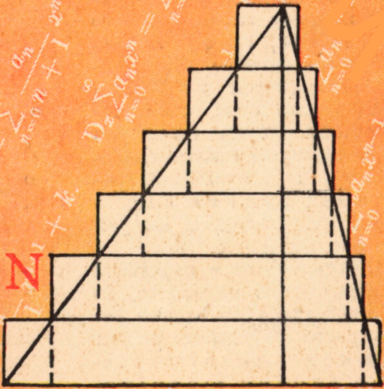
O nekonečných řadách

CESTA K VĚDĚNÍ SV. 45



JAN VYŠÍN

O nekonečných řadách

Jč
m+f

Jan Vyšín:

Nekonečné řady

Nekonečné řady jsou opravdovým pojitkem mezi elementární a tak zvanou vyšší matematikou. Objasňují některé pojmy v podstatě nikoliv jednoduché jako je pojem reálného čísla, obsahu rovinného obrazce, objemu tělesa a mezní hodnoty vůbec. Z tohoto hlediska nám osvětlují i pojem nekonečna v matematice. Nekonečných řad užíváme dále k výpočtu hodnot logaritmů čísel, čísla Ludolfova a mnoha jiných důležitých konstant. Nekonečnými řadami můžeme definovati a ovládnouti početně základní funkce elementární matematiky, jako jsou na příklad funkce goniometrické.

Autor příručky vybral a uspořádal látku tak, aby čtenáři ukázal to, co bylo právě o nekonečných řadách řečeno. Kniha proto pojednává jednak o řadách s konstantními členy, jednak o řadách mocninových a rozvojích některých funkcí v takové řady.

Matematické věty jsou vysloveny přesně i s příslušnými předpoklady, i když elementární ráz příručky nedovoluje uvésti všude důkazy. Věty jsou aplikovány v četných příkladech, které jsou řešeny, a v cvičeních, na nichž může čtenář vyzkoušeti, jak daleko text knížky pochopil. Tak vede autor čtenáře k tomu, aby pracoval s nekonečnými řadami opatrně a uvědomoval si při počítání s nimi, které výkony je dovoleno prováděti. Naučí-li se tomu čtenář, bude jeho cesta k poznání jiných matematických vět snazší.

JAN VYŠÍN

O NEKONEČNÝCH ŘADÁCH

Jč
m+f

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

PŘEDMLUVA

Účelem této příručky je informovati čtenáře o řadách — hlavně nekonečných — a o jejich použití v matematice. Vzhledem k omezenému rozsahu a elementárnímu rázu knížky se vyhýbám soustavnému abstraktnímu výkladu a používám spíše konkretních ukázek. Z týchž důvodů se omezuji na řady s reálnými členy, vynechávám složitější důkazy a při některých důkazech si pomáhám geometrickým vysvětlením. K prohloubení a doplnění — hlavně co se týče pojmů z infinitesimálního počtu — uvádím v odstavci *Literatura* několik knih, na které podle potřeby odkazuji i v textu.

Na konec děkuji za laskavé přečtení rukopisu panu prof. dr. F. Vyčichlovi a Jednotě československých matematiků a fysiků za pečlivé vypravení knížky.

Jan Vyšín.

1. ČÁST

ŘADY S KONSTANTNÍMI ČLENY

Úvod. Kdykoli bude v dalších výkladech řečeno „číslo“, je tím míněno číslo reálné. V oboru reálných čísel se pohybuje většina výpočtů středoškolské matematiky: objasním stručně pojem tohoto oboru.

Pod názvem „reálné číslo“ rozumíme jednak čísla t. zv. *racionální*, t. j. taková, která lze napsati ve tvaru obyčejných zlomků, jednak čísla t. zv. *iracionální*, jako jsou na př. $\sqrt{2}$, log 2, π. Tato poslední čísla byla zavedena buď na základě požadavku, aby jisté rovnice, které neměly racionální řešení, byly řešitelné (na př. rovnice $x^2 = 2$ má řešení $x = \sqrt{2}$, rovnice $10^x = 2$ má řešení $x = \log 2$); nebo limitním postupem při řešení některých úloh (na př. číslo π při výpočtu obvodu kruhu). Přitom se mlčky předpokládá, že lze každé iracionální číslo vyjádřit ve tvaru desetinného čísla s neomezeným počtem desetinných míst; v tomto předpokladu je vlastně obsažena nevyslovená definice reálného čísla.

Chceme-li si ji objasnit, dotýkáme se otázky, co je číslo. Pro naše účely postačí toto vysvětlení: číslo je symbol, pro který jsou vymezeny určité výkony, t. zv. početní, které s ním lze prováděti, a pravidla, kterými se provádění početních výkonů řídí. Tak na př.: čísla lze sčítati. Sčítání je výkon komutativní. Nedefinujeme tedy vlastně čísla, ale počítání s nimi.

Ve smyslu této poznámky definujeme tedy reálné číslo jako tento symbol: k celému číslu připojíme sled neomezeného počtu číslic, které nazýváme decimály. Přitom je dán předpis, podle něhož lze vypočísti kteroukoli decimálu.

Pro racionální čísla souhlasí tato definice s desetinným vyjádřením čísla, které je zlomek buď ukončený nebo periodický. Příslušný předpis je dělení čitatele zlomku jmenovatelem. Na př.

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}125;$$
$$\tfrac{1}{3} = 0{,}\bar{3} = 0{,}333\ldots$$

Pro iracionální čísla, na př. $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ určujeme jeho decimály postupně na základě nerovnin:

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$$
$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$$
$$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$$
$$1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2 \text{ atd.}$$

Početní výkony s iracionálními čísly definujeme v podstatě rozšířením pravidel pro počítání racionálními čísly: jest ovšem třeba jistých doplňků vzhledem k „nekonečnému počtu decimál" iracionálního čísla. O počítání s iracionálními čísly se čtenář blíže poučí v odstavci 1,18, kde o věci ještě jednou pohovořím. V praxi se iracionální čísla nahrazují racionálními čísly, na př. číslo π nahrazujeme racionálním číslem:

$$\pi \doteq 3{,}14159.$$

Počet decimál racionálního čísla záleží na přesnosti, kterou od výpočtu požadujeme.

1,1. Pojem posloupnosti a řady. Od násobilky až k nejsložitějším úlohám — všude v matematice se setkáváme se sledy*) čísel, uspořádanými podle určitého zákona. Zákon může být vysloven tak, že buď nám dovoluje vytvořit přímo libovolný (čili jak říkáme obecný) člen sledu, nebo podle něho určíme následující člen z předcházejícího. Vzhledem k okolnosti, že zákon uspořádání členů dovoluje tvořit další členy, nazývám jej někdy také slovem „předpis".

*) Slovem „sled" rozumím jisté uspořádání čísel; slovu „řada" se úmyslně vyhýbám, neboť má v dalším jiný význam.

Příklady takových předpisů:

1,1. Obecný (n-tý) člen je přirozené číslo n. Tak dostaneme sled:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

1,2. Násobky čísla 3, srovnané podle rostoucích násobitelů:

$$3, 6, 9, 12, 15, \ldots;$$

n-tý člen je $3n$.

1,3. První člen je 1; každý další je $\frac{1}{2}$ předcházejícího. Dostaneme členy

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \ldots;$$

n-tý člen je $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1,4. Obecný (n-tý) člen je $\dfrac{1}{n}$; sled má členy:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots$$

1,5. První člen je 180; každý další je největší pravý dělitel předcházejícího. Dostaneme členy:

$$180, 90, 45, 15, 5, 1.$$

1,6. n-tý člen — označíme jej a_n — je největší desetinný zlomek n-místný takový, že $a_n^2 < 2$. První člen je tedy $a_1 = 1,4$; neboť $1,4^2 < 2$, ale $1,5^2 > 2$. Druhý člen je $a_2 = 1,41$; neboť $1,41^2 < 2$, ale $1,42^2 > 2$. Tak postupujeme dále a dostaneme sled:

$$1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ 1,41421;\ \ldots$$

1,7. Předpis může býti třeba geometrický. Do daného kruhu vepišme postupně pravidelný 4-úhelník, 8-úhelník, 16-úhelník atd. a vypočtěme obsahy těchto obrazců. n-tý člen sledu budiž obsah vepsaného pravidelného 2^{n+1}-úhelníku.

Z předchozích příkladů je patrno, že předpis dovoluje obyčejně vytvořit neomezený počet členů; jen někdy (příklad 1,5) se tvoření členů samo zastaví. Sledy, jejichž počet členů je neomezený, se nazývají **posloupnosti** (čísel; jejich členy při obecném označování indexujeme, index znamená pořadí členu. Je tedy obecná posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

zkráceně píšeme $\{a_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$.

V posloupnostech z příkladů 1,1, 1,2 je rozdíl (diference) dvou sousedních členů stálý (roven 1 resp. 3); taková posloupnost se nazývá *aritmetická*. V posloupnosti příkladu 1,3 je podíl (kvocient) dvou sousedních členů stálý; posloupnost se nazývá *geometrická*. Příklady 1,4 1,6 1,7 ukazují složitější posloupnosti.

Cvičení. Najděte zákon vytvoření posloupnosti a vyjádřete, je-li to možné, její n-tý člen:

1,1. $1, -3, 9, -27, 81, \ldots$; **1,2.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$; **1,3.** $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$; **1,4.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \ldots$; **1,5.** $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$; **1,6.** $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$; **1,7.** $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$.

Výsledky: **1,1.** $(-3)^{n-1}$; **1,2.** $\frac{n}{n+1}$; **1,3.** $\binom{n+1}{2}$; **1,4.** $\frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n(n+2)}$; **1,5.** $\frac{2}{n+1}$ pro n liché, $\frac{n+2}{n}$ pro n sudé; **1,6.** $(-1)^{n-1}\,n$; **1,7.** Počínaje třetím členem je každý člen součet obou předchozích.

V mnohých matematických úlohách je potřeba buď sečísti nebo znásobiti určitý počet prvních členů nějaké posloupnosti. Naznačíme-li tyto početní výkony, dostaneme výraz, kterému říkáme *řada*, resp. *součin*.

Tak na př. řada je výraz:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Podobně součin je výraz:

$$1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, n.$$

Chceme-li vyjádřit, že ze členů posloupnosti budeme tvořit postupně součty o vzrůstajícím počtu členů (resp. součiny o vzrůstajícím počtu činitelů), píšeme schematicky

$$1 + 2 + 3 + \ldots \text{ (in inf.)}; \; 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \text{ (in inf.)}^{*)}$$

Těmto schematům říkáme **nekonečná řada**, resp. **nekonečný součin**. Zdůrazňuji, že znaménka „plus" nebo „krát" neznamenají provádění početního výkonu mezi nekonečně mnoha čísly (to je nemožné), ale naznačují, že tvoříme součty resp. součiny o stále vzrůstajícím počtu členů, resp. činitelů.

Připomínám ještě zkrácený a výhodný způsob psaní součtů a součinů. Používáme řeckých písmen Σ (velké sigma) pro sčítání a Π (velké pí) pro násobení takto: před obecným členem součtu (činitelem součinu) napíšeme písmeno Σ (Π) a poznamenáme, od kterého členu (činitele) po který se má sčítání, resp. násobení provádět. Tak na př. píšeme:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{100} = \sum_{n+1}^{100} \frac{1}{n}$$

$$3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, 45 = \prod_{n=3}^{45} n.$$

Analogicky k tomuto způsobu psaní píšeme *symbolicky* nekonečnou řadu nebo součin; na př.:

$$1 + 2 + 3 + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n; \; 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \equiv \prod_{n=1}^{\infty} n^{**)}$$

Obecně napíšeme tedy nekonečnou řadu nebo součin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \; \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Součty $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nazýváme *částečné součty* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

*) Zkratka „in inf.", t. j. „in infinitum" znamená „do nekonečna". Tuto zkratku obyčejně vynecháváme; není-li napsán poslední člen, znamená to vždy in inf.

**) Úmyslně zde užívám znaménka $\equiv$ (totožnost), neboť tu nejde o rovnost dvou čísel, nýbrž jen totožnost dvou označení.

tyto částečné součty zřejmě tvoří posloupnost. Podobně je tomu s částečnými součiny u nekonečného součinu.

V matematice jsou důležitější nekonečné řady než nekonečné součiny. Proto je tato příručka věnována hlavně řadám.

Cvičení I,8. Z každé z posloupností příkladu 2, 3, 4 a úloh 1 až 7 utvořte řadu a vyjádřete ji s pomocí symbolu Σ.

Ještě jedna důležitá **poznámka:**

Členy posloupnosti můžeme — jakožto reálná čísla — graficky znázorniti body na ose číselné. Podobně z členů řady algebraickým sčítáním úseček dostaneme body, které nám představují částečné součty řady. Toto znázornění je velice výhodné pro sledování vlastností posloupností i řad a budu se často na ně odvolávati.

Cvičení I,9. Znázorněte ve velkém měřítku na ose číselné několik prvních členů posloupnosti a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$; b) $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

I,2. O řadách aritmetických. Řada, utvořená z členů aritmetické posloupnosti, se nazývá *aritmetická.* Je to zvláštní případ obecnějšího druhu řad, t. zv. aritmetických řad vyšších stupňů, o kterých stručně pojednám v tomto odstavci.

Utvoříme-li rozdíly sousedních členů dané řady, dostaneme novou řadu, které říkáme *diferenční*; k řadě diferenční můžeme utvořit opět diferenční řadu; je to t. zv. *2. diferenční řada* k původní řadě, atd. Na př. řada:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots$$

má 1. diferenční řadu:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$$

a 2. diferenční řadu:

$$2 + 2 + 2 + 2 + \ldots$$

Definujeme: řada se nazývá *aritmetická stupně k*, má-li její k-tá diferenční řada všechny členy stejné.

Podle této definice je obyčejná aritmetická řada stupně 1, nahoře uvedená řada stupně 2. Z definice je dále patrné, že aritmetická řada stupně k je jednoznačně určena svým prvním členem a prvními členy svých k diferenčních řad, tedy $k + 1$ veličinami.

Abychom mohli pracovati s těmito řadami, je třeba vyjádřit n-tý člen. U aritmetické řady prvního stupně je její n-tý člen — jak známo ze střední školy — polynom v n stupně 1; platí totiž

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = (a_1 - d) + d \,.\, n.$$

Obráceně řada, jejíž obecný člen je polynom v n stupně 1, je aritmetická stupně 1. Obecněji řada, jejíž n-tý člen je polynom v n stupně k, t. j.

$$a_n = \alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} n + \alpha_k, \tag{1}$$

je aritmetická stupně k. Neboť její 1. diferenční řada má obecný člen:

$$b_n = a_{n+1} - a_n = \alpha_0(n^k + n^{k-1} + \ldots + 1) + \\ + \alpha_1(n^{k-1} + \ldots + 1) + \ldots + \alpha_{k-1},$$

t. j. polynom v n stupně $k - 1$. 2. diferenční řada bude tedy stupně $k - 2$, atd.; k-tá diferenční řada bude stupně 0, t. j. původní řada je stupně k.

Je nyní otázka, lze-li n-tý člen *každé* aritmetické řady stupně k vyjádřit jako polynom (1). Odpověď je kladná a důkaz se provede takto:

Stačí dokázat, že koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ lze vhodně zvolit tak, aby první člen řady Σa_n i první členy jejich k diferenčních řad byly rovny $k + 1$ předem zvoleným číslům. Tyto první členy jsou po řadě:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1} + \alpha_k,$$
$$A_0\alpha_0 + A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_{k-1}\alpha_{k-1}, \qquad A_{k-1} \neq 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M_0\alpha_0 + M_1\alpha_1, \qquad M_1 \neq 0$$
$$N_0\alpha_0, \qquad N_0 \neq 0$$

kde $A_0, \ldots, N_0$ jsou zvláštní čísla. Položíme-li těchto $k+1$ výrazů rovných $k+1$ daným číslům, můžeme z těchto rovnic vypočísti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Tím je tvrzení dokázáno.

Součty ar. řady stupně k tvoří patrně aritmetickou řadu stupně $k+1$, neboť její $(k+1)$-ní řada diferenční má všechny členy stejné. Připojíme-li k řadě součtů jako první člen nulu, je součet s_n původní řady roven $(n+1)$-nímu členu této řady součtů, t. j. polynom v $n+1$ stupně $k+1$:

$$s_n = \beta_0(n+1)^{k+1} + \beta_1(n+1)^k + \ldots + \beta_{k+1}.$$

Poněvadž 1. člen řady součtů je nula, anuluje se tento polynom pro $n = 0$. T. j. s_n lze vyjádřit jako polynom v n stupně $k+1$ s nulovým absolutním členem.

Máme tedy výsledek

(V. 1,1.) *Obecný člen aritmetické řady stupně k je polynom v n stupně k; součty této řady jsou dány polynomem v n stupně $k+1$ s nulovým absolutním členem.*

Většina čtenářů zná asi vtipný způsob, kterým *Gauss* kdysi odvodil vzorec pro součet aritmetické řady:

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} = \frac{d}{2} n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) n.$$

K témuž výsledku dospějeme podle vyslovené věty takto: součet ar. řady je polynom v n stupně 2, t. j.

$$s_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n.$$

Koeficienty β_0, β_1 určíme z rovnic, které dostaneme dosazením $n = 1, 2$;

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 &= s_1 = a_1 \\ 4\beta_0 + 2\beta_1 &= s_2 = 2a_1 + d. \end{aligned}$$

Odtud $\beta_0 = \frac{d}{2}$, $\beta_1 = a_1 - \frac{d}{2}$.

Cvičení 1,10. Odvoďte podobným způsobem výsledky:

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1,11. Vypočtěte součty:

a) $1 . (1 + 3) + 2 . (2 + 3) + \ldots + n(n + 3)$ $\left[s_n = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}\right]$

b) $\sum_{i=1}^{n} \binom{i+1}{2}$ $\left[s_n = \binom{n+2}{3}\right]$

c) $\sum_{i=1}^{n} (i^2 - 3i + 2)$ $\left[s_n = 2\binom{n}{3}\right]$

U *nekonečných* řad aritmetických nás zajímá otázka, jak se chovají součty s_n takové řady, vzrůstá-li index n neomezeně. Obecný součet je dán podle dokázané věty vzorcem:

$$s_n = \beta_0 n^{k+1} + \beta_1 n^k + \beta_2 n^{k-1} + \ldots + \beta_k n.$$

Dokážeme: je-li $\beta_0 > 0$ (kladné), pak součty s_n o rostoucím n vzrůstají nade všecky meze, čili — jak říkáme — rostou do $+\infty$. O řadě pak pravíme, že *diverguje k* $+\infty$.

Je-li $\beta_0 < 0$ (záporné), pak součty s_n s rostoucím n se zmenšují pod všecky meze, čili — jak říkáme — rostou do $-\infty$. O řadě pak pravíme, že *diverguje k* $-\infty$.

Řady (nekonečné), jejichž částečné součty mají jednu nebo druhou vlastnost, nazýváme **určitě divergentní** (rozbíhavé). Máme tedy výsledek:

(V. 1,2.) *Každá aritmetická řada nekonečná je určitě divergentní.*

Důkaz hořejšího tvrzení:

Budiž třeba $\beta_0 > 0$. Nejnepříznivější případ pro vzrůst s_n je, jsou-li všechna ostatní β_i záporná, t. j. $\beta_1 = -\gamma_1 < 0, \ldots$ $\ldots, \beta_{k+1} = -\gamma_{k+1} < 0$.

$$s_n = \beta_0 n^{k+1} - (\gamma_1 n^k + \gamma_2 n^{k-1} + \ldots + \gamma_{k+1} n^0). \qquad (2)$$

Ježto platí $n^i < n^k$, je-li $i < k$, zmenší se pravá strana rovnice (2), nahradíme-li v závorce všechny mocniny n^i mocninou n^k, t. j.

$$s_n > \beta_0 n^{k+1} - (\gamma_1 n^k + \gamma_2 n^k + \ldots + \gamma_{k+1} n^k) = n^k(\beta_0 n - \\ - \gamma_1 - \gamma_2 - \ldots - \gamma_{k+1}) \qquad (3)$$

Pro dostatečně velké n je závorka výrazu (3) kladná a protože mocnina n^k roste s rostoucím n nade všecky meze, platí totéž i o součtu s_n. Podobně postupujeme v případě $\beta_0 < 0$.

1,3. Řada geometrická jako příklad řady konvergentní. Pro součty řady geometrické, t. j. řady utvořené z členů geometrické posloupnosti, se odvozuje na střední škole vzorec:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad (4)$$

kde a_1 je první člen řady, q její kvocient. Jde tedy o řadu

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Chování součtů nekonečné geometrické řady je rozmanitější, než je tomu u aritmetických řad.

1. Je-li $q > 1$ (tedy kladné), usoudíme snadno ze vzorce (4), že řada je **určitě divergentní**, a to diverguje k $\pm\infty$ podle toho, je-li $a_1 \gtrless 0$.

2. Obdobný výsledek platí pro $q = 1$. V tomto případě ovšem nelze užít vzorce (4) (v jmenovateli by byla 0), ale výsledek je — jak říkáme — triviální, neboť řada má všechny členy $= a_1$.

3. Je-li $q < -1$ (tedy záporné), pak součty s_n mají podle vzorce (4) střídavá znaménka, ale jejich prosté hodnoty se stále zvětšují.

4. Je-li $q = -1$, má řada tento tvar:

$$a_1 + (-a_1) + a_1 + (-a_1) + \ldots$$

Součty s_n nabývají tedy střídavě hodnot a_1 a 0.

Řady, jejichž součty se chovají jako v případě 3., 4., t. j. ani nevzrůstají určitě buď k $+\infty$ nebo k $-\infty$, ani se neblíží nějaké hodnotě, se nazývají **neurčitě divergentní**.

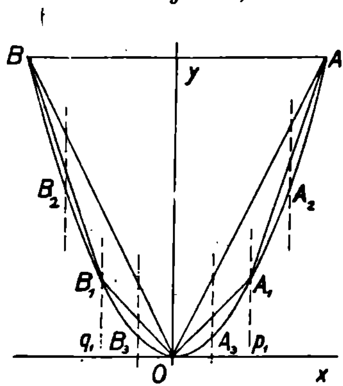
5. q leží mezi -1 a $+1$, t. j. $-1 < q < +1$ čili $|q| < 1$.

Tento případ je nejzajímavější. S rostoucím n totiž q^n se blíží k nule, t. j. zlomek ve vzorci (4) se blíží hodnotě $\frac{1}{1-q}$, s_n se blíží hodnotě $\frac{a_1}{1-q}$. Této hodnotě říkáme součet nekonečné geometrické řady, ač to ve skutečnosti žádný součet není. Řada s tímto chováním částečných součtů se nazývá **konvergentní** (sbíhavá).

Shrneme-li výsledky 1.—5., vyslovíme tuto větu:

(V. 1,3.) *Nekonečné geometrické řady jsou trojího druhu: je-li kvocient* $q \geqq 1$, *je řada určitě divergentní; je-li kvocient* $q \leqq -1$, *je řada neurčitě divergentní; je-li kvocient* q *takový, že* $|q| < 1$, *je řada konvergentní.*

Většině čtenářů je asi známo dosti příkladů použití konvergentních geometrických řad. Připomenu zde klasický příklad kvadratury paraboly*) t. zv. vyčerpávací metodou, protože pěkně ukazuje cestu, jak užívati konvergentních řad k určování obsahů ploch.



Obr. 1.

*) Kvadraturou nazýváme určení obsahu obrazce.

Budeme určovati obsah úseče paraboly $y = x^2$, omezené obloukem křivky a tětivou AB, rovnoběžnou s osou x (obr. 1).

K tětivám OA, OB vedeme sdružené průměry p_1, q_1 (t. j. rovnoběžky s osou paraboly, které tětivy půlí) a dostaneme průsečíky A_1, B_1 těchto průměrů s parabolou. Dále sestrojíme průměry, sdružené s tětivami BB_1, B_1O, OA_1, A_1A, dostaneme další průsečíky B_2, B_3, A_3, A_2 a tak pokračujeme dále. Provedeme-li dostatečný počet kroků, pak mnohoúhelník, složený z trojúhelníků

$$OAB + (OA_1A + OB_1B) + (OA_3A_1 + A_1A_2A + OB_3B_1 + \\ + B_1B_2B) + \dots \tag{5}$$

se libovolně málo liší od úseče (OAB). Obsah tohoto mnohoúhelníku, který je součtem obsahů jednotlivých trojúhelníků, se při rostoucím počtu kroků n blíží jistému číslu (jak bude z dalšího patrno) a toto číslo prohlašujeme za obsah parabolické úseče.

V učebnicích analytické geometrie se dokazuje z vlastností paraboly, že součet obsahů trojúhelníků, ke kterým dospějeme při n-tém kroku, je čtvrtina součtu obsahů příslušných trojúhelníků při $(n - 1)$-ním kroku. Jinými slovy: výraz (5) je geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{4}$, jejíž první člen je $\triangle\, OAB = x_1y_1$.

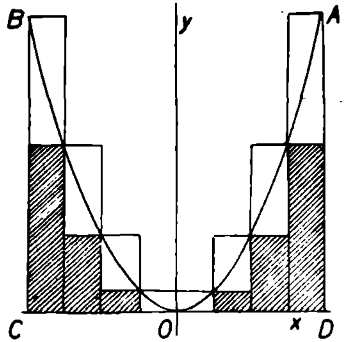
Taková geometrická řada je podle věty 1,3 konvergentní; její „součet", t. j. číslo, kterému se blíží částečné její součty, je

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{x_1y_1}{1 - \frac{1}{4}} = \tfrac{4}{3}x_1y_1. \tag{6}$$

Vracím se ještě k výroku, že toto číslo prohlašujeme za obsah úseče paraboly. To je vlastně definice, ke které jsme ovšem vedeni; ale její plnou oprávněnost vyložím na konci odst. 1,4, ve kterém probereme ještě jiný způsob kvadratury paraboly.

1,4. Jiný způsob kvadratury jako příklad konvergentní posloupnosti. Provedeme kvadraturu paraboly $y = x^2$ ještě jiným způsobem, který je vlastně metodou integrálního počtu.

Vypočteme obsah doplňkové části k úseči, t. j. obrazce ($AOBCODA$) (viz obr. 2). Tento obrazec je uzavřen mezi dva stupňovité obrazce, složené z obdélníků: menší je vyčárkovaný, větší silně ohraničený. Rozdělíme-li úsečky OC, OD na dostatečně velký počet n stejných dílů (na obr. 2 $n = 4$) a sestrojíme obdélníčky podle obrázku, budou se oba stupňovité obrazce libovolně málo lišiti od doplňkové části úseče. Vypočtěme obsahy obou stupňovitých obrazců.



Obr. 2.

Obsah P_n menšího z nich (vyčárkovaného) je patrně podle obrázku:

$$P_n = 2\left[\frac{x_1}{n} . 0 + \frac{x_1}{n}\left(\frac{x_1}{n}\right)^2 + \frac{x_1}{n}\left(\frac{2x_1}{n}\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{x_1}{n} \cdot \left(\frac{(n-1)x_1}{n}\right)^2\right],$$

t. j.

$$P_n = 2\frac{x_1^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] = 2\frac{x_1^3}{n^3}s_{n-1} =$$

$$= 2\frac{x_1 y_1}{n^3}s_{n-1},$$

kde s_{n-1} je součet $n - 1$ členů aritmetické řady $1^2 + 2^2 +$

$+ 3^2 + \ldots$. Podle cvičení 1,9 a) je $s_{n-1} = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$,

t. j.

$$P_n = \frac{x_1 y_1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Podobně dostaneme pro obsah P'_n většího stupňovitého obrazce výsledek:

$$P'_n = 2\frac{x_1 y_1}{n^3} s_n,$$

kde $s_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Po dosazení za s_n vyjde:

$$P'_n = \frac{x_1 y_1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Posloupnost čísel P_n má tu vlastnost, že její členy s rostoucím indexem n se blíží neomezeně jisté hodnotě, totiž hodnotě $\frac{2}{3}x_1y_1$. Posloupnosti této vlastnosti se říká *konvergentní* a číslu, kterému se blíží její členy — v našem případě $\frac{2}{3}x_1y_1$ — se říká *limita* (mezní hodnota). Také posloupnost P'_n je konvergentní a má stejnou limitu $\frac{2}{3}x_1y_1$.

Poněvadž doplňková část úseče je stále mezi oběma stupňovitými obrazci a jejich obsahy se blíží společné hodnotě $\frac{2}{3}x_1y_1$, jsme názorem vedeni k tomu, prohlásiti tuto hodnotu za obsah doplňkové části. Podle názoru nyní očekáváme, že obsah úseče vypočtený ve vzorci (6) a obsah doplňkové části $\frac{2}{3}x_1y_1$ dají dohromady obsah obdélníku $ABCD$. Skutečně tomu tak je, neboť

$$\tfrac{4}{3}x_1y_1 + \tfrac{2}{3}x_1y_1 = 2x_1\,y_1.$$

Nyní ještě k vysvětlení definice obsahu n úseče resp. její doplňkové části. Při druhém způsobu kvadratury jsme ohraničili doplňkovou část jistými stupňovitými obrazci, které se postupně neomezeně blížily doplňkové části. Kdybychom zvolili k ohraničení jiné obrazce,*) dostali bychom jiné posloupnosti obsahů. Bude-li však splněna podmínka, že se obrazce neomezeně blíží doplňkové části, budou všechny tyto posloupnosti konvergentní — jak lze dokázat — a budou mít společnou limitu $\frac{2}{3}x_1y_1$. Proto jsme plně oprávněni prohlásiti tuto limitu za obsah doplňkové části úseče.

Podobně je tomu při prvním způsobu kvadratury. Úseč můžeme „skládati" i jinak než z trojúhelníků, jak jsme to učinili. Dostaneme jiné řady (třeba nikoli geometrické); ale je-li splněna podmínka, že se skládané obrazce blíží neomezeně úseči, mají všechny tyto řady stejný „součet" — t. j. obsah úseče.

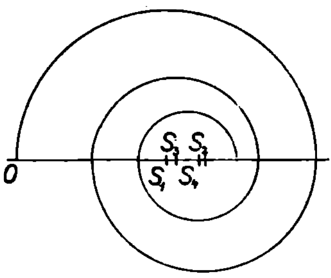
Vzpomeňme ještě na příklad 1,7. Tam byl kruh vytvořen jako mezní obrazec k vepsaným pravidelným mnohoúhelníkům. Posloupnost jejich obsahů je — jak se dokazuje — konvergentní a její limita je obsah kruhu.

Na těchto malých ukázkách je vidět, jak důležité jsou — na př. v geometrii — konvergentní posloupnosti a řady. Proto musíme precisovati pojem konvergence a limity a odvoditi základní vlastnosti konvergentních řad; to bude obsahem dalších oddílů.

Cvičení 1,12. a) Určete délku spirály, složené z polokružnic, jejichž středy jsou na téže přímce, poloměr první z nich je roven 1 a poloměr každé následující jsou $\frac{3}{4}$ předcházejícího.

b) Jak je vzdálen od počátku O této spirály bod S, ke kterému spirála směřuje? (Obr. 3.)

Vyjde a) $d = 4\pi$, b) $\overline{OS} = 1\frac{1}{7}$.



Obr. 3.

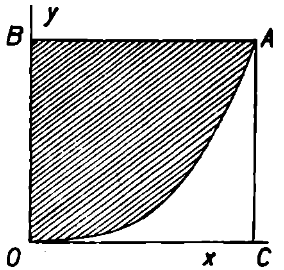
*) Na př. složené z lichoběžníků, jejichž jedna strana by byla tětiva, resp. tečna paraboly.

1,13. Proveďte kvadraturu kubické paraboly $y = x^3$, t. j. určete obsah úseče (OAB) pomocí doplňkové části (OAC), postupem, jakého bylo užito v odst. 1,4 pro kvadrickou parabolu. Použijte přitom výsledku cvičení 1,10 b)! (Obr. 4.)

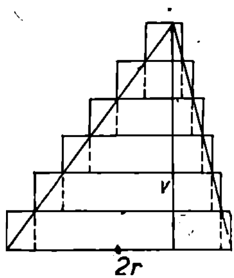
[Vyjde $\frac{3}{4}x_1y_1$].

1,14. Proveďte kubaturu*) kosého kužele kruhového, tím, že jej uzavřete mezi dvě tělesa, složená z rotačních válců, jak je naznačeno na obrázku. Objemy těchto těles tvoří posloupnosti o společné limitě, která je objemem kužele. (Obr. 5.)

[Vyjde $\frac{1}{3}\pi r^2 v$].



Obr. 4.



Obr. 5.

1,5. Pojem konvergence a limity. Konvergentní posloupnost a řadu jsme zhruba charakterisovali tím, že její členy, resp. částečné součty se blíží s rostoucím indexem n jisté hodnotě — t. zv. **limitě.** Protože částečné součty řady tvoří posloupnost, je vlastně konvergence posloupnosti a řady jedno a totéž: místo „konvergence řady“ můžeme říkat „konvergence posloupnosti jejích částečných součtů“, a obráceně.

Použijeme grafického znázornění třeba pro konvergentní geometrickou řadu z odst. 1,3, jejíž $a_1 = x_1y_1 = 3$, $q = \frac{1}{4}$. Její částečné součty jsou:

$$s_1 = 3,\ s_2 = 3\tfrac{3}{4},\ s_3 = 3\tfrac{15}{16},\ s_4 = 3\tfrac{63}{64},$$

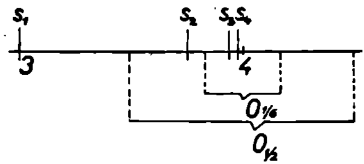
*) Kubatura tělesa je určení jeho objemu.

obecně

$$s_n = 3 + \frac{4^{n-1} - 1}{4^{n-1}}. \tag{7}$$

O této řadě víme, že má limitu $\dfrac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$; sestrojme si (obr. 6) úsečku se středem v bodě 4 a o délce $\frac{1}{3}$. Tato úsečka obsahuje uvnitř všechny body, odpovídající číslům x, která vyhovují nerovnostem:

$$4 - \tfrac{1}{6} < x < 4 + \tfrac{1}{6}.$$



Obr. 6.

Tuto úsečku' resp. souhrn těchto čísel, nazýváme *okolí bodu* 4*) a označujeme je $O_{\frac{1}{6}}$. Z obrázku je patrno, že v okolí $O_{\frac{1}{6}}$ leží všechny součty s_n s výjimkou s_1, s_2. Kdybychom si sestrojili libovolné jiné okolí bodu 4, třeba O_ε, kde ε je libovolně malé kladné číslo, budou ležeti v O_ε zase všechny body s_n s výjimkou konečného počtu počátečních. Na základě tohoto výkladu můžeme formulovati přesnou definici konvergentní posloupnosti či řady.

Pravíme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k limitě a, jestliže v každém okolí bodu a leží všechny členy posloupnosti nejvýše s výjimkou konečného počtu členů.

Vyslovte sami obdobnou definici pro konvergentní řadu! Definici formulujeme geometricky pro jednoduchost; ale zřejmě ji můžeme vyslovit ryze aritmeticky (pomocí nerovností):

Posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k limitě a, platí-li nerovnosti

*) Výrazů „číslo" nebo „bod", který je jeho obrazem, užívám střídavě.

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

pro všechny indexy n od určitého počínaje (jiné vyslovení „výjimky konečného počtu").

Způsob psaní: u posloupností $\{a_n\}$ píšeme

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n,$$

nebo jinak

$$a_n \to a;$$

u řad nazýváme limitu posloupnosti $\{s_n\}$, t. j. limitu posloupnosti částečných součtů, **„součtem řady"** (pozor — není to skutečný součet!) a píšeme

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

což znamená

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n,$$

kde $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Příklady. 1,8. Posloupnost geometrická s kladným kvocientem $q < \frac{1}{10}$ konverguje k nule. Její obecný člen je totiž

$$a_n = q^n;$$

podle předpokladu je $q^n < 10^{-n}$; pravou stranu této nerovniny lze *při dostatečně velkém* n (t. j. od určitého n počínaje) učiniti menší než libovolné číslo ε; pak ovšem platí

$$-\varepsilon < q^n < +\varepsilon,$$

čili q^n leží v okolí O_ε bodu 0.*)

1,9. Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ konverguje k nule. Stačí zvoliti $n > \frac{1}{\varepsilon}$ a všecky členy a_n pak leží v okolí O_ε.

*) Podobný výsledek lze dokázat obecněji pro každé $q < 1$.

1,10. Posloupnost

$$\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{7},\ \dots$$

(jaký je zákon vytvoření?) konverguje také k nule. Odůvodněte podrobně!

1,11. Řada

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

je konvergentní a má součet 1. Neboť její obecný člen lze rozložit:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

t. j.

$$s_n = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \dots +$$
$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Cvičení 1,15. Posloupnost $\{a_n\}$, kde

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}.$$

konverguje k 1; dokažte a znázorněte graficky!

1,16. Zjistěte, které členy posloupnosti (7) neleží v okolí $O_{\frac{1}{10}}$ bodu 4. [Členy s_1, s_2, s_3, s_4, s_5.]

1,17. Od kterého indexu počínaje leží všechny součty geometrické řady alternující

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} - \dots$$

v okolí $O_{\frac{1}{20}}$ jejího součtu? [Od $n = 4$.]

1,18. Tatáž otázka pro posloupnost:

$$1,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{8},\ \dots,$$

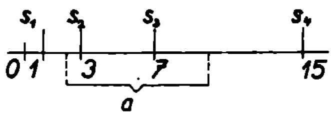
[Od $n = 6$.]

1,19. Dokažte konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ a určete její součet!

[Návod: Rozložte $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ a vyjádřete s_n. Vyjde $s = \frac{3}{4}$.]

1,20. Posloupnost z příkladu 1,6 konverguje k $\sqrt{2}$. Dokažte! Podobně se dokazuje, že každé reálné číslo je limitou posloupnosti racionálních čísel.

1,6. Posloupnosti a řady divergentní. Je třeba nyní se zmínit o posloupnostech a řadách, které nejsou konvergentní. Dotkli jsme se této otázky už při geometrických řadách.



Obr. 7.

Znázorněme si graficky (obr. 7) součty geometrické řady, kterou jsme nazvali určitě divergentní, na př. $a_1 = 1$, $q = 2$, t. j. $s_n = 2^n - 1$.

Zvolíme-li si libovolnou úsečku a na ose číselné, leží všechny součty s výjimkou nejvýše konečného počtu vně této úsečky, a to od určitého indexu počínaje vpravo.

Úsečky na ose číselné jakožto souhrn bodů nazýváme z početního hlediska **intervalem.** Interval (uzavřený) je tedy množina čísel, která vyhovují nerovnostem:

$$a \leqq x \leqq b,$$

kde a, b jsou čísla navzájem různá, $a < b$.

Určitě divergentní posloupnost, resp. řadu pak definujeme takto:

Posloupnost $\{a_n\}$ určitě diverguje, leží-li všechny její členy s výjimkou nejvýše konečného počtu vně libovolného intervalu; a to při divergenci k $(+\infty)$ vpravo tohoto intervalu a při divergenci k $(-\infty)$ vlevo tohoto intervalu.

Aritmeticky vyjádřeno:

Posloupnost $\{a_n\}$ diverguje k $(+\infty)$, jestliže pro každé (libovolně velké) číslo K platí nerovnost

$$a_n > K$$

od určitého indexu n počínaje.

Vyslovte obdobné definice pro řady (t. j. pro posloupnosti jejich částečných součtů)! Každá posloupnost nebo řada, která není ani konvergentní ani určitě divergentní, se nazývá *neurčitě divergentní.* Posloupnosti a řady určitě i neurčitě divergentní se nazývají souhrně divergentní.

Příklady. 1,12. Řada

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + - \ldots$$

je neurčitě divergentní. Neboť členy posloupnosti jejích součtů

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

vzrůstají zároveň do $+\infty$ i do $-\infty$.

1,13. Řada

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{8} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{13}{16} + \tfrac{7}{8} - + \ldots$$

(jaký je zákon vytvoření?) je také neurčitě divergentní. Neboť členy posloupnosti jejích částečných součtů, totiž

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{15}{16}, \ldots$$

se blíží s rostoucím indexem *dvěma* hodnotám: 0, 1.

1,14. V dosavadních příkladech neurčitě divergentních posloupností členy buď zároveň vzrůstaly do $+\infty$ i $-\infty$ (př. 1,12) nebo se blížily dvěma hodnotám (př. 1,13). Členy mohou také vzrůstati i blížiti se nějaké hodnotě, jako na př. u posloupnosti

$$2, \tfrac{1}{2}, 3, \tfrac{1}{3}, 4, \tfrac{1}{4}, \ldots$$

Zajímavý je příklad neurčitě divergentní posloupnosti, jejíž členy se blíží libovolné kladné hodnotě. Je to posloupnost všech kladných racionálních čísel. Sestavme kladná racionální čísla $\frac{p}{q}$ do skupin tak, že do n-té skupiny dáme ta čísla, pro něž $p + q = n$. Dostaneme posloupnost

$$0 \mid 1 \mid \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}, \mid \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{3}{1}, \mid \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}, \mid \ldots \tag{8}$$

V této posloupnosti jsou zřejmě obsažena všechna kladná racionální čísla (některá se opakují). Zvolíme si libovolné kladné reálné číslo $N > 0$ a napíšeme je v desetinném vyjádření, na př.

$$N = 12{,}68541023\ldots$$

V posloupnosti (8) se vyskytují racionální čísla

$$12{,}0;\ 12{,}6;\ 12{,}68;\ 12{,}685;\ 12{,}6854;\ 12{,}68541;\ \ldots; \tag{9}$$

která se neomezeně blíží číslu N.*)

1,7. Základní pravidla pro počítání řadami.

Je-li dána nějaká posloupnost či řada, mají pro teorii i pro užití zásadní důležitost dvě otázky:

1. Konverguje předložená řada (posloupnost) či nikoli?
2. Konverguje-li, jaký je její součet (limita)?

Odpověď na první otázku si představujeme ve formě pravidla, které nám dovoluje z vlastností členů řady (posloupnosti) usuzovati na její konvergenci. (Připomeňte si na př. pravidlo, kdy je geometrická řada konvergentní!) Hledáme tedy podmínky, které *stačí* k tomu (proto se nazývají *podmínky postačující*), aby řada konvergovala; takto vysloveným pravidlům říkáme **kriteria konvergence.** *Obyčejně je dostáváme porovnáním dané řady s řadou, jejíž chování je již známé.*

Mimo postačující podmínky pro konvergenci si odvozujeme také *nutné podmínky*, t. j. takové, které jsou *nutně* splněny, konverguje-li posloupnost či řada, ale nestačí k zjištění konvergence. Jejich význam je negativní: nejsou-li splněny, řada diverguje.

---

*) N je vlastně limitou posloupnosti (9).

Podmínka, která je zároveň nutná i postačující, je *charakteristická vlastnost konvergence*. Tyto podmínky se většinou pro svou složitost nehodí pro praktické použití.

Odpověď na druhou otázku bývá často obtížnější než na prvou. Často se snažíme odvodit danou řadu z řad, jejichž součty již známe a tak určiti její součet.

Při obou úkolech (přirovnávání řad, odvozování jedné z druhé) potřebujeme znáti pravidla pro počítání řadami (posloupnostmi). Některých z nich jsme již vlastně užívali; nyní si základní pravidla vyslovíme.

(V. I,4.) *Konvergují-li posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ k limitám a resp. b, konverguje též posloupnost $\{a_n \pm b_n\}$ k limitě $a \pm b$. Vzorcem:*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Pravidlo lze snadno nahlédnouti geometricky (na ose číselné) i pomocí nerovností.

(V. I,5.) *Konverguje-li posloupnost $\{a_n\}$ k limitě a, a je-li K libovolný koeficient, pak posloupnost $\{Ka_n\}$ konverguje k limitě Ka. Vzorcem:*

$$\lim_{n\to\infty} Ka_n = K \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Obě pravidla se ihned zřejmě přenášejí na řady:

(V. I,6.) *Konvergují-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ k součtům a, b, konverguje též řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ k součtu $a \pm b$. Vzorcem:*

$$\Sigma(a_n \pm b_n) = \Sigma a_n \pm \Sigma b_n.\text{*)}$$

(V. I,7). *Konverguje-li řada Σa_n k součtu a, a je-li K libovolná konstanta, konverguje řada ΣKa_n k součtu Ka. Vzorcem:*

$$\Sigma Ka_n = K\Sigma a_n.$$

*) Sčítací index pro jednoduchost vynechávám.

Pravidla (V. 1,6) (V. 1,7) vyslovují něco, co je pro součet konečného počtu členů samozřejmé; pro součet nekonečné řady musí však být toto pravidlo zvlášť dokázáno, neboť tu nejde o žádný skutečný součet.

Při počítání řadami a posloupnostmi se velmi často používá věty

(V. 1,8.) *Jsou-li* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a platí-li pro jejich členy*

$$a_n \leqq b_n$$

od určitého indexu n počínaje, pak platí pro jejich limity vztah:

$$a \leqq b.$$

Důsledek:

Je-li $\{a_n\}$ *konvergentní posloupnost, K reálné číslo takové, že platí:*

$$a_n \leqq K$$

od určitého indexu n počínaje, pak platí pro limitu posloupnosti vztah:

$$a \leqq K.$$

K důkazu stačí vyvrátit nerovnost $a > b$. Dejme tomu, že tato nerovnost platí: pak v okolí $O_{\frac{a-b}{2}}$ bodu a leží všechny členy a_n od jistého indexu n_1 počínaje. Podobně všechny členy b_n od indexu n_2 počínaje leží v okolí $O'_{\frac{a-b}{2}}$ bodu b. Je-li n_3 větší z čísel n_1, n_2, pak pro všechny indexy $n > n_3$ platí $a_n > b_n$ proti předpokladu. — Znázorněte si okolí $O_{\frac{a-b}{2}}$, $O'_{\frac{a-b}{2}}$ geometricky! — Důsledek věty dostaneme, nahradíme-li posloupnost $\{b_n\}$ aritmetickou posloupností $\{K\}$ o nulové diferenci.

Cvičení. (Použití vět 1,4 až 1,7.)

1,21. Určete součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\binom{n+2}{3}}$. [Návod: obecný člen rozložte:

$$\frac{1}{\binom{n+2}{3}} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{6}{n+2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{6}{n(n+2)} - \frac{6}{(n+1)(n+2)};$$

Na pravé straně dostáváme členy řad již vyšetřovaných; a to v úloze 1,19 a v příkladě 1,11.]

1,22. Jest určiti součet řady utvořené z členů řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, které stojí na lichých místech, t. j.

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{63} + \tfrac{1}{99} + \dots$$

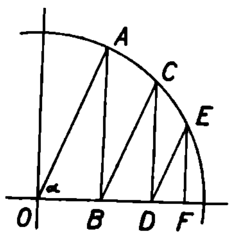
[Návod: Řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ je totožná s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. Určete součet členů, stojících na *sudých* místech, t. j. součet řady $\frac{1}{4} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$. Vyjde $\frac{1}{2}$.]

1,23. Do jednotkové kružnice je vepsána lomená čára, jak je naznačeno na obr. 8. Určete její délku. [Návod: Rozložte čáru v řady rovnoběžných úseků

$$\overline{OA} + \overline{BC} + \overline{DE} + \dots$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \dots$$

Vyjde $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Je podstatné, že křivka je kružnice?]



Obr. 8.

1,24. Najděte zákon vytvoření řady

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{16} + \tfrac{15}{64} + \tfrac{31}{256} + \dots$$

a určete její součet. [Návod: Řadu rozložte na dvě řady geometrické.] [Vyjde $s = \frac{5}{3}$.]

Na konci oddílu uvedu ještě jednu vlastnost konvergentních posloupností a řad, důležitou pro počítání s nimi:

(V. 1,9.) *Vynecháme-li nebo přidáme-li ke konvergentní posloupnosti libovolný konečný počet členů nebo změníme-li* *jakkoli libovolný konečný počet jejích členů, zůstane posloupnost konvergentní a její limita se nezmění.*

Jinými slovy: Chování posloupnosti nezáleží na jakémkoli počtu jejích počátečních členů, nýbrž jen na nekonečném „zbytku". Věta je zřejmá, uvědomíme-li si definice konvergence, třeba geometricky.

Pro nekonečné řady platí:

(V. 1,10.) *Vynecháme-li nebo přidáme-li ke konvergentní řadě libovolný konečný počet členů nebo změníme-li jakkoli libovolný konečný počet jejích členů, zůstane řada konvergentní, ale její součet se obecně změní.*

Větu snadno nahlédneme, uvědomíme-li si, že provedením změn se změní všecky částečné součty od neurčitého počínaje o jistou aditivní konstantu (číslo, které se přičítá nebo odečítá).

Cvičení 1,25. Jak se změní částečné součty a součet geometrické řady:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + - \ldots$$

jestliže: a) vynecháme první 3 členy;
b) znásobíme 2., 3. a 5. člen třemi;
c) změníme u prvých 6 členů znaménka.

1,8. Nejjednodušší kriterium konvergence. Členy posloupnosti, znázorněny graficky na číselné ose, dají obyčejně nekonečné množství bodů (ne vždy — vzpomeňte na aritmetickou posloupnost o diferenci 0). Existuje-li takový interval, že všechny tyto body v něm leží, pravíme, že *posloupnost je omezená.*

Cvičení 1,26. Zjistěte, které z posloupností v příkladech 1,1—1,7 a cvičeních 1,1—1,6 jsou omezené a které jsou neomezené.

Pomocí tohoto názvu vyslovíme nejjednodušší nutnou podmínku pro konvergenci posloupnosti:

(V. 1,11.) *Konvergentní posloupnost je omezená.*

Věta je takřka zřejmá. Je-li $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, leží všechny členy

a_n v okolí O_1 bodu a s výjimkou jistých členů $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_r}$. Nechť nejvzdálenější z těchto členů od bodu a má vzdálenost d. Pak všechny členy posloupnosti leží v intervalu $\langle a - d, a + d\rangle$.

Že podmínka (**V 1,11**) není postačující, ukazuje jednoduchý protipříklad, totiž posloupnost ze cvičení 1,5. Připojíme-li však k omezenosti posloupnosti ještě jeden předpoklad, dostaneme podmínku postačující.

V minulých výkladech jsme se často setkali s posloupnostmi, jejichž členy buď stále vzrůstaly nebo klesaly, na př.

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \ldots \text{ nebo } 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots$$

Definujeme: posloupnost se nazývá **neklesající** platí-li pro všechny indexy n vztah:

$$a_n \leqq a_{n+1};$$

podobně: posloupnost se nazývá **nerostoucí**, platí-li pro všechny indexy n vztah:

$$a_n \geqq a_{n+1}.$$

Souhrnný název pro posloupnosti neklesající a nerostoucí je: **posloupnosti monotonní**.

Platí věta:

(V. 1,12.) *Posloupnost omezená a monotonní je konvergentní; a to je-li posloupnost neklesající, platí*

$$a_n \leqq \lim_{n\to\infty} a_n \quad p.\ v.\ n,\text{*)}$$

je-li nerostoucí:

$$a_n \geqq \lim a_n \quad p.\ v.\ n.$$

Důkaz tohoto kriteria konvergence přesahuje rámec příručky; jeho obsah bude čtenáři přijatelnější, nahlédneme-li si geometricky, co znamenají předpoklady.

Cvičení 1,27. Vyhledejte z posloupností cvičení 1,25 posloupnosti omezené a monotonní a svěřte si pro ně větu 1,11.

---

*) Zkratka znamená: pro všecky indexy n.

Pro nekonečné řady vyslovíme dvě věty analogické větám 1,11 a 1,12. Místo věty 1,11 platí věta silnější:

(V. 1,13.) *Posloupnost členů konvergentní řady konverguje k nule.*

Důkaz: Budiž $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Platí

$$a_1 = s_1 - 0;\ a_2 = s_2 - s_1;\ a_3 = s_3 - s_2;\ a_4 = s_4 - s_3;\ \dots$$

Posloupnosti $s_1, s_2, s_3, \dots;\ 0, s_1, s_2, \dots$ konvergují podle věty 1,9 k téže limitě a a podle věty 1,4 je

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

Věta 1,13 vyjadřuje podmínku nutnou, která není postačující pro konvergenci řady. Ukazuje to t. zv. *harmonická řada*

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \dots,$$

která je divergentní, ačkoli posloupnost jejích členů konverguje k nule. O této řadě bude podrobněji pojednáno v odst. 1,9.

Z kriteria 1,12 dostaneme kriterium konvergence pro nekonečné řady, zvolíme-li členy tak, aby posloupnost částečných součtů byla monotonní. To nastane na př., jsou-li všechny členy řady čísla kladná (nebo nuly), t. j.

$$a_n \geqq 0 \quad \text{p. v. n.}$$

Taková řada se nazývá „*řada s positivními členy*". Pak platí věta

(V. 1,14.) *Řada s positivními členy, jejíž posloupnost částečných součtů je omezená, je konvergentní a platí*

$$s_n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad p.\ v.\ n.$$

Toto kriterium, které je přímý důsledek věty 1,12, je velmi významné, poněvadž řady s positivními členy tvoří — jak později uvidíme — důležitou skupinu řad.

Cvičení 1,28. Ověřte si kriterium 1,14 pro konvergentní geom. řady s kladným kvocientem a kladným prvním členem podle vzorců.

1,29. Dokažte konvergenci řady:

$$\frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \ldots, \qquad (*)$$

kde α_n je některé z čísel 0, 1, 2, ..., 9. Návod: součet s_n nepřevyšuje hodnotu $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n}$, tedy všechna s_n jsou omezena (kterým číslem?).

Vzpomeňte na definici reálných čísel v úvodu. Uvážíme-li výsledek cvičení 1,29, uvidíme, že jsme definovali reálná čísla tím, že jsme jisté řady — druhu (*) — *prohlásili* za konvergentní.

1,30. Obrazec omezený uzavřenou křivkou skládáme metodou vyčerpávací. Co plyne podle věty 1,14 pro řadu obsahů, kterou dostaneme? Vzpomeňte na tento postup při parabole v odst. 1,3. — Užijte podobně kriteria 1,12 na posloupnost z příkladu 1,7.

Na konec odstavce zařazuji ještě jeden zajímavý příklad posloupnosti, konvergující k iracionální limitě.

Příklad 1,15. Úsečku délky 1 rozdělíme zlatým řezem; větší díl označíme a_1. Tuto úsečku rozdělíme opět zlatým řezem, větší díl označíme a_2 a tak pokračujeme dále. Dostaneme geometrickou posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, \text{ v níž } a_n = q^n, \text{ kde } q = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Tato posloupnost konverguje k nule. Její členy lze vyjádřit také jinak. Podle vlastností zlatého řezu totiž platí:

$$a_2 = 1 - a_1,\ a_3 = a_1 - a_2 = 2a_1 - 1,$$
$$a_4 = a_2 - a_3 = 2 - 3a_1, \text{ atd.}$$

Obecný člen posloupnosti lze tedy psáti ve tvaru:

$$a_n = |p_n a_1 - q_n|, \quad n > 2,$$

kde p_n, q_n jsou 2 sousední členy posloupnosti

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

(Každý člen je součtem obou bezprostředně předcházejících.)

Dělíme-li rovnici pro a_n číslem p_n, vyjde:

$$\frac{a_n}{p_n} = \left|a_1 - \frac{q_n}{p_n}\right|$$

a přejdeme-li k limitě pro $n \to \infty$, dostaneme $\left|a_1 - \frac{q_n}{p_n}\right| \to 0$, t. j. $\frac{q_n}{p_n} \to a_1$.

Posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$

konverguje k číslu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tato posloupnost je složená ze dvou posloupností: z klesající posloupnosti

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \ldots$$

a z posloupnosti rostoucí

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{21}{34}, \ldots$$

1,9. Harmonická řada. V početní praxi se často vyskytují řady t. zv. *harmonické*; jsou to řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots, \tag{10}$$

kde α je libovolné reálné číslo ($\neq 0$). Lze dokázati — což učiníme později, že řada (10) konverguje, je-li $\alpha > 1$, diverguje, je-li $\alpha \leq 1$.

Názvem „harmonická řada" obyčejně rozumíme řadu pro $\alpha = 1$, t. j.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots .$$

Tato řada je divergentní (určitě divergentní).

Důkaz: platí:

$$s_{2^\nu} = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{\nu-1}+1} + \frac{1}{2^{\nu-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^\nu}\right).$$

Každý člen v 1. závorce je $\geqq \frac{1}{4}$, v druhé $\geqq \frac{1}{8}$, atd. až v poslední $\geqq \frac{1}{2^\nu}$. Je tedy součet v první závorce větší než $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, v druhé $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, atd. až v poslední $\frac{2^\nu - 2^{\nu-1}}{2^\nu} = \frac{1}{2}$, t. j.

$$s_{2^\nu} \geqq 1 + \underbrace{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2}}_{\nu\text{-krát}} = 1 + \frac{\nu}{2}. \tag{11}$$

Zvolíme-li si libovolné (libovolně velké) číslo K, pak lze zvolit ν tak, aby $1 + \frac{\nu}{2} > K$; je-li index $n > 2^\nu$, je pak podle (11)

$$s_n < s_{2^\nu} \geqq 1 + \frac{\nu}{2} > K, \quad p. v. n > 2^\nu.$$

To znamená podle definice divergence (odst. 1,6), že posloupnost (s_n) určitě diverguje k $+\infty$.

Utvořme si řadu z členů harmonické řady, které stojí na *sudých* místech:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \cdots \tag{12}$$

Také tato řada je divergentní. Neboť *kdyby* konvergovala, konvergovala by též řada, vznikající násobením dvěma, t. j. řada harmonická.

Také řada zbývajících členů:

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \cdots \tag{13}$$

diverguje. Neboť platí:

$$1 > \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3} > \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5} > \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{7} > \tfrac{1}{8}, \ldots$$

t. j. částečné součty řady (13) jsou *větší* než částečné součty divergentní řady (12) a (13) tedy diverguje.

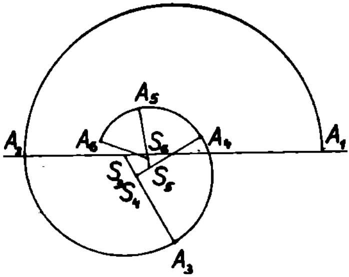
Řada, jejíž členy jsou jakkoli vybrány ze členů původní řady, ale tak, že pořadí zůstane zachováno (na př. řady

(12), (13)), se nazývá *částečná řada.* — Stejného názvu se užívá i pro posloupnosti.

Tak na př. řada převrácených hodnot prvočísel, t. j.

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \dots,$$

je částečná řada řady harmonické. Také tato řada je — jak lze dokázati — divergentní. Mimo divergentní částečné řady obsahuje harmonická řada ovšem i konvergentní částečné řady, na př. geometrickou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.



Obr. 9.

Použijeme harmonické řady k sestrojení dvou spirál, z nichž jedna má konečnou, druhá nekonečnou délku. Obě spirály se skládají z kruhových oblouků, které v bodech styku $A_2, A_3, A_4, \dots$ mají společné tečny. (Obr. 9.)

Středy oblouků jsou body $S_2, S_3, S_4, \dots$ Části oblouků, kterých užíváme, se stále zmenšují a jsou dány středovými úhly:

$$\sphericalangle\, A_1S_2A_2 = 180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$$

$$\sphericalangle\, A_2S_3A_3 = 120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$$

$$\sphericalangle\, A_3S_4A_4 = 90^\circ = \frac{360^\circ}{4}$$

. . . .

$$\sphericalangle\, A_{n-1}S_nA_n = \frac{360^\circ}{n}.$$

Poloměry se také zmenšují, a to při *první spirále* je:

$$\overline{A_1S_2} = \overline{A_2S_2} = \tfrac{1}{2}$$

$$\overline{A_2S_3} = \overline{A_3S_3} = \tfrac{1}{3}$$

$$\overline{A_3S_4} = \overline{A_4S_4} = \tfrac{1}{4}$$

. . . .

$$\overline{A_{n-1}S_n} = \overline{A_nS_n} = \frac{1}{n}.$$

Délka spirály je pak:

$$\frac{2\pi \cdot \frac{1}{2}}{2} + \frac{2\pi \cdot \frac{1}{3}}{3} + \frac{2\pi \cdot \frac{1}{4}}{4} + \ldots = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Tato řada podle toho, co bylo řečeno na počátku odstavce je konvergentní.

Druhou spirálu dostaneme, položíme-li:

$$\overline{A_1S_2} = \overline{A_2S_2} = \frac{1}{\log 2}$$

$$\overline{A_2S_3} = \overline{A_3S_3} = \frac{1}{\log 3}$$

. . . .

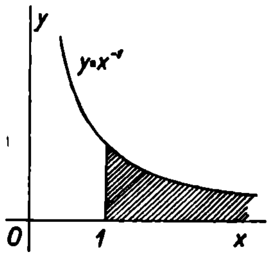
$$\overline{A_{n-1}S_n} = \overline{A_nS_n} = \frac{1}{\log n}.$$

Délka spirály je pak:

$$\frac{2\pi \dfrac{1}{\log 2}}{2} + \frac{2\pi \dfrac{1}{\log 3}}{2} + \frac{2\pi \dfrac{1}{\log 4}}{4} + \ldots = 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}.$$

O řadě $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ lze ukázat, že diverguje.

Cvičení 1,31. (Obr. 10.) Dokažte, že vyčárkovaná část roviny, omezená obloukem rovnoosé hyperboly, má neomezeně velký obsah. [Návod: vepište stupňovitý obrazec podobně jako při kvadratuře paraboly v oddíle N a dokažte, že jeho obsah je neomezeně velký.]



Obr. 10.

1,32. Dokažte, že částečná řada harmonické řady

$$1 + \frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1+2\lambda} + \frac{1}{1+3\lambda} + \dots$$

(λ celé kladné číslo)

diverguje. Proveďte na př. pro $\lambda = 4$. [Návod: dokažte nejprve divergenci řady

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{12} + \dots;$$

porovnejte s ní řadu

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \dots,$$

s ní opět řadu

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} + \dots$$

a s touto řadou porovnejte danou řadu.]

1,10. O jednoduchém chování řad s positivními členy. V odst. 1,8 jsem uvedl jednoduché kriterium konvergence pro řady s positivními členy (věta 1,14). Podle tohoto kriteria řada s positivními členy buď konverguje nebo, nejsou-li částečné součty omezeny, diverguje k $+\infty$ (viz příklad harmonické řady).

Také o částečných řadách *konvergentních* řad s positivními členy platí jednoduchá věta.

(V. 1,15.) *Částečná řada konvergentní řady s positivními členy je též konvergentní a její součet nepřevyšuje součet původní řady.*

Je totiž patrné, že ke každému částečnému součtu σ_ν částečné řady lze najít vhodný částečný součet s_n původní řady tak, že

$$s_n \geqq \sigma_\nu.$$

Je tedy posloupnost $\{\sigma_\nu\}$ také omezena a částečná řada konverguje podle kriteria 1,14. Nerovnost mezi součty obou řad vyplývá z věty 1,8.

Vybereme-li tedy na př. ze známé konvergentní řady (příklad 1,11)

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{4\,.\,5} + \ldots = 1$$

částečnou řadu

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{5\,.\,6} + \ldots, \tag{14}$$

je tato řada konvergentní a má součet s, $0 < s < 1$. (Později dokážeme, že s je přirozený logaritmus 2.)

Řadu (14) můžeme napsat také ve tvaru:

$$(1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}) + \ldots \tag{15}$$

Vynecháme-li závorky, dostaneme řadu:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots \tag{16}$$

Označme s_ν částečné součty řady (15) [na př. $s_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$], s'_n součty řady (16) [na př. $s'_2 = 1 - \frac{1}{2}$]. Pak platí:

$$s'_{2\nu} = s_\nu$$

$$s'_{2\nu-1} = s_\nu + \frac{1}{2\nu}.$$

Z těchto dvou rovnic je patrné, že součty s'_n konvergují k téže limitě jako součty s_ν, totiž k log2.

Řada (16), jež je jednou z nejdůležitějších řad vůbec, nám také ukazuje, že věta 1,15 neplatí pro řady s *libovolnými* členy. Neboť částečná řada řady (16), totiž

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots$$

je — jak víme — divergentní.

Jednoduchost řad s positivními členy se však týká ještě jiných vlastností. Součet nekonečné řady je formálním rozšířením algebraického počtu na „nekonečný počet sčítanců“. Pro obyčejný součet platí známé dva zákony:

a) zákon *asociativní*, vyjádřený rovnicí:

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

b) zákon *komutativní*, vyjádřený rovnicí:

$$a + b = b + a.$$

Je nyní otázka, do jaké míry platí formálně tyto zákony pro nekonečné řady.

Pro řady s positivními členy platí oba zákony neomezeně. Členy takové řady můžeme libovolně seskupovati nebo závorky vynechávati, nebo členy řady přerovnávati*): tím se konvergence ani limita řady nemění. Tak na př. z geometrické řady

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \dots$$

můžeme utvořit přerovnáním řadu:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{1024} + \tfrac{1}{512} + \tfrac{1}{256} + \\ + \tfrac{1}{128} + \dots$$

(jaký je výtvarný zákon?) a seskupením členů po dvou:

$$\tfrac{5}{8} + \tfrac{17}{64} + \tfrac{3}{32} + \tfrac{3}{1024} + \dots$$

Tato poslední řada je konvergentní a má součet 1.

U řad s libovolnými členy jsou poměry složitější. *Zákon asociativní* platí potud, že smíme umisťovat závorky. Vypouštět závorky však můžeme jen tehdy, vznikne-li opět řada konvergentní (viz na př. řady (15) a (16)). Neoprávněným vypouštěním závorek se dospívá k absurdnostem. (Srovnejte s „paradoxem“ v historickém přehledu.)

Zákon komutativní pro řady s libovolnými členy obecně neplatí. Ukážeme si to na *příkladě* 1,16. Řadu (16)

---

*) Přerovnáváním řad se budeme podrobněji zabývati v odst. 1,12.

$$s = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots$$

přerovnáme po prvé tak, že nová řada bude konvergovati k součtu $\frac{s}{2}$, podruhé tak, že přerovnaná řada bude divergovati.

a) Utvořme si řadu:

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \ldots \qquad (17)$$

(vždy jeden člen kladný a dva záporné): je to řada přerovnaná z (16). Znásobme řadu (16) koeficientem $\frac{1}{2}$ a vložme vhodně nuly; dostaneme řadu

$$0 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \ldots \qquad (18)$$

Tato řada konverguje podle vět 1,6, 1,7 k součtu $\frac{s}{2}$. Sečteme-li řady (17), (18), dostaneme řadu (16). T. j. řada (17) konverguje a její součet je $\frac{s}{2}$.

b) Členy divergentní řady

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \ldots$$

seskupme ve skupiny:

$$(a_1 + \ldots + a_{a_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \\ + (a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}) + \ldots$$

tak, aby součet v každé závorce byl > 2. Řadu (16) přerovnejme takto:

$$1 - a_1 - \ldots - a_{n_1} + \tfrac{1}{3} - a_{n_1+1} - \ldots - a_{n_2} + \\ + \tfrac{1}{5} - a_{n_2+1} - \ldots - a_{n_3} + \ldots$$

Tato řada patrně diverguje k $-\infty$.

Cvičení 1,33. Označíme s součet konvergentní

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

(její konvergence je dokázána dále v cvičení 1,34 b). Dokažte, že platí:

a) $\frac{s}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$

b) $\frac{3s}{4} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

c) $\frac{s}{2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$

d) $\frac{2s}{3} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \dots$

1,34. Vyjádřiti číslo v dvojkové soustavě znamená, vyjádřiti je jako součet řady

$$N = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \dots, \quad \text{kde } \alpha_n = 0;\ 1. \qquad (19)$$

Číslice $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ jsou pak „decimály" a píšeme symbolicky

$$N = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

Ověřte si na základě věty 1,15 konvergenci řady (19) a dokažte, že platí:

$$(1,\overline{3})_{10} = (1,\overline{01})_2; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = (0{,}1011010100\dots)_2.$$

1,11. Cauchy-ova kriteria konvergence pro řady s positivními členy.

Vzhledem k důležitosti řad s positivními členy uvedu ještě některá další kriteria. Již v odst. 1,7. bylo řečeno, že kriteria dostáváme často přirovnáním dvou řad. Takové jednoduché přirovnání vyslovuje věta

(V. 1,16.) *Buďte Σa_n, Σc_n dvě řady s positivními členy, Σc_n budiž konvergentní a nechť platí nerovnost*

$$a_n \leqq c_n \quad p.\ v.\ n;$$

pak je též řada Σa_n konvergentní a pro součty obou řad platí:

$$a \leqq c.$$

Pro částečné součty obou řad totiž platí podle předpokladu:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leqq c_1 + c_2 + \dots + c_n,$$

t. j. částečné součty řady Σa_n jsou omezené a řada tedy podle věty 1,14 konverguje. Nerovnost pro součty plyne z věty 1,8.

Doplňkem této věty je věta

(V. 1,16a.) *Buďte Σa_n, Σd_n dvě řady s positivními členy. Σd_n budiž divergentní a nechť platí nerovnost*

$$a_n \geqq d_n \quad p.\,v.\,n;$$

pak je též řada Σa_n divergentní.

Věta se dokáže pomocí věty 1,16 nepřímo: kdyby Σa_n konvergovala, platilo by totéž o řadě Σd_n, což je proti předpokladu.

Poznámka: V kriteriu 1,16 (i v následujících kriteriích) stačí pro konvergenci, aby vztah $a_n \leqq c_n$ byl splněn jen od určitého indexu počínaje (uvědomte si větu 1,10); ovšem vztah mezi součty obou řad se pak *nezachovává.*

Protože členy řady Σc_n jsou stále větší než členy řady Σa_n, nazývá se řada Σc_n někdy **majorantou** řady Σa_n.

Cvičení 1,35. Dokažte konvergenci řad nalezením konvergentní majoranty a najděte meze pro součet!

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} + \dots;$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots; \qquad \left(\text{její součet je } \frac{\pi^2}{6}\right)$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{3}{32} + \dots;$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots, \qquad \alpha > 2.$$

Konvergence harmonických řad pro α mezi 1 a 2 ($1 < \alpha < 2$) se dokáže podobným seskupováním členů, jako se dokazovala divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots$

Majoranty jsou: a) $\sum \frac{1}{2^n}$; b) $\sum \frac{1}{n^2-1}$; c) $\sum \frac{2}{n^2}$; d) e) $\sum \frac{1}{n^2}$.

1,36. Podle kriteria 16a dokažte divergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots; \qquad \alpha < 1;$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n\lambda} = 1 + \frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{1+2\lambda} + \dots; \qquad \lambda$ celé kladné;

(srovnej se cvičením 1,32)

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \dots .$

Druhé základní srovnávací kriterium je:

(V. 1,17.) *Buďte Σa_n, Σc_n dvě řady s positivními členy. Σc_n budiž konvergentní a nechť platí nerovnost*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{c_{n+1}}{c_n} \qquad p.\ v.\ n.$$

Pak je též řada Σa_n konvergentní.

Důkaz: Znásobíme nerovnosti (s členy vesměs kladnými):

$$\frac{a_2}{a_1} \leqq \frac{c_2}{c_1}, \frac{a_3}{a_2} \leqq \frac{c_3}{c_2}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqq \frac{c_n}{c_{n-1}}.$$

Vyjde:

$$\frac{a_n}{a_1} \leqq \frac{c_n}{c_1}.$$

Je tedy

$$a_n \leqq \frac{a_1}{c_1} c_n.$$

Poněvadž Σc_n podle předpokladu konverguje, konverguje též $\frac{a_1}{c_1} \Sigma c_n$ a podle kriteria 1,16 i Σa_n.

Doplňkem k této větě je podobná věta o divergentních řadách, jako byla věta 1,16a. — Z kriterií 1,16, 1,17 dostaneme specielní kriteria, nahradíme-li konvergentní řadu Σc_n jednoduchou konkrétní řadou: tak na př. můžeme užít řad harmonických nebo geometrických. Uvedu zde dvě formy kriteria, které dostaneme z věty 1,17, nahradíme-li řadu Σc_n řadou geometrickou.

(V. 1,18.) *Budiž Σa_n řada s positivními členy, $q < 1$ takové číslo, že platí od určitého indexu n počínaje:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq q.$$

Pak řada Σa_n konverguje.

Toto kriterium (t. zv. *podílové kriterium Cauchyho*) je bezprostřední důsledek věty 1,17. Jiná jeho užívanější forma zní:

(V. 1,18a.) *Budiž Σa_n řada s positivními členy. Je-li posloupnost $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ konvergentní a platí-li:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

pak řada Σa_n konverguje.

Je-li totiž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \vartheta < 1$, pak v okolí $O_{\frac{1-\vartheta}{2}}$ bodu ϑ leží všechny členy posloupnosti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ od určitého indexu n počínaje, t. j. všechny tyto členy splňují nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+\vartheta}{2} = q < 1$$

a řada Σa_n podle věty 1,18 konverguje. — Znázorněte si geometricky!

Cvičení 1,37. Podle kriteria 18a dokažte konvergenci řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

Součet této řady je transcendentní číslo e, které je základem Napierových (přirozených) logaritmů; $e = 2{,}7182818\dots$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \dots$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots$

1,38. Z členů posloupnosti

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

(každý člen je součet dvou předcházejících) utvoříme řadu převrácených hodnot:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} + \dots$$

Dokažte, že tato řada konverguje. [Návod: vyjádřete:

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n}; \ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1};$$

použijte kriteria 18a a výsledku z příkladu 1,15.]

1,12. O přerovnávání řad s positivními členy. Některé příklady přerovnávání řad s positivními členy poznal čtenář v odst. 1,11. Výrokem „přerovnati řadu" rozumělo se tam: sestaviti ze všech členů původní řady novou řadu. Je-li původní řada s positivními členy, pak přerovnaná řada konverguje k témuž součtu jako původní řada, čili stručně: *součet řady s positivními členy se přerovnáváním nemění.*

Tento výsledek zůstává v platnosti i tehdy, rozumíme-li pod přerovnáváním výkon mnohem obecnější než dosud.

(V. 1,19.) *Z konvergentní řady s positivními členy vybereme nekonečně mnoho částečných řad tak, abychom vyčerpali všechny její členy. Tyto částečné řady ovšem podle věty 1,15 konvergují. Platí pak, že řada jejich součtů konverguje k součtu řady původní.*

Příklad 1,17. V geometrické řadě konvergentní:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

dosaďme $q = \frac{1}{2} + \alpha$ a rozveďme mocniny dvojčlenu $(\frac{1}{2} + \alpha)^n$ podle binomické věty. Dostaneme tak konvergentní řadu:

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha} = 1 + \tfrac{1}{2} + \alpha + \tfrac{1}{4} + \alpha + \alpha^2 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{4}\alpha + \tfrac{3}{2}\alpha^2 + $$
$$+ \alpha^3 + \ldots,$$

kterou lze „uspořádati podle mocnin čísla α":

$$\frac{2}{1-2\alpha} = (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots) + \alpha(1 + \tfrac{2}{2} +$$
$$+ \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{8} + \ldots) + \alpha^2(1 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{6}{4} + \ldots) + \ldots$$

Výrazy v závorkách jsou konvergentní řady: na př. při α^0 dostáváme:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots = 2;$$

při α^1:

$$1 + \tfrac{2}{2} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{8} + \ldots = 1 + \tfrac{1}{2}\binom{2}{1} + \tfrac{1}{4}\binom{3}{1} + \tfrac{1}{8}\binom{4}{1} + \ldots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \ (= 4) \text{ (srovnej s cvičením 1,37c).}$$

Zvláště důležitá je tato věta o přerovnávání řad:

(V. 1,20.) *Budiž dána soustava nekonečně mnoha konvergentních řad s positivními členy*

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots \\ A_2 &= a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots \\ A_3 &= a_{31} + a_{32} + a_{33} + \ldots \text{ *)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

taková, že řada jejich součtů také konverguje:

$$s = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$$

*) Dvojité indexování značí pořadí řady a členu.

Pak libovolná řada, utvořená ze všech členů a_{ik} soustavy konverguje také k součtu s. Zvláště pak, vzhledem k předchozí větě: Sečteme-li členy soustavy „po sloupcích", dostaneme opět konvergentní řady

$$\begin{aligned} B_1 &= a_{11} + a_{21} + a_{31} + \dots \\ B_2 &= a_{12} + a_{11} + a_{32} + \dots \\ B_3 &= a_{13} + a_{23} + a_{33} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \end{aligned}$$

řada jejich součtů konverguje také k hodnotě s

$$B_1 + B_2 + B_3 + \dots = A_1 + A_2 + A_3 + \dots = s.$$

Obě přerovnávací věty mají velmi názorný obsah; uvádím je bez důkazů, které vyžadují trochu více sběhlosti v práci s řadami.

Příklad 1,18. na 2. přerovnávací větu:
Soustava geometrických řad

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \\[2mm] \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots \\[2mm] \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots \\[2mm] \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

má tu vlastnost, že řada jejich součtů, t. j.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

konverguje k součtu 1 (viz př. 1,11). Podle věty 1,20 konvergují také řady v sloupcích; jsou to harmonické řady, jejichž konvergence byla již dříve ukázána (cvičení 1,35 d).

1,13. O čísle e. Toto důležité transcendentní číslo, základ přirozených logaritmů, bývá obyčejně definováno jako limita konvergentní posloupnosti takto:

Výraz
$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
značí, vyjádřeno mluvou užité matematiky, částku, na kterou vzroste peněžní jednotka při úrokové míře 100% za jeden rok, připisují-li se úroky n-krát za rok.

Posloupnost $\{\alpha_n\}$ je rostoucí, jak snadno poznáme, rozvedeme-li α_n, α_{n+1} podle binomické věty:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots +\\ + \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots +\\ + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\,.\,.\,.\,.\,.\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \frac{n+1}{1!}\cdot\frac{1}{n+1} +\\ + \frac{(n+1)\,.\,n}{2!}\cdot\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots +\\ + \frac{(n+1)\,.\,n\,.\,.\,.\,.\,.\,1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^{n+1}} =\\ = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\,.\,.\,.\,.\\ .\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\,.\,.\,.\,.\,.\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Rozvoj α_{n+1} má o jeden člen více a každý jeho člen je větší nebo roven příslušnému členu rozvoje α_n. Dále platí:
$$\alpha_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Na pravé straně nerovniny je částečný součet řady, která byla poznána jako konvergentní (viz cvičení 1,37a). Jest tedy posloupnost $\{\alpha_n\}$ rostoucí a omezená, t. j. podle věty 1,12 konvergentní. Její limitu označil *Euler* písmenem e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818\ldots$$

Číslo e značí s ohledem na to, co bylo řečeno o číslech α_n, částku, na kterou vzroste peněžní jednotka za rok při 100% *spojitém* úrokování. (T. j. úrokování v nekonečně malých intervalech.)

Ukáži nyní, jak použitím přerovnávací věty lze dokázati, že řada ze cvičení 1,37a

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

má součet e.

V rozvoji (20) pro α_n si označíme:

$$a_{n2} = \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right);\ a_{n3} = \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right); \ldots,$$

$$\ldots, a_{nn} = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{n-1}{n}\right);$$

platí tedy:

$$\alpha_n = 2 + a_{n2} + a_{n3} + \ldots + a_{nn}.$$

Utvoříme schema:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 2\\
\alpha_2 - \alpha_1 &= a_{22}\\
\alpha_3 - \alpha_2 &= (a_{32} - a_{22}) + a_{33}\\
\alpha_4 - \alpha_3 &= (a_{42} - a_{32}) + (a_{43} - a_{33}) + a_{44}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

V řádkách schematu jsou řady s positivními členy (můžeme je doplnit nulami na nekonečné), které konvergují k součtům α_1, $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_2$, ... Řada těchto součtů zřejmě konverguje k číslu e. Sečteme-li podle přerovnávací věty 1,20 schema „po sloupcích", pak řada těchto součtů konverguje také k číslu e. Součet na př. druhého sloupce je:

$$a_{22} + (a_{32} - a_{22}) + (a_{42} - a_{32}) + \ldots,$$

t. j. limita

$$\lim_{n\to\infty} a_{n2} = \frac{1}{2!}.$$

Podobně součet k-tého sloupce je $\frac{1}{k!}$. Platí tedy:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$$

jak jsme chtěli dokázati.

Tento vztah nelze dokázati, jak se někdy chybně činí, tím, že se hledá limita obou stran rovnice (20) pro $n \to \infty$. Neboť na pravé straně se tam vyskytují součiny o neomezeně vzrůstajícím počtu činitelů.

1,14. O řadě součinové. Doposud jsme se zabývali rozšířením zákona asociativního a komutativního na nekonečné řady s positivními členy. Mimo tyto dva zákony platí pro slučování čísel ve spojení s násobením další zákon, t. zv. *distributivní*, vyjádřený pravidlem o násobení mnohočlenu mnohočlenem, na př.

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Také tento zákon lze rozšířiti na řady s positivními členy.

Buďte dány dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; utvořte z nich novou řadu tak, že je formálně „znásobíme" jako dva mnohočleny, t. j. „každý člen každým členem". Součiny uspořádáme v řadu takto:

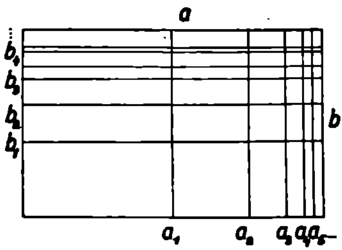
$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots$$

(součiny jsou uspořádány podle stoupajícího součtu indexů.) Takto utvořená řada se nazývá Cauchyova *součinová řada* obou původních.

Platí věta:

(V. 1,21.) *Součinová řada dvou konvergentních řad s positivními členy konverguje k součinu součtů obou daných řad. Přitom závorky mohou být vypuštěny a členy libovolně přerovnány.*

Větu uvádím bez důkazu, ale její geometrický význam je velmi názorný: sestrojme si obdélník, jehož strany jsou součty a, b obou daných řad (obr. 11).



Obr. 11.

Strany představme si rozloženy v „součet členů“, t. j.

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$
$$b = b_1 + b_2 + b_3 + \dots .$$

Obsah obdélníku je zřejmě mezní hodnota součtů malých obdélníků, jejichž obsahy jsou

$$a_k b_l,$$

kde čísla k, l nabývají hodnot $1, 2, 3, \dots$. Tato mezní hodnota je zřejmě součet součinové řady.

Rozšíření algoritmu pro násobení desetinných čísel na desetinná čísla nekonečná (periodická nebo iracionální) je patrně také jen jiné vyslovení věty o součinové řadě.

Tato věta nám také dovoluje „umocnit řadu“, jak ukazuje *příklad* 1,19.

Potenční řadu

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, \quad 0 < q < 1,$$

znásobíme samu sebou a součinovou řadu uspořádáme podle mocnin q; vyjde:

$$\frac{1}{(1-q)^2} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \ldots.$$

Proveďte podrobně! S dalšími příklady součinové řady se setkáte u potenčních řad.

Cvičení 1,39. Vyjádřete součinovou řadou:

$$\frac{1}{(1-q)^3} = \frac{1}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Uspořádejte řadu podle mocnin čísla q.

1,40. Dokažte, že platí:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

[Návod: Umocněte tuto řadu dvěma (jak dokážete její konvergenci?) a dostanete řadu ze cvičení 1,37a. Při umocňování používejte vztahů toho druhu, jako je na př.

$$\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!\,1!} + \frac{1}{2!\,2!} + \frac{1}{1!\,3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{4!}\left[\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] = \frac{2^4}{4!}.]$$

1,15. Řady absolutně a relativně konvergentní. V předcházejících oddílech byly stručně naznačeny jednoduché vlastnosti řad s positivními členy. Chování řad s libovolnými členy je mnohem složitější: existuje však jeden druh těchto řad, které se jednoduchostí blíží řadám s positivními členy. Jsou to řady, které mají tu vlastnost, že řady absolutních hodnot jejích členů konvergují. Takové řady se nazývají **absolutně konvergentní.**

Tak na př. řada

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} - \ldots$$

t. j. geometrická řada s kvocientem $-\frac{1}{2}$ *je* absolutně konvergentní, neboť řada absolutních hodnot jejích členů, t. j.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots$$

je také konvergentní. Naproti tomu konvergentní řada

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots$$

je jen **relativně konvergentní**, neboť řada absolutních hodnot jejích členů je divergentní řada harmonická.

Je-li dána nějaká řada, je výhodné, zkoumati nejdříve konvergenci řady absolutních hodnot jejích členů. Platí totiž věta:

(V. 1,22.) *Konverguje-li řada absolutních hodnot členů dané řady, pak tato řada konverguje, a to absolutně.*

Obsah věty lze učiniti zřejmějším geometricky:

Členy řady znázorníme si úsečkami, které nanášíme za sebou na osu číselnou jako vektory; a to směrem kladné osy, má-li člen znaménko +, směrem záporné osy, má-li znaménko —. Při tomto znázornění značí součet řady vzdálenost, kterou má od počátku bod, k němuž se blíží koncový bod vektoru (geometrické znázornění částečného součtu s_n).

Konverguje-li řada absolutních hodnot členů k jistému součtu a, pak bod, který znázorňuje částečný součet s_n *dané* řady, zůstává stále uvnitř úsečky $-a$, $+a$; daná řada má tedy konečný součet.

Cvičení 1,41. Proveďte podrobně pro geometrickou řadu:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \cdots .$$

Z konvergentní řady s positivními členy můžeme ihned odvoditi neomezený počet absolutně konvergentních řad tím, že u členů libovolně měníme znaménka.

Nejdůležitější vlastností absolutně konvergentních řad je, že *věty o přerovnávání řad* (1,19, 1,20) *i o součinové řadě* (1,21) *platí pro tyto řady právě tak jako pro řady s positivními členy.*

Na př. z řady cvičení 1,36a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

utvoříme absolutně konvergentní řadu

$$s = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

Cvičení 1,42. Dokažte, že součet této řady je $s = \frac{1}{e}$.

Návod: Použijte věty 1,21 o součinové řadě a dokažte podobně jako ve cvičení 1,40, že $e \cdot s = 1$.

Věta o přerovnávání neplatí pro řady s libovolnými členy, jak ukazuje příklad 1,16 z odst. 1,10. Ukáži, že také věta 1,21 o součinové řadě neplatí pro řady relativně konvergentní.

Příklad 1,20. Řada

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje, jak bude ukázáno v dalším odstavci (cvičení 1,45a). Řada jejích absolutních hodnot však diverguje (viz cvičení 1,35). Utvoříme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde

$$b_1 = a_1^2,\ b_2 = 2a_1a_2,\ b_3 = 2a_1a_3 + a_2^2, \dots$$

(součet indexů činitelů u každého b_n je $n + 1$). Pak platí:

$$b_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}\,.\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\,.\sqrt{1}}\right),$$

t. j.

$$|b_n| > \left(\frac{1}{\sqrt{n}\,.\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\,.\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\,.\sqrt{n}}\right) = \frac{n}{\sqrt{n}\,.\sqrt{n}} = 1.$$

Podle věty 1,13 tedy řada Σb_n není konvergentní; tím spíše to platí i o součinové řadě, která z řady Σb_n vznikne vypuštěním závorek.

Cvičení 1,43. Dokažte,

a) že řady

$$a = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \dots,$$

$$b = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$$

konvergují absolutně;

b) že platí pro jejich součty:

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Návod: Ze součinových řad spojte vhodné členy, jako na př.

$$\left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) - \left(\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{1!}\right) =$$

$$= \frac{1}{4!}\left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] = \frac{1}{4!}(1-1)^4 = 0.$$

1,44. Znásobte geometrické řady se součty $\frac{1}{1+q}$, $\frac{1}{1-q}$ a ověřte si, že součinová řada má součet $\frac{1}{1-q^2}$.

1,45. Dokažte, že řady relativně konvergentní mají tyto vlastnosti: (*věta Riemannova*).

a) Řada relativně konvergentní obsahuje nekonečně mnoho členů kladných a nekonečně mnoho záporných.

b) Kladné (záporné) členy řady tvoří určitě divergentní částečnou řadu.

c) Relativně konvergentní řadu lze přerovnati tak, že konverguje k libovolně předem zvolenému součtu, nebo je určitě či neurčitě divergentní.

[Návod: Vlastnosti a), b) se dokazují nepřímo; vlastnost c) je rozšířením výsledku příkladu 1,16 z odst. 1,10 a dokazuje se podobně.]

1,46. Utvořte Cauchy-ovu součinovou řadu

$$(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots)^2$$

a ukažte, že ji lze napsati ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

Závorky nesmějí být vynechány. O této řadě lze dokázati, že je konvergentní.

Návod: Použijte vztahu:

$$\frac{1}{(2k+1)(2n+1-2k)} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2n-2k+1}\right).$$

1,16. O řadách alternujících. Z řad, které nemají positivní členy, se nejčastěji setkáváme s těmi, jejichž členy střídají znaménka a nazývají se **alternující.** (Na př. geometrické řady se záporným kvocientem.)

O konvergenci alternujících řad nejčastěji rozhodujeme podle *kriteria Leibnizova.*

(V. 1,23). *Alternující řada konverguje, jestliže absolutní hodnoty jejích členů tvoří klesající posloupnost, která konverguje k nule.*

Takovou řadou je na př. řada

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots, \tag{21}$$

jejíž konvergenci jsme dokázali jinak.

Leibnizovo kriterium lze nahlédnouti geometricky podobně jako větu 1,22: znázorníme-li si na ose číselné „body s_n" podobně jako v odst. 1,15, pak tyto body budou tvořiti sled intervalů, zařazených do sebe, jejichž délka se stále zmenšuje. Blíží se tedy krajní body těchto intervalů (viz větu 1,12) jistému bodu — geometrickému obrazu součtu dané řady. Sledujte podrobně pro řadu (21).

Cvičení 1,47. Podle kriteria 1,23 dokažte konvergenci řad:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ (viz příklad 1,20),

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots;$

Tato řada se nazývá Leibnizova a její součet je $\frac{1}{4}\pi$.

c) $\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \dots$

d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{3}{48} + \dots + (-1)^n \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \dots \,.\, (2n-3)}{2^n \,.\, n!} + \dots$

Tato řada je specielní případ řady t. zv. *binomické* a konverguje k $\sqrt{2}$.

Které z uvedených řad konvergují absolutně?

Příklad 1,21. Řada

$$\frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{1}{3 \,.\, 4 \,.\, 5} + \frac{1}{5 \,.\, 6 \,.\, 7} + \dots \tag{22}$$

konverguje, neboť je lze přetvořit v alternující řadu

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 \,.\, 2} - \frac{1}{2 \,.\, 3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3 \,.\, 4} - \frac{1}{4 \,.\, 5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5 \,.\, 6} - \frac{1}{6 \,.\, 7}\right) + \dots,$$

která konverguje absolutně (viz příklad 1,11).

Cvičení 1,48. Určete součet řady (22) podobným postupem jako v příkladě 1,11.

Často bývá třeba, znásobiti dvě alterniující řady, které nejsou absolutně konvergentní. V takovém případě používáme *věty Abelovy* pro relativně konvergentní řady.

(V. 1,24.) *Konvergují-li řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *a jejich součinová řada* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1)$*), *pak součet součinové řady je součinem součtů obou daných řad.*

Tak na př. Leibnizovu řadu pro $\frac{\pi}{4}$ lze umocniti dvěma, neboť součinová řada

*) Závorky nesmějí být vypuštěny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

(viz cvičení 1,46) konverguje, a to podle věty 1,24 k hodnotě $\frac{\pi^2}{16}$. Tohoto postupu použil *Nicolaus Bernoulli*, aby odvodil elementární cestou součet řady

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

který je $\frac{\pi^2}{6}$. (Viz cvičení 1,35 b.)

1,17. O rychlosti konvergence a sčítání řad. Součty konvergentních řad mají v matematice různý význam: jsou to na př. obsahy obrazců, délky křivek, logaritmy, odmocniny, důležité konstanty (čísla π, e) a p. Proto potřebujeme znáti jejich numerickou hodnotu, t. j. — jak krátce říkáme — řadu sečísti. Poněvadž součty řad bývají často čísla iracionální, připomeňme si, jak s těmito čísly počítáme.

Iracionální číslo, na př. π, vyjadřujeme — jak bylo řečeno v úvodě — v desetinném tvaru s nekonečně mnoha „decimálami";

$$\pi = 3{,}141592\ldots,$$

t. j. vlastně jako součet řady

$$\pi = 31 \,.\, 10^{-1} + 4 \,.\, 10^{-2} + 1 \,.\, 10^{-3} + \ldots \tag{23}$$

(srovnej cvičení 1,29). Při počítání s tímto číslem se omezujeme „na určitý počet desetinných míst", t. j. iracionální číslo π, které je součet nekonečné řady, nahrazujeme racionálním číslem, částečným součtem této řady. Na př.

$$\pi \doteq s_5 = 3{,}14159.$$

Počet decimál — t. j. index částečného součtu — se řídí přesností, jakou při výpočtu požadujeme.

Podobně tedy při numerických výpočtech můžeme nahradit součet každé konvergentní řady jejím částečným součtem. Jde o to, kolik členů máme sečísti, abychom se přiblížili součtu řady s požadovanou přesností. Po této stránce je zřejmě mezi konvergentními řadami velký rozdíl. Vyjádříme-li číslo π na př. Leibnizovou řadou:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots \tag{24}$$

bude třeba několika desítek členů, abychom „dostali π na 4 desetinná místa" (t. j. s chybou $< 10^{-4}$), kdežto při řadě (23) stačily k tomu 4 členy. Tento rozdíl vyjadřujeme výrokem:

Řada (23) *konverguje k součtu* π *rychleji než řada* (24).

Přesnou definici rychlejší resp. pomalejší konvergence řad neuvádím. Čtenář ji najde na př. v knize Knoppově.

Snažíme se pochopitelně dostat vždycky rychlé konvergující řadu, t. j. takovou, kde málo členů dává součet s velkou přesností. Přesnost měříme *chybou*, t. j. velikostí rozdílu mezi skutečným součtem a částečným součtem.

Platí vztah

$$s = s_n + r_n,$$

kde r_n je součet řady

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots \text{ (in inf.)},$$

která podle věty 1,10 konverguje. Číslo r_n — *t. zv. zbytek po n-tém členu* — udává chybu. Protože skutečný součet s zpravidla neznáme, odhadujeme chybu

$$r_n = s - s_n,$$

t. j. určujeme pro ni meze.

Jako příklad uvádím bez důkazu jedno z četných pravidel pro odhad chyby.

(V. 1,25.) *Platí-li pro členy a_n absolutně konvergentní řady od určitého indexu $n = k$ vztah:*

$$|a_n| \leqq |a_k| \, a^{n-k},$$

kde a je kladné číslo, < 1, pak chyba r_n je omezena odhadem:

$$|r_n| \leqq |a_k| \cdot \frac{a}{1-a}.$$

Příklad 1,22. Pro řadu:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{25}$$

plyne na základě vztahu

$$\frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{12!} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-12} \qquad \text{pro } n > 12$$

odhad chyby:

$$|r_{12}| \leqq \frac{1}{12!} \cdot \frac{1}{11} \leqq 10^{-9};$$

t. j. sečtením 13 členů dané řady dostaneme číslo e přesně na 9 desetinných míst. Řada (25) pro číslo e tedy konverguje velmi uspokojivě.

Mezi pomalu konvergující řady patří zpravidla řady alternující, klesají-li absolutní hodnoty jejich členů pomalu k nule, jako je tomu na př. u řady Leibnizovy.

Konvergence těchto řad se urychluje různými úpravami — *t. zv. transformacemi řad.*

Cvičení 1,49. Kolik členů řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

je třeba sečísti, abychom dostali součet s přesností na 3 desetinná místa? Proveďte! — Vyjde $1{,}29126 \pm 8.10^{-5}$ jako součet 5 členů.

1,50. Vypočtěte $\sqrt{e}$ (cvičení 1,39) na 3 desetinná místa! Kolik členů je třeba sečíst? — Vyjde $1{,}64843 \pm 4.10^{-5}$ jako součet 5 členů (pro $n = 0$ až $n = 4$).

1,18. O počítání s iracionálními čísly. Provésti nějaký početní výkon se zvláštními čísly znamená určiti číslo, které je jeho výsledkem. Reálné číslo „známe" — vzpomeňte na to, co bylo řečeno v úvodě — dovedeme-li vypočísti libovolnou jeho decimálu. Ukáži postup tohoto výpočtu na příkladě násobení dvou iracionálních čísel.

Příklad 1,23. Jest určiti první 3 decimály součinu $e\pi$. Praktický počtář by se vyjádřil takto: kolikamístnými racionálními čísly máme nahraditi oba činitele, aby součin byl určen přesně na 3 desetinná místa?

Položme:

$$e = E_n + r_n; \qquad \pi = \Pi_n + \varrho_n,$$

kde E_n, Π_n znamenají částečné součty až po n-tou decimálu (včetně), r_n, ϱ_n zbytky po n-tém členu; platí tedy:

$$r_n < 10^{-n}; \quad \varrho_n < 10^{-n}.$$

Součin upravíme:

$$\begin{aligned} e\pi = E_n\Pi_n + (E_n\varrho_n + \Pi_n r_n + r_n\varrho_n) < \\ < 10^{-n}(E_n + \Pi_n + 10^{-n}). \end{aligned} \tag{26}$$

Ježto je

$$e = 2{,}7182818\ldots; \qquad \pi = 3{,}1415926\ldots,$$

platí nerovniny:

$$E_n < e < 2{,}8; \qquad \Pi_n < \pi < 3{,}2,$$

t. j. (26) lze upraviti:

$$e\pi < 10^{-n}(6 + 10^{-n}) < 10^{-n} \,.\, 10 = 10^{-n+1}.$$

Má-li být tedy zajištěna 3. decimála, musí být chyba menší než 10^{-4} vzhledem k možnosti opravy; t. j. $n = 5$ (čísla e, π nutno nahraditi 5místnými racionálními čísly:

$$E_5 = 2{,}71828; \qquad \Pi_5 = 3{,}14159.$$

Výsledek je pak

$$e\pi = 8{,}539(7)\ldots$$

Cvičení 1,51. Určete podobně první dvě decimály součinu $e\sqrt{2}$; $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142135\ldots$.

Příklad 1,24. Podobně postupujeme při dělení. Chceme-li na př. vypočísti

$$\frac{1}{\log_{10} 2}$$

na 3 desetinná místa, klademe

$$\log_{10} 2 = L_n + r_n; \quad r_n < 10^{-n};$$

a provedeme odhad chyby

$$\frac{1}{L_n} - \frac{1}{\log_{10} 2} = \frac{1}{L_n} - \frac{1}{L_n + r_n} = \frac{r_n}{L_n(L_n + r_n)} < \frac{r_n}{L_n^2}. \quad (27)$$

Ježto je

$$\log_{10} 2 = 0{,}3010300 \ldots,$$

platí

$$L_n \geqq 0{,}3,$$

t. j. z nerovniny (27) plyne:

$$\frac{1}{L_n} - \frac{1}{\log_{10} 2} < \frac{r_n}{0{,}3^2} < \frac{10^{-n+2}}{9} < 10^{-n+2}.$$

Dopočtěte! Vyjde $\dfrac{1}{\log_{10} 2} = 3{,}321(9) \ldots$

Podobně můžeme počítati mocniny a odmocniny z iracionálních čísel.

Cvičení 1,52. a) Kolikamístným racionálním číslem musíme nahraditi číslo e, abychom určili $\sqrt{e}$ na 3 desetinná místa?

[Návod: Použijte nerovnosti:

$$\sqrt{e} = \sqrt{E_n + r_n} < \sqrt{E_n} + \sqrt{r_n}.]$$

b) Vypočtěte e se stejnou přesností s použitím řady ze cvičení 1,49. Co je výhodnější?

Některé výpočty s iracionálními čísly jsou však těmito elementárními cestami neproveditelné. Na př. najíti $\sqrt{\pi}$ nebo umocniti $3{,}25^e$; zde je jediná cesta logaritmická; ale ta nevyhovuje, potřebujeme-li výsledek s větším počtem desetinných míst a nemáme-li po ruce tabulky s logaritmy o dostatečném počtu míst. Ostatně logaritmy samotné nelze počítati primitivním způsobem z definice (jako exponenty); podobně je tomu s hodnotami goniometrických funkcí.

K řešení všech těchto úloh potřebujeme dobře konvergující řady, které by nám daly výsledek s dostatečnou přesností jako součet malého počtu členů. Takovéto řady pro počítání odmocnin, logaritmů, hodnot goniometrických funkcí a p. existují a odvozují se z řad, které vyjadřují různé elementární funkce. S principem věci a s některými jednoduchými příklady se seznámí čtenář v 2. části této příručky.

2. ČÁST

O POTENČNÍCH ŘADÁCH

2,1. Pojem potenční řady. Geometrická řada

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{1}$$

konverguje — jak je známo — pro každé číslo x, pro které platí $|x| < 1$, diverguje, je-li $|x| \geqq 1$. Obecné číslo, které může nabývati různých hodnot, se nazývá v matematice (veličina) *proměnná*, číslo, které má určitou jedinou hodnotu, se nazývá *veličina stálá* čili *konstanta*. Je tedy řada (1) řada s proměnnými členy a protože členy jsou tvořeny mocninami (potencemi) proměnné x, jmenuje se *řada potenční*. Tato řada konverguje uvnitř intervalu $(-1, +1)$, diverguje vně tohoto intervalu a v jeho krajních bodech $(x = \pm 1)$.

Obecně dostaneme **potenční řadu,** znásobíme-li mocniny proměnné x konstantními koeficienty a z těchto součinů utvoříme řadu:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2}$$

Řady, o kterých bylo pojednáno v I. části, jejichž členy nejsou proměnné, nazýváme pro odlišení *řady s konstantními členy*. Z řady potenční se stává řada s konstantními členy, dosadíme-li za x určité číslo.

Otázka po konvergenci potenčních řad se vysloví takto: pro které hodnoty proměnné x řada (2) konverguje a pro které diverguje? Souhrn všech čísel x, pro která řada (2) konverguje, nazývá se jejím **konvergenčním oborem.** — Řada (1) má tedy konvergenční obor interval $(-1, +1)$.

Každé hodnotě x z konvergenčního oboru řady (2) přísluší jisté číslo — součet řady pro toto x. Je-li každé hodnotě proměnné x z jistého oboru přiřaděno jediné číslo, říkáme, že je tím definována *funkce proměnné* x; přiřaděné hodnoty nazýváme funkčními hodnotami. Označíme-li funkční hodnoty jedinou proměnnou veličinou y, píšeme funkční vztah symbolicky:

$$y = f(x), \tag{3}$$

t. j. „proměnná y je funkcí proměnné x". *Je tedy součet potenční řady funkcí proměnné x v konvergenčním oboru.* Geometrickým znázorněním funkce v soustavě pravoúhlých souřadnic (x; y) je zpravidla křivka.

U geometrické řady (1) dovedeme součet řady vyjádřit zlomkem $\frac{1}{1-x}$. Rovnice (3) zní o tomto konkrétním případě

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

Připomínám: Rovnice

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

platí jen pro x z intervalu $(-1, +1)$. Pro jiná x řada na pravé straně nekonverguje a vztah tedy pozbývá významu.

Součet potenční řady nelze vždycky vyjádřiti v tak jednoduchém tvaru jako u řady (1). Naopak, často je potenční řada nejjednodušším vyjádřením funkce, která je jejím součtem definována. V tom je význam potenčních řad, jak ukáži později na různých příkladech.

Podrobnější poučení o pojmu a vlastnostech funkce, se kterými se budeme často setkávati, najde čtenář na př. v uvedených učebnicích diferenciálního počtu.

Příklady. 2,1. Nejjednodušší druh funkcí jsou t. zv. polynomy — mnohočleny v proměnné x:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

Jsou to vlastně potenční řady, kde $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$. Potenční řada je rozšíření pojmu mnohočlen „na nekonečný počet členů" právě tak, jako řada s konstantními členy byla podobným rozšířením pojmu algebraický součet.

2,2. Řada

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots$$

t. j. $a_n = \begin{cases} 0, \text{ je-li } n \text{ liché} \\ 1, \text{ je-li } n \text{ sudé} \end{cases}$, má týž obor konvergence jako řada (1), totiž interval $(-1, +1)$. Proč? Její součet je $\dfrac{1}{1 - x^2}$.

2,3. Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

konverguje podle podílového kriteria (viz část 1.) pro každé x. Její obor konvergence označíme $(-\infty, \infty)$. Její součet je, jak ukáži později, e^x, kde $e = 2{,}71828 \ldots$.

2,4. Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots$$

diverguje podle podílového kriteria, je-li $x \neq 0$. Konverguje tedy jedině pro $x = 0$.

2,2. Konvergenční obor potenčních řad. Uvedené příklady ukazují, že jsou potenční řady, které konvergují pro každé x (př. 2,3); takovým říkáme řady *všude konvergentní*. Jiné potenční řady konvergují jen pro $x = 0$ (př. 2,4); takové se nazývají řady *všude divergentní*. Konečně jsou řady, které konvergují pro všechna čísla x z jistého intervalu a divergují pro všechna x vně tohoto intervalu; na př. geometrická řada má konvergentní interval $(-1, +1)$. Tyto tři příklady vyčerpávají všechny možnosti. Platí totiž:

(V. 2,1). *Potenční řada je buď všude divergentní nebo všude konvergentní nebo existuje kladné číslo r takové, že řada konverguje absolutně pro všechna čísla x, pro něž platí $|x| < r$ a diverguje pro všechna x, pro něž $|x| > r$. Jinak řečeno: interval $(-r, +r)$ je konvergenční obor potenční řady. Krajní body tohoto intervalu ($x = \pm r$) mohou, ale nemusí náležet konvergenčnímu oboru. Číslo r se nazývá poloměrem konvergence.**)

Důkaz této věty je typický existenční důkaz analyse a protože je zcela jednoduchý, uvedu postup. Nejprve dokážeme, že platí pomocná věta:

Konverguje-li potenční řada pro jisté číslo $x_1 \neq 0$ konverguje absolutně pro každé x, pro které platí $|x| < |x_1|$. Diverguje-li potenční řada pro jisté číslo x_2, diverguje také pro každé x, pro které platí $|x| > |x_2|$.

Uvažte, co je obsahem věty, znázorníte-li čísla x na ose číselné! — První část pomocné věty plyne snadno. Řada $\Sigma a_n x_1^n$ konverguje, posloupnost $\{a_n x_1^n\}$ je tedy ohraničená (odst. 1,8), t. j.

$$|a_n x_1^n| < K, \quad p. v. n.$$

Dále platí:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

Řada $\Sigma |a_n| \cdot |x|^n$ má tedy konvergentní majorantu — geometrickou řadu $\Sigma K \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$; tím je tvrzení dokázáno.

Druhá část pomocné věty plyne nepřímo: kdyby řada konvergovala pro některé x, pro něž $|x| > |x_2|$, konvergovala by podle první části také pro x_2, což je proti předpokladu.

Dejme tomu, že řada konverguje na př. pro $x_1 = -0{,}562$,

*) Název *poloměr* je převzat od řad s komplexními členy, kde toto číslo r je skutečně poloměrem kružnice, ohraničující konvergenční obor.

diverguje pro $x_2 = 0{,}573$.*) Podle pomocné věty řada konverguje pro $x = 0{,}56$ a diverguje pro $x = 0{,}58$. Pro $x = 0{,}57$ může buď konvergovati nebo divergovati; dejme tomu, že diverguje. Mezi čísly

$$0{,}560;\ 0{,}561;\ 0{,}562;\ \ldots;\ 0{,}570$$

najdeme dvě sousední taková, aby pro menší z nich řada konvergovala, pro větší divergovala. Buďte to na př. 0,566; 0,567. Mezi čísly

$$0{,}5660;\ 0{,}5661;\ 0{,}5662;\ \ldots;\ 0{,}5670$$

najdeme opět dvě sousední téže vlastnosti, a tak pokračujeme. Tímto postupem určujeme — jako limitu posloupnost- — jisté reálné číslo:

$$r = 0{,}566\ldots,$$

které má zřejmě vlastnosti poloměru konvergence. Takovým postupem lze v každém případě nalézti číslo $r > 0$ a tím je věta 2,1 dokázána.

Pro jednotnost pravíme, že řada všude konvergentní má poloměr konvergence $r = \infty$, řada všude divergentní $r = 0$.

O chování řady v krajních bodech konvergenčního intervalu nelze obecně rozhodnouti. Uvidíte později na příkladech, že řada může konvergovati v jednom či v obou krajních bodech, ale tato konvergence nemusí být absolutní, jako je tomu *uvnitř* konvergenčního intervalu.

Absolutní konvergence řady *uvnitř* konvergenčního intervalu je velmi důležitá; dovoluje nám totiž použíti pro potenční řady všech vět o absolutně konvergentních řadách, zejména vět o násobení a přerovnávání řad. (Část 1.)

Poloměr konvergence potenční řady závisí na koeficientech a_n a lze ho z nich přímo určiti. Francouzský matematik Cauchy odvodil takový vzorec pro poloměr konvergence; tento vzorec však vyžaduje hlubší znalosti limitních pojmů, proto ho neuvádím.

*) Takové hodnoty x_1, x_2 lze vždy najít u řady, která není všude konvergentní.

Cvičení 2,1. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

má poloměr konvergence $r = 1$ a vyšetřete její chování pro $x = \pm 1$.

2,2. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$$

resp. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

má poloměr konvergence $r = 1$ a vyšetřte chování obou řad v krajních bodech konvergenčního intervalu.

2,3. Jaké jsou poloměry konvergence řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

Návod: Použijte Leibnizova kriteria pro alternující řady a skutečnosti, že $\frac{x^n}{n!} \to 0$ pro $n \to \infty$ (viz př. 2,3).

2,4. Jaký je poloměr konvergence potenční řady z příkladu 2,1?

2,5. Jaký poloměr konvergence má řada:

$$1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots.$$

Návod: Vyjádřete obecný člen a použijte podílového kriteria; vyjde $r = 1$.

2.3. Rozvinutí racionální funkce v potenční řadu. Mezi nejjednodušší funkce patří t. zv. *funkce racionální*: předně to jsou *celistvé* racionální funkce, t. j. mnohočleny v proměnné x, libovolného stupně:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Je-li $n = 0$, je funkce konstanta, t. j. všem hodnotám proměnné x odpovídá stejná funkční hodnota a_0.

Lomená racionální funkce je podíl dvou polynomů:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}.$$

Funkční hodnoty lomené rac. funkce $\frac{1}{1 - x}$ jsou v intervalu $(-1, 1)$ vyjádřeny jako součty nekonečné řady potenční (geometrické). Ukáži postup, jak lze funkční hodnoty *libovolné* rac. funkce vyjádřiti součty potenční řady — ovšem jen v jistém oboru proměnné x. Takovému vyjádření říkáme **rozvinutí funkce v potenční řadu.**

Zvolíme nejprve funkci, jejíž čitatel je konstanta 1, na př.

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x - 3x^2}.$$

Položíme

$$x_1 = 2x + 3x^2 \tag{4}$$

a funkci $\frac{1}{1 - x_1}$ rozvineme v potenční řadu podle proměnné x_1:

$$\frac{1}{1 - x_1} = 1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + \ldots \tag{5}$$

Rozvedeme-li mocniny proměnné x_1, t. j. dvojčlenu (4) podle binomické věty, dostaneme soustavu nekonečně mnoha konečných (a tedy absolutně konvergentních) řad:

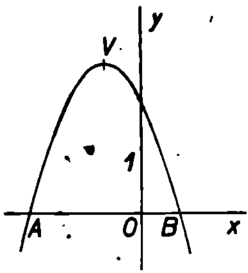
$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ x_1 &= 2x + 3x^2 \\ x_1^2 &= \phantom{2x + {}} 4x^2 + 12x^3 + 9x^4 \\ x_1^3 &= \phantom{2x + 4x^2 + {}} 8x^3 + 36x^4 + \ldots \\ x_1^4 &= \phantom{2x + 4x^2 + 8x^3 + {}} 16x^4 + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Součty absolutních hodnot členů těchto řad tvoří podle (5) řadu, která také absolutně konverguje, je-li $x > 0$ zvoleno tak, aby $|x_1| < 1$. Podle přerovnávací věty (část 1) lze tedy řady (6) „sečísti po sloupcích“, t. j. řadu (5) uspořádati podle stoupajícího exponentu u mocnin proměnné x. Vyjde:

$$\frac{1}{1 - 2x - 3x^2} = 1 + 2x + 7x^2 + 20x^3 + \overset{61}{\cancel{45}}x^4 + \dots .$$

Tato řada konverguje pro $x > 0$, je-li $|x_1| < 1$, diverguje, je-li $|x_1| > 1$. Zjistíme, pro která x jsou tyto nerovnosti splněny. První nerovnost znamená:

$$-1 < +2x + 3x^2 < 1.$$



Obr. 12.

Odečtením od jedné dostaneme

$$0 < 1 - 2x - 3x^2 < 2. \qquad (7)$$

Znázorníme graficky průběh funkce $y = 1 - 2x - 3x^2$ (obr. 12).

Příslušná parabola protíná osu x v bodech A, B a její vrchol, t. j. bod který přísluší největší funkční hodnotě, má souřadnice $V(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3})$. Nerovnost (7) je splněna pro všecka x, kterým odpovídají body paraboly *nad* osou x. Poloměr konvergence je tedy $r = \frac{1}{3}$.

Podobným postupem lze rozvinouti v potenční řadu racionální funkci

$$f(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}, \qquad (8)$$

kde $a_0 \neq 0$. Upravíme ji

$$f(x) = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{a_1}{a_0}x - \frac{a_2}{a_0}x^2 - \dots - \frac{a_n}{a_0}x^n\right)}$$

a položíme $x_1 = -\frac{a_1}{a_0}x - \dots - \frac{a_n}{a_0}x^n$. Není-li splněn předpoklad $a_0 \neq 0$, provádí se rozvinutí v složitější potenční řadu, která nepostupuje v mocninách proměnné x, ale v mocninách dvojčlenu, na př. $x - 1$.

Povšimněte si v uvedeném příkladě, že poloměr konvergence potenční řady je menší z absolutních hodnot obou kořenů rovnice

$$1 - 2x - 3x^2 = 0,$$

totiž $\frac{1}{3}$. To je zvláštní případ obecného pravidla pro odhad poloměru konvergence při rozvinutí funkce (8): *Má-li rovnice*

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

reálné kořeny, nemůže poloměr konvergence potenční řady při rozvinutí funkce (8) *přesáhnouti nejmenší z absolutních hodnot těchto kořenů.*

K rozvinutí lomené racionální funkce je možno dojíti i jinou cestou — dělením mnohočlenem — jak ukáži později.

Cvičení 2,6. Rozviňte funkci $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{2}x^3}$ v potenční řadu! Určete první 4 členy a poloměr konvergence!

2,7. Rozviňte funkci $\dfrac{1}{2 - x + x^3}$ v potenční řadu! Najděte okolí bodu O, ve kterém řada konverguje.

2,4. Slučování a násobení potenčních řad. Na potenční řady se samočinně přenáší věta o slučování nekonečných řad.

(V. 2,2.) *Potenční řady lze sečísti (odečísti) „člen po členu"; výsledná řada je opět potenční; její poloměr konvergence neklesne pod menší z poloměrů konvergence obou řad. Rovnicí:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n.$$

Tato věta nám dovoluje tvořiti z rozvojů dvou funkcí rozvoj funkce součtové.

Příklad 2,5. Platí rovnice:

$$\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}.$$

Z rozvojů

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{1+x}&=1-x+x^2-x^3+-\ldots\\ \frac{1}{1-x}&=1+x+x^2+x^3+\ldots\end{aligned}\right\}|x|<1$$

dostaneme sečtením:

$$\frac{2}{1-x^2}=2(1+x^2+x^4+\ldots)$$

(srovnej s příkladem 2,2.)

Cvičení 2,8. Z rovnice

$$\frac{1}{6-5x+x^2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$$

odvoďte rozvoj funkce $\frac{1}{6-5x+x^2}$. Obor konvergence!

2,9. Stejná úloha pro funkci

$$\frac{1}{6-5x-2x^2+x^3}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Rozklady lomených funkcí ve cvičeních 2,8, 2,9 lze provésti na př. metodou neurčitých koeficientů. Správnost rozkladů si čtenář snadno sám ověří.

Násobení potenční řady konstantním koeficientem se provádí člen po členu jako u řad s konstantními členy. Pro násobení dvou potenčních řad je důležité, že tyto řady konvergují ve svých konvergenčních oborech absolutně. Součinovou řadu lze tedy srovnati podle mocnin x (část 1) a výsledek je opět potenční řada. Platí tedy:

(V. 2,3.) *Součinová řada dvou potenčních řad je potenční řada; její poloměr konvergence neklesne pod menší z poloměrů konvergence obou řad.*

Příklad 2,6. Protože polynom je potenční řada (srovnej př. 2,1), dovedeme podle věty 2,3 a postupu odst. 2,3 rozvinouti obecnou racionální funkci v potenční řadu. Rozvoj funkce

$$f(x) = \frac{2 + 3x}{1 - x^2}$$

dostaneme násobením řad (jako mnohočlen mnohočlenem)

$$2 + 3x; \quad \frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots,$$

t. j.

$$\frac{2 + 3x}{1 - x^2} = 2 + 3x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots \text{ pro } |x| < 1.$$

Násobíme-li obecně řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

vyjde součinová řada potenční:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \equiv c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots .$$

Její koeficienty c_n jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (9)$$

Takovým postupem lze znásobiti postupně libovolný počet potenčních řad. Zvláštní případ násobení potenčních řad je umocňování potenční řady celým kladným exponentem. *Mocnina potenční řady je podle předchozího opět potenční řada.*

Cvičení 2,10. Užijte výsledku cvičení 2,8 a odvoďte rozvoj funkce

$$f(x) = \frac{2x - 5}{6 - 5x + x^2}.$$

Jaký má řada obor konvergence?

2,11. Pro funkci ze cvičení 2,3

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

platí vztah:

$$f(2x) = f^2(x) - 1.$$

Vypočtěte první 4 členy rozvoje pro $f^2(x) - 1$ a porovnejte s odpovídajícími členy rozvoje $f(2x)$.

2,12. Pro funkci z příkladu 2,3

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

platí vztah

$$f^2(x) = f(2x).$$

Dokažte tento vztah porovnáním příslušných potenčních řad (viz část 1). Jaké jsou poloměry konvergence obou řad?

2,5. Rozvinutí funkce v potenční řadu. — Věta o identitě. V odst. 2,1 jsem uvedl, že potenční řada svými součty ve svém konvergenčním oboru definuje funkci. V odst. 2,3, 2,4 jsem ukázal, jak naopak daná funkce (lomená racionální) se může rozvinouti v potenční řadu. Mimo racionální funkce je v matematice mnoho jiných důležitých funkcí, na př.: iracionální funkce ($f(x) = \sqrt{1 + x}$), funkce logaritmická, exponenciální, goniometrické funkce a j. Přirozeně se tážeme, lze-li také tyto funkce rozvinouti v potenční řady.

Výhody takových rozvojů jsou zřejmé: u funkce racionální dovedeme počítat její funkční hodnoty přímo, dosazením za x do příslušného zlomku. U jiných složitějších funkcí nám poskytne potenční řada rozvoje funkční hodnoty jako součty řady a tak můžeme počítat (numericky) na př. odmocniny, logaritmy, hodnoty goniometrických funkcí s libovolnou přesností (viz část 1.). Mimo to je možné — jak dále podrobněji vyložím — počítati s funkcí rozvinutou v řadu jako s mnohočlenem. To má velký význam zvláště v infinitesimálním počtu při derivování a integrování funkcí.

Hlavní otázky, týkající se možnosti rozvinutí funkce v potenční řadu jsou tyto:

1. Které funkce lze rozvinout v řadu, resp. za jakých podmínek lze danou funkci rozvinout v řadu.
2. V jakém oboru tento rozvoj platí, t. j. jaký je konvergenční obor potenční řady.
3. Kolik různých rozvojů má daná funkce.

Odpověď na první dvě otázky najde čtenář později. Odpověď na třetí otázku dává

(V. 2,4.) *Mají-li funkce, definované dvěma potenčními řadami $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x^n$ v jistém (sebemenším) okolí bodu 0*) stejné funkční hodnoty, jsou obě potenční řady identické, t. j. platí*

$$a_n = b_n, \quad p. \ v. \ n.$$

Důsledek:

Lze-li funkci rozvinouti v potenční řadu, je to možné jen jedním způsobem.

Důkaz neuvádím, poněvadž vyžaduje znalosti pojmu spojitosti funkce a odkazuji na knihu *Jarníkovu*.

Věta 2,4 má mimo svůj existenční význam důležité důsledky pro počítání s řadami.

Příklad 2,7. Za předpokladu, že je možno rozvinouti iracionální funkci $\sqrt{1 + x}$ v potenční řadu, můžeme *formálně* vypočísti koeficienty této řady. Budiž:

$$\sqrt{1 + x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Umocníme obě strany rovnice:

$$1 + x = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2)x^2 + \\ + (2a_1 a_2 + 2a_0 a_3)x^3 + \ldots$$

Řady na obou stranách se shodují v součtech pro všechny

---

*) Tímto výrokem je míněno: ve všech bodech okolí.

hodnoty proměnné x z konvergenčního intervalu řady na pravé straně. Podle věty 2,4 mají tedy stejné koeficienty, t. j. platí

$$a_0^2 = 1,\ 2a_0a_1 = 1,\ a_1^2 + 2a_0a_2 = 0,$$
$$2a_0a_3 + 2a_1a_2 = 0, \dots \tag{10}$$

Odtud plyne:

$$a_0 = \pm 1.$$

Dvojznačnost koeficientu a_0 je důsledek skutečnosti, že „druhá odmocnina je dvojznačná“. Omezme se na jednu řadu, t. j. zvolme $a_0 = 1$; pak plyne dále z rovnic (10):

$$a_1 = \tfrac{1}{2},\ a_2 = -\tfrac{1}{8},\ a_3 = \tfrac{1}{16}, \dots .$$

Stejným způsobem lze vypočísti libovolné a_n. Snadno se ukáže (indukcí), že čísla a_n střídají znaménka a jejich prosté hodnoty konvergují k nule. Řada $\Sigma a_n x^n$ tedy konverguje podle Leibnizova kriteria pro $x = 1$; její obor konvergence je jistě nejméně interval $(-1, 1)$. Tím je dokázána *existence* rozvoje pro $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = \pm\,(1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \dots),\ |x| < 1.$$

Cvičení 2,12. Rozvoj pro lomenou rac. funkci, na př.

$$\frac{1}{1 - 2x - 3x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

lze nalézti také z podmínky:

$$(1 - 2x - 3x^2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = 1.$$

Proveďte a porovnejte s výsledkem v odst. 2,3.

2,13. Rozviňte v potenční řadu funkci $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ a porovnejte s řadou cvičení 2,5.

2,14. Které funkce rozvinutelné v řadu vyhovují vztahu

$$f^2(x) = f(2x).$$

Návod: Při porovnání obou řad zůstane koeficient a_1 neurčen; zvolte jej $a_1 = 1$. Pak budou všechny další koeficienty jednoznačně určeny. Indukcí lze určit obecný a_n.

Podobně, jako jsme prováděli v odst. 2,3 dělení polynomem, lze provésti dělení potenční řadou, která má koeficient $a_0 \neq 0$. Upravíme si:

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 - \left(-\frac{a_1}{a_0}x - \frac{a_2}{a_0}x^2 - \dots\right)} =$$

$$= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - x_1}.$$

Lze ukázati na základě spojitosti,*) že v jistém okolí O_0 bodu 0 je $|x_1| < 1$; výraz $\frac{1}{1 - x_1}$ se dá rozvinouti v geometrickou řadu. Za x_1 se dosadí zpět příslušná řada a podle přerovnávací věty se výsledek srovná podle mocnin x. Tím je dokázáno, že $\frac{1}{\Sigma a_n x^n}$ se dá vyjádřit potenční řadou $\Sigma b_n x^n$, která *konverguje* v jistém okolí počátku. Koeficienty řady $\Sigma b_n x^n$ počítáme podle věty 2,4 ze vztahu:

$$\Sigma a_n x^n \,.\, \Sigma b_n x^n = 1.$$

Vychází tedy:

$$\begin{aligned} a_0b_0 &= 1 \\ a_0b_1 + a_1b_0 &= 0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0 \\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Odtud lze vypočíst $b_0, b_1, b_2, \dots$.

Vyslovíme tyto výsledky ve větě:

(V. 2,5.) *Je-li* $a_0 \neq 0$, *lze funkci* $f(x) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ *rozvinouti*

*) Viz na př. *V. Jarník:* Úvod do počtu diferenciálního, Praha, 1946.

v potenční řadu $\Sigma b_n x^n$, která konverguje v jistém okolí počátku. Její koeficienty b_n počítáme podle věty 2,4 ze vztahu

$$\Sigma a_n x^n \,.\, \Sigma b_n x^n = 1.$$

Cvičení 2,15. Rozviňte v potenční řadu:

$$\frac{1}{1 + x + x^2 + \ldots}.$$

2,16. Rozviňte v pot. řadu převrácenou hodnotu funkce definováné řadou příkladu 2,3.

2,17. Určete počátek rozvoje pro $\sqrt{1 - x}$ dělením řadou ze cvičení 2,13 a porovnejte výsledek s řadou příkladu 2,7.

2,6. Derivování a integrování potenční řady. Do teorie potenčních řad zasahují dvě základní operace infinitesimálního počtu: derivování a integrování funkcí. Úkolem tohoto oddílu není podati výklad pojmu derivace a integrálu, ale shrnouti stručně výsledky, kterých bude v dalším použito.

Derivací funkce $f(x)$ v bodě x_1 se nazývá limita:

$$D_x f(x_1) = f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Její geometrický význam je: $f'(x_1)$ je směrnice tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $(x_1; f(x_1))$. Existuje-li derivace $f'(x_1)$ v každém bodě x_1 jistého oboru, představují její hodnoty funkční hodnoty jisté funkce $f'(x)$, derivované v tomto oboru. Je pak možno utvořit derivaci derivační funkce, které říkáme druhá derivace; její hodnoty definují — existují-li ve všech bodech oboru — funkci $f''(x)$. Takovým postupem dostáváme t. zv. *derivace vyšších řádů*:

$$f''(x);\ f'''(x);\ f^{(4)}(x);\ f^{(5)}(x);\ \ldots$$

Základní obecná pravidla pro počítání derivací funkcí jsou pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu dvou funkcí a dále pravidlo pro derivování funkce složené. Psáno v obvyklé zkrácené formě, kde $u = f(x)$, $v = g(x)$:

$$(u+v)' = u' + v',$$

$$(uv)' = uv' + u'v, \quad (ku)' = ku', \quad k \ldots \text{konstanta},$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

pro funkci složenou $z = F(y)$, $y = f(x)$:

$$\mathrm{D}_x F(f(x)) = \mathrm{D}_y F(y) \,.\, \mathrm{D}_x f(x).$$

Dále použijeme vzorců pro derivace t. zv. *elementárních funkcí*: mocniny, exponenciální funkce, logaritmické funkce funkcí goniometrických a cyklometrických.

$$\mathrm{D}_x x^n = nx^{n-1}, \ n \text{ reálné}, \quad \mathrm{D}_x \sin x = \cos x,$$

$$\mathrm{D}_x \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x, \quad \mathrm{D}_x \cos x = -\sin x,$$

$$\mathrm{D}_x a^x = a^x \log_{\mathrm{e}} a, \quad \mathrm{D}_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\mathrm{D}_x \log_{\mathrm{e}} x = \frac{1}{x}, \quad \mathrm{D}_x \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Logaritmy v těchto vzorcích jsou Napierovy přirozené se základem $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$, proměnná x u goniometrických funkcí je úhel v míře obloukové ($360^0 \ldots 2\pi$, $180^0 \ldots \pi$ atd.).

Kombinací předchozích pravidel dostáváme výsledek: *polynom proměnné x derivujeme „člen po členu“ podle vzorce:*

$$\mathrm{D}_x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \\ + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

Toto pravidlo lze rozšířit z polynomu na potenční řadu,*) jak je vysloveno ve větě:

(V. 2,6). *Derivace funkce dané potenční řadou je potenční řada, která vzniká derivováním dané řady „člen po členu“. Nová řada má stejný obor konvergence jako daná. Vzorcem:*

$$\mathrm{D}_x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

*) Důkaz viz v knize Knoppově.

Věta 2,6 nám dovoluje vedle četných jiných aplikací nalézti rychle rozvoje různých funkcí.

Příklad 2,8. Derivováním řady

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

dostaneme

$$D_x\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

Podle pravidel pro derivování je

$$D_x\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2x+x^2}.$$

Platí tedy:

$$\frac{x}{1-2x+x^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots.$$

Poloměr konvergence této řady podle věty 2,6 je $r = 1$. (Srovnej se cvičením 2,1.)

Cvičení 2,18. Dokažte, že pro funkci definovanou řadou z příkladu 2,3 platí:

$$f'(x) = f(x) \tag{11}$$

2,19. Dokažte, že pro každou funkci, rozvinutelnou v řadu a vyhovující funkční rovnici (11) platí rozvoj:

$$F(x) = a_0\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right).$$

2,20. Dokažte, že derivace funkce ze cvičení 2,2

$$f(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Druhá základní operace infinitesimálního počtu je *integrování*. Geometricky vyjadřuje *integrál*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

obsah části roviny, omezené obloukem křivky $y = f(x)$, osou x a pořadnicemi bodů, jejichž úsečky jsou a, b.

Ponecháme-li dolní mez a pevnou a měníme horní mez b (v jistém oboru), je integrál — existuje-li — zřejmě funkcí ve své horní meze. Píšeme:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x.\text{*)}$$

Ukazuje se, že za jistých předpokladů, které v dalším budou splněny (spojitost funkce $f(x)$) platí rovnice:

$$F'(x) = f(x),$$

t. j. integrování je operace protichůdná k derivování. Pro integrování platí obecná pravidla:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b q(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad k \text{ je konstanta.}$$

Integrály nejjednodušších funkcí jsou dány vzorci:

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}; \quad n \neq -1, \text{ reálné}, \qquad \int \sin x\, \mathrm{d}x = -\cos x,$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log_e x, \qquad \int \cos x\, \mathrm{d}x = \sin x,$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x.\text{**)}$$

---

*) Není-li dolní mez určena, nazývá se integrál *neurčitý*. Je to vlastně množina funkcí, které se od sebe liší o konstantní veličiny. Tuto neurčenou konstantu nazýváme *integrační konstanta* a píšeme:

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + k.$$

**) Integrační konstanty jsou vynechány.

Ve všech uvedených vzorcích platí o logaritmech a o argumentech goniometrických funkcí stejná poznámka jako při derivování.

Integrály složitějších funkcí určujeme používajíce dvou hlavních metod: t. zv. *metody substituční* a integrace *„per partes“*.

Hodnotu omezeného intergálu z neurčitého integrálu dostaneme dosazením obou mezí a odečtením, na př.

$$\int_a^b x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Spojením předchozích pravidel dostaneme pravidlo pro *integrování mnohočlenu „člen po členu“*:

$$\int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)\mathrm{d}x = a_0 c + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + $$

$$+ \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + k.$$

Toto pravidlo lze rozšířiti na potenční řadu, jak je vysloveno ve větě:

(V. 2,7.) *Integrál funkce dané potenční řadou je potenční řada, která vzniká integrováním dané řady „člen po členu“. Nová řada má stejný obor konvergence jako daná. Vzorcem:*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + k.$$

Integrační konstanta je pro novou řadu absolutním členem.

Příklad 2,9. Integrováním řady

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

dostaneme (až na integrační konstantu):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots .$$

Integrál na levé straně je $\log_e (1 + x)$; platí tedy:

$$\log_e (1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n + 1}.$$

Cvičení. 2,21. Dokažte, že platí (až na integrační konstantu)

$$\int f(x) dx = f(x)$$

pro funkci, definovanou řadou 3 příkladu 2,3.

2,22. Najděte rozvoj pro funkci arctg x; použijte rovnice

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x$$

a rozviňte $\frac{1}{1 + x^2}$ v potenční řadu.

2,23. Proveďte podobnou úlohu pro arcsin x.

Integrování je operace zpravidla složitější a obtížnější k provedení než derivování; u funkcí rozvinutelných v potenční řady je integrace řady „člen po členu" nejjednodušší a často jediná cesta, jak nalézti integrál dané funkce. (Srovnej poznámku v odst. 2,5.)

2,7. Řada Taylorova. Derivujeme-li postupně funkci $f(x)$ danou potenční řadou:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{12}$$

dostaneme

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$
$$f''(x) = 1 \,.\, 2a_2 + 2 \,.\, 3a_3 x + 3 \,.\, 4a_4 x^2 + \dots$$
$$f'''(x) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, a_3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4a_4 x + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;$$

obecně:

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \dots \,.\, (k + 1) a_{k+1} x + \dots \,.$$

Dosadíme-li do této rovnice $x = 0$, vyjde:

$$f^{(k)}(0) = k! a_k,$$

t. j.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Tyto rovnice doplníme rovnicí

$$a_0 = f(0),$$

která plyne z vyjádření (12).

Funkce, jejíž funkční hodnoty jsou dány součty potenční řady, konvergentní v jistém okolí O_0 bodu $x = 0$, se nazývá *analytická* (t. j. rozvinutelná) *v tomto okolí*. Výše odvozené výsledky shrneme ve větě

(V. 2,8.) *Analytická funkce v okolí O_0 má v tomto okolí derivace všech řádů*) a je vyjádřena potenční řadou:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots$$

konvergentní v O_0. Tato řada se nazývá Taylorova (MacLaurinova).

Označením $f'(0)$, $f''(0)$ atd. rozumíme hodnoty funkcí $f'(x), f''(x), \ldots$ v bodě $x = 0$.

Cvičení 2,24. V jakém oboru jsou analytické

a) funkce z příkladu 2,3;

b) $\log(1 + x)$;

c) $\dfrac{1}{1 - x}$.

Funkce, která je analytická, má derivace všech řádů, ale obráceně tato podmínka není postačující pro rozvinutelnost funkce. Dokonce není pro rozvinutelnost funkce postačující ani podmínka, že funkce má derivace všech řádů v jistém okolí bodu $x = 0$ a že řada

*) Existence derivací všech řádů nemusí nastat pro libovolně zvolenou funkci.

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

v tomto okolí konverguje. Součty této řady nemusí totiž být — jak ukázal Cauchy na příkladě funkce e^{-x^2} — funkční hodnoty funkce $f(x)$.

Postačující podmínka pro rozvinutelnost funkce je požadavek, aby jistý výraz, závislý na derivaci $f^{(n)}(x)$, t. zv. *zbytek*, konvergoval s rostoucím n k nule.*) Příslušná věta je podrobně uvedena a dokázána v citovaných učebnicích diferenciálního počtu.

Většina základních funkcí, které se v matematice vyskytují, jsou rozvinutelné; dokážeme to na př. tak, že funkci odvodíme různými početními výkony, integrováním nebo derivováním z funkcí analytických a tím dostaneme podle známých vět i její rozvoj. Ovšem numerické výpočty koeficientů rozvoje bývají při tomto postupu — zvláště jde-li o dělení potenční řadou nebo dosazování potenční řady do jiné — velmi složité.

Tu lze však výhodně uplatnit větu 2,8 o Taylorově řadě. Víme-li totiž, že jistá funkce je analytická, je její rozvoj podle věty 2,4 určen jednoznačně. Koeficienty tohoto rozvoje můžeme tedy počítati podle věty 2,8. Příklad tohoto postupu dává funkce arcsin x (viz odst. 2,12).

Nakonec ještě **poznámku** k vysvětlení názvu „funkce rozvinutelná v okolí bodu $x = 0$". Upozornil jsem v odst. 2,3 u racionálních funkcí, že není-li splněn předpoklad $a_0 \neq 0$, je možno takovou funkci rozvinouti v složitější řadu. Na př. u funkce $\frac{1}{x}$: položíme-li $x = x_1 + 1$, je

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1 + 1} = 1 - x_1 + x_1^2 - x_1^3 + \dots, |x_1| < 1.$$

Vrátíme-li se k proměnné x, platí:

---

*) Tím je též odpověděno na první dvě otázky v odst. 2,5.

$$\frac{1}{x} = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + - \ldots,$$

což je potenční řada, postupující v mocninách proměnného dvojčlenu $x - 1$. Tato řada konverguje, je-li $|x - 1| < 1$, t. j. v intervalu $(0,2)$. O funkci $\frac{1}{x}$ říkáme, že je *rozvinutelná* v okolí bodu 1. Jedna a tatáž funkce je ovšem rozvinutelná (analytická) v okolí nekonečně mnoha bodů a rozvoje lze převáděti jeden v druhý t. zv. transformováním potenční řady.

Na př. rozvoj funkce $\frac{1}{x}$ v okolí bodu $x = 2$ dostaneme takto: Položíme $x = 2x_1 + 2$;

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x_1 + 1} = \tfrac{1}{2}\,(1 - x_1 + x_1^2 - x_1^3 + - \ldots)$$

$$\frac{1}{x} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\,(x - 2)^2 + \tfrac{1}{8}\,(x - 2)^3 + \ldots .$$

V dalším si budeme všímati výhradně rozvinutelnosti v okolí bodu $x = 0$. Proto, bude-li řečeno „funkce analytická", rozumí se tím funkce analytická v okolí bodu $x = 0$.

2,8. Binomická řada. Zvláštním případem binomické poučky je vzorec

$$(1 + x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x,$$

který platí pro každé přirozené číslo α. Newton zobecnil tento vzorec pro *libovolné reálné* číslo α t. zv. binomickou řadou. Kombinační číslo $\binom{\alpha}{n}$ je dáno výrazem

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,.\,(\alpha - 1)\,.\,(\alpha - 2)\,.\,\ldots\,.\,(\alpha - n + 1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,n}. \qquad (13)$$

Rovnice (13) má význam pro libovolné reálné číslo α a libovolné přirozené číslo n. Pokládáme ji za definici rozšířeného kombinačního čísla. Definujeme k vůli jednotnosti $\binom{\alpha}{0} = 1$ pro libovolné reálné α a utvoříme formálně potenční řadu:

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots \tag{14}$$

Je-li α přirozené číslo, je pro $n > \alpha$ $\binom{\alpha}{n} = 0$, řada (14) se stává konečnou a dává podle binomické poučky $(1 + x)^\alpha$. Podíl 2 sousedních členů řady (14) je

$$\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} : \binom{\alpha}{n} x^n = \frac{\alpha - n}{n + 1} x.$$

Platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha - n}{n + 1} x\right| = |x|$; konverguje tedy řada (14) podle podílového kriteria, je-li $|x| < 1$ a definuje v intervalu $(-1; +1)$ pro *libovolné reálné* α k jisté funkci $f_\alpha(x)$.

Vypočteme derivaci funkce $f_\alpha(x)$ podle věty 2,6:

$$f'_\alpha(x) = \alpha \,.\, f_{\alpha-1}(x). \tag{15}$$

I pro rozšířená kombinační čísla $\binom{\alpha}{n}$ platí, jak lze snadno dokázati,*) součtový vzorec:

$$\binom{\alpha - 1}{n} + \binom{\alpha - 1}{n + 1} = \binom{\alpha}{n + 1}.$$

Použijeme-li ho, dokážeme násobením snadno vztah*):

$$(1 + x) \,.\, f_{\alpha-1}(x) = f_\alpha(x). \tag{16}$$

Znásobíme rovnici (15) dvojčlenem $(1 + x)$ a užijeme rovnice (16); vyjde:

$$(1 + x) \,.\, f'_\alpha(x) = \alpha f_\alpha(x),$$

*) Proveďte podrobně!

t. j.
$$\frac{f'_\alpha(x)}{f_\alpha(x)} = \frac{\alpha}{1+x}.$$

Podle pravidel o derivování složené funkce je levá strana této rovnice derivací funkce $\log_e f_\alpha(x)$, pravá strana derivací funkce $\log(1+x)^\alpha$. Platí tedy:

$$D_x \log_e f_\alpha(x) = D_x \log_e (1+x)^\alpha,$$
$$\log_e f_\alpha(x) = \log_e (1+x)^\alpha + \log_e k,\text{*)}$$
$$f_\alpha(x) = k\,.\,(1+x)^\alpha. \qquad (17)$$

Pro $x = 0$ je podle rovnice (14) levá strana rovnice (17) rovna 1, pravá strana je k; je tedy $k = 1$.

Výsledek vyslovíme větou:

(V. 2,9.) *Funkce* $(1+x)^\alpha$, α *reálné, má Taylorův rozvoj*:

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots;$$

poloměr konvergence je $r \geqq 1$.

Cvičení 2,25. Proveďte tento rozvoj pro $\alpha = -1, \pm \frac{1}{2}$ a porovnejte s geometrickou řadou a s řadami příkladu 2,7 a cvičení 2,13.

Binomické řady se užívá k numerickému výpočtu odmocnin. Podmínka $|x| < 1$ není na závadu obecnosti základu, neboť ji lze vhodnou úpravou splniti. Hlavně — chceme-li dosáhnout rychlé konvergence — musí být $|x|$ pokud možno malá a číslo x záporné; neboť při kladném x střídají členy $\binom{\alpha}{n} x^n$ znaménka, řada alternuje a konverguje pomaleji; při záporném x jsou členy (od určitého počínaje) všechny téhož znaménka.

Příklad 2,10. Pro výpočet $\sqrt{2}$ si upravíme binomickou řadu:

$$\sqrt{2} = \tfrac{7}{5}\,.\,(1 - \tfrac{1}{50})^{-\frac{1}{2}}.$$

Dostaneme:

*) Tento tvar můžeme dáti integrační konstantě.

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{50^3} + \ldots\right).$$

Řada konverguje velmi rychle. Prvních 6 členů nám dá přesně 10 desetinných míst. Proveďte výpočet!

Cvičení 2,26. Vyhledejte sami výhodný rozvoj pro $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ a pod. a proveďte výpočet.

Na př.:

$$\sqrt[3]{2} = \tfrac{5}{4}\,(1 + \tfrac{3}{125})^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt{13} = \tfrac{18}{5}\,(1 - \tfrac{1}{325})^{-\frac{1}{2}} \text{ a p.}$$

2,9. Logaritmická řada. Pro funkci, definovanou řadou ze cvičení 2,2

$$f(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

byl dokázán ve cvičení 2,18 vztah:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x},$$

t. j.

$$f'(x) = \mathrm{D}_x \log(1 + x),^{*)}$$
$$f(x) = \log(1 + x) + \log k,$$
$$f(x) = \log k\,.\,(1 + x);$$

Ježto pro $x = 0$ je $f(0) = 0$, je $\log k = 0$, $k = 1$.

Tím je získán rozvoj pro $\log(1 + x)$.

(V. 2,10.) *Taylorův rozvoj funkce* $\log(1 + x)$ *je*

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots.$$

Poloměr konvergence této řady je $r = 1$.

Logaritmická řada konverguje v krajním bodu $x = 1$ svého konvergenčního intervalu a diverguje v bodě $x = -1$,

---

*) Logaritmus přirozený; index e vynechávám.

jak je známo z části 1. Součet této řady v bodě $x = 1$ lze určiti na základě *Abelovy věty:*

(V. 2,11.) *Nechť potenční řada $\Sigma a_n x^n$ má poloměr konvergence r a definuje ve svém konvergenčním intervalu funkci*

$$f(x) = \Sigma a_n x^n.$$

Konverguje-li též řada $\Sigma a_n r^n$ resp. $\Sigma a_n(-r)^n$, pak její součet je $\lim_{x \to r} f(x)$ resp. $\lim_{x \to -r} f(x)$.

Důkaz najde čtenář v knize *Knoppově.*

Protože tedy logaritmická řada konverguje v pravém krajním bodě $x = 1$, je součet řady:

$$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

roven $\lim_{x \to 1} \log(1 + x)$, t. j. $\log 2$; tento výsledek byl uveden již v části 1.

Logaritmické řady nelze použít k numerickému počítán logaritmů pro její pomalou konvergenci. Vhodnou transformací se však její konvergence značně zrychlí. Počínáme si takto: sečteme řady

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots;$$

$$-\log(1 - x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Vyjde

$$\log \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \tag{18}$$

Tato řada konverguje rychleji, neboť není alternující a exponenty stoupají po dvou. Řada (18) konverguje sice jen pro x taková, že $|x| < 1$, ale dovoluje nám počítati přirozené logaritmy všech kladných čísel, neboť podmínka

$|x| < 1$ je vždy splněna, je-li $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Na př. log 2 dostaneme pro $x = \frac{1}{3}$;

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \ldots\right). \qquad (19)$$

Provedeme-li odhad zbytku po n-tém členu, ukazuje se, že prvních 8 členů řady dává log 2 přesně na 7 desetinných míst:

$$\log 2 = 0{,}6931471\ldots$$

Dosadíme-li v řadě (18) $x = \frac{1}{2N+1}$, vyjde *rekurentní* vzorec:

$$\log(N+1) = \log N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right];$$

podle něho můžeme počítati postupně logaritmy čísel 3, 4, 5, ..., známe-li log 2.

Od přirozených logaritmů Napierových (základ e) přejdeme snadno k dekadickým logaritmům Briggsovým (základ 10). Označme β resp. ν dekadický resp. přirozený logaritmus *téhož* čísla. Platí:

$$10^\beta = e^\nu.$$

Logaritmujeme tuto rovnici přirozenými logaritmy:

$$\beta\,.\,\log_e 10 = \nu\,.\,\log_e e = \nu,$$

t. j.

$$\beta = \frac{1}{\log_e 10}\,.\,\nu.$$

Číslo $M = \frac{1}{\log_e 10}$ se nazývá *modulem* Briggsových logaritmů a vypočteme je z log 2 a log 5:

$$M \doteq 0{,}4342945\ldots$$

Cvičení 2,27. Vypočtěte přirozené logaritmy $\log_e 3$, $\log_e 5$ na 5 desetinných míst s použitím rekurentního vzorce!

2,28. Vypočtěte $\log_e \frac{5}{2}$ na 4 desetinná místa s použitím řady (18).

2,29. Vypočtěte dekadické logaritmy $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$ na 5 desetinných míst. S jakou přesností je k tomu třeba znáti modul M?

2,10. Exponenciální funkce. Exponenciální funkcí v širším slova smyslu rozumíme funkci, kde proměnná se vyskytuje v exponentu, v užším slova smyslu funkci e^x, kde $e = 2{,}718\ldots$ Tato funkce má pro své jednoduché vlastnosti zvláštní význam v infinitesimálním počtu. Uvedl jsem v odst. 2,6, že pro derivaci této funkce platí:

$$D_x e^x = e^x.$$

Jediná analytická funkce, která je rovna své derivaci, je podle cvičení 2,19 funkce, daná až na multiplikativní konstantu*) řadou:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{20}$$

s poloměrem konvergence $r = \infty$ (viz příklad 2,3).

Dokážeme, že platí

(V. 2,12.) *Funkce e^x je analytická; její Taylorův rozvoj je dán řadou*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

s poloměrem konvergence $r = \infty$.

Důkaz: Podle pravidla pro násobení absolutně konvergentních řad vyjde pro funkci definovanou rovnicí (20):

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2), \tag{21}$$

kde x_1, x_2 jsou libovolná reálná čísla.

*) Pravíme, že dvě funkce, jejichž podíl je konstantní, se liší o *multiplikativní* konstantu (na př. $f(x) = x$, $f_1(x) = 2x$); je-li jejich rozdíl stálý, liší se o *aditivní* konstantu (na př. $f(x) = x$, $f_1(x) = x + 2$).

Tato rovnice se dá indukcí snadno zobecnit:

$$f(x_1) \, . \, f(x_2) \, . \ldots . \, f(x_n) = f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n). \quad (22)$$

Dosadíme-li do (22) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, vychází:

$$f(n) = [f(1)]^n.$$

Protože $f(1) = \mathrm{e}$, jak bylo dokázáno v odst. 1,13, platí

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad (23)$$

pro každé číslo x *celé, kladné*. Přímým dosazením $x = 0$ do (20) dostaneme $f(0) = 1$; zvolíme-li v (21) $x = x_1 = -x_2$, je:

$$f(x) = \frac{1}{f(x)} = \mathrm{e}^{-x}. \quad (24)$$

Rovnice (23) tedy platí pro *libovolné celé číslo* x.

Dále dosadíme do (22): $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$; pak je:

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = f(1) = \mathrm{e}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}};$$

znovu dosadíme do (22) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n'}$; vyjde

$$\left[f\left(\frac{1}{n'}\right)\right]^n = f\left(\frac{n}{n'}\right); \quad f\left(\frac{n}{n'}\right) = \mathrm{e}^{\frac{n}{n'}}.$$

Platí tedy rovnice (23) pro každé kladné racionální číslo x a v důsledku (24) pro *každé racionální* x. Limitním postupem se dále ukáže, že rovnice (23) platí pro každé *reálné* x.

V odst. 1,13 bylo dokázáno, že pro číslo e platí vztah:

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Tento vztah lze zobecniti; platí totiž rovnice:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Cvičení 2,30. Rozviňte v řadu exponenciální funkci $y = 2^x$.
Návod: logaritmováním dostaneme

$$\log_e y = x \,.\, \log_e 2$$

čili:

$$y = e^{x \,.\, \log_e 2}$$

a použijeme rozvoje pro e^x.

Příklad 2,11. Na konci odstavce uvedu příklad rozvoje důležité funkce odvozené od funkce exponenciální. Tato odvozená funkce — resp. řada — je východiskem pro další důležité rozvoje. Jde o funkci

$$y = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Platí:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 : \left(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots\right).$$

Řadou v závorkách je možno „děliti“ podle věty 5; výsledek jepotenční řada:

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{1}{1!} B_1 x + \frac{1}{2!} B_2 x^2 + \frac{1}{3!} B_3 x^3 + \dots .$$

Koeficienty $B_0, B_1, B_2, \dots$ jsou racionální čísla, nazývaná po svém objeviteli *Bernoulli-ova*. Jejich hodnoty jsou

$$B_0 = 1;\ B_1 = -\tfrac{1}{2};\ B_2 = \tfrac{1}{6},\ B_3 = 0;\ B_4 = -\tfrac{1}{30};\ B_5 = 0;$$
$$B_6 = \tfrac{1}{42}, \dots .$$

Cvičení 2,31. Dokažte, že nahradíme-li B_ν výrazem B^ν, platí *symbolická* rovnice

$$(B + 1)^\nu - B^\nu = 0.$$

Návod: Znásobte příslušné řady a použijte věty o identitě.
S použitím symbolické rovnice vypočtěte hodnoty Bernoulliových čísel B_0 až B_6.

2,11. O funkcích inversních. Budiž $y = f(x)$ funkce definovaná v jistém číselném oboru Ω_x; její funkční hodnoty y tvoří jiný obor číselný Ω_y. Je-li funkční vztah takový, že každé číslo z oboru Ω_y odpovídá *jen jedinému* číslu z oboru Ω_x, pak lze toto číslo x pokládati za funkční hodnotu dotyčného y a tím je definována nová funkce

$$x = \varphi(y),$$

t. zv. **funkce inversní** k dané. Tato inversní funkce je charakterisována tím, že platí rovnice

$$\varphi(f(x)) = x \text{ resp. } f(\varphi(y)) = y \tag{25}$$

identicky pro všecka x z Ω_x resp. y z Ω_y.

Na př. k funkci $y = x^2$ je inversní funkce $x = \sqrt{y}$. Obory Ω_x, Ω_y mohou být na př. množství všech kladných čísel. K funkci $y = \sin x$, definované v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi)$ je inversní funkce $x = \arcsin y$, definovaná v intervalu $(-1, +1)$. Obor Ω_x nelze v tomto případě rozšířiti. Proč?

S hlediska potenčních řad nás zajímají inversní funkce k funkcím analytickým. Za jistých předpokladů jsou to opět funkce analytické. Uvedu nejprve jednoduchý

příklad 2,12. Rozvineme analytickou funkci

$$y = \sqrt{1 + x} - 1 \tag{26}$$

podle příkladu 2,7:

$$y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - + \ldots . \tag{27}$$

Inversní funkci dostaneme řešením rovnice (26) podle x:

$$x = 2y - y^2. \tag{28}$$

Tato rovnice představuje zároveň rozvoj inversní funkce v potenční řadu v proměnné y. Podle rovnic (25) můžeme dosaditi do rozvoje (27) za x z rovnice (28); po uspořádání podle mocnin y dostaneme ve shodě s větou 2,4 identitu $y = y$. Proveďte podrobně: vypočtěte koeficienty při y, y^2, y^3.

Takovýmto dosazováním potenční řady je možno určiti v každém případě koeficienty rozvoje inversní funkce, je-li znám rozvoj funkce dané. Je-li totiž dána funkce analytická:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

a je-li funkce k ní inversní opět analytická:

$$x = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots$$

kde dosadit za x do rozvoje dané funkce, uspořádat řadu podle mocnin y a položit všechny koeficienty této řady rovny nule s výjimkou koeficientu při y, který je roven 1. Tímto použitím věty 2,4 určíme postupně $b_0, b_1, b_2, \dots$ Zdůrazňuji znovu, že předchozí postup je možný jen za předpokladu, že inversní funkce je analytická. — Na existenční otázku, kdy je inversní funkce k analytické funkci opět funkce analytická, odpovídá věta:

(V. 2,13.) *Budiž*

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \; a_1 \neq 0,$$

analytická funkce. Pak existuje jistý interval proměnné y $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ takový, že v něm existuje inversní funkce k dané, je analytická a má rozvoj ve tvaru:

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots, \; b_1 = \frac{1}{a_1}.$$

Právě popsaný postup pro výpočet koeficientů rozvoje inversní funkce je příliš pracný a proto se ho užívá zřídka. Obyčejně volíme tuto cestu: protože *existence* rozvoje inversní funkce je za daných předpokladů zaručena podle věty 2,13, stačí vypočítat koeficienty Taylorovy řady podle věty 2,8. Při tom užíváme vztahu mezi derivací dané funkce $y = f(x)$ a inversní funkce, $x = \varphi(y)$, který se odvozuje v infinitesimálním počtu; platí totiž:

$$D_x f(x) = \frac{1}{D_y \varphi(y)}.$$

Podrobnější vysvětlení podává

příklad 2,13. Derivace všech řádů funkce $y = e^x - 1$ jsou

$$D_x^{(n)}(e^x - 1) = e^x.$$

Protože funkce $y = e^x - 1$ splňuje předpoklady věty 2,13, má inversní funkci analytickou; její derivace je

$$D_y\varphi(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + y}.$$

Druhá derivace je:

$$D_z^{(2)}\varphi(y) = -\frac{1}{(1 + y)^2},$$

třetí:

$$D_y^{(3)}\varphi(y) = 2 \cdot \frac{1}{(1 + y)^3};$$

obecně n-tá:

$$D_y^{(n)}\varphi(y) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1 + y)^n}.$$

Hodnota této derivace v bodě $y = 0$ je:

$$D_y^{(n)}\varphi(y) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Dosadíme-li do Taylorovy řady, dostaneme řadu logaritmickou.

Cvičení 2,32. Najděte rozvoj inversní funkce k funkci

$$y = (1 + x)^\alpha - 1.$$

2,12. Funkce goniometrické a cyklometrické. Na příkladě rozvinutí goniometrických funkcí v řady ukáži jinou metodu, jak lze takové rozvinutí provésti. V odst. 2,7 bylo řečeno, že Taylorova řada představuje rozvoj dané funkce, jestliže jistý výraz, t. zv. *zbytek*, konverguje s rostoucím n k nule.*) Tento zbytek je dán na př. výrazem

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,x^n.$$

Určíme výraz R_n pro funkci $y = f(x) = \cos x$. Derivace jsou:

$$D_x \cos x = -\sin x,\ D_x^{(2)} \cos x = -\cos x,\ D_x^{(3)} \cos = \sin x;$$

$$D_x^{(4)} \cos x = \cos x;$$

dále se zřejmě opakují, platí tedy

*) Viz citované učebnice diferenciálního počtu.

$$
\begin{aligned}
D_x^{(0)} \cos x &= D_x^{(4)} \cos x = D_x^{(8)} \cos x = \ldots = \cos x \text{ *)}\\
D_x^{(1)} \cos x &= D_x^{(5)} \cos x = D_x^{(9)} \cos x = \ldots = -\sin x\\
D_x^{(2)} \cos x &= D_x^{(6)} \cos x = D_x^{(10)} \cos x = \ldots = -\cos x\\
D_x^{(3)} \cos x &= D_x^{(7)} \cos x = D_x^{(11)} \cos x = \ldots = \sin x.
\end{aligned}
$$

Je tedy zřejmě pro každé n a x:

$$|D_x^{(n)} \cos x| \leq 1,$$

t. j.

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \quad \text{pro každé } x.$$

Podíl $\frac{x^n}{n!}$ totiž konverguje k nule s rostoucím n, jak je patrno z konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

V bodě $x = 0$ mají derivace kosinu (nultou počínaje) postupně hodnoty $1, 0, -1, 0 \,|\, 1, 0, -1, 0 \,|, \ldots$. Věta 2,8 dává rozvoj

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

což je všude konvergentní řada ze cvičení 2,3.

Cvičení 2,33. Ukažte podobně, že rozvoj sinu je druhá řada ze cvičení 2,3.

Máme tedy celkem výsledek:

(V. 2,14.) *Goniometrické funkce* $\sin x$, $\cos x$ *jsou analytické; jejich Taylorovy řady jsou:*

$$
\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,\\
\sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Poloměry konvergence obou řad jsou $r = \infty$.

---

*) $D^{(0)} \cos x$ píši místo $\cos x$.

Řada pro $\cos x$ obsahuje jen mocniny proměnné x se sudým exponentem, řada pro $\sin x$ jen s lichým exponentem. Nahradíme-li v obou řadách proměnnou x veličinou $-x$, dostaneme zřejmě známé vztahy:

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Platí-li pro funkci $f(-x)$ vztah $f(x) = f(x)$ pro všechna x v oboru, kde je definována, nazývá se *sudá*; platí-li vztah $f(-x) = -f(x)$, nazývá se *lichá*. Je tedy $\cos x$ *sudá funkce*, $\sin x$ *lichá*. Je-li sudá resp. lichá funkce rozvinutelná, jsou její rozvoje podobné jako u $\cos x$ resp. $\sin x$; t. j. vyskytují se v nich jen mocniny x s exponenty téže parity. Dokažte!

Rovnice (29) se hodí při malém x (pozor: x je úhel v míře obloukové!) pro výpočet hodnot goniometrických funkcí, neboť rychle konvergují. Nevýhodou je, že alternují. — Rozvoj funkce $\operatorname{tg} x$, $\sec x$ lze získati z řad (29); výhodnější metoda než prosté dělení je založena na složitějších řadách. Funkce $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{cosec} x$ nejsou analytické (v okolí bodu $x = 0$). Proč?

Cvičení 2,34. Určete pro $x = 1$ hodnoty $\cos x$, $\sin x$ z řad (29) a odtud úhel x v míře stupňové ($x < 60°$).

2,35. S použitím řad (29) dokažte součtový vzorec

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2.$$

2,36. Dělením potenční řadou najděte rozvoj pro $\sec x$ (první čtyři členy); přihlížejte při tom k faktu, že $\sec x$ je funkce sudá.

Podle věty 2,13 je $\arcsin x$ funkce analytická v okolí bodu 0. Koeficienty rozvoje určíme podobně takto:
Platí:

$$D_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Rozvineme pravou stranu podle binomické řady ($\alpha = -\frac{1}{2}$):

$$D_x \arcsin x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 . 3}{2 . 4} x^4 + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} x^6 + \dots \quad (30)$$

Poloměr konvergence této řady je $r = 1$.

Integrujeme-li rovnici (30), vyjde:

$$\arcsin x = k + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 . 3}{2 . 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots .$$

Ježto $\arcsin 0 = 0$, je integrační konstanta $k = 0$. Ještě jednodušší je odvození rozvoje pro $\operatorname{arctg} x$. Tato funkce, jakožto inversní k analytické funkci

$$\operatorname{tg} x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

($\operatorname{tg} x$ je funkce lichá!), je také analytická. Platí:

$$D_x \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots;$$

integrací ($k = 0$ z téhož důvodu jako u $\arcsin x$) vyjde:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots . \quad (31)$$

Také tato řada má poloměr konvergence $r = 1$.

Oba výsledky shrneme ve větě:

(V. 2,15.) *Rozvoje cyklometrických funkcí* $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ *jsou:*

$$\arcsin x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 . 3}{2 . 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots .$$

Obě řady mají poloměr konvergence $r = 1$.

Řada pro $\operatorname{arctg} x$ konverguje podle Leibnizova kriteria pro alternující řady i pro $x = 1$; její součet je podle Abelovy věty 2,11 $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$. Dostaneme tedy vzorec:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots,$$

nazývaný *formule Leibnizova*. K výpočtu čísla π se tato formule nehodí pro pomalou konvergenci řady. Totéž platí i o řadě, kterou dostaneme z rozvoje funkce $\arcsin x$ pro $x = 1$. Také tato řada konverguje — jak lze dokázati — a její součet je $\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$. Platí tedy:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \dots.$$

K numerickému výpočtu čísla π užíváme tohoto postupu:

Do řady (31) dosadíme $x = \frac{1}{5}$ a vypočteme příslušný úhel $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$. Příslušná řada dosti dobře konverguje; prvních 6 členů dá úhel α přesně na 8 desetinných míst. Dále zavedeme úhel $\beta = 4\alpha - \frac{1}{4}\pi$; tento úhel je velmi malý; podle známého vzorce vypočteme

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (4\alpha - \tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{239}.$$

Platí tedy:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \dots;$$

tato řada konverguje velmi dobře. Číslo π je pak dáno rovnicí

$$\pi = 4(4\alpha - \beta).$$

Cvičení 2,37. Proveďte naznačeným způsobem výpočet čísla π na 7 desetinných míst.

2,38. Dokažte, že funkce $\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}$ je analytická.

Návod: dosaďte $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ a nahraďte $\sin x$, $\cos x$ řadami

2,39. Dokažte, že funkce $\log_e \dfrac{\sin x}{x}$ je analytická.

Návod: použijte vztahu:

$$\log_e \frac{\sin x}{x} = \int \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) dx. \tag{32}$$

Poznámka: Protože platí rovnice

$$\log_e \sin x = \log_e x + \log_e \frac{\sin x}{x},$$

lze z rozvoje funkce (32) odvoditi rozvoj, důležitý pro numerický výpočet $\log_e \sin x$.

HISTORICKÝ PŘEHLED

Jisté náznaky nekonečných řad se vyskytují sice už ve starověku, na př. u *Archimeda*, ale teprve v 2. polovině 17. století se objevují nekonečné řady jako nový matematický prostředek, kterého se užívá cílevědomě k řešení úloh. Mezi prvními byli *Mercator* a *Brouncker*, kteří objevili při provádění kvadratury hyperboly r. 1668 logaritmickou řadu. Rok poté *Newton* ve spise „De analysi per equationes numero terminorum infinitas" položil první základy teorie řad.

Její rozvoj pak úzce souvisí s rozvojem počtu infinitesimálního, který v té době objevili *Newton* a *Leibniz*. Newton je autorem binomické řady (1676), Leibniz se zabýval řadami alternujícími (viz kriterium, věta 1,23); jemu byla známa formule, po něm nazvaná:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots$$

plynoucí jinak z pozdějšího *Gregory*-ova rozvoje funkce arctg x.

Celé 18. století bylo horlivě pěstováno praktické počítání s řadami, ale teorie, zejména otázky konvergence, divergence a dovolených výkonů s řadami byly zanedbávány. Přesto přineslo toto období mnoho výsledků trvalé vědecké ceny. R. 1715 uveřejnil *Brook Taylor* svůj rozvoj. Bratři *Jean* a *Jacques Bernoulli*-ové a jejich přítel, vynikající matematik *Leonhard Euler*, pracovali vydatně v oboru nekonečných řad. Euler se zabýval zvláště rozvojem funkce e^x a odvozených funkcí. Přitom jeho způsob dokazování — jako ostatně i jinde — nevynikal přesností: na konvergenci a divergenci řad se vůbec neohlížel. Tak na př. užíval „rovnice":

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

kterou „odvodil" z rozvoje:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

dosazením $x = -1$.

Na součet nekonečné řady se tehdy hledělo jako na skutečný součet: pojmy absolutní konvergence, přerovnávání řad a věty z nich plynoucí byly neznámy. Proto stáli tehdejší matematikové bezradně před „paradoxem", kterým pro ně byla skutečnost, že z konvergentní řady

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

vzniká při jiném uspořádání závorek opět konvergentní řada s jiným součtem

$$1 = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots.$$

Za takových poměrů se ovšem mohl vyskytnouti jakýsi *Grandi*, který v této „rovnici" viděl mystiku — matematický důkaz stvoření světa z ničeho.

Na uvedeném příkladě je viděti, v jakém desolátním stavu byla teorie řad. I po Eulerovi mnozí vynikající matematikové užívali s úplnou samozřejmostí divergentních řad při svých důkazech a toto své stanovisko dokonce obhajovali tím (*Lagrange*), že „kdyby na př. nebylo dovoleno vždy (i v případě divergence) dosaditi za řadu

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots.$$

výraz $\frac{1}{1-x}$, bylo by otřeseno principy analyse". Jen matematický instinkt uchránil většinu tehdejších matematiků před hrubšími chybami ve výsledcích.

Toto řádění zastavil teprve slavný francouzský matematik *Cauchy*, který postavil teorii řad na pevné a přesné základy. Učinil tak svými přednáškami a zejména svým spisem „Analyse algébrique" (1821). Cauchy-ův zásah byl tak pronikavý, že znepokojil všechny matematiky, kteří užívali řad k svým výpočtům. Vypráví se, že známý francouzský učenec *Laplace*, vyslechnuv přednášku Cauchyovu, spěchal domů, aby přezkoušel konvergenci řad ve svém spise „Mécanique céleste".

Cauchy také uvedl na pravou míru používání Taylorovy řady. Ukázal na příkladě funkce

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

že k tomu, aby platil rozvoj

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

nestačí, aby funkce $f(x)$ měla všechny derivace, ale že je nutné, aby t. zv. zbytek, který lze vyjádřit ve tvaru:

$$\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \qquad 0 \leq \xi \leq x,$$

konvergoval s rostoucím n k nule. — Cauchy formuloval obecné kriterium konvergence, objevené již r. 1817 *Bolzanem*. Jak nasvědčují názvy četných vět, jsou dílem Cauchyovým různá kriteria konvergence, řešení otázky konvergenčního oboru potenčních řad a j.

Vedle Cauchyho se zasloužil o položení přesných základů teorie řad hlavně norský matematik *Niels Henrik Abel* svou prací o binomické řadě (1826). Ovšem i jiná jména jsou spjata s vývojem teorie řad v první polovině 19. století: jsou to na př. *Gauss*, *Fourier*, *Dirichlet* a j. — Dalšího prohloubení se dostalo teorii řad v druhé polovině 19. století přesným definováním iracionálních čísel (*Dedekind*).

V novější době se obrací zřetel matematiků opět k divergentním řadám a k rozšíření pojmu konvergence. Vysvětlit podstatu věci není však v možnostech této příručky. — Celkem lze říci, že teorie řad tvoří dnes ucelenou část t. zv. algebraické analyse a je v matematice mocným a přesně fungujícím nástrojem.

LITERATURA

Poučení o pojmu a vlastnostech funkcí, derivacích a rozvoji funkcí v řadu najde čtenář v podrobné učebnici *V. Jarník*: Úvod do počtu diferenciálního, která vyšla v r. 1946 a navazuje na starší knihu *M. Kösslera*: Úvod do počtu diferenciálního, která vyšla r. 1926 ve sbírce Kruh. Speciálně o funkcích exponenciální, logaritmické a goniometrických pojednává knížka *E. Čecha*: Elementární funkce (táž sbírka 1944). V těchto učebnicích jsou i odstavce věnované reálným číslům, posloupnostem a řadám.

Systematicky a důkladně je zpracována theorie posloupností a nekonečných řad (i součinů) v knize *K. Knopp*: Theorie u. Anwendung der unendlichen Reihen (2. nebo 3. vydání). Zde najde čtenář zejména důkazy vět, které v této příručce nejsou provedeny, a hojnost příkladů.

OBSAH

Str.

Spisovatel	*Jan Vyšín*
Název díla	*O nekonečných řadách*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1948*
V edici	*Cesta k vědění, svazek 45*
Za redakce	*Dra R. Brdičky, Dra M. A. Valoucha, Dra F. Vyčichla a Dra O. Zicha*
Stran	*112*
Obrazců	*12*
Vytiskla	*Knihtiskárna Prometheus v Praze VIII*
Vydání	*první (1—3500 výtisků)*
Cena	*Kčs 34,—*

Cesta k vědění

Brož. svazky formátu B6.

1. *Schwarz:* O rovnicích. 2. vyd. 1947. 46,—.
2. *Petržílka-Slavík:* Piezoelektřina a její použití v technické praxi. 2. vyd. se chystá.
3. *Il'kovič:* Polarografie. Rozebráno.
4. *Holubář:* O methodách rovinných konstrukcí. 2. vyd. se chystá.
5. *Strnad:* Technika zvukového filmu. Rozebráno.
6. *Link:* Jak poznává astrofysika vesmír? 2. vyd. se chystá.
7. *Hruška:* Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. 2. vyd. se chystá.
8. *Okáč:* Výklad k základním operacím v chemické analyse. 2. vyd. 1947. 52,—.
9. *Sahánek:* Vznik světla v plynech. Rozebráno.
10. *Seifert:* Imaginární elementy v geometrii. Rozebráno.
11. *Link:* Lety do stratosféry a výzkum vysoké atmosféry. Rozebráno.
12. *Pleskot:* Spojnicové nomogramy. 2. vyd. 1946. 40,—.
13. *Tomíček:* Potenciometrické titrace. 2. vyd. se chystá.
14. *Sahánek:* Televise. Rozebráno.
15. *Pírko:* O souřadnicích. 2. vyd. se chystá.
16. *Zahradníček:* Mechanické kmity. Rozebráno.
17. *Okáč:* Analytické reakce. I. Reakce kationtů. 2. vyd. 1946. 44,—.
18. *Klapka:* Jak se studují geometrické útvary v prostoru. Část I. 2. vyd. 1947. 28,—.
19. *Okáč:* Analytické reakce. II. Reakce aniontů. 2. vyd. 1946. 28,—.
20. *Čech:* Co je a nač je vyšší matematika? Rozebráno.
21. *Čupr:* Aritmetické hry a zábavy. 2. vyd. se chystá.
22. *Janko:* Jak vytváří statistika obrazy světa a života. Díl I. 2. vyd. 1947. 48,—.
23. *Klapka:* Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část. 2. vyd. 1947. 40,—.

24. *Kladivo:* Měřické chyby a jejich vyrovnání. Rozebráno.
25. *Ryšavý:* Vektory a tensory. 2. vyd. se chystá.
26. *Janko:* Jak vytváří statistika obrazy světa a života. Díl II. 2. vyd. se chystá.
27. *Klíma:* Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii. 2. vyd. se chystá.
28. *Čupr:* Numerické řešení rovnic. 2. vyd. 1947. 24,—.
29. *Klíma-Šimek:* Kamenořez. Rozebráno.
30. *Potužák:* Praktická geometrie. Část I. 2. vyd. se chystá.
31. *Katětov:* Jaká je logická výstavba matematiky? Rozebráno.
32. *Link:* Co víme o hvězdách? 1947. 52,—.
33. *Hostinský:* O mnohoúhelnících a mnohostěnech. 1947. 22,—.
34. *Zich:* Úvod do filosofie matematiky. 1947. 48,—.
35. *Kučera-Ludmila:* Od pravěku k upravenému uhlí. 1947. 32,—.
36. *Kounovský:* Plochy zborcené. 1947. 46,—.
37. *Běhounek:* K jádru hmoty. V tisku.
38. *Čupr:* Geometrické hry a zábavy. Chystá se.
39. *Bouška:* Zemský magnetismus. V tisku.
40. *Milbauer:* Chemie ve fotografii. V tisku.
41. *Hacar:* Mechanika sluneční soustavy. V tisku.
42. *Kounovský:* Theoretické základy fotogrammetrie. V tisku.
43. *Menšík:* Fotogrammetrie. V tisku.
44. *Kožešník:* Fysikální podobnost a stavba modelů. V tisku.
45. *Vyšín:* O nekonečných řadách. 1948.
46. *Korecký-Pospíšil:* Vzácné kovy v technice. Chystá se.
47. *Holubář:* O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů. Chystá se.
48. *Pospíšil:* Nekonečno v matematice. Chystá se.
49. *Potužák:* Praktická geometrie. II. část. Chystá se.
50. *Zátopek:* Jak se studují zemětřesení. Chystá se.