$, počítáme-li na stupnici dolní, a $\tau = 0{,}8 \,.\, 10^{-3} : \mu$, počítáme-li na stupnici horní, a p udává, kolikrát bylo třeba při výpočtu posunouti šoupátko o celou jeho délku zleva napravo nebo naopak. Dokažte!

60. Hodnotu výrazu $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ (kde $a < b$) určujeme takto: Na dolní pevné stupnici nastavíme číslo $b : a$ (a na dolní pohyblivé stupnici nastavíme proti 1 na dolní pevné, proti b na dolní pohyblivé leží $b : a$ na pevné), k němu vyčteme na horní pevné stupnici číslo $b^2 : a^2$, vyčtené číslo zvětšíme o 1 a takto vzniklé číslo nastavíme na horní pevné stupnici; proti němu čteme na dolní pohyblivé stupnici výsledek. Stanovte horní hranici poměrná chyby při tomto postupu! — [$5\tau c$, kde $\tau = 0{,}4 \,.\, 10^{-3} : \mu$.]

OBSAH

Spisovatel	*Karel Hruša*
Název díla	*Počítání s neúplnými čísly*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1949*
v edici	*Cesta k vědění, svazek 52*
za redakce	*Dra F. Vyčichla*
Stran	*108*
Obrazců	*10*
Vytiskla	*Knihtiskárna Prometheus v nár. správě, Praha VIII*
Vydání	*první (1—4400 výtisků)*
Cena	*Kčs 36,—*

CESTA K VĚDĚNÍ

a zbytečných číslic výsledků bylo co nejméně.

Vyčíslujeme-li složité početní výrazy, t. j. hledáme-li *hodnoty funkcí* v případě, kdy argumenty jsou čísla neúplná, musíme určit chybu, s kterou výsledek dostáváme, t. j. musíme odhadnout její horní hranici. Také tuto úlohu autor řeší velmi podrobně.

A konečně při numerickém počítání používáme různých *tabulek*; tabulek hodnot různých funkcí jako tabulek mocnin a odmocnin, tabulek hodnot goniometrických funkcí, logaritmů čísel atd. Jistě mnohý čtenář ani si neuvědomil, že užívaje tabulek při počítání vnáší do počtu určité chyby. Proto autor věnuje dosti místa otázkám numerického počítání s tabulkami, zvláště interpolaci v nich, logaritmickým tabulkám a logaritmickému pravítku. Vším tím prohlubuje naše vědění a zároveň ukazuje na mnohých místech, jak je třeba se dívat na skutečný svět a jak matematik tento svět upravuje.

JČMF Brož. Kčs 36,—