Úvod do filosofie matematiky

34.

OTAKAR V. ZICH

ÚVOD DO FILOSOFIE MATEMATIKY

Jč
m+f

CESTA K VĚDĚNÍ SVAZEK 34

CESTA K VĚDĚNÍ

DR. OTAKAR V. ZICH

ÚVOD DO FILOSOFIE MATEMATIKY

Tato knížka je prvním dílem v české literatuře věnovaným filosofii matematiky. Hned na prvních stránkách autor seznamuje čtenáře s Richardovou antinomií a uvádí ho tak do *problematiky základů matematiky.* Zabývá se pak některými podobnými paradoxy, jež mají původ ve slovním vyjadřování a přechází k otázce, co je předmětem matematiky. Zjišťuje, že její předmět je podmíněn úkoly a programem, který se jí předkládá, a že *popud k pokroku matematiky vychází častěji z praxe* než z úloh, kladených uvnitř samotné matematiky. Zabývá se pak dvojím pojetím povahy matematického předmětu (konstruovatelnost a bezespornost) a zjišťuje, že toto pojetí je odrazem celkového světového názoru.

Jeden z hlavních problémů filosofie vědy, totiž problém *vztahu mezi logikou a matematikou* je předmětem další kapitoly. Autor nejprve analysuje hlavní logické zásady: princip identity,

JČMF

OTAKAR V. ZICH

ÚVOD DO FILOSOFIE MATEMATIKY

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ÚVODEM

Filosofií matematiky bývá obyčejně označován velký a značně nesourodý souhrn různých problémů a otázek, které mají společné často pouze to, že nějak souvisejí s matematikou. Studují výroky o matematice. Nejsou tedy matematikou a problémy i otázky tam nadhozené nebývají řešeny matematickými methodami. Aspoň ne výhradně. Neleží totiž už ve vlastním oboru matematiky, také však ne, jak se rádo uvádí, kdesi na jeho hranicích, nýbrž zaujímají k matematikovu myšlenkovému světu postavení jiné — pohled z jiného rozměru.

Otázky a problémy, jež sem patří, vznikají tak, že se ptáme po obecné povaze matematické methody, po povaze předmětů, jimiž se matematika zabývá, po vztazích mezi matematikou a vědami jinými, jež mohou matematiku ovlivniti, anebo jež mohou z matematiky čerpati.

Řešení nebo odpovědi na otázky jsou pak většinou závislé na povaze filosofické soustavy, jež je rámcem pro povahu odpovědi. Tato zvolená filosofická soustava také vnese, nebo má vnésti řád do nesoustavného souhrnu matematické problematiky (jak jsme nahoře úmyslně řekli). Mnoho z takových otázek však uvnitř soustav filosofických řešeno nebylo, otázky dosud čekají na odpovědi; konečně jsou jistě i takové, na něž patrně odpovědi vůbec nebudou. Než i ty nepostrádají zajímavosti a přitažlivosti — možná, že otázky jsou nevhodně kladeny nebo aspoň vyjádřeny, možná také, že mnohé nemají vůbec smysl a odpovědi tedy cenu, že jde o otázky a problémy *zdánlivé.*

Není možno v tomto spisku, jenž má orientační povahu, projednati podrobněji, co zajímá filosofii vůbec a získati tak rámec pro zvláštní úvahy, jež nás budou zaměstnávati. Toto stanovisko by bylo možno zaujmouti, kdyby nebylo rozporů o tom, má-li filosofie vůbec právo do věci nějak rozhodujícím způsobem co mluviti. Situace je však horší. Byly a dosud jsou vědecké směry, které by význam filosofie pro jakoukoli vědu zásadně odmítly. Jsou toho názoru, že každá věda se stačí uvnitř svého vlastního organismu vypořádati se vším, co se v ní samé vynoří anebo co se objeví stykem s jiným vědeckým odvětvím. Než ani tyto myšlenkové směry, v nedávné době velmi důrazně hlásané (novopositivismus vídeňské školy z let před druhou světovou válkou a s ním související směr pro sjednocení vědy, příbuzné směry v polských a severoamerických myšlenkových proudech), neobejdou se bez vyšetřování problémů *obecně* položených. Problémy takové týkají se pak methodologie těch oborů samých a otázek, jež se vnucují ze styku vědeckých a technických odvětví. — Nuže, takových záležitostí lidského ducha všímala si filosofie již odedávna.

Nechuť a namnoze oprávněná nedůvěra k filosofii pramení v něčem jiném. Některé dějinně významné filosofické směry si získaly špatnou pověst v odborných vědeckých odvětvích; nebyla to jen matematika, jež byla nevhodnou kritikou filosofickou často postižena (nedůvěra k rozvoji infinitesimálního počtu), nebo theoretická fysika (živá filosofická a někdy laicky naivní odezva v prvních údobích theorie relativity) ale i vědy methodou zcela odlišné, jako třeba dějepis. Taková filosofie chtěla na podkladě svých velmi obecných směrnic strhnouti jednotlivé vědy pod svoje vedení a ve smyslu těchto směrnic předpisovati po stránce předmětu i methody. Naprostý nedostatek ohledu k tomu, jak věci jsou, měl býti nahrazen důsledky obecných theorií, jak věci mají být. Samostatně pracující vědecká odvětví na štěstí ve většině případů na filosofický diktát nedbala a rozvíjela se často zcela jinak, než vyspekulovaná filosofická směrnice předpisovala, ba dokonce mnohdy v přímém odporu k takovému předpisu. Protože pak mělo to vědecké odvětví *výsledky*, byla fiolosofie eo ipso odsunuta ze zájmu, jemuž se ještě bohatě těšila v dobách předchozích.

Filosofie, jak se na ni díval starověk, v jeho duchu doba renesance a dobré směry novodobé, by měla míti povahu nauky pořádající. Protože může objímati všechna vědecká odvětví, má možnost býti soustavou *nad* soustavami. Není důvodu, proč považovati úlohu filosofie v tomto směru za skončenou. Chceme-li se zabývati obecnými otázkami a problémy, jež byly již naznačeny, můžeme takové uvažování nazvati filosofickým, při čemž máme ještě tu výhodu, že krom bohatého myšlenkového materiálu a techniky toho vědeckého odboru, který zkoumáme, je tu ještě možnost, uchýliti se k myšlenkovým cestám, jež filosofie jako úctyhodně starobylá disciplina již dávno vyzkoušela. Neučinila-li tyto cesty schůdnými, pak dala k nim alespoň varovné tabulky.

Řekli jsme již na počátku, že půjde o pohled z jiné dimense. Co tím asi je míněno, může ukázati malé přirovnání, jež ovšem jako každé přirovnání nemůže vystihnouti vše: Cestuje-li čtenář v nějaké zemi, může projeti všechny dopravní spoje té země, poznati osobitý život jednotlivých tratí, obchodní i průmyslové zvláštnosti, jež dávají ráz každé té dopravní spoji. Nebude-li míti dosti představivosti, budou vědomosti, jež si získal, spoustou *souřadných* fakt; chceme-li to hodně drasticky vyjádřiti, tato fakta budou ležeti v jedné rovině. Má-li dost fantasie, představí si celou dopravní síť v mapě té země a ihned mu bude jasné a samozřejmé mnoho — z povahy krajů a jejich vlastností, jimiž tyto spoje procházejí. Podívá se, stručně řečeno, na vše, co jako cestující zažil, s ptačí perspektivy. Řád v dopravě, *nové* možnosti a spoje jsou tak názorně patrné. Ale nejen to, bude patrno i mnohé, co z individuelního života jednotlivých tratí na první pohled vysouditi nelze — vztahy k druhým zemím a tedy ještě s jiného hlediska osvětlené možnosti.

Odborník v jistém oboru se někdy trochu podobá odborníkovi na některé trati, totiž na té „jeho". Bez tohoto odborníka, jenž ovládá do nejmenších podrobností provoz své linky, by to ovšem dobře nešlo. Národohospodář, politik anebo technik, jenž uvažuje o dopravě s hlediska celostátního, musí se však umět podívat právě s ptačí perspektivy. Je tedy potřebí obou.

Pohled se shora, uvědomění si vztahů v celku pohledem z jiného rozměru, jest nezbytnou podmínkou filosofického pohledu. Chceme-li, tedy i v pokusech škol novopositivistických, jež směřovaly k „jednotě vědy" a k tomu cíli vypracovaly methody nové i osvěžily methody staré, můžeme viděti snahu po sjednocení jednou methodou, snahu, již můžeme považovati za snahu filosofickou.

Ale nehledíme-li k tomu všemu: byly, jsou a budou otázky a problémy, jež lidstvo zajímaly a to nejen v oblastech zkušeností ethických, sociologických a náboženských, ale i v oboru ryzího myšlení, takové, které si lidstvo navyklo nazývat věčné. Jsou již tím zajímavé, jak která doba si na ně dovedla odpovědět. A takové otázky a problémy odedávna luštila filosofie.

Je-li vědou v obvyklém slova smyslu, je těžko říci. Methody, jichž užívá, musí však míti to společné s každým jiným vědeckým odvětvím, aby totiž výsledky jejich byly každým ověřitelné. Filosofie nepřináší pravidelně výsledky, jichž by bylo možno použíti v praxi ihned — usiluje spíše o řád v myšlení, i když často cestami zdánlivě nebo dokonce skutečně protichůdnými. Nutno si však uvědomiti, že namnoze to byly filosofické pohnutky, plynoucí z jasného poznání stavu věcí, jež vedly k přeměnám struktur lidských společností, k změnám orientací a k novým pohledům. Český filosof Karel Vorovka charakterisoval krásně úlohu filosofie, aby lidskému duchu otvírala nové stupně volnosti.

Může býti filosofie odborné vědě něco platna? Místo odpovědi uvedeme raději několik příkladů, kde filosofie a matematika, která nás tu zajímá, se vzájemně ovlivnily podstatným způsobem. Je při tom zajímavé, že výsledky těchto vzájemných vlivů patří k nejkrásnějším objevům matematiky. Filosofie se již dávno zajímala o problém, je-li matematické a logické myšlení na sobě závislé, a do jaké míry. Zejména ostře je tato závislost vyjádřena, položíme-li si úlohu: je matematika odvoditelná z logiky nebo ne? Podnět takto daný vedl k monumentálnímu dílu Russelovu a Whiteheadovu (Principia mathematica) v prvním desítiletí našeho století. Ukázalo se, že až na dva principy, jimiž se budeme později zabývati, lze matematiku z logiky odvoditi.

Ve vědeckém odporu k jistým důsledkům Kantovy filosofie a jeho názoru na tehdejší geometrii (euklidovskou) vznikly geometrie neeuklidovské (Lobačevský).

Logická paradoxa, o nichž si také promluvíme, případně antinomie myšlení, jež signalisovaly vždy, že někde není něco v pořádku, měly svůj původ již u řeckých sofistů. Ti již také dobře věděli, že logický paradox zaviní často slovná formulace. Ve spojení s novými paradoxy, jež se objevily během výstavby moderního odvětví matematiky, theorie množin, bylo tu dosti mocných podnětů, aby se zkoumaly vyjadřovací prostředky řeči, její únosnost, a výsledkem byly soustavy umělých řečí, přesných a spolehlivě pracujících, v nichž se již paradoxa nevyskytnou.

Jaký to má význam pro matematickou theorii, je patrno z toho, že takové paradoxon může podminovati sebe duchaplněji zbudovanou theorii. V této situaci byla jednu dobu theorie množin.

Konečně celá theorie množin vznikla, jak doznává její zakladatel, G. Cantor, jako výsledek jeho reakcí na středověkou scholastickou filosofii, kterou se hojně zabýval.

Filosofie však může na druhé straně ochladiti matematiku, jistou svým úspěchem a příliš rozohněnou. V době velkolepého rozvoje počtu pravděpodobnosti ve Francii, v prvé polovině minulého století, se vyskytly pokusy, užíti tohoto počtu k zpracování všech možných oborů, mezi jiným i soudních výpovědí. Jednou z obětí takové aplikace počtu pravděpodobnosti měla býti i Humeova kritika kausality. Kritika tato, velmi stručně řečeno, ústí asi v tvrzení, že nutnost kausálního svazku mezi „příčinou" a „následkem" není nikterak zaručena, ba že není málem více, než jakýmsi druhem pověry. Kritika Humeova byla zdravou odpovědí na některé spekulace středověké filosofie, jež chtěly kausálně vyložit vůbec všechno, a platí i dnes v plném rozsahu. Význam takového střetnutí sil spočívá v tom, že se pak podrobněji počaly zkoumati podmínky aplikability počtu pravděpodobnosti — kdy jsou dány podmínky pro užití tohoto znamenitého nástroje a kdy ne.

V celku snad již nebude dále nutno se zabývati slovem „filosofie" s přívlastkem „matematiky" — půjde nám v dalším o rozhovor o některých závažných záležitostech matematiky a to s hledisek, jež jsou v běžné matematické praxi méně obvyklá. Kdo by nechtěl uznati takové úvahy za filosofické, může se spokojiti tím, že jsou to úvahy z methodologie matematiky a jejích vztahů k celku lidského myšlení. Proto také nebudu *úmyslně* spisek zatěžovati výpočtem a jemným odlišováním filosofických škol, nýbrž pokusím se mluviti o věcech, t. j. předmětech matematiky a methodách, jež ji samu zajímají. Není to tedy učebnice filosofických směrů. Nemůže to však také býti důkladné prohovoření všech otázek, jež do našeho oboru spadají. Důvod je v tom, že některé v nich nelze v populárně psaném spisku bez dokonalé technické přípravy projednávati vůbec a další v tom, že při výběru vždy rozhoduje osoba pisatelova.*)

*) Za některá upozornění, týkající se dalšího textu, jež vedla k zlepšení výkladu, děkuji na tomto místě panu RNDru Mirosl. Katětovovi.

RICHARDOVA ANTINOMIE

„Hledejme nejmenší číslo celé, jež nelze definovati souborem slov, obsahujícím méně než jedno sto českých slov. Existuje takové číslo?"

A) Takové číslo existuje, protože zásoba vyjadřovacích prostředků české řeči není nevyčerpatelná, slovník české řeči je přece jen kniha nebo řada svazků. Proto je také konečný počet souborů slov, jež obsahují předepsaný počet slov, na př. 56 slov. Mysleme si nyní shrnuty všechny takovéto soubory o předepsaném počtu slov (od 1 do 99 slov), těch bude také konečný počet. Mezi všemi těmi soubory budou i výrazy, t. j. takové soubory slovních znaků, jež označují nějaký předmět; bude jistě mnoho takových výrazů, jež s definicí čísla nemají nic společného. Některé však, na př. výraz „nejmenší prvočíslo tvaru $8k + 1$" (t. j. 17) definují celá čísla. Protože všech souborů je konečně mnoho, je tím spíše i výrazů, definujících celá čísla, konečně mnoho a tedy musí býti i taková čísla, jež našimi soubory, resp. výrazy mezi nimi obsaženými definovati nelze. A mezi těmi je jedno a jen jedno číslo celé nejmenší.

B) Takové číslo neexistuje. Kdyby existovalo, bylo by definováno výrazem o menším počtu slov, než jedno sto slov: přímo výrazem z věty postavené v čelo tohoto odstavce. Tato věta však říká pravý opak.*)

Přemýšlíme-li chvíli o věci, zmocní se nás nepříjemný pocit, že tu není něco v pořádku, zatím je těžko říci kde.

*) Příklad je nepatrně pozměněnou formou antinomie, jak ji uvádí Poincaré: Dernières pensées, str. 103. Řešení Poincaréovo neuvádím, na svém místě uvedu řešení jiné.

Příklad, jejž jsme uvedli, vypadá na první pohled velmi prostě a nezáludně. Nejedná se ani o nekonečném souboru, u kterého vždy můžeme býti na nějaké překvapení připraveni. Úvaha, provedená v bodě A) se zdá býti zcela v pořádku. Úvaha B) je však ve své stručnosti neméně přesvědčivá.

Pro nás bude Richardova antinomie východiskem k prvímu rozhlédnutí po celé oblasti myšlení, jež nás bude zaměstnávati. Všimneme si teď několika momentů.

Slovní vyjádření. Richardova antinomie je vyjádřena slovy — tím se její myšlénková struktura sděluje. Každá myšlenka nepotřebuje slovní vyjádření, také každá struktura nepotřebuje slovní vyjádření. Při tom to mohou býti myšlenkové struktury velmi složité. Tak třeba celé hudební myšlení skladatelovo, značně abstraktní ve své povaze, nebo výtvarné myšlení malířovo. Nejde nám teď o to, je-li možno takové myšlení slovy popsati nebo ne, ale o zásadní zjištění, je-li té slovní formulace nutně třeba. Matematické myšlení tohoto slovného vyjadřování užívá napořád, nestačí-li historická řeč požadavkům přesnosti a ekonomie, doplní se značkovou řečí umělou nebo vůbec jen značkovou řečí. Není původ antinomie v ošemetném slovním vyjádření?

Předměty. Každý matematický myšlenkový pochod, tedy i naše antinomie, se zabývá nějakými předměty myšlení. V antinomii jsou těmito předměty myšlení čísla (jež prozatím bez bližšího vyšetření béřeme jako předměty známé z běžné početní praxe), definice čísel, pak nějaké soubory takových definicí. Ale ovšem mluvíme také o větách, jež pro definici čísla mají smysl, jež smyslu nemají. Mluví se tam také o výrazu „konečný”. Předměty myšlení však mohou býti i jisté vlastnosti, na př. že všechna čísla definovaná souborem přípustných vět patří k sobě, aby se mohla odlišiti od čísel jiných, kde hledáme ono nejmenší číslo. Fakt, že ta čísla shrnouti lze, je také předmětem myšlení. Každý vztah, na př. okolnost, že to má býti *nejmenší* číslo, je *také* myšlenkovým předmětem.

Není některý z těch předmětů, o nichž mluví Richardova antinomie, špatně určen, není vůbec sporný — je-li, co je to sporný předmět?

Logika. Úvaha A) i úvaha B) patří, jak jistě každý nahlíží, do oblasti logiky. V matematice hraje logika *podstatnou* roli, ba, byl, jak již víme, učiněn pokus, vybudovati celou matematiku jako větev logiky.*) Není obtíž antinomie v tom, že logika nějak selhala, že nestačí na zvládnutí duchů, jež vyvolala? Velmi často se slýchá, že stará logika musí být nahrazena novou. I to si musíme v plném rozsahu objasniti. Uvidíme, že tak špatně stará antická logika nedopadla — byla jen jistým způsobem rozšířena a zobecněna.

Řešení Richardovy antinomie teď hledati nebudeme. Svoji službu vykoná tím, že nám dá první podnět k rozhodnutí, jíti věcem trochu více na kloub, uložiti je do širšího prostředí, kde je lepší přehled a kde funkce a souvislosti jsou lépe patrné.

*) Frege koncem minulého století, Russell a Whitehead v prvním desítiletí našeho století.

SLOVNÉ VYJÁDŘENÍ

První, čím se budeme zabývati, bude vyjádření myšlenek v slovném tvaru. Matematika se zabývá myšlenými předměty, vztahy těchto předmětů a důsledky, jež plynou ze studia těchto vztahů. Toto vše musí nějak spolehlivě vyjadřovati. O mnohých předmětech matematiky lze sice přemýšlet bez slovní formulace, avšak úvahy je nutno nakonec slovně vyjádřiti, ať již s použitím značkové řeči nebo bez ní. V tomto tvaru se také dostávají do rukou čtenáře, v definitivním tvaru, jenž jim je dán promýšlejícím matematikem. Řeč, jako výsledek historického vývoje tohoto sdělovacího prostředku není jen prostředkem sdělování pojmů, ba lze říci spíše, *není vůbec zaměřena k logickým potřebám* přesného myšlení. To věděli umělci, tvořící v tomto materiálu, dávno dříve, než k těmto závěrům došla moderní psychologie a jazykověda. Neobyčejně veliký aparát historické řeči, jenž byl obohacován hlavně z podnětů citových a volních, je znamenitě uzpůsoben pro tvorbu básníkovu, pro tvorbu umělcovu. Dovede navoditi citové stavy zvláštním oparem, jenž je vyvolán vědomými i podvědomými asociacemi, vážícími se na slova. Mnohá z nich mají vůbec význam nejasný a zřetelně ukazují stopy toho, kdy funkce slov byla mnohdy spíše mystická anebo aspoň symbolická. Mnohoznačnost a neurčitost spolupůsobí také značně. Pojmenování dvou naprosto různých předmětů tímtéž slovem jest známé, je však někdy obtížné, skutečně takový dvojí význam analysou prokázati.

Spolehlivost řeči pro naše účely by se dala asi takto vyjádřiti: mějme na mysli nějaké předměty, jež označíme A, B. Nechť tyto předměty myšlení jsou vázány vztahem R, takže platí ARB. Vyjádření řečí bude tehdy spolehlivé, bude-li předmětu A odpovídati slovná skupina A′, relaci R slovná skupina R′ a konečně předmětu B slovná skupina B′. Při tom skupinám A′, B′, R′ musí jednoznačně odpovídati předměty A, B, R a naopak a dále, vazba skupin A′, B′ skupinou R′ platí tehdy a jen tehdy, jsou-li předměty vázány relací R.*)

Jak patrno, jde o jistý druh zobrazení myšlených předmětů na značky, jež těm předmětům odpovídají v řeči.

K spolehlivosti tohoto druhu se dopracovaly až moderní značkové řeči většiny oborů soudobé matematiky. Neschopnosti řeči, vyhověti přesné funkci logiky, vezmeme-li řeč tak jak je, si byli dávno vědomi Řekové. Nebude na škodu, uvedeme-li si tu několik logických paradox z té doby; poznáme na nich lépe funkci řeči a zúročí se nám ještě později.

1. První příklad pochází od Eubulida, popírá existenci „hromady" asi takto: hromada nemůže vůbec vzniknouti — nevíme, *kolik* zrnek bychom měli shromážditi, aby utvořila hromadu.

V podstatě tentýž kritický postřeh je obsažen v anekdotické formě, kterou Řekové rádi paradoxa odívali, v paradoxu „holohlavého" (Calvus): Kolik vlasů musí vypadnouti, aby člověk byl holohlavý?

Slova jako shluk, hromada a j. mají v běžném životním užití zcela jasný význam, chceme-li jich užíti v dorozumění. Takové slovo má určitý asociační „opar", ale

---

*) Formulaci by bylo možno provésti obecněji, neučiním tak proto, že nemáme ještě dostatek symbolických prostředků. Uvedená formulace postačí zatím, protože relace R není vázána žádnou omezující podmínkou.

nemá přiřazení k přesně určitelnému myšlenkovému předmětu, jenž by mu odpovídal.

Matematika, lze namítnouti, ovšem takových slov neurčitého významu neužije. Uvidíme však, že přece: Cantorova zdánlivá definice množiny, jednoho ze základních pojmů moderní matematiky, není příliš vzdálena od těchto „oparových" formulací a také se špatně osvědčila: stala se pramenem paradox, kterým zabránila až korektní definice axiomatická.*)

2. „Lhář", pocházející také od Eubulida: Kréťan Epimenides tvrdí, že Kréťané lhou. Mluví pravdu nebo lže?

a) Mluví pravdu: pak však popírá to, co říká jako *obecnou* větu, v jejímž oboru platnosti by také on sám musil být (se *svým* vlastním lhaním).

b) Lže: pak však mluví pravdu — neboť Kréťané tedy nelhou a on sám, jako jeden z nich, tedy také ne.

V tomto příkladě přichází mimo jiné také důležité slovo — pravda. Co znamená, že výrok je pravdivý, co znamená, že pravdivost matematických vět je povýšena nad vší pochybnost, jak se rádo tvrdí? Uvidíme později, že pravdivost, tak jak my ji budeme potřebovati pro matematiku, nespočívá tak v nějakém souhlase se skutečností, jehož se skoro vždy musí dovolávati pravda v občanském slova smyslu, nýbrž v zákonitosti mechanismu, jímž jsou matematické věty vázány na své předpoklady, jež jsou jejich východiskem. Obecně vzato, je otázka pravdivosti výroku vůbec jednou z nejtěžších, které lze položiti.

---

*) Cantorova definice, jež byla později předmětem mnoha kritik, vedoucích k vyjasnění pojmů theorie množin, zní: Pod množinou *M* rozumíme „shrnutí určitých dobře rozlišených předmětů svého názoru anebo svého myšlení (jež se nazývají elementy množiny *M*) v celek".

Abychom se vrátili k paradoxu: Kréťan, *který vyslovuje svůj úsudek o druhých,* je v slovním vyjádření buďto lhář, nebo pravdomluvný člověk. Pozor však na jednu okolnost: ať již mluví Kréťan pravdu nebo lež, zaujímá vůči *všem ostatním* kritické stanovisko, je snad lhářem *nad* lháři, v každém případě je posuzuje. Kritické stanovisko, jež zaujal ke svým spoluobčanům, ho vylučuje z kolektiva, jehož byl členem, a staví ho nad ostatní. Tato okolnost nás bude zajímati dále v theorii logických typů. Tu je nutno jen konstatovati, že řeč nevyhovuje svému účelu, protože *zvláštní postavení* Epimenidovo se vyjádřením, že může býti lhářem nebo pravdomluvným občanem, nijak neprojeví — a v tom je právě pramen paradoxa.

Paradox Kréťana zdánlivě vůbec nesouvisí s matematikou, a přece se v tolika různých obměnách Kréťan v matematice objevil. Vrátíme se k němu, až budeme mluviti o definicích „bludným kruhem" (circulus vitiosus) v theorii typů později.

3. Zajímavá je ještě tato moderní forma paradoxa Grelling-Nelsonova, jež bylo podnětné pro studium problémů theorie množin i theorie řeči. Jsou slova, jež patří pod pojem, jejž sama označují — tak na př. slovo „abstraktní" pod pojem „abstraktní". Jiná slova, na př. již slovo „konkrétní" patří tamže, jako předchozí, tedy nepatří samo pod pojem, jejž označuje. Nazveme všechna slova, jež patří pod pojem, jejž označují, slovy autologickými. Ostatní slova nazveme heterologická. Uvažujme teď, kam patří slovo „heterologický", Je-li heterologické, pak patří pod pojem, jejž samo označuje, a je tedy autologické. Autologické býti nemůže, protože jeho korespondující pojem je „heterologičnost". Tedy zase spor.

Všimněme si obdoby s paradoxem o Kréťanovi, jež není ihned patrná. Kréťan, pronášející soud o ostatních Kréťanech, *posuzuje* jejich výpovědi, jak jsme si řekli. Výraz „autologický" nebo „heterologický" je *klasifikačním* posudkem o všech možných ostatních výrazech. Tento klasifikační posudek má, obdobně jako v antinomii Kréťana, vyšší stupeň než kterýkoli výraz, jenž patří do skupiny, již si tento termín vytvořil (shrnul). Je to jen nedostatečnost naší řeči, jež klade řádově vyšší výrazy do jedné roviny (obrazně řečeno), se všemi ostatními termíny a zachází s nimi jako s výrazy souřadnými a nikoli nadřazenými.

Nedostatečnost slovního odlišení ve vyjadřování ukážeme na dvou dalších příkladech, jež se již přímo týkají matematiky.

Jedním ze základních předmětů geometrických je přímka. Řecká geometrie měla trochu jiné pojetí čar vůbec, než novodobá matematika. Řekové chápali čáry jako *celky*, tedy nikoli jako bodová kontinua, ke kterým došla matematika až v době analytické geometrie Descartesovy. Je ovšem pravda, že také pro řeckou matematiku ležely na čarách body, zejména tehdy, když tyto body byly považovány za průsečíky čáry s nějakou jinou. Pro řeckého matematika byla také čára, zejména tedy úsečka, dělitelná: rozdělitelná v menší části — úsečka tedy v libovolné množství velmi malých úseček. Ale toto dělení v menší části nebylo nekonečné, úsečky, byť sebe kratší, se neredukovaly až na body. V tom je patrný *finitistický* rys řecké matematiky, jenž byl později vystihován výrazem „potenciálního nekonečna". Finitisté v matematice, kteří uznávají jen takové „potencionální nekonečno", uznávají v matematice pouze takové věty o nekoneěnu, jež lze vyjádřiti větami, obsahujícími výroky o konečnu. Nemá tedy pro ně smyslu na př. výraz „nekonečně malé číslo", výraz, kterého hojně užívala matematika v době prvého rozvoje infinitesimálního počtu, nýbrž pouze „číslo menší než libovolně malé předem dané číslo ε". Odstranění záhadných „nekonečně malých čísel", o něž byly vedeny také filosofické spory, je zásluhou zakladatelů moderní analyse, Cauchyho a Weistrassa, kteří vytvořili novou ε-dialektiku analyse. Pojetí přímky ve smyslu analytické geometrie vede naproti tomu k uznání „aktuelně nekonečně mnoha" bodů, z nichž se přímka skládá. Tyto body jsou v přímce nebo na přímce přítomny všechny, nehledají se teprve jako průsečíky při konstrukci a tvoří bodové kontinuum. Body jsou tu prvky, na něž je kontinuum možno rozanalysovati, v opaku k pojetí řeckému (také pojetí synthetické euklidovské geometrie), kde bylo možno dojíti až k úsečce, ovšem libovolně krátké. První pojetí přímky, obvyklé v klasické synthetické geometrii, i druhé pojetí přímky (pojetí analytické geometrie), se od sebe nijak neliší slovním výrazem — pro obojí máme totéž pojmenování. Záleží tedy na souvislosti, v níž se výraz „přímka" vyskytuje, pojmově jde o značně různé předměty.

Druhý příklad, ke kterému se později vrátíme ještě v jiné souvislosti, se týká reálných čísel. Protože logickou theorií celých čísel se budeme podrobněji zabývati na svém místě, spokojíme se tu zase znalostí celých čísel z početní praxe. Vedle celých čísel jsou čísla racionální, vyjádřená ve tvaru zlomku. Tato čísla již nejsou pojmově na téže rovině jako čísla celá. Jsou konstrukcemi z čísel celých. Ještě nápadnější je to však u čísel iracionálních, která také patří do reálných čísel. Iracionální číslo je určeno na př. t. zv. Dedekindovým řezem; myšlenku tohoto řezu navodila jistě početní praxe, vystihnouti iracionální číslo s možnou přesností, což byl postup známý také již v antické matematice. Takové číslo iracionální je určeno tak, že rozdělíme všechna čísla racionální ve dvě skupiny: v první skupině jsou všechna čísla racionální menší než ono číslo a při tom v této skupině není číslo největší, obdobně stanovíme druhou skupinu, v které jsou všechna racionální čísla větší než ono iracionální a kde zase není číslo nejmenší. Iracionální číslo je těmi dvěmà skupinami jednoznačně stanoveno. Je tedy určeno logicky dokonce množinami racionálních čísel, jež nemají ani konečný počet elementů. Přesto ten myšlenkový předmět nazveme zase ‚číslo', právě tak jako číslo racionální nebo celé. Homogenity, jež se nám zdá v souboru všech těch druhů čísel tak zřejmá, se dociluje společným sugestivním pojmenováním — s počátku neprávem. To je patrno z toho, že platnost základních početních pravidel pro reálná čísla, definovaná Dedekindovým řezem, se musí v každém úvodu do analyse *znovu* prokazovati. Teprve tehdy, když platí pro všechna reálná čísla stejná početní pravidla, máme právo, dívati se na jejich soubor jako na soubor se stanoviska početních pravidel homogenní — teprve tehdy jsme se přiblížili rovnoprávnosti všech čísel, již mají body přímky, které často číslům reálným přiřazujeme. Vyjdeme-li v konstrukci bodového kontinua z čísel celých, pak nelze toto kontinuum se stanoviska konstrukce druhů čísel, jež v něm přicházejí, považovati za homogenní.

V obou příkladech šlo jen o to, ukázati si, že stejné pojmenování nemusí vždy, ani v matematice, znamenati tentýž předmět, ba, že může jíti o předměty značně odlišné — právě tak jako v paradoxu o Kréťanovi, kde autor kritiky mohl být lhářem slovně stejně označeným jako oběti jeho kritiky. Pochopíme teď důvody, jež vedly k důkladné revisi vyjadřovacích prostředků řeči. První náběh k vytvoření přesné řeči spočívá v tom, že matematik pro pojmy, v nichž myslí, vytvoří vhodné a během téže úvahy neměnné popisy, jež pojmům odpovídají. Tyto popisy zaručují, že do charakteristiky pojmu se nevloudí během úvahy něco nového, co tam původně nebylo. V tom směru již byla klasická řecká geometrie na úrovni vynikající.

Dalším krokem k zpřesnění a zjednodušení je náhrada složitých slovních svazků popisných symbolickými značkami, jež se počala soustavně prováděti po prvé v oboru algebry. Značka je ovšem neměnná, nepodléhá ani změnám tvarovým, jimž jsou podrobena slova historických řečí. Značka je pak zkratkou za určitý slovní svazek, je jednoduchá, přehledná, a je možno touto značkou na papíře velmi lehce pracovati.

Abychom docílili poučného srovnání pro stenografickou výkonnost moderní matematické značky vzhledem k staršímu způsobu slovného popisu, uveďme si tu v plném znění text jisté duchaplné methody francouzského matematika 17. století, Pierre Fermata (45. poznámka Fermantova vydání Diofanta): „L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré. Je vais donner la démonstration de ce théorême que j'ai découvert, je ne l'ai pas trouvé au reste sans une pénible et laborieuse méditation, mais ce genre de démonstration conduira à des progrès merveilleuses dans la science des nombres. — Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait 2 bicarrés dont la différence serait un carré; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés, dont la somme et la différence seraient des carrés. Par conséquent on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés qui servent à le composer soit également un carré. Mais si un nombre est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis preuver sans difficulté. On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composant formera la base et le double de l'autre carré la hauteur. Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera, que la somme de ces deux carrés est plus petite que celle des deux premiers, dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés. Donc si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même en nombres entiers deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure. Par le même raisonnement on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfinement on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petites." Potud Fermat. Co do přesnosti vyjadřování si nelze zajisté více přáti, srovnáním s nynějším způsobem podání téže látky si ujasníme výkonnost značkového zápisu.

Základní rovnice pro pythagorovský trojúhelník zní: $x^2 + y^2 = z^2$. O číslech x, y, z můžeme předpokládati, že nemají společného činitele, pak je také jen jedno z čísel na levé straně rovnice sudé. Řešení rovnice podávají indické formule pro pythagorovské trojúhelníky v této formě:

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2;$$

m, n opět nesoudělná.

Obsah trojúhelníka je tedy $mn \cdot (m^2 - n^2)$ a ten má býti čtvercem. Pak musí býti jednotlivé činitele tohoto součinu čtverci a to

$$m = a^2, \quad n = b^2, \quad a^4 - b^4 = c^2,$$

čili podle poslední rovnice

$$(a^2 - b^2)\,(a^2 + b^2) = c^2.$$

Oba činitelé napravo jsou zase nesoudělní, jak je snadno patrno, takže platí

$$a^2 - b^2 = p^2, \quad a^2 + b^2 = q^2$$

a z těchto dvou rovnic dostáváme

$$p^2 + 2b^2 = q^2.$$

Rozložíme-li levou stranu rovnice v činitele

$$(p + ib\sqrt{2})\,(p - ib\sqrt{2}) = q^2,$$

pak musí činitelé nalevo opět býti čtverci čísel stejného tvaru, t. j.

$$(p + ib\sqrt{2}) = (r + is\sqrt{2})^2$$

a podobně pro $(p - ib\sqrt{2})$. Potom však

$$p = r^2 - 2s^2, \quad b = 2rs,$$

kde opět r, s jsou nesoudělná. Z rovnic předchozího odstavce však následuje

$$a^2 = p^2 + b^2 = r^4 + 4s^4.$$

Existoval by tedy nový pythagorovský trojúhelník o stranách a, r^2, $2s^2$, jeho obsah by byl zase čtvercem (r^2s^2), ale strany by byly menší než v trojúhelníku původním. Stejným závěrem bychom došli k trojúhelníku ještě menšímu, atd., což jest zřejmě nemožné, jsou-li strany všech těchto trojúhelníků *celá* čísla.

Důkaz, který byl uveden ve tvaru nyní obvyklém, pochází v podstatě od jiného znamenitého francouzského matematika Legendra. Časový rozdíl mezi oběma důkazy není, vzhledem ke stáří matematiky, tak veliký, rozdíl mezi daty narození obou matematiků je 151 let.

Z uvedeného příkladu je jasně viděti pokrok, vzniklý zavedním značek, a to jak po stránce úspory, tak také větší přehlednosti. Je to krok dalekosáhlého významu pro studium matematických děl. Nynější složité a smělé konstrukce v některých oborech matematiky by snad nebylo ani možno bez zavedení značek popsati — a kdyby, spotřebovalo by se na několikastránkovou studii papíru na celou knihu. Toto praktické stanovisko jen zdánlivě nesouvisí s matematikou jako oborem myšlení, mohlo by se zdát lhostejné. Matematika však právě v technickém užití má tak velké úspěchy, že ani toto praktické stanovisko nelze podceňovati.

Je tu však ještě hlubší důvod další, nemluvíme-li již o zvětšené přesnosti, ani o zlepšení záznamu ve smyslu stenografie. Je to *objevitelská* cena značkového záznamu. Vztahy značek a tím vztahy jim přiřazených předmětů je možno mnohem snáze nalézti a nalezení nových vztahů je právě cesta objevu. Lze míti důvodné pochybnosti o tom, že by se bylo bez použití značek podařilo najíti hlubší formální podobnosti; na př. obdoby, jež jsou vyjádřeny jistými parciálními diferenciálními rovnicemi v různých oborech theoretické fysiky.

Nové technické pojmy matematické, jako symetrie rovnic nebo jejich soustav, jsou vázány svým vznikem na značku. Zdá se, že není příliš smělé, tvrdíme-li, že bez zavedení značkového systému v matematice bychom byli ne o mnoho dále, než je dnešní látka probíraná ve středoškolských učebnicích dosavadního rázu.

Velkou výhodou značek je dále, že určitý svazek jejich, jenž se podle povahy věcí nemění během téhož vyšetřování, je možno shrnouti v značku jedinou, snadno tak přecházíme k definici nového předmětu. Velmi často takové nové pojmenování, neboť to vskutku není nic jiného, umožní nový objev a užitím nové značky se matematická řeč obohacuje ve výrazových prostředcích.

PŘEDMĚT MATEMATIKY

A) *Předmět matematiky je podmíněn programovými úlohami.*

Abychom poznali, do jaké míry se projevují praktické úlohy, kladené matematice v pokroku této vědy, promluvíme si o dvou údobích, klasickém a potom novodobém, jež jsou v tomto směru velmi poučná. Připomínáme výslovně, že nejde o historické zhodnocení všeho, co je pro udaná období význačné, ale o jisté pohledy, jež mají pro nás v dalším svůj význam.

Starověká matematika, na příklad geometrie egyptská i geometrie řeckých matematiků doby před Euklidem, čerpala mnoho z praktických potřeb. Předměty, jimiž se zabývala, byly z převážné většiny nejen *myslitelné,* ale, co je důležité, také *představitelné;* byly názorné povahy. Není také divu. Úlohy vznikly z takových podnětů, jako proměřování pozemků, staveb, jednoduchých ornamentů k účelům ozdobným a pod. Jde vždy o vyšetřování vztahů úseček, kruhových oblouků, jednoduchých křivek, jež lze kresliti. Jakkoli složité jsou geometrické úvahy, lze je vždy konstrukcí podepříti — lépe řečeno — konstrukcí na místě řešiti. Úvahy lze tedy pohodlně přehlédnouti, ponecháme-li si k tomu dostatek času. Obvykle nejde než o konečný počet předmětů, jež jsou ve hře, a v důsledku toho také o konečný počet vztahů, jež se mezi elementy úlohy naleznou, protože také myšlenkových operací, jimž jsou předměty i vztahy podrobeny, je také konečný počet. Tím jsou také nové předměty finitně konstituovány. Pokud se antická matematika zabývala úlohami, v nichž přichází nekonečný počet operací, pak to bývají úlohy takové, kde celý souhrn tohoto nekonečného množství operací lze jedním pohledem přehlédnouti. Příkladem pro takovou úlohu je důkaz nesouměřitelnosti strany čtverce a jeho úhlopříčky, kde jistý obrat se monotonně opakuje, nebo úloha aproximační, jakou bylo vyjádření délky kruhového oblouku délkou obvodu vepsaných i opsaných mnohoúhelníků, výpočet obsahu parabolické úseče a j. Monotonní opakování jistého konstruktivního obratu umožňuje právě ono přehlédnutí celého postupu jedním pohledem. Úlohy, kde se nelze obejíti bez nekonečného počtu operací, vznikly však až později, kdy již byly základy geometrie dostatečně pevné. Čím se však vyvinulo matematické myšlení, jež vyšlo od určitého praktického proměřování? Tam totiž také v podstatě šlo o úsečky, úhly, průsečíky, které však měly význam jen pro tu úlohu a nic více. Po vykonání měřické práce ztrácely tyto opory úvahy význam. Matematické myšlení šlo dále. Také před ním ležely původně konkrétní obrazce. Jde o to, co zbude, oprostí-li se myšlení od náhodných znaků, jež právě ten a ten obrazec má. Je jasno, že barva, empirická nepřesnost, určitá, zvláštní volba obrazce, jeho velikost, fakt, že úhel je tak a tak ostrý, *nesmí rušit obecné závěry*. Matematik musí míti schopnost, nevšímati si těchto náhodných znaků. Co však zbývá? Zbývají *vztahy* mezi elementy obrazce.

V psychologických úvahách o matematické abstrakci byl již vícekráte učiněn pokus, vyložiti ideální předměty matematické jako abstrakci z materielních nebo nějak idealisovaně představovaných předmětů až k čistému pojmu. Psychologický postup nepostrádá zajímavosti pro výklad genese takových pojmů, ale pro matematiku nemá valného užitku, protože, ať je abstrakce prováděna jakkoli daleko, nelze se nikdy odvrátiti od názorného podkladu. Tento názorný podklad je nesporně mocnou vzpruhou pro matematickou fantasii, ale postrádá logické přesnosti, jíž mohou vyjádřiti jen *vztahy*.

Vrátíme-li se ku geometrickému obrazci, tedy to, co zůstane zachováno vždy, ať je obrazec dobře nebo špatně nakreslen (neuměle), představován jasně nebo méně jasně, jsouť *vztahy* mezi úsečkami, oblouky, body, plochami. Pro matematický rozbor je závažné: přímky se protínají v ostrém úhlu, přímky se protínají pod pravým úhlem, na této úsečce leží tři z hledaných bodů, kružnice je touto přímkou proťata ve dvou bodech. Tyto vztahy jsou něčím neproměnným, něčím, co daný obrazec vždy dostatečně určuje. Vztahy také zůstávají zachovány v jakékoli poloze a nemění se ani názorným pohybem.

Číselné zákonitosti byly v této první době většinou interpretovány geometricky, t. j. podle úseček a ploch. V tom směru postačí si vzpomenouti na věty Euklidovy nebo na větu Pythagorovu (jež vlastně patří do theorie kvadratických forem, jak jsme před nedávnem viděli na indických formulích pro řešení pythagorovské rovnice.). Zlomky byly chápány jako poměry, také většinou v geometrickém pojetí.

Neméně podnětnou službu prokázala matematice fysika. Tak jako praktické úlohy měřické vedly k usoustavění poznatků geometrických a k vybudování vědecké soustavy, tak také úlohy, jež kladla matematice fysika, vedly nejen k obohacení, ale přímo k vytvoření zcela nových method velké nosnosti, jež charakterisují dnešní matematiku.

Promluvíme si tu v nejhrubších rysech o fysikálním programu Galileiho, jenž právě moderní matematice dal největší impulsy. V této době se stává matematika pomocnou vědou pro universální, vše objímající vědu o vnějším světě, o tom světě, který má objektivní, všemi ověřitelné zákonitosti. S tímto přesvědčením, jež bylo podkladem pro novodobý přírodovědecký názor, se počal Galileiho program uskutečňovati a vývoj dal mu za pravdu. Galileiho program je v celku znám: fysikální zkoumání má vyjíti ze zkušenosti (jeho studie kyvu, volného pádu) a pokusiti se o matematickou formulaci fysikální zkušenosti.

Proti starověku a středověku jde o nový, radikálně nový program. Jde o výstavbu objektivního fysikálního světa, jenž má býti tak poznán, aby sloužil cílům lidské práce. Svět kvalit, který nelze objektivně měřiti, musí býti převeden na kvantity, jež je možno vyjádřiti přiřazenými čísly. Tón, barva, teplota, to vše musí býti redukováno na čísla. Výsledky jsou známy. Tón je charakterisován svojí výškou, danou počtem kmitů za vteřinu, jeho zabarvení, tedy vyložená kvalita, je určena spoluzněním svrchních tónů. Intensitu tónu, také kvalitu, lze také číselně vyjádřiti a uvésti do vztahu k energii kmitajícího tělesa a prostředí. Barva, kterou se domníváme viděti mimo sebe někde v prostoru, je vyjádřena příslušnou délkou elektromagnetické vlny, jež zasahuje naši sítnici a v nás teprve budí dojem barvy; objektivně existuje pro fysika, i když je barvoslepý; vlnu zachytí vždy, aspoň fotograficky. Teplotu, také typickou kvalitu, lze uvésti známým způsobem v souvislost s objemovými změnami plynů.

Program, jehož výsledky, dnes běžné, jsme si tu letmo připomněli, neměl v době Galileiho skoro žádné matematické prostředky, kterých si jeho uskutečnění vyžadovalo. Povaha tohoto programu to byla, jež přinutila matematiku k vytvoření celých nových odvětví, chtěla-li své povinnosti jako pomocná věda učiniti zadost. To je patrno na příkladu: fysikální tělesa mohou míti jakýkoli představitelný tvar, dráhy, jež probíhají body takového tělesa v prostoru, mohou býti jakékoli názoru přístupné křivky.*) Pro pojetí tak obecné bylo antickou geometrií připraveno velmi málo. Kromě několika zvláštních křivek, ploch a těles, nebylo patrno, jak vyjádřiti geometricky obecnější útvary. Odtud jde pak přímá cesta k analytické geometrii prostoru i v její diferenciální formě. Aritmetika, jež se tu připojuje ke Galileiho programu zcela souřadně, neomezuje se od této doby na vyjadřování číselných vztahů mezi konkrétními čísly, nýbrž hledá za pomoci symbolického vyjadřování značkami cestu k zachycení zákonitostí obecných. Fysikální vyjádření zákona musí mluviti ve vztazích obecných, ne s *určitou* hmotou, polohou a časem.

Je to zejména zcela nový rys, jenž se dostává do úvah, podnícených Galileiho programem, a to úvahy s nekonečnem. To počíná stále více pronikati, ať již jde o úvahy „v malém", týkající se spojitosti, nebo úvahy o veličinách rostoucích nad všechny meze. I toto vše leželo v programu Galileiho, v programu jeho konstrukce světa: zvládnutí mikrosvěta i kosmu jako celku. Tento celek se tehdy ztotožňoval s Euklidovským trojrozměrným prostorem. Úvahy o nekonečně malém, jak se tehdy říkalo, potřebovalo prohloubené studium spojitosti.

---

*) Matematika zná také křivky, jež leží třeba v euklidovské rovině, a jež si představiti nelze, na př. křivky, odpovídající funkcím, jež nemají nikde derivací (Bolzanův příklad, uvedený v Diferenciálním počtu prof. Petra), nebo třeba známá křivka Peanova.

Na druhé straně třeba formulace základních zákonů mechaniky, jež byla důsledkem nauky Koperníkovy si vynutila výslovné užití předmětu „nekonečně vzdáleného". Pod takovým předmětem rozumíme konstrukci, jejíž oprávnění vysvítalo v klasické mechanice z takovéto úvahy: mysleme si hmotné těleso v pohybu. Změníme-li nepatrně polohy a stavy těles, velmi vzdálených od tohoto tělesa v pohybu, bude jeho pohyb ovlivněn uvedenou změnou tím méně, čím jsou tělesa vzdálenější. Budou-li „nekonečně vzdálena", nezmění se pohyb našeho tělesa vůbec. Právě tak: hmotné těleso setrvá v rovnoměrném přímočarém pohybu, je-li „nekonečně vzdáleno" od ostatních hmotných těles. Zcela podobně bylo zavedeno těleso nekonečně vzdálené v úvaze o elektrickém potenciálu nabitého vodiče. Euklidovský prostor se hodil pro takovéto úvahy a teprve mnohem později, vlivem geometrie Riemannovy se počalo upouštěti od zavedení „nekonečně vzdálených" hmot a počal se soustavně zkoumati prostor finitně ohraničený. (K této věci srovn. Painlévé, Les axiomes de la mécanique, ve sbírce Les Maîtres de la pensée scientifique, str. 45 a násl., zejména str. 54 a násl.)

Strmý rozvoj matematiky, jenž vyšel ze širokého přírodovědeckého programu Galileiho, vedl k jejímu zkloubení a doplnění a také ke stoupající abstrakci. V této poslední fázi, v níž je matematika v dnešní době, vrací matematika často služby, jež jí fysika kdysi prokázala, a stává se pořádajícím nástrojem v úvahách o kosmu jako celku i v úvahách o dnešním mikrosvětě. Velká myšlenka Galileiho se změnila: z původního souřadného spojení pokusu a vyjádření zákonitosti se stává namnoze abstraktní spekulace, jež se dodatečně pokusy ověří.

Toto vše je dobře míti na mysli, než se obrátíme k obecné úvaze o povaze matematického předmětu. Převážná většina všeho pokroku v matematice je podmíněna impulsy, jež leží mimo vlastní technickou oblast matematiky. Invence matematikova byla vždy podnícena úlohami, jež jí kladla praxe a jen menší část je výsledkem úloh, kladených v oboru samém. V této okolnosti tkví také psychologické a sociologické předpoklady vědecké prosperity matematiky.

B) *Konstruovatelnost a bezespornost.*

Viděli jsme v předchozím, že názorné představy byly mocným inspiračním zdrojem pro matematiky. Názorné představy přinášejí sebou mnohé vlastnosti, jež má míti předmět matematikových úvah: shrnují v názorné jednotnosti mnoho složek a tvoří celky. Názorné vztahy mezi nazíranými představami vybízí k pojmovému rozboru a tím k nalezení exaktních relací, jež nezávisejí na názoru a jež vážou matematické předměty. Tím, že vyběřeme názorné celky, poutáme řadu vlastností a vztahů k jednomu předmětu, svazujeme je a předmětem centralisujeme pod jednotící hledisko. Takovým výběrem předmětu, při kterém spoluúčinkuje mnoho zřetelů, jako barvy, tvary, význam předmětu pro život — dosahujeme pořádku ve svém přehledu vnějšího světa, klasifikujeme, oddělujeme, s českým filosofem Vorovkou mluveno: uplatňujeme princip diskontinuity myšlení. O předmětech svého názoru, které jsme tak vybrali z chaosu dojmů, můžeme pronášeti výpovědi. A těmito výpověďmi jsme posunuli původní názorný předmět do oblasti myšlení.

Předmět myšlení je vše, o čem můžeme pronášeti nějaké výpovědi — o čem lze usuzovati. Tedy také matematický předmět je toho druhu. Ovšem, výpovědi a úsudky, jež o předmětu pronášíme, jsou také předměty našeho myšlení, protože i o nich můžeme pronášeti jiné výroky a tvořiti jiné úsudky. Taková redukce, převádění jedněch úsudků na druhé, nemůže býti bez konce. Je tedy patrno, že budeme musit vyjít, jak si později podrobněji ukážeme, od některých výroků a úsudků, které vezmeme za základní. Tím dostaneme pro soustavu úvah o předmětech pevnou základnu, od níž se všechny úvahy rozvíjejí.

Předmět sám jiným způsobem vymeziti nelze, je tu obdobná situace, jakou najdeme i u jiných základních pojmů. Podobná nesnáz je, uvažujeme-li o pravdivosti nebo nepravdivosti nějakého výroku. Především je jisto, že o takové vlastnosti výroku nelze usuzovati isolovaně. Výrok vždy musíme uvésti do vztahu se všemi výroky jinými, s nimiž souvisí a hledáme jeho pravdivost nebo nepravdivost vzhledem k celé síti výroků, s nimiž souvisí. Ale i tu musí někde redukce končit a musí tedy existovati výroky, jež další redukci v tomto systému nepřipouštějí a jež považujeme za základní. Nemají snad povahu absolutních neměnných pravd, nýbrž opor pro výstavbu soustavy, kterou má ten vědecký obor za svůj cíl. Se způsobem tohoto myšlení se v dalším seznámíme.

Nutným předpokladem, abychom mohli z nepřehledného proudu svého vědomí odloučit předmět a myslit vůbec „předmětně", je naše schopnost, popsané a vysouzené o předmětu podržeti: tím je zaručeno, že ten předmět je stále identický sám se sebou. Platí-li jinak pro náš život známé Heraklitovo rčení, že nikdy dvakráte nevstoupíme do *téže* řeky, platí pro myšlené předměty matematiky, že jsou samy s sebou identické a v čase neměnné. Vlastnost našeho duševního života, uplatniti tuto identitu v myšlení a tím umožniti předmětné myšlení, patří k nejpodivuhodnějším vlastnostem myšlení. Jinak by lidské myšlení nebylo než řadou reakcí na prostředí, v němž se náhodou organismus vyskytl.

Matematické předměty, aspoň mnohé, lze, jak se říká, konstruovati. Požadavku konstruovatelnosti velmi dobře vyhovovala antická matematika. Konstruovatelnost není míněna jako idealisované provádění skutečných konstruktivních úkonů (kružítkem a pravítkem), ale jako vytvoření nového předmětu takovým postupem, jak jsme si popsali při úvaze o některých rysech antické matematiky. Vyjdeme-li od nějakých základních předmětů a vztahů, o jejichž vznik se zatím nestaráme, dojdeme buď konečným, nebo nekonečným, ale pak v podstatě nazíratelným počtem kroků k předmětům novým. Právě tak k novým vztahům.

Celá záležitost je jednoduchá, pokud nejde o soubory předmětů, jež nejsou konečné. V úvahách o takových souborech se totiž užívá k zaručení existence nějakého matematického předmětu ještě jiného způsobu úvahy, který byl v nedávné době silně kritisován. Uvedeme si příklad: mějme nějaký soubor veličin, jistým způsobem definovaných. Soubor ten nechť není konečný. Takový soubor lze uspořádati a dejme tomu, že veličiny souboru nevzrůstají nad všechny meze. Pak musí býti možno, soubor nějak se shora ohraničiti, t. j. musí býti nějaká veličina, kterou jistě žádná veličina souboru nepřekročí. Úvaha, jež má existenci takové veličiny zaručiti, vede se často tak: dejme tomu, že by taková veličina nebyla. Pak je možno ukázati, že pro definované veličiny souboru plyne z tohoto předpokladu spor, nějaký absurdní důsledek. Ten však není možný — proto hranice existuje.

Tato methoda důkazu, považovaná běžně za existenční důkaz pro hledaný předmět, nestačí matematikům, kteří věří pouze konstruktivním důkazům, ať jde o soubory jakékoliv. Dokázati methodou sporu existenci hledaného předmětu, připouští jen při souborech konečných, kde je možno získat přehled přímým vyjmenováním eventualit. Pro tyto případy bývá methoda sporu však jen kratší cestou, než kterou poskytne konstruktivní methoda i se *stanovením* žádaného předmětu.

Stanovisko, jež žádá konstruktivní záruku pro existenci matematického předmětu, zastává matematická škola intuicionistická. Ti nechtějí pouze vědět, *že* nějaká veličina existuje, obecně, *že* nějaký předmět existuje, nýbrž chtějí onu veličinu také znát alespoň s dostačující přesností a předmět si sestrojiti. V čem spočívá nedůvěra intuicionistů k methodě sporu? Methoda sporu úzce souvisí s logickým principem o vyloučené třetí možnosti. Protože se budeme v dalším zevrubně zabývati logickým mechanismem matematiky, stačí na tomto místě jenom věc naznačiti. Běžné usuzování o nějakém předmětě vypadá asi tak: buď tento předmět je, má určité vlastnosti, nebo není. Třetí možnosti není. Tomuto druhu úsudku, jakkoli samozřejmě vypadá, nevěří intuicionisté a uvádějí příklady nerozhodnutých problémů, jdou dokonce tak daleko, že připouštějí problémy trvale nerozhodnutelné, u nichž nelze tak lehce říci: buďto je, nebo není — nic jiného není možné.

Proti intiucionistické škole, jejíž kritická činnost přinesla matematice cenné výsledky, stojí škola matematických logicistů, kteří se spokojí existencí předmětu, zaručeného pouhou bezesporností. Matematický předmět existuje, jestliže jeho vlastnosti a vztahy k ostatním předmětům téže vědecké soustavy nejsou s nimi ve sporu.

Co se však stane, není-li předmět jednoduchý, běží-li o složité úvahy v theorii nekonečných množin? Vztahy předmětu ke druhým nemusí býti nijak přehledné, nemusí býti ani jednoduše pojmenovatelné a konečně zcela jistě množství vztahů i vlastností roste nad všechny meze. Jak tam zaručíme, že z žádné vlastnosti ani vztahu neplyne spor? Tyto otázky jsou již předmětem logiky a úvah o deduktivních systémech vůbec a nahlédneme do jejich řešení za nedlouho.

Jedno je již jasné. Existenci matematického předmětu lze chápati dvojím různým způsobem — buďto jej konstruujeme, nebo zajistíme jeho bezespornost. V prvním případě máme předmět jaksi hmatatelně v mysli, v druhém případě tento předmět vlastně ani nepoznáme, protože zkoumáme jen důsledky z jeho vlastností a vztahů. Lze ovšem zcela případně říci: známe-li vztahy a vlastnosti předmětu, jež zkoumáme se stanoviska bezespornosti, známe ten předmět sám. Uvedli jsme však před nedávnem typický příklad úvahy, kterou by se měla zaručiti existence jisté hranice. Důsledky z její existence nejsou ve sporu s předpoklady a přece tu hranici číselně vůbec nemusíme znáti.

V uvedeném rozštěpení názorů na matematickou existenci je patrný odraz dvou možných světových názorů. Intuicionista má silně vyvinuté pragmatické rysy, v každém případě je lidský se svým poctivým přiznáním, že možná existují i v matematice zásadně neřešitelné problémy. Možná, že zavrhuje z jistého puristického ostychu i předměty, jež jsou, a jež dosud není schopen konstruovati. Stoupenci matematického logicismu nespokojí se konstruovanými matematickými předměty jako intuicionisté. Pro ně prostě předměty, bezespornosti zajištěné, existují, jako by předem připraveny a stačí je, v jejich smyslu, pouze odkrývati jako neznámé země.

LOGIKA A MATEMATIKA

1. *Předběžná úvaha.*

Logické myšlení je vždy a odedávna považováno za specifickou známku matematického myšlení. Ať již je vlastní tvůrčí proces matematikův jakýkoli, ať již je matematik podle známého dělení Poincaréova geometrem (typ fantasijní, s živou obrazotvorností názornou) nebo logikem — vždy nakonec musí jeho úvaha, napsaná nebo vyřčená, míti všechny znaky logického myšlení. Tak je běžný názor. K tomu, abychom viděli, do jaké míry je tento názor opodstatněný, musíme se seznámiti s logikou, kterou převzalo vědecké myšlení z dávných věků. To provedeme zcela stručně, přidáme však, co přinesla doba nová, lépe řečeno, jaký nástroj vytvořila soudobá logika a během těchto úvah se seznámíme s povahou matematického myšlení o základních problémech lépe, než kteroukoli jinou cestou.

Základní normy lidského myšlení byly ustaveny již v antické logice. Aristoteles považoval za nezbytné předpoklady našeho myšlení tyto tři, jak se říkalo, principy: princip identity, princip sporu a princip vyloučené třetí možnosti. Leibniz přidával k těmto principům ještě princip dostačujícího důvodu. Ponecháme pro tuto část výkladu tradiční označení „princip", ve formalisované logice budeme takové věty nazývati jinak, a přistoupíme k poznámkám o nich.

Princip identity říká zcela prostě: (Předmět) A jest A. Každý předmět je sobě sám roven (Leibniz). Skoro každý přepis tohoto principu nějak nedostačuje. Předposlední věta (Leibnizova formulace) užívá pojmu předmět. Předmět však je vázán výroky, jež jej charakterisují, určují. Ty musí býti, jako *předměty* myšlení také „rovny sobě samým". Již v předchozím mluvili jsme o podmínce předmětného myšlení, podmínce, jež umožní fixování útvarů, jimiž se naše mysl zabývá. Výrazem této podmínky je princip identity, ale vyřčen by měl býti někde mimo, v jiném vyjadřovacím systému, než je naše řeč, která je také předmětem, tedy už také princip identity předpokládá.

Jeden z nejlepších theoretiků moderní logiky, L. Wittgenstein*), kritisoval ostře princip identity, zde uvedený, a jeho kritika vyznívá asi tak: buďto tento princip vyslovuje něco *o dvou* předmětech (říkáme-li na př., že A jest identické s B). Pak je tento princip špatný, neboť *dva* předměty nemohou býti identické již proto, že je můžeme odlišiti. Říká-li však princip, tak jak jsme uvedli, že A je identické s A, pak neříká vůbec nic. (Kritika je v hlavním díle Wittgensteinově, Tractatus logico-philosophicus, věta 5,35 až 5,54.) Tato kritika je důsledná a správná.

Uvedený první princip by měl však býti pouze myšlen, každé jeho vyslovení už jej předpokládá, ba i Wittgensteinova kritika.**)

Na tomto místě bych rád upozornil na jinou formu „rovnosti", která nemá s principem identity vůbec nic společného a které se hojně užívá zejména u definice. Definice není ničím jiným, než novým pojmenováním

*) Tractatus logico-philosophicus, anglické vydání z r. 1922.

**) Přes kritické výhrady k principu identity užívá ho logistika také. Hraje důležitou roli v definici přirozených celých čísel. Kdyby se tohoto principu neužilo, je nutno založiti theorii celých přirozených čísel jinak, na podkladě jisté monotonní logické *operace*. Tato cesta je také možná. (Wittgenstein.)

svazku předmětů a vztahů, jak jsme již dříve poznamenali. Definitorická rovnost pak není identitou, nýbrž jen pokynem, že místo svazku pojmů a relací, jež patří jistým způsobem k sobě, můžeme užíti nového názvu pro nový pojem, definiční rovnicí stanovený.

Máme-li na př. nekonečnou řadu tvaru

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

a jde-li o to, stručně vyjádřiti, že součet řady je funkcí ‚x', pak volíme pro označení součtu obvyklého znaku $s(x)$. Napíšeme-li pak

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots,$$

pak tato rovnice nevyjadřuje identičnost pravé a levé strany, nýbrž je definiční rovnicí pro výraz $s(x)$. Moderní logistika vyjadřuje z opatrnosti u rovnic této povahy značku, vyjadřující, že pravou stranu lze nahraditi levou, tak, že opatří rovnítko ještě dole připsaným indexem Df ($=_D$). V matematice je ovšem rozdíl vyjádření rovnosti dvou výrazů a definitorické rovnosti dobře znám.

Jak budeme chápati obvykle míněnou identitu ve smyslu ekvivalence dvou výrazů, poznáme při formalisaci logické soustavy. Prozatím je možno říci, že to, co se obyčejně nazývá identitou, na př.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

není než vyjádření této logické možnosti: použijeme-li smluvených pravidel o výkonech vzhledem k předmětům ‚a' i ‚b', pak pravá strana je *důsledkem* strany levé, ale také naopak. Proto jsou ekvivalentní.

Je známa ještě jedna zajímavá formulace principu identity, Leibnizova „identitas indiscernibilium". Dva předměty jsou tehdy identické, platí-li jakýkoli predikát vzhledem k prvnímu předmětu také vždy o druhém předmětu. Formální vyjádření tohoto principu nepovažuji obecně vůbec za možné. Musilo by jednak zahrnouti všechny typy výroků, jež je možno o předmětu učiniti, to již naráží na obtíže. Za druhé, není nikterak zaručeno, že máme objeveny všechny predikáty, jež se k danému předmětu hodí. Avšak i bez tohoto vyjádření principu identity se obejdeme.

Princip vyloučené třetí možnosti (principium exclusi tertii) říká: A jest B nebo non B — třetí možnosti není.

Tento princip jest jedním z nejdůležitějších pracovních nástrojů matematických. Jeho význam spočívá v tom: podaří-li se na př. dokázati, že možnost, aby předmět byl non B je vyloučena, pak nutně je předmětem B. Stačí-li nám tento závěr, nemusíme se ani o skutečnou konstrukci toho předmětu starati. Tak na př. se podaří o nějaké reálné funkci dokázati, že nemůže nabýti záporných hodnot. Užitím principu o vyloučené třetí možnosti máme tak ihned výsledek, že hodnoty té funkce mohou ležeti v oboru kladých čísel včetně nuly. Při tom o skutečném průběhu hodnot té funkce nemusíme nic podrobněji věděti a také v důsledku principu nic podrobněji nevíme. Princip nás s takovou funkcí blíže neseznámí a to je právě moment, jenž vadí intuicionistům, kteří jej považují za *prázdný*.

Protože však i z té okolnosti, že funkce je v důsledku principu nezáporná, *lze* v matematické praxi podle povahy případu činiti další pozoruhodné důsledky, nemůžeme se na něj dívati jako na princip prázdný. — Umožní první hrubé opracování, uložíme si předmět alespoň do jedné poloviny pracovní plochy a to již je nesporný zisk.

Užití tohoto principu je podmíněno asi takto: patří-li předmět A pod pojem B nebo non B, se zdá býti snadno rozhodnutelná otázka. Někdy není však možno takové rozhodnutí učiniti. Logik bude trvati na tom, že je to praktická záležitost, protože věří, že každý problém je zásadně rozhodnutelný. Intuicionista nevěří, nemáme-li prostředků (logik by řekl: náhodou *teď* ještě) rozhodnouti, *kam* předmět patří, jestli pod B nebo non B (což je *všechno* ostatní s výjimkou B). Příklady, jež intuicionisté uvádějí, uvedeme později, abychom nerušili chod tohoto přehledu dědictví staré logiky. K pochopení situace, do které dostali svojí kritikou matematiku intuicionisté, uvedu toto přirovnání: ‚B' nechť zaujímá v obyčejném euklidovském prostoru jistou oblast, ohraničenou uzavřeným tělesem. Pak ‚non B' je celý zbývající prostor. Předmět ‚A' musí padnouti buď do tělesa ‚B' nebo mimo, nic jiného nezbývá. Alternativa buď anebo se v tomto způsobu chápání vnucuje. Nebylo by však těžké, úvahu nepatrně pozměnit a dojíti k jinému výsledku. Budiž ‚non B' oblast vně oblasti ‚B', ale sama také ohraničená v konečnu ležící. Což kdyby náš předmět ‚A' padl vně ‚non B'? Přirovnání, jež jsme uvedli, by bylo možno učiniti sugestivnější, kdybychom použili dvou druhů prostoru, z nichž jeden by byl vložen do druhého. Pak by v tomto *vloženém* prostoru platila alternativa buď ‚B' nebo ‚non B' přesně. Ale předmět by se vůbec v tom vloženém prostoru nemusel vyskytovati.

Princip sporu.

Jeho nejjednodušší vyjádření je: A není non A. Tento princip doplňuje do jisté míry princip vyloučené třetí možnosti. Tímto principem se budeme ve formalisované logice podrobněji zabývati, proto o něm nebudeme v této souvislosti ztráceti slov.

Princip dostačujícího důvodu.

V historickém již pojetí Leibnizově vyjadřuje se princip asi takto: Nic se neděje bez příčiny, anebo alespoň bez dostatečného důvodu. Pro logiku i matematiku nám postačí užší vyjádření tohoto principu. Uvedeme je v novodobém vyjádření, pro pozdější úvahy výhodném. Vyjdeme od platných vět, jimiž předměty a vztahy mezi nimi jsou určeny. Pak jen takové věty jsou platné *(dostatečně odůvodněné)*, jež jsou buďto těmito platnými základními větami, anebo *důsledky* z nich, získanými logickou cestou.

Budova antické logiky byla opřena o první tři jmenované principy; princip dostačujícího důvodu přistoupil později jako rovnoprávný princip další. Již antická logika dovedla vypracovati velmi důslednou nauku o soudech a závěrových schematech usuzování. Tu již byl učiněn první počátek formalisace, shrnutí řady zvláštních úsudků pod společný model, *typ*. Tu byl také dán počátek studia struktury, v tomto případě struktury logické. Krásné výsledky přinesla pokračující formalisace ve středověku, kdy byla formální logika hojně pěstována k racionálním rozborům náboženských spekulací. Cenné výsledky tohoto odboru uveřejnil po prvé s hlediska moderní logiky přední polský logistik Lukasiewicz.*)

*) Lukasiewicz uveřejnil hlavní práci o tomto thematu v časopise Erkenntnis, roč. 1934, str. 111—131. (Časopis přestal před druhou svět. válkou v Lipsku vycházeti z politických důvodů.)

Nicméně čas na úplné vybudování logického formalismu tehdy ještě neuzrál. K tomu bylo právě zapotřebí velikého rozvoje matematiky, podstatně umožněného pokrokem Galileiho programu. Tento rozvoj matematiky přinesl s sebou nová hlediska a nové otázky, jež na první pohled nebylo možno po staru zvládnouti.

Moderní formální logika vznikla v Anglii, v první polovině minulého století a jejím zakladatelem je Boole. Myšlenku logického počtu pojal po prvé Leibniz, který si byl dobře vědom potřebnosti nového logického nástroje, nepoložil však ani základů, na nichž by se bylo mohlo stavěti dále.

Formalisovaná logika, kterou se budeme nyní zabývati, nás zavede hloub do problémů matematického myšlení, než by bylo možno obsahovým výkladem. Uvidíme, jak jasně a přesně je možno touto logikou vyjádřiti mnoho problémů, jež bez její pomoci nejsou než povrchně nebo neurčitě vyslovenými dohady.

Jaké úkoly si klade tato logika? Již první, čeho dosáhla, si zaslouží naší pozornosti. Odpoutala totiž obsahovou stránku od stránky ryze formální, umí ji odpreparovati — ne však nějak neživotně, nýbrž tak, že to prospěje oběma stranám. Zabývá se, když dosáhla takového oddělení, pouze strukturou myšlení, nebo strukturou vyjadřování, vztahovou sítí, aniž by se starala o materielní význam předmětů, jež odpovídají značkám soustavy. Předměty pak přijdou k platnosti až při interpretaci výsledků, odvozených formulí. Pokud jsou ve hře (abychom užili srovnání pro tento způsob mechanického odvozování), nestaráme se o význam symbolů vůbec.

Důvody, proč se tak ostře odlišila formální stránka logiky od materielní, obsahové, jsou několikeré. V první řadě: v povaze logiky samé je obsažen formální prvek již velmi silně v nejstarších logických úvahách. Již od dob antických se užívá shrnování jednotlivých, konkrétních soudů a závěrových řetězů ve schemata. Takové schema je pak typem, jenž zahrnuje všechny možné individuální soudy, jež spadají pod jeho schema. Zrovna tak shrne složitější úsudkové řetězce. Počátek formalisování logiky byl učiněn právě u typů soudů. Teprve později, mnohem později, zmohlo formální pojetí a dozrálá logistická technika i jemnou strukturu dorozumívací řeči, kterou uvedlo v takovou neselhávající soustavu, jak ji které odvětví matematiky potřebuje.

Druhý důvod je, jak již jsme o tom mluvili dříve, stupňování požadavku přesnosti. Právě v předchozích úvahách jsme se přesvědčili na různých paradoxech, že dorozumívací historická řeč není přesná. Kolik jen významů může míti výraz „číslo" nebo „přímka". Nikdy nejde o to, co které slovo znamená *samo o sobě,* nýbrž, v jaké souvislosti se vyskytuje, jak je zapojeno na celé okolí vět, jež tohoto slova užívají. Teprve tato souvislost s okolím určuje význam pojmu, jenž odpovídá nějakému užitému slovu. Jakékoli spekulace o slově jakožto výrazu osamoceném jsou zcela neplodné. A tento mechanismus souvislostí, jenž dal pojmům přesný význam, vytvořila logistika. Vztahy a souvislosti odkrývá logistika neúprosně, protože nikdy nám nevrátí více, než jsme do ní vložili, a není tedy možno jakoukoli nekontrolovatelnou eskamotáží něco vykouzliti, co by nepodléhalo kontrole. V tomto smyslu se osvědčila znamenitě pro bádání o základech matematiky, daných několika větami, na nichž vše spočívá. Je-li tu dole zjednáno jasno, nemůže celý strom na nejasnosti churavěti, Logistika tu vykonala pro základy matematiky dobrý kus chirurgické práce.

Je tu ještě další okolnost, již jsme už naznačili, a která byla snad své doby přeceněna. Leibniz zamýšlel vytvořiti logistikou takový mechanismus „ars inveniendi", jenž by umožnil hledání nových pravd počtem. Velmi zajímavě popisuje svoji myšlenku takto: „Jestliže by vznikly spory, nebude již zapotřebí disputací mezi dvěma filosofy více než mezi dvěma matematiky. Postačí, aby vzali do ruky pera a posadili se ke svým stolům a řekli si: počítejme!"

Leibniz se domníval, že k novým poznatkům i k rozhodnutí sporů by se došlo počtem. Taková že by byla nosnost jeho „ars inveniendi". V tomto rozsahu se nemohla logistika dosud uplatniti a je nejisté, bude-li někdy tak zjednodušena, aby mohla býti náhradou za intuici. Určité odvětví matematiky, je-li již systémem, má ovšem povahu deduktivní vědy — to je však již *výsledek* celého procesu. Objevy, v nichž se uplatní tvořivý element matematikovy individuality, nepřicházejí však touto cestou. Leibniz si představoval, že bude možno užíti logického počtu pro všechny vědy vůbec jako základu. Pro vědy, jež nejsou jen deduktivní, by to byla pomůcka ceny velmi problematické. Nicméně i tak, role, která připadá logistice ve zpevnění stavby deduktivních věd, a role, kterou má pro opracování pojmů, je velmi čestná a užitečná. Ovšem, lze jí užíti ponejvíce tam, kde vědní soustava je již vypracována natolik, že je známo, kterými zřetelnými předměty se zabývá. V tomto stadiu se však mohou objeviti nesrovnalosti, jak se již mnohokráte stalo v dějinách matematiky. A to je vhodný okamžik pro zásah logistickou analysou. V tomto užším pracovním vymezení našla již a řešila logistika tolik problémů, že opravdu moderní matematiku si bez její pomoci nelze představiti.

Takové úlohy, jako je třeba úplnost nebo bezespornost axiomatické soustavy pro nějaké odvětví matematiky, osvětlení povahy axiomů, o nichž filosofie se tolik napřemýšlela, vymýcení logických a slovních antinomií anebo třeba objev, že matematika potřebuje ke své výstavbě věty, jež nejsou důsledkem základních vět logiky (jak později uvidíme, na př. axiom výběru), to jsou úlohy, jež často byly vyvolány v život logistickými rozbory a podstatnou pomocí logického formalismu také řešeny.

Úvod do logického formalismu je možno provésti různými způsoby. Své doby se neobešel takový úvod bez slovného doprovodu, jímž se význam symbolů a operací vykládal a odůvodňoval. Ba i později byl počet sám promísen obsahovým výkladem anebo vysvětlivkami. Hlavní snahou při stavbě takového logického deduktivního systému je, aby byl soběstačný, aby definice, operace a všechny potřebné prvky skladby (syntaxe) byly vyjádřeny v soustavě samé. Je tedy možno, jak víme asi 10 let, řešiti tuto úlohu: formulovati skladbu soustavy v ní samé (Carnap*). V české řeči nám bude tento výsledek samozřejmý: skladbu české řeči je přece možno v ní samé vyjádřiti. Upozorňuji, že ani tato věta není samozřejmá, mohlo by se státi, že věty, jimiž by se vyjádřila skladba české řeči, by sice česky zněly, ale patřily by k nějaké české „nad-řeči". A pro formalivanou soustavu taková věta již vůbec není samozřejmá. Řešení této úlohy se podařilo až tehdy, kdy celá sou-

*) Carnap, The Logical Syntax of Language, 1937. Dílo vyšlo také německy, německá verse je starší.

stava je považována za umělou „řeč". Wittgenstein považoval ještě v roce 1918 tuto úlohu za neřešitelnou. Začíti tímto způsobem, ostře, by nebylo pro naše účely právě vhodné. Pro počátek je to cesta svojí abstraktností značně obtížná. Přidržíme se proto s počátku v jednodušších částech obsahového pojetí, ale tak, že je položíme jako přibližnou interpretaci teprve po formalismu — který bude uveden v soudobé symbolické řeči.

2. *Výrokový počet dvojhodnotový.*

Nejprve si všimneme logické soustavy, která je nejpodrobněji propracována a má jméno „výrokový počet". Prvky, kterých tato soustava nebo řeč užívá, a kterými pracuje, jsou „výroky" a ty se již dále nerozkládají. Takovým výrokem může býti každé ucelené sdělení, na příklad věta „venku je hezky" nebo „počet prvočísel není konečný". Sdělení takové, t. j. výrok, ovšem musí míti smysl, musí být možno o výroku říci posudek, zda je pravdivý nebo nepravdivý.

Na tuto otázku pravdy, v našem případě pravdivosti výroku jsme již jednou letmo narazili. Potřebovali bychom celý veliký aparát formalisované řeči, abychom si mohli ukázati, k jakým výsledkům se dospělo v poslední době a jakou roli hraje pojem pravdy ve formalisované řeči. Tu jen na něco upozorníme. Právě logistika odkryla mnohé výroky, o nichž nelze říci ani že jsou pravdivé, ani že jsou nepravdivé. Jsou to výroky, které nemají smyslu, a které jen svojí slovnou formulací svádějí k tomu, považovati je za pravdy nebo nepravdy. Takovými výroky jsou mnohé, svým způsobem proslulé věty některých filosofických soustav (zejména německá idealistická filosofie 19. století jich měla mnoho), na př.: „dobro je identické s krásou", nebo „krása je nekonečné v konečném". Nechť čtenář přemýšlí o tom, co by takové výroky *vůbec* mohly znamenati. Jsou dokonale prázdné, jsou bez smyslu, protože jsou tak vzdáleny jakéhokoli materielního použití. Takové výroky se mohou, krásněji vyjádřeny, hoditi básníkům, aby navodily nějaký citový stav, pro vědu jsou bezcenné.

Takové výroky jsou nebezpečnější než hříčky, které také nemají smyslu, ale u nichž se tato vlastnost ihned projeví, jako na př. ve větě: „veďte tečnu ke čtyrhrannému kruhu". Tato věta nemá smysl proto, poněvadž čtyrhranný kruh je kontradiktorický předmět myšlení, z toho však následuje, že není vůbec předmětem. Úloha nemá tedy smysl.

Větu: byla vedena tečna ke čtyrhrannému kruhu nelze označiti ani přídavkem „pravdivá" ani „nepravdivá".

Již na těchto několika příkladech je patrno, že příčiny, proč nelze výrok hodnotiti jedním z obou přívlastků, mohou býti různého druhu. V prvních dvou případech se vyjadřuje zdánlivě něco o předmětech myšlení, jež nejsou „clare et distincte" určeny, jak požadoval Descartes. Proto žádnými předměty myšlení nejsou a citované výroky o kráse jsou bez smyslu. V druhém případě je to sporným způsobem stanovený předmět myšlení, jenž následkem toho nemůže existovati.

Připusťme teď, že se budeme zaměstnávati pouze takovými výroky, k nimž je možno hodnotící stanovisko „pravdivý" nebo „nepravdivý" zaujmouti. Každý výrok může tedy míti buď hodnotu „*P*" nebo „*N*", jak budeme od nynějška stručně psáti. Z tohoto důvodu se nazývá soustava, jejíž přehled si podáme, dvojhodnotový výrokový počet.

Jsou logické počty o větším počtu hodnot než dvě. Logický počet, jenž má tři hodnoty, je možno vhodně upraviti jako podklad pro intiucionistickou matematiku. Takový počet nemá jen „*P*" a „*N*" hodnoty, nýbrž ještě třetí, jakousi mezihodnotu — odpovídající výrazu „nerozhodnutelný" — čili proti antické logice tertium *datur*. Příklad na takovou soustavu si uvedeme v závěrečných poznámkách tohoto odstavce.

Je však možno jíti ještě dále a vybudovati logiku tak, že „*P*" a „*N*" jsou krajními hodnotami, mezi nimiž leží dokonce celé kontinuum hodnot, právě tak jako mezi body 0 a 1 na číselné ose. Hodnota výroků se dá pak interpretovati na příklad jako pravděpodobnost.

Máme-li v dvojhodnotové logice více výroků, na příklad *n*, pak je možno takový soubor hodnotiti 2^n různými způsoby, neboť každý výrok má dvě a jen dvě hodnoty. Příklad: mějme tři výroky *A*, *B*, *C*. Nevíme-li jakých hodnot nabyly, mohou zásadně nastati tyto možnosti hodnocení: *P*, *P*, *P*; *P*, *P*, *N*; *P*, *N*, *P*; *P*, *N*, *N*; *N*, *P*, *P*; *N*, *P*, *N*; *N*, *N*, *P*; *N*, *N*, *N*, celkem 2^3 možností. Spojením takových ohodnocených výroků dostaneme výrok nový, jakousi větu, v níž původní výroky jsou složkami celku. Logická hodnota nového útvaru jest funkcí hodnoty složek, tedy oněch elementárních výroků. Je, jak se můžeme stručně vyjádřiti, pravdivostní funkcí hodnoty svých složek.

Možných spojení výroků je mnoho (je-li předepsán počet výroků, není těžko vypočísti, kolik takových možných spojení je), volíme z nich taková, která se poměrně dobře uvedou v souhlas s hovorovou řečí a se základními logickými požadavky. Definici pravdivostních funkcí výroků, jež budeme potřebovati, provedeme tabulkovou methodou. Jsou to tabulky, jež mají sloupců o jeden více, než kolik je výroků (v našem případě stačí jak poznáme, výroky dva, protože ostatní spojení výroků lze na základní převésti), řádek je tolik, kolik je možností, ohodnotiti souhrn ‚n' výroků, tedy 2^n. Poslední sloupec tabulky určuje hodnoty pravdivosti toho určitého spojení; v něm jsou explicitně uvedeny hodnoty pravdivostní funkce toho spojení. Tyto hodnoty jsou vždy každému druhu spojení přiřčeny definitoricky a jimi je ono spojení charakterisováno.

Počneme s příklady nejjednodušších tabulek.

Tabulka pro negaci výroku. Tu je tabulka velmi jednoduchá, má pouze dva sloupce a následkem toho dva řádky. (Výroky budou zatím značeny malými latinskými písmenami.)

p	$\bar{p}$
P	N
N	P

Tato tabulka je jistě ve shodě s obvyklým pojetím negace. Má-li výrok ‚p' hodnotu P, potom jeho negace, značená ‚$\bar{p}$' má hodnotu N a opačně. S výjimkou této tabulky pro negaci definují všechny ostatní tabulky vskutku spojení výroků jako pravdivostní funkci složek. Tato tabulka jediná se zabývá jediným výrokem a definuje negaci výroku jako pravdivostní funkci jeho možných dvou hodnot.

Disjunkce dvou výroků.

p	q	$p \vee q$
P	P	P
N	P	P
P	N	P
N	N	N

Spojení výroků ‚p' a ‚q' provedené touto tabulkou nazveme „disjunkce", čteme je asi: ‚p nebo (také) q'. Spojení znakem ‚$\vee$' není totiž spojením ve smyslu vylučujícího: ‚buď' p nebo q', nýbrž spojení ve smyslu latinského „vel", jak již tradičně logistikové toto spojení do obyčejné řeči překládají. Latinské „vel" nemá totiž onoho vylučujícího rázu, je asi nejlépe vystiženo českým ‚nebo', k němuž si pro seslabení přidáme ‚také'. Poněvadž je to první spojení dvou výroků, popíšeme si je trochu podrobněji.

‚$p \vee q$' má hodnotu P, když
p má hodnotu P, q také hodnotu P,
p má hodnotu N, q hodnotu P,
p má hodnotu P, q má hodnotu N.

Tyto tři první případy jsou v souhlase s obvyklým pojetím disjunkce. Jsou-li oba výroky P, pak je disjunkce samozřejmě P. Je-li jeden z výroků falešný, pak disjunkce nepřestává býti správná a tedy hodnota, přiřazená funkci ‚$p \vee q$' pro tento případ musí být zase P.

Jedině v posledním řádku tabulky má naše funkce hodnotu N. Jsou-li oba výroky falešné, je celá disjunkce také.

Jiný příklad spojení dvou výroků poskytuje tabulka

p	q	$p \cdot q$
P	P	P
N	P	N
P	N	N
N	N	N

Toto spojení výroků se nazývá „konjunkce", znak, kterého se užívá pro tuto pravdivostní funkci, je „$\cdot$". Spojení se přeloží výstižně spojkou „a" („et"). Spojení výroků ‚p a q' má tedy hodnotu P jen v tom případě, když *oba* výroky jsou hodnoty P.

Obsahově odpovídá i toto stanovení běžné potřebě řeči. Jsou-li oba výroky falešné, má spojení samozřejmě hodnotu N. Ale i tehdy, je-li jen jeden z nich hodnoty N, nemůže býti hodnota funkce ‚p a q' rovna P. Nejlépe je to patrno tehdy, když položíme za ‚q' ve zvláštním případě opět ‚p'. Spojení by pak bylo v obou případech, o nichž uvažujeme; buď ‚$p \cdot \bar{p}$' nebo ‚$\bar{p} \cdot p$'. Současná platnost výroku a jeho negace není možná a spojení musí míti funkční hodnotu N.

Všimněme si jedné zajímavé vlastnosti obou posledně uvedených tabulek. První z nich má v posledním sloupci třikrát za sebou hodnotu P, jedinkrát hodnotu N.

V druhé z nich, v tabulce pro disjunkci, je to právě opačně. Nahraďme v této druhé tabulce *všechny* hodnoty pravdivosti hodnotami opačnými. Tabulka bude pak vypadati takto:

$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\overline{\bar{p}.\bar{q}}$
N	*N*	*N*
P	*N*	*P*
N	*P*	*P*
P	*P*	*P*

V posledním sloupci máme negaci konjunkce a to výroků, jež jsou negacemi původních výroků. To způsobila výměna pravdivostních hodnot za hodnoty opačné. Čteme-li tuto poslední tabulku po řádcích směrem vzhůru, dostáváme přímo tabulku pro spojení „vel". Ukázali jsme si tak zajímavou souvislost dvou spojení výroků znakem „vel" a znakem „et". Disjunkce dvou výroků není podle tohoto výsledku ničím jiným, než negací konjunkce, v které jsou hodnoty výroků vzhledem k disjunkci změněny v opačné. Ukazuje se tu, a pozdější příklad nám dosavadní výsledek jen potvrdí, že spojení výroků nejsou na sobě nezávislá. Kdybychom vzali disjunkci jako původní funkci pravdivostních hodnot, můžeme konjunkci *definovati* pomocí disjunkce a negace, zavedené první tabulkou vůbec. Tento výsledek má význam pro logickou transformaci spojení výrazů. Dalším příkladem je tabulka spojení výroků implikačním znakem. Toto spojení dvou výroků je snad vůbec nejdůležitější pro matematickou logiku, je zvláštním případem spojení, jež by se dalo přibližně vystihnouti výrazem „býti důsledkem". Implikace umožňuje hledání důsledků z předpokladů. Definiční tabulka zní:

p	q	$p \rightarrow q$
P	P	P
N	P	P
P	N	N
N	N	P

Implikace jako pravdivostní funkce dvou výroků ‚p' a ‚q' má pouze tehdy hodnotu N, kdyby výrok hodnoty N byl důsledkem výroku hodnoty P. Jinak vždy má hodnotu P. První řádek i poslední řádek tabulky jsou obsahově přirozené. Z výroku hodnoty P jde P a to je správné tedy zase P (v posledním sloupci). Podobně z N jde N a to je také správné, tedy P. Podivná se může zdáti jen řádka druhá, že by z výroku hodnoty N plynul výrok hodnoty P a to celé že by mělo hodnotu P. Upozorňujeme proto znovu, že obsahový přepis těchto pravdivostních funkcí nevystihuje než velmi přibližně ve slovech jejich přesný význam, stanovený tabulkou. Implikace, jak je stanovena naší tabulkou, je širší než spojení, jež by se mohlo nazvati „důsledkem" v *užším* smyslu. Význam takového spojení byl studován americkým logikem Lewisem, jenž mu dal název „strict implication". Ukázalo se však, že pro závěry, jež potřebuje matematika, stačí úplně obecná implikace, daná naší tabulkou. Je mnohem jednodušší než „strict implication" a technicky se jí mnohem lépe pracuje. (Nezdá-li se býti čtenáři druhá řádka tabulky dosti jasná, nechť si ji přiblíží tímto příkladem: Je-li $3 . 5 = 16$, pak je v účtě chyba. ‚$3 . 5 = 16$' má hodnotu N, věta ‚v účtě je chyba' hodnotu P a celé spojení má zřejmě hodnotu P.)

Implikace použijeme teď k tomu, abychom si po druhé, a to trochu jiným způsobem ukázali, že pravdivostní funkce výroků nejsou na sobě nezávislé, tím také se nám povaha implikace osvětlí s jiné strany, protože ji uvedeme ve vztah k disjunkci. Nahraďme v tabulce pro spojení „vel" výrok ‚p' výrokem ‚$\bar{p}$':

$\bar{p}$	q	$\bar{p} \vee q$
N	P	P
P	P	P
N	N	P
P	N	N

Při tom ponecháme hodnoty v třetím sloupci v původním sledu, od shora vzato P, P, P, N, protože to jsou hodnoty, jež ono spojení charakterisují. V minulém příkladě, kde jsme uváděli ve vztah konjunkci a disjunkci, se musely změniti hodnoty posledního sloupce v opačné, poněvadž šlo o negování celého spojení obou výroků v disjunkci.

Tato poslední tabulka se shoduje až na nepodstatnou výměnu v první a druhé dvojici řádků s tabulkou pro spojení ‚$p \rightarrow q$'. Je tedy možno implikaci ‚$p \rightarrow q$' čísti také jako disjunkci ‚non p nebo (také) q'. Spojení dvou výroků implikací a disjunkcí nejsou tedy také na sobě nezávislá a záleží jen na nás, které z nich chceme považovati za základní a které za odvozené. Obě spojení jsou ekvivalentní a jsou zase ukázkou transformace logické.

Můžeme tedy, užívajíce odvozených výsledků, psáti

$$\bar{p} \vee q \equiv_{Df} p \rightarrow q,$$

t. j., výraz na levé straně definiční rovnice vyjádřiti výrazem

$$‚p \rightarrow q'$$

anebo

$$p \rightarrow q \equiv_{Df} \bar{p} \vee q.$$

Právě tak lze podle výsledku, jejž jsme odvodili před tím, psáti

$$p \vee q \equiv_{Df} \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$$

anebo

$$\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}} \equiv_{Df} p \vee q$$

podle toho, které ‚spojení' chceme vzíti za základní a které za definované. Je na př. patrno, že by stačilo vzíti za základní spojení disjunkci. Spolu s negací, která má zcela zvláštní postavení, stačí tato pravdivostní funkce vyjádřiti konjunkci a také implikaci.

Radikálním způsobem zjednodušil americký logik Sheffer všechny funkce hodnot *P* a *N* tím, že je redukoval na jedinou, kterou lze vše vyjádřiti. Pro zajímavost si ukážeme, jak je to možné. Zavedeme jediný vztah mezi výroky, totiž ‚neslučitelnost'. Značiti budeme ‚$p \mid q$' a čísti budeme ‚p je neslučitelné s q'. Volně přeloženo: ‚p' a ‚q' neplatí současně. Negace výroku p se pak vyjádří ‚$p \mid p$' (‚p' je neslučitelné samo se sebou, tedy ‚non p'). Spojení „et" je vyjádřeno jako negace neslučitelnosti výroku ‚p' a ‚q', tedy $(p \mid q) \mid (p \mid q)$. Tento výraz je snano srozumitelný, podíváme-li se na negaci výroku, vyjádřenou Shefferovým symbolem. Po obou stranách pro neslučitelnost jsou stejné závorky. T. j. ‚p/q' neplatí. Pak však neplatí, že ‚p' a ‚q' jsou neslučitelné a platí tedy současně, čili ‚p a q'. Spojení „vel" je vyjádřeno jako $(p/p) \mid (q/q)$, obsahově tedy, že negace ‚p' je neslučitelná s negací ‚q'. Z toho jde však ‚p nebo q'. Máme-li již tyto výsledky, není těžké, vyjádřiti implikaci, o níž víme z předchozího, že ji lze převésti na disjunkci.

Shefferovou redukcí se dále nebudeme zabývati. Je pozoruhodná s technického stanoviska a jedním z pěkných výsledků této redukce je fakt, že umožnila vyjádřiti základní věty logiky větou jedinou. O jedinou větu se tedy může opříti celá budova formální logiky. Důkaz provedl v minulé světové válce nadaný, bohužel, předčasně zesnulý francouzský logik a matematik Nicod, žák Russelův.

Spojení většího počtu výroků než dvou by bylo možno prováděti také tabulkovou methodou dále. Počet polí ovšem vzrůstá a jednodušší je, rozložiti každé takové spojení na menší celky. Každý celek pak má charakter jednoduchého výroku. Na př. spojení tří výroků

$$‚(p \vee q) \,.\, r'$$

není než konjunkcí dvou nových výroků, výroku ‚$p \vee q$' a výroku ‚r'. Obdobně se, jak známo, převádí třeba v elementární matematice výpočet mocniny trojčlenu

$$(a + b + c)^n$$

na výpočet mocniny dvojčlenu

$$((a + b) + c)^n.$$

Seznámili jsme se teď se základními logickými operacemi výrokového počtu a musíme si ukázati věty, z nichž plyne, jakým způsobem se těch operací užívá. Logické principy antické logiky jsou nahraženy soustavou základních vět, na něž můžeme nahlížeti jako na operační pravidla. Počet základních vět není přesně určen. Některé soustavy užívají šesti (Frege), pěti (Russel), čtyř (Hilbert), menším počtem základních vět se hojně zabývali polští logikové (Lukasiewicz, Tarski) a konečně víme již, že tento počet lze redukovati až na větu jedinou (Nicod; Leszniewski později jiným způsobem také). Jak je tomu s principy antické logiky? Tyto principy jsou v těchto novodobých soustavách logických odvoditelnými větami. Veliké obohacení nových soustav proti antice spočívá v tom, že všechna pravidla pro operace s výroky výslovně uvádí, nic nezamlčuje. To je právě dobře patrno na okolnosti, že antické principy logiky jsou na př. v soustavě, kterou si zanedlouho uvedeme *odvozenými* větami.

Základní věty logické soustavy se také někdy nazývají axiomy té soustavy. Tomuto pojmenování se vyhneme a ponecháme si pojmenování ‚axiom' pouze pro soustavy matematické. Jeden z důvodů, proč tyto základní věty nenazýváme axiomy, poznáme, až si promluvíme o t. zv. závěrových axiomech v matematice.

Soustava základních logických vět, z nichž vše, co potřebujeme, můžeme odvoditi, musí splňovati některé podmínky, které si ihned uvedeme. Bez splnění těchto podmínek by byla soustava prázdnou hrou bez jakéhokoli užití. Setkáme se v první z obou podmínek s požadavkem, který známe z rozhovoru o matematickém předmětu. Požadavky jsou:

1. Nesmí býti v této dvojhodnotové soustavě odvoditelná věta tvaru ‚$p . \bar{p}$'. Dokážeme v pozdějším textu velmi jednoduše prostředky výrokového počtu, že z takové věty by plynula *každá* věta. Tím by byla soustava naprosto nepotřebná, protože by připustila i odvození vět nesprávných.

2. Soustava základních vět musí vyhovovati podmínce nezávislosti. Jednotlivé věty soustavy nesmí býti možno odvoditi souhrn ostatních.

Poznámka k požadavku 1. — Požadavek tento je zásadního rázu. Znala jej obsahová logika starší, mnohokráte byl tento požadavek zdůrazněn již ve středověku. Pro zajímavost uvedu delší citát z díla Duns Scotova. Duns Scotus byl jeden z nejsubtilnějších logiků středověké scholastiky. Příkladem předběhneme formální důkaz, slíbený v odst. 1., že z věty tvaru ‚$p . \bar{p}$' následuje každá věta. „Ad quamlibet propositionem implicantem contradictionem de forma sequitur quaelibet alia propositio in consequentia formali." To je důvod, pro který musí být splněna podmínka 1. Zajímavé je však Scotovo odůvodnění, které podává příkladem: „Socrates currit et Socrates non currit; igitur tu es Romae". To je věta, jejímž prvním členem je kontradikce, Sokrates běží a (současně) neběží — z této kontradikce následuje jakákoli věta, Duns Scotus volí větu: ‚proto ty jsi v Římě'. Jeho důkaz je tento: „Probatur quia ad dictam copulativam sequitur quaelibet eius pars gratia formae. Tunc reservata ista parte „Socrates non currit", arguantur ex alia sic: „Socrates currit, igitur Socrates currit vel tu es Romae", quia quaelibet propositio infert seipsam formaliter cum qualibet alia in una disjunctiva. Et ultra sequitur: „Socrates currit vel tu es Romae; sed Socrates non currit (ut reservatum fuit); igitur tu es Romae, quod fuit probatum per illam regulam: ex disjunctivam cum contradictoria unius partis ad reliquam partem est bona consequentia."*)

Jemná argumentace Scotova probíhá asi takto: z konjunkce ‚Sokrates běží a Sokrates neběží' plyne věta ‚Sokrates běží' i věta ‚Sokrates neběží'. Z věty ‚Sokrates běží' plyne formálně věta ‚Sokrates běží nebo ty jsi v Římě' [srovnej s tím později uvedenou základní větu b) výrokového počtu]. Duns Scotus znal však již implikaci v té podobě, jak ji známe my. Čtenář si vzpomene, že implikace mezi prvky ‚p' a ‚q' je ekvivalentní disjunkcí, ‚$\bar{p} \vee q$'. Tohoto obratu teď užije Duns Scotus. Věta ‚Sokrates běží *nebo* ty jsi v Římě' je ekvivalentní větě ‚Sokrates neběží *implikuje* ty jsi v Římě'. Ale předpoklad „Sokrates neběží" ještě máme v zásobě. S tím jsme dosud nic nepodnikli. Užijeme-li tohoto předpokladu, jenž plynul z kontradiktorické první věty, můžeme uzavříti: „ty jsi v Římě".

Nejde mi tu o to, osvěžovati středověkou scholastiku. Musíme si však uvědomiti, že technicky byla tato logika bezmála tak daleko, jako dnes, a cíle sledovala velmi podobné. Hlavně neúprosnou přesnost. Příklad Scotův dnešního čtenáře nemusí zajímati, ale forma argumentace má trvalou cenu. Důkaz jedné ze základních vět celé methodologie matematiky i logiky, že v základ-

*) Lukasiewicz, l. c., str. 130, 131.

ních větách soustavy nesmí býti skryt spor, by nebylo dnes možno přesněji provésti.

Poznámka k bodu 2. — Požadavek druhý, vyslovující nezávislost základních vět soustavy, není *jen* požadavkem úspornosti, aby totiž základních vět bylo co nejméně. Je sice zcela správné, volíme-li základních vět (v matematice pak základních axiomů) co možno nejméně, právě z důvodů ekonomických. Je tu však ještě okolnost jiná, již si nejlépe uvědomíme na dějinách pátého postulátu Euklidova. Neškodí, že to náhodou je postulát matematický. Kdyby byl postulátem logickým, nebyla by úvaha jiná. Kdyby postulát o existenci jediné rovnoběžky daným bodem k dané přímce bylo možno odvoditi z ostatních axiomů euklidovské geometrie, byl by jako axiom zbytečný. Byl by pouhou dokazatelnou poučkou, jež by se odvodila v systému dříve nebo později. To, že tento postulát odvoditelný nebyl, dalo základ k neeuklidovským geometriím. Postulát, který nebyl odvoditelný, bylo možno nahraditi postulátem *jiným*, právě proto, že s ostatními nesouvisel. Nezávislost základních vět, event. axiomů, na sobě není tedy jen výrazem ekonomického požadavku estetisujícího rázu, nýbrž má základní význam pro disciplinu, jejímž základem je.

To, co kdysi potřebovalo staletí, ba tisíciletí, aby bylo objasněno, je dnes možno logistickou technikou dokázati v době nepříliš dlouhé. Aby to bylo možno učiniti, není možné vystačiti s jednoduchým výrokovým počtem. Je nutno jej zdokonalit a dát mu vyjadřovací prostředky, jež na to, co chce zvládnouti, vskutku stačí. S vyšší formou takového počtu se setkáme později. Ale tu již můžeme říci, že oba hlavní požadavky, kladené na soustavu základních vět pro výrokový počet, si na té soustavě ověříme a bezespornost i nezávislost dokážeme. I když to je počet poměrně primitivní, bude ukázka obou důkazů velmi užitečná pro seznání methody, jaké se dá k takovému důkazu užíti. Leibnizovo tušení, že logického počtu bude možno užíti k řešení kontroversí, se v těchto otázkách do značné míry vyplnilo.

Soustava základních vět výrokového počtu je složena takto:

a) $p \vee p \rightarrow p$
b) $p \rightarrow p \vee q$
c) $p \vee q \rightarrow q \vee p$
d) $p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow [p \vee q \rightarrow p \vee r]$ *) **)

Se základními operacemi je již čtenář seznámen, proto tyto logické formule nebudeme již nijak obsahově vykládati. Zato si ukážeme brzo, jak se jimi pracuje, co z nich plyne jako důsledky, jako poučky.

K těmto základním formulím patří pravidla pro tvoření výrazů. Tato pravidla vyslovíme v obvyklé řeči, ne tedy v soustavě samé, protože soustava, v níž by je bylo možno vysloviti, je příliš složitá. Již jednou jsme se o této věci zmínili. Není však proto třeba míti podezření, že by to nebylo možno.

Pravidla pro tvoření výrazů:

1. Je-li ‚p' výraz, je také ‚$\bar{p}$' výraz.
2. Jsou-li ‚p' a ‚q' výrazy, je jím také ‚$p \vee q$'.

---

*) Závorek se užívá pro větší přehlednost a oddělení výrazů, jež k sobě patří. Pravidla o užívání závorek výslovně neuvádím, užití bude patrno ze souvislosti.

**) Obvykle bývá místo naší věty d) uváděna věta d'):

$$(q \rightarrow r) \rightarrow [p \vee q \rightarrow p \vee r].$$

Lze dokázati, že naše soustava je rovnocenná se soustavou, jež má místo věty d) větu d').

Vzhledem k tabulkám, jimiž jsme si stanovili základní spojení výroků, by se mohla zdáti tato pravidla zbytečná. Nejsou zbytečná tehdy, položíme-li za základ celé soustavy pouze vyjmenované základní věty a nepoužijeme-li tabulek. V tom případě je nutno doplnit formule a) $\div$ d) pravidly, z nichž dvě první jsme uvedli a další právě uvedeme. Další pravidla vzhledem k soustavě základních vět jsou:

3. Závěrové pravidlo: Je-li ‚p' formule a je-li ‚$p \rightarrow q$' formule, pak je také ‚q' formulí. Formulí je pak buď základní věta nebo důsledek základní věty nebo vět. Obsahově říká toto pravidlo asi tolik: dejme tomu, že důsledkem našich úvah je věta X. Z věty X však plyne formálně věta Y (pozor na volný překlad implikace!). Z těchto obou předpokladů můžeme uzavříti na platnost věty Y. Tak se tvoří úsudky v řetězcích až k výsledku, který potřebujeme.

4. Jestliže se vyskytuje v nějaké formuli výrok obecně ‚r', pak můžeme na jeho místo položiti do všech formulí, v nichž se v téže souvislosti vyskytuje, výraz z jiných výroků.

Ukážeme si teď, jak se ze soustavy základních vět odvozují důsledky, logické poučky. Seznámíme se tak s logistickou technikou, jež nám bude v rozboru později nápomocná. Při důkazech se budeme stále odvolávati na základní věty a), b), c), d).

1. $$p \vee \bar{p}$$

(tato formule je slabší než princip „tertium non datur", říká ‚p nebo také non p').

Důkaz: $p \vee p \rightarrow p$ věta a)

$p \rightarrow p \vee p$ věta b),

kde za ‚q' je položeno ‚p'.

Pomocná věta: Je-li ‚$A \rightarrow B$' formule a ‚$B \rightarrow C$' také formule, je také ‚$A \rightarrow C$' formule. (Místo výroků, označených malými písmenami, píšeme teď písmena velká, označující event. výrazy z výroků.)

Důkaz pomocné věty: ‚$B \rightarrow C$' je podle předpokladu formule. Vložme ji tedy do věty b), kam za ‚q' položíme ‚$\overline{A}$'.

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \vee \overline{A}.$$

Protože ‚$B \rightarrow C$' je formule a právě napsaná implikace je také formule (vzniklá dosazením do zákl. věty), je podle závěrového pravidla také ‚$(B \rightarrow C) \vee \overline{A}$' formule. Vložíme-li tuto formuli do levé strany věty c), dostáváme

$$(B \rightarrow C) \vee \overline{A} \rightarrow \overline{A} \vee (B \rightarrow C)$$

závěrovým pravidlem tedy

$$\overline{A} \vee (B \rightarrow C).$$

Podle věty d) však

$$\overline{A} \vee (B \rightarrow C) \rightarrow [\overline{A} \vee B \rightarrow \overline{A} \vee C],$$

závěrovým schematem tedy

$$\overline{A} \vee B \rightarrow \overline{A} \vee C.$$

Víme již z rozboru tabulkových definicí spojení výroků, že levá i pravá strana této poslední implikace se dá psáti zase jako implikace. Tedy

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C).$$

Protože ‚$A \rightarrow B$' je podle předpokladu formule, je jí podle pravidla o závěru také ‚$A \rightarrow C$'. Tím je dokázána pomocná věta. Užijeme-li jí na obě implikace, napsané na počátku důkazu, t. j. formule

$$p \to p \vee p \quad \text{a} \quad p \vee p \to p,$$

dostáváme ihned

$$p \to p,$$

to však není nic jiného nežli

$$,\bar{p} \vee p'.$$

Dosazením této formule do levé strany věty c) a novým užitím závěrového pravidla máme formuli

$$p \vee \bar{p}.$$

2. $$p \sim \bar{\bar{p}},$$

nový znak, jejž teprve teď zavedeme, je logická ekvivalence a je definován takto:

$$A \sim B \equiv_{Df} A \to B \,.\, B \to A,$$

kde jsme opět místo značek pro jednotlivé výroky užili velkých písmen, jež mohou značiti výrazy z výroků sestavené.

Důkaz: $,\bar{p} \vee \bar{\bar{p}}'$ je právě odvozená formule $,p \vee \bar{p}'$ kde za $,p'$ je položeno $,\bar{p}'$. Formule $,\bar{p} \vee \bar{\bar{p}}'$ je však $,p \to \bar{\bar{p}}'$, a to je podle definice ekvivalence jedna část, potřebná k důkazu. Do této dokázané formule vložíme za $,p'$ opět ,non p'; dostaneme

$$\bar{p} \to \bar{\bar{\bar{p}}}.$$

Tuto formuli vložme na místo závorky do levé strany implikace základní věty d). Dostaneme

$$p \vee (\bar{p} \to \bar{\bar{\bar{p}}}) \to [p \vee \bar{p} \to p \vee \bar{\bar{\bar{p}}}].$$

Užijeme dvakrát závěrového pravidla. Především je formulí levá strana této implikace.*) Potom však můžeme závěrem odloučiti formuli

$$p \vee \overline{p} \rightarrow p \vee \overline{\overline{\overline{p}}};$$

protože však, jak již víme, $p \vee \overline{p}$ je formule, je dalším užitím závěrového pravidla $p \vee \overline{\overline{\overline{p}}}$ také formule. Vložme tuto formuli do levé strany základní věty c). Dostaneme

$$p \vee \overline{\overline{\overline{p}}} \rightarrow \overline{\overline{\overline{p}}} \vee p,$$

tedy závěrem formuli

$$\overline{\overline{\overline{p}}} \vee p.$$

To je však jen jinak psaná formule

$$\overline{\overline{p}} \rightarrow p,$$

čímž jsme obdrželi druhou implikaci pro úplný důkaz.

Dokázaná věta se dá interpretovati jako věta o dvojí negaci. Je příznačná pro dvojhodnotovou logiku, dvojnásobnou negací se vrací výroku jeho původní hodnota. Je to právě jedna z vět, proti kterým namířili intuicionisté svoje nejtěžší zbraně. Formálně skromné, nenápadné vyřčení této věty nás nesmí mýlit při úvahách o jejím dosahu. S užitím jejím se v matematické literatuře setkáváme každou chvíli. Z neplatnosti negace nějaké věty se usuzuje na její správnost tehdy, není-li pří-

*) Tuto okolnost snadno nahlédneme, vložíme-li formuli $\overline{p} \rightarrow \overline{\overline{\overline{p}}}$ do věty b) za ‚p' a položíme-li do téže věty a ‚q' výrok ‚p'. Závěrem dostaneme formuli ‚$(\overline{p} \rightarrow \overline{\overline{\overline{p}}}) \vee p$', kterou vložíme celou do levé strany věty c). Závěrem dostaneme ‚$p \vee (\overline{p} \rightarrow \overline{\overline{\overline{p}}})$', což je levá strana implikace.

mé cesty, jak onu větu dokázati jinak, jak by intuicionisté řekli, „konstruktivně".

Podobný význam má pro matematické úvahy tato věta

3. $$(p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p}).$$

Důkaz:

$$q \to \overline{\overline{q}},$$

což je jedna z formulí, jež jsme dokazovali pro předešlou ekvivalenci. Tuto formuli vložme do levé strany věty d) a pišme krom toho v této větě za ‚p' ‚non p':

$$\overline{p} \vee (q \to \overline{\overline{q}}) \to [\overline{p} \vee q \to \overline{p} \vee \overline{\overline{q}}]. \qquad \text{(i)}$$

Pro další vedení důkazu potřebujeme pravou stranu této implikace; zdálo by se, že ji snadno osamostatníme užitím závěrového schematu. Důkaz je snadný. Vložením formule ‚$q \to \overline{\overline{q}}$' do věty b) dostaneme $(q \to \overline{\overline{q}}) \to$ $\to (q \to \overline{\overline{q}}) \vee \overline{p}$. Závěrem tedy máme formuli $(q \to \overline{\overline{q}}) \vee$ $\vee \overline{p}$. To ještě není to, co potřebujeme. Tuto formuli vložíme do levé strany implikace věty c), tedy

$$(q \to \overline{\overline{q}}) \vee \overline{p} \to \overline{p} \vee (q \to \overline{\overline{q}}).$$

Užitím závěru jsme tedy dokázali, že první člen implikace (i) je formulí. Lze tedy užíti závěru na implikaci (i), takže

$$\overline{p} \vee q \to \overline{p} \vee \overline{\overline{q}}$$

je také formule.

Pravou stranu poslední implikace vložme do věty c). Dostaneme

$$\overline{p} \vee \overline{\overline{q}} \to \overline{\overline{q}} \vee \overline{p}.$$

Užijeme teď obecné věty, kterou jsme si dokázali jako pomocnou větu při odvození formule $p \vee \overline{p}$. Užitím této věty dostáváme z obou posledních implikací

$$\overline{p} \vee q \to \overline{\overline{q}} \vee \overline{p},$$

což je možno psáti

$$(p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p}).$$

Také tato věta je formálním modelem pro mnoho matematických důkazů. Nepodaří-li se (třeba pro technické obtíže) dokázati přímo, že z věty ‚p' následuje věta ‚q', je často snazší, dokázati z opačného předpokladu ‚$\overline{q}$' větu ‚$\overline{p}$'. Protože však tento závěr plyne z nedokázaného prvního závěru, je možno zpět usouditi na platnost závěru ‚z věty p následuje q'. Implikaci, kterou jsme dokázali (viz na př. Hilbert-Ackermann: Základy teoretické logiky, str. 25), je však možno snadno doplniti na *ekvivalenci* a tak způsob úsudku, jenž jsme uvedli, podstatně zesíliti. Dokázáno je dosud:

$$(p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p})$$

a máme dokázati

4. $$(p \to q) \sim (\overline{q} \to \overline{p}).$$

Pišme dokázanou implikaci tak, že za ‚p' položíme ‚non q' a za ‚q' položíme ‚non p'. Dostaneme

$$(\overline{q} \to \overline{p}) \to (\overline{\overline{p}} \to \overline{\overline{q}}).$$

Protože však podle ekvivalence již dříve dokázané dvojí negace vrací výroku jeho hodnotu, platí

$$(\overline{q} \to \overline{p}) \to (p \to q).$$

Tím je dokázána implikace pravé a levé strany navzájem, čili pode naší definice, *ekvivalence*. Proto je možno způsobu důkazu, o němž jsme mluvili, užíti jako rovnocenného s důkazem přímým. Intuicionista by tak nikdy neusuzoval, alespoň ne tam, kde jde o úvahy s nekonečnem.

Ještě jednu větu, zajímavou pro matematické úvahy, si tu ukážeme. Podáme si jednoduchý formální důkaz nesprávnosti předpokladu, jestliže má tu vlastnost, že implikuje svoji negaci. Tato věta je základem pro methodu nepřímého důkazu.

5. $$(p \to \bar{p}) \to \bar{p}.$$

Důkaz: Dosaďme do věty a) za ‚p' ‚non p'. Dostáváme

$$\bar{p} \vee \bar{p} \to \bar{p}.$$

Levá strana této implikace se dá psáti $p \to \bar{p}$, takže

$$(p \to \bar{p}) \to \bar{p}.$$

6. $$p \backsim p$$

(princip identity).

Důkaz: Podle 1. platí ‚$p \to p$' a ‚$p \to p$', tedy ‚$p \backsim p$'.

Důkazy, jež jsme právě prováděli, jsou podrobně popisovány, aby usnadnily porozumění tomu, kdo se po prvé seznamuje s látkou této povahy. Mechanika důkazů je již z těchto ukázek patrná. Důležité je, pro začátek si uvědomiti celý význam závěrového pravidla: závěrovým pravidlem nesmíme odtrhnouti druhou část implikace dříve, dokud nemáme dokázáno, že levá strana té implikace je formule.

Podáme si teď důkaz věty: ze sporného předpokladu plyne *každá* věta. Víme již, že tuto větu znal a dokázal prostředky tehdejší logiky Duns Scotus. Důkaz má svoji cenu v tom, že názorně ukazuje, proč věta tvaru ‚$p \,.\, \bar{p}$',*)

*) nebo tvaru ‚$\bar{p} \,.\, p$', který je s ním ekvivalentní.

což je snad nejkratší vyjádření sporné věty, nemůže býti důsledkem základních vět logiky. Kdyby byla jejich důsledkem, byla by jejich důsledkem *každá* věta, což by vedlo k absurdnosti. Soustava by nebyla k ničemu potřebná.

Libovolnou (tedy také nesprávnou) větu si nazveme ‚n'. ‚$p \vee \bar{p}$' je formule, jak jsme dokázali. Vložme do věty b) za ‚p' formuli ‚$p \vee \bar{p}$', za ‚q' pak ‚n'. Dostáváme

$$p \vee \bar{p} \rightarrow (p \vee \bar{p}) \vee n.$$

Protože levá strana implikace je formule, je jí také, podle závěrového pravidla,

$$(p \vee \bar{p}) \vee n.$$

Vzpomeneme-li si na souvislost implikace a disjunkce, vidíme, že tuto formuli lze psáti

$$\overline{p \vee \bar{p}} \rightarrow n.$$

Podle úvahy, kterou jsme provedli při výkladu spojení výroků tabulkovou methodou, je však disjunkce ekvivalentní s negací konjunkce, jejíž výroky mají opačné pravdivostní hodnoty. *Negace* disjunkce, kterou máme na levé straně, musí býti tedy *dvojnásobnou* negací takové konjunkce, t. j. konjunkcí samou, podle věty o dvojí negaci. Platí tedy

$$(\bar{p} \,.\, p) \rightarrow n.$$

Věta ‚$\bar{p} \,.\, p$' jest však naším *předpokladem,* jemuž pro chvíli propůjčíme význam formule. Podle závěrového pravidla tedy můžeme uzavříti na větu ‚n'. Tím jsme ukázali, že z předpokladu ‚$\bar{p} \,.\, p$' následuje *každá* věta.

Tak se dostáváme přirozeně k zásadní otázce každé logické soustavy, k otázce bezespornosti. Již dříve jsme upozornili, že matematický předmět může býti zaručen dvěma způsoby — buď konstruktivně, jak si to přejí intuicionisté, nebo tak, že ukážeme, že z definovaného předmětu neplyne absurdní důsledek. Tento druhý způsob považuje intuicionista za „morálně slabší", ne-li za methodicky pochybený. Co je absurdní důsledek, teď přesně víme, je to věta tvaru ‚$\bar{p} . p$'. Záruka existence předmětu, daná bezesporností, je do jisté míry slabší než záruka poskytovaná konstrukcí — ale je zato podmínkou, bez níž nelze o existenci vůbec hovořiti.

Uvidíme nyní, že logické formule našich základních vět jsou docela zvláštního druhu. Teprve až si ukážeme tuto zvláštní povahu jejich, přikročíme k důkazu jejich bezespornosti, který bude veden jinou methodou, než čistě logickou. Logické věty nepřinášejí nám žádnou novou zkušenost. Jsou prázdnými schematy, do nichž je možno zkušenost lépe nebo hůře vtěsnat, ale samy o sobě, jako schemata, běží na prázdno. Toto nejasné tušení o zvláštní povaze logických vět bylo známo již dávno. Máme teď v moderní logice prostředky, jednoduše ukázati, v čem spočívá ten zvláštní ráz logických vět. Logické věty jsou tak zvané *tautologie,* t. j. věty vždy správné, ať se týkají jakéhokoliv materiálu. Tedy nejsou na něm závislé. Povahu takové tautologie je možno nejlépe charakterisovati tak, že je nezávislá na jakékoli změně pravdivostních hodnot svých složek. Matematicky řečeno, P-hodnota tautologie je invariantní vůči jakýmkoli substitucím pravdivostních hodnot, jež bychom provedli u jejích složek (výroků). Je jasné, že vedle vět vždy správných, jakými jsou tautologie, musí býti v naší soustavě dvojhodnotové logiky také věty vždy nesprávné. Ty jsou jakýmisi negativy tautologií a mezi těmito oběma druhy vět, jako mezi dvěma póly, jsou věty, jež nazýváme *syntetickými*. Takové věty jsou správné nebo nesprávné. Patří k nim věty zkušenostní, věty životní praxe. Správné zkušenostní věty mohou míti užití pro poznání vědecké.

Důkaz bezespornosti základních vět naší soustavy bychom mohli teď provésti tak, že bychom ukázali na každé větě a) $\div$ d), že sama pro sebe je tautologií. Pak musí, když každá z těch vět je pořád hodnoty P, také jejich konjunkce býti stále hodnoty P. Z konjunkce základních vět lze pak odvoditi všechny potřebné věty výrokového počtu. Musili bychom ještě dokázati, že užití závěrového schematu tautologičnost neporuší a vyzkoušeti ještě ostatní pravidla, jež jsme si po uvedení vět a) $\div$ d) napsali, ale v podstatě by důkaz bezespornosti neposkytl již obtíží. Abychom si mohli ukázati ještě jinou methodu důkazu bezespornosti naší soustavy, nebudeme voliti tuto cestu, přesvědčiti se o každé základní větě, že je tautologií. Pouze na příkladě ukážeme, jak by se takové šetření vedlo.

Tautologie je taková formule našeho logického počtu, jejíž pravdivostní hodnota P je nezávislá na substituci hodnot pravdivosti P a N, provedené na její jednotlivé výroky. T. j., máme-li formuli $\Theta\ (p, q, r, \ldots v)$ o výrocích ‚p', ‚q', ‚r', ... až ‚v', pak bude tato formle tautologií tehdy, když poslední sloupec v tabulce, která definuje spojení ‚Θ', bude obsahovati vesměs P.

Mějme třeba formuli $\Theta\ (p, \bar{p}) \equiv p \vee \bar{p}$, jež je důsledkem základních vět. Toto spojení výroků je funkcí pouze ‚p' a jeho negace, takže se tabulka zjednoduší

p	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
P	N	P
N	P	P

na tabulku dvojřádkovou pro hodnoty P, N. Z tabulky pro spojení „vel" následuje, že v případech, jež jsou tu jedině možné, dává spojení vždy hodnotu P.

Jinou ukázkou nám může být přímo základní věta b).

Tato věta, již známe ve tvaru ‚$p \rightarrow p \vee q$', je rovnocenná s formulí $\bar{p} \vee p \vee q$, jak víme ze vzájemného vztahu disjunkce a implikace. Chápeme-li tuto formuli způsobem, který pro přehlednost vyznačíme novými závorkami, takto $(p \vee \bar{p}) \vee q$, potom má závorka vždy hodnotu P; ať již má ‚q' hodnotu jakoukoli, má celá disjunkce hodnotu P. To plyne ze stanovení disjunkce. Je tedy základní věta b) také tautologií.

Příkladem na větu vždy nesprávnou (protipól tautologie) je věta, o níž jsme nedávno uvažovali, věta tvaru ‚$p \,.\, \bar{p}$'. Tabulka pro toto spojení bude zcela podobná jako pro spojení ‚$p \vee \bar{p}$, tedy také dvojřádková v hodnotách P, N, ale s tím rozdílem, že v posledním sloupci hodnot spojení budou pouze N.

Přestáváme na těchto malých ukázkách vyšetřování tautologičnosti formulí našeho počtu, jež by se bez obtíží dalo rozšířiti na všechny základní věty. Osvětlení povahy tautologie s tohoto stanoviska je významným objevem nové logiky a největší zásluhu o ně má již dříve jmenovaný Wittgenstein. V čem jsou tedy tautologie platné, když nepřinášejí nového poznání, když je lhostejné, jaké věty do jejich mechanismu vpravíme? Právě proto, že *tautologie není obsahem věty ovlivněna,* je uzpůsobena k tomu, aby její pomocí byl výraz transformován. Tautologická transformace nám ukáže výraz v jiném světle a zvláštní povaha tautologie, že nic nepřidá ze svého během sebedelší úvahy, zaručuje, že nedostaneme ve výsledku více, než jsme do předpokladů vložili.

Bezespornost soustavy základních vět dokážeme teď způsobem jiným, ač jen zdánlivě novým. Tento způsob využívá totiž tautologičnosti formulí také a jen jeho aritmetická forma je něčím methodicky novým.*) Bezespornost dokážeme tak, že najdeme nějaký *model,* jenž bude tak vhodně volen, aby se na něm dala bezespornost ověřiti. Takové methody, kdy se nalezl vhodný model pro celou theorii, neužívá formální věda po prvé. Bezespornost jisté soustavy neeuklidovské geometrie byla převedena na bezespornost euklidovské geometrie tak, že se geometrie neeuklidovská vhodně interpretovala jako geometrie na euklidovské kouli. Model tedy byl nalezen — geometrie neeuklidovská (jeden druh, ne všechny!) není než obrazem geometrie na obyčejné kouli a tím se přenese bezespornost soustavy této své doby nezvyklé geometrie na bezespornost euklidovské geometrie. V dobách, kdy tento *model* vznikl, nebyla ještě bezespornost euklidovské geometrie dokázána — ale byl tu získán jakýsi morální podklad, jakási morální jistota pro životní schopnosti nového vědeckého odvětví. Právě v té situaci budeme i my s nynějším důkazem be-

*) Důkaz je v podstatě podle Hilberta, l. c. str. 29 a násl., ale methoda aritmetické interpretace je starší a vede zpět k výzkumům amerických logiků Posta a Huntingtona z počátku našeho století.

zespornosti základních vět naší logické soustavy. Bezespornost převedeme na bezespornost aritmetiky, pokud se její operace týkají malých čísel. Je ku podivu, že náhodou obě vyšetřování, na tomto místě zmíněná, vyšetření bezespornosti geometrie i vyšetření bezespornosti základních vět logiky — tedy oborů velmi vzdálených — se převádí na bezespornost aritmetiky. Bezespornost euklidovské geometrie převedl totiž Hilbert ve svém známém díle „Základy geometrie" na bezespornost aritmetiky. Teď by se čtenář mohl právem zeptat, při nejmenším: a jak je to s bezesporností aritmetiky? neptal-li by se spíše, vzhledem k *logice:* jak je možné, že se bezespornost něčeho, co má býti základem i pro matematiku, tedy soustavy základních vět logiky, převádí na aritmetiku?

Odpověď není tak těžká, jak by se na první pohled zdálo, aspoň pokud jde o logiku. Logika výrokového počtu ke svému důkazu bezespornosti aritmetiku nepotřebuje. Víme již, jak by důkaz vypadal, z předchozího výkladu, o tautologii. Aritmetický model, o němž byla řeč i pro logiku, není než názornou demonstrací bezespornosti. Pokud se týká aritmetiky samé, promluvíme si později o jisté soustavě, jež obsahuje aritmetiku, a o níž platí velmi zajímavá věta (Gödelova). K porozumění nástinu důkazu této věty se musíme seznámiti ještě s některými novými výrazovými prostředky logického počtu.

Po tomto odbočení se obrátíme k hledání modelu pro naši soustavu základních vět. Výroky $p, q, r, \ldots$ budeme považovati za aritmetické proměnné, jež mohou nabýti pouze hodnot 0 nebo 1. Spojení ‚$p \vee q$' budeme považovati za aritmetický součin a negaci přeložíme do aritmetiky takto: přisoudíme-li výroku ‚p' hodnotu P, pak má v aritmetickém pojetí hodnotu 1, výrok ‚$\bar{p}$' má tomto pojetí hodnotu 0.

$$\bar{1} = 0 \quad \text{a} \quad \bar{0} = 1.$$

Zvolíme-li takto svůj aritmetický model, dávají, jak uvidíme, všechny tautologie vždy hodnotu 0. Základní věty musí míti hodnotu 0 pro jakoukoli hodnotu svých proměnných, musí dávati tedy 0 identicky, jak se říká v aritmetice.

Přesvědčíme se o tom u věty a).

1. $\overline{\bar{1} . 1} . 1$, což je $0 . 1 = 0$

(násobení značíme jak obvykle tečkou, není to tedy značka logické konjunkce).

2. $\overline{\bar{0} . 0} . 0$, což je $\bar{0} . 0$, podle úmluvy tedy $1 . 0 = 0$. Jiných možností u této věty není.

Základní věta b).

1. $1 . 0 . 1 = 0$ pro hodnoty $p \ldots 0$, $q \ldots 1$.
2. $1 . 0 . 0 = 0$ pro hodnoty $p \ldots 0$, $q \ldots 0$.
3. $0 . 1 . 0 = 0$ pro hodnoty $p \ldots 1$, $q \ldots 0$.
4. $0 . 1 . 1 = 0$ pro hodnoty $p \ldots 1$, $q \ldots 1$.

(Pozn.: výrokům ‚p' a ‚q' nejsou ovšem přiřazeny hodnoty 0, 1. Pro stručnost jsem vynechal přiřazení hodnot P, N, jimž teprve 1, 0 odpovídá.)

Jiných možností pro tuto větu b) není.

U základní věty c) by byly k vyšetření také 4 případy, hodnocení proměnných vede k 2^2 případům, jelikož jsou zase jen 2 proměnné. U věty d) by bylo nutno vyšetřiti 2^3 případů, protože různé výroky jsou 3. Podrobné provedení nebudeme tu dále sledovati, protože je zcela mechanické povahy a nepřinese již nového nic. Abychom viděli rozdíl základních vět a jiných spojení výroků, jež nejsou tautologiemi, tedy nedají v aritmetické interpretaci 0, uveďme si tento příklad:

$$p \rightarrow (q \,.\, r).$$

Tato věta, napsaná jako všechny předchozí logistickými značkami, se neliší na první pohled nijak od vět, jež jsou tautologiemi. Na srovnání uvedu větu

$$p \rightarrow (q \rightarrow p \,.\, q),$$

o níž lze snadno ukázat, že tautologií je.

Obsahově ovšem je hoření věta podezřelá — z libovolného výroku ‚*p*' nemůže přece obecně následovati konjunkce dvou dalších libovolných výroků ‚*q*' a ‚*r*'. $p \rightarrow q \,.\, r$ je ekvivalentní s tvarem $\overline{p} \vee \overline{(\overline{q} \vee \overline{r})}$, vzpomeneme-li na souvislost konjunkce a disjunkce. Přisuďme výroku ‚*p*' hodnotu *N*, druhým dvěma *P*. Podle úmluvy, jak interpretovati negaci a disjunkci, dostáváme pro aritmetickou hodnotu zkoumané věty $\overline{0} \,.\, \overline{0 \,.\, 0}$, tedy 1. Při zvoleném hodnocení výroků nedává tedy věta 0, není tedy tautologií, protože by musila dát nulu vždy. To znamená, že věta sama je nějak nesmyslná, je mimologická, a její strukturu může míti každá zkušenostní věta třeba tvaru: Způsob života tohoto živočicha (p) vede k hospodářským důsledkům q a r pro obyvatele jistého území. Tato věta je tedy pravdivá, jsou-li splněny materielní podmínky její platnosti; není splněna na př. pro živočicha jiného druhu, než o kterém tato věta mluví.

Základní věty výrokového počtu dávají identicky 0 v aritmetickém pojetí. Zbývá ukázati, že ani závěrové schema, jehož jsme použili pro vyvození důsledku, neporuší tuto vlastnost tautologií.

Závěrové pravidlo říká: Je-li ‚A' formule a je-li také ‚$A \rightarrow B$' formule, je jí (bez dalšího zkoumání, což je důležité) také ‚B'.

‚A' budiž formule (tedy základní věta nebo důsledek z nich). Ta dává tedy v aritmetickém pojetí identicky 0. ‚$A \rightarrow B$' je však, jak víme, ekvivalentní s výrazem ‚$\overline{A} \vee B$'. ‚$\overline{A}$' bude tedy míti přiřazenou hodnotu 1. Protože však $\overline{A} \vee B$ je formule podle předpokladu, musí v aritmetickém pojetí to býti B, jež anuluje výraz, to musí tedy míti aritmetickou hodnotu 0. *Tím je však vyjádřeno, že B je také formulí.*

Nezávislost základních vět. Byla-li bezespornost základních vět životní otázkou soustavy tohoto výrokového počtu, je nezávislost otázkou sice menší důležitosti, nicméně pro logické vyšetření ještě velmi závažnou. Své doby jsme si o celé věci již obsahově něco pověděli, na tomto místě ukážeme, jak se dá nezávislost v tomto jednoduchém počtu prakticky demonstrovati. Nezávislost se také zkoumá aritmetickým modelem. Základní myšlenkou je, volit obor hodnot pro aritmetické proměnné tak, aby při této volbě dávaly třeba první tři věty a) $\div$ c) identicky 0 jako při ověřování tautologií, a čtvrtá věta dala v aritmetické interpretaci hodnotu od nuly různou. Tím se ukáže jeho nezávislost na ostatních. Způsob tento, jenž v dalším na příkladě ukážeme, umožnil Hilbertovu spolupracovníku Bernaysovi dokázati závislost páté základní věty logické soustavy Russel-Whiteheadovy na předchozích čtyřech. Pro stupeň zmechanisování, jakého dosáhla logická technika, je to velmi názorný příklad. Ukážeme teď podle Hilberta (l. c. str. 31), že základní věta a) není závislá na větách b) $\div$ d). Aritmetické hodnoty, jež budou naším oborem, jsou 0, 1, 2. Spojení znakem „$\vee$" odpovídá zase násobení, jako v důkaze bezespornosti. Negace 0 budiž 1, negace 1 tedy 0, negace 2 budiž opět hodnota 2. Taková umělá volba není než zkusmo nalezená pomůcka, nevězí za ní již nic hlubšího, volbu by bylo možno uskutečniti také jinak, možná méně vhodně, ale tak, že by také vyhovovala. Ještě úmluvu o hodnotách větších než 2. Při smluveném pojetí znaku „$\vee$" jako násobení se někdy stane, že číselná hodnota formule je větší než hodnota 2, na př. 4. V tom případě odečítáme od všech hodnot, jež by dosáhly 4 anebo byly větší, vhodné násobky 4 tak, abychom dostali číslo menší než 4. Matematicky řečeno, užíváme pouze zbytkové třídy modulo 4.

Lze teď snadno ukázati vyčtením všech možností při dosazování smluvených hodnot našeho oboru, že formule b), c), d) dávají stále hodnotu 0. Kdyby byla i formule ‚$p \vee p \rightarrow p$' z nich odvoditelná, musila by dávati také identicky 0. To je jasné proto, poněvadž *každý* důsledek formulí b) $\div$ d) musí dáti aritmeticky 0, tedy také a), jež by bylo důsledkem b) $\div$ d).

Přiřaďme výroku ‚p' hodnotu 2. Formule a) se dá psát podle způsobu nám již běžného jako disjunkce $\overline{p \vee p} \vee p$. Aritmeticky tedy $\overline{2 \, . \, 2} \, . \, 2$. Hodnotu 4 redukujeme tedy podle úmluvy na 0 a negace 0 je 1. Dává tedy poslední součin hodnotu 2. Stejně tak by se dokázala nezávislost druhých vět na zbývajících třech.

Na tomto místě ještě připojíme formální důkaz Russelovy páté základní věty z našich vět a) $\div$ d). Věta jeho zní takto:

$$p \vee (q \vee r) \rightarrow q \vee (p \vee r).$$

Důkaz:

$$r \rightarrow p \vee r$$

z věty b), kde je v pravé straně implikace provedena záměna obou členů disjunkce. Je to dovolená operace, již lze snadno dokázati.

Vložme tuto formuli do levé strany věty d) a použijme na větu d) závěrového pravidla, tedy

$$q \vee (r \rightarrow p \vee r) \rightarrow [q \vee r \rightarrow q \vee (p \vee r)],$$

takže dostaneme formuli

$$q \vee r \rightarrow q \vee (p \vee r).^{*)}$$

Zcela stejným postupem („násobením" výrokem ‚p')

$$p \vee (q \vee r) \rightarrow p \vee [q \vee (p \vee r)]$$

a výměnou v disjunkci na pravé straně

$$p \vee (q \vee r) \rightarrow [q \vee (p \vee r)] \vee p. \tag{1}$$

Druhá část důkazu:

$$p \rightarrow r \vee p$$

z věty b), kde pořad členů v disjunkci vpravo je zase vyměněn. Vložme do této formule za ‚p' výraz ‚$p \vee r$' a za výraz ‚r' položme ‚q'. Dosaneme

$$p \vee r \rightarrow q \vee (p \vee r).$$

Z této implikace a z předchozí uzavřeme podle schematu: $A \rightarrow B$ i $B \rightarrow C$ jsou formule, tedy také $A \rightarrow C$ je formule

$$p \rightarrow q \vee (p \vee r)$$

s poznámkou, že k umožnění tohoto závěru je nutno zase v disjunkci, jež je společným členem B, zase vyměnit členy disjunkce. Viděli jsme v první části důkazu, že formule implikační „vynásobením" obou stran ně-

*) neboť levá strana předchozí implikace je formulí: viz pozn. k větě 2. tohoto odstavce.

jakým výrazem nepřestane býti formulí. To je obsah věty d). Užijeme-li tohoto obratu na poslední implikaci, máme

$$[q \vee (p \vee r)] \vee p \rightarrow [q \vee (p \vee r)] \vee [q \vee (p \vee r)].$$

V této poslední formuli je na pravé straně disjunkce stejných výrazů. Lze lehce dokázati, že je ekvivalentní výrazu samému. Podle věty a) platí $p \vee p \rightarrow p$ a dosazením ‚p' za ‚q' do věty b) máme $p \rightarrow p \vee p$. Podle definice ekvivalence je tvrzení dokázáno, protože platí obě implikace. Disjunkci napravo nahradíme tedy jediným jejím členem, takže máme

$$[q \vee (p \vee r)] \vee p \rightarrow q \vee (p \vee r). \qquad (2)$$

Spojením formulí (1) a (2) a užitím závěru o dvou implikacích se společným členem, kterého jsme již častěji použili, máme hledanou formuli.

Formule je zajímavá potud, že v době, kdy Russel s Whiteheadem budovali svůj logický systém jako základ pro zpracování *celé* matematiky, neměli prostředků, jak dokázat nezávislost základních vět a byli přesvědčeni, že soustava základních vět výrokového počtu na menší počet redukovati nelze.

Logistická methoda, vyšetřiti nezávislost jednotlivých základních vět, nebo při matematické disciplině axiomů, je velkým krokem kupředu. Axiomy geometrie, aritmetiky, theorie množin, počtu pravděpodobnosti, topologie a jiných odvětví matematických, dají se vyjádřiti v logistické řeči, výrazově bohatší než je náš dosavadní systém. Důkaz nezávislosti jednotlivých axiomů je ovšem složitější, někde chybí dosud obecné methody takového vyšetřování, ale je tu velký krok kupředu, velký krok od těch dob, kdy tyto methody nebyly známé. Hlavní věc je ta, že logika *sama* si našla takové methody, jež jsou skutečně plodné a dostatečně obecné a nemusí se spoléhati na vtipný nápad, jenž v tom neb onom případě umožnil důkaz nezávislosti mimologickou cestou, jenž však nemá té nosnosti, aby zaručil dobrý výsledek ve všech případech. V mnoha případech byl takový důkaz již logistickými methodami se zdarem proveden. Postup je často ten, že analysou logistických formulí se objeví samostatné menší složky vět, jež vyjadřují axiomy a všechny axiomy se jaksi vypreparují na své základní součástky. O mnohých z nich se dá snadno ukázati, že jsou to tautologie, takže zbývá vyšetřiti to, co povahu tautologie nemá — to je pak čistě matematický postulát.

Redukce na menší počet základních vět a zkoumání nezávislosti nám poskytuje příležitost, zmíniti se o významu takové redukce pro jiný obor, pro obor základních předmětů. Jestliže základní věty, v matematice pak axiomy, jsou předpisy, jak se s předměty té soustavy zachází, pak musí být také pro každou soustavu jistý počet základních předmětů, jichž funkce je základními větami určena a všechny ostatní se již definují. Počet předmětů, dále nedefinovaných, jenž je v základech soustavy, může býti eventuelně také dál redukován.

Staré pravidlo Viléma Occama říká „Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem"; je to pravidlo ekonomické. Ale jak jsme si již řekli, ekonomičnost má hlubší význam než jen jistý estetický požitek, jak se podařilo v nějaké soustavě materiál zjednodušit. Právě tak, jako jsme si ukázali na příkladech výrokových spojení (tabulkami) jejich vzájemnou závislost, a jak jsme si zase u základních vět ukázali nezávislost, tak také je možno logisticky vyšetřiti závislost, resp. nezávislost základních předmětů matematického oboru, o který jde. Ukáže se pak, že stačí voliti celkem malý počet takových základních předmětů, a všechny ostatní se již dají jimi definovati.

Ukážeme si teď, jak je to obecně možné. Každý vědní obor má jisté množství předmětů, jimž odpovídají značky. Soubor těch značek nazveme A. V tomto souboru jsou tedy *jména* všech předmětů. Vedle toho se opírá soustava o základ axiomů, jež nazveme souhrnně soubor X. Dá se ukázati, že platí poměrně jednoduché kriterium v tom případě, když nějaká nová značka „*a*" má býti definovatelná souborem A spolu se souborem X. Methodu takovou objevil na počátku tohoto století italský matematik Padoa. Je patrno, oč jde. V důkaze se již nestaráme o předmět, značce „*a*" přiřazený, považujeme značku za slovo a zkoumáme jeho závislost na slovech skupiny A a skupiny vět X.

Uvedu jako poučný výsledek této methody zajímavá jištění polského logika Tarskiho, opřená o starší výsledky amerického matematika Veblena. Jde o základní pojmy geometrie. Mějme na mysli n-rozměrnou eukleidovskou geometrii a zaveďme si v ní dvě relace. První označme $a\ (x, y, z, t)$. Tato relace nechť značí, že pár bodů (x, y) má tutéž vzdálenost jako pár bodů (z, t). Druhou relaci, již si zavedeme, je $b\ (x, y, z)$. Tato relace nechť značí, že bod y leží *mezi* body x, z. Relace „*a*" je základní relací metrické geometrie (jako je normální analytická geometrie středoškolských učebnic), relaci „*b*" lze považovati za základní relaci topologickou. V topologii nezáleží na metrických vztazích, protože ta zkoumá zákonitosti jiné. Zkoumá na př., co zůstane zachováno (invariant), podrobí-li se její předmět spojité deformaci. Máme-li bod na úsečce, který je mezi oběma krajními, pak můžeme tuto úsečku jakkoli spojitě deformovati a tato vlastnost, ležeti „mezi", zůstane zachována, pokud se koncové body původní úsečky nespojí nebo pokud se nevytvoří nějaká smyčka. Takové možnosti se v topologii vylučují tím, že deformace musí býti jedno-jednoznačná — t. j. v našem případě každému novému bodu nové křivky (po deformaci) musí odpovídati jediný bod původní (před deformací) a naopak. Toto „ležeti mezi" je tedy topologickým invariantem.

Tarski ukázal, že je možno vybudovati celou euklidovskou geometrii logicky na obou uvedených relacích. T. j. jediné tyto relace jsou *mimologickými* relacemi, tedy čistě matematickými vztahy. Všechno ostatní dodá, abychom se tak drasticky vyjádřili, logický mechanismus. Avšak *„a"* a *„b" nejsou na sobě závislé. „a"* nelze definovati předmětem *„b"*. To je patrno na první pohled i obsahově, *„a"* má něco navíc — právě metrický pojem vzdálenosti, který v *„b"* chybí. Vezmeme-li tedy soustavu vět euklidovské geometrie jako X a soubor A, představovaný tu jedinou značkou *„a"*, lze *„b"* souborem X a A definovati. Tento výsledek sám o sobě by nebyl tak zvláštní, ale z důkazu plyne ještě tento překvapující dodatek: jedině v případě jednodimensionální geometrie (t. j. geometrie na euklidovské přímce) *není* možno *„b"* definovati pomocí *„a"*. Tam jsou tedy obě základní relace *nezávislé.*

3. *Logika intuicionistická, vícehodnotové logiky.*

Dosavadní výklad se omezoval, jak jsme od počátku ukazovali, na dvojhodnotovou logiku s význačnými hodnotami *„P"* a *„N"*. Byly učiněny úspěšné pokusy, rozšířiti dvojhodnotovou logiku. Všimneme si tu dvou; první si vyložíme jen obsahově, bude to ukázka způsobu myšlení v logice Brouwerově, zakladatele moderní intuicionistické školy. Druhou ukázkou bude trojhodnotová logika Lukasiewiczova, již uvedeme ve formalisovaném znění.

Intuicionisté, o nichž jsme již mluvili při poznámkách o matematickém předmětu, kladou podmínku konstruovatelnosti předmětu jako podmínku nezbytnou pro jeho matematickou existenci. Brouwer namířil svůj útok proti logice i matematice velmi důkladně a radikálně do hloubky. Tvrdí, že logika, stará logika se svými principy, jež jsme si své doby vypsali, není než *abstrakce* z pravidel, jež platí pro matematické úvahy o konečném počtu předmětů. Tvrdí dále, že abstrakce z těchto pravidel se ustavily v logické principy, jichž platnost se neprávem přenáší na úvahy o nekonečně mnoha předmětech. Je tedy podle Brouwera naprosto nutno vyzkoušeti pravidla staré logiky, pokud jsou na takové případy vhodná a pokud nevedou k nepotřebným výsledkům. Pokud by matematika užívala pravidel staré logiky mechanicky, může se ocitnouti v slepé uličce. Brouwerovo obrazoborectví je trochu obdobné revoluční činnosti Humeově ve věci kausality. Hume bořil předsudek proti středověké pověře v absolutní nutnost kausality — proti mechanickému zneužívání pojmu kausality, jenž nadto tehdy zdaleka neměl dnešního kritického vybroušení. Brouwer tu sahá na samé základy lidského myšlení. Proti logikům také hlásá, že mohou existovati zásadně neřešitelné problémy — vědomě tedy přidává k Du Bois Reymondovu „ignorabimus" další závaží.

Na tom, co jsme dosud z myšlenek Brouwerových uvedli, je jistě nesprávné, považovati logiku za souhrn pravidel, odvozených na úvahách o konečném počtu předmětů. Již takové úvahy předpokládají elementární užití logických principů, nehledíc k tomu, že logické principy mají mnohem širší užití než jen na matematické předměty anebo na empirické předměty, o nichž matematicky uvažujeme. Než jsou tu matematické, z větší části jen matematikovi přístupné důvody, jež uvádí Brouwer pro revisi logických principů, pokud se týká jejich užití uvnitř matematiky samé.

Abychom vpadli přímo doprostřed jeho problémů, promysleme si tuto úlohu: Je v desetinném rozvoji čísla π právě sedm sedmiček za sebou? T. j. existuje v desetinném rozvoji π řád třeba n-tý, aby po jeho dosažení číslicemi rozvoje následovalo právě těch 7 sedmiček, při čemž by „n" mohlo býti nejmenší číslo té vlastnosti? To je jeden z *jednoduchých* příkladů Brouwerových.

Při analyse podobných příkladů vytýká Brouwer logice, že dá jednoduše odpověď: buďto ano *nebo* ne. Tertium non datur. Odpověď je možno hledati několika způsoby.

1. Ukážeme, budeme-li znáti rozvoj čísla π dosti vysoko, že v něm žádaná skupina sedmiček je. To by byla t. zv. demonstrace, proti které ovšem intuicionista nemá nejmenších námitek, naopak, v jeho smyslu by rozvoj byl až k hledané skupině konstruován. Číslo π má ovšem desetinný neperiodický rozvoj — kdybychom znali jeden milion číslic za desetinnou čárkou, je to právě tak málo, jako když jich známe nynějších několik set — nebude-li tam náhodou hledaná skupina sedmiček.

2. Posloupnost číslic v desetinném rozvoji π není dosud aritmeticky uzákoněna. Posloupnost je, abychom užili silnějšího výrazu, matematicky dosud nezkrocená. Kdybychom znali výtvarný zákon pro sled číslic v roz-

voji π, pak je posloupnost vlastně známá jako celek. Na základě této zákonitosti by bylo možno rozhodnouti bezpečně, je-li nebo není-li v rozvoji těch 7 sedmiček. Výtvarný zákon posloupnosti desetinného rozvoje by musil být, nehledíc k složitosti vyjádření, právě tak jasný, jako je třeba zákon této posloupnosti

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

(první dva členy jsou dány: 0, 1, další jsou součty vždy dvou předchozích, je to posloupnost Fibonacciho, mající zajímavé vlastnosti ve vztahu k theorii čísel).

3. Můžeme předpokládati existenci oněch 7 sedmiček *někde* v rozvoji π a ukázati, že tento předpoklad vede ke sporu s definicí čísla π, danou třeba Leibnizovou řadou

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

nebo jiným rozvojem nebo tvarem.

4. Můžeme předpokládati existenci oněch 7 sedmiček *někde* v rozvoji a ukázati, že tento předpoklad *nevede* ke sporu s definicí čísla π (pozor na rozdíl proti bodu 3.).

S řešeními v bodech 1., 2., kdyby se taková řešení nalezla, bude intuicionista spokojen zcela. Nebude však určitě spokojen s druhem úvahy v bodě 4., přesto, že tento způsob je v matematické praxi běžný. Intuicionistovi nezaručí nic, jak uvidíme z dalšího. Úvahu 3. považuje klasická matematika za důkaz nemožnosti hledané skupiny.

Mohou nastati tyto možnosti:

a) v desetinném rozvoji π, jakkoli vysoko bude znám, nebude těch 7 sedmiček,

b) spoutání nezkrocené posloupnosti v desetinném rozvoji π se nedaří,

c) důkaz tvaru 3. nebo 4. se nedaří.

Intuicionisté považují za možné, alespoň zásadně, že úloha vůbec není řešitelna. Proto nechtějí připustit jednoduchou alternativu, že sedmičky v rozvoji jsou anebo nejsou.

Podívejme se na celý problém s jiné stránky. Je zná ma soustava základních vět, axiomů, jimiž je ustavena theorie reálných čísel. Je otázka, je-li možno z této sou stavy axiomů dokázati výtvarný zákon posloupnost v desetinném rozvoji čísla π. Co kdyby tento zákon by na axiomech theorie reálných čísel *nezávislý?* Pátý po stulát Euklidův také nebyl ze všech ostatních vět geo metrie dokazatelný. Tato možnost, třebaže značně ne příjemná, tu je.

Otázku existence matematických předmětů dosud ne dokázaných ani nevyvrácených se pokusím ještě osvět liti jiným příkladem. Je známo již dlouhou dobu, že k mnohým prvočíslům lze nalézti prvočísla větší o dvě jednotky. Příkladem jsou dvojice prvočísel 5, 7; 11, 13 17, 19; ... 101, 103; ... Pokud sahají tabulky prvo čísel, je možno, i když později řídce, takové dvojice na lézti. O těchto dvojicích prvočísel platí velmi zajímavá věta (Brunova), že řada převrácených hodnot těchto prvočísel konverguje. Při tom však *není* známo, zda ta kových dvojic je konečný nebo nekonečný počet. Kdyby jich byl konečný počet, pak je Brunova věta triviální Věta je interesantní teprve tehdy, je-li dvojic neko nečně mnoho. A to právě nevíme. Brunův důkaz, který je značně obtížný, se opírá o methodu Erastothenova síta, známého z elementárních výkladů o prvočíslech V podstatě jde o to, že se zjistí, jak řídce jsou rozlo žena po celé nekonečné posloupnosti prvočísel místa, na nichž „by" mohlo býti prvočíslo tvaru ‚$p + 2$'. Je patrno, že mnoho čísel tvaru ‚$p + 2$' odpadne, protože jsou dělitelna jinými prvočísly. Ta pak, která zůstanou, mohou být prvočísly, ale nemusí. Jejich eventuelní vlastnost, „býti prvočíslem" není ve sporu s prostředky užité methody. Není tedy dokázáno nic více než: kdyby takových dvojic bylo nekonečné množství, jsou tak řídce rozloženy, že řadu jejich převrácených hodnot lze sečísti. (Na srovnání uvádím jen známou větu, že řada převrácených hodnot prvočísel součet nemá, diverguje.)

Na tomto příkladě je názorně patrno, co je existence, zaručená bezesporností. Existence prvočísla tvaru ‚$p + 2$' tu není brána se stanoviska konstruktivního; předpokládáme-li o číslech, jež „by" prvočísly být mohla (těch řídkých), že prvočísly *jsou*, nedojdeme uvedenou methodou ke sporu a to pro důkaz Brunovy věty stačí.

Vzhledem k logické větě o významu dvojí negace by se výsledek dal také tak vysloviti: neplatí, že na oněch řídkých místech prvočísla neexistují. Tato věta by měla býti rovnocenná s větou, že tedy na oněch místech prvočísla existují. A to právě zaručeno není. Brouwer také větu o dvojí negaci nepřijímá.

V obou příkladech jde o soubory, v nichž je nekonečný počet předmětů, ať již číslic nebo míst tvaru ‚$p + 2$' a pro takové soubory nechce intuicionista připustiti platnost alternativy: buď — anebo, třetí možnosti není. To jsme poznali na prvním příkladě. Nechce však také připustiti v těchto případech platnost věty o dvojí negaci, jíž se často užívá v existenčních důkazech.

Pro svoje úvahy si zavedli intuicionisté logiku, již formalisoval Heyting, v níž neplatí princip vyloučené třetí možnosti a neplatí věta o dvojí negaci. Své logiky, o níž však současně prohlašují, že se vlastně formalisovati nedá, užívají k novému položení základů klasické matematiky, zejména analysy.

Ukážeme si teď, jak může taková trojhodnotová logika výrokového počtu vypadati. Zvolíme k tomu cíli jednodušší soustavu, než je Brouwerova soustava intuicionistické logiky,*) a to soustavu Lukasiewiczovu.

Filosofické, resp. noetické úvahy jiného druhu než Brouwerovy úvahy o matematice vedly polského logika Lukasiewicze k odkrytí vícehodnotových logik. Lukasiewiczovi šlo o vyjádření dějů v budoucnu, o vyjádření jejich determinovatelnosti a nedeterminovatelnosti. Přijal k formálnímu vyjádření svých myšlenek logickou soustavu, v níž neplatí „tertium non datur" a vytvořil soustavu výrokového počtu, kde nejsou jen hodnoty P a N, nýbrž dokonce i nekonečně mnoho hodnot mezi oběma těmito póly.

Souvislost Lukasiewiczových úvah s počtem pravděpodobnosti je nepochybná. V počtu pravděpodobnosti právě vyjadřujeme číslem uzavřeného intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ možnost výskytu nějakého zjevu. Tu jsou také dva póly, ‚0', která odpovídá nemožnosti výskytu a ‚1', odpovídající jistotě výskytu. U Lukasiewicze má pak každá formule theorie přiřazenou svoji hodnotu, souhrn formulí podle povahy svého spojení tedy také. Jeho theorie se dá tedy užíti k vyjádření úloh počtu pravděpodobnosti, když logický počet vhodně interpretujeme.

Lukasiewicz používal původně tabulkové methody,

---

*) Tato Brouwerova (Heytingova) soustava intuicionistické logiky je na př. předmětem úvah článku M. H. Stone, Topological Representations of Distributive Lattices and Brouwerian Logics v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 67, a A. Kolmogorova v čas. Math. Zeitschrift *35* (1932).

v podstatě stejné jako jsme uvedli v dvojhodnotové logice. V případě trojhodnotové logiky přibude ovšem k hodnotám P a N ještě „tertium" T. Touto tabulkovou methodou provedl také základní spojení výroků obdobně k postupu, jenž je nám znám. Později však, vlivem nové methody, které s úspěchem užil na vyšetřování bezespornosti axiomatických soustav, našel nový způsob. Jsou to t. zv. rovnice v maticích, jež určují hodnoty základních spojení výroků z hodnot, jež mají výroky samy. Základním typem spojení výroků je implikace. Abychom docílili přehlednějšího tvaru psaní, přisoudíme teď hodnotám P, N, T postupně aritmetické hodnoty 1, 0, 2 (stejně dobře místo poslední hodnoty třeba 1/2). Pak platí v soustavě 3hodnotové logiky:

$$0 \to 0 = 0 \to 1 =$$
$$= 0 \to 2 = 1 \to 1 = 2 \to 1 = 2 \to 2 = 1;$$
$$1 \to 0 = 0; \quad 1 \to 2 = 2 \to 0 = 2;$$
$$N0 = 1, \ N1 = 0, \ N2 = 2; \ T0 = T1 = T2 = 2.$$

Znak N, T, postavený před příslušnou aritmetickou hodnotu, vyjadřuje její negaci, resp. operaci „tertium",

Postupně čteny dávají napsané implikace tento slovní opis: nepravdivý výrok implikuje nepravdivý, nepravdivý pravdivý, nepravdivý tertium (z falešného plyne jak víme z dvojhodnotové logiky, také správný, tedy také tertium), pravdivý zase pravdivý, tertium pravdivý (chceme-li, lze pokládati tertium za slabší nepravdivý výrok), tertium zase tertium a hodnota všech těchto implikací je 1, t. j., jsou správné. Další skupinou je jediná implikace: pravdivý výrok implikuje nepravdivý a tato implikace má hodnotu 0; je nesprávná jako v dvojhodnotové logice. Další skupina: pravdivý výrok implikuje tertium, tertium implikuje nepravdivý výrok a hodnota obou těchto implikací je 2. Rovnice pro negaci a operaci tertium jsou snadno srozumitelné.

Připomínám, že žádný formální logik nečiní tyto obsahové přepisy, jsa si vědom nebezpečí, jež takové slovní přepisy mohou skrývat. Pokusím se jen formálně ospravedlniti poslední skupinu implikací, 1 → 2 a 2 → 0. Obě mají hodnotu 2. Druhá není snad tak nepřístupná i dvojhodnotovému myšlení, v němž tyto opisy provádíme. Tertium může implikovati také 0. Připustíme-li tuto možnost, pak lze snadno ukázati, že první implikace této skupliny, 1 → 2, neříká nic jiného. Implikaci lze obrátiti, negujeme-li současně oba členy, spojené implikačním znakem. Použijeme-li příslušných rovnic, napsaných na počátku, dostáváme přímo druhou implikaci této skupiny. Pro obsahové chápání jsou tu ovšem nesrovnalosti. Příklad: připustíme-li oprávněnost implikace 2 → 0, řekneme-li si třeba, že tertium je nerozhodnutelné, takže *může* implikovati nepravdivý výrok, lze říci stejně dobře, že tertium může implikovati pravdivý výrok. Implikace má však v prvním případě hodnotu 2 a v druhém případě hodnotu 1, jak je patrno z matic. Pokud zůstaneme v okruhu operací, daných maticemi a rovnicemi na počátku, nedojdeme ke sporu. Kdybychom přiřkli druhé implikaci zdánlivě stejně oprávněně hodnotu 2, pak by spor uvnitř soustavy vznikl. Obsahově se však rozlišení hodnot obou implikací nedopátráme, protože myslíme pořád v okruhu dvojhodnotové logiky.

Uvedu ještě na srovnání se soustavou základních vět dvojhodnotového výrokového počtu soustavu základních vět pro tento trojhodnotový počet. Soustavu připravil pro Lukasiewicze jeho žák Slupecki.

1. $p \rightarrow (p \rightarrow q)$,
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$,
3. $[(p \rightarrow \bar{p}) \rightarrow p] \rightarrow p$,
4. $(\bar{p} \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (q \rightarrow p)$,
5. $Tp \rightarrow \bar{T}p$,
6. $\bar{T}p \rightarrow Tp$,

kde negace je psána starým způsobem, jejž známe z dvojhodnotového počtu, vodorovnou čárkou nad znakem. Je patrno, že některé základní věty, v nichž nepřichází ‚*T*', jsou odvoditelné ze základních vět dvojhodnotové logiky. (Na př. věta 4. vyjadřuje známý obrat implikace, jejž jsme své doby dokázali.) Tertium přichází až ve dvou posledních větách, obě spolu vyjadřují, že negace tertia je s tertiem ekvivalentní, bráno se stanoviska dvojhodnotové logiky.

Přestávám na této neúplné ukázce, protože v rámci našeho dalšího postupu není možno více se věcí zabývati. Nebylo by však dobře, aby v čtenáři byl vzbuzen dojem, že jde o prázdnou hru, konstrukci logických soustav, jež nemají žádného užití. Jak Brouwerova logika, tak také soustavy Lukasiewiczovy vznikly z vědeckých problémů, jež se té doby v obvyklé logice řešiti nedaly. Nechci říci, že se nedají řešiti. Jde o to, jsme-li schopni mysliti v soustavách obecnějších, než je soustava klasické logiky. Užití nějaké soustavy na vědeckou praxi je pak věc času. Již mnohokrát se stalo v dějinách vědy, že theorie předběhla praxi značně a připravila jí výzbroj, kterou našla hotovou, když jí bylo nejvíce zapotřebí.*)

*) Na možnost takového užití těchto logik poukázal již 1937 polský logik Zawinski a ve Francii Paulette Février (Kvant. fysika).

4. *Funkční počet.*

Jako druhou ukázku logického počtu uvedeme počet funkční. Je výrazově mnohem bohatší než počet výrokový a prokáže nám také mnohem lepší služby pro analysu matematického myšlení. Výrokový počet bylo nutno předeslati jako jeho základ. Vnikneme teď mnohem hlouběji do struktury vět a soudů, kde se nepracuje výroky jako celky, neschopnými dalšího rozboru.

Nejdříve ukážeme stručně, v čem spočívá obohacení nového počtu. Mějme nějaký predikát, kterým přisuzujeme danému předmětu nějakou vlastnost. Nazveme-li předmět ‚x', vlastnost (přiřčenou predikátem) ‚f', pak vyjádříme větu „o x platí f" symbolicky ‚$f(x)$', Předměty, jež vyhovují funkci ‚f' (předměty vlastnosti ‚f'), tvoří třídu předmětů, vytvořenou predikátem ‚f'. Celý tak zvaný počet tříd, který ještě v díle Russel-Whiteheadově hraje důležitou roli, je možno za jistého předpokladu (extensionality) vyjádřiti rovnocenně funkčním počtem, takže se počtem tříd zvláště zabývati nebudeme.

Platí-li pro všechna ‚x' nějakého oboru ‚f', píšeme ‚$(x) f(x)$' a čteme: pro všechna ‚x' platí ‚f'. Závorkovaný znak před funkční značkou se nazývá „operátor", v tomto případě „pro všechny". Existuje-li ‚x', pro něž platí ‚f', píšeme ‚$(Ex) f(x)$'. Operátor tento nazýváme existenční operátor. Proměnná ‚x', jež probíhá oborem předmětů, pro něž platí ‚f', je v obou uvedených případech *vázaná*, a to operátory. Píšeme-li bez operátoru ‚$f(x)$', pak říkáme, že proměnná je v tomto případě volná. V matematické logice se obyčejně upozorňuje na obdobu vázané proměnné v integrálním počtu. Máme-li tam na př. integrál $\int_0^x f(x)\,dx$, kde ‚f' je funkce integrace schopná třeba ve smyslu Riemannově, pak ‚x' je vázáno na uzavřený interval $\langle 0,x \rangle$. To je obdoba operátoru „pro všechny". Bylo by možno najíti i obdobu s volnou proměnnou a to v integrálu, jenž je chápán jako primitivní funkce k dané funkci vzhledem k operaci derivace a vyjadřuje se t. zv. neurčitým integrálem po způsobu, který byl své doby v analysi oblíben. Tyto analogie přes to, že se hojně uvádějí, nejsou pro náš účel nijak závazné.

Ukážeme si teď, jak je možno vyjádřiti znaky s operátory způsobem, jejž známe z výrokového počtu. Předpokládáme však výslovně, že obor proměnných, jež vyhovují zvolené funkci, je *konečný*. Buďtež předměty tohoto oboru — té třídy lze také říci —

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_n.$$

Potom platí

1. $(x)f(x) \equiv_{Df} \quad f(x_1) \,.\, f(x_2) \,.\, f(x_3) \ldots f(x_n).$
2. $(Ex)f(x) \equiv_{Df}$

$$f(x_1) \vee f(x_2) \vee f(x_3) \vee f(x_4) \vee \ldots \vee f(x_n).$$

Ekvivalence jsou obsahově snadno pochopitelné. Platí-li pro všechny předměty třídy — stanovené znakem ‚f' — že mají vlastnost ‚f', pak pravá strana 1. vyjadřuje tuto vlastnost výslovně pro každého člena souboru. Existuje-li pak předmět vlastnosti ‚f', má tuto vlastnost ‚x_1' nebo (také) ‚x_2', ... až ‚x_n', což je pravá strana 2. Pomocí těchto ekvivalencí lze pro konečné třídy předmětů dokázati důležité vztahy funkčního počtu, jež platí pro operátory ve spojení s funkcí. Tyto vztahy, nové ekvivalence, si teď dokážeme. Zaveďme ještě označení

$$\text{místo } \overline{(x)f(x)} \text{ pišme } (\bar{x})f(x)$$

(neplatí pro všechna ‚x' vlastnost ‚f')

a místo $\overline{(Ex)f(x)}$ pišme $(\overline{Ex})f(x)$ (neexistuje ‚x' vlastnosti ‚f').

Z výrokového počtu známe ekvivalenci

$$p \vee q \sim \overline{\bar{p} \, . \, \bar{q}}$$

a protože platí v dvojhodnotové logice věta o dvojí negaci, platí také

$$\bar{p} \vee \bar{q} \sim \overline{p \, . \, q}$$

záměnou výroků za výroky negované.

Lze snadno dokázati, že platí obecněji

$$p \vee q \vee r \vee \ldots \vee t \sim \overline{\bar{p} \, . \, \bar{q} \, . \, \bar{r} \ldots \bar{t}}$$

a stejně tak platí

$$\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \ldots \vee \bar{t} \sim \overline{p \, . \, q \, . \, r \ldots t}.$$

Použijeme těchto ekvivalencí na svůj případ. Platí tedy

$$\overline{f(x_1) \, . \, f(x_2) \ldots f(x_n)} \sim \bar{f}(x_1) \vee \bar{f}(x_2) \vee \ldots \vee \bar{f}(x_n),$$

ale levá strana není nic jiného než $(\bar{x})f(x)$, pravá je $(Ex)\bar{f}(x)$. Platí tedy

$$(\bar{x})f(x) \sim (Ex)\bar{f}(x).$$

Tato ekvivalence se dá obsahově velmi snadno interpretovati a je hojně používána v matematických úsudcích. Intiucionisté by ji přijali, tak jak byla dokázána. Rozšíří-li se však obor platnosti této ekvivalence také na třídy nekonečné, což logika činí, nemohou s touto ekvivalencí souhlasiti, neboť její podmínkou je princip vyloučení třetí možnosti. Pro nekonečné obory proměnných funkce ‚f' nelze také ekvivalenci dokazovati obratem přes výrokový počet, protože nekonečné disjunkce i konjunkce zásadně nejsou připuštěny. To by bylo nutno rozšířiti pravidla počtu. Obsahově říká ekvivalence zřejmě tolik: neplatí-li predikát ‚f' o všech ‚x', existuje ‚x' takové, pro něž platí ‚non f' a také naopak. V matematice se často používá tohoto obratu: najdeme-li příklad, který vyvrací předpokládanou vlastnost, společnou celé skupině předmětů, pak neplatí tato vlastnost obecně. Takový příklad, jenž vyvrátí tušenou (špatně tušenou) vlastnost celého souhrnu, bývá obyčejně vtipně vymyšlenou konstrukcí, jež svoji úlohu splní tím, že tušenou větu zvrátí.

Jestliže utvoříme negaci výrazu

$$f(x_1) \vee f(x_2) \vee \ldots \vee f(x_n),$$

dostaneme

$$\overline{f}(x_1) \,.\, \overline{f}(x_2) \ldots \overline{f}(x_n),$$

ale to je jinak psáno

$$(x)\overline{f}(x).$$

Negace disjunkce, z které jsme teď vyšli, se dá psáti stručně

$$\overline{(Ex)}f(x).$$

Platí tedy

$$\overline{(Ex)}f(x) \backsim (x)\overline{f}(x).$$

Tuto ekvivalenci také snadno dostaneme z ekvivalence první negací obou stran.

Také tento druh úsudku je dostatečně znám a jeho slovní vyjádření neposkytuje obtíží.

Znovu si uvědomíme, že jsme při odvození obou těchto důležitých ekvivalencí funkčního počtu užili konečného počtu výrazů tvaru ‚$f(x_i)$' nebo $\overline{f}(x_i)$', sestavených v disjunkce nebo konjunkce. Ještě Russel a Whitehead připouštěli možnost disjunkcí a konjunkcí o nekonečně mnoha členech. Tuto možnost pozdější kritika oslabila. Jistou obměnou postupu, jejž jsme uvedli, dochází Wittgenstein s použitím Shefferova symbolu (viz dříve ve výrokovém počtu) k definici základních výrazů funkčního počtu. I Wittgensteinův způsob je však proveditelný jen pro konečné soubory. Proto nebylo možno užíti tohoto způsobu jako podkladu pro theorii transfinitních čísel.

Soustava funkčního počtu užívá všech čtyř základních vět výrokového počtu a) ÷ d), jež jsme své doby uvedli. Místo výroků ovšem mohou býti vloženy do základních vět funkce, jak brzo poznáme, i funkce více proměnných, jež vyjadřují *vztahy* mezi proměnnými. Soustava základních vět je však doplněna dvěma zvláštními základními větami, jež podstatně určují význam operátorů. Jsou to věty

e) $(x)f(x) \rightarrow f(y)$,

f) $f(y) \rightarrow (Ex)f(x)$.

Tyto základní věty nejsou odvozeny methodou konečných disjunkcí nebo konjunkcí. Jsou zvoleny tak, aby platily pro konečné i nekonečné soubory a mají tedy *transfinitní* povahu. Platnost ekvivalencí, jimiž jsme se před nedávnem zabývali, se nyní zavádí definicemi, na příklad

$$(Ex)f(x) \equiv_{Df} \overline{(x)}\,\overline{f}(x)\,;$$

(položíme-li za ‚$f(x)$' výraz ‚$\overline{f}(x)$', dostaneme jednu z odvozených ekvivalencí). Úvahy podle těchto myšlenkových schemat nemusí ovšem, jak víme, intuicionista přijmouti.

Vedle základních vět e) a f), jež jsou nové, platí ještě doplňkové pravidlo: není-li ‚A' závislé na ‚x', t. j. ‚x' se v něm vůbec nevyskytuje, nebo alespoň ne jako volná proměnná, je-li dále ‚B' výrazem na ‚x' závislým, což označíme ‚$B(x)$', a je-li možno v naší logické soustavě odvoditi implikaci $A \rightarrow B(x)$ jako důsledek základních vět a) ÷ f) (t. j. tato implikace je formulí soustavy logické), je také $A \rightarrow (x)B(x)$ formulí této soustavy.

Funkce, jež mají více proměnných, vzniknou z úvah o vztazích, jež mají předměty k sobě. Přehměty ‚x' a ‚y' nechť mají vztah ‚g'. Logistický přepis tohoto výroku je ‚$g(x,y)$'. Funkce tří proměnných vyjadřují vztahy tří předmětů k sobě, na příklad vztah ‚$h(x,y,z)$' může znamenati, že na dané otevřené křivce je bod ‚y' mezi body ‚x' a ‚z'. Proměnné mohou býti vázány operátory stejně jako u funkcí jedné proměnné. Operátory se pak výslovně vždy týkají jen zcela určité proměnné. Na příklad věta: pro každé celé kladné ‚x' existuje ‚y' větší než ‚x' může míti tento logistický přepis

$$‚(x)\,(Ey)\;v\;(x,y)‘.$$

Při tom značíme funkčním výrazem ‚$v\ (x,y)$' aritmetickou relaci ‚$x < y$'.

Základní věty e) a f) platí ovšem pro jakékoli funkce, jež mají konečný počet proměnných. Přítomnost většího počtu operátorů způsobuje, že k dosažení hledaného tvaru je nutno použíti základních vět třeba několikrát; na příklad

$$g(x,y) \rightarrow (Ex)g(x,y)$$

a novým užitím věty f)

$$(Ex)g(x,y) \rightarrow (Ex)\,(Ey)g(x,y),$$

takže dostaneme poslední tvar s oběma ‚E-operátory' dvojnásobným užitím věty f).

Pro operátory platí ještě věta, že účinnost operátoru se vztahuje na celou formuli, před níž je operátorový znak a není samozřejmě možné, aby táž proměnná byla vázána v téže formuli dvěma operátory, jež se navzájem vylučují.

Funkční počet, o jehož některých vlastnostech jsme si teď promluvili, je možno ještě podstatně rozšířiti. Rozšíření spočívá v tom, že připustíme, aby proměnnými byly také predikáty nebo relace samy, tedy funkce. Lze přece pronášeti také predikáty o predikátech, vyjadřovati se o nich. Tím se dostaneme k rozšířenému tvaru funkčního počtu, jenž je již dosti bohatý výrazově, aby mohl vyjádřiti matematické problémy. K tomu se teď vrátíme.

Uvedeme si obsahově několik výrazů, abychom se do tohoto způsobu myšlení uvedli. Zcela jistě je obsahově patrná platnost formule

$$(x)\,[P(x) \vee \overline{P}(x)]\,;$$

tato formule se dá snadno dokázati. Důkaz užívá formule ‚$p \vee \overline{p}$', jež je ve výrokovém počtu dvojhodnotovém odvoditelná. Tedy je také ‚$P(x) \vee \overline{P}(x)$' odvoditelné. Pak je však také $(x)\,[P(x) \vee \overline{P}(x)]$ odvoditelné, důkaz je možno podati na základě věty, již jsme citovali a která říká: je-li odvoditelná implikace, jejíž pravá strana má volnou proměnnou, je také odvoditelná implikace, jejíž pravá strana je vázána operátorem „pro všechny" té proměnné. Nic nám nebrání, abychom napsali formuli ještě s jedním operátorem takto

$$(P)\,(x)\,[P(x) \vee \overline{P}(x)],$$

která říká, že vlastnost ‚$(x)\,[P(x) \vee \overline{P}(x)]$' mají všechny predikáty ‚P'.

Můžeme také definovati jiné, velmi obecné vlastnosti dvou predikátů, na př. ‚Impl (F,G)' — což čteme: predikát ‚F' implikuje predikát ‚G' a to touto definicí

$$\mathrm{Impl}\,(F,G) \equiv_{Df} (x)\,[F(x) \rightarrow G(x)]$$

nebo predikát

$$\text{‚Vyluč}\,(F,G)\text{'}$$

definicí

$$\mathrm{Vylu\check{c}}\,(F,G) \equiv_{Df} (x)\,[\overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)]$$

vyjadřující, že predikáty ‚F' a ‚G' nejsou současně platné, čili že se vylučují. Poslední definice nabude snad názornějšího rázu, uvědomíme-li si, že podle výrokového počtu platí ekvivalence

$$\overline{F}(x) \vee \overline{G}(x) \backsim \overline{F(x)\,.\,G(x)},$$

kde pravá strana říká jasně: neplatí současně ‚F' a ‚G'.

Vztah mezi predikáty ‚Impl' má své užití na příklad v theorii množin, je-li množina určena predikátem ‚G' a její podmnožina, (t. j. množina, neobsahující všechny elementy ‚G', t. zv. vlastní podmnožina) pak predikátem ‚F', platí jistě pro každý element vlastnosti ‚F' že má také vlastnost ‚G', což je obsah levé strany definiční rovnice pro ‚Impl'.

Predikátu ‚Vyluč', jenž značí vyšší vztah mezi dvěma predikáty, užila logika na př. k důkazu rovnic jako $1 + 1 = 2$, obecně $n + m = s$. To si zanedlouho ukážeme.

Po této přípravě se obrátíme k definici celých čísel prostředky pouhé logiky. Celá čísla přirozené řady číselné definovati lze a je možno dokázati prostředky logiky platnost nejzákladnějších vztahů jejich. Je to věc velikého dosahu pro filosofii matematiky. Celá čísla považovali a dosud považují mnozí matematikové za věc čistého názoru. Tvrdí, že lidský duch má schopnost nazírati řadu přirozených čísel celých a že tato schopnost není dále rozboru schopná. Matematičtí intuicionisté staršího typu, naklonění lehkému mysticismu, šli dokonce tak daleko, že považovali řadu celých čísel za předmět stvořený Bohem — vše ostatní (t. j. matematika) je již lidská práce. Ostře se od nich liší matematičtí logikové a to následkem úspěchu method, jež zavedli. Snaha matematických logiků, odvoditi co možno *vše* prostředky logiky, zaslouží plného respektu, i když ještě nevykonali vše, co si v celkovém programu předsevzali. K této snaze logiků a méně jasně formulovanému skeptickému názoru intuicionistů, si nemohu odpustiti uvést paralelu, známou z biologie. V biologii jsou dva základní směry, jež se liší spíše myšlenkovým pojetím než nástroji, jichž užívají — je to mechanismus a vitalismus. Kdežto mechanisté vidí, krajním způsobem vyjádřeno, v každém organismu stroj a hledí činnost tohoto stroje objasniti racionálními, každému přístupnými methodami fysiky a chemie, a tak stroj pochopiti, uznávají vitalisté jakousi životní sílu — zvláštní faktor, jenž umožňuje život. Povahu tohoto faktoru je nemožno exaktně vyjádřiti, nelze jej zkoumati fysikálně chemickými methodami, protože je afysikální. Specielní, jeho povaze odpovídající methoda *jiná* nebyla však vitalisty k jeho zkoumání také objevena.

Je pravda, že i vitalisté pracují způsoby, jež nalezli mechanisté, kteří jdou důsledně ve svém programu — celá věc je spíše otázkou vědeckého přesvědčení: mechanista věří ve svoji methodu i když ztroskotává — proto hledí svou pracovní methodu zlepšit, změnit, vypátrat novou. Vitalista, i když pracuje methodami mechanisty, je proniknut myšlenkou v podstatě negativní, že nepoznáme prapříčiny života, je skeptikem ve smyslu věčného „ignorabimus".

V matematice intuicionista, i když přemýšlí o nejzákladnějších otázkách matematiky, je ochoten připustiti zásadní neřešitelnost některých matematických problémů a je také ochoten uplatňovati ve svých úvahách ne dosti jasně vyslovitelný moment intuice — věří v určité předmětné hodnoty, jimiž se dále nezabývá. Proto je také v úvahách intuicionistů tolik nejasné formulace a nesporný anthropologický rys — my nepoznáme, v našich schopnostech není, atd.

Logik má program: přemáhá velmi záludné překážky, objasňuje celou jemnou mechaniku logické sítě, zkoumá s mnoha stran hlavní prameny poznatků — souvislost předpokladů a závěrů. Logik chce věděti, *kam* až lze jíti, co tedy už v mechanismu myšlení dále redukovati nelze — je-li vůbec něco takového. Chce znát jasně funkci svých předmětů a není-li to možno, tedy ponechati jim jen tak málo volnosti, nakolik stačí právě současný stav method.

S tohoto stanoviska vzato, je definice celých čísel krásným výsledkem přesné logické práce. Definice provést lze, jak uvidíme, pouze prostředky čisté logiky — lze tak postupně provésti definici každého celého čísla — ne však definici celé třídy racionálních celých čísel. Proč to není možno a v čem je nový požadavek takové třídy, který již nelze pouhou logikou vyjádřiti, ukážeme později. Je to axiom nekonečna.

Definice prvních celých čísel racionálních:

0. $0(F) \equiv_{Df} \overline{(\exists x)}F(x)$;

takto je definováno číslo ‚0'. ‚0' je podle toho definována jistou vlastností predikátu ‚F' a to vlastností, jež vyznačenou pravou stranou definiční rovnice 0. Pravou stranou je definována prázdná třída; každé ‚F' totiž, jež může definovati ‚0', má tu vlastnost, že neexistují předměty, jež by funkci ‚F' vyhovovaly.

1. $1(F) \equiv_{Df} (Ex)F(x) \,.\, (y)F(y) \rightarrow x = y,$

při tom vztah, který je psán na konci výrazu, je definován takto:

$$x = y \equiv_{Df} (P)\,[P(x) \rightarrow P(y)]\,;$$

je to logický přepis Leibnizovy definice identity, o které jsme již mluvili při úvaze o logických principech antických. (Identitas indiscernibilium.) Dva předměty jsou tehdy identické, platí-li predikát ‚P' jak o jednom tak o druhém, a toto musí platiti pro všechny predikáty ‚P' (určitého typu, viz dále theorii typů).*)

Definiční rovnice 1 se dá snadno přečísti. Číslo ‚1' není nic jiného než jistá vlastnost predikátu ‚F', pro nějž platí: ‚x' vyhovuje funkci ‚F' a každý jiný předmět ‚y', jenž vyhovuje ‚F', je s ‚x' identický.

2. $2(F) \equiv_{Df} (Ex)\,(Ey)\,[\overline{x = y} \,.\, F(x) \,.\, F(y) \,.$
$\quad .\, (z)F(z) \rightarrow z = x \vee z = y],$

což dává, přečteno, tento obsahový opis: číslo dvě je určeno každým predikátem ‚F', pro nejž platí: existují dva předměty ‚x' a ‚y', jež ‚F' splňují a nejsou identické. Každý další předmět, vyhovující ‚F', je buď s prvním nebo také s druhým identický.

Význam těchto definicí, v nichž by se zřejmě dalo

*) Toto formalisované užití Leibnizova principu není ve sporu s naší dřívější poznámkou, že *obecná* formulace tohoto principu není dobře proveditelná. Zvláštní případ principu, zde užitý, je korektní a stačí. Viz ostatně poznámku pod čarou u příležitosti kritiky principu identity.

pokračovati obdobně, je v tom, že nejjednodušší vztahy a rovnice, jako třeba ‚$1 + 1 = 2$' lze bez užití nějakých mimologických postulátů *dokázati*. Lidové rčení „je to tak jisté, jako že 1 + 1 jsou 2" je tedy větou logicky dokazatelnou a ne jen intuitivní jistotou.

Vzhledem k závažnosti definice celých čísel ještě několik poznámek o jejich povaze. Nepředpokládáme při nich již zakrytě existenci nějakých individuí, jež by již čísly byla, takže by definice přece jen nebyly pouze logické a trpěly by nedostatkem, známým pod jménem „petitio principii"?

K tomu je nutné uvědomiti si význam operačních symbolů ‚(Ex)', ‚(Ey)'. V definici, užívající takových symbolů, netvrdíme, *že* takové předměty existují; povaha věci je spíše takováto, jak patrno na definici čísla 2: predikátu ‚F' vyhovuje předmět ‚x' a ‚y' a predikát má kromě toho vlastnost, že každý další předmět je s jedním z nich identický. Takové myšlenkové útvary je dovoleno tvořiti; vše, oč se opíráme, je, že ty dva předměty musí býti různé. Různost je však definitoricky negace identity. Netvrdíme tedy ani přímo, že ty předměty jsou dva.

Pojetí čísel, jež jsme ukázali, se opírá o výsledky Russelovy z počátku našeho století a dalo by se ještě jinak popsati. Číslo není než společným znakem všech skupin, jež mají stejný počet elementů. Každý predikát, jenž má na př. vlastnost vyjádřenou pravou stranou definiční rovnice čísla 2, určuje třídu. Jiný predikát téže formální vlastnosti určuje také třídu. To, co mají takové třídy společné, společná vlastnost, to je právě číslo 2.

Sčítání celých čísel takto definovaných je možno převésti na disjunkci dvou predikátů, jež se vylučují. Formálně vyjádřeno: máme-li ‚$m(F)$' a ‚$n(G)$', pak platí ‚$m + n\ (F \vee G)$'. — Provedeme si teď důkaz rovnice $1 + 1 = 2$ tímto naznačeným způsobem.

K tomu účelu pišme definice obou jednotek, jež jsou na levé straně rovnice, v tomto tvaru:

$$1(F) \equiv_{Df} (Ex)F(x)\ .\ (u)F(u) \rightarrow u = x,$$

$$1(G) \equiv_{Df} (Ey)G(y)\ .\ (u)G(u) \rightarrow u = y.$$

Abychom dokázali rovnici $1 + 1 = 2$, musíme dokázati logickou ekvivalenci obou stran. Proto je potřebí odvoditi dvě implikace: $1 + 1 \rightarrow 2$ a $2 \rightarrow 1 + 1$. V dalším se budeme zabývati pouze důkazem první z obou implikací, postačí to zcela pro náš účel, abychom poznali možnost takového důkazu. Jde tedy o důkaz této implikace: $1(F)\ .\ 1(G) \rightarrow 2(F \vee G)$. Vypsaná levá strana této implikace zní:

$$[(Ex)F(x)\ .\ (u)F(u) \rightarrow u = x]\ .$$
$$.\ [(Ey)G(y)\ .\ (u)G(u) \rightarrow u = y] \qquad 1.$$

S výrazy právě napsanými budeme zacházeti jako s formulemi, protože jsou to logické předpoklady celého důkazu. Proto budeme podle závěrového pravidla z těchto výrazů činiti důsledky. Před vlastním důkazem odvodíme dvě pomocné věty.

A) $\qquad P\ .\ Q \rightarrow P$ a také $P\ .\ Q \rightarrow Q$.

Důkaz obou implikací plyne okamžitě z věty b) výrokového počtu. Tato věta zní: $p \rightarrow p \vee q$. Podle formulí, které jsme odvodili jako příklady dedukcí ze základních vět výrokového počtu, víme, že implikaci je možno obrátiti, negujeme-li oba její členy (formule 3., resp. 4. citovaného místa). Tedy platí $\overline{p \vee q} \rightarrow \bar{p}$. Levá strana této implikace však je, podle souvislosti negace disjunkce a konjunkce ekvivalentní s konjunkcí $\bar{p} . \bar{q}$. Platí tedy $\bar{p} . \bar{q} \rightarrow \bar{p}$. Označíme-li jinak oba negované výroky, dostáváme přímo první případ formule, již jsme měli dokázati. Důkaz druhé je neméně snadný.

B) $$\{P \rightarrow Q . P \rightarrow R\} \rightarrow [P \rightarrow (Q . R)].$$

Levou stranu implikace je možno psáti $\bar{P} \vee Q . \bar{P} \vee R$. Tento výraz je však dokonce ekvivalentní s výrazem $\bar{P} \vee (Q . R)$, jak se snadno dokáže. Takovéto „vytknutí před závorku" je jednou z nejběžnějších operací logistiky, naopak je možno závorku, obsahující konjunkci, „vynásobiti" výrokem, jenž je s touto závorkou v disjunkci. Výraz $\bar{P} \vee (Q . R)$ je ekvivalentní s implikací $P \rightarrow (Q . R)$.

Užijeme na výraz ... 1. pomocné věty A), a to dvakrát po sobě. 1. je totiž konjunkce dvou závorek; podle věty A) tedy můžeme osamostatniti kteroukoli z nich užitím závěrového pravidla. Ale každá z těch závorek je zase konjunkcí, můžeme tedy tímtéž postupem osamostatniti tyto dva výrazy

$$(u)F(u) \rightarrow u = x \quad \text{a} \quad (u)G(u) \rightarrow u = y. \qquad 2.$$

Výrazy 2. jsou ale ekvivalentní výrazům

$$(Eu)\overline{F}(u) \vee u = x \quad \text{a} \quad (Eu)\overline{G}(u) \vee u = y, \qquad 3.$$

implikaci jsme pouze vyjádřili jako disjunkci a použili ekvivalence

$$\overline{(x)}f(x) \sim (Ex)\overline{f}(x),$$

kterou jsme své doby odvodili. Oba výrazy 3. vložíme za ‚p' do základní věty b), za její ‚q' pak ‚$u = y$', resp. ‚$u = x$'. Dostaneme

$$(Eu)\overline{F}(u) \vee u = x \rightarrow (Eu)\overline{F}(u) \vee u = x \vee u = y$$

a podobně

$$(Eu)\overline{G}(u) \vee u = y \rightarrow (Eu)\overline{G}(u) \vee u = y \vee u = x. \qquad 4.$$

Závěrovým pravidlem můžeme osamostatniti obě pravé strany implikací 4. Protože tyto pravé strany jsou důsledkem výrazu 1., je podle pomocné věty B) také jejich konjunkce důsledkem výrazu 1. Tuto konjunkci s malou změnou napíšeme

$$(Eu)\overline{F}(u) \vee u = x \vee u = y \,.$$
$$.\, (Eu)\overline{G}(u) \vee u = x \vee u = y. \qquad 5.$$

Změna se týká pouze výměny dvou členů v disjunkci druhého výrazu, a ta je, jak víme ze základní věty c), dovolená. Zevrubným důkazem se nebudeme zdržovati. Oba výrazy jsou disjunkcemi tří členů, z nichž dva poslední jsou stejné. Tyto poslední členy „vytkneme za závorku" a dostaneme ekvivalentní výraz k 5.

$$(Eu)\,[\overline{F}(u)\,.\,\overline{G}(u)] \vee u = x \vee u = y. \qquad 6.$$

Tento poslední výraz přepíšeme zpět na implikaci

$$(u)\,[F(u) \vee G(u)] \rightarrow u = x \vee u = y. \qquad 7.$$

To je hlavní část výsledku, kterou jsme potřebovali.

Užijeme-li na výraz 1. znovu pomocné věty A), osamostatníme užitím závěrového pravidla dva další výrazy: $(Ex)F(x)$ a $(Ey)G(y)$. Oba tyto výrazy vložme za ‚p' do základní věty b), za ‚q' položme $G(x)$, resp. $F(y)$. Dostaneme

$$(Ex)F(x) \rightarrow (Ex)F(x) \vee G(x) \,.$$
$$.\, (Ey)G(y) \rightarrow (Ey)G(y) \vee F(y) \qquad 8.$$

Pravé strany implikací 8. jsou také důsledky 1., můžeme je tedy pomocí závěrového pravidla osamostatniti, při čemž u druhé implikace provedeme dovolenou výměnu členů disjunkce G a F. Důsledky 1., které potřebujeme, jsou celkem tři, první je obsažen v 7., druhé dva v 8. Užijeme-li teď dvakráte pomocné věty B), dostaneme

$$\begin{gathered}[(Ex)F(x) \,.\, (u)F(u) \rightarrow u = x \,.\, (Ey)G(y) \,.\\ .\, (u)G(u) \rightarrow u = y] \rightarrow (Ex)[F(x) \vee G(x)] \,.\\ .\, (Ey)[F(y) \vee G(y] \,.\, (u)[F(u) \vee G(u)] \rightarrow\\ \rightarrow u = x \vee u = y.\end{gathered}$$

Podíváme-li se na pravou stranu implikace a srovnáme-li ji s definicí čísla 2, jak byla uvedena, vidíme, že jsme již implikaci $1 + 1 \rightarrow 2$ skoro dokázali. Pravé straně chybí ještě člen ‚$\overline{x = y}$'. Abychom tento člen obdrželi, musíme využíti předpokladu, že oba predikáty F a G se vylučují.

Především si objasníme, co znamená podmínka $\overline{x = y}$ v naší soustavě.

$$x = y \equiv_{Df} (P)[P(x) \rightarrow P(y)],$$

tedy negace rovnosti je podle pravidel

$$\overline{x = y} \equiv_{Df} (EP)[P(x) \,.\, \overline{P}(y)]$$

[implikaci napravo píšeme jako disjunkci a užijeme na ni pravidla o tvoření negace, stejně tak stručně řečeno, negovaný operátor ‚$(\overline{P})$' se změní na ‚(EP)'].

Podmínka, že oba predikáty se vylučují, zní:

$$\text{Vyluč } (F,G) \equiv_{Df} (y)[F(y) \vee G(y)].$$

Tato podmínka měla ještě býti uvedena v 1., takže celý předpoklad 1′, je

$$\begin{gathered}(Ex)F(x) \,.\, (u)F(u) \rightarrow u = x \,.\, (Ey)G(y) \,.\\ .\, (u)G(u) \rightarrow u = y \,.\, (y)[\overline{F}(y) \vee \overline{G}(y)]. \qquad 1'.\end{gathered}$$

Výraz $(y)[\overline{F}(y) \vee \overline{G}(y)]$ lze psáti po výměně členů disjunkce známým způsobem jako implikaci

$$(y)[G(y) \rightarrow \overline{F}(y)].$$

Platí obecná věta funkčního počtu, již dokazovati nebudeme:

$$(x)[f(x) \rightarrow g(x)] \rightarrow [(Ex)f(x) \rightarrow (Ex)g(x)].$$

Užijeme-li této věty ve svém případě, máme

$$(y)[G(y) \rightarrow \overline{F}(y)] \rightarrow [(Ey)G(y) \rightarrow (Ey)\overline{F}(y)].$$

Užijeme-li dvakrát po sobě závěrového schematu (první část implikace je předpoklad, v implikaci napravo je první člen důsledkem předpokladu) dostáváme: $(Ey)\overline{F}(y)$. Tento důsledek ve spojení s $(Ex)F(x)$ dává podle věty B) konjunkci

$$(Ex)F(x) \,.\, (Ey)\overline{F}(y),$$

což lze psáti

$$(Ex)(Ey)[F(x) \,.\, \overline{F}(y)].$$

Podle základní věty f) platí

$$(Ex)(Ey)[F(x) \,.\, \overline{F}(y)] \rightarrow$$
$$\rightarrow (Ex)(Ey)(EF)[F(x) \,.\, \overline{F}(y)]$$

a tedy závěrovým pravidlem pravá strana poslední implikace se dá osamostatniti. Touto pravou stranou je vyjádřeno ‚$\overline{x = y}$' a tento důsledek patří ještě k důsledkům, jež tvoří definici čísla 2. Máme tedy celkem

$$1(F) \,.\, 1(G) \,.\, \text{Vyluč}\,(F,G) \rightarrow 2(F \vee G).$$

Okolnost, že číslo 2 je pojednou stanoveno disjunkcí dvou predikátů místo jediným predikátem, není nijak podstatná, nemáme nikde umluveno, jaký měl být tvar predikátu ‚F' nebo ‚G' a konečně disjunkci ‚$F \vee G$' můžeme pojmenovati třeba ‚H', takže číslo 2 je zase určeno jedním predikátem. Důkaz lze formálně provésti kratšeji, nevolil jsem tuto pohodlnější cestu proto, aby byly jednotlivé kroky dobře patrny. Proto je také oddělen dodatek ‚$\overline{x = y}$' od předchozího postupu, aby se získalo na přehlednosti. Důkaz zpětné implikace $2 \rightarrow 1 + 1$ není již obtížný, všechny podstatné kroky k důkazu potřebné jsou v našem odvození obsaženy.

Nerad bych, aby v čtenáři vznikl dojem, že se uměle vytvářejí duchaplnosti ze samozřejmostí, jako je rovnice $1 + 1 = 2$. Rovnice, o niž jde, je tak jasná, jako málo co na světě, podle běžné představy. Naopak, naše pracné odvození musí buditi na první pohled dojem, že jdeme, lidově řečeno, s kanonem na mouchu. Běžnou představou se spokojiti nesmíme. Nejde ve skutečnosti o něco prajednoduchého. Odkážeme-li na názor, že přece tato rovnice platí pro jakékoli představitelné předměty, nedostali jsme se o nic dále, než k začátkům početní praxe, jak se jí vyučuje na prvním stupni rozvíjejícího se dětského intelektu. Tam se také konec konců neříká nic jiného, než že jedna hruška a jedna hruška jsou dvě hrušky a trochu sugestivněji se rovnocennost obou jednotek podporuje na počítadle. Řekneme-li však poučeně, že rovnice vyjadřuje abstrakci všech takových případů, řekli jsme větu, kterou zakrýváme svoji neznalost: pokusíme-li se vyjádřiti, co pod tou abstrakcí rozumíme, zůstaneme státi již při prvních krocích. Ve vědě se nesmíme takovou polovičatostí spokojiti. Logický rozbor ukazuje naopak, jak složitým myšlenkovým pochodem jsou nejzákladnější početní operace. Proto byly výsledkem až vyšších, vyvinutých kultur, a patřily vždy k jejich nejvyšším projevům. Dnes, pod tlakem praktického užití počtů není tak snadno prvotní duševní pochody, jež k počítání vedly, v celé šíři rekonstruovati. Dnešní stav věcí je pak ten, že se základním početním operacím učíme pouhým napodobením, ne vlastním promýšlením. Se stanoviska životní praxe to není ani jinak možno, také k tomu vede úspornost školního vyučování. Se stanoviska vědy je však dobře, podívati se někdy samozřejmostem do očí.

Každá ze zvláštních rovnic pro součet celých čísel je dokazatelná touto methodou. Důkaz sám by byl pro vysoká čísla značně zdlouhavý, ale je v podstatě prostý a vždy proveditelný. I základní vlastnosti jiné, na př. důkaz záměnnosti sčítanců v aritmetickém počtu nečiní ve zvláštních případech potíží. To nahlédneme bez důkazu. Jde o ekvivalenci

$$m + n(F \vee G) \sim n + m(G \vee F).$$

Víme ze základní věty c) výrokového počtu, že disjunkce má zaměnitelný pořad výroků. A to je nejpodstatnější složka důkazu pro zaměnitelnost sčítanců aritmetického součtu.

Situace se však změní v neprospěch logiky, chceme-li odvoditi platnost takové ekvivalence (záměnnost sčítanců) v *obecném* případě. Henri Poincaré uvažuje ve své proslulé knize „La science et l'hypothése" o možnostech důkazu takových základních aritmetických identit a hájí stanovisko, že platnost obecných rovnic, jako je $n + m = m + n$ nelze dokazovati bez principu úplné indukce, jak se raději říká — bez platnosti závěru z ‚n' na ‚$n + 1$'. Poincaré viděl v tomto závěru podstatné obohacení logického mechanismu tautologií. Jediný tento princip považoval Poincaré za pravou synthetickou apriorní větu, netautologického rázu, jež je vlastním tvůrčím principem matematickým, otvírajícím mimo jiné matematikovi svět nekonečna. Výsledek logického rozboru Poincarému za pravdu nedal, ale ukázal, že Poincaré správně tušil v závěru z ‚n‘ na ‚$n + 1$‘ přítomnost jiné věty, axiomu nekonečna. Tento axiom je skutečně mimologickým principem matematických úvah, a je tím, co Poincaré charakterisoval jako apriorní synthetickou větu. Synthetická věta na rozdíl od analytické přináší do poznání nový prvek a není jen tautologickou transformací. Přívlastek „apriorní" označuje poznání, nezávislé na zkušenosti vnějšího světa, jež však je pro naše myšlení nutné.

AXIOM NEKONEČNA

Aritmetika celých čísel se neobejde tedy bez pomoci nebo doplnění axiomem nekonečna. Nejjednodušší jeho vyjádření je asi toto: je-li ‚a' libovolné racionální číslo celé, pak platí ‚$a \neq a + 1$'. Axiom nekonečna je takto jen zdánlivě úzce vyjádřen. Vzpomeňme, že racionální čísla jsou definována pomocí čísel celých, ostatní reálná čísla se vyjadřují opětným užitím axiomu nekonečna zase množinami racionálních čísel a na theorii reálných čísel je vybudována veliká část matematiky. Ukazuje se tedy, že vyjádření axiomu nekonečna v naší uvedené zdánlivě úzké formě stačí. Nuže, tento axiom je právě proto axiomem, že se z logických základních vět dokázati *nedá*. Nedá se dokázati ani z jiných logických soustav než jsme my uvedli, protože není tautologií. Platnost tohoto axiomu se v matematice mlčky předpokládala, ví se však již delší dobu, že teprve jím se umožňuje matematická úvaha o nekonečnu a že je nutno také axiom výslovně vyjádřiti. Abychom se vrátili zpět k tvrzení Poincaréově o závěru z ‚n' na ‚$n + 1$': tento závěr je možno formalisovati jako větu logickou; tak jak býval tento závěr pojímán, předpokládal mlčky axiom nekonečna a tento axiom je právě onou tvůrčí složkou, jíž tak výstižně charakterisoval Poincaré.

Dějinami matematiky se táhne dlouhá řada pokusů *dokázati* axiom nekonečna z logických principů. O jednom z nich si řekneme ihned, druhý si ponecháme na pozdější poznámky k theorii množin a kardinálních čísel.

Zkusme dokázati axiom nekonečna takto: předpokládejme, že je předložen konečný počet předmětů, obecně ,n' (na příklad tři).

Skupinu těchto tří předmětů označme přechodně pouze v této souvislosti $\{a_1; a_2; a_3\}$. Z těchto tří předmětů můžeme utvořiti nové předměty, ve větším počtu. Budou to jisté skupiny tvořené tak, že předmět a_i je ve skupině zastoupen anebo není. Není-li zastoupen, označíme místo, které v našem znázornění v původní skupině předmětu zaujímal, znakem ,$*$'.

První nová skupina bude naše původní $\{a_1; a_2; a_3\}$, druhá $\{*; a_2; a_3\}$, třetí $\{*; *; a_3$, čtvrtá $\{*; a_2; *\}$, další skupiny pak

$$\{*; *; *\}, \{a_1; *; *\}, a_1; a_2; *\}, \{a_1; *; a_3\}.$$

(Poznamenejme, že v theorii množin je to známý způsob tvoření podmnožin k dané množině.) Dostali jsme tak 8 nových skupin (2^3, obecně 2^n), 8 nových předmětů. Opakováním postupu bychom dostali 2^{2^3} předmětů nových, celkem tedy 256 předmětů. Opakujeme-li i s nimi naznačený postup, vytvoříme si konstrukcí 2^{256} předmětů — číslo již značně vysoké, psané asi 150 číslicemi. Mohli bychom si teď sečísti všechny jednotky, odpovídající počtu předmětů v každém stadiu vývoje, mohli bychom si postup myslit opakovaný do nekonečna; axiom nekonečna by byl dokázán.

Není jistě potřebí zvláště upozorniti, že myslíme-li si postup opakovaný do nekonečna, říkáme zakrytě totéž, co bychom chtěli dokázati a tím že důkaz padá. To je argument, jenž leží na snadě. Axiom takto dokázati nelze. Jsou však ještě důvody jemnější, s nimiž nebude na škodu se seznámiti.

1. Dá se sice dokázati, pro každé pevné ,n' že platí $n < 2^n$. Důkaz se provede tak, že vyjdeme z definice

čísla ‚2' a čísla ‚n', zavedeme relaci ‚$<$' a logickým mechanismem jako v případě rovnice $1 + 1 = 2$ vztah potvrdíme. Nedá se však dokázati, že uvedená relace platí *pro všechna ‚n'*. Kdyby tomu tak bylo, získali bychom podstatnou oporu pro důkaz axiomu nekonečna.

2. Nejsme totiž v situaci o nic lepší, než v případě přímého vyslovení axiomu nekonečna. Logistický přepis zní: $(n)\,[n \neq n + 1]$. A podstatný je na této formulaci právě operátor „pro všechny". Pro každý konkrétní případ totiž nerovnost $n \neq n + 1$ dokázati lze. Nelze však před tento vztah postaviti operátor „pro všechny". Mohlo by se zdáti, že nás k tomu opravňuje obecná logická věta, již jsme si své doby uvedli: je-li odvoditelná formule s volnou proměnnou, na př. ‚$A(x)$', pak je také odvoditelná formule ‚$(x)A(x)$'. Pak by se operátor dal postaviti před relaci, jež je pro každé určité ‚n' dokazatelná. Tato úvaha selže z tohoto důvodu: v definici každého určitého ‚n' hrají podstatnou roli oba druhy operátorů — existančních i operátorů „pro všechny". *Počet* těchto operátorů, jak je patrno již na definici čísel 0, 1, 2, se od čísla k číslu mění. Není tedy možno považovati tak jednoduše číslo ‚n' za volnou proměnnou, protože jeho logický ekvivalent je složitý výraz, v němž vystupují operátory a proměnné, ale nikoli číslo ‚n' samo.

3. Je tu ještě důvod další, jejž jenom naznačíme. Předměty, tvořené nově z nějakých předchozích způsobem, jenž vyžaduje náš zdánlivý důkaz axiomu nekonečna, tvoří soubor. Od tohoto souboru se postoupí zase k vyššímu souboru. Počet členů tohoto souboru vyššího typu, jak se pro stručnost vyjádříme, je vyjádřen číslem 2, povýšeným na exponent, rovný počtu členů souboru nižšího typu. Tímto výrokem však vnášíme do ú-

vahy nový moment, velmi skrytý. Umožnili jsme tak, soubory po stránce počtu členů vůbec srovnati. A přece v nižším z nich jsou nějaké členy souboru, ve vyšším pak již složitější předměty, soubory těchto členů. S odpovědí na otázku, jsme-li k takovému srovnání oprávněni v případě dvou souborů typově rozdílných, se potkáme později.

Závěrem lze říci o axiomu nekonečna asi tolik: logickou analysou tohoto axiomu byla odkryta jeho povaha, je to myšlenkový postulát matematický, jenž není tautologií a tím také padá možnost, odvoditi celou matematiku pouze z logických principů. Je to sice zvláštní shoda okolností, že pravá povaha tohoto axiomu byla odkryta právě při pokusu, matematiku z logiky odvoditi, ale tím není nikterak zmenšena zásluha nynější analytické techniky logické, že tuto pravou podstatu objevila.

THEORIE TYPŮ

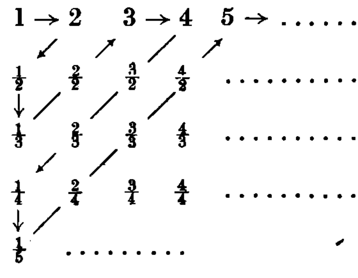
V tomto úseku svých úvah si promluvíme o jistém velmi obecném pravidle logickém, jež mělo a má své důsledky nejen pro matematiku, nýbrž i pro theorii řeči. Tímto pravidlem si zjednáme brzy formální podklad pro řešení některých antinomií, jež jsme své doby uvedli na začátku svých rozhovorů. Řešení jsme tam jen obsahově naznačili — tu je budeme moci také formálně objasniti. Jde o typovou theorii, myšlenku, kterou pojal první anglický matematik a logik Russell a skoro současně s ním König. Typová theorie byla původně nalezena jako prostředek, jak odstraniti některá paradoxa theorie množin. Aby byla podstata věci jasnější a nezávislá na ryze matematických úvahách theorie množin, uvedeme věci, které budeme potřebovati, stručně na tomto místě.

Matematická theorie množin byla od svého založení G. Cantorem až do axiomatických vyšetřování Zermelových a jeho pokračovatelů v t. zv. naivním stadiu svého vývoje. Cantor objevil v této theorii celou řadu velmi duchaplných vět, z nichž některé patří k nejsmělejším výkonům matematiky vůbec. Nedovedl však zabrániti vzniku některých nepříjemných paradox, jež si vynutila očistnou práci v základech theorie.

Co je množinou ve smyslu Cantorově? Množina je soubor dobře rozeznatelných předmětů, shrnutých v celek. Upozornili jsme již na počátku, při zmínce o paradoxu „hromady", že takové zdánlivé předměty, jež nejsou řádně definovány, nýbrž jen intuitivně tušeny, se vrací do matematiky i v její moderní fázi. Zdánlivá definice Cantorova je toho příkladem; nevíme zatím jen, kde se její nedostatky projeví. To na svém místě ukážeme. S těmito předměty, množinami, je možno prováděti velmi složité logické úvahy. Množiny je možno sčítati, násobiti, je možno tvořiti podmnožiny dané množiny a z těch zase množiny nové a mnohé jiné operace. Množině je možno přiřaditi nový druh čísel, číslo kardinální, a množiny podle těchto kardinálních čísel srovnávati „co do velikosti". Význam theorie množin je v tom, že je podkladem pro řadu oborů čisté matematiky, jako na příklad theorie funkcí, topologie, theorie grup a j.

Kardinální čísla, přiřazená množinám, nejsou definována tak jako obyčejná celá čísla, alespoň ne na první pohled. Na definici kardinálních čísel je to zajímavé, že se vlastně vůbec nevyřkne, co je kardinální číslo — vyjádří se pouze okolnost, kdy dvě množiny mají stejné kardinální číslo. Dvě množiny mají stejné kardinální číslo tehdy, je-li možno elementy obou množin vzájemně jedno-jednoznačně přiřaditi. To znamená, že jednomu elementu jedné množiny odpovídá jeden a jen jeden element druhé množiny a také naopak. Ukážeme si známý příklad takového přiřazení. Dokážeme tím současně, že množina všech racionálních čísel má stejné kardinální číslo jako množina všech čísel celých.

Napišme racionální čísla (celá i zlomky) do této tabulky:



Napišme teď čísla tabulky v pořadí, jež určuje naznačená lomená čára. (Na každé diagonální úsečce leží racionální lomená čísla taková, že součet hodnot čitatele i jmenovatele je na ní konstantní, myslíme-li si pro tu chvíli i čísla prvé řádky ve tvaru

$$\tfrac{1}{1}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{3}{1}, \tfrac{4}{1}, \ldots\ldots)$$

Vynecháme vždy takové číslo, jež bylo již v předcházejícím úseku napsáno, a to po případném krácení. Je patrno, že dostaneme všechna racionální čísla právě jen jednou

$$1, 2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 3, 4, \tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\ldots$$

Pod tato čísla možno napsati posloupnost všech celých čísel kladných

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$$

Je patrno, že každému číslu první množiny odpovídá jednoznačně číslo druhé množiny, platí to také obráceně a množiny jsou tedy na sebe zobrazeny. Proto jsou obě množiny, jak se někdy říká, ekvivalentní, jinak řečeno, mají stejné kardinální číslo. Toto kardinální číslo je ze všech transfinitních čísel nejmenší a je charakteristické pro všechny množiny, jež se nazývají spočetné.

Své doby vypadalo toto zjištění, že uvedené množiny mají stejné kardinální číslo (jak bychom teď řekli), velmi podivně. Množina celých čísel byla považována za menší než množina všech čísel racionálních, protože některá z racionálních čísel jsou svojí hodnotu rovna číslům celým a ostatních je ještě nad to „mnohem" více. Ještě nápadnější byl tento zjev u dvojnásobků celých čísel: ty lze ještě jednodušeji přiřaditi k originálům, z nichž vznikly. Pak má množina dvojnásobků celých čísel stejné kardinální číslo jako množina všech čísel celých (pod každým číslem celým je jeho dvojnásobek jako jeho obraz). A při tom množina dvojnásobků je obsažena v množině celých čísel jako část v celku. Tak se na tyto věci své doby nahlíželo. Zásada, že část je menší než celek, byla zásadou platnou v logice starověku i středověku. Proto považovali matematikové (mezi jinými i Leibniz sám!) za nemožné, zabývati se nekonečnými čísly, jak to jmenoval, protože nekonečno prý implikuje spory (proti uvedené zásadě o celku a části). V takových úvahách hrála značnou roli okolnost, že se nikdo nezeptal, co je vlastně to nekonečno, nezeptal se po výstižné definici, nýbrž spokojoval se neurčitými obrazy a metafysickými opisy. Jedním z prvních průkopníků nových myšlenek o nekonečnu byl náš velký matematik a filosof Bernard Bolzano.

Okolnost, že nekonečnou množinu lze samu na její část zobraziti, a to jedno-jednoznačně, jak jsme viděli na posledních příkladech, bylo užito i pro definici nekonečných množin. Takové množiny, jež lze zobraziti na nějakou jejich podmnožinu, se někdy nazývají reflexivní. Množina je pak tehdy nekonečná, je-li reflexivní. Je okamžitě patrno, že vlastnost reflexivnosti nemají konečné množiny. Množinu, obsahující 5 elementů nelze zobraziti na žádnou z podmnožin, tak jak zobrazení žádá. Není však známo, existují-li množiny, jež by reflexivní nebyly a při tom byly prokazatelně nekonečné.

Reflexivnosti nekonečných množin bylo užito i k důkazu, že existuje nekonečná množina. Kdyby tento důkaz byl správný, mělo by to důsledky pro axiom nekonečna. Důkaz však správný není. Pro zajímavost však nastíníme jeho hlavní myšlenku (Dedekind): mysleme si vůbec všechny možné předměty, ať již vnějšího světa, ať již z oblasti duševního života. Každému takovému předmětu musí zase odpovídati idea toho předmětu. Ideje předmětu tvoří podmnožinu všech předmětů vůbec, takže je tu množina reflektována sama na sebe a je tedy nekonečná.

Slabina uvedeného zdánlivého důkazu spočívá v tom, že předpokládá svět myšlenkový, svět idejí, jak se důkaz vyjadřuje, jako něco hotového; jako sbírku obrazů všech možných předmětů. Tento předmět, nejasně určený, připomíná nepříjemné stránky Cantorovy definice množiny. Druhá obtíž spočívá v nejasném vyjádření předmětu a ideje o předmětu. Není pochyby, že kdybychom vhodně definovali takové pojmy, mohli bychom důkazu dáti tak přesnou formu, že by vskutku důkazem pro nekonečnou množinu byl. Ale při tom bychom do definicí vnesli právě to, co bychom teprve dokázati měli. Od podrobné kritiky upouštím pro zastaralost tohoto způsobu úvahy.

Podíváme-li se po všem, co jsme se dozvěděli o kardinálních číslech, na definice celých čísel, nebudou se nám již oba druhy čísel, konečných a nekonečných, zdáti již tak odlišné. Co je kardinální číslo? Je to společná vlastnost všech množin, jež se dají na sebe jedno-jednoznačně zobraziti. Co je na příklad číslo 2? Je to společná vlastnost všech predikátů ‚*F*', jež vyhovují podmínce, vyřčené pravou stranou definiční rovnice pro číslo 2. Číslo 2 není než společnou vlastností *všech* skupin, z nichž každá má jeden pár předmětů.

Souhlas docílený tak v pojetí konečných i nekonečných čísel jako pojmových konstrukcí, je také pěkným výsledkem logického rozboru pojmu čísla.

K dané množině můžeme tvořiti podmnožiny, ukážeme si teď na příkladě, jak mohou podmnožiny vypadati. Vzpomeneme si brzo, že jsme tohoto postupu užili již jednou, při zdánlivém důkazu axiomu nekonečna. Nechť množina má tři elementy, označíme ji (a_1, a_2, a_3). Podmnožiny vytvoříme tak, že sestavíme v našem případě 8 ($= 2^3$) trojic, z nichž každá má psanou nulu na tom místě, kde příslušný element není. Jinak je to místo elementem obsazeno. Již tu, v případě konečné množiny, je patrno, že počet podmnožin je větší než počet elementů původní množiny. Způsob, jakým se tvoří podmnožiny u konečných množin, lze bez obtíží přenésti na množiny nekonečné. Také u těchto množin platí, že kardinální číslo všech podmnožin je větší než kardinální číslo množiny původní. Obecný důkaz této věty provedl Cantor (t. zv. diagonální methodou) a od té doby patří k základním poznatkům theorie množin. Důkazu samého nepotřebujeme, zjednali jsme si již povšechnou orientaci o základních pojmech theorie množin, abychom mohli uvažovati o logické struktuře jistých vět, ke kterým se právě obracíme.

Věta o kardinálním čísle množiny *M* a kardinálním čísle množiny všech jejích podmnožin *N* má tento důsledek: všechny myslitelné předměty vůbec (nejen tedy předměty matematické) je možno podle Cantorovy zdánlivé definice množiny shrnouti v celek, vyhovují-li požadavku, aby byly rozeznatelné. Dostaneme tak největší možnou množinu — tato největší možná množina musí míti také největší kardinální číslo.

Tato množina však není největší, nebo přesněji, nemá největší kardinální číslo, protože o ní platí Cantorova věta o množině podmnožin. Podle ní je tedy množina o kardinálním čísle *ještě* větším.

Paradoxní výsledek, jejž jsme tak dostali, je možno kriticky rozebrati v několikerém směru. Především přihlédnutím k definici množiny, jak ji stanovil Cantor.

Upozornil jsem již na počátku našich úvah, že neúplně stanovené zdánlivé pojmy jako shluk, hromada a pod. byly kritisovány antickými dialektiky, viděli jsme také, jak brzo vedou k rozporům. Cantorova zdánlivá definice množiny se od jmenovaných zdánlivých pojmů podstatně neliší. To je právě patrno při vzniku antinomie, již jsme si teď uvedli. Mohlo by se říci — patrně není taková množina, obsahující *všechny* myšlené předměty, přípustná — ale Cantorův opis toho, co má býti množina, nijak neupozorňuje, že by taková množina nesměla býti utvořena. A přece není možná, protože involvuje spor.

Tímto směrem by se dala snad nedostatečná definice množiny napraviti. Cesta však není schůdná a nezajišťuje než část dobrého výsledku. Nevíme, odkud se může vynořiti nebezpečí znovu, když definice množiny se zdá již býti zcela v pořádku. Hlubší řešení je řešení axiomatické, jež v theorii množin zavedl po prvé Zermelo. Množina je podle tohoto pojetí předmětem, který vyhovuje podmínkám, postulátům, jež se na ten předmět současně kladou. Při tom se vlastně přímo nevyřkne, co vlastně je množina — pro tento zvláštní charakter se někdy označují takové definice jako definice implicitní. Tímto řešením se nebudeme zabývati, poznáme v dalším příklad jiné axiomatické soustavy s vlastnostmi podobnými, na které si povahu implicitní definice ukážeme.

Velmi obecný způsob, jak odstraniti podobné rozpory i v jiných, zdánlivě odlehlých případech, našel Russell ve své typové theorii. Myšlenkou této theorie se budeme teď zabývati. Abychom si získali širší východisko, rozmnožíme počet příkladů ještě o jeden a uvedeme na paměť příklady starší. Nový příklad vznikl z úvah o „největší množině", o níž jsme před nedávnem mluvili. Tato množina je také předmětem. Největší množina by tedy měla obsahovati také tento předmět jako element. Protože však není žádná větší, musila by sebe samu obsahovati jako element. V každém případě má smysl, ptáme-li se po množinách, jež sebe samy obsahují jako element anebo ne. Jsou-li takové množiny možné, nebo jsou-li sporné a tedy nesmyslné, nás zatím nezajímá. Náš dosavadní postup využívá pouze Cantorovy definice množiny dovoleným způsobem. Množiny lze patrně podle principu vyloučené třetí možnosti rozděliti na dva druhy: množiny, jež samy sebe obsahují jako element a množiny, jež sebe samy neobsahují. Má tedy také smysl mluviti o množině množin, jež sebe samy jako element neobsahují. Budiž to množina K. Pak jsou možné dva závěry:

1. K obsahuje sebe samu jako element,
2. K neobsahuje sebe samu jako element.

První případ je nemožný, protože je přímo proti definici množiny K. Druhý také, protože K má míti všechny množiny, jež sebe samy neobsahují jako element; pro ni samu tedy nezbývá, než aby sebe samu obsahovala.

Toto paradoxon pochází od Russella a bylo jednou z nejsilnějších pobídek, jíti věci na kloub a theorii množin, jež přes krásné výsledky žila v naivním období, nějak podstatně podložiti. Cantor sám nenašel tehdy prostředky, jak těmto paradoxům čeliti.

Vzpomeňme na tomto místě paradoxa o Kréťanovi a Grelling-Nelsonovy antinomie „heterologické".

Všechny tyto antinomie mají jeden společný rys, který lze nejlépe vyjádřiti formalisací. Všimněme si nejprve antinomie Russelovy. Okolnost, že nějaký prvek je v množině, lze formálně přepsati takto: $M(x)$ čteno: ‚x' je elementem ‚M'. Predikát ‚M' množinu určuje, v případě, že by dva predikáty určovaly tutéž množinu, musí býti ekvivalentní. Vyjádření, jež bylo uvedeno, platí samozřejmě v každém případě, t. j. ať jsou prvky množiny jakékoli, v obecném případě jsou tyto elementy zase množinami. Důsledně tedy musíme vyjádřiti formou $M(M)$ okolnost, že množina je svým vlastním elementem (že obsahuje sebe samu jako element).

Grellingova antinomie o „heterologickém" řadí pojmenování pojmů podle toho, patří-li pod skupinu, již samy vyjadřují nebo ne. Uvedli jsme své doby, že pojem, odpovídající slovu „abstraktní" je abstraktní, stejně tak pojem „konkrétní". Fysikální rychlost „v" je také abstraktní pojem stejně jako druhá věta thermodynamiky. Buďtež všechny abstraktní pojmy shrnuty predikátem (funkcí) „A". Formální přepis případů právě uvedených je: $A(A)$, $A(K)$, $A(v)$, A(II. v. t.).

Lhář z Kréty: občan z Kréty pronáší úsudek o celém kolektivu, všech Kréťanech. Kdyby stál mimo a byl občanem jiné země, pak by platilo: $(x)[K(x) \rightarrow L(x)]$, značíme-li funkcí „$K$" výrok občana z Kréty a funkcí „L" výrok lživý. Z toho, co jsme si své doby uvedli v theorii funkčního počtu, víme, že napsaný vztah dvou predikátů lze jednodušeji označiti jako implikaci dvou predikátů takto: Impl (K,L). Tento poslední výrok však musí býti jedním z výroků „x", t. j. argumentem funkce „K", jestliže úsudek vyslovuje Kréťan. Platí tedy v tomto případě $K[\mathrm{Impl}(K,L)]$.*)

*) Zajímavé souvislosti a podrobnější osvětlení antinomií tohoto druhu se dají získati, vezmeme-li v úvahu vztah mezi předmětem a jeho pojmenováním. Obtížné problémy s tím spojené by nás tu vedly daleko.

Uvažme ještě nakonec, že antinomie o největší množině vede k podobnému výsledku. Aby taková množina byla vskutku největší, musila by obsahovati množinu všech svých podmnožin, množinu všech podmnožin této množiny atd. V každém případě je jednou z podmnožin také množina sama. Potom by měla funkce M, jíž bychom jako predikátem stanovili největší možnou množinu, jako argument také M samo, takže bychom měli případ podobný jako v antinomii Russellově.

Ve všech případech, jichž jsme se tu dotkli, je to společné, že funkce je sama svým vlastním argumentem, ať již přímo, anebo v další funkci, jež stojí na místě argumentu (v případě Kréťanovy antinomie). Jinak řečeno, uvnitř závorky pro argument se někde vyskytne funkční znak, postavený před závorkou pro argument. Nejjednodušším tvarem tohoto výrazu, který budeme dále zkoumati, je výraz ‚$A(A)$' (bez újmy obecnosti). Ukážeme si teď, že každý výraz uvedeného tvaru vede ke sporu.

Víme z výrokového počtu, že je-li ‚A' výraz, je také ‚$\overline{A}$' výraz, je-li ‚$f(x)$' výraz, je jím také ‚$\overline{f}(x)$'. Užijme toho na svůj případ: předpokládáme-li na chvíli, že výraz ‚$A(A)$' má smysl, musí míti smysl také výraz ‚$\overline{A}(A)$'. Tento poslední výraz se dá dokonce interpretovati tak, že logická funkce nemůže býti svým vlastním argumentem, což je výsledek, ke kterému směřujeme. Zaveďme definicí novou funkci $N(A) \equiv_{Df} \overline{A}(A)$. Protože víme, že je možno dosaditi za proměnné, volme substituci tak, aby ‚A' bylo nahrazeno ‚N'. Dostaneme tak spornou formuli $N(N) \equiv \overline{N}(N)$.

Úvaha posledního odstavce pochází v podstatě od Behmanna, jejím účelem je drasticky ukázati, že funkce může býti svým vlastním argumentem. Funkce je logicky vyššího typu než její argument, jako predikát shrnuje totiž všechny svoje argumenty, vytvářejíc z nich třídu, proto nemůže býti mezi nimi. Funkce má tu povahu pořádající, chceme-li třídící, odděluje jisté předměty od jiných a shrnuje je k sobě. Russell vyjádřil velmi přiléhavě zákaz porušiti typové pravidlo slovy: „What ever involves all of the collection must not be one of the collection". To je podmínka, jež zabrání, aby se nedefinovalo „bludným kruhem".

Úvahy o theorii typů by vyplnily celou knihu. Na tomto místě nám zcela postačí, když si uvědomíme, jak dochází k různým typům v hierarchii logických forem. Mysleme si nějaká individua, shrnuta predikátem ‚*P*'. Tímto predikátem ‚*P*' vyslovíme o všech těch individuích nějakou společnou vlastnost. Individua jsou zatím základem pro určení typu, přisoudíme jim tedy prozatím typ *O*. Predikátů jako je ‚*P*', může býti více, další třeba ‚*Q*,*R*,*S*, . . .'. Některé z nich můžeme zase shrnouti novým predikátem (vysloviti o nich společnou vlastnost), třeba ‚*A*'. Platí pak ‚*A*(*P*), *A*(*Q*), *A*(*R*), . . .'. Predikáty jako *je* ‚*P*,*Q*, . . .' jsou vůči předmětům, o nichž se vyjadřují, stupně 1. Predikát ‚*A*', jenž je predikátem o predikátech, musí býti tedy stupně 2. Tak by bylo možno pokračovati. Úvaha je složitější, máme-li místo jednoduchých predikátů složité relace, funkce o větším počtu argumentů. Pak je nutno vyjádřiti přesně pravidla, jež umožní v každém případě bezpečné stanovení a rozeznání typu. Těmito technickými otázkami logiky se dále zabývati nebudeme, poněvadž naším cílem bylo, upozorniti pokud možno jednoduchými prostředky na theorii typů.

Účinnost Russellova pravidla o dodržení stupně výrazu je taková, že je možno zameziti celé řadě antinomií, s nimiž jsme se setkali. Na některých jsme již ukázali, kde je nedostatek. Antinomie, jichž společnou vlastností jest, že porušují typové pravidlo, zkonstruují jisté zdánlivé předměty, na jejichž účet pak kladou otázky. Tyto otázky však nejsou otázkami, na něž by byly rozumné odpovědi, protože konstruované předměty v antinomiích jsou sporné.

Vraťme se ještě k antinomii Richardově, kterou jsme zahájili první kroky po naší myšlènkové oblasti. Její řešení jsme si tehdy neudali a odkázali jsme je na pozdější dobu. Definice Richardova čísla, jak nazveme ono nejmenší celé číslo, jež není možno definovati větou, obsahující méně než jedno sto slov, je *třídícím* principem. Tento třídící princip musíme nechati pevný po tu dobu, co číslo hledáme. Čísla, jež vyhovují tomuto třídícímu principu, jsou argumenty tohoto predikátu. Nemůže tedy tento třídící princip býti svým vlastním argumentem. Zeptáme-li se tedy, která z obou argumentací, uvedených u Richardovy antinomie, je falešná, tedy zcela jistě druhá; nedbá typového pravidla.

Dodržíme-li typové pravidlo, neobjeví se obtíže, jež jsou osvětleny uvedenými antinomiemi. Objeví se však obtíž jiná, kterou si ukážeme nejlépe na theorii reálných čísel. Reálné číslo se zavádí do analysy různými způsoby: Dedekindovým řezem nebo Cantorovou fundamentální posloupností, nehledíc k methodám jiným, jež jsou na oba zmíněné způsoby převeditelné.

Jde-li o sestrojení reálného čísla neracionálního, předpokládáme theorii celých racionálních i racionálních čísel jako podklad pro další hotovou. Definici racionálních čísel celých jsme uvedli, definice racionálních zlomků nečiní formalisaci žádné obtíže. Jde teď o Dedekindův řez, jímž je stanoveno reálné číslo iracionální. Iracionální číslo je stanoveno vždy tehdy, jsou-li rozdělena všechna racionální čísla do dvou skupin a to tak, že

1. každé číslo jedné skupiny (říkejme jí dolní skupina) je menší než každé číslo druhé skupiny (říkejme jí horní skupina),

2. v dolní skupině není číslo největší a v horní skupině není číslo nejmenší.

Obě skupiny čísel určují reálné číslo iracionální.

Všechna racionální čísla dolní skupiny je nutno shrnouti nějakým predikátem, na příklad ‚D', takže platí pro čísla dolní skupiny $(x)D(x)$, mluvíme-li o všech. Podobně platí pro racionální čísla hoření skupiny $(y)H(y)$. Racionální čísla, jež vystupují v operátorech a v argumentech obou funkcí, jsou definována pomocí predikátů, jež stanovily celá čísla, t. j. nakonec predikáty $0(F)$, $1(F)$, $2(F)$, ... Funkcím ‚D' i ‚H' lze předepsati jisté formální podmínky, aby vyjadřovaly, že spolu vytvořily Dedekindův řez. Pak lze formálně vyjádřiti závislost definovaného reálného čísla ‚R' na obou funkcích ‚D,H' na př. takto ‚$R(D,H)$'. Je zcela zřejmé, že reálné číslo tak definované je jistě vyššího typu, logicky vzato, než racionální číslo celé. Toto racionální celé číslo je určitě již v argumentech funkcí ‚D' resp. ‚H'. Přicházíme tak do zvláštní situace, o které jsme již jednou mluvili. Na čísla reálná jsme ochotni nahlížeti jako na homogenní třídu a to proto, že se všechna řídí týmiž početními pravidly. Z předchozí úvahy však vychází, že o homogennosti nemůže býti ani řeči, naopak, kdežto celá racionální čísla jsou dána ještě poměrně jednoduchými predikáty, racionální již predikáty vyššího stupně, a reálná zřejmě ještě podstatně vyššího stupně. Situace se zostřuje, půjdeme-li dále v sestrojování obvyklých předmětů analysy, jako je třeba bod zhuštění bodové množiny na ose reálných čísel. Takový bod obsahuje ve svém libovolném okolí (sebemenším intervalu zde) vždy nekonečně mnoho bodů té množiny. Podobně jako je reálné číslo stanoveno jistými množinami čísel racionálních, je také bod zhuštění stanoven množinou nebo množinami reálných čísel. Typově tedy musí býti zase ještě vyšší než „obyčejné" reálné číslo, ale jen po tu chvíli, co o něm jako o bodu zhuštění uvažujeme, jinak není vskutku ničím jiným, než obyčejným reálným číslem.

Je tu tedy jistá obtíž, jak zařaditi předmět, konstruovaný pomocí nižších předmětů zase do třídy těchto nižších předmětů se stanoviska typového. Uvedu na tomto místě jedno řešení Russellovo, které má svůj historický význam, ač dnes již není tak nutné, jak se své doby zdálo. Russell odstranil obecně obtíže, jež plynou z typového pravidla axiomem, jejž nazval „axiom of reducibility". V původním tvaru tento axiom neuvedeme, potřeboval by ještě mnohé doplniti o typové theorii a není toho také třeba. Ale snadno pochopitelný je jeden důsledek stále ještě dosti obecný, který se hodí právě pro náš případ theorie reálných čísel. Budiž ‚x' předmět našeho logického počtu. O tomto ‚x' mohou platiti nejen predikáty prvního stupně $A_1(x)$, nýbrž i vyššího stupně — třeba n-tého — tedy $A_n(x)$. Důsledek z řečeného Russellova axiomu reducibility zní

$$(A_n)(EA_1)(x)[A_n(x) \rightarrow A_1(x)].$$

To znamená, že ke každému, jakkoli vysokému stupni predikátu existuje predikát prvního stupně, na nějž se predikát n-tého stupně převede. To postačí pro náš případ reálných čísel. Také tam by tedy existoval predikát téhož stupně pro číslo stanovené Dedekindovým řezem jako pro číslo racionální a konečně i jako pro číslo, jež odpovídá bodu zhuštění bodové množiny na ose reálných čísel. Tak by bylo docíleno žádoucí homogennosti čísel, vyjádřené tím, že pro ně pro všechna platí stejná početní pravidla.

Stojí za upozornění, že axiom reducibility nezruší výhody, jež s sebou přináší typová theorie, t. j. jeho užitím nepřivodíme znovu staré antinomie, jež theorie typů měla odstraniti. Ale cena, zaplacená přijetím nového axiomu, mimologické povahy (netautologické), je příliš veliká. Okolo tohoto axiomu byla vedena celá řada duchaplných výzkumů, byla snaha, nahraditi jej vhodnějším a méně násilným pravidlem. Bylo zjištěno mimo jiné, že lze zcela dobře mysliti v soustavách, kde tento axiom neplatí. V pozdější době také Russell od používání tohoto axiomu ustoupil; typovou theorii je možno tak zjednodušiti, že není nutný.

V myšlence typové theorie je však zachycen podstatný rys lidského myšlení a tento objev je ceny trvalé. Je to pořádající princip v našem myšlení, jenž nedovolí směšování předmětů získaných různými cestami a potom uměle včlenovaných do jednoho souboru. Na tomto místě se zmíníme jen poznámkou o zdánlivém důkazu axiomu nekonečna, kde jsme na typovou theorii upozornili. Z toho, co bylo až dosud uvedeno, je patrno, že nejsme oprávněni v případě, tam projednávaném, sestaviti soubor z členů typově naprosto rozdílných bez jakéhokoli kritického zřetele. I se stanoviska typové theorie by důkaz padl, nejen tedy z důvodů, jež jsme již na místě samém uvedli.

AXIOM VÝBĚRU A THEORIE MNOŽIN

Uvedli jsme na svém místě, že byl učiněn smělý pokus, vybudovati celou matematiku jako odvětví čisté logiky. Tento pokus sice ztroskotal, přinesl však nicméně neobyčejný zisk do poznatků o základech matematiky. Jednou z vět, jež nelze z logiky odvoditi, jsme se již zabývali. Byl to axiom nekonečna. Zbývá ještě druhý axiom, bez něhož matematiku nelze vybudovati, a to axiom výběru. Není vyloučeno, že je jich ještě více, zdá se však, že tyto dva již postačí; nedávno zmíněného axiomu reducibility není již zapotřebí. Axiom výběru je netautologickým axiomem, t. j. je větou, která přináší nové poznání a není prázdná. Axiom zní takto: je-li *M* množina množin, které jsou bez společných prvků a nejsou prázdné, pak existuje množina *N*, jež má s každou množinou množiny *M* společný jeden a jen jeden element.

Tento axiom lze formulovati obecněji, na př. podmínka, aby množiny obsažené v *M* byly bez společných prvků, není nutná, ale pro naše účely zcela postačí uvedené vyjádření.

Formalisuje-li se tento axiom, dá se dokázati, že jej nelze převésti na tautologickou formuli. Z toho následuje, že matematika pracuje při nejmenším se dvěma axiomy povahy specificky matematické.

Axiom výběru má význam pro násobení množin, proto budeme musiti uvésti napřed některé pojmy z operací množinových. Před násobením se zmíníme ještě o sčítání množin; sčítání nesouvisí sice přímo s povahou látky, o níž mluvíme, ale poskytuje pěkný příklad opatrnosti, s níž je nutno zaváděti základní operace pro množiny, abychom se vyhnuli analogiím, jež našim představám vnucují hromady, souhrny a jiné nedostatečně určené předměty. Jde tedy o sčítání a násobení množin, tím také projednáme sčítání a násobení kardinálních čísel, které se dá na operace množin převésti. Budeme předpokládati, že množiny, o které jde, nejsou konečné.

Máme sečísti množinu M a množinu N. Elementy M buďtež označeny x, elementy N pak y. Utvoříme teď novou množinu, jež bude míti dvojí druh elementů: 1. elementy tvaru $(x,0)$, kde x probíhá všemi elementy množiny M a 2. elementy tvaru $(0,y)$, kde y probíhá všechny elementy množiny N. Nově utvořené elementy (páry) nemají zřejmě společné jedince, takže můžeme prohlásiti množinu, jež obsahuje všechny jmenované páry jako elementy za součtovou množinu $M + N$. Má-li množina M kardinální číslo a_1 a množina N kardinální číslo a_2, má množina párů kardinální číslo $a_1 + a_2$. To plyne z okolnosti, že kardinální číslo je společný predikát všech ekvivalentních množin, t. j. takových, jež je možno na sebe jedno-jednoznačně zobraziti. Všimněme si zajímavé okolnosti, že nová součtová množina nemá již elementy původních množin, jež se měly sečísti, nýbrž elementy nové, páry, takže tu není ani vzdálená analogie se smísením dvou „hromad".

Máme-li utvořiti součin nekonečně mnoha transfinitních čísel a_i, tedy součin $\underset{i}{\pi} a_i$ postupujeme takto: každému transfinitnímu číslu kardinálnímu a_i odpovídá nějaká množina N_i. Předpokládejme pro jednoduchost opět, že množiny N_i nemají navzájem společných elementů. Utvořme teď množinu, jejíž elementy budou

tváru
$$(x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots),^*)$$
kde každé x_i je z množiny N_i a nezávisle na všech ostatních x_j probíhá všemi elementy množiny N_i. Množinu všech takových elementů prohlásíme za součin množin N_i, tedy $\pi_i N_i$ a kardinální číslo, jež odpovídá této množině, bude kardinální číslo příslušné součinu $\pi_i \alpha_i$.

Definice součinu množin, resp. kardinálních čísel je tak volena, aby byla v souhlase s výsledky operací v konečném oboru. Provedeme si jako příklad násobení dvou konečných množin
$$N_1 = (x_{11}, x_{12}), \quad N_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}).$$
V nové součinové množině budou tedy elementy tvaru
$$(x_{1i}, x_{2j}), \quad \text{kde } i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3.$$
Dostaneme tak elementy
$$(x_{11},x_{21}),\ (x_{11},x_{22}),\ (x_{11},x_{23}),\ (x_{12},x_{21}),\ (x_{12},x_{22}),\ (x_{12},x_{23}).$$
Více možností zřejmě není a elementů je šest. K množině N_1 patří konečné kardinální číslo 2, k množině N_2 konečné kardinální číslo 3, k součinové množině výsledné patří konečné kardinální číslo 6.

O konečných kardinálních číslech známe poučku, že jejich součin je tehdy a jen tehdy roven nule, je-li alespoň jeden z činitelů roven nule. Tato věta však není poučkou (t. j. dokazatelnou větou) v theorii kardinálních čísel transfinitních. Objasníme blíže, jak se tam věci mají. Tato věta se přesně vzato nedá dokázati v tom případě, že jde o součin *nekonečně mnoha* kardinálních čí-

*) Tohoto způsobu značení užíváme pro názornost, podrobnější poučení nalezne čtenář v učebnicích theorie množin.

sel (nebo množin), ať již konečných nebo transfinitních. V případě *konečného* počtu kardinálních čísel jakýchkoli se dokázati dá a výsledek je obdobný, jako u čísel konečných. Pro nekonečně mnoho kardinálních čísel se věta dá dokázati za předpokladu, že existuje alespoň jeden element toho tvaru, který jsme si uvedli při výkladu součinu množin. Element takový obsahuje z každé množiny, jichž součin má býti utvořen, *jednoho* representnta. A tu jsme právě u axiomu výběru. Takový výběr tedy musí býti možný, aby součin byl nenulový. Dá se dokonce dokázati ještě více: věta vyjadřující, že součin nekonečně mnoha kardinálních čísel není roven nule, je-li každý činitel různý od nuly, je *ekvivalentní* s axiomem výběru.

Rozšíříme-li tedy větu: součin jakéhokoli počtu kardinálních čísel je různý od nuly, jsou-li činitelé různí od nuly (vedeni jsouce jakýmsi principem permanence matematických úkonů), pak můžeme axiom výběru dokázati.

Axiom výběru je velmi pozoruhodná matematická věta, jež si zajistila v dějinách matematiky posledních desítiletí zvláště čestné místo. Je málo problémů v matematice, o nichž by se bylo s takovou prudkostí, v matematice jinak neobvyklou, diskutovalo. Axiom sám byl po prvé výslovně uveden Zermelem při důkazu, že každou množinu lze *dobře uspořádati.*

Množinu lze *uspořádati,* platí-li mezi kterýmikoli jejími elementy transitivní relace (pořádající), již symbolicky označíme „$\prec$". Mezi dvěma libovolnými elementy uspořádané množiny pak platí buď $a \prec b$ nebo $b \prec a$. Transitivnost relace je vyjádřena známým způsobem takto:

$$a \prec b \,.\, b \prec c \rightarrow a \prec c.$$

Tím však ještě není vyjádřeno *dobré* uspořádání množiny. To je splněno tehdy, když každá podmnožina původní množiny má první element. Na srovnání si vezmeme množinu celých kladných racionálních čísel, uspořádaných podle velikosti a množinu všech reálných čísel, obsažených mezi body 0 a 1 na číselné ose, včetně těchto bodů (tedy uzavřený interval 0,1). Ať volíme jakoukoli podmnožinu z množiny uspořádaných celých kladných čísel, bude míti vždy první element, bude to nejnižší celé číslo v té podmnožině obsažené. V druhé množině vytvořme podmnožinu tak, že odloučíme bod 0. Vzniklá množina nebude již míti první element, protože nexistuje reálné číslo, které by následovalo ihned po 0. Ke každému sebemenšímu kladnému reálnému číslu lze totiž udati ještě menší (na příklad jeho polovinu). První množina je dobře uspořádána, druhá nikoli, ačkoli je alespoň uspořádána.

Protože potřebujeme pro další výklad několik základních poznatků o pořádkových číslech, vsuneme je na tomto místě. Dvě množiny, jež byly uspořádány podle předchozího, jsou si podobny, můžeme-li je uvésti ve vztah originálu (první množina) a zobrazení (druhá množina) jeho tak, že platí-li mezi elementy originálu vztah „$x \prec y$", platí také takový vztah mezi příslušnými obrazy těchto elementů. Značíme-li tedy elementy druhé množiny obecně čárkou, pak platí „$x' \prec y'$". Říkáme pak, že dvě takové uspořádané množiny mají stejný pořádkový typ. Příklad: množina

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

uspořádaná obvyklou relací „větší než" a množina

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$$

patří k stejnému pořádkovému typu. Pořádkový typ je predikátem, shrnujícím v jednu třídu podobné množiny. Není tedy na př. množina

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

a množina

$$\{\ldots 5, 4, 3, 2, 1\}$$

stejného pořádkového typu, první z nich má počáteční element a nemá poslední, druhá naopak. Pořádkové typy dobře uspořádaných množin se nazývají pořádková čísla (ordinální) v případě, že jde o množiny nekonečné — transfinitní pořádková čísla. Nejmenším transfinitním pořádkovým číslem je číslo ω. Je to označení pořádkového typu nekonečné posloupnosti, tedy také na př. množiny všech čísel celých, uspořádaných podle velikosti. Protože takto uspořádaná množina je, jak víme, *dobře* uspořádaná, můžeme nazvati tento pořádkový typ pořádkovým *číslem*. Platí pro něj rovnice

$$1 + \omega = \omega,$$

nikoli však

$$\omega + 1 = \omega.$$

To je patrno z okolnosti, že dvě uspořádané množiny

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

a

$$\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

patří k témuž pořádkovému typu, kdežto

$$\{2, 3, 4, \ldots; 1\}$$

mající poslední element a množina nemající jej

$$\{1, 2, 3, \ldots\}$$

k témuž pořádkovému typu nepatří.

Připojíme-li k dobře uspořádané množině

$$\{1, 2, 3, \ldots\}$$

ještě pořádkové číslo ω jako *poslední* element, dostaneme množinu, patřící k pořádkovému typu $\omega + 1$, od té lze postoupiti k pořádkovému typu $\omega + 2$, $\omega + 3, \ldots$ přidáváním dalších elementů až konečně k $\omega \,.\, 2$. Připojujeme vždy za poslední přidaný element $\omega + k$ nový element $\omega + k + 1$. K vyššímu pořádkovému typu a v našem případě i k pořádkovému číslu ω^2 dojdeme na př. tak, že sestavíme posloupnost z posloupností takto: první z nich bude míti všechna prvočísla, jichž je, jak víme, nekonečně mnoho (Euklid)

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

druhá jejich dvojnásobky

$$4, 6, 10, 14, 22, 26, \ldots$$

třetí trojnásobky

$$9, 15, 21, 33, 39, \ldots$$

atd. Myslíme si všechny takové posloupnosti, jichž je nekonečně mnoho, napsány za sebou tak, aby představovaly dobře uspořádanou množinu. Tato množina má pořádkové číso ω^2. Podobně je možno postoupiti k ω^3, $\omega^4, \ldots$ a lze nahlédnouti, že i k pořádkovému číslu ω^ω, ω^{ω^ω} a dále.

Zakladatel theorie množin, G. Cantor, považoval dobré uspořádání každé množiny za možné, ba intuitivně za jisté. Při ohromné složitosti, jaké mohou nabýti množiny, se však ukázalo, že dobré uspořádní množiny není nikterak jasně patrné. Proto bylo zapotřebí důkazu, že tato možnost vždy je. Myšlenku důkazu si tu podáme, s výslovnou výhradou, že nejde o přesný důkaz, jenž je uveden v učebnicích theorie množin. Celá záležitost s problémem dobrého uspořádání je totiž neobyčejně zajímavá se stanoviska logického. Věta, kterou dokázal Zermelo, je existenčním důkazem pro možnost dobrého uspořádání. Prakticky však tuto možnost dobrého uspořádání vůbec neukazuje.

Mějme nějakou neprázdnou množinu M. Z této množiny vyjmeme jeden element, jejž označíme x_0. Ze zbývající podmnožiny M_0 (což je M, z níž byl odebrán x_0) lze opět vybrati element, označme jej x_1. Tímto dalším odebráním vznikla podmnožina M_1, se kterou můžeme provésti totéž. Vybrané elementy můžeme uspořádati, tak jak „historicky" byly vybrány, pořádkovou relací

$$x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \ldots$$

Je-li množina konečná, vyčerpáme elementy dříve nebo později, a proces je samočinně u konce. Není-li konečná, pokračujeme bez omezení až k prvnímu transfinitnímu pořádkovému číslu ω.

Příslušné x označíme x_ω. Tímtéž způsobem pokračujeme dále k elementům $x_{\omega+1}$, $x_{\omega+2}$, až konečně $x_{\omega\cdot 2}$. Je patrno, že zcela stejným způsobem dojdeme až k elementům x_{ω^2}, potom x_{ω^ω}, $x_{\omega^{\omega^\omega}}$ ... *) až jednou vyčerpáme původní M. Celý postup má řadu speciálních problémů (na příklad otázku značení a značek čísel transfinitních, jež vznikají při postupu k dalším elementům výběrovým), ale myšlenka jeho, kterou těmito zvláštními úvahami nemůžeme zatěžovati, je jasná.

*) Indexy tu naznačené odpovídají prvním pořádkovým číslům t. zv. druhé třídy číselné, na kterou ovšem postup není omezen.

Všimněme si, kde tu vlastně přichází k planosti axiom výběru. Je tu ve tvaru poněkud jiném, než na který jsme z předchozího byli upozorněni. Vždy, když ze zbývající podmnožiny vyjmeme jeden element, užíváme tohoto axiomu. Kdežto dříve bylo možno podle axiomu výběru vyjmouti z každého elementu transfinitní množiny, jenž sám byl množinou, jednoho representanta, je v tomto případě representant vybírán z každé podmnožiny, jež v procesu přijde na řadu. Lze dokázati, že obě formulace jsou rovnocenné. Historicky je tato druhá formulace, přicházející v Zermelově důkaze, starší.

Věta o dobrém upořádání každé množiny je bohužel větou ryze existenční. Neukáže ani stín možnosti, jak uspořádati dané množiny v konkrétním případě, není-li množina sama tak jednoduché struktury, že dobré uspořádání se samo nabízí. Takových případů je však velmi málo. Stačí poukázati na jeden zvláště nápadný případ, kdy věta Zermelova neposunula problém ani o malý kousek dopředu: je to problém dobrého uspořádání kontinua, na příklad všech reálných čísel kladných obsažených v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Intuicionističtí matematikové potom mají jisté právo poukazovati na prázdnost věty o dobrém uspořádání, když v daném případě nic nepomůže. Tak jak situace s větou o dobrém uspořádání vypadá, nelze více říci, než že tato věta není ve sporu s logickými větami a s axiomem nekonečna. Takový je rozdíl existence dobrého uspořádání, zaručený bezesporností od dobrého uspořádání, jež by bylo možno na předložené množině ukázati konstrukcí.

Povaha každého mimologického axiomu je taková, že nemusí býti zásadně přijat do základu soustavy. Lze se bez něj obejíti. Obejdeme-li se bez axiomu výběru, musíme obětovati velké části theorie množin a tím také mnoho z theorie reálných funkcí v analyse. Proto v moderních pracích z theorie množin bývá upozorňováno, které věty a důsledky lze činiti *bez* použití axiomu výběru, a které jsou zase na něm *podstatně* závislé.*)

*) Viz na př. W. Sierpiński, Hypothèse du continu (Warszava) str. 5 a 7.

AXIOMATICKÉ SOUSTAVY

Do značné míry nezávisle na obecných logických výzkumech, jež přinesly tolik nového do základních problémů matematiky, šlo vyšetřování axiomatické. O tomto vyšetřování možno obecně prohlásiti, že vyšetřování, omezené na předměty ryze matematické, mělo zase svůj zpětný odraz na methody logiky, jako širší podklad pro celý vědní obor.

V čem spočívá podstata axiomatického vyšetřování a jak se jeví s nynějšího stanoviska v nějakém oboru matematiky?

Základem soustavy je soubor výroků, které, jak již víme, musí splňovati podmínky bezespornosti, nezávislosti a úplnosti. Podmínka bezespornosti byla již objasněna při vyšetřování soustavy základních vět výrokového počtu, podmínka nezávislosti také. Podmínka úplnosti, jež se klade na soubor axiomů, se vyjadřuje obyčejně tak, že se žádá, aby všechny matematické věty onoho oboru byly z axiomatického základu odvoditelné prostředky tohoto systému. Tato poslední podmínka je obyčejně značně nejasná a zdá se zbytečným pleonasmem. Především předpokládá ještě jiné, neaxiomatické vědomosti z oboru, jenž má býti axiomaticky ustaven. Uvedení v axiomatickou soustavu pak by bylo jakousi formální, učesanou, závěrečnou redakcí. V matematické praxi tomu tak někdy vskutku je, prakticky má tedy podmínka úplnosti axiomů jistý význam. Není-li tomu tak, pak je tato podmínka zbytečná již proto, že z axiomů nelze víc získati, než bylo do nich vloženo, protože soustava je přísně deduktivní a po cestě (při odvození pouček) nemůže nic přirůsti.

Axiomy obsahují základní znaky logické a matematické, jež dále nedefinujeme a jež považujeme za primitivní (ve smyslu neredukovatelnosti). Všechny ostatní znaky se pak vyjadřují pomocí těchto primitivních znaků definicemi, a to tak, jak jsme již měli příležitost poznati při logickém počtu. Definice nového znaku není nic jiného, než úplné vyjádření všech jeho složek a struktury, jež tyto jeho složky váže.

V axiomech jsou vyjádřeny základní relace a operační možnosti mezi symboly předmětů. Tím je vymezena funkce těch předmětů v oboru, jenž je axiomatisován. Další, co musí býti připojeno k axiomatické soustavě, jsou podmínky, za kterých je možno ze soustavy činiti *důsledky*. Obvykle to bývají podmínky té formy, kterou již známe z výrokového počtu: jestliže A je formule (třeba axiom sám nebo skupina jich) a $A \rightarrow B$ je logicky odvoditelná formule, pak je také B formule, důsledek. B je v takovém případě poučkou axiomatisované soustavy.

Zajímavá na moderním pojetí axiomatiky je tato stránka: předměty, jež jsou ve hře axiomatické soustavy, jsou teprve jí samou stanoveny. Aby bylo dobře rozuměno: axiomy jsou namnoze implicitními definicemi předmětů, spoluurčují totiž jejich vlastnosti do té míry, že ze souhrnu těch vlastností vycházejí jisté předměty jedno-jednoznačně stanoveny jako jedině možné. Tak alespoň by to vždy býti mělo. Názorně bychom si mohli věc představiti na př. tak, že okruh předmětů, vymezený prvním axiomem v pořadí se druhým a každým dalším axiomem zúží postupně tak, že nezbude než jednoznačně stanovený druh předmětů, jež současně vyhovují všem axiomům. Kdyby tomu tak nebylo, připouštěla by axiomatická soustava více druhů předmětů, jež by jí vyhovovaly, a existovalo by více modelů, třeba velmi rozdílných. Je proto potřebí ukončiti axiomatickou soustavu jistou podmínkou, jež jednoznačnost předmětů, vyhovujících soustavě, zaručuje. O takové podmínce si promluvíme později. Jako příklad soustavy, jež takového doplnění potřebuje, si uvedeme soustavu elementární aritmetiky. Je vyjádřena těmito axiomy:

1. $$(x)(y)[R(x,y) \rightarrow (Ez)R(y,z)].$$

Tento axiom vyjadřuje, slovně opsán, že počet předmětů, vyhovujících relaci nebo funkci ‚R' není ukončen. Funkci ‚R' je možno chápati tak: předmět ‚y' následuje po předmětu ‚x', anebo předmět ‚x' předchází předmětu ‚y'.

2. $$(x)(y)(z)[R(x,y) . R(x,z) \rightarrow y = z . R(x,y) . R(z,y) \rightarrow x = z].$$

Tento axiom vyjadřuje: dva předměty ‚y' a ‚z', jež následují po témž předmětu ‚x' jsou identické, dále, dva předměty ‚x' a ‚z', jež předcházejí témuž předmětu ‚y', jsou rovněž identické.

3. $$(Ev)(Ey)(\overline{Ex})[R(v,y) . R(x,v)].$$

Tento axiom vyjadřuje, že jest ‚v' takové, ke kterému neexistuje předchozí předmět (předchůdce).

Je patrno, myslíme-li si pod relací ‚R' vztah následnosti čísla přirozené řady číselné k následujícímu a pod elementy, jež jsou v relaci právě čísla přirozené řady číselné, že soustavě tato řada vyhovuje; je právě otázka, je-li to jen ona. Všimněme si, jak každý další axiom zúží možnosti vzhledem k předmětům, jež by mohly těm podmínkám vyhovovati.

První axiom poukazuje k tomu, že řada předmětů nemůže býti ukončena, že jich na příklad nemůže býti 8, protože ke *každému* ‚x' a ‚y', pak tedy ke každému ‚y' existuje ‚z', jež následuje po ‚y'.

Druhý axiom zabrání tomu, aby se řada předmětů nepočla někde *větviti*, což by mohlo nastati, když by byl větší počet různých předmětů, jež by po některém mohly následovati.

Třetí axiom poukazuje k tomu, že existuje jeden počáteční předmět, že tedy řada je na jednom konci uzavřena (na počátku).

Historicky je uvedená soustava zajímavá tím, že představuje zjednodušený systém pěti axiomů Peanových pro čísla přirozené řady číselné. Tento Peanův systém byl snad prvním formalisovaným axiomatickým systémem vůbec; formalisace ukázala svoji životnost a od poslední čtvrtiny minulého století se rozšířila na většinu matematických oborů. To bylo také původním programem italské formalistické školy z konce minulého století a z počátku nynějšího, jejíž hlavou právě Peano byl.

Ve formalisované soustavě, kterou jsme právě napsali, není zapotřebí uváděti zvláštní pravidla, jak ze soustavy odvozovati důsledky: tato pravidla jsou již obsažena v pravidlech formální logiky. V soustavách neformalisovaných je nutno některá pravidla, jak uvidíme na soustavě geometrie zanedlouho, zvláště vytknouti, ačkoliv jejich povaha je obecně logická. To je nutné v zájmu autonomie soustavy, v zájmu její soběstačnosti.

Jaký je vztah takového axiomatického systému, jenž byl právě uveden, k theorii celých čísel, o níž jsme mluvili dříve? Své doby jsme si objasnili, že dovedeme-li definovati celá čísla a přidáme-li ještě axiom nekonečna, že můžeme odvoditi aritmetiku z logiky a axiomu nekonečna. O soustavě, kterou jsme právě napsali, lze říci, že vykoná tutéž službu, jenže má větší počet axiomů. V tom právě se jeví výsledky logiky, že poučila matematiku, co je k její výstavbě naprosto nezbytné a bez čeho se lze obejíti. V tom směru je tedy dnešní názor na základní pojmy matematiky pokročilejší proti době prvních formalistů v axiomatice.

Na srovnání si tu uvedeme ještě neformalisovanou soustavu axiomů geometrie, jejíž výhoda je v tom, že formalisaci lze velmi snadno provésti, protože je to soustava neobyčejně přesně vyslovená. Jde o soustavu Hilbertovu, již uveřejnil ve své knize „Základy geometrie" v roce 1900. Uvádím ji proto, že je jednou z nejznámějších v matematickém světě a také proto, že s ní souviselo mnoho prací matematiků nejrůznějších škol a národů.*)

Celá soustava axiomů geometrie je rozdělena v pět skupin, jež jsou uvedeny vysvětlením:

Myslíme si tři různé soustavy předmětů; předměty první soustavy jmenujeme body a označíme $A, B, C, \ldots$ předměty druhé soustavy pojmenujeme přímkami a označujeme $a, b, c, \ldots$, předměty třetí soustavy pojmenujeme rovinami a označujeme $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; body se nazývají také prvky lineární geometrie, body a přímky prvky rovinné geometrie a body přímky a roviny se nazývají prvky prostorové geometrie.

Myslíme si body, přímky a roviny v určitých vzájemných vztazích a označujeme tyto vztahy slovy „ležeti",

*) Hilbertova soustava je předmětem zajímavé práce českého matematika K. Rösslera, „La géometrie mécanisée", vydané ve Spisech přírodovědecké fakulty Karlovy university. Práce užívá důsledně logistické techniky.

„mezi", „rovnoběžný", „shodný", „spojitý"; *přesný a pro matematické účely úplný popis těchto vztahů je proveden axiomy geometrie.* (Poslední část poslední věty podtržena mnou. — O. Z.)

Axiomy geometrie můžeme rozděliti na pět skupin; každá z nich vyjadřuje jisté společné základní skutečnosti našeho názoru. Pojmenujeme tyto skupiny axiomů takto:

I. 1 ÷ 8 axiomy projektivní (Hilbert volí pojmenování jiné, přidržel jsem se výstižného názvu Poincaréova, jenž takto pojmenoval Hilbertovu první skupinu ve své knize „Dernières pensées").

II. 1 ÷ 4 axiomy uspořádání.

III. 1 ÷ 5 axiomy shodnosti.

IV. axiom rovnoběžek.

V. 1 ÷ 2 axiomy spojitosti.

Potud Hilbertovo vysvětlení. Než přistoupíme k úplnému výčtu jednotlivých axiomů, který je pro další nezbytný, promluvíme si několik slov o tomto vysvětlení, jež je pro tehdejší jako pro nynější pojetí axiomatiky tak charakteristické. Na tomto vysvětlení je nové a své doby velmi původní pojetí soustavy axiomů. Již od antických dob byla povaha axiomů a jejich postavení pro theorii poznání předmětem hojných úvah. Starší pojetí chápalo axiomy jako názoru přístupné pravdy, jež dalšího důkazu nepotřebují. Podle tohoto pojetí nelze pravdy obsažené v axiomech redukovati na pravdy jednodušší — při tom axiomy obsahují nějaké podstatné vyjádření o skutečnostech na rozdíl od pouhých formálních pravidel logiky. V názvosloví, které již dobře známe, lze tedy říci, že axiomy podle tohoto pojetí mají býti pravdivými, ale netautologickými větami.

Jakým způsobem asi bylo možno se dostati až k axiomům? Vědní obor třeba rovinné geometrie euklidovské obsahuje celý souhrn pouček tohoto oboru. Poučky jsou výpověďmi o předmětech tam zkoumaných. Tyto poučky jsou jakýmisi uzly v celé vztahové síti pouček tohoto oboru — a někde ta síť počne, anebo alespoň má někde okraje, z kterých je možno vyjíti. Starší pojetí axiomatiky, abychom zůstali při obrazu sítě, vycházelo z takového stanoviska: síť se počne plésti z několika pevných uzlů (axiomů), jež jsou dány předem a celá další práce je věcí matematické techniky (tuto techniku nemíním nikterak znehodnocovati voleným pojmenováním, právě technika matematikova to je často, co je na objevu nejcennější a nejoriginelnější). Nové pojetí axiomatiky je proti tomuto „absolutistickému" (začne se od jakýchsi zjevených pravd, jež jsou vyjádřeny v axiomech) chápání možno nazvati relativistickým: nezáleží valně na tom, *odkud* se počne síť plésti, záleží na tom, aby se upletla celá. Proto moderní pojetí stírá rozdíl mezi větou odvozenou a větou základní, kteroukoli poučku je možno vzíti také za větu základní, má-li dostatečnou logickou nosnost, aby stačila na podepření základu. Práci na síti tedy možno také započíti odkudkoli z prostředka.

Druhá důležitá věc je tato: starší pojetí považovalo axiomy za výpovědi, bez nichž se *nelze* obejíti, bez nichž myšlení v tom určitém oboru matematiky musí selhati. Proto axiomy tolik zaměstnávaly filosofy, chtěli odkrýti, v čem spočívá tato domnělá nezbytnost pro matematické myšlení. Nové pojetí uvolnilo také tady značně tuhý názor na jakési výlučné a dominantní postavení několika myšlenkových zákonů, jež byly vyjádřeny v axiomech. Toto nové pojetí považuje spíše axiomy za podmínky, jimiž se teprve stanoví typ vědního oboru, o který jde.

Počátek k tomuto náhledu na axiomy byl učiněn zakladatelem neeuklidovské geometrie Lobačevským — ukázal, že lze náhradou za euklidovský axiom o existenci jediné rovnoběžky daným bodem k dané přímce voliti axiom jiný a vybudovati tak geometrii beze všech vnitřních sporů také. Tím padla zásadně nutnost takového axiomu a nezbytnost jeho pro geometrické myšlení. Cesta k uvolnění byla otevřena.

Toto relativistické stanovisko poznáme dobře v dalším na Hilbertově soustavě, až bude viděti, co všechno je možno z takového systému vytvořiti buď vynecháním axiomů anebo vynecháním a náhradou za jiné. Nepovažujeme tedy již axiomy za nevývratné pravdy — jakési vnucené abstrakce z názoru — nýbrž za výpovědi, jež můžeme nahraditi výpověďmi jinými a tak zbudovati soustavy jiné. Relativistický názor na axiomy by tedy podle toho měl na mysli vždy spíše cíl, ke kterému je soustava vytvořena, než pevný počátek, z něhož se odvozují důsledky. Prostředky k tomu cíli si pak najde axiomatická soustava ve vhodné volbě základních vět.

Vyjmenujeme teď podrobně jednotlivé skupiny Hilbertových axiomů a pak pojednáme o možnostech, jež z té soustavy plynou.

I. Axiomy projektivní.

I,1. Dva různé body A, B určují vždy jednu přímku a.

I,2. Dva různé body přímky tuto přímku určují.

I,3. Na přímce jsou vždy alespoň dva body, v rovině jsou vždy alespoň 3 body, jež neleží na přímce.

I,4. Tři body A, B, C, jež neleží na téže přímce, určují vždy jednu rovinu α.

I,5. Libovolné 3 body nějaké roviny, jež neleží na téže přímce, určují tuto rovinu.

I,6. Leží-li dva body A, B přímky a v rovině α, pak leží každý bod a v rovině α.

I,7. Mají-li dvě roviny α, β společný bod A, pak mají společný ještě nejméně jeden další bod D.

I,8. Existují nejméně 4 body, jež neleží v téže rovině.

II. Axiomy seřazení.

II,1. Jsou-li A, B, C body roviny, a leží-li B mezi A a C, pak leží B také mezi C a A.

II,2. Jsou-li A a C dva body přímky, pak existuje vždy nejméně jeden bod B, který leží mezi A a C, a nejméně jeden bod D takový, že C je mezi A a D.

II,3. Mezi třemi body přímky existuje vždy jeden a jen jeden, jenž leží mezi oběma druhými.

II,4. Buďtež A, B, C body, jež neleží v přímce, a budiž přímka v rovině ABC, jež neprochází žádným z bodů A, B, C. Prochází-li pak přímka a bodem úsečky AB, pak prochází jistě ještě buď bodem úsečky BC nebo úsečky AC.

(Tento axiom potřebuje doplniti definicí, co jest rozuměti výrazem „úsečka AB" a p. Definici neuvádím.)

III. Axiomy shodnosti.

III,1. Jsou-li A, B dva body na přímce a, dále A' bod na téže nebo na jiné přímce a', pak můžeme na dané straně a' k bodu A' nalézti jeden a jen jeden bod B' tak, že úsečka AB je shodná s úsečkou $A'B'$, což značíme:

$$AB \equiv A'B'.$$

Každá úsečka je shodná sama ssebou, tedy platí vždy $AB \equiv AB$ i $AB \equiv BA$.

III,2. Je-li úsečka AB shodná jak s úsečkou $A'B'$, tak s úsečkou $A''B''$, pak je také $A'B'$ shodná s $A''B''$, t. j., platí-li

$$AB \equiv A'B' \quad \text{a} \quad AB \equiv A''B'',$$

pak je také

$$A'B' \equiv A''B''.$$

III,3. Buďtež AB a BC dvě úsečky bez společných bodů na přímce a, dále $A'B'$ a $B'C'$ dvě úsečky na téže nebo na jiné přímce a', rovněž bez společných bodů; jestliže potom platí

$$AB \equiv A'B' \quad \text{a} \quad BC \equiv B'C',$$

pak platí také

$$AC \equiv A'C'.$$

Po krátkém objasnění, co bude rozuměti pod výrazem „úhel", uvádí Hilbert další axiom shodnosti.

III,4. Budiž úhel $\sphericalangle (h,k)$ v rovině α a přímka a' v rovině α', a budiž dále určena některá strana přímky a' v rovině. (Některou stranou přímky a' je zřejmě míněna jedna z obou půlrovin, v něž je rovina přímkou a' rozdělena; doplněno mnou. O. Z.) Budiž h' polopaprsek přímky a' vycházející z bodu O': pak existuje v rovině α' jeden a jen jeden polopaprsek k takový, že úhel $\sphericalangle (h,k)$ je shodný anebo rovný s úhlem $\sphericalangle (h'k')$ a současně všechny vnitřní body úhlu $\sphericalangle (h',k')$ leží na dané straně a', což značíme

$$\sphericalangle (h,k) \equiv \sphericalangle (h',k').$$

Každý úhel je shodný sám se sebou, t. j. platí vždy

$$\sphericalangle (h,k) \equiv \sphericalangle (h,k) \quad \text{a} \quad \sphericalangle (h,k) \equiv \sphericalangle (k,h).$$

III,5. (Po provedené definici trojúhelníka, kterou opět neuvádím.) Platí-li pro dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ kongruence

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

pak je také splněno

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{a} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Než uvedeme další dvě skupiny axiomů, všimneme si zejména dvou axiomů této skupiny III., a to axiomu III,1. a III,4. Na těchto axiomech je dobře patrno, jak soustava, jež chce býti vybudována nezávisle na soustavě logické, musí výslovně uváděti i *zvláštní případ principu identity*, jenž je v logické soustavě dokázatelnou větou. Týká se to těch míst v axiomech, kde se mluví o shodnosti jistého předmětu ssebou samým. Tato poznámka by se dala rozšířiti i na další vztahy v axiomech této skupiny. Nedostatek úspornosti soustav zakládaných nezávisle na logice, je patrný již také proto, že tak jako tak musí při odvozování se uchýliti k logickým řetězům a nevystačí stejně sama ssebou, t. j., se svými prostředky.

IV. Axiom o rovnoběžkách.

IV,1. Budiž a přímka, A bod mimo tuto přímku: pak existuje v rovině, určené přímkou a jakož i bodem A nejvýše jedna přímka, procházející A a neprotínající a.

V. Axiomy spojitosti.

V,1. Archimedův axiom: Budiž A_1 libovolný bod na přímce mezi body A, B, libovolně položenými; sestrojme pak body $A_2, A_3, A_4, \ldots$ tak, že A_1 je mezi A a A_2, A_2 *mezi* A_1 a A_3, dále A_3 mezi A_2 a A_4 atd. a kromě toho úsečky $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots$, jsou si rovny: pak existuje v řadě bodů $A_2, A_3, A_4, \ldots$, vždy takový bod A_n, že B je mezi A a A_n.

(Jednodušeji, ale méně přesně řečeno, vyjadřuje tento axiom skutečnost, známou z měření: úsečku libovolné délky je možno měřiti libovolně zvolenou jednotkou — po konečném počtu kroků musí kladené měřítko přesáhnouti druhý koncový bod úsečky. Axiom sám je znám nyní pod jménem Archimedovým, je však ve skutečnosti větou mnohem starší. Zcela jistě byl vědomě formulován již Eudoxem, vynikajícím řeckým matematikem (geometrem), jenž žil v letech 408—355 před Kristem.)

V,2. Axiom úplnosti: prvky geometrie (body, přímky, roviny) jsou soustavou předmětů, jež není již schopna rozšíření při zachování platnosti jmenovaných axiomů, t. j.: k soustavě bodů, přímek a rovin není možno připojiti jinou soustavu předmětů tak, aby v soustavě tímto připojením vzniklé byly všechny uvedené axiomy I.—V. splněny.

Tak zní Hilbertova soustava axiomů geometrie. Poslední axiom V,2., axiom úplnosti, v původním vydání Hilbertovy knihy chyběl. Ukázalo se potom při kritice soustavy, k níž podstatným způsobem přispěl na příklad Poincaré (velká stať je právě otištěna v citované knize „Derniéres pensées"), že to nejsou jen body, přímky a roviny v obvyklém slova smyslu, jež soustavě také vyhovovaly. Byly to také útvary jiné a bylo nutno axiomy tak doplniti, aby předměty, jež jsou soustavou stanoveny, byly také jednoznačně stanoveny. Toho bylo docíleno právě axiomem V,2., který má mezi všemi ostatními zcela zvláštní postavení. Je výrokem o všech ostatních výrocích skupin I.—V,1. a zaručuje tolik: nazíráme-li na všechny axiomy jako na soustavu *prázdných* forem, jakýchsi kadlubů, jež mají býti žádoucími předměty vyplněny (u nás body, přímky a roviny a nic jiného), pak V,2. způsobí, že tyto formy pojmou jen ony žádané předměty. Právě taková je situace pro uvedené axiomy elementární aritmetiky dříve uvedené, kterým nevyhovuje jen řada přirozených čísel, nýbrž i útvary jiné (t. zv. cykly, jichž bližší výklad by nás zavedl daleko, takže o nich jednati nebudeme). Bude tedy nejlépe, promluvíme-li si obecně o závěrových axiomech soustav. Axiomatické soustavě mohou vyhovovati různé modely a různé struktury. Co je model a co je struktura, právě objasníme.

V soustavě axiomů (na př. elementární aritmetiky), jež je formalisována, jsou určité proměnné, buď volné nebo vázané operátorovými znaky. Dosadíme-li za proměnné nějaké konstanty, v jmenovaném případě tedy na příklad čísla přirozené řady číselné, nebo členy posloupnosti, jež má elementy vesměs různé, dostáváme z implicitních definicí, jež stanoví operace s předměty výroky, a to tautologické výroky o celých číslech. Ta celá čísla jsou pak modelem oné axiomatické soustavy. Posloupnost o nekonečném počtu různých členů může býti také jejím modelem.

K objasnění pojmu struktury je nutno zavésti pojem isomorfie. Mějme dvě relace

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad \text{a} \quad B(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n).$$

Podaří-li se najíti novou relaci takovou, aby vždy ‚x_1' bylo touto relací přiřazeno ‚y_1', podobně ‚x_2' proměnné ‚y_2' atd., dále, je-li toto přiřazení jedno-jednoznačné a konečně, podaří-li se pomocí této relace dokázati ekvivalenci

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \sim B(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n),$$

pak říkáme, že jsme korelací dosáhli isomorfie relací A

a *B*. Speciální relace, jež spíná příslušná ‚x_i' s ‚y_i', se nazývá korelátor.

Dvě relace, jež je možno uvésti ve vztah isomorfie, mají stejnou strukturu. Tímto způsobem objasnila logika pojem, který hraje tak významnou roli v moderní vědě, a to nejen ve vědách exaktních, nýbrž v mnohých oborech duchovědných. Vzpomeňme jen, kolik vědeckých výzkumů bylo věnováno struktuře, ať již společnosti, ve studiích sociologických, anebo v psychologii a konečně i v estetice. Nechci tvrditi, že právě popsaný pojem struktury je vždy vhodný pro aplikaci mimo obor exaktních věd, je však nicméně velmi přesně vysloveným požadavkem, který musí struktura vždy splniti. Všimněme si ještě zajímavého rysu na pojmu struktury. Neřekli jsme vlastně vůbec, co to struktura je; řekli jsme pouze, *kdy* mají dvě relace stejnou strukturu. To stačí. Struktura je podle toho společný predikát, jejž mají všechny isomorfní relace určitého druhu. Tento společný predikát je pak jejich struktura. Upozorňuji tu na případ, který jsme již své doby uvedli: definici kardinálního čísla. Tam vlastně také nebylo řečeno přímo, co je kardinální číslo: stačilo říci, kdy mají dvě množiny stejné číslo kardinální. Způsob výměru obou pojmů je obdobný.

Protože modely, jak jsme se dozvěděli, vznikají dosazením konstant za proměnné do logických funkcí, přenáší se i na modely isomorfie, o níž jsme mluvili. Isomorfní není na příklad přirozená řada číselná a jakýkoli její konečný úsek. Tam nenajdeme totiž kolerátor, který by isomorfii přivodil. Jsou však isomorfní tyto dva modely: předměty na euklidovské kouli a předměty neeuklidovské geometrie, jež se dá interpretovati jako geometrie na euklidovské kouli. Oba tyto modely vyhovují soustavě axiomů, kde axiom o rovnoběžkách je nahrazen axiomem jiným. Aby nevzniklo nedorozumění, upozorňuji, že se stanoviska axiomatické soustavy jsou *oba* druhy předmětů, jež jsou vázány korelátorem, modely. V matematické literatuře se často pod modelem neeuklidovské geometrie jednoho druhu rozuměla právě geometrie na euklidovské kouli, jež byla tedy pro onu názoru nepřístupnou geometrii jakýmsi názorným modelem. V tomto smyslu slova model neužíváme. Isomorfní je dále na příklad soustava všech reálných čísel na jedné straně a soustava poměrů úseček tohoto tvaru $\overline{OX} : \overline{O1}$, značíme-li jako obvykle písmenou O počáteční bod reálné osy, 1 bod jednotkový a znakem X libovolný reálný bod na ose. Každému x v oboru čísel reálných odpovídá jeden a jen jeden poměr uvedeného tvaru v oboru předmětů rovinné euklidovské geometrie. Mimochodem řečeno, tato korelace a z ní vyplývající isomorfie je tak závažná, že se někteří matematikové nerozpakují tuto větu o isomorfii prohlásiti za axiom. V každém případě by to byl axiom zvláštní povahy, axiom, jenž by byl spojujícím členem mezi geometrií a aritmetikou.

Axiomatickou soustavu je pak možno vyplniti modely i strukturami, jež nemusí býti stejné, lépe řečeno: modely nemusí býti isomorfní a souhrny předmětů, jež vyhovují soustavě, nemusí míti stejnou strukturu.

Tím konečně jsme připraveni na typ konečných axiomů, jako je axiom úplnosti V,2. Takový závěrový axiom musí vybrati mezi všemi možnými modely nebo mezi všemi možnými strukturami takové, které již nelze rozšířiti, eventuelně, které již nelze zúžiti. To znamená, že vybírá, resp. vynutí vybrání jistých největších anebo nejmenších representantů pro soustavu.

Formalisujeme-li podmínky pro strukturu a podmínky pro model, dostaneme dvě, resp. čtyři definiční rovnice pro závěrovou podmínku. Uvedeme tu jen obě minimální podmínky, maximální jsou zcela obdobné. Rovnice zní

$$Min_s\,(F; M) \equiv_{Df} (\overline{EN})\,[N \subset M\,.\,\overline{Ism}\,(M, N)\,.\,F(N)].$$

$$Min_{mod}(F; M) \equiv_{Df} (\overline{EN})\,[N \subset M\,.\,N \neq M\,.\,F(N)].$$

Pod funkčním znakem ‚F' rozumíme znak, jenž je ekvivalentní (definicí) s funkcí, již bychom obdrželi konjunkcí všech axiomů. Mysleme si na levé straně definiční rovnice konjunkci všech axiomů, v těch přicházejí různé funkce rozličných proměných oborů, o který jde. Tyto všechny funkce můžeme definitoricky vyjádřiti jedinou funkcí F, jejíž proměnné musí býti ty, které přicházejí ve zvláštních funkcích jednotlivých axiomů. Výrazy ‚N' a ‚M' jsou zkratky za řady proměných, jež se ve funkci F vyskytují. Není to tedy jedna proměnná. Nový vztah ‚$\subset$', jehož je užito mezi znaky ‚M' a ‚N', vyjadřuje, stručně řečeno, že v našem případě je ‚N' obsaženo v ‚M', je to podobný vztah, jako je vztah podmnožiny k množině. První rovnice vyjadřuje svojí pravou stranou, že neexistuje takové ‚N', jež by bylo obsaženo v ‚M', při tom ‚N' a ‚M' by nebylo isomorfní a platilo by ‚$F(N)$'; t. j. neexistuje struktura, jež by splňovala konjunkci všech axiomů, při tom by nebyla isomorfní s ‚M' a obsažena v ‚M'. Druhá definiční rovnice vyjadřuje podobnou podmínku pro model axiomatické soustavy. Protože jde o model a ne o strukturu, stačí, když podmínka ‚$\overline{Ism}(M,N)$' je nahražena podmínkou ‚$N \neq M$'. Pro struktury je typická podmínka isomorfie, kdežto pro modely stačí podmínka různosti. Podmínky pro modely resp. struktury maximální jsou zcela obdobné, změna proti uvedeným dvěma podmínkám se týká, jak patrno, pouze prvního členu v závorce levé strany. Formalisace podmínek, jež jsme uvedli, pochází od Carnapa (Erkenntnis, roč. VI., str. 166 a násl.), problémy s ní spojené nejsou ještě úplně vyjasněny, ale i tu, v tak obtížné otázce, pomohla logika alespoň k zřetelnému poznání stavu věcí. Je to příspěvek k stanovení matematického předmětu, jednoznačné stanovení jeho není, jak patrno, vždy věc snadná.

Možná, že čtenáře napadá, proč taková závěrová podmínka nebyla uvedena u soustavy základních vět výrokového počtu, nebo u funkčního počtu. Nesmíme zapomenouti, že logické věty, jež tam byly formalisovány, jsou základem pro celý logický mechanismus, to nejsou axiomy. Tam se nestaráme o náplň nějakými jednoznačně stanovenými předměty, jež by měly význam pro matematiku. To jsou tautologické transformační podmínky pro výrazy vůbec. Axiomatická soustava se naproti tomu zabývá stanovením, a to co možno nejpřesnějším stanovením jistých předmětů ryze matematických, jde o to, aby do ní nevnikaly předměty, jež tam míti nechce.

Jakým způsobem se v axiomatické soustavě zaručí bezespornost axiomů? Před nedávnem jsme si vyjmenovali soustavu axiomů geometrie,bude nejlépe, promluvíme-li si, jak je to provedeno tam. V soustavě geometrie to učinil Hilbert tak, že opřel geometrii o analysu, chceme-li, o aritmetiku. Zobrazil synthetickou geometrii prostě na geometrii analytickou. Analytická geometrie je soustava isomorfní k soustavě synthetické geometrie, každému předmětu a vztahu v této geometrii odpovídá jistá analytická forma a analytický vztah. Je-li aritmetika bezesporná, je také geometrie bezesporná. Bezespornost aritmetiky se v tomto případě *předpokládá*, takže tato methoda důkazu bezespornosti není než přesunutím problému na jiné pole. V tom je nevýhoda axiomatických soustav, jež užívají mimologických prostředků, t. j., jež nevyužijí možnosti, vyvíjeti pojmy z logiky samé. Tu je bezespornost zaručena bezesporností logického systému. Měli bychom se tedy ptáti po ní. Viděli jsme, že se dá zaručiti v případě výrokového počtu. Ale viděli jsme také, že výrokový počet zdaleka nestačí na výstavbu matematiky tak, jak ji potřebujeme, protože nemá dosti výrazových prostředků. U funkčního počtu se dá bezespornost zaručiti jen jistým umělým obratem, jenž není prost kritických výtek a před intuicionisty by jistě neobstál. Použijeme proto příležitosti, vyložiti, jak by se dala zaručiti bezespornost ještě jiným způsobem, velmi zajímavým a poměrně novým.

Bezespornost by bylo možno zajistiti takto: víme, a také jsme si to dokázali, že sporná soustava je taková, v které je možno dokázati *každou* větu. Kdyby bylo možno sestrojiti v nějaké soustavě větu, jež by dokázatelná *nebyla*, také však ne vyvratitelná, pak by byla zaručena bezespornost té soustavy jednoduše proto, poněvadž v ní existuje jedna věta, jež dokázatelná *není*. Aby soustava byla sporná, musela by býti jejím důsledkem *každá* věta, a to by splněno nebylo. Pod dokázatelnou větou rozumíme jako obvykle větu, jež je důsledkem základních logických vět, případně logických vět a axiomů, jež jsou do základu soustavy přibrány, pod větou vyvratitelnou pak větu, jejíž negace je v soustavě dokázatelná. Důležité je, že při sestrojení nedokázatelné věty, jakož i při všech operacích, jichž užíváme, nesmíme vystoupiti ze soustavy, v které jsme, jinak řečeno, nesmíme mluviti jinou řečí, než řečí onoho systému *S*, v němž větu vyslovíme.

Protože příklad věty nedokázatelné se týká každé logické soustavy, v níž je mimo to formalisována *aritmetika,* byl by naznačený typ důkazu postačující pro důkaz bezespornosti jak logiky tak také aritmetiky jedním jediným společným závěrem. Příklad je tak zajímavý, že se pokusím podati jeho hlavní myšlenku pokud možno srozumitelně, ponechávaje stranou velký aparát formální, jenž je k důkazu jinak nezbytný. (Důkaz pochází od Gödela, uveřejněn v r. 1931 ve vídeňských „Monatshefte f. Math. und Physik" pod názvem „O větách Principia Mathematica a příbuzných soustav, formálně nerozhodnutelných", důkaz zjednodušil Carnap v cit. díle, odst. 19., resp. 35., 36.) Příklad je zároveň ukázkou t. zv. aritmetisace umělé řeči.

Logistické značky všech druhů, tedy na příklad znaky pro „spojení" výroků, jako „V", „ · ", „(" (levá závorka), „→" (implikační šipka) a j., dále proměnné a konstanty výrokové, funkce, jejich argumenty proměnné i zvláštní hodnoty, to vše je možno jedno-jednoznnačně přiřaditi číslům přirozené řady číselné. Jednojednoznačně znamená tu jako všude v matematice, že dvěma různým znakům musí odpovídati také dvě různá přiřazená čísla, jedné značce jedno číslo a naopak. Zaručiti takové přiřazení, je technicky možno více způsoby.

Ozřejmíme přiřazení příkladem: budiž soustava, o kterou jde, funkční počet. V této soustavě není sice formalisována celá aritmetika, ale to pro náš příklad nemá význam. „*x*" budiž v této soustavě proměnná, jíž bude přiřazeno číslo 3 (nějaké prvočíslo větší než 2). Znaku ‚=' nechť je přiřazeno číslo 13. Číslo 7 je možno v této soustavě definovati, jak víme. Smluvme si pravidlo, že definovaným číslům v naší soustavě přiřadíme čtverce prvočísel, větších než 2. Přiřadíme tedy číslu 7 třeba čtverec 3^2. Potom lineární rovnice, již můžeme v soustavě funkčního počtu celou vyjádřiti, „$x = 7$", bude míti k sobě přiřazenu posloupnost čísel 3, 13, 9. Úmluvu o přiřazení je možno ještě zdokonaliti v tom směru, že rovnici právě napsané nebude odpovídati jen posloupnost tří čísel, nýbrž číslo jediné (na př. vhodně definovaný součin jejich). Nazpět je možno každou takovou posloupnost přeložiti do znaků funkčního počtu, anebo jedno číslo samo podle rozkladu v jeho prvočinitele tak přeložiti.

Jiným příkladem by bylo důkazové schema, odvozování důsledku. Je-li nějaká věta v soustavě S dokazatelná, je posledním členem konečné posloupnosti formulí. Každé větě i axiomu odpovídá v aritmetickém přiřazení nějaká posloupnost čísel, celý důkaz je tedy konečnou posloupností jistých konečných posloupností a dokázané větě je přiřazena právě poslední z nich.

Posloupnosti, resp. čísla jim přiřazená, dále posloupnosti z posloupností, resp. složitější čísla jim přiřazená je možno zkoumati čistě aritmeticky: hledati takové vlastnosti jako je dělitelnost, tvar rozkladu v prvočísla, (má-li na př. čtverce prvočísel a vyšší mocniny jejich), srovnávání podle velikosti a j. Ukazuje se pak, je-li přiřazení vhodně voleno, že každé *syntaktické* vlastnosti v řeči soustavy S odpovídá jistá *aritmetická* vlastnost. Naopak zase je možno aritmetické zákonitosti přiřazených čísel zpět interpretovati jako vlastnosti syntaktické. To nám prozatím postačí.

V soustavě S, v níž je také formalisována aritmetika (to je předpoklad!), jsou jistě predikáty jedné volné proměnné, kde volná proměnná probíhá elementy nějaké podmnožiny, obsažené v množině všech přiřazených čísel. Mysleme si teď tyto predikáty, nebo jinak tyto funkce jedné proměnné, srovnány v posloupnost tak, že dvěma různým znakům odpovídají různé aritmetické indexy. Nazveme všechny predikáty, o něž jde, společnou písmenou R a indexem ‚n', připojeným k funkčnímu znaku, je odlišíme. Dá se dokázati, že srovnání všech $R_i(u)$ s volnou proměnnou ‚u' v posloupnost podle indexů je proveditelné.

Vyjádříme ještě symbolem $[F(u)\,;\,x]$ okolnost, že za volnou proměnnou funkce ‚F' bylo dosazeno ‚x'. Také tento symbol lze aritmeticky interpretovati. Po této přípravě přistoupíme ke konstrukci nerozhodnutelné věty. Budeme definovati novou třídu, stanovenou predikátem ‚K' takto

$$K(n) \equiv_{Df}. \overline{\text{Dokaz}}\,[R_n(x)\,;\,n].$$

‚n' je tedy ve třídě stanovené funkčním znakem K, není-li dokázatelno, že za volnou proměnnou n-tého predikátu je možno dosaditi číslo ‚n'.

Tato nová třída, určená predikátem ‚K', vede k nerozhodnutelné větě a patří také mezi funkce s jednou volnou proměnnou. Toto ‚K' se musí totiž shodovati s jedním z predikátů naší posloupnosti R_1, R_2, R_3, ... Budiž tedy ‚K' shodné s ‚R_i'. Pak tvrdíme, že

$$[R_i(x)\,;\,i]$$

je nerozhodnutelná věta. Důkaz:

1. Kdyby bylo dokázatelno

$$[R_i(x)\,;\,i],$$

t. j., že za volnou proměnnou ‚x' predikátu ‚R_i' možno dosaditi ‚i', platilo by podle definiční rovnice

$$K(i) \equiv \overline{\text{Dokaz}}[R_i(x)\,;\,i],$$

ale pravá strana této rovnice tvrdí opak.

2. Kdyby věta byla vyvratitelná, t. j. kdyby bylo dokazatelno

$$\overline{[R_i(x)\,;\,i]},$$

pak by platilo

$$\overline{K}(i) \equiv \overline{\overline{\text{Dokaz}}}[R_i(x)\,;\,i]\,;$$

nezapomínejme totiž, že ‚K' je shodné s ‚R_i', negace

$$\overline{[R_i(x)\,;\,i]}$$

tedy značí, že ‚i' za volnou proměnnou do ‚R_i' dosaditi nelze, čili že neplatí ‚$K(i)$'. To je vyjádřeno levou stranou rovnice. Pravá strana má však dvojnásobnou negaci a tedy zase popírá stranu levou.

Formulí

$$[R_i(x)\,;\,i]$$

je tedy sestrojena nedokazatelná věta v soustavě S, v níž je současně formalisována aritmetika. Podle obecné úvahy, kterou jsme provedli, byla by tak zaručena nejen bezespornost logiky, nýbrž současně i aritmetiky, jež je součástí celé soustavy S, v níž byla odvozena nedokazatelná věta. Význam takového důkazu by byl mimořádný uvážíme-li, kolik práce bylo věnováno důkazům bezespornosti aritmetiky. V aritmetice samé je totiž řada problémů, které ještě dodnes nebyly řešeny. Nevíme tedy, co může jejich řešení přinésti. Vzhledem k velkému odporu, jejž kladou některé tyto proslulé problémy i novodobým mohutným prostředkům (poslední věta Fermatova, páry prvočísel tvaru p, $p + 2$, a jiné mnohé) není daleko myšlenka, přijmouti některou z takových vět za axiom. Byla-li by to dokazatelná věta, je zařazení takového nového axiomu zbytečné. Horší situace by vznikla, kdyby se při vyšetřování některého takového problému ukázal spor, tak jako se tomu stalo v theorii množin, než byla formálně dokonaleji ustavena. Přes nepatrnou pravděpodobnost takového překvapení není tato možnost vyloučena.

Věta o bezespornosti soustavy prokázaná nedokazatelnou formulí, by ukazovala k tomu, že k takovému překvapení nedojde. Tím by také byla samočinně zaručena bezespornost geometrie, kde jsme na tento problém po prvé narazili. Bezesporností aritmetiky by byla zaručena bezespornost analytické geometrie a tedy i odpovídající isomorfní soustavy geometrie synthetické.

Věta Gödelova o existenci nedokazatelné věty však nemá tento dosah. Je totiž odvozena za předpokladu bezespornosti soustavy S, v níž se celý důkaz provádí. Proto není možno výsledku užíti k cíli, jejž jsme naznačili. Výsledek Gödelův není však přesto bez zajímavosti, poukazuje na jistou velmi obecnou vlastnost některých logických soustav, jež se dají aritmetisovati a bylo by jej možno stručně vystihnouti asi tak, že lze formulovati v soustavě S problémy, na jichž odpověď vlastní prostředky soustavy nestačí.*)

Důkaz sám má jedno choulostivé místo. Třída „K" je definována pomocí všech tříd, daných predikátem o jedné volné proměnné. Logický typ pravé strany definiční rovnice se má shodovati s logickým typem strany levé. V té však je predikát P_i a to jako argument funkce „Dokaz". Tu by tedy bylo porušeno typové pravidlo, o němž jsme mluvili. Dá se však bez aritmetisace

*) Gödelova věta upoutala na sebe velkou pozornost zejména matematiků a logiků amerických a navodila celý velký komplex nových otázek matematických soustav.

najíti cesta, jak i tuto obtíž odstraniti, takže důkaz, jak dnes vypadá, vydrží všechny kritické nápory, jež bychom s dnešními prostředky mohli podniknouti. Po této obtížnější odbočce v otázkách bezespornosti logických soustav se vrátíme k axiomatice geometrie, abychom získali názor, co všechno je možno z takové soustavy získati.

Závislost resp. nezávislost geometrických axiomů na sobě lze zkoumati číselným modelem, tak vhodně voleným, že v něm jsou všechny axiomy splněny s výjimkou jednoho, o jehož nezávislost právě jde. Tato methoda je nám již známa z výkladu o nezávislosti základních vět výrokového počtu. Tady je situace složitější, ale princip zůstává týž.

Jako ukázku si zvolíme důkaz nezávislosti axiomu V,2., závěrového axiomu, nejpodivnějšího axiomu soustavy. (V dalších výkladech je použito citované Hilbertovy knihy „Základy geometrie", pokud jde o technické provedení důkazů.) Abychom dokázali nezávislost axiomu V,2., mysleme pouze v číselném oboru, jenž bude vytvořen takto: základem oboru Ω je číslo 1, přípustné operace, jež jsou všechny konečné, jsou sčítání, odčítání, násobení, dělení a operace $|\sqrt{1+\omega^2}|$ (prostá hodnota odmocniny), kde ω^2 je již číslo, získané některou z předchozích operací.

Pár čísel (x, y) z tohoto oboru, z něhož již nevystoupíme, nechť odpovídá bodu, poměr tří čísel $u : v : w$ odpovídá přímce $(u, v \neq 0)$; okolnost, že bod x, y leží na přímce, vyjádříme, jak známo, rovnicí

$$ux + vy + w = 0.$$

Axiomy skupin I,1. ÷ 3. a IV. budou tak splněny, jak se lze přesvědčiti. Čísla oboru jsou reálná a dají se srovnati co do velikosti, takže i axiomy skupiny II., jakož i Archimedův axiom budou v platnosti. Úsečkami a úhly se zachází stejně jako v obvyklé analytické geometrii, lineární transformace

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b,$$

vyjadřuje rovnoběžný posuv úseček i úhlů. Jde jen ještě o to, jesli otáčením nevzniknou nová čísla, jimiž by se obor měl rozšířiti.

Budiž počátek označen jako obvykle $O(0,0)$, dále mějme ještě bod $E(1,0)$ a libovolný bod třeba v prvním kvadrantě roviny souřadné označme $A(a,b)$. Otočme celou rovinu o úhel $\sphericalangle EOA$, takže pár bodový (x,y) přejde v bodový pár (x', y') a to transformačními vzorci pro otočení

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^3}}\,y$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y.$$

Čísla $\sqrt{a^2+b^2}$, jež přicházejí v jmenovatelích, lze napsati jednoduše ve tvaru $b \, . \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$, což jest číslo našeho oboru Ω, protože je to číslo tvaru $\sqrt{1+\omega^2}$, násobené zase jen číslem z oboru Ω. Nemusili jsme tedy z oboru vystoupiti (mimochodem řečeno, je teď dobře patrno, proč byl obor Ω právě tak zvolen, podnět k operaci tvaru $\sqrt{1+\omega^2}$ jde právě z transformačních rovnic pro otočení) a protože posunutí a otáčení souvisí s axiomy shodnosti, platí také skupina III. v aritmetické interpretaci našeho oboru.

Jediný axiom úplnosti tu neplatí. Nemáme totiž ve svém oboru Ω všechny body a následkem toho všechny přímky, máme jen ty elementy, jež odpovídají aritmetickému oboru Ω a tam jsou jistě „mezery", protože kromě čísel oboru Ω existuje ještě mnoho čísel jiných. Zcela jistě na příklad v tomto oboru chybí číslo π, takže bod s oběma souřadnicemi rovnými π by prostě v naší geometrii neexistoval. Tedy tato geometrie neodpovídá běžné geometrii analytické, jak je probírána na školách. Teprve doplněním oboru Ω na obor *všech reálných čísel* se dostane geometrie, již měl na mysli Descartes. Nezávislost axiomu V,2. je tak ukázána existencí geomterie, v níž není sporů, ale v níž axiom V,2. neplatí. Tato geometrie se svými prostorovými mezerami, nahlíženo se stanoviska běžné euklidovské geometrie, se bez posledního axiomu celé soustavy obejde. Poznámka, již jsme učinili, míří dál, než by se na první pohled zdálo. Vzpomeňme si, že poslední skupina axiomů geometrie se nazývala: axiomy spojitosti. Každý by očekával, že se bude také výslovně o spojitosti, která je pro běžné představy geometrie tak typická, v obou posledních axiomech mluviti. Místo toho je tam mluveno o axiomu Archimedově, který na první pohled nijak nevypadá, že by mohl míti ke spojitosti vůbec vztah, a poslední axiom úplnosti je pojmu spojitosti naprosto vzdálen. Ale jen zdánlivě. Viděli jsme příklad geometrie, jež má své mezery v prostoru, opět říkám, viděno se stanoviska Descartovské geometrie, a teprve axiom úplnosti umožní geometrii spojitého prostoru. Axiom V,2. je tedy právem zařazen pod axiomy spojitosti.

Předchozí úvahu by bylo možno ještě doplniti výsledkem z novější doby. Význačný sovětský matematik Kolmogorov uveřejnil spolu s Pontrjaginem v Annals of Mathematics 1932 (2) (33) definitivní výsledek, jehož obsah stručně podáme. Nazveme tělesem T takovou soustavu elementů, pro něž jsou zavedeny dvě operace: sčítání ($a + b$) a součin ($a . b$) a to tak, že dvěma elementům v daném pořadí (lišíme tedy na př. ‚$a + b$' od ‚$b + a$', podobně ‚$a . b$' od ‚$b . a$') odpovídá příslušný element ‚součet' a ‚součin' *jednoznačně* a oba tyto elementy patří také do soustavy T. Pak platí, že tělesem geometrie v uvažovaném smyslu „spojité" je buď těleso reálných čísel nebo obyčejných komplexních čísel Gaussových ($a + ib$). První možnost nastane, položíme-li jako vedlejší podmínku: ke každé ploše 2. stupně (v rovině: kuželosečce) existuje přímka, jež ji *neprotíná*. Druhá možnost nastane, předepíšeme-li, že každá plocha druhého stupně (v rovině: kuželosečka) je protťata *každou* přímkou ve dvou bodech (tato podmínka vede ovšem také k průsečíkům, jež nejsou reálné).

Mnohem zajímavější výsledek však dostaneme, vynecháme-li předposlední axiom V,1., t. j. axiom Archimedův. Ukáže se, že je nutno současně vynechati také axiom V,2. Hilbert k tomu účelu sestrojil zvláštní číselný obor, v němž není splněn Archimedův axiom. Na srovnání uvádím jen, že tento axiom platí také pro čísla reálná, což je snadno patrné, interpretujeme-li si jeho geometrické vyjádření aritmeticky. Konstrukce oboru, v němž V,1. neplatí, jest tato: sestrojíme obor $\Omega(t)$ všech algebraických funkcí čísla t, jež vzniknou z t čtyřmi základními úkony početními a ještě operací $|\sqrt{1 + \omega^2}|$, při tom ω^2 je funkce t, jež vznikla dříve již na základě některé z jmenovaných operací. Obor $\Omega(t)$ má jen reálné a jednoznačné funkce veličiny t (prostá hodnota odmocniny!). Algebraické funkce t jsou všechny tvaru

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_n t^n,$$

což má ten důsledek, že každé $F(t)$ je rovno nule nejvýše po tolik hodnot t, kolik ukazuje stupeň funkce F (Víme, že rovnice n-tého stupně má právě n kořenů, některé mohou splývati.) Volíme-li tedy t dosti vysoké, bude hodnota $F(t)$ od jistého t počínajíc, trvale kladná nebo trvale záporná.

Na tyto algebraické funkce t pohlížejme teď jako na zvláštní druh čísel. Jsou-li a, b různá čísla oboru $\Omega(t)$, tedy různé algebraické funkce oboru $\Omega(t)$, pak je můžeme srovnati co do velikosti tak, ze $a > b$ tehdy, když $a - b$ je pro dostatečně velké hodnoty t stále kladné, jinak je $a < b$. Je tedy možné srovnání co do velikosti, které hraje podstatnou roli v axiomech uspořádání. Naproti tomu, ať volíme jakkoli vysoké n kladné, a t číslo z oboru $\Omega(t)$, bude vždy $n < t$, protože $n - t < 0$ pro dosti veliká t. (Číslo n je vždy v oboru $\Omega(t)$, protože je tam podle definice tohoto oboru číslo $\dfrac{t}{t} \doteq 1$, tedy je tam také součet n jednotek.) Z toho plyne, že libovolný násobek jednotkové úsečky je vždy menší než číslo t, Archimedův axiom neplatí.

Geometrie, jež se tak vybuduje, má všechny analogické vlastnosti, jako předchozí, má také ve srovnání s obvyklou analytickou geometrií „mezery" (sama v sobě jich nemá, protože o možném rozšíření nic neví), ale neplatí v ní axiom V,1. Každý bod t na reálné ose je *nedosažitelný* konečným počtem jednotkových úseček, nanášených vedle sebe směrem k onomu bodu.

Další podivná geometrie, o které se již jen stručněji zmíníme, je geometrie, v níž neplatí Pascalova věta. Pascalova věta je jednou z hlavních vět projektivní geometrie a má značný význam i prakticky konstruktivní. Bývá obyčejně vyslovena pro kuželosečku, ale my ji tu v jejím obecném znění nepotřebujeme, stačí nám její zvláštní případ. Význam této užší formulace je ihned patrný z obrázku, jejž si snadno pořídíme k jejímu znění: A, B, C je trojice bodů na jedné přímce. A', B', C' je trojice bodů na jiné přímce, jež první přímku protíná. Při tom nechť žádný z uvedených šesti bodů nesplývá s průsečíkem obou přímek. Platí pak:

$$CB' \parallel BC' \,.\, CA' \parallel AC' \text{ implikuje } BA' \parallel AB'.$$

Vztah rovnoběžnosti spojnic značíme obvyklým znakem „$\parallel$" mezi znaky pro obě úsečky, o něž jde. Důkaz tohoto zvláštního případu Pascalovy věty (když kuželosečka degeneruje na dvě přímky, jež se protínají) se dá provésti pomocí skupin I,1. $\div$ 3. a II., III., IV. Pascalova věta umožňuje geometrický důkaz rovnice $ab = ba$ čili záměnnosti součinu. V aritmetice bylo již dříve známo, že existují soustavy, kde neplatí pravidlo o záměnnosti součinu. Jsou to na příklad komplexní čísla o větším počtu komplexních jednotek než mají čísla tvaru $a + ib$. Takovými čísly jsou kvaterniony anglického matematika Hamiltona, jež hrály značnou roli v theoretické fysice 19. stol.; jiným příkladem jsou matice, dříve pouze předmět matematického studia a dnes nepostradatelný předmět moderní fysiky. Součin dvou kvaternionů není obecně záměnný, stejně tak není obecně záměnný součin dvou matic. Okolnost, že součin dvou matic není záměnný, je formálním důvodem pro Heisenbergovu relaci neostrosti, jež způsoblia tolik hluku v poslednějším období moderní fysiky v souvislosti s determinismem. Tedy nezáměnné součiny jsou a dokonce i v aplikacích matematiky v hojném užívání.

Zavedeme-li soustavu číselnou, kde neplatí záměnnost součinu, do geometrie, neplatí v ní Pascalova věta, neplatí v ní také zpětně vzato některé axiomy soustavy. V takové geometrii by se nerovnaly sobě obsahy dvou obdélníků, jež by se lišily pouze tím, že jeden by spočíval na straně *a*, druhý na straně *b*, jinak by byly stejné. Je tedy patrno, že důsledkem Pascalovy věty musí býti nějaká změna v axiomech shodnosti. Touto změnou a jejími dalšími podrobnostmi se již zabývati nebudeme.

Důsledky, jež jsme ukázali vzhledem k soustavě axiomů geometrie, mají tento smysl: je-li již tak prostudován mechanismus matematických předmětů a vztahů, jež je váží, můžeme se odvážiti změn logických premis v takové míře, že dřívější matematika by byla takový krok považovala za pochybený, prostě nemožný. Co kdysi bylo revolučním činem, lze dnes vyložiti „avec une parfaite tranquillité", jak se vyjádřil o Hilbertově soustavě právě Poincaré v citované knize.

Tím není nikterak snížen význam činu, jaký podnikl na příklad Lobačevský vzhledem k novým možnostem geometrie. Jeho čin byla revoluce proti filosoficky sterilnímu názoru na jedinost prostoru a jeho apriorní zákonitosti. Právě takový čin umožnil pokrok ve vědě a vedl k prozkoumání mechaniky myšlení, jež dovoluje opravdu mluviti o neobvyklých oborech matematiky s naprostým klidem.

OBSAH:

Spisovatel	*Dr Otakar V. Zich*
Název díla	*Úvod do filosofie matematiky*
Vydala	***Jednota československých matematiků a fysiků***
roku	***1947***
V edici	*Cesta k vědění, svazek 34*
Za redakce	*Dra R. Brdičky, Dra M. A. Valoucha, Dra F. Vyčichla a Dra O. V. Zicha*
Stran	*176*
Vytiskla	***knihtiskárna Prometheus v Praze VIII***
Vydání	***první***
Náklad	*3300 výtisků*
Cena	*Kčs 48,—*

CESTA K VĚDĚNÍ

princip vyloučené třetí možnosti, princip sporu a princip postačujícího důvodu. Přechází pak k *symbolické logice*, zvané též matematická logika nebo logistika, jíž vděčíme mimo jiné za ohromné pokroky v otázkách základů matematiky. Probírá nejprve nejjednodušší partii tohoto oboru, totiž dvojhodnotový výrokový počet, načež přechází k logice vícehodnotové a k logice, vyjadřující zaměření extrémního směru filosofie matematiky, totiž intuicionismu. Kapitola končí výkladem o logickém funkčním počtu, který mimo jiné umožňuje definovat některé základní matematické pojmy, na př. pojem celého čísla, na ryze logickém základě.

Matematika se však přesto nedá redukovat na logiku: pro její výstavbu je nezbytný při nejmenším *axiom nekonečna*. Ve vyšších partiích matematiky k němu přistupuje *axiom výběru*, jenž byl formulován teprve začátkem našeho století, stal se předmětem neobvykle prudkých sporů a patří dosud k nejméně vyjasněným bodům moderní matematiky. Poslední kapitola knížky pojednává o *axiomatických soustavách* a zvláště o slavné Hilbertově soustavě axiomů geometrie.

Kčs 48