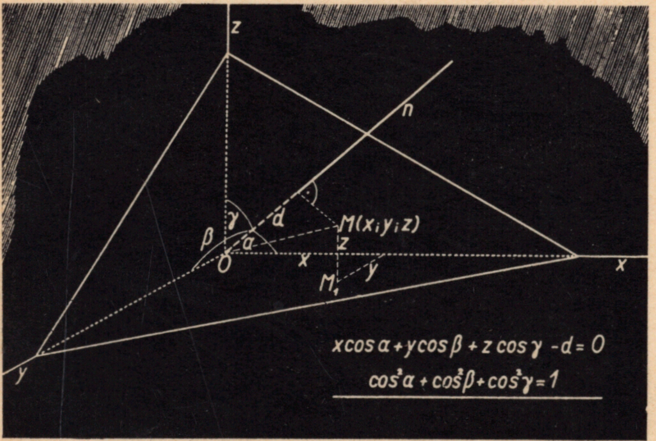
Jak se studují útvary v prostoru? I. část

CESTA K VĚDĚNÍ SV. 18.



PROF. DR. JIŘÍ KLAPKA

JAK SE STUDUJÍ ÚTVARY V PROSTORU?

I. ČÁST

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

Jčmf

K 16,20

CESTA K VĚDĚNÍ

Prof. Dr. Jiří Klapka:

JAK SE STUDUJÍ ÚTVARY V PROSTORU?

(Část I.)

Širší veřejnosti, která prošla naší střední školou, je známa analytická metoda v rovinné geometrii a také její přednosti a nevýhody. Útvary prostorové, s kterými se denně setkáváme, dovede zatím studovat samy o sobě, měří a počítá délky, úhly, obsahy a objemy těchto útvarů metodami, které ji naučila škola.

V knížce prof. Dra J. Klapky poznáte analytickou geometrii prostorovou a hned v celé její šíři a bohatosti. Vycházeje z jednoduchých poznatků, které v nás nechává střední škola, zavede autor čtenáře nejen do obyčejného kartézského systému souřadnic v prostoru, ale i do obecnějších souřadnic kosoúhých a do t. zv. souřadnic projektivních v prostoru, s kterými se pracuje velmi pohodlně.

Ukazuje potom, jak se studují elementy prostorové geometrie (bod, přímka, rovina) a jak se řeší základní úlohy polohy a úlohy metrické v prostoru; připravuje si tak půdu k studiu dalších útvarů, které najde čtenář v druhé části a tedy v jiném svazku Cesty.

Mnohá cvičení s řešeními obsahují doplňky výkladů, které lze čísti bez námahy.

JČMF

CESTA K VĚDĚNÍ

PROF. DR. JIŘÍ KLAPKA

JAK SE STUDUJÍ ÚTVARY V PROSTORU?

I. ČÁST

Se 14 obrazci

Vyšlo jako 18. svazek sbírky

CESTA K VĚDĚNÍ

vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce

Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLO a Dra L. ZACHOVALA

1941

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

ÚVOD.

Redakci sbírky „*Cesta k vědění*" jsem slíbil v září 1940 napsati spis o analytické geometrii v prostoru. Spis bude dvojdílný a tato knížka je jeho první díl.

Je věnován bodům, přímkám a rovinám v prostoru a z nich složeným útvarům lineárním. Druhý díl se zabývá plochami druhého stupně; jako ukázka užití metod analytické geometrie na plochy stupně vyššího je k němu připojen odstavec o anuloidu.

V intencích sbírky „*Cesta k vědění*" jsem usiloval o takový způsob výkladu, který je srozumitelný čtenářům s běžným matematickým vzděláním, jaké dává střední škola. Rozsah tohoto vzdělání skoro dostačuje pro cíl této knížky. Proto stačilo předeslati (v kap. I) poměrně malý dodatek k látce o analytické geometrii rovinné, probírané na střední škole, a stručný náčrtek nejzákladnějších pojmů a vět nauky o determinantech a maticích. Tato nauka je totiž — spolu s naukou o algebraických formách — nejdůležitější početní nástroj, používaný v analytické geometrii. Proto větší soběstačná díla o anal. geometrii zpravidla obsahují úplný výklad základů těchto nauk (viz na př. Anhang v díle *Heffter-Köhler*, Lehrbuch der Anal. Geometrie). Kromě toho existují učebnice algebry, jejichž hlavním účelem je příprava k dalšímu studiu geometrie analytickými metodami (viz na př. *Bôcher*, Einführung in die höhere Algebra). V srovnávání s uvedenými díly — která lze vřele doporučiti k hlubšímu studiu — mohl jsem podati poučení o těchto naukách v rozsahu zcela nepatrném, který asi nepostačí čtenáři náročnějšímu. Tomu doporučuji, aby hledal obšírnější poučení v krásné knize *Bohumila Bydžovského*, Základy teorie determinantů (JČMF, Praha 1930), nebo alespoň v stručnějším spise (litogr. přednáškách) *K. Zahradníka*, O determinantech (z r. 1903—04).

Český čtenář má možnost studovati analytickou geometrii v prostoru též z některých starších učebnic (na př. Studničkovy) a z novější zdařilé knihy *B. Bydžovského*, Úvod do analytické geometrie, JČMF, Praha 1923. Na rozdíl od ní moje knížka se neomezuje na pravoúhlé souřadnice bodů a rovin a uvádí čtenáře do symboliky, užívané hojně v novějších pracích o projektivní geometrii diferenciální. Tím, jak se domnívám, je její vydání odůvodněno.

Do textu je zařazeno 145 příkladů ke cvičení, z nich 76 je v díle prvním. Jejich vypracováním čtenář získá důležité nové vědomosti, výcvik v užívání obecných vztahů ve zvláštních případech a konečně jistou zručnost v číselných výpočtech, kterou nelze zanedbávati. Teprve po zvládnutí látky a vypracování příkladů prvého dílu je možno s pravděpodobným úspěchem přikročiti k četbě druhého dílu.

Na konec děkuji všem, kdož mi svou prací pomáhali. Je to především p. dr. *František Vyčichlo*, soukromý docent České university Karlovy a Českého vysokého učení technického v Praze, od něhož vyšel popud k sepsání této knížky a který přečetl rukopis a doporučil jej k tisku. Jednotě českých matematiků a fysiků, náleží můj dík za vydání a úhlednou úpravu knihy.

V Brně v dubnu 1941.

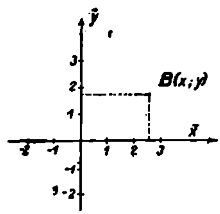
Jiří Klapka.

I.

O HOMOGENNÍCH ROVNOBĚŽKOVÝCH SOUŘADNICÍCH BODU V ROVINĚ; ROVNICE PŘÍMKY A KUŽELOSEČKY.

1. Homogenní souřadnice. O dvojici čísel pravíme, že je uspořádaná, když je určeno, které z obou čísel je první a které je druhé. Označme prvé z nich x, druhé y, a současně zvolme známým způsobem v rovině, již nazveme ζ, pravoúhlou kartézskou soustavu souřadnic. Jsou to dvě navzájem kolmé osy souřadnic $\overrightarrow{x}$ a $\overrightarrow{y}$ (šipky značí, že přímky jsou *orientovány*, t. j. že je na nich vytčen kladný smysl), jejichž body jsou očíslovány dvěma shodnými měřítky, která mají své nulové body v průsečíku O obou os, čili v počátku soustavy souřadnic.

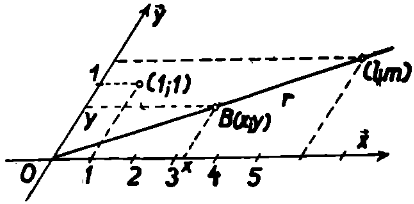
Vedeme-li bodem x osy $\overrightarrow{x}$ rovnoběžku s $\overrightarrow{y}$ (obr. 1) a bodem y na $\overrightarrow{y}$ rovnoběžku s $\overrightarrow{x}$, protínají se obě rovnoběžky v bodě, který označme $(x; y)$, což čteme: bod o úsečce x a o pořadnici y. Obdélník, jehož strany jsou souřadnicové osy a obě rovnoběžky, o nichž právě byla řeč, nazývejme souřadnicovým obdélníkem bodu $(x; y)$. Někdy označujeme bod v rovině ještě jistým písmenem, na př. $A, B, C, \ldots$, které pak píšeme před závorku se souřadnicemi onoho bodu, na př. $B\,(x; y)$.



Obr. 1. Pravoúhlá soustava souřadnic bodu v rovině.

Body v rovině a uspořádané dvojice souřadnic jsou danou souřadnicovou soustavou uvedeny v korespondenci oboustranně jednoznačnou, t. j. bodu v rovině náleží jediná dvojice souřadnic v této soustavě, a obráceně, kteroukoliv uspořádanou dvojici čísel lze pokládati za dvojici souřadnic jediného bodu v rovině v téže souřadnicové soustavě.

Pravoúhlé kartézské souřadnice bodu v rovině jsou zvláštním druhem t. zv. nehomogenních souřadnic rovnoběžkových. Obecné nehomogenní rovnoběžkové souřadnice bodu B (obr. 2) určíme opět vedením rovnoběžek



Obr. 2. Rovnoběžková soustava souřadnic bodu v rovině.

bodem B se dvěma osami $\vec{x}$ a $\vec{y}$, které však nemusí býti navzájem kolmé a na nichž ležící měřítka nemusí býti shodná. Soustava je pak kosoúhlá a souřadnicový obdélník je zde zobecněn v souřadnicový rovnoběžník bodu B. Tuto soustavu lze určiti polohou obou os a t. zv. jednotkovým bodem, t. j. bodem (1; 1), který s počátkem (0; 0) postačuje k určení obou měřítek na souřadnicových osách a tím i k určení jejich orientace.

I tato obecná soustava rovnoběžkových souřadnic zprostředkuje oboustranně jednoznačnou korespondenci mezi uspořádanými dvojicemi čísel a body v rovině.

Povšimněme si blíže pojmu „směr přímky v rovině“.

V uvažované rovině buďtež dány osy $\vec{x}$ a $\vec{y}$ a jednotkový bod, čímž obecná soustava rovnoběžkových souřadnic je určena. V dalším patrně postačí uvažovati pouze o přímkách procházejících počátkem O souřadnicové soustavy; směry paprsků tohoto svazku totiž vyčerpávají směry všech přímek v rovině.

Buď tedy r jeden z těchto paprsků; je jednoznačně určen dalším svým bodem $(l; m)$, různým od počátku O. Pak ovšem i bod

$$(\lambda l; \lambda m), \tag{1,1}$$

kde $\lambda \neq 0$, spolu s O určuje týž paprsek r, neboť každému z uspořádaných dvojčíslí (1,1) náleží jeden z bodů paprsku r. Skutečně, mění-li se λ, bod (1,1) opisuje r, neboť jeho souřadnicový rovnoběžník (obr. 2) vzniká z rovnoběžníku bodu $(l; m)$ stejnolehlostí o středu O a poměru λ. Směr přímky r závisí tudíž pouze na poměru $m : l$, jehož udavatele nazveme směrnice přímky r; $(m : l = k)$. Čísla l, m jsou směrové parametry přímky r. Směrnice a směrové parametry přímky q, která je s r rovnoběžná, jsou tytéž jako přímky r.

Zde připomeňme, že axiom, kterého mlčky používáme a který zní: „bodem lze vésti k dané přímce jedinou rovnoběžku", vyjadřujeme často slovy: „dvě rovnoběžky mají jediný společný bod v nekonečnu", t. zv. bod nevlastní. Z toho však plyne, že v každém směru existuje jediný bod nevlastní, náležející celé osnově rovnoběžných přímek. Jsou tedy nevlastní body roviny a směry jejích přímek ve vzájemné korespondenci oboustranně jednoznačné.

Uvedený tvar axiomu o rovnoběžkách je podkladem zjednodušené geometrické terminologie, ve které je možno množství výroků o směrech přímek vysloviti jako výroky o bodech. Na př. větu: „přímka je určena dvěma body, nebo bodem a směrem" lze vysloviti stručněji: „přímka je určena dvěma body", připustíme-li, že jeden z obou bodů může býti nevlastní.

Protože nám velmi záleží na stručnosti vyjadřování, použijeme i my této terminologie. Projeví se to tím, že celá soustava vět (t. zv. *projektivní geometrie*) bude platit bezvýjimečně pro všechny body, přímky, roviny a z nich sestrojené útvary v prostoru, kdežto bez doplnění prostoru body nevlastními by tomu tak nebylo. Proto říkáme, že nevlastní body doplňují rovinu, resp. prostor na projektivní rovinu, resp. na projektivní prostor.

Buď nyní

$$x_1; x_2; x_3 \tag{1,2}$$

uspořádaná trojice čísel, z nichž alespoň jedno není nula.

Je-li $x_3 \neq 0$, pak čísla (1,2) nazveme homogenními rovnoběžkovými souřadnicemi bodu, jehož nehomogenní souřadnice jsou

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{1,3}$$

Je-li $x_3 = 0$, čísla (1,2) jsou homogenní rovnoběžkové souřadnice nevlastního bodu ve směru určeném směrovými parametry

$$l = x_1, \quad m = x_2. \tag{1,4}$$

Tato definice homogenních rovnoběžkových souřadnic zřejmě předpokládá, že je dána a jednoznačně určena rovnoběžková soustava souřadnic; vzhledem k ní jsou (1,2) homogenní, (1,3) nehomogenní rovnoběžkové souřadnice uvažovaného bodu. Z definice plyne:

Každé trojici (1,2) náleží jediný bod v rovině. Avšak obráceně, kterémukoliv bodu roviny náleží celé množství uspořádaných trojic jeho homogenních rovnoběžkových souřadnic vzhledem k dané soustavě souřadnic. Je-li (1,2) jedna z nich, a je-li $\lambda \neq 0$, pak $\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3$ je jiná z trojic tohoto množství, jež budeme stručně označovati

$$\{x_1; x_2; x_3\}, \tag{1,5}$$

nebo ještě stručněji

$$\{x\}. \tag{1,6}$$

Body na ose $\vec{x}$ jsou charakterisovány rovnicí $x_2 = 0$, body na $\vec{y}$ rovnicí $x_1 = 0$ a body nevlastní rovnicí $x_3 = 0$. Poslední rovnice je lineární; proto říkáme, že množství všech nevlastních bodů v rovině je t. zv. nevlastní přímka roviny. Nelze jí ovšem přisuzovati všechny vlastnosti, které mají ostatní přímky. Na př. nevlastní přímka nemá žádného směru a dvojice jejích bodů neurčuje úsečku.

V homogenních souřadnicích bod se zpravidla označuje týmž písmenem jako jeho souřadnice, avšak bez indexu. Jsou tedy x_1; x_2; x_3 souřadnice bodu x, což stručně zapisujeme symbolem

$x(x_1; x_2; x_3)$. Podobně $y(y_1; y_2; y_3)$ značí bod y o homogenních souřadnicích $y_1; y_2; y_3$, nebo $z'(z'_1; z'_2; z'_3)$ značí bod z' o homog. souřadnicích $z'_1; z'_2; z'_3$ a t. p.

Rovnice (1,3) a (1,4) nás poučují, jak z homogenních rovnoběžkových souřadnic bodu vypočteme jeho souřadnice nehomogenní vzhledem k téže soustavě souřadnic, resp. jaké jsou jeho směrové parametry, jde-li o bod nevlastní. Obráceně, jsou-li dány nehomogenní souřadnice $(x; y)$ bodu v rovině, pak trojice jeho homogenních rovnoběžkových souřadnic vzhledem k téže soustavě tvoří množství $\{x; y; 1\}$.

Jde-li o bod nevlastní, charakterisovaný směrovými parametry l, m, pak trojice jeho homogenních souřadnic v téže souř. soustavě tvoří množství $\{l; m; 0\}$.

Dva body $x(x_1; x_2; x_3)$ a $y(y_1; y_2; y_3)$ jsou totožné jen tehdy, když obě množství $\{x\}$ a $\{y\}$ jsou složena z týchž uspořádaných trojic, což vyjadřujeme symbolickou rovnicí $\{x\} = \{y\}$. Jsou-li oba body různé — a jen tehdy — píšeme $\{x\} \neq \{y\}$.

2. Přímka a kuželosečka v homogenních rovnoběžkových souřadnicích.

a) Píšeme-li lineární rovnici přímky p v nehomogenních souřadnicích ve tvaru

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0, \tag{2,1}$$

obdržíme z něho tvar homogenní

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \tag{2,2}$$

nahradíme-li v (2,1) x a y podle (1,3) a násobíme-li celou rovnici faktorem x_3. Alespoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 v rovnici (2,2) musí býti od nuly různý; je-li to pouze a_3, obdržíme rovnici přímky nevlastní. Zavedeme-li označení

$$p(x) \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

čili

$$p(x) \equiv \sum_i a_ix_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

lze rovnici přímky p psáti zkráceně

$$p(x) = 0. \tag{2,3}$$

Podobně nehomogenní rovnici kuželosečky f

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{2,4}$$

upravme na homogenní tvar dosazením za x a y podle (1,3) a násobením celé rovnice faktorem $x_3{}^2$. Vychází rovnice

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1{}^2 + a_{22}x_2{}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + a_{33}x_3{}^2 = 0, \qquad (2,5)$$

kde je vyznačeno, že polynom na levé straně budeme stručně označovati $f(x, x)$. Za předpokladu, že pro všechny dvojice indexů i, k platí

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad (i, k = 1, 2, 3), \qquad (2,6)$$

lze stručně klásti

$$f(x, x) \equiv \sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k, \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

a rovnici kuželosečky f lze psáti zkráceně $f(x, x) = 0$.

Je zřejmé, že nová rovnice (2,5) kuželosečky f je opět druhého stupně, avšak homogenní. Postup, který vedl od nehomogenní rovnice k homogenní rovnici přímky p, resp. kuželosečky f, budeme nazývati *homogenisací* rovnice čáry.

Stejně jako lineární rovnice vyjadřuje přímku a rovnice druhého stupně kuželosečku, homogenní rovnice stupně n ($n > 0$, celistvé) mezi běžnými homogenními souřadnicemi bodu jest rovnicí **algebraické křivky stupně** n.

Přímka protíná algebraickou křivku stupně n, **jejíž částí není, v** n **bodech.** Tuto často používanou větu musíme chápati v tom smyslu, že v souřadnicích homogenních určení společných bodů přímky a alg. křivky stupně n vždy vede na algebraickou homogenní rovnici stupně n o dvou (homogenních) neznámých. Kořeny této rovnice jsou s uvažovanými průsečíky v korespondenci oboustranně jednoznačné; aby věta byla správná, je nutno počítati k-násobnému kořeni korespondující průsečík za k průsečíků splývajících a nevylučovati z počtu průsečíky imaginární, korespondující komplexním kořenům.

Na příklad přímky p a q o rovnicích

$$\left.\begin{array}{r} p(x) \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ \text{a} \quad q(x) \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (2,7)$$

mají obecně jediný společný bod x, jehož homogenní souřadnice x_1, x_2, x_3 jsou v poměrech

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (2,8)$$

kde

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = a_i b_k - a_k b_i, \qquad (2,9)$$

jsou t. zv. determinanty druhého řádu.

V determinantu (2,9) a_i, a_k, b_i, b_k jsou jeho *prvky*, a_i, a_k, je jeho *prvý řádek*, b_i, b_k *druhý řádek*, a_i, b_i *prvý sloupec*, a_k, b_k *druhý sloupec*, $a_i b_k$ jeho *hlavní úhlopříčka*.

Schema

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} \qquad (2,10)$$

se nazývá *matice*. Na rozdíl od determinantu nemusí býti čtvercové a nemá žádné hodnoty. Matice (2,10) je dvojřádková a o třech sloupcích. Vynecháváme-li po jednom sloupci, vznikají tři determinanty druhého řádu této matice. Je-li alespoň jeden z nich od nuly různý, pak matice má hodnost 2; obecně hodnost matice je číslo, udávající nejvyšší ze všech řádů od nuly různých determinantů, vznikajících z matice vynecháním některých jejích řádků a sloupců.

Úměru (2,8) vyjadřujeme ještě stručněji ve tvaru

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}. \qquad (2,11)$$

Kuželosečka f je křivka druhého stupně, proto přímka p, která není její částí, ji protíná ve dvou bodech. K určení obou průsečíků třeba řešiti soustavu rovnic (2,5) a (2,2). Specielně přímka nevlastní $x_3 = 0$ protíná f v dvojici nevlastních bodů, charakterisovaných rovnicí

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0. \qquad (2,12)$$

Rovnici (2,12) snadno nahradíme rovnicí pro směrnice k_1, k_2 obou směrů, v nichž leží oba tyto průsečíky

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0. \qquad (2,13)$$

Podle reálnosti jejích kořenů třídíme kuželosečky v rovině na kuželosečky typu hyperbolického, parabolického nebo eliptického. V prvém případě je diskriminant rovnice (2,13)

$$\Delta = a_{12}{}^2 - a_{11}a_{22}$$

kladný, v druhém nula, v třetím záporný.

Kuželosečka typu hyperbolického má tedy dva reálné různé body nevlastní (ve směru asymptot, resp. ve směru obou jejích přímek, je-li singulární).

Kuželosečka typu parabolického má jediný bod nevlastní, který je však nutno pokládati za dva body splývající. Je-li to parabola, leží tento bod ve směru její osy.

Konečně kuželosečka eliptického typu nemá žádných reálných bodů nevlastních.

Je-li f skutečně hyperbola, parabola nebo elipsa, nebo je-li f kuželosečka degenerovaná (rozpadlá nebo někdy zvaná singulární), t. j. složená ze dvou reálných různých, reálných splývajících, nebo sdruženě imaginárních přímek, o tom rozhoduje hodnota t. zv. diskriminantu rovnice kuželosečky f

$$A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - \\ - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Lze jej zjednodušiti, béřeme-li ohled na (2,6).

Jen tehdy, když $A \neq 0$, kuželosečka f není degenerovaná, t. j. je to elipsa, kružnice, hyperbola nebo parabola. Naproti tomu $A = 0$ je nutná a postačující podmínka toho, aby kuželosečka f byla degenerovaná.

Diskriminant A lze psáti ve tvaru determinantu třetího řádu

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

čili

$$A \equiv | a_{ik} |;$$

poněvadž pro jeho prvky platí rovnice (2,6), nazývá se souměrný; (skutečně jeho prvky položené souměrně podle jeho hlavní diagonály $a_{11}a_{22}a_{33}$ jsou stejné). I v něm prvky jsou sestaveny do řádků a sloupců.

Vyčíslování, t. j. výpočet hodnoty determinantu třetího řádu, je patrné ze schematu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

(pravidlo *Sarrusovo*). Jinak lze vyčísliti determinant A jeho rozvedením podle některého jeho řádku nebo sloupce podle této věty, patné pro determinant kteréhokoliv řádu n (t. j. o jakémkoli počtu řádků):

Hodnota determinantu rovná se součtu ze součinů prvků jednoho jeho řádku (nebo sloupce) s jejich minory.

Při tom minorem A_{ik} prvku a_{ik} rozumíme faktorem $(-1)^{i+k}$ násobený determinant, který vznikne z A, vynecháme-li v něm řádek i sloupec, obsahující prvek a_{ik}.

Je tedy podle věty právě uvedené

$$A = \sum_i a_{ik}A_{ik}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nebo

$$A = \sum_k a_{ik}A_{ik}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Na př. determinant

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$$

podle pravidla Sarrusova vyčíslíme takto:

$$A = 1 . 9 . 25 + 4 . 16 . 9 + 9 . 4 . 16 - 16 . 16 . 1 - 25 . 4 . 4 - 9 . 9 . 9 = -8.$$

Podle pravidla o rozvádění determinantů podle řádků nebo sloupců vychází (rozvádíme podle 1. řádku)

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 16 \\ 16 & 25 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 9 & 25 \end{vmatrix} +$$

$$+ 9 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} = -31 + 176 - 153 = -8.$$

Vraťme se k rovnici (2,12). Je to — kromě již uvedeného významu — společná rovnice obou přímek, které jsou rovnoběžné s asymptotami kuželosečky f a procházejí počátkem O. Její levá strana je rozložitelná v součin ($a_{22} \neq 0$)

$$a_{22}\left(x_2 + \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{22}}\, x_1\right)\left(x_2 + \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{22}}\, x_1\right),$$

z něhož jsou patrny rovnice obou přímek. V nehomogenních souřadnicích podle (1,3) tyto rovnice jsou

$$y + \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{22}}\, x = 0, \tag{2,14}$$

a

$$y + \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{22}}\, x = 0. \tag{2,15}$$

Je-li f kružnice, je $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ a předchozí dvě rovnice znějí

$$y \pm ix = 0, \text{ kde } i = +\sqrt{-1}.$$

Jsou to rovnice dvou imaginárních přímek, protínajících se v reálném bodě (sdruženě imaginární přímky), jež se nazývají isotropické (též minimální) přímky.

V jejich směrech ležící imaginární nevlastní body jsou kruhové body roviny. Název pochází patrně z toho, že každá kružnice v rovině jimi prochází; nikoli však jiné kuželosečky nedegenerované (nesingulární). Kruhové body, resp. isotropické přímky jsou důležité pro metrické vztahy v rovině a umožňují jejich jednoduchý výklad.

Každým bodem v rovině procházejí dvě sdružené isotropické přímky.

b) Stejně jako dvě různé přímky určují svazek přímek, je dvěma různými kuželosečkami f, g určen svazek kuželoseček. Je-li (2,5) opět rovnice kuželosečky f, kdežto

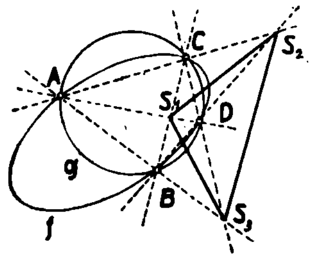
$$g(x, x) \equiv \sum_{ik} b_{ik} x_i x_k = 0, \ (i = 1, 2, 3), \qquad (2,16)$$

kde $b_{ik} = b_{ki}$, rovnice kuželosečky g, pak rovnice každé další kuželosečky h svazku má tvar

$$h(x, x) \equiv f(x, x) - \varrho g(x, x) = 0, \qquad (2,17)$$

kde ϱ je konstanta.

Je zřejmé, že kuželosečka h (obr. 3) prochází všemi společnými body kuželoseček f, g. Předpokládejme, že to jsou pouze čtyři body A, B, C, D, tvořící t. zv. **basi svazku**. Některé z nich mohou ovšem splývati, na př. když kuželosečky f a g se dotýkají.



Obr. 3. Svazek kuželoseček s kuželosečkami rozpadlými.

Obráceně, každá kuželosečka procházející všemi body base náleží svazku. Proto mu náležejí i obecně tři rozpadlé kuželosečky h_1, h_2, h_3, složené z dvojic přímek AB, CD, resp. AC, BD, resp. AD, BC. Jejich singulární body označme S_1, S_2, S_3.

Jaké musí býti ϱ v rovnici (2,17) kuželosečky h svazku, aby to byla kuželosečka degenerovaná? Jak víme, nutná i postačující podmínka pro to je, aby diskriminant kuželosečky měl hodnotu 0, t. j. aby bylo

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho b_{11} & a_{12} - \varrho b_{12} & a_{13} - \varrho b_{13} \\ a_{21} - \varrho b_{21} & a_{22} - \varrho b_{22} & a_{23} - \varrho b_{23} \\ a_{31} - \varrho b_{31} & a_{32} - \varrho b_{32} & a_{33} - \varrho b_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2,18)$$

Rozvedeme-li determinant $D(\varrho)$ a uspořádáme-li vzniklý výraz podle mocnin ϱ, obdržíme v ϱ kubickou rovnici

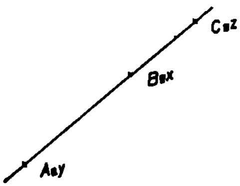
$$B\varrho^3 - I\varrho^2 + J\varrho - A = 0, \qquad (2,19)$$

kde $B = |b_{ik}|$ atd. Její kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ charakterisují singulární kuželosečky h_1, h_2, h_3 svazku (2,17).

c) Čára v rovině nemusí vždy býti dána jedinou rovnicí; je též možno souřadnice bodu čáry vyjádřiti jako funkce nezávisle proměnné, t. zv. **parametru**. Mění-li se parametr, mění se i souřadnice bodu na čáře, který ji opisuje.

Příkladem tohoto t. zv. **parametrického vyjádření čáry** jsou známé rovnice

$$x = \frac{x' - \lambda x''}{1 - \lambda}, \qquad y = \frac{y' - \lambda y''}{1 - \lambda}, \qquad (2,20)$$



Obr. 4. Bod C na spojnici bodů A, B.

vyjadřující nehomogenní rovnoběžkové souřadnice bodu $C\,(x;\,y)$, který leží na spojnici (obr. 4) bodů $A\,(x';\,y')$ a $B\,(x'';\,y'')$, při čemž $\lambda = \overline{AC} : \overline{BC}$ je dělicí poměr bodu C vzhledem k dvojici bodů A, B. Mění-li se λ bez omezení, bod $C\,(x;\,y)$ opisuje přímku AB.

Vyloučením parametru λ z rovnic (2,20) bychom došli k lineární rovnici mezi x, y přímky AB. Homogenní souřadnice bodu C označme x_1, x_2, x_3. Pak jest

$$\{x_1;\, x_2;\, x_3\} = \left\{\frac{x' - \lambda x''}{1 - \lambda};\; \frac{y' - \lambda y''}{1 - \lambda};\; 1\right\}$$

a

$$\{x\} = \{x' - \lambda x'',\, y' - \lambda y'',\, 1 - \lambda\}. \qquad (2,21)$$

Homogenisujme předchozí výrazy kladouce

$$1. \quad x' = \frac{y_1}{y_3}, \quad y' = \frac{y_2}{y_3}; \qquad 2. \; x'' = \frac{z_1}{z_3}, \quad y'' = \frac{z_2}{z_3},$$

takže uvažované body přímky AB jsou 1. $A \ldots y\,(y_1;\, y_2;\, y_3)$; 2. $B \ldots z\,(z_1;\, z_2;\, z_3)$; 3. $C \ldots x\,(x_1;\, x_2;\, x_3)$. Současně položme

$$\lambda = -\frac{\lambda_2 z_3}{\lambda_1 y_3}. \qquad (2,22)$$

Pak z (2,21) vychází

$$\{x\} = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1;\ \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2;\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3\},$$

což — nedbáme-li geometricky bezvýznamného faktoru úměrnosti při x — lze vyjádřiti symbolickou rovnicí

$$x = \lambda_1 y + \lambda_2 z, \tag{2,23}$$

kde λ_1 a λ_2 nejsou současně nuly.

Bod x leží tedy na spojnici (yz) bodů y a z jen tehdy, existují-li dvě čísla λ_1 a λ_2, z nichž alespoň jedno není nula, která vyhovují symbolické rovnici (2,23), zastupující tři skutečné rovnice

$$x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i,\ (i = 1, 2, 3).$$

Nutná a postačující podmínka pro existenci čísel λ_1, λ_2 je

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2,24}$$

Je-li splněna, říkáme, že body x, y, z jsou lineárně závislé, nebo že některý z nich je lineární kombinací obou zbývajících. Jinak body x, y, z jsou lineárně nezávislé. V prvém z obou případů všechny tři body náležejí jediné přímce, v druhém nikoliv.

Buď u čtvrtý bod na (yz); je to jiná lineární kombinace bodů y, z než (2,23), označme ji

$$u = \mu_1 y + \mu_2 z,$$

při čemž musí býti $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$, aby nebylo $\{x\} = \{u\}$. Dělicí poměr bodu u vzhledem k y, z je podle (2,22)

$$\mu = -\frac{\mu_2 z_3}{\mu_1 y_3}. \tag{2,25}$$

Poměr $\lambda : \mu$ se nazývá dvojpoměr bodové čtveřiny $(yzxu)$. Zřejmě je

$$\lambda : \mu = \frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2}. \tag{2,26}$$

Je-li tento dvojpoměr roven -1, čili je-li $\lambda = -\mu$, čtveřina $yzxu$ se nazývá **harmonická**. Též říkáme v tomto případě, že dvojice bodů x, u odděluje harmonicky dvojici y, z a obráceně. Nutná a postačující podmínka pro to je

$$\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = 0, \tag{2,27}$$

jak z (2,26) ihned vychází.

Všechny tyto vztahy zůstávají v platnosti, když jeden nebo více z uvažovaných bodů jsou nevlastní, jak dokážeme později (odst. 6).

Příklady k cvičení.

1. Dokažte, že podmínka rovnoběžnosti přímek (2,7) je $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$! [Vychází ihned z (2,8), kde $x_3 = 0$.]

2. Dokažte, že násobením všech prvků jednoho řádku (sloupce) týmž číslem násobí se jím i hodnota onoho determinantu! [Myslete si determinant rozveden podle onoho řádku (sloupce)!]

3. Dokažte, že výměna dvou řádků (sloupců) determinantu má za následek změnu znaménka jeho hodnoty! [Pro determinant druhého řádu je to zřejmé, pro det. třetího řádu je to též zřejmé, myslíme-li si jej rozveden podle nevyměněného řádku (sloupce); odtud plyne, že tomu je tak i pro determinant čtvrtého, pak pátého atd., tedy každého řádu.]

4. Dokažte, že determinant, jehož jeden řádek (sloupec) je a) shodný s druhým; b) násobkem druhého, má hodnotu nula [a) Plyne z př. 3! b) Plyne z a) a z příkl. 2.]

5. Odvoďte, že kuželosečka (2,5) má v bodě x o souřadnicích

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\|$$

střed, nevlastní bod osy, nebo singulární bod podle toho, je-li to kuželosečka středová, parabola nebo rozpadlá kuželosečka. [Zkoumejte průsečíky kuželosečky s přímkami svazku o středu x]!

6. Dokažte, užívajíce výrazů pro souřadnice středu kuželosečky, uvedených v příkl. 5 a rovnice (2,12), že společná rovnice obou asymptot středové kuželosečky (2,5) zní

$$\Delta f(x; x) + A x_3^2 = 0.$$

Co praví tato rovnice, je-li kuželosečka (2,5) parabola ($\Delta = 0$, $A \neq 0$), nebo degenerovaná kuželosečka ($A = 0$)?

7. Dokažte, že rovnice poláry bodu y (y_1, y_2, y_3) vzhledem ke kuželosečce (2,5) je $f(x, y) = 0$, kde $f(x, y)$ je kterýkoliv z výrazů

$$
\begin{aligned}
f(x, y) \equiv\ & a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + \\
& + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1) + \\
& + a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2) \equiv \\
\equiv\ & x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3) + \\
& + x_3(a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3) \equiv \\
\equiv\ & y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\
& + y_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3).
\end{aligned}
$$

Ukažte, že souřadnice bodu x v příkl. 5 náleží pólu nevlastní přímky!

8. Dokažte, že $A = 0$ je nutná podmínka pro to, aby se kuželosečka rozpadla tak, že určíte hodnotu diskriminantu A pro degenerovanou kuželosečku o rovnici

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) . (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0!$$

9. Jaké rovnici vyhovuje ϱ, je-li kuželosečka h svazku (2,17) parabola? $\left[\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho b_{11}, & a_{12} - \varrho b_{12} \\ a_{21} - \varrho b_{21}, & a_{22} - \varrho b_{22} \end{vmatrix} = 0.\right]$ Kolik je obecně parabol ve svazku kuželoseček? [Dvě.]

Obsahuje svazek (2,17) vždy kružnici? [Obecně nikoliv.] Dokažte, že obsahuje-li dvě, je složen pouze z kružnic!

10. Co je místem středů kuželoseček svazku (2,17)? [Kuželosečka. — Vyjděte od výrazů pro střed v příkl. 5!]

11. Dokažte, že trojúhelník $S_1S_2S_3$ o vrcholech v singulárních bodech degenerovaných kuželoseček svazku (2,17) je společný polární trojúhelník všech kuželoseček svazku (t. j. že jeho strany jsou poláry protějších vrcholů vzhledem ke všem kuželosečkám svazku). [Volte vhodně souřadnicovou soustavu a za základní kuželosečky f, g svazku (2,17) jeho kuželosečky složené z přímek.] Viz obr. 3.

12. Dokažte, že lineární kombinace bodů nevlastních je bod nevlastní! [Je-li v (2,23) $y_3 = z_3 = 0$, je i $x_3 = 0$.]

13. Dokažte, že dvě přímky jsou kolmé, když jejich nevlastní body oddělují harmonicky body kruhové! [Jsou-li (2,7) uvažované přímky, jsou jejich nevlastní body x $(a_2; -a_1; 0)$ a u $(b_2; -b_1; 0)$. Kruhové body naproti tomu jsou y $(i; 1; 0)$ a z $(-i; 1; 0)$. Je $x = -(a_1 + a_2i)\, y + (-a_1 + a_2i)\, z$, $u = -(b_1 + b_2i)\, y + (-b_1 + b_2i)\, z$; z podmínky kolmosti obou přímek $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ plyne (2,27) a obráceně, což bylo dokázati].

14. Dokažte, že koncové body úsečky, její bod půlící a nevlastní bod přímky jí určené tvoří čtveřinu harmonickou! [Dělicí poměr půlícího bodu je -1, děl. pom. nevlastního bodu je $+1$.]

15. Dokažte:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k_1 & a_{12}+k_2 & \dots & a_{1n}+k_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[Rozvedením podle prvního řádku. Dokažte vztah též pro jiný řádek (sloupec) než prvý a výsledek formulujte ve větu!]

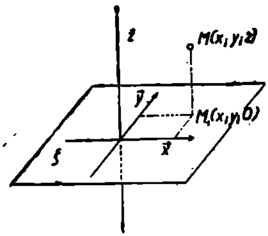
16. Dokažte, že hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k prvkům jednoho řádku (sloupce) stejnolehlé prvky jiného řádku (sloupce), násobené libovolným společným faktorem! [Plyne z příkladu 15.] Rozšiřte na přičítání několika znásobených řádků (sloupců)!

II.

URČENÍ BODU V PROSTORU SOUŘADNICEMI ROVNOBĚŽKOVÝMI. DVOJICE BODŮ.

3. Nehomogenní rovnoběžkové souřadnice bodu v prostoru. Uspořádaným trojicím čísel (x; y; z) přiřaďme body v prostoru tímto způsobem: Zvolme tři navzájem kolmé a orientované přímky — souřadnicové osy $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ — procházející týmž bodem, počátkem O (obr. 5).

Od tohoto bodu počínaje jsou osy $\vec{x}$ a $\vec{y}$ očíslovány stejně jako v odst. 1, takže v jimi určené rovině ζ tvoří úplnou pravoúhlou kartézskou soustavu souřadnic.



Obr. 5. Pravoúhlé souřadnice bodu v prostoru.

Nyní je možno v rovině ζ vytknouti bod, jehož prvá souřadnice je x, druhá y. Označme jej M' a veďme jím rovnoběžku se $\vec{z}$. Na ni nanesme od M' do M délku z v měřítku vyznačeném na $\vec{z}$, jehož nulový bod též leží v počátku O. Aby výsledek tohoto kroku byl jednoznačný, dodejme, že smysl uvedeného nanášení se shoduje s kladným smyslem osy $\vec{z}$, je-li z číslo kladné, kdežto při záporném z smysl nanášení je opačný.

Je zřejmé, že též obráceně každému bodu v prostoru tímto způsobem je přisouzena jediná uspořádaná trojice čísel, jež opět nazýváme souřadnicemi onoho bodu. Pro prvé dvě — x a y — ponecháváme názvy zavedené v odst. 1, třetí z nich, z, nazýváme kotou (aplikátou) nebo prostě třetí souřadnicí bodu (x; y; z). Někdy bod označujeme ještě písmenem, na př. M, které opět píšeme před závorku s jeho souřadnicemi, na př. $M (x; y; z)$.

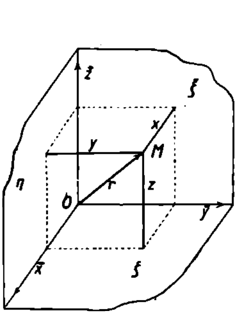
V obr. 5 znázorněný pravoúhlý trojhran je pravotočivý, neboť jeho hrany jsou uspořádány jako palec $(\vec{x})$, ukazováček $(\vec{y})$ a prostřední prst $(\vec{z})$ pravé ruky (t. zv. *pravidlo tří prstů*). Existují patrně také *levotočivé* trojhrany, jejichž hrany jsou uspořádány jako tytéž prsty levé ruky.

Dva pravoúhlé trojhrany s neorientovanými hranami x, y, z, resp. x', y', z' lze vždy přemístiti tak, aby bylo $x \equiv x'$, $y \equiv y'$, $z \equiv z'$. Není však vždy možno přemístěním ztotožniti dva trojhrany $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ a $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$, jejichž hrany jsou orientovány, tak aby bylo $\vec{x} \equiv \vec{x}'$, $\vec{y} \equiv \vec{y}'$, $\vec{z} \equiv \vec{z}'$. Je to možno jen tehdy, jsou-li oba trojhrany *shodně orientovány*, t. j. jsou-li oba buď pravotočivé nebo levotočivé. (Podobně nelze natáhnouti pravou rukavici na levou ruku!) Je však možno dva různě orientované pravoúhlé trojhrany přemístiti tak, aby byly navzájem souměrně sdružené podle středu (inverse) nebo souměrně sdružené podle roviny (do stejné vzájemné polohy lze uvésti levou a pravou ruku). Orientace trojhranu se nemění při cyklických záměnách os, rovněž při změně smyslů dvou os.

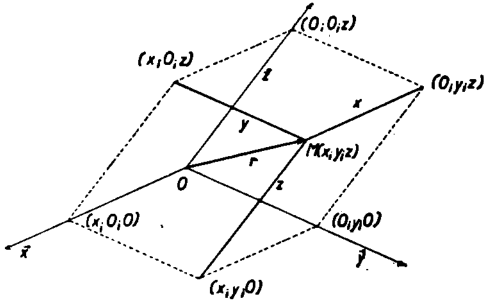
V analytické geometrii se zpravidla užívá pravotočivých čili positivních trojhranů; není to však nutno.

Je zřejmé, že souřadnicový trojhran $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ nemusí býti pravoúhlý, aby zprostředkoval oboustranně jednoznačnou korespondenci mezi množstvím bodů v prostoru a množstvím uspořádaných trojic čísel. Musí to však býti skutečný trojhran, t. j. jeho hrany nesmějí ležeti v jedné rovině. I kosoúhlé trojhrany jsou buď pravo- nebo levotočivé a i u nich rozpoznání orientace je možné podle pravidla tří prstů.

Pravoúhlé trojhrany se shodnými měřítky na osách budeme nazývati pravoúhlé kartézské trojhrany. Kosoúhlé trojhrany se shodnými měřítky na osách jsou **kosoúhlé trojhrany kartézské.** V obou případech nazýváme stejně i souřadnice bodu vzhledem k takovému trojhranu. Je-li trojhran kosoúhlý s různými měřítky na osách, nazveme jej **obecný trojhran kosoúhlý** a souřadnice bodu vzhledem k němu jsou **obecné souřadnice rovnoběžkové.**



Obr. 6. Pravoúhlá soustava souřadnic bodu v prostoru.



Obr. 7. Kosoúhlá soustava souřadnic bodu v prostoru.

Stěny souřadnicového trojhranu jsou určeny dvojicemi os. Označme je $\zeta \equiv (\overrightarrow{x}\overrightarrow{y})$, $\eta \equiv (\overrightarrow{z}\overrightarrow{x})$, $\xi \equiv (\overrightarrow{y}\overrightarrow{z})$. Je-li to trojhran pravoúhlý kartézský (obr. 6), souřadnice x, y, z bodu M jsou prostě vzdálenosti bodu M od **rovin souřadnic** ξ, η, ζ, měřené společným měřítkem os. Při tom těmto vzdálenostem přisuzujeme určitá znaménka známým způsobem. Je-li trojhran kosoúhlý (obr. 7), pak místo na kolmicích k ξ, η, ζ měříme souřadnice x, y, z bodu M na rovnoběžkách s osami $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ a $\overrightarrow{z}$ a podle jejich měřítek.

Souřadnicovému rovnoběžníku analytické geometrie rovinné v prostoru koresponduje **souřadnicový rovnoběžnostěn bodu.** Tři jeho hrany leží v osách souřadnic, tři jeho stěny leží v rovinách souřadnic. Souřadnice jeho vrcholů jsou patrné z obr. 7. Tamtéž vidíme, jaká je poloha bodů, majících jednu nebo dvě souřadnice rovny nule.

Souřadnicové roviny ξ, η, ζ rozdělují prostor na osm částí, t. zv. **oktantů**. Aby dva body M_1 $(x_1; y_1; z_1)$ a M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ ležely v témž oktantu, k tomu je třeba a stačí, aby bylo

$$x_1 x_2 > 0,\ y_1 y_2 > 0,\ z_1 z_2 > 0.$$

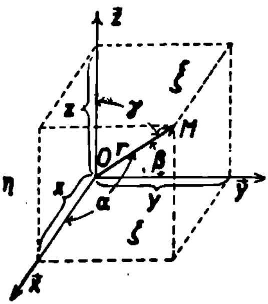
Oba body jsou totožné jen když $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$, a jsou šikmo souměrně sdružené podle ζ ve směru $\vec{z}$, když

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = -z_2.$$

Obdobně se na souřadnicích dvou bodů projevuje jejich združenost podle roviny souměrnosti ξ nebo η ve směru $\vec{x}$, resp. $\vec{y}$.

Vztahy $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$, $z_1 = -z_2$ charakterisují body, jejichž spojnice je rovnoběžná s ξ, protíná $\vec{x}$ a je tímto průsečíkem půlena.

Konečně je-li $x_1 = -x_2$, $y_1 = -y_2$, $z_1 = -z_2$, oba body jsou souměrně sdružené podle počátku O.



Obr. 8. Polohový vektor bodu a jeho úhly s osami.

4. Polohový vektor bodu. Směr přímky v prostoru. Vektor $\mathfrak{r}$, jehož počátek se ztotožňuje s počátkem O souřadnicové soustavy a jehož vrchol je od O různý bod M $(x; y; z)$, nazýváme polohovým vektorem bodu M (obr. 8).

Předpokládejme do odvolání, že souřadnicová soustava je kartézská a pravoúhlá. Pak délka $\overline{OM}$ jako úhlopříčka souřadnicového pravoúhlého rovnoběžnostěnu bodu M je dána výrazem

$$r = \overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ r > 0. \tag{4,1}$$

Směr i smysl vektoru $\mathfrak{r}$ jsou určeny, jsou-li známy úhly

α, β, γ, které vektor svírá s osami $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Tyto **směrové úhly** měříme v intervalu od 0° do 180°. Jejich kosiny, t. zv. **směrové kosiny** vektoru $\mathfrak{r}$, jsou čísla

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}. \tag{4,2}$$

Je-li $OM = r = 1$, pak z (4,2) vychází

$$\cos\alpha = x, \ \cos\beta = y, \ \cos\gamma = z,$$

takže směrové kosiny jednotkového vektoru (t. j. jehož délka je 1) polohového jsou rovny souřadnicím jeho vrcholu.

Sečtením čtverců rovnic (4,2) vychází s ohledem na (4,1)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = 0, \tag{4,3}$$

odkud je patrno, že směrové úhly nejsou nezávislé. Skutečně, jak snadno si lze představiti, dva dané úhly směrové, na př. α, β, určují dvě rotační kuželové plochy (vytvořené rotací polopaprsku okolo osy procházející jeho koncovým bodem) o vrcholech v počátku a o osách v hranách $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Úhly α a β určují obecně dva polopaprsky, které jsou společnými tvořícími polopaprsky ploch kuželových. Označíme-li jejich odchylky od $\vec{z}$ γ a γ', je patrně

$$\gamma + \gamma' = 180°, \tag{4,4}$$

neboť obě plochy, a tudíž i jejich společné polopaprsky, jsou souměrné podle roviny $(\vec{x}\,\vec{y})$.

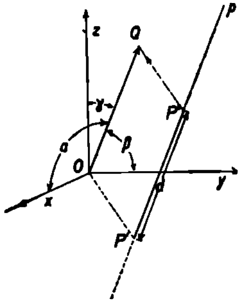
Z (4,4) vyplývá

$$\cos\gamma' = -\cos\gamma.$$

Lze tedy vysloviti větu:

Směr i smysl orientované přímky (vektoru) je určen buď 1. třemi jejími směrovými kosiny, které splňují rovnici (4,3), nebo 2. dvěma směrovými kosiny a znamením třetího.

Změní-li se smysl orientované přímky, změní se i její směrové úhly, a to v úhly výplňkové, odkud vyplývá, že změna orientace přímky má za následek změny znamének všech tří jejích směrových kosinů.



Obr. 9. Určení směrových parametrů přímky a délky úsečky.

Je-li souřadnicová soustava obecná rovnoběžková, určujeme směr přímky zpravidla jejími směrovými parametry. Patrně postačí uvažovati pouze o přímkách procházejících počátkem O soustavy; směry paprsků tohoto trsu*) totiž vyčerpávají směry všech přímek v prostoru. Buď r jeden z paprsků tohoto trsu a $(l; m; n)$ její bod od O různý (obr. 7 a 9). Jeho souřadnice l; m; n jej jednoznačně určují a s ním i paprsek r; avšak obráceně na r leží celé množství bodů různých od O. Je-li $(l'; m'; n')$ jiný z nich, pak zajisté je

$$l' = \lambda l, \; m' = \lambda m, \; n' = \lambda n,$$

kde $\lambda \neq 0$, neboť souřadnicové rovnoběžnostěny obou bodů jsou homotetické, při čemž O je střed a λ poměr oné homotetie (stejnolehlosti).

Přísluší tudíž každému směru celé množství uspořádaných trojic směrových parametrů; je-li $(l; m; n)$ jedna z nich, obdržíme všechny další v trojicích $(\lambda l; \lambda m; \lambda n)$, kde $\lambda \neq 0$ je libovolné číslo. Toto množství budeme označovati symbolem

$$\{l; m; n\}. \tag{4,5}$$

V trojici směrových parametrů alespoň jeden je od nuly různý.

---

*) *Trs přímek* nebo *paprsků* je množství přímek, procházejících bodem v prostoru (vrcholem trsu). Je-li vrchol bod nevlastní, mluvíme o *osnově* rovnoběžných přímek.

Dvě přímky o trojicích směrových parametrů $(l_1; m_1; n_1)$, resp. $(l_2; m_2; n_2)$ jsou jen tehdy rovnoběžné, když

$$\{l_1; m_1; n_1\} = \{l_2; m_2; n_2\},$$

t. j. když obě množství jsou složena z týchž prvků. Jen tehdy, když obě přímky jsou různých směrů, obě množství jsou různá, t. j.

$$\{l_1; m_1; n_1\} \neq \{l_2; m_2; n_2\}.$$

Abychom určili směrové parametry kterékoliv přímky q v prostoru (obr. 7), veďme počátkem O přímku $r \parallel q$ a zvolme na ní libovolný bod M, různý od O. Trojice $x; y; z$ jeho souřadnic je současně trojicí směrových parametrů přímky q a všech přímek s ní rovnoběžných.

Předpokládejme nyní opět, že soustava souřadnic je pravoúhlá, kartézská. Pak je (viz obr. 8, kde $x = l$, $y = m$, $z = n$)

$$l = r \cos \alpha, \quad m = r \cos \beta, \quad n = r \cos \gamma,$$

t. j. **směrové parametry jsou úměrné směrovým kosinům přímky.** K výpočtu směrových kosinů ze směrových parametrů postačí použíti vztahu (4,2) a (4,1), načež vychází

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \\ \cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \end{aligned}\right\} \quad (4,6)$$

kde uvedená odmocnina je kladné číslo.

Je tedy i trojice směrových kosinů přímky jednou z uspořádaných trojic množství (4,5), jsou-li souřadnice kartézské pravoúhlé.

Rovnicemi (4,6) jsou směrové kosiny pouze zdánlivě určeny i se svými znaménky. Odporovalo by to okolnosti, že přímka není orientována. Vzpomeňme však, že bod $(l; m; n)$ je libovolný bod (od O různý) přímky r! Lze jej proto nahraditi kterýmkoliv jiným bodem přímky r, na př. bodem $(-l; -m; -n)$, při čemž všechny tři směrové kosiny změní znaménka.

Příklady k cvičení.

17. Co je geometrickým místem bodů, jejichž a) dvě souřadnice jsou stálé a třetí proměnlivá? b) jedna souřadnice je stálá a dvě jsou proměnlivé? [a) přímka, rovnoběžná se souřadnicovou osou b) rovina, rovnoběžná se souřadnicovou rovinou.]

18. Určete čtvrté vrcholy všech rovnoběžníků, které mají prvé tři vrcholy v bodech $O\,(0; 0; 0)$, $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$! [$(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$, $(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$, $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$].

19. Je dán rovnoběžnostěn, jehož jeden vrchol je počátek. Jsou-li $(x_i; y_i; z_i)$, $(i = 1, 2, 3)$ vrcholy sousední k počátku, jaké jsou souřadnice ostatních čtyř vrcholů? [$(x_i + x_k; y_i + y_k; z_i + z_k)$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, 3$ a $(x_1 + x_2 + x_3; y_1 + y_2 + y_3; z_1 + z_2 + z_3)$].

20. Určete směrové kosiny vektoru $\overrightarrow{OM}$, kde O je počátek a $M\,(3; -4; 12)$! [$\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; \frac{12}{13}$.]

21. Jaké podmínce vyhovují siny směrových úhlů? [$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 = 0$.]

5. Homogenní rovnoběžkové souřadnice bodu v prostoru. Obdobně k homogenním souřadnicím bodu v rovině definujeme homogenní rovnoběžkové souřadnice bodu v prostoru vzhledem k trojhranu $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ takto:

Buď

$$x_1; x_2; x_3; x_4 \tag{5,1}$$

uspořádaná čtveřice čísel, z nichž alespoň jedno je různé od nuly. Je-li $x_4 \neq 0$, pak (5,1) je čtveřice homogenních rovnoběžkových souřadnic bodu, jehož nehomogenní souřadnice jsou

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}. \tag{5,2}$$

Je-li $x_4 = 0$, pak (5,1) je čtveřice homogenních rovnoběžkových souřadnic nevlastního bodu ve směru o parametrech

$$l = x_1, \; m = x_2, \; n = x_3.$$

Z této definice vyplývá, že každé uspořádané čtveřici číslo (5,1) náleží celé množství čtveřic homogenních rovnoběžkových souřadnic v dané soustavě souřadnic. Je-li (5,1) jednou z čtveřic tohoto množství a je-li $\lambda \neq 0$, pak

$$\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3; \lambda x_4$$

je čtveřicí téhož množství, jež budeme opět označovati

$$\{x_1; x_2; x_3; x_4\},$$

nebo stručněji

$$\{x\}.$$

Body v rovině ξ, resp. η, resp. ζ jsou charakterisovány rovnicí $x_1 = 0$, resp. $x_2 = 0$, resp. $x_3 = 0$, body nevlastní rovnicí $x_4 = 0$. Poslední z nich je též lineární; proto množství všech nevlastních bodů v prostoru nazýváme jeho rovinou nevlastní.

Tato rovina nemá ovšem všechny vlastnosti ostatních rovin. Nemá na př. směr, takže nelze mluviti o rovinách a přímkách s ní rovnoběžných nebo na ni kolmých. Dva, resp. tři její body neurčují úsečku, resp. trojúhelník atd.

Homogenní rovnoběžkové souřadnice bodu x označíme opět x_1, x_2, x_3, x_4, což stručně vyjadřuje symbol $x\,(x_1; x_2; x_3; x_4)$, obdobně $y\,(y_1; y_2; y_3; y_4)$ značí bod y o souřadnicích y_1, y_2, y_3, y_4.

Body x a y se ztotožňují jen tehdy, když $\{x\} = \{y\}$, a různé jsou jen tehdy, když $\{x\} \neq \{y\}$.

Z nehomogenních souřadnic bodu $P\,(x; y; z)$ snadno nalezneme jeho souřadnice homogenní v téže soustavě souřadnic. Je to čtveřice $(x; y; z; 1)$ nebo kterákoliv jiná čtveřice množství $\{x; y; z; 1\}$.

Podobně nevlastní bod o směrových parametrech $\{l; m; n\}$ má čtveřici homogenních souřadnic $(l; m; n; 0)$, nebo kteroukoliv jinou čtveřici množství $\{l; m; n; 0\}$.

6. Dvojice bodů. Dva body $P'\,(x'; y'; z')$ a $P''\,(x''; y''; z'')$, dané svými nehomogenními rovnoběžkovými souřadnicemi, určují přímku p a omezují na ní úsečku $\overline{P'P''}$.

Směrové parametry přímky p určíme snadno: mysleme si ji rovnoběžně posunutu tak, aby (obr. 9) bod P' padl do počátku O! Bod P'' pak zaujme polohu Q. Souřadnice bodu Q

$$x'' - x';\ y'' - y';\ z'' - z' \tag{6,1}$$

jsou směrové parametry přímky p ve smyslu odst. 4.

Je-li souřadnicový trojhran pravoúhlý kartézský, lze snadno vyjádřiti i délku úsečky $\overline{P'P''} = d$. Protože se při uvedeném rovnoběžném posunutí vzdálenost obou bodů zajisté nezměnila, je $\overline{P'P''} = \overline{OQ}$. Délka $\overline{OQ}$ polohového vektoru bodu Q je podle (4,1)

$$d = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}, \tag{6,2}$$

kde $d > 0$.

Z (4,2) vychází pro směrové kosiny vektoru $\overrightarrow{P'P''}$

$$\cos\alpha = \frac{x'' - x'}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y'' - y'}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z'' - z'}{d}. \tag{6,3}$$

Pokládáme-li v (6,3) d za danou délku, $x'; y'; z'$ za souřadnice daného bodu P' orientované přímky $\vec{p}$ o daných směrových kosinech $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, vychází z (6,3)

$$x'' = x' + d\cos\alpha, \quad y'' = y' + d\cos\beta, \quad z'' = z' + d\cos\gamma. \tag{6,4}$$

Rovnice (6,4) představují tudíž řešení úlohy: Na orientované přímce $\vec{p}$, dané bodem $P'(x'; y'; z')$ a směrovými kosiny určiti souřadnice bodu $P''(x'', y'', z'')$, vznikajícího nanesením délky d v kladném smyslu na $\vec{p}$ od P'.

Položme v (6,4) $x' = x_0$, $y' = y_0$, $z' = z_0$ a $x'' = x$, $y'' = y$, $z'' = z$ a v nové soustavě rovnic

$$x = x_0 + d\cos\alpha, \quad y = y_0 + d\cos\beta, \quad z = z_0 + d\cos\gamma \tag{6,5}$$

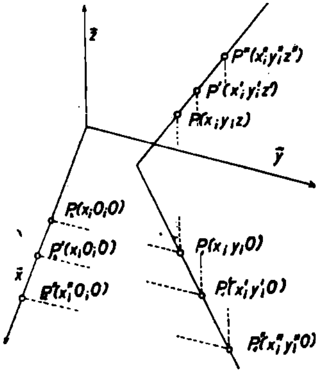
pokládejme x, y, z za běžné souřadnice bodu na přímce $\vec{p}$, d za proměnný parametr. Pak (6,5) jsou **parametrické rovnice** orientované přímky p dané bodem $P_0(x_0; y_0; z_0)$

a směrovými kosiny $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Mění-li se parametr d, bod P $(x; y; z)$ vytvořuje přímku $\vec{p}$, při čemž kladný smysl na $\vec{p}$ koresponduje rostoucímu parametru d.

Kdyby místo směrových kosinů byly dány pouze směrové parametry l, m, n přímky p, pak též je možno napsati její parametrické rovnice

$$x = x_0 + l \, . \, t, \; y = y_0 + mt, \; z = z_0 + nt, \qquad (6,6)$$

kde však parametr t není vzdálenost P_0P, nýbrž pouze veličina této vzdálenosti úměrná. Oproti rovnicím (6,5), odvozených za předpokladu, že soustava souřadnic je pravoúhlá kartézská, rovnice (6,6) neztrácejí svůj smysl ani v obecných souřadnicích rovnoběžkových.



Obr. 10. Dělicí poměr bodu na přímce v prostoru a na průmětu přímky.

Odvoďme ještě parametrické rovnice přímky p, dané opět body P' a P'', v kterých však parametrem je dělicí poměr λ vytvořujícího bodu P vzhledem k dvojici bodů $P'P''$ [srovnej s (2,20)].

K odvození použijeme věty:

Dělicí poměr se rovnoběžným promítáním nemění.

Skutečně, promítneme-li tři body $PP'P''$ přímky p rovnoběžně (obr. 10) do bodů $P_1P'_1P''_1$ přímky p_1, různoběžné s p (pro rovnoběžku tvrzení je triviální,) je — podle známé věty o úměrnosti úseků vyťatých osnovou rovnoběžek na různoběžných příčkách — dělicí poměr

$$\lambda = \overline{P'P} : \overline{P''P}$$

roven dělicímu poměru $\overline{P'_1P_1} : \overline{P''_1P_1}$, což bylo dokázati.

Promítněme tedy body P, P', P'' přímky p ve směru osy $\vec{z}$ do bodů (obr. 10) P_1, P'_1, P''_1 přímky p_1 v rovině $(\vec{x}\,\vec{y})$. Tuto trojici bodů promítněme znovu ve směru $\vec{y}$ do $\vec{x}$, čímž vznikne trojice $P_2P'_2P''_2$. Je pak podle věty právě uvedené

$$\lambda = \frac{\overline{P'P}}{\overline{P''P}} = \frac{\overline{P'_1P_1}}{\overline{P''_1P_1}} = \frac{\overline{P'_2P_2}}{\overline{P''_2P_2}} = \frac{x - x'}{x - x''}.$$

Odtud plyne

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' - \lambda x''}{1 - \lambda} \\ &\text{a obdobným postupem} \\ y &= \frac{y' - \lambda y''}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z' - \lambda z''}{1 - \lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{6,7}$$

V těchto rovnicích jsou obsaženy rovnice (2,20).

Přejdeme-li k homogenním rovnoběžkovým souřadnicím kladouce

$$x' = \frac{y_1}{y_4}, \quad y' = \frac{y_2}{y_4}, \quad z' = \frac{y_3}{y_4},$$

$$x'' = \frac{z_1}{z_4}, \quad y'' = \frac{z_2}{z_4}, \quad z'' = \frac{z_3}{z_4},$$

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

a

$$\lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{z_4}{y_4} \tag{6,8}$$

je

$$\{x\} \equiv \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1;\ \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2;\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3;\ \lambda_1 y_4 + \lambda_2 z_4\},$$

což — nedbáme-li geometricky bezvýznamného faktoru úměrnosti při x — lze vyjádřiti symbolickou rovnicí

$$x = \lambda_1 y + \lambda_2 z, \tag{6,9}$$

kde λ_1 a λ_2 nejsou současně rovny nule.

Platí tedy v prostoru stejně jako v rovině, že bod x leží na spojnici dvou různých bodů y a z jen tehdy, když je jejich lineární kombinací tvaru (6,9). Čísla λ_1, λ_2, nikoliv současně rovná nule, existují jen tehdy, když matice

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix} \right\| \qquad (6,10)$$

je hodnosti nižší než 3, t. j. když všechny její minory třetího řádu jsou rovny nule. Je-li tomu tak, body x, y, z nazýváme lineárně závislé, jinak jsou lineárně nezávislé.

Rovnice (6,9) byla odvozena za předpokladu, že žádný z bodů x, y, z není nevlastní. Ukažme, že tento předpoklad je nepodstatný.

Je-li na př. bod z nevlastní, takže $z_4 = 0$, leží ve směru o parametrech $z_1; z_2; z_3$. Parametrické rovnice přímky (yz) lze pak psáti ve tvaru (6,6), kde

$$x_0 = \frac{y_1}{y_4}, \quad y_0 = \frac{y_2}{y_4}, \quad z_0 = \frac{y_3}{y_4}, \quad t = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 y_4},$$

$$l = z_1, \; m = z_2, \; n = z_3,$$

načež vychází

$$\{x\} = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1; \; \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2; \; \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3; \; \lambda_1 y_4 + \lambda_2 z_4\},$$

odkud opět vychází (6,9), c. b. d.

Jsou-li oba dané body y a z nevlastní, je $y_4 = z_4 = 0$. Z (6,9) plyne v tomto případě $x_4 = 0$, t. j. každá lineární kombinace nevlastních bodů je opět bod nevlastní na jimi určené nevlastní přímce; obráceně, každý bod této přímky lze vyjádřiti jako lineární kombinaci dvou jejích různých bodů.

Zcela stejným způsobem jako v anal. geometrii rovinné (odst. 2) odvodíme z výrazu (6,8) pro dělicí poměr, že dvojpoměr čtyř bodů

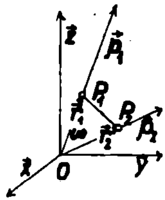
$$y, z, x = \lambda_1 y + \lambda_2 z, u = \mu_1 y + \mu_2 z$$

je opět dán výrazem (2,26). Rovnice (2,27) opět vyjadřuje, že dvojice y, z a x, u se oddělují harmonicky.

7. Úhel dvou směrů. Dva body nevlastní, t. j. dva směry určují úhel. Je-li soustava souřadnic kartézská a pravoúhlá a jsou-li

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \quad \text{a} \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$$

trojice směrových úhlů dvou přímek, můžeme předpokládati, že procházejí počátkem O. Směrovými úhly je ovšem na obou přímkách vytčen též smysl, takže jde o přímky orientované, jež označíme $\vec{p}_1, \vec{p}_2$. Směry i smysly obou přímek buďtež dány jednotkovými vektory $\overrightarrow{OP_1}$ a $\overrightarrow{OP_2}$ (obr. 11), takže je $r_1 = \overline{OP_1} = r_2 = \overline{OP_2} = 1$. Souřadnice bodu P_1 jsou rovny směrovým kosinům přímky $\vec{p}_1$, t. j. $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$; $\cos\gamma_1$, podobně souřadnice bodu P_2 jsou $\cos\alpha_2$; $\cos\beta_2$; $\cos\gamma_2$. Čtverec vzdálenosti obou bodů je podle (6,2)



Obr. 11. Úhel dvou směrů.

$$\overline{P_1P_2}^2 = (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_1 - \cos\beta_2)^2 + \\ + (\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2)^2,$$

t. j. po snadné úpravě

$$\overline{P_1P_2}^2 = 2 - 2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2).$$

Podle kosinové věty pro trojúhelník OP_1P_2 je

$$\overline{P_1P_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\omega = 2 - 2\cos\omega.$$

Porovnáním obou výrazů pro $\overline{P_1P_2}^2$ vychází

$$\cos\omega = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \quad (7,1)$$

Úhel ω v intervalu $(0°, 180°)$ je svým kosinem (7,1) jednoznačně určen.

Pro kolmost přímek $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ $(\omega = 90°)$ vychází odtud nutná i postačující podmínka pro jejich směrové kosiny

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0. \quad (7,2)$$

Protože — jak jsme zjistili v odst. 4 (viz 4,6) — směrové kosiny jsou úměrné směrovým parametrům, vychází ze (7,2) zcela snadno podmínka kolmosti dvou směrů o parametrech $(l_1; m_1; n_1)$, resp. $(l_2; m_2; n_2)$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{7,3}$$

Určeme ještě parametry směru, který je kolmý současně na oba uvažované směry. Jsou-li $(l; m; n)$ jeho parametry, platí podle (7,3) rovnice

$$l l_1 + m m_1 + n n_1 = 0$$

a

$$l l_2 + m m_2 + n n_2 = 0,$$

odkud

$$l : m : n = \left\| \begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix} \right\|. \tag{7,4}$$

Příklady k cvičení.

22. Dokažte, že dvojpoměr čtyř bodů téže přímky se nemění středovým promítáním. [V rovině $(\vec{x}\,\vec{y})$ volte čtyři paprsky svazku, jehož střed je počátek O! Dva z nich buďtež $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Čtveřinu paprsků protněte dvěma různými příčkami a dokažte uvedenou větu pro obě čtveřiny průsečíků!]

23. Podle příkladu 22 lze definovati dvojpoměr čtyř paprsků svazku jako dvojpoměr čtyř bodů ležících na kterékoliv jejich příčce. Dokažte větu:

Dvě čtveřiny paprsků, jimiž se čtyři body přímky ze dvou různých bodů promítají, mají stejné dvojpoměry!

24. Dokažte, že věty příkladů 22 a 23 platí i pro čtveřinu bodů nevlastní přímky!

25. Čemu se rovná dvojpoměr čtyř bodů, z nichž jeden je nevlastní a všechny jsou různé? Uvažte všechny 4 případy! [Uplatněte, že dělicí poměr nevlastního bodu vzhledem k dvojici bodů vlastních je $+1$!]

26. Jaké podmínce vyhovují úhly, které svírá přímka p se stěnami ξ, η, ζ pravoúhlého trojhranu?

$$[\sin^2 (p\xi) + \sin^2 (p\eta) + \sin^2 (p\zeta) - 1 = 0.]$$

27. Určete vzdálenost bodů P' $(2; -3; 4)$ a P'' $(5; -7; -8)$ a směrové kosiny spojnice $P'P''$! [$d = 13$, $\cos \alpha = \frac{3}{13}$, $\cos \beta = -\frac{4}{13}$, $\cos \gamma = -\frac{12}{13}$.]

28. Jaký úhel svírají polohové vektory bodů $(2; 3; 4)$ a $(3; -4; -1)$? $\left[\cos\omega = \frac{-10}{\sqrt{754}}\right]$.

29. V pravoúhlých kartézských souřadnicích jsou dány dva směry trojicemi směrových parametrů $(1; 2; 3)$, $(2; 3; 4)$. Určete směrové kosiny směru na oba dané kolmého! $\left[\pm\frac{\sqrt{6}}{6};\ \mp\frac{\sqrt{6}}{3};\ \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$.

30. Dokažte: Nutná a postačující podmínka pro to, aby tři směry $(l_i; m_i; n_i)$, $(i = 1, 2, 3)$, byly rovnoběžné s touže rovinou (čili komplanární) je

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

[Uvažte hodnost matice (6,10) ze souřadnic $(l_i; m_i; n_i; 0)$ nevlastních bodů v těchto směrech ležících!]

31. Vypočtěte souřadnice těžiště a) trojúhelníka; b) čtyrstěnu o vrcholech $(x_i; y_i; z_i)$! Rozhodněte, v kterých souřadnicích platí výsledné vzorce! [a) $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, podobně y, z. b) $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$, podobně y, z. — Vzorce platí i v obecných rovnoběžkových souřadnicích.]

III.

ÚTVARY LINEÁRNÍ. ROVINA A PŘÍMKA.

8. O rovnici roviny. Jak známo, každou rovinu lze určiti jedním jejím bodem a směrem její kolmice čili normály.

Buď tedy $P'(x'; y'; z')$ bod roviny ϱ s jeho pravoúhlými kartézskými souřadnicemi, $(l; m; n)$ směrové parametry její normály k. Je-li $P(x; y; z)$ jiný bod roviny ϱ, pak spojnice $\overline{PP'}$ je na k kolmá, což podle (7,3) vyjadřuje rovnice

$$l(x - x') + m(y - y') + n(z - z') = 0, \qquad (8,1)$$

neboť $(x - x'; \ y - y'; \ z - z')$ jsou [viz (6,1)] směrové parametry spojnice $\overline{PP'}$.

Rovnice (8,1) je nutná a postačující podmínka pro to, aby bod P ležel v rovině ϱ; nazýváme ji proto rovnicí roviny ϱ.

Uspořádáme-li (8,1) podle souřadnic x, y, z bodu P, čili podle běžných souřadnic, vychází rovnice

$$lx + my + nz + p = 0, \qquad (8,2)$$

kde ze směrových parametrů l, m, n je alespoň jeden různý od nuly a kde p je libovolná konstanta.

(8,2) je rovnice lineární čili prvého stupně; proto rovinu nazýváme algebraickou plochou prvého stupně.

Připomeneme-li ještě pro úplnost, že rovnice nevlastní roviny — ovšem v souřadnicích homogenních — je

$$x_4 = 0,$$

můžeme říci:

Rovnice kterékoliv roviny v homogenních (zatím kartézských pravoúhlých) souřadnicích je lineární rovnice tvaru

$$\varrho(x) \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \qquad (8,3)$$

kde alespoň jeden z koeficientů a_i je různý od nuly.

Při dané soustavě souřadnic přísluší každé rovnici (8,3) jediná rovina ϱ. Obráceně však každé rovině přísluší celé množství rovnic; je-li (8,3) jedna z nich, obdržíme z ní každou jinou násobením od nuly různým faktorem λ. Z množství těchto rovnic vytýkáme některé zvláštní volbou (normalisací) faktoru λ (tvar normální, tvar úsekový).

9. Normální tvar rovnice roviny. Na tento tvar je možno uvésti rovnici všech rovin vyjma roviny nevlastní, neboť rovnici (8,2) je nutno násobiti takovým faktorem λ, aby součet čtverců koeficientů při x, y, z v

$$\lambda l x + \lambda m y + \lambda n z + \lambda p = 0 \tag{9,1}$$

byl roven $+1$. Odtud plyne $(\lambda l)^2 + (\lambda m)^2 + (\lambda n)^2 = 1$, a

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{9,2}$$

Je-li λ takto voleno, koeficienty při x, y, z v (9,1) nejsou pouhé směrové parametry, nýbrž směrové kosiny normály k roviny ϱ. Dvojí znaménko v (9,2) odpovídá dvojí možné orientaci této normály. Jsou-li α, β, γ její směrové odchylky, je tedy

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \pm \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos\beta = \pm \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \\ \cos\gamma = \pm \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{9,3}$$

Násobením rovnic (8,2), resp. (8,1) faktorem (9,2) vychází hledaný normální tvar rovnice roviny

$$\pm \frac{lx + ny + nz + p}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = 0 \tag{9,4}$$

resp.

$$(x - x')\cos\alpha + (y - y')\cos\beta + (z - z')\cos\gamma = 0. \tag{9,5}$$

Poslední rovnici uveďme na tvar

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0, \tag{9,6}$$

kde

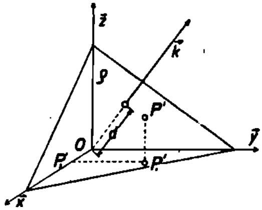
$$d = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma.$$

Lze ukázati, že d je vzdálenost počátku O od roviny ϱ.

Za tím účelem promítněme bod P' $(x'; y'; z')$ roviny ϱ kolmo (obr. 12) do souřadnicové roviny ζ do bodu P'_1, načež promítněme P'_1 kolmo do $\vec{x}$ do bodu P'_2. Pak kolmý průmět lomené čáry $OP'_2P'_1P'$ do (počátkem O procházející) normály k roviny ϱ je roven výrazu

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma;$$

na druhé straně je zřejmé, že tento průmět má celkovou délku d, což bylo dokázati.



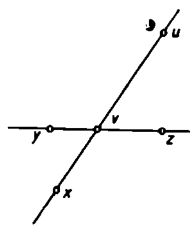
Obr. 12. Rovina a její normála počátkem.

Volbou znaménka faktoru λ lze dosáhnouti, aby v rovnici (9,6) číslo d bylo kladné (není-li ovšem nula, t. j. neprochází-li rovina ϱ počátkem O). Tím je odstraněna dvojznačnost normalisace a normální tvar (9,6) rovnice roviny je určen jednoznačně. Její geometrický význam je ten, že na normále k roviny ϱ byl za kladný zvolen smysl od O k ϱ.

10. Určení roviny třemi body. Úsekový tvar rovnice roviny. V souřadnicích rovnoběžkových homogenních buďtež dány tři body y, z, u neležící v přímce. Ke každému dalšímu bodu x jimi určené roviny ϱ lze dospěti takto (obr. 13):

Bod x spojen s u dává přímku, protínající (yz) v bodě v.

Je tedy v lineární kombinací bodů y a z tvaru $v = \lambda_1 y + \lambda_2 z$, ($\lambda_1$ a λ_2 nejsou současně nuly) a bod x lineární kombinací bodů u a v tvaru $x = \varkappa v + \mu_3 u$ ($\varkappa$ a μ_3 nejsou současně nuly); spojením obou symbolických rovnic vychází $x = \varkappa\lambda_1 y + \varkappa\lambda_2 z + \mu_3 u$. Klademe-li



Obr. 13. Lineární kombinace 3 bodů.

$\varkappa\lambda_1 = \mu_1$, $\varkappa\lambda_2 = \mu_2$, lze psáti

$$x = \mu_1 y + \mu_2 z + \mu_3 u, \tag{10,1}$$

při čemž — jak z učiněných předpokladů o číslech $\lambda_1, \lambda_2, \varkappa, \mu_3$ vyplývá — alespoň jedno z čísel μ_1, μ_2, μ_3 je různé od nuly.

Čísla uspořádané trojice $(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$ se nazývají **homogenní trojúhelníkové souřadnice** bodu x **roviny** ϱ vzhledem k jejímu trojúhelníku yzu.

Jejich homogennost je patrná z okolnosti, že s bodem x (geometricky) totožný bod φx $(\varphi \neq 0)$ má vzhledem k yzu souřadnice $(\varphi\mu_1; \varphi\mu_2; \varphi\mu_3)$, jak násobením rovnice (10,1) činitelem φ vychází. Přísluší tedy geometrickému bodu $\{x\}$ celé množství uspořádaných trojic homogenních trojúhelníkových souřadnic, jež označme opět $\{\mu_1; \mu_2; \mu_3\}$.

Vrcholům y, z, u souřadnicového trojúhelníka patrně náležejí množství $\{1; 0; 0\}$, resp. $\{0; 1; 0\}$, resp. $\{0; 0; 1\}$. Jsou-li tyto body v rovině ϱ dány a je-li x libovolný další bod roviny ϱ, není tím množství $\{\mu_1; \mu_2; \mu_3\}$ jeho trojúhelníkových souřadnic jednoznačně určeno! Skutečně, zaměníme-li v (10,1) trojici bodů y, z, u trojicí $\varphi_1 y, \varphi_2 z, \varphi_3 u$, kde $\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \neq 0$, jsou vrcholy nového souřadnicového trojúhelníka geometricky totožné s vrcholy trojúhelníka původního. Trojúhelníkové souřadnice $(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$ bodu x je však nutno zaměniti čísly

$$\left(\frac{\mu_1}{\varphi_1}; \frac{\mu_2}{\varphi_2}; \frac{\mu_3}{\varphi_3}\right). \tag{10,3}$$

Tato záměna je pouhou změnou faktoru homogenity trojúhelníkových souřadnic jen tehdy, když

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3; \tag{10,4}$$

jen tehdy skutečně je

$$\left\{\frac{\mu_1}{\varphi_1}; \frac{\mu_2}{\varphi_2}; \frac{\mu_3}{\varphi_3}\right\} = \{\mu_1; \mu_2; \mu_3\}.$$

Odtud vyplývá, že body v rovině ϱ a množství trojúhelníkových souřadnic $\{\mu_1; \mu_2; \mu_3\}$ jsou v korespondenci oboustranně jednoznačné tehdy, je-li dán v rovině ϱ kromě vrcholů y, z, u trojúhelníka souřadnic ještě bod $g \equiv y + z + u$, neležící na žádné z jeho stran. Protože jeho trojúhelníkové souřadnice jsou $\{1; 1; 1\}$, nazývá se **bodem jednotkovým**.

Skutečně, má-li jednotkový bod po záměně vrcholů y, z, u trojúhelníka body $\varphi_1 y$, $\varphi_2 z$, $\varphi_3 u$ zůstati jednotkovým, musí podle (10,3) býti

$$\left\{\frac{1}{\varphi_1}; \frac{1}{\varphi_2}; \frac{1}{\varphi_3}\right\} = \{1; 1; 1\},$$

což je podmínka rovnocenná s (10,4). Je tedy možno souřadnice bodů y, z, u násobiti pouze stejným, od nuly různým číslem, což má za následek, že trojúhelníkové souřadnice bodu x se tímto číslem dělí a jejich množství $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ zůstává nezměněno, c. b. d.

Rovnoběžkové homogenní souřadnice bodů roviny ζ, o kterých jsme uvažovali v odst. 1, zřejmě jsou zvláštním případem homogenních souřadnic trojúhelníkových. Vrcholy trojúhelníka souřadnic jsou zde nevlastní body os $\vec{x}$ a $\vec{y}$ a počátek O. Jednotkový bod se ztotožňuje s jednotkovým bodem $(1; 1)$ souřadnic nehomogenních.

Symbolická rovnice (10,1) je zkráceně napsaná soustava čtyř rovnic

$$x_i = \mu_1 y_i + \mu_2 z_i + \mu_3 u_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \qquad (10,5)$$

Pokládáme-li v ní μ_1, μ_2, μ_3 za neznámé, neexistuje při obecné vzájemné poloze bodů x, y, z, u žádné řešení této soustavy; existuje, jak je známo, jen tehdy, když

$$(x, y, z, u) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0; \qquad (10,6)$$

což je nutná i postačující podmínka pro to, aby body x, y, z, u byly **lineárně závislé**, t. j. aby bylo možno vésti jimi rovinu. Je-li $(x, y, z, u) \neq 0$, body x, y, z, u jsou **lineárně nezávislé**, t. j. neleží v jedné rovině.

Rozvedeme-li determinant v rovnici (10,6) podle prvního řádku, obdržíme uspořádanou rovnici roviny určené body y, z, u. Je to lineární rovnice tvaru (8,3), takže i v obecných rovnoběžkových souřadnicích rovnice roviny je lineární.

Souřadnice, v kterých rovnice přímky v rovině, nebo roviny v prostoru je lineární, nazýváme též lineárními, bodovými souřadnicemi. Takovými jsou nejen rovnoběžkové souřadnice bodu v rovině nebo v prostoru, ale, jak snadno dokážeme, i trojúhelníkové souřadnice bodu v rovině. Skutečně, dosadíme-li za x_i podle (10,5) do (8,3), obdržíme tím rovnici obecně položené přímky v rovině (yzu) v trojúhelníkových souřadnicích μ_1, μ_2, μ_3. Tato rovnice zřejmě bude lineární, což bylo dokázati.

Dodejme, že v rovině trojúhelníkové souřadnice jsou nejobecnější souřadnice lineární.

Z rovnice roviny určené třemi body snadno odvodíme t. zv. úsekový tvar rovnice roviny, na který je možno upraviti rovnici kterékoliv roviny ϱ, která není nevlastní a neprochází počátkem soustavy rovnoběžkových souřadnic.

Za těchto předpokladů rovina ϱ protíná souřadnicové osy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ v bodech $(p; 0; 0)$, $(0; q; 0)$, resp. $(0; 0; r)$, kde $pqr \neq 0$. Jimi je rovina ϱ jednoznačně určena a její rovnice podle (10,6) zní

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ p, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & q, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & r, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

t. j.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0. \qquad (10,7)$$

Snadno bychom dospěli k tomuto úsekovému tvaru rovnice roviny též násobením rovnice roviny takovým faktorem λ, aby její prostý člen nabyl hodnoty -1.

Příklady k cvičení.

32. Napište rovnici roviny (v pravoúhl. kartézských souř.), která prochází bodem $(5; -6; 8)$ a stojí kolmo na přímku o parametrických rovnicích $x = 2 - t$, $y = 3 + 3t$, $z = -1 + 4t$! Určete průsečík dané přímky s onou rovinou! $[x - 3y - 4z + 9 = 0$, $t = \frac{3}{13}$, $(\frac{23}{13}; \frac{48}{13}; -\frac{1}{13})$.]

33. V týchž souřadnicích napište rovnici roviny souměrnosti úsečky $\overline{AB}$ $[A(-2; 5; 7)$, $B(6; -3; 1)]$! $[4x - 4y - 3z + 8 = 0.]$

34. Napište rovnice všech rovin, jejichž vzdálenost od počátku je 13 a jejichž odchylky od stěn kartézského pravoúhlého souřadnicového trojhranu jsou stejné! [8 rovin: $\pm x \pm y \pm z - 13\sqrt{3} = 0$.]

35. Jak zní úsekový tvar rovnice roviny, která je rovnoběžná s jednou nebo se dvěma osami souřadnic? [Souřadnice stejnojmenná s osou, která je s rovinou rovnoběžná, se v rovnici roviny nevyskytuje.]

36. Udejte rovnice přímek, v nichž rovina (8,3) protíná stěny souřadnicového trojhranu a rovinu nevlastní $[x_i = 0$, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 - a_ix_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4]$.

37. Bodem $(-3; 0; 5)$ proložte rovinu, která protíná souřadnicovou rovinu ξ v přímce $2y - 6z + 9 = 0$! $[7x - 2y + 6z - 9 = 0.]$

38. Napište rovnici roviny, která obsahuje přímku o parametrických rovnicích (6,6) a je rovnoběžná se spojnicí bodů $(x_1; y_1; z_1)$ a $(x_2; y_2; z_2)$! $\left[\begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0, & z - z_0 \\ l, & m, & n \\ x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0.\right]$

39. Převeďte normální tvar rovnice roviny na úsekový a obráceně!

40. Určete průsečíky přímky P_1P_2 $[P_1(-1; 2; 6)$, $P_2(7; 8; 2)]$, s rovinou $2x - 3y + 4z - 5$! $[(\frac{35}{9}; \frac{17}{3}; \frac{32}{9})]$.

41. Udejte vzorec pro úhel rovin

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0,$$
$$b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0!$$

$[\cos\omega = \pm(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) : \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}.]$

42. Určete úhel rovin $x - y + z - 2 = 0$, $2x - y + 3z - 6 = 0$. $[\cos\omega = \pm\sqrt{\frac{6}{7}}.]$

43. Bodem $(4; 5; -1)$ veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou $14x - 2y + 9z - 11 = 0$! $[14x - 2y + 9z - 37 = 0.]$

44. Rovnici roviny dané body (1; 1; 0), (0; 2; 3), (3; 4; 0) uveďte na tvar a) úsekový, b) normální!

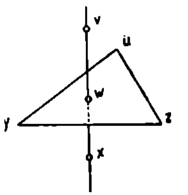
$$\left[\text{a) } \frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} + \frac{z}{\frac{3}{5}} - 1 = 0;\ \text{b) } \frac{9x - 6y + 5z - 3}{\sqrt{142}} = 0.\right]$$

45. Určete rovinu procházející body (1; 2; 3) a (1; — 1; — 2) a stojící kolmo na rovinu $x - 2y + z - 5 = 0$! [$13x + 5y - 3z - 14 = 0$.]

46. Jsou-li y, z, u vrcholy trojúhelníka souřadnic v rovině ϱ, $g = y + z + u$ bod jednotkový, $x = \mu_1 y + \mu_2 z + \mu_3 u$, pak $\mu_1 : \mu_2$ jest dvojpoměr čtveřiny paprsků $(uy)\,(uz)\,(ug)\,(ux)$. Dokažte a udejte obdobné významy poměrů $\mu_1 : \mu_3$ a $\mu_2 : \mu_3$! [Paprsky čtveřiny protínají stranu (yz) souř. trojúhelníka v čtveřici bodů $y, z, y + z, \mu_1 y + \mu_2 z$, jejíž dvojpoměr jest $\mu_1 : \mu_2$, c. b. d.]

11. Čtyrstěnové souřadnice bodu v prostoru. Rovnice roviny v rovnoběžkových souřadnicích je vždy lineární; přes to rovnoběžkové souřadnice nejsou nejobecnější lineární souřadnice. K těm dospějeme vycházejíce z této věty:

Jsou-li y, z, u, v čtyři body v prostoru, neležící v jedné rovině, pak každý další bod x je jejich lineární kombinací tvaru



Obr. 14 Lineární kombinace čtyř bodů v prostoru.

$$x = \varkappa_1 y + \varkappa_2 z + \varkappa_3 u + \varkappa_4 v, \tag{11,1}$$

kde alespoň jedno z čísel $\varkappa_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ je různé od nuly.

Čísla uspořádané čtveřice $(\varkappa_1; \varkappa_2; \varkappa_3; \varkappa_4)$ jsou homogenní čtyrstěnové souřadnice bodu x vzhledem k čtyrstěnu $yzuv$, který jmenujeme souřadnicový.

Na důkaz uvedené věty uvažme, že průsečík w spojnice (xv) s rovinou (yzu) je (obr. 14) podle odst. **10** lineární kombinace $w = \mu_1 y + \mu_2 z + \mu_3 u$, kde alespoň jedno z čísel μ_1, μ_2, μ_3 je různé od nuly. Bod x tedy leží na spojnici (wv) a je proto lineární kombinací $x = \varkappa w + \varkappa_4 v$, kde alespoň jedno z čísel $\varkappa, \varkappa_4$ je různé od nuly.

Klademe-li $\varkappa \mu_i = \varkappa_i$, $(i = 1, 2, 3)$, vychází spojením posledních dvou rovnic (11,1) a současně je patrna správnost celé dokazované věty.

Stejně jako v případě trojúhelníkových souřadnic bodu v rovině není vrcholy souřadnicového čtyrstěnu ještě definována oboustranně jednoznačná korespondence mezi body v prostoru a množstvími $\{\varkappa_1; \varkappa_2; \varkappa_3; \varkappa_4\}$ jeho homogenních čtyrstěnových souřadnice. I zde však postačí, je-li ještě dána poloha jednotkového bodu $g = y + z + u + v$, neležícího v žádné stěně čtyrstěnu. Jeho čtyrstěnové souřadnice tvoří množství čtyřčíslí $\{1; 1; 1; 1\}$.

Lineárnost čtyrstěnových souřadnic dokážeme takto:

Buď (8,3) rovnice libovolné roviny ϱ v týchž rovnoběžkových homogenních souřadnicích, jimiž jsou určeny vrcholy y, z, u, v čtyrstěnu. Její rovnici v souřadnicích čtyrstěnových obdržíme, dosadíme-li do (8,3) podle (11,1)

$$x_i = \varkappa_1 y_i + \varkappa_2 z_i + \varkappa_3 u_i + \varkappa_4 v_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad (11,2)$$

čímž zřejmě vznikne rovnice lineární a homogenní v čtyrstěnových souřadnicích $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$, c. b. d.

V dalším, nebude-li výslovně uvedeno, že jde o souřadnice rovnoběžkové, budeme souřadnicemi bodu rozuměti souřadnice čtyrstěnové, které budeme označovati obvyklým způsobem, takže na př. $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ budou čtyrstěnové homogenní souřadnice bodu x, což stručně vyznačujeme symbolem $x\,(x_1; x_2; x_3; x_4)$ a t. p.

I v prostoru rovnoběžkové souřadnice jsou zvláštním případem souřadnic čtyrstěnových: vrcholy souř. čtyrstěnu jsou zde patrně nevlastní body os $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ a počátek O; bod jednotkový zde, jak víme, určuje měřítka na osách a teprve po jeho volbě souřadnicová soustava jest úplná.

12. Transformace souřadnic. V soustavě rovnic

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{13}x'_3 + c_{14}x'_4,\\
x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + c_{23}x'_3 + c_{24}x'_4,\\
x_3 &= c_{31}x'_1 + c_{32}x'_2 + c_{33}x'_3 + c_{34}x'_4,\\
x_4 &= c_{41}x'_1 + c_{42}x'_2 + c_{43}x'_3 + c_{44}x'_4
\end{aligned}\right\} \qquad (12,1)$$

pokládejme $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ a $(x'_1; x'_2; x'_3; x'_4)$ za dvě čtyřčísli souřadnic téhož bodu vzhledem ke dvěma různým souřadnicovým čtyrstěnům. K tomu jsme skutečně oprávněni, neboť podle téže soustavy rovnic bod x $(x_1; x_2; x_3; x_4)$, jehož souřadnice se vztahují na souřadnicový čtyrstěn (1; 0; 0; 0), (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0), (0; 0; 0; 1) je geometricky totožný s bodem x' $(x'_1; x'_2; x'_3; x'_4)$, jehož souřadnice se vztahují na jiný čtyrstěn, a to $(c_{11}; c_{21}; c_{31}; c_{41})$, $(c_{12}; c_{22}; c_{32}$ $c_{42})$, $(c_{13}; c_{23}; c_{33}; c_{43})$, $(c_{14}; c_{24}; c_{34}; c_{44})$. Pro jasnost výslovně uveďme, že poslední čtyři čtyřčísli jsou souřadnice vrcholů druhého čtyrstěnu vzhledem k prvému čtyrstěnu. Odtud především vyplývá, že jen tehdy, když determinant

$$C = | c_{ik} | \neq 0, \tag{12,2}$$

druhý z obou čtyrstěnů je skutečný čtyrstěn, t. j. jeho vrcholy neleží v jedné rovině. Budeme v dalším stále předpokládati, že podmínka (12,2) je splněna.

Soustavou rovnic tvaru (12,1) lze transformovati souřadnice bodu vzhledem ke kterémukoliv souř. čtyrstěnu k bodu jednotkovému v souřadnice vzhledem ke kterékoliv jiné takové souřadnicové soustavě.

1. specialisace transformace (12,1) nastane, předpokládáme-li že obě souřadnicové soustavy jsou rovnoběžkové. Pro bod nevlastní je jak $x_4 = 0$ tak $x'_4 = 0$; z jedné z těchto rovnic musí pak vlivem rovnic (12,1) plynouti druhá. Tak tomu je, jen když

$$c_{41} = c_{42} = c_{43} = 0, \ c_{44} \neq 0. \tag{12,3}$$

Dělme pravé strany všech rovnic (12,1) koeficientem c_{44} — což znamená jen (geometricky bezvýznamnou) změnu faktoru úměrnosti homogenních souřadnic x_i bodu x — a současně položme

$$\frac{c_{ik}}{c_{44}} = d_{ik}, \ x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = 1,$$
$$x'_1 = x', x'_2 = y', x'_3 = z', x'_4 = 1.$$

Obdržíme tak soustavu rovnic

$$\left.\begin{aligned} x &= d_{11}x' + d_{12}y' + d_{13}z' + d_{14}, \\ y &= d_{21}x' + d_{22}y' + d_{23}z' + d_{24}, \\ z &= d_{31}x' + d_{32}y' + d_{33}z' + d_{34}, \\ 1 &= d_{44}. \end{aligned}\right\} \qquad (12,4)$$

Z (12,2) vyplývá

$$\delta = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (12,5)$$

Určeme nyní geometrický význam koeficientů d_{ik} rovnic (12,4). Především počátek druhé soustavy ($x' = y' = z' = 0$) má podle (12,4) souřadnice ($d_{14}; d_{24}; d_{34}$). Položme $d_{14} = x_0$, $d_{24} = y_0$, $d_{34} = z_0$.

Hrana $\overrightarrow{x'}$ druhého souřadnicového trojhranu ($y' = z' = 0$) má v prvém trojhranu podle (12,4) parametrické rovnice

$$x = x_0 + d_{11}x', \; y = y_0 + d_{21}x', \; z = z_0 + d_{31}x', \qquad (12,6)$$

kde x' je proměnný parametr. Jsou tedy koeficienty d_{11}, d_{21}, d_{31} směrové parametry osy $\overrightarrow{x'}$ vzhledem k souř. trojhranu $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Podobně d_{12}, d_{22}, d_{32} jsou směrové parametry osy $\overrightarrow{y'}$ a d_{13}, d_{23}, d_{33} směr. parametry osy $\overrightarrow{z'}$.

Kromě toho součty $\sum\limits_k d_{ik}$ ($i = 1, 2, 3, \; k = 1, 2, 3, 4$) jsou souřadnice jednotkového bodu druhé soustavy ($x' = y' = z' = 1$) vzhledem k prvé soustavě.

2. specialisace. Předpokládejme, že počátky obou soustav se ztotožňují. To nastane jen tehdy, když v (12,4) je $d_{14} = d_{24} = d_{34} = 0$.

3. specialisace záleží v předpokladu, že oba trojhrany jsou pravoúhlé, kartézské, shodné a tedy stejně orientované, takže je lze ztotožniti pootočením jednoho kolem společného počátku.

Pro větší přehlednost sestavme směrové kosiny os v tabulku

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{x'}$	$\cos\alpha_1$	$\cos\beta_1$	$\cos\gamma_1$
$\vec{y'}$	$\cos\alpha_2$	$\cos\beta_2$	$\cos\gamma_2$
$\vec{z'}$	$\cos\alpha_3$	$\cos\beta_3$	$\cos\gamma_3$

(12,7)

Parametrické rovnice osy $\vec{x'}$ jsou podle (6,5)

$$x = x'\cos\alpha_1,\ y = x'\cos\beta_1,\ z = x'\cos\gamma_1,$$

což, srovnáno s (12,6), dává

$$d_{11} = \cos\alpha_1,\ d_{21} = \cos\beta_1,\ d_{31} = \cos\gamma_1.$$

Obdobně vychází

$$\left.\begin{aligned} d_{12} &= \cos\alpha_2,\ d_{22} = \cos\beta_2,\ d_{32} = \cos\gamma_2,\\ d_{13} &= \cos\alpha_3,\ d_{23} = \cos\beta_3,\ d_{33} = \cos\gamma_3.\end{aligned}\right\} \qquad (12,8)$$

Směrové kosiny kterékoliv osy vyhovují rovnici (4,3), obě trojice směrových kosinů dvou os téhož trojhranu splňují podmínku kolmosti (7,2). Napíšeme-li tyto rovnice nejdříve pro směrové kosiny os $\vec{x'}, \vec{y'}, \vec{z'}$ v soustavě $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, po druhé pro směrové kosiny os $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vzhledem k souř. soustavě $\vec{x'}, \vec{y'}, \vec{z'}$, obdržíme dvě skupiny po šesti rovnicích

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=3} d^2_{ik} - 1 = 0,\ (k = 1, 2, 3),\\ &\sum_{i=1}^{i=3} d_{ik}\, d_{il} = 0,\ (k \neq l;\ k, l = 1, 2, 3), \end{aligned} \qquad (12,9)$$

a

$$\sum_{k=1}^{k=3} d_{ik}^2 - 1 = 0, \ (i = 1, 2, 3),$$
$$\sum_{k=1}^{k=3} d_{ik}\, d_{lk} = 0, \ (i \neq l;\ i, l = 1, 2, 3). \tag{12,10}$$

Obě skupiny rovnic jsou závislé do té míry, že rovnice (12,10) jsou důsledkem rovnic (12,9) a obráceně.

Protože na př. osa $\overrightarrow{x'}$ je kolmá na $\overrightarrow{y'}$ i $\overrightarrow{z'}$, vychází podle (7,4)

$$d_{11} : d_{21} : d_{31} = \begin{Vmatrix} d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{Vmatrix}$$

t. j.

$$\left.\begin{aligned} d_{11} = \varepsilon\,(d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32}),\ d_{21} = \varepsilon\,(d_{32}d_{13} - d_{12}d_{33}),\\ d_{31} = \varepsilon\,(d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22}), \end{aligned}\right\}. \tag{12,11}$$

kde ε je činitel úměrnosti. Za učiněných předpokladů je $\varepsilon = +1$.

Především dokažme, že $\varepsilon^2 = +1$. Za tím účelem napišme t. zv. identitu Lagrangeovu

$$(d_{22}d_{33} - d_{23}d_{32})^2 + (d_{32}d_{13} - d_{12}d_{33})^2 + (d_{12}d_{23} - d_{13}d_{22})^2 =$$
$$= (d_{12}^2 + d_{22}^2 + d_{32}^2)(d_{13}^2 + d_{23}^2 + d_{33}^2) -$$
$$- (d_{12}d_{13} + d_{22}d_{23} + d_{32}d_{33})^2,$$

kterou lze snadno ověřiti provedením naznačeného násobení a umocňování.

Její pravá strana má podle (12,9) hodnotu 1; umocněním a sečtením rovnic (12,11) vychází rovnice, jejíž levá strana podle (12,9) je též $+1$. Srovnáním obou výsledků skutečně vychází $\varepsilon^2 = +1$.

Zbývá tedy rozhodnouti o znaménku ε. Uvážíme-li, že v rovnicích transformace (12,4) je jako zvláštní obsažen případ, kdy obě soustavy se ztotožňují ($x = x'$, $y = y'$, $z = z'$) takže $d_{11} = d_{22} = d_{33} = 1$, ostatní d_{ik} rovnají se nule, pak pro tyto zvláštní hodnoty koeficientů již první z rovnic (12,11) dává $\varepsilon = +1$, c. b. d.

Z týchž rovnic — a z rovnic k nim analogických — je patrno, že každý prvek determinantu δ (viz 12,5) je roven svému minoru. Rozvádíme-li δ podle jeho prvního řádku, berouce ohled na tuto jeho vlastnost, vychází

$$\delta = d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2,$$

t. j. podle (12,10)

$$\delta = 1.$$

Na konec si všimněme další specialisace rovnic (12,4) předpokládajíce, že trojhran $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$ vzniká z trojhranu $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ rovnoběžným posunutím. Pak je $\vec{x}' \parallel \vec{x}$ a směrové parametry d_{21} a d_{31} v (12,6) jsou nuly. Připojíme-li obdobnou úvahu o osách $\vec{y}'$ a $\vec{z}'$, nalezneme šest rovnic

$$d_{21} = d_{31} = d_{12} = d_{32} = d_{13} = d_{23} = 0.$$

Kromě nich ještě rovnice $d_{11} = d_{22} = d_{33} = 1$ vyjadřují, že oba trojhrany jsou shodné.

Rovnice této jednoduché transformace souřadnicové soustavy tedy jsou

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0. \qquad (12,12)$$

Transformace (12,4), jejíž koeficienty splňují soustavu rovnic (12,9) a tudíž i (12,10), se nazývá ortogonální a vyjadřuje přemístění soustavy pohybem, je-li $\delta = +1$. Každý pohyb lze složiti z paralelního posunutí (translace), po němž následuje pootočení (rotace), nebo z nejdříve provedeného pootočení doplněného posunutím.

Je-li transformace ortogonální, vyplývá z (12,4) a z (12,9) nebo (12,10)

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad (12,13)$$

což je vztah pro ortogonální transformace charakteristický.

13. Souřadnice roviny. Dualita. Vzhledem k soustavě souřadnic má rovina ξ o rovnici

$$S\xi x \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \qquad (13,1)$$

polohu jednoznačně určenu poměry koeficientů

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4, \tag{13,2}$$

z nichž, jak známo, alespoň jeden je od nuly různý. Obráceně každé rovině přísluší v této soustavě tyto poměry jednoznačně. Uspořádané čtyřčíslí $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ můžeme tudíž prohlásiti za čtveřinu homogenních souřadnic roviny ξ vzhledem k uvažované soustavě souřadnic. Význam symbolů $\{\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4\}$ a $\{\xi\}$ buď obdobný k významu symbolů $\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ a $\{x\}$.

Zatím podáme geometrický význam poměrů (13,2) předpokládajíce, že souřadnice jsou rovnoběžkové a že rovina ξ neprochází počátkem O, takže $\xi_4 \neq 0$. Pak můžeme za nehomogenní souřadnice roviny ξ pokládati čísla

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_4}, \quad \eta = \frac{\xi_2}{\xi_4}, \quad \zeta = \frac{\xi_3}{\xi_4}; \tag{13,3}$$

při současném zavedení běžných nehomogenních souřadnic bodových do rovnice (13,1), nabývá táž rovnice tvaru

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0. \tag{13,4}$$

Porovnáme-li jej s úsekovým tvarem (10,7) rovnice roviny, vychází

$$\xi = -\frac{1}{p}, \quad \eta = -\frac{1}{q}, \quad \zeta = -\frac{1}{r}.$$

Jsou tedy nehomogenní rovnoběžkové souřadnice roviny ξ, η, ζ záporně vzaté délky úseků, které rovina ξ utíná na osách souřadnic $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ a které jsou měřeny od počátku O na měřítkách těchto os.

$\xi = \eta = \zeta = 0$ jsou nehomogenní rovnoběžkové souřadnice roviny nevlastní.

Nyní je možno rovnici (13,1) dáti dvojí výklad:

Je-li ξ pevná rovina, jsou poměry (13,2) konstantní a (13,1) je rovnice roviny ξ.

Je-li x pevný bod, jsou poměry $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ konstantní, kdežto (13,2) jsou poměry proměnné, stejně jako rovina ξ, kterou může býti kterákoliv rovina procházející bodem x. Skutečně, (13,1) je nutná i postačující podmínka pro to, aby rovina ξ procházela bodem x. Proto říkáme, že (13,1) je rovnicí bodu x v souřadnicích rovinových nebo rovnicí trsu rovin o vrcholu x.

Tato dvojí interpretace rovnice (13,1) je proto tak jednoduchá, že rovnice (13,1) je *souměrná* vzhledem k řadám proměnných x_i a ξ_i, t. j. po záměně všech ξ_i za x_i a obráceně tato rovnice se nezmění.

Také její význam lze vyjádřiti způsobem, který nevytýká ani bod ani rovinu jako základní prvek prostoru, a to větou:

Rovnice $S\xi x = 0$ je nutná i postačující podmínka pro to, aby bod x a rovina ξ byly incidentní.

Proto ji v dalším budeme nazývati *podmínkou incidence bodu a roviny.*

Také soustava základních vět (*axiomů*), na nichž je vybudována ona část geometrie, která pojednává o incidenci bodů, přímek a rovin v prostoru (*geometrie polohy*), projevuje jistou souměrnost. Snadno lze zjistiti, že v této soustavě axiomů existuje ke každému z nich jiný, t. zv. *duální axiom*, který z původního obdržíme zcela mechanicky záměnou všech pojmů t. zv. *duálními pojmy*. Příkladem takové dvojice duálních axiomů jsou výroky:

Existuje jediná přímka procházející dvěma různými body.	Existuje jediná přímka ležící ve dvou různých rovinách.

Je zřejmé, že z jednoho z obou výroků obdržíme druhý, „přeložíme-li“ jej podle jakéhosi „slovníku“, v kterém si navzájem korespondují pojmy:

bod	rovina
přímka	přímka
přímka procházející bodem	přímka ležící v rovině

K nim připojme další dvojice korespondujících pojmů:

dvojpoměr čtyř bodů ležících na přímce	dvojpoměr čtyř rovin procházejících přímkou
řada bodů na přímce	svazek rovin procházejících přímkou
množství všech bodů v rovině (t. zv. pole bodové)	trs rovinový (množství všech rovin jdoucích bodem)
množství všech přímek v rovině (t. zv. pole přímkové)	trs přímkový (množství všech přímek bodem)
společný bod tří rovin	rovina tří bodů
útvary incidentní útvary neincidentní různoběžky mimoběžky	útvary incidentní útvary neincidentní různoběžky mimoběžky

atd.

Náš slovník je použitelný v obou směrech. „Přeložíme-li" podle něho některou větu dvakrát za sebou, obdržíme větu, z které jsme vyšli. Některé pojmy, na př. přímka nebo incidence, jsou k sobě duální (autoduální). Tak je tomu s celou přímkovou geometrií polohy, která je založena na incidenci přímek.

Z duálnosti axiomů geometrie polohy vyplývá i duálnost jejích vět (pouček, teorémů), které jsou, jak známo, všechny odvozeny z axiomů. Je tedy duálnost jedním z řídících principů, ovládajících celou soustavu geometrie polohy; proto se často nazývá principem duality.

Též v rovinné geometrii polohy existuje princip duality; pojmu bod zde však koresponduje pojem přímka a obráceně.

14. Vzdálenost bodu od roviny. Nejkratší vzdálenost a osa dvou mimoběžek.

Dokážeme větu:

Vzdálenost bodu P_0 o pravoúhlých kartézských souřadnicích $(x_0; y_0; z_0)$ od roviny ϱ o normální rovnici (9,6) je

$$d - x_0 \cos\alpha - y_0 \cos\beta - z_0 \cos\gamma, \qquad (14,1)$$

t. j. záporně vzatá levá strana normální rovnice roviny ϱ, do níž byly dosazeny za souřadnice běžné souřadnice bodu P_0.

Je-li P_0 počátek O, t. j. když $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, je správnost věty zřejmá, neboť podle odstavce 9 číslo $d \geqq 0$ je vzdálenost počátku O od roviny ϱ.

Výraz (14,1) rozděluje body prostoru, neležící v ϱ, na dvě množství: pro body jednoho množství je kladný, pro druhé záporný. K prvému množství zřejmě náleží počátek O (neprochází-li jím ϱ), a — jak snadno lze ověřiti — všechny body ležící na téže straně od ϱ jako počátek O. K druhému množství náležejí všechny body na opačné straně roviny ϱ.

Normální rovnice roviny σ, která je rovnoběžná s ϱ a prochází bodem P_0, je

$$\varepsilon (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) - d_1 = 0, \qquad (14,2)$$

kde $d_1 > 0$ a $\varepsilon = -1$ nebo $\varepsilon = +1$ podle toho, leží-li počátek O v části prostoru mezi rovinami ϱ a σ nebo mimo tuto část. V prvém případě totiž s počátku O na σ spuštěná kolmice k_1 je opačného smyslu než kolmice k na rovinu ϱ, takže směrové kosiny obou kolmic se liší znaménky. V druhém případě obě kolmice se shodují nejen ve směrech, ale i ve smyslech a tudíž i v směrových kosinech.

Bod P_0 leží v σ, proto jeho souřadnice vyhovují rovnici (14,2), takže jest

$$\varepsilon (x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma) - d_1 = 0. \qquad (14,3)$$

Vzdálenost roviny σ od ϱ lze složiti ze vzdáleností počátku O od těchto rovin a vyjádřiti ji výrazem

$$d - \varepsilon d_1;$$

dosadíme-li sem za d_1 podle (14,3), obdržíme (14,1), c. b. d.

Dodatkem k právě dokázané větě poznamenejme, že znaménko vzdálenosti bodu od roviny je kladné nebo záporné podle toho, leží-li daný bod na téže straně roviny ϱ jako počátek nebo na straně opačné.

Máme-li na př. určiti vzdálenost bodu P_0 (1; 1; 1) od roviny $\varrho \equiv 3x - 4y - 12z - 39 = 0$, musíme nejdříve rovnici roviny ϱ uvésti na tvar normální. Za tím účelem je nutno ji násobiti faktorem

$$\lambda = +\frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}.$$

Po tomto násobení záporně vzatá levá strana normální rovnice roviny ϱ je

$$-\frac{3x - 4y - 12z - 39}{13};$$

dosadíme-li do ní $x = y = z = 1$, vychází, že hledaná vzdálenost je $+4$, takže bod P_0 leží na téže straně roviny ϱ jako počátek.

Na výpočet vzdálenosti bodu od roviny lze též převésti úkol, vypočísti t. zv. nejkratší vzdálenost dvou navzájem mimoběžných přímek $\vec{p}$ resp. $\vec{q}$, jež předpokládejme dány parametrickými rovnicemi v pravoúhlých kartézských souřadnicích [srovnej s (6,5)], a to

$$x = x_1 + d_1 \cos\alpha_1,\ y = y_1 + d_1 \cos\beta_1,\ z = z_1 + d_1 \cos\gamma_1$$

resp.

$$x = x_2 + d_2 \cos\alpha_2,\ y = y_2 + d_2 \cos\beta_2,\ z = z_2 + d_2 \cos\gamma_2.$$

Přímka p patrně prochází bodem P_1 $(x_1; y_1; z_1)$, a její směrové kosiny jsou $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$. Podobně přímka q prochází bodem P_2 $(x_2; y_2; z_2)$ a její směrové kosiny jsou $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$.

Připomeňme, že nejkratší vzdálenost d obou mimoběžek se měří na jejich společné kolmici k, která obě protíná. Je-li její průsečík s $\vec{p}$ bod U, s $\vec{q}$ bod V, je $d = \overline{UV}$ hledaná nejkratší vzdálenost.

Abychom ji určili, uvažme rovinu ϱ, která prochází počátkem O soustavy souřadnic a je rovnoběžná s $\vec{p}$ i s $\vec{q}$. Pak kolmice k — nazývá se též osa obou mimoběžek — je normálou roviny ϱ (srovnej s odst. 8); protože je kolmá k $\vec{p}$ i k $\vec{q}$, splňují její směrové kosiny podle (7,4) úměru

$$\cos\alpha_3 : \cos\beta_3 : \cos\gamma_3 = \left\| \begin{matrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{matrix} \right\|$$

a rovnici roviny ϱ lze psáti ve tvaru

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Není to ovšem normální rovnice roviny ϱ. Tu nalezneme snadno násobením předchozí rovnice faktorem $\frac{1}{\sqrt{H}}$, kde

$$H = (\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1\cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \\ - \cos\alpha_1\cos\gamma_2)^2 + (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)^2.$$

Je však podle identity Lagrangeovy (odst. 12)

$$H = (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) - \\ - (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2)^2.$$

Nazveme-li ω úhel přímek $\vec{p}$ a $\vec{q}$ je pak podle (4,3) a (7,1)

$$H = 1 - \cos^2\omega = \sin^2\omega$$

a normální rovnice roviny ϱ zní

$$\varrho(x, y, z) \equiv \frac{1}{\sin\omega}\begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

K určení nejkratší vzdálenosti d postačí nyní vypočísti vzdálenost libovolného bodu přímky $\vec{q}$ od ϱ — na př. bodu $P_2(x_2; y_2; z_2)$ — a odečísti od ní vzdálenost libovolného bodu přímky $\vec{p}$ od ϱ — na př. bodu $P_1(x_1; y_1; z_1)$. Je tedy

$$d = \varrho(x_1, y_1, z_1) - \varrho(x_2, y_2, z_2) = \varrho(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

t. j.

$$d = \frac{1}{\sin\omega}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}. \tag{14,4}$$

K určení polohy osy k mimoběžek $\vec{p}$ a $\vec{q}$ v prostoru postačí udati rovnice rovin ε a φ, z nichž prvá prochází osou k a mimoběžkou $\vec{p}$, druhá osou k a mimoběžkou $\vec{q}$.

Rovnice roviny ε má tvar

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

kde koeficienty A, B, C vyhovují dvěma rovnicím

$$A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1 = 0$$

a

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} = 0,$$

které vyjadřují, že normála roviny ε svírá pravé úhly s přímkami $\overrightarrow{p}$ i k. Z obou těchto rovnic vychází $A:B:C =$

$$= \begin{Vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1, \\ \cos\beta_1\cos\gamma_2 - & \cos\gamma_1\cos\alpha_2 - & \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \\ -\cos\gamma_1\cos\beta_2, & -\cos\alpha_1\cos\gamma_2, & -\cos\beta_1\cos\alpha_2 \end{Vmatrix},$$

čili

$$A:B:C = (\cos\omega\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) : (\cos\omega\cos\beta_1 - \cos\beta_2) : \\ : (\cos\omega\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2).$$

Rovnice roviny ε proto zní

$$\varepsilon(x, y, z) \equiv [(x - x_1)\cos\alpha_1 + (y - y_1)\cos\beta_1 + (z - z_1)\cos\gamma_1] \,. \\ .\cos\omega - [(x - x_1)\cos\alpha_2 + (y - y_1)\cos\beta_2 + (z - z_1)\cos\gamma_2] = 0; \tag{14,5}$$

Výměnou indexů 1, 2 vychází z ní rovnice roviny φ

$$\varphi(x, y, z) \equiv [(x - x_2)\cos\alpha_2 + (y - y_2)\cos\beta_2 + (z - z_2)\cos\gamma_2] \,. \\ .\cos\omega - [(x - x_2)\cos\alpha_1 + (y - y_2)\cos\beta_1 + (z - z_2)\cos\gamma_1] = 0. \tag{14,6}$$

Souřadnice bodu U lze pak vypočísti jako souřadnice průsečíku přímky $\overrightarrow{p}$ s rovinou φ; obdobně V je průsečík přímky $\overrightarrow{q}$ s rovinou ε.

Je tedy možno nejkratší vzdálenost d určiti ze souřadnic bodů U, V přímo.

Nechť na př. dané body jsou $P_1(1; 3; 2)$, $P_2(1; -1; 2)$ a trojice směrových kosinů přímky $\overrightarrow{p}$, resp. $\overrightarrow{q}$ nechť je

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\beta_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{resp.}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\beta_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}},\quad \cos\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Pak jest

$$\cos\omega = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = \tfrac{5}{6},$$

a odtud $\sin\omega = \frac{1}{6}\sqrt{11}$. Ze vzorce (14,4) pak vychází $d = \frac{4}{11}\sqrt{11}$

Rovnice rovin ε, φ podle (14,5) jsou

$$\varepsilon(x, y, z) \equiv x - 7y - 4z + 28 = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) \equiv x + 4y + 7z - 11 = 0.$$

Abychom určili souřadnice bodu U, vložme do rovnice roviny φ

$$x = 1 + \frac{d_1}{\sqrt{6}}, \quad y = 3 - \frac{d_1}{\sqrt{6}}, \quad z = 2 + \frac{2d_1}{\sqrt{6}},$$

což jsou parametrické rovnice přímky $\vec{p}$. Vypočteme tak $d_1 = -\frac{16\sqrt{6}}{11}$ a $U\left(-\frac{5}{11}; \frac{49}{11}; -\frac{10}{11}\right)$. Obdobným počtem nalezneme souřadnice bodu $V\left(-\frac{17}{11}; \frac{45}{11}; -\frac{6}{11}\right)$. Ze souřadnic obou bodů vychází

$$d^2 = \frac{176}{11^2} = \frac{16}{11}, \quad \text{t. j.} \quad d = \frac{4}{11}\sqrt{11},$$

jak též dříve bylo nalezeno.

15. Obsah trojúhelníka a objem čtyrstěnu. V pravoúhlé kartézské souřadnicové soustavě buďtež dány tři body $P_i(x_i; y_i; z_i)$, $(i = 1, 2, 3)$, svými souřadnicemi. Jejich kolmé průměty do roviny ζ tvoří trojúhelník o vrcholech $P'_i(x_i; y_i; 0)$, jehož obsah je

$$\Delta_3 = \tfrac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right] = \\ = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Podobně průmět téhož trojúhelníka do roviny ξ, resp. η má obsah

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{resp.} \quad \Delta_2 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Jsou-li $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ směrové kosiny normály roviny $P_1P_2P_3$, ať již jakkoliv orientované, liší se od nich kosiny odchylek téže roviny od souřadnicových rovin ξ, η, ζ nanejvýše znaménky. Je totiž známo, že odchylka dvou rovin a odchylka jejich kolmic jsou dva úhly buď shodné nebo výplňkové.

Proto, značí-li Δ plošný obsah trojúhelníka $P_1P_2P_3$, je

$$|\Delta_1| = |\Delta \cos\alpha|, \quad |\Delta_2| = |\Delta \cos\beta|, \quad |\Delta_3| = |\Delta \cos\gamma|,$$

neboť plošný obsah kolmého průmětu rovinného obrazce je roven ploše onoho obrazce násobené kosinem odchylky jeho roviny od průmětny.

Umocníme-li poslední tři rovnice dvěma, vychází s ohledem na (4,3) po jejich sečtení

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2, \tag{15,1}$$

t. j.

$$\Delta = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}, \tag{15,2}$$

čímž je hledaný obsah určen až na znaménko.

Je však nutno určiti jednoznačně toto znaménko ve shodě s úmluvami, které jsme dříve učinili, alespoň pro takové trojúhelníky, jejichž rovina neprochází počátkem. Z těchto úmluv vyplývá, že znaménko obsahu Δ je totéž jako znaménko výrazu

$$K = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Podotkněme, že jest $K = 0$ jen tehdy, když body O, P_1, P_2, P_3 leží v jedné rovině; pak znaménko obsahu Δ můžeme voliti libovolně, aniž by tím vznikl spor.

Zbývají případy $K > 0$ a $K < 0$. Prvý z nich nastává jen tehdy, když trojhran $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ má orientaci shodnou s orientací soustavy souřadnic, druhý jen tehdy, jsou-li orientace obou trojhranů různé.

Vypočtěme ještě vzdálenost v počátku O od roviny trojúhelníka $(P_1P_2P_3)$! Tato rovina má podle (10,6) rovnici

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

po rozvedení determinantu podle prvního řádku vychází rovnice

$$2\,(\Delta_1 x + \Delta_2 y + \Delta_3 z) - K = 0. \tag{15,3}$$

K jejímu převedení na tvar normální je nutno ji násobiti faktorem

$$\lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} = \pm \frac{1}{2\,|\,\Delta\,|},$$

a to se znaménkem shodným se znaménkem výrazu K; rozumějme v dalším též pod Δ plošný obsah trojúhelníka $P_1P_2P_3$ s takto zvoleným znaménkem. Pak jest

$$v = \frac{K}{2\Delta} \tag{15,4}$$

kladné číslo, což souhlasí s úmluvou odstavce 9, podle které v normálním tvaru rovnice roviny prostý člen je záporný (není-li nula).

Z vypočteného Δ a v můžeme dále snadno vypočísti objem V čtyrstěnu $OP_1P_2P_3$. Podle známé stereometrické poučky je

$$V = \tfrac{1}{3}\Delta \,.\, v,$$

t. j. podle (15,4)

$$V = \tfrac{1}{6}K$$

čili

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{15,5}$$

Je tedy determinant z devíti souřadnic bodů $P_1P_2P_3$ roven šestinásobku objemu čtyrstěnu $OP_1P_2P_3$. Znaménko tohoto determinantu je kladné či záporné podle toho, má-li trojhran $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ se souřadným trojhranem $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ orientaci souhlasnou nebo nesouhlasnou.

Objem V čtyrstěnu $P_0P_1P_2P_3$ [kde $P_0\,(x_0; y_0; z_0)$ je libovolný další bod] je dán výrazem

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}. \tag{15,6}$$

Dokážeme to takto: Posuneme-li soustavu souřadnic rovnoběžně tak, aby počátek nové soustavy padl do P_0, jsou podle (12,12) nové souřadnice vrcholů čtyrstěnu vyjádřeny symbolem

$$P_i\,(x_i - x_0;\ y_i - y_0;\ z_i - z_0),\quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{15,7}$$

Nyní je možno použíti k výpočtu objemu čtyrstěnu výrazu (15,15), kam ovšem za souřadnice vrcholů $P_1P_2P_3$ jest dosaditi podle (15,7), což bylo dokázati.

I z (15,6) objem čtyrstěnu vychází s určitým znaménkem, není-li $V = 0$ (což nastává jen tehdy, když body $P_0P_1P_2P_3$ leží v jedné rovině). Význam tohoto znaménka je patrný z věty:

Objem (15,6) čtyrstěnu $P_0P_1P_2P_3$ jest kladný nebo záporný podle toho, má-li trojhran $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$ s trojhranem souřadnic $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ orientaci souhlasnou nebo nesouhlasnou.

Jsou-li vrcholy trojúhelníka dány souřadnicemi $P_1\,(1; 2; -3)$, $P_2\,(-3; -1; 2)$, $P_3\,(-2; -3; 1)$ je $K = 18$, $\Delta_1 = \frac{13}{2}$, $\Delta_2 = \frac{1}{2}$, $\Delta_3 = \frac{11}{2}$, $\Delta = -\frac{1}{2}\sqrt{291}$ a trojhran $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}$ má opačnou orientaci než trojhran $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Je-li dán čtvrtý bod $P_0\,(2; 3; 4)$, je objem čtyrstěnu $P_0P_1P_2P_3$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1-2, & 2-3, & -3-4 \\ -3-2, & -1-3, & 2-4 \\ -2-2, & -3-3, & 1-4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1, & -1, & -7 \\ -5, & -4, & -2 \\ -4. & -6, & -3 \end{vmatrix} = -\frac{91}{6} = -15\tfrac{1}{6}$$

a trojhran $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$ má opačnou orientaci než trojhran souřadnic.

16. Duální rovinové útvary. V čtyrstěnových homogenních souřadnicích buďtež $\eta\,(\eta_1; \eta_2; \eta_3; \eta_4)$ a $\zeta\,(\zeta_1; \zeta_2; \zeta_3; \zeta_4)$ dvě různé roviny, takže $\{\eta\} \neq \{\zeta\}$. Množství rovin, které procházejí společnou přímkou $r = (\eta\zeta)$ obou rovin se nazývá svazek rovin o ose r.

Rovina $\xi\,(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ je rovinou svazku o ose r tehdy, když je lineární kombinací kterýchkoliv dvou jeho rovin, na př. η, ζ

$$\xi = \lambda_1\eta + \lambda_2\zeta, \tag{16,1}$$

kde λ_1 a λ_2 jsou dvě konstanty nikoliv současně rovné nule.

Skutečně, je-li x kterýkoliv bod osy r, pak jsou splněny obě podmínky incidence

$$S\eta x = S\zeta x = 0,$$

vyjadřující, že bod x leží v obou rovinách η a ζ.

Je podle (16,1)

$$S\xi x = S\,(\lambda_1\eta + \lambda_2\zeta)\,x = \lambda_1 S\eta x + \lambda_2 S\zeta x = 0,$$

odkud je patrno, že rovina ξ prochází každým bodem přímky r, čili že náleží svazku.

Obráceně, náleží-li ξ svazku o ose r, pak matice

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{Vmatrix} \tag{16,2}$$

je hodnosti *2*, což má za následek platnost symbol. rovnice (16,1).

Předpokládejme, že $\xi' = \lambda'_1\eta + \lambda'_2\zeta$ je čtvrtá rovina, různá od ξ, takže $\lambda_1\lambda'_2 - \lambda'_2\lambda_2 \neq 0$, pak výraz

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\lambda'_2}{\lambda'_1} = \frac{\lambda'_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda'_2} \tag{16,3}$$

opět nazýváme **dvojpoměrem čtveřice rovin** $(\eta\zeta\xi\xi')$.

Platí věta:

Všechny přímky, neprotínající osu svazku rovin, protínají čtyři jeho roviny v čtveřicích bodů, jejichž dvojpoměry jsou stejné a rovny dvojpoměru oné čtveřice rovin.

Body každé z těchto čtveřic béřeme v témž pořádku jako roviny, v kterých leží.

Skutečně, je-li kterákoliv z uvedených přímek určena svými průsečíky y a z s rovinami η a ζ, takže $S\eta y = S\zeta z = 0$, $S\eta z \neq 0$, $S\zeta y \neq 0$, určíme průsečík $\mu_1 y + \mu_2 z$ přímky (yz) s rovinou ξ z rovnice

$$S\xi\,(\mu_1 y + \mu_2 z) = 0,$$

t. j. protože

$$\begin{aligned} S\xi\,(\mu_1 y + \mu_2 z) &= S\,(\lambda_1 \eta + \lambda_2 \zeta)\,(\mu_1 y + \mu_2 z) = \\ &= \lambda_1\mu_1 S\eta y + \lambda_1\mu_2 S\eta z + \lambda_2\mu_1 S\zeta y + \lambda_2\mu_2 S\zeta z = \\ &= \lambda_1\mu_2 S\eta z + \lambda_2\mu_1 S\zeta y, \end{aligned}$$

z rovnice

$$\lambda_1\mu_2 S\eta z + \lambda_2\mu_1 S\zeta y = 0. \tag{16,4}$$

Podobně průsečík $\mu'_1 y + \mu'_2 z$ přímky (yz) s ξ' určíme řešením rovnice

$$\lambda'_1\mu'_2 S\eta z + \lambda'_2\mu'_1 S\zeta y = 0.$$

Z ní a z (16,4) vyplývá

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\mu_2 & \lambda_2\mu_1 \\ \lambda'_1\mu'_2 & \lambda'_2\mu'_1 \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} : \frac{\mu'_2}{\mu'_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} : \frac{\lambda'_2}{\lambda'_1},$$

což bylo dokázati.

Protneme-li svazek rovinou, která neprochází jeho osou r, obdržíme paprskový svazek, pro který z věty právě dokázané plyne:

Přímky, které nenáležejí paprskovému svazku, ale leží v jeho rovině, protínají čtyři jeho paprsky v bodových čtveřicích téhož dvojpoměru. Nazýváme jej též dvojpoměrem oné čtveřice paprsků (srovnej s příkl. 22, 23 a 24).

Buď nyní m $(m_1; m_2; m_3; m_4)$ bod se svými čtyrstěnovými souřadnicemi. Geometrický význam poměrů těchto souřadnic vyjadřuje věta:

Poměr $m_i : m_k$ $(i \neq k)$ čtyrstěnových souřadnic bodu m je roven dvojpoměru těchto čtyř rovin svazku o ose v hraně $x_i = x_k = 0$ souřadnicového čtyrstěnu: 1. Souřadnicové roviny $x_i = 0$; 2. souř. roviny $x_k = 0$; 3. roviny svazku, která obsahuje bod m; 4. roviny svazku, obsahující jednotkový bod g.

Buď na př. $i = 2$, $k = 3$. Pak prvé dvě z uvedených rovin jsou η (0; 1; 0; 0) a ζ (0; 0; 1; 0). Další dvě jsou prvých dvou lineární kombinace

$$m_3\eta - m_2\zeta, \ \eta - \zeta.$$

takže dvojpoměr uvažované čtveřiny rovin jest

$$\frac{-m_2}{m_3} : \frac{-1}{1} = \frac{m_2}{m_3},$$

což bylo dokázati (srovnej s příkl. 46).

Jsou-li η, ζ, φ tři roviny nenáležející jednomu svazku, pak jejich lineární kombinace

$$\xi = \lambda_1\eta + \lambda_2\zeta + \lambda_3\varphi, \tag{16,5}$$

kde alespoň jeden z koeficientů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ je různý od nuly, je čtvrtá rovina trsu, který má vrchol ve společném bodě rovin η, ζ, φ. Obráceně, každou rovinu téhož trsu lze vyjádřiti jako lineární kombinaci kterýchkoliv tří jeho rovin, nenáležejících témuž svazku. Důkaz je zcela analogický důkazu symbol. rovnice (16,1).

Konečně jsou-li $\eta, \zeta, \varphi, \psi$ čtyři roviny nenáležející témuž trsu, lze každou další rovinu ξ v prostoru vyjádřiti jako jejich lineární kombinaci

$$\xi = \lambda_1\eta + \lambda_2\zeta + \lambda_3\varphi + \lambda_4\psi, \tag{16,6}$$

kde alespoň jedno z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ je různé od nuly.

Symbolické rovnice (16,1), (16,5) a (16,6) vyjadřují svazek, trs a prostor rovinový způsobem analogickým (duálním) k výrazům (6,9), (10,1) a (11,1) pro přímou řadu, rovinné pole a prostor bodový; útvary prvé trojice jsou duální k útvarům druhé trojice a obráceně.

Z (16,6) je patrno, že rovinové souřadnice čtyrstěnové lze definovati obdobným (duálním) způsobem k definici bodových čtyrstěnových souřadnic v odst. 11. Kromě stěn souř. čtyrstěnu $\eta, \zeta, \varphi, \psi$ by i zde bylo nutno vytknouti v prostoru jednotkovou rovinu Γ, neprocházející žádným z vrcholů souřadnicového čtyrstěnu. Roviny $\eta, \zeta, \varphi, \psi, \Gamma$ určují rovinovou souřadnicovou soustavu úplně a jednoznačně.

Podmínka, aby roviny $\xi, \eta, \zeta, \varphi$ náležely jednomu trsu, je podle (16,5)

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{16,7}$$

Pokládáme-li v (16,7) roviny η, ζ, φ za pevné, rovinu ξ za proměnlivou, je (16,7) rovnicí trsu, určeného rovinami η, ζ, φ v běžných souřadnicích $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Minor prvku ξ_i v determinantu v (16,7) označme x_i; pak bod $x\,(x_1; x_2; x_3; x_4)$ je vrchol trsu.

Příklady k cvičení.

47. Identitu (12,13) dokažte podle návodu v textu!

48. Odvoďte znovu větu o výpočtu vzdálenosti bodu P_0 od roviny ϱ transformací pravoúhlých kartézských souřadnic (translací, při níž počátek nové soustavy se ztotožňuje s P_0)!

49. V rovnoběžných souřadnicích dány vrcholy čtyrstěnu. $y\,(0; 0; 0; 1)$, $z\,(4; 0; 0; 1)$, $u\,(0; 6; 0; 1)$, $v\,(0; 0; 8; 1)$ a bod $g\,(1; 2; 3; 1)$. Určete čtyrstěnové souřadnice bodu $x\,(-6; 4; -2; 1)$ vzhledem k souř. čtyrstěnu $yzuv$ a jednotkovému bodu g! [Nejdříve se přesvědčte, že žádné čtyři z bodů $yzuvg$ neleží v jedné rovině! Potom určete faktory homogenity rovnoběžkových souřadnic daných bodů tak, aby bod g skutečně byl jednotkový, t. j. aby bylo $g = y + z + u + v$! Naleznete, že je nutno psáti: $y\,(0; 0; 0; 1)$, $z\,(24; 0; 0; 6)$, $u\,(0; 48; 0; 8)$, $v\,(0; 0; 72; 9)$, $g\,(24; 48; 72; 24)$. Hledané čtyrstěnové souřadnice bodu $x \equiv x'$ označme x'_1, x'_2, x'_3, x'_4; vypočtou se ze symbol. rovnice $x = x'_1 y + x'_2 z + x'_3 u + x'_4 v$, t. j. z úměry $24x'_2 : 48x'_3 : 72x'_4 : (x'_1 + 6x'_2 + 8x'_3 + 9x'_4) = -6 : 4 : -2 : 1$, odkud $x'_1 = -75$, $x'_2 = 9$, $x'_3 = -3$, $x'_4 = 1$!]

50. Jaké jsou rovnice rovin $(\vec{x}\,\vec{y})$, $(\vec{y}\,\vec{z})$, $(\vec{z}\,\vec{x})$ a roviny nevlastní v čtyřstěnových, souřadnicích minulého příkladu? [$x'_4 = 0$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$ $x'_1 + 6x'_2 + 8x'_3 + 9x'_4 = 0$.]

51. Jak zní transformační rovnice (12,1) pro přechod od původních k novým souřadnicím příkladu 49? [$x_1 = 24x'_2$, $x_2 = 48x'_3$, $x_3 = 72x'_4$, $x_4 = x'_1 + 6x'_2 + 8x'_3 + 9x'_4$.]

52. Jaký je význam této transformace pravoúhlých kartézských souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= m + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= n + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \\ z &= p + z' \end{aligned}$$

[Posunutí počátku do bodu $(m; n; p)$ a pootočení o úhel α kolem osy $\vec{z'}$.]

53. Jak zní duální věta k větě:

Tři různé rovinové trsy, jejichž vrcholy neleží v téže přímce, mají jedinou rovinu společnou.

[Tři bodová pole, jejichž roviny neprocházejí touž přímkou, mají jediný bod společný.]

Vymyslete jiné příklady dvojic duálních vět!

54. Vyslovte větu *Brianchonovu* jako duální větu k *Pascalově* větě o šesti bodech kuželosečky!

55. Určete vzdálenost bodu P_0 od roviny ϱ!

a) $P_0\,(2; 6; 1)$, $\varrho \equiv 12x + 4y + 3z - 12 = 0$, [$-3$].

b) $P_0\,(2; -2; -3)$, $\varrho \equiv 3x - 4y - 5z = 0$, [$\pm\, 2{,}9\sqrt{2}$].

c) $P_0\,(0; -1; -4)$, $\varrho \equiv 2x - 5y = 0$, $\left[\pm \dfrac{5\sqrt{29}}{29}\right]$.

56. Vypočtěte obsah trojúhelníka $P_1P_2P_3$!

a) $P_1\,(-4; 1; 8)$, $P_2\,(2; 3; -4)$, $P_3\,(5; 4; -6)$, [$-4\sqrt{2}$].

b) $P_1\,(-3; -2; -1)$, $P_2\,(3; 5; 2)$, $P_3\,(6; -2; 0)$, [$\pm\, \frac{7}{2}\sqrt{91}$).

57. Dokažte, že vzorec pro objem čtyřstěnu

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

je totožný s (15,6)! [Odčítejte prvý řádek ode všech ostatních!]

58. Určete objem čtyřstěnu $P_0P_1P_2P_3$!

a) $P_0\,(1; 2; 3)$, $P_1\,(4; 5; 6)$, $P_2\,(3; 3; 3)$, $P_3\,(4; 8; 9)$, $\left[\dfrac{-3}{2}\right]$.

b) $P_0\,(1; 2; 3)$, $P_1\,(-1; 0; 0)$, $P_2\,(0; -2; 0)$, $P_3\,(0; 0; -3)$, [$+4$].

c) $P_0\,(-1; 2; 3)$, $P_1\,(1; -2; 3)$, $P_2\,(1; 2; -3)$, $P_3\,(1; 2; 3)$, [-8].

59. Jak zní rovnice roviny, procházející průsečnicí rovin $5x + 6y - 7z - 3 = 0$, $4x + 2y + 4z - 1 = 0$ a bodem $(5; 6; 7)$? $[14x + 42y - 43z - 21 = 0.]$

60. Ve svazku rovin

$$ax + by + c + \lambda(by + az + c) = 0$$

jest nalézti rovinu kolmou na rovinu $ax + by + cz - 7d = 0$! $\left[\lambda = \dfrac{a^2 + b^2}{ac + b^2}\right]$.

61. Napište rovnice obou rovin, které půlí úhly dvou rovin nikoliv rovnoběžných! [Jsou-li $\varrho(x, y, z) = 0$ a $\sigma(x, y, z) = 0$ normální tvary rovnic obou rovin, mají hledané roviny rovnice $\varrho(x, y, z) \pm \sigma(x, y, z) = 0$].

62. Dokažte, že obě dané roviny minulého příkladu oddělují harmonicky obě roviny souměrnosti svých úhlů!

63. V příkladě 61 jsou rovnice daných rovin $x - 2y + z - 1 = 0$ a $4x + 3y - 4 = 0$. Jak zní rovnice obou rovin půlících jejich úhly? $[(5 \pm 4\sqrt{6})\, x + (-10 \pm 3\sqrt{6})\, y + 5z - (5 \pm 4\sqrt{6}) = 0.]$

64. Určete vzdálenost rovnoběžných rovin $x - 2y + 3z - 6 = 0$ a $x - 2y + 3z + 24 = 0$! $\left[15\dfrac{\sqrt{14}}{7}\right]$.

65. V trsu rovin určete rovinu a) rovnoběžnou s danou rovinou; b) kolmou k dané přímce; c) procházející danou přímkou!

Předpokládejte, že trs je dán rovnicemi $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\varphi = 0$ tří svých rovin v souř. kartézských pravoúhlých! [Udejte rovnice pro $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hledané roviny (16,5)!]

66. Dokažte, že roviny

$$\begin{aligned} -2y + 3z - 4x + 11 &= 0, \\ -7z + 6y + 8x - 23 &= 0, \\ 12x - 10y + 11z + 5 &= 0, \\ 14y + 15z - 16x - 9 &= 0, \end{aligned}$$

náleží jednomu trsu, jehož vrchol určete! [(4; 2; 3)].

67. Použijte čtyřstěnových souřadnic k důkazu věty:

Buď g bod neležící v žádné stěně čtyřstěnu $yzuv$. Rovina (yzg) protíná hranu (uv) v bodě g_{34}. Buď g'_{34} onen bod, který spolu s g_{34} odděluje harmonicky vrcholy u, v. Obdobným způsobem je definováno dalších 5 bodů g'_{ik}, tedy celkem 6 bodů na šesti hranách čtyrstěnu. Všechny tyto body leží v jediné rovině, v t. zv. harmonikální rovině Γ bodu g vzhledem k čtyrstěnu $yzuv$.

[Předpokládejme, že daný čtyrstěn $yzuv$ je souřadnicový s jednotkovým bodem $g = y + z + u + v$! Bod $g_{34} = u + v$, $g'_{34} = u - v$; čtyrstěnové souř. posledně uvedeného bodu jsou $(0; 0; -1; 1)$; další body jsou $g'_{12}(-1; 1; 0; 0)$, $g'_{13}(-1; 0; 1; 0)$, $g'_{14}(-1; 0; 0; 1)$, $g'_{23}(0; -1; 1; 0)$, $g'_{24}(0; -1; 0; 1)$. Z jejich souřadnic snadno zjistíme správnost věty.]

68. Vyslovte větu duální k větě příkladu 67! [Je jejím obrácením!]

69. Mají-li čtyrstěnové bodové i rovinové souřadnice za podklad týž souřadnicový čtyrstěn $yzuv$, takže $\xi_i = 0$ a $x_i = 0$ jsou rovnice protilehlého vrcholu a stěny, platí věta: Rovnice $S\xi x = 0$ vyjadřuje incidenci bodu x s rovinou ξ jen tehdy, když jednotková rovina Γ je harmonikální rovinou jednotkového bodu g vzhledem k souř. čtyrstěnu. Je-li tomu tak, pak obě uvažované souřadnicové soustavy, t. j. bodovou a rovinovou, budeme nazývati přidruženými. Dokažte!

70. Udejte význam poměrů homogenních čtyrstěnových rovinových souřadnic duální k významu poměrů bodových souřadnic, jak byl uveden v odst. 16!

17. Přímkové souřadnice. Lineární útvary přímkové. Vzdálenost bodu od přímky.

a) Buďtež $y\,(y_1; y_2; y_3; y_4)$ a $z\,(z_1; z_2; z_3; z_4)$ dva různé body se svými homogenními souřadnicemi. Z nich utvořená matice

$$\left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix} \right\| \tag{17,1}$$

je hodnosti 2, takže alespoň jeden z jejích minorů druhého řádu

$$p_{ik} = (yz)_{ik} \equiv y_i z_k - y_k z_i, \quad (i \neq k,\ i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{17,2}$$

je různý od nuly.

6 minorů p_{ik} můžeme prohlásiti za homogenní souřadnice přímky $p \equiv (yz)$. Jen tolik jich je totiž lineárně nezávislých, neboť

$$p_{ki} = -p_{ik}.$$

Že jsme byli k uvedené definici souřadnic přímky p oprávněni, je patrno z okolnosti, že při záměně bodů y, z přímky p jinými různými jejími body y', z', které s původními souvisí rovnicemi

$$y = \lambda_1 y' + \lambda_2 z', \qquad z = \mu_1 y' + \mu_2 z', \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

jest

$$(yz)_{ik} = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\,(y'z')_{ik},$$

t. j. původní souřadnice se od nových liší pouhým faktorem homogenity.

Buď q přímka různá od p, u, v buďte dva její body, takže souřadnice přímky $q \equiv (uv)$ jsou minory matice

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{Vmatrix}.$$

Aby přímky p a q měly společný bod, ať již vlastní nebo nevlastní, k tomu je nutno a stačí, aby body $yzuv$ ležely v jedné rovině, t. j. aby podle (10,6) bylo

$$(yzuv) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvedeme-li determinant v této rovnici (nejlépe podle Laplaceovy věty podle prvních dvou řádků — stačí však postupné rozvedení nejdříve podle prvního řádku, po němž následuje rozvedení vzniklých minorů opět podle jejich prvních řádků), vychází odtud podmínka incidence přímek p a q ve tvaru

$$Spq \equiv p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14} = 0 \qquad (17,3)$$

Tato rovnice je zajisté splněna pro $p \equiv q$, t. j. souřadnice p_{ik} nejsou nezávislé, nýbrž splňují rovnici druhého stupně

$$\tfrac{1}{2}Spp \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \qquad (17,4)$$

Protože souřadnice každé přímky ji splňují, je rovnice (17,4) základní důležitosti pro přímkovou geometrii. Je to nutná i postačující podmínka pro to, aby uspořádanému šestičíslí

$$p_{12}; p_{13}; p_{14}; p_{34}; p_{42}; p_{23}, \tag{17,5}$$

z jehož čísel alespoň jedno je od nuly různé, náležela jediná přímka o přímkových souřadnicích (17,5) v dané soustavě souřadnic.

b) Z okolnosti, že základní rovnice (17,4) je druhého stupně, kdežto podmínka incidence (17,3) je lineární v p_{ik}, lze vyvoditi tento důsledek:

Existují dvě přímky (příčky, transversály), protínající čtyři dané přímky, které nemají žádnou zvláštní vzájemnou polohu.

Skutečně, jsou-li q, q', q'', q''' dané přímky, p jejich příčka, splňují její souřadnice p_{ik} rovnici (17,3) a tři rovnice téhož druhu, v nichž koeficienty q_{ik} jsou nahrazeny souřadnicemi q'_{ik} resp. q''_{ik} a q'''_{ik}. Kromě toho souřadnice přímky p splňují ještě základní rovnici (17,4), celkem tedy čtyři rovnice lineární a jednu stupně druhého. Protože souřadnice p_{ik} jsou homogenní, stačí tato soustava pěti rovnic k jejich určení. Obecně existují dvě její řešení, což bylo dokázati.

Je tedy přímková geometrie polohy charakteru kvadratického.

Podotkněme, že rovnice (17,3), v které q_{ik} jsou souřadnice pevné přímky (takže $\frac{1}{2}Sqq = 0$), je rovnicí množství přímek, protínajících přímku q. Souřadnice p_{ik} jsou při tom souřadnice běžné.

Toto množství přímek nazývejme specielním komplexem lineárním, přímku q jeho osou.

Je-li v (17,3) $\frac{1}{2}Sqq \neq 0$, takže čísla q_{ik} nejsou souřadnice přímky, je (17,3) opět rovnicí množství přímek, jež se nazývá obecný lineární komplex přímek.

c) Průsečík přímky p o souřadnicích (17,5) — z nichž na př. $p_{12} \neq 0$ — se stěnou $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) souřadnicového čtyrstěnu je bod

$$p_i\,(p_{i1}; p_{i2}; p_{i3}; p_{i4};), \quad (i = 1; 2; 3; 4,\ p_{ii} = 0). \tag{17,6}$$

Skutečně, utvoříme-li ze souřadnic kterýchkoliv dvou z těchto čtyř bodů, souřadnice jimi určené přímky, je patrno, že to jest přímka p. Na př. body

$$\left.\begin{array}{l} p_1\,(0;\, p_{12};\, p_{13};\, p_{14}) \\ p_2\,(p_{21};\, 0;\, p_{23};\, p_{24}) \end{array}\right\} \tag{17,7}$$

určená přímka p' má souřadnice:

$$p'_{12} = p_{12}^2;\; p'_{13} = p_{12}p_{13};\; p'_{14} = p_{12}p_{14};$$
$$p'_{34} = p_{12}p_{34};\; p'_{42} = p_{12}p_{42};\; p'_{23} = p_{12}p_{23},$$

odkud je patrno, že $p' = p_{12} \cdot p$, nebo při známém smyslu těchto symbolů, rozšířeném na souřadnice přímky, $\{p'\} = \{p\}$, což bylo dokázati.

Kterékoliv tři z bodů (17,6) leží na téže přímce p. Nemohou tudíž jejich souřadnice býti voleny libovolně, neboť matice z nich utvořená musí míti hodnost nejvýše *2*.

Snadno však vychází, že nutná i postačující podmínka pro to je základní rovnice (17,4), která je splněna pro každou přímku.

Z této úvahy vyplývá, že dva z bodů (17,6) lze vyjádřiti jako lineární kombinace zbývajících dvou bodů, jsou-li ovšem různé. Skutečně, je-li $p_{12} \neq 0$, je

$$p_3 = -\frac{p_{23}}{p_{12}}\,p_1 + \frac{p_{13}}{p_{12}}\,p_2,\quad p_4 = -\frac{p_{24}}{p_{12}}\,p_1 + \frac{p_{14}}{p_{12}}\,p_2.$$

Odtud vyplývá, že dvojpoměr d čtveřice bodů $p_1p_2p_3p_4$ je

$$d = \frac{p_{13}p_{24}}{p_{14}p_{23}}. \tag{17,8}$$

Předpokládejme, že $\eta\;(\eta_1;\, \eta_2;\, \eta_3;\, \eta_4)$ a $\zeta\;(\zeta_1;\, \zeta_2;\, \zeta_3;\, \zeta_4)$ jsou dvě roviny procházející přímkou $p \equiv (yz)$. Předpokládáme-li, jak v dalším stále budeme činiti, že používané souřadnice bodové a rovinové jsou navzájem přidružené (viz př. 69), je

$$S\eta y = S\eta z = S\zeta y = S\zeta z = 0. \tag{17,9}$$

Duální úvaha vede k tomu, abychom z minorů matice

$$\left\|\begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{matrix}\right\|,$$

jež označme $\pi_{ik} = \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i$, $(i, k = 1, 2, 3, 4)$, (a o nichž platí rovnice $\pi_{ki} = -\pi_{ik}$, $\pi_{ii} = 0$), utvořené uspořádané šestičíslí

$$\pi_{12}; \pi_{13}; \pi_{14}; \pi_{34}; \pi_{42}; \pi_{23}$$

prohlásili za t. zv. osové souřadnice přímky p (název vznikl z toho, že přímka p je zde definována jako osa $(\eta\zeta)$ svazku rovin určeného rovinami η a ζ).

Jsou to pouze zdánlivě nové souřadnice přímky p, neboť platí úměra

$$\pi_{34} : \pi_{42} : \pi_{23} : \pi_{12} : \pi_{13} : \pi_{14} = p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23}, \quad (17{,}10)$$

takže

$$S\pi\pi \equiv Spp. \quad (17{,}11)$$

K důkazu úměry (17,10) utvořme součet $(k = 1; 2; 3; 4)$

$$\sum_k p_{ik} \pi_{jk} = \sum_k (y_i z_k - y_k z_i)(\eta_j \zeta_k - \eta_k \zeta_j) =$$
$$= y_i \eta_j S\zeta z - y_i \zeta_j S\eta z - z_i \eta_j S\zeta y + z_i \zeta_j S\eta y.$$

V důsledku rovnic (17,9) je však poslední výraz roven nule, kdežto první se vlivem rovnic $p_{ii} = \pi_{jj} = 0$ redukuje na dvojčlen, takže vychází

$$p_{ir}\pi_{jr} + p_{is}\pi_{js} = 0,$$

kde $ijrs$ je jakákoli permutace skupiny cifer 1, 2, 3, 4. Na př. pro permutaci 1, 4, 2, 3 vychází odtud

$$p_{12}\pi_{42} + p_{13}\pi_{43} = 0,$$

t. j.

$$\pi_{34} : \pi_{42} = p_{12} : p_{13},$$

čímž je první část úměry (17,10) dokázána. Z dalších permutací indexů vychází důkaz celé úměry.

Obdobně k čtveřici průsečíků p_i přímky p se stěnami souřadnicového čtyrstěnu, tvoří roviny

$$\pi_i\,(\pi_{i1}; \pi_{i2}; \pi_{i3}; \pi_{i4}), \ (i = 1, 2, 3, 4), \ \pi_{ii} = 0, \quad (17{,}12)$$

čtveřici, jejíž rovina π_i prochází přímkou p a vrcholem souřadnicového čtyrstěnu o rovnici $\xi_i = 0$; všechny souřadnice tohoto vrcholu jsou nuly, pouze $x_i \neq 0$. Je-li $\pi_{12} \neq 0$, jsou roviny π_1 a π_2 různé a roviny π_3 a π_4 je možno vyjádřiti jako jejich lineární kombinace

$$\pi_3 = \frac{\pi_{32}}{\pi_{12}}\pi_1 - \frac{\pi_{31}}{\pi_{12}}\pi_2, \ \pi_4 = \frac{\pi_{42}}{\pi_{12}}\pi_1 - \frac{\pi_{41}}{\pi_{12}}\pi_2.$$

Dvojpoměr čtveřice rovin $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ je tudíž

$$\delta = \frac{\pi_{31}\,\pi_{42}}{\pi_{32}\,\pi_{41}}.$$

S ohledem na úměru (17,10) vyplývá srovnáním se (17,8) rovnice

$$d = \delta$$

a věta:

Je-li p_i průsečík přímky p se stěnou čtyrstěnu a π_i rovina procházející přímkou p a protějším vrcholem čtyrstěnu, pak dvojpoměr čtveřiny průsečíků $p_1p_2p_3p_4$ je roven dvojpoměru čtveřiny rovin $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$.

Věta je k sobě duální.

d) Je-li rovina ξ $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ dána svými souřadnicemi rovinovými a kromě jí přímka p $(p_{12}; p_{13}; p_{14}; p_{34}; p_{42}; p_{23})$, lze jejich společný bod snadno vyjádřiti jako lineární kombinaci bodů p_i $(i = 1; 2; 3; 4)$.

Platí věta:

Průsečík přímky p a roviny ξ je bod

$$p_\xi \equiv \xi_1p_1 + \xi_2p_2 + \xi_3p_3 + \xi_4p_4. \tag{17,13}$$

Skutečně bod p_ξ leží α) na přímce p, neboť jest lineární kombinací čtyř jejích bodů p_i, β) v rovině ξ, neboť jest podle (17,6) a (17,13)

$$S\xi p_\xi = \sum_{i,k} \xi_i\xi_k p_{ik} = 0, \ (i, k = 1; 2; 3; 4)$$

v důsledku vztahů $p_{ik} = -p_{ki}$, $p_{ii} = 0$.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímka p ležela v rovině ξ, je

$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 + \xi_4 p_4 = 0. \tag{17,14}$$

Skutečně z ní plyne $S\xi p_1 = S\xi p_2 = S\xi p_3 = S\xi p_4 = 0$, takže všechny čtyři body p_i leží v ξ, čímž tvrzení je dokázáno.

Duálně, jsou-li π_{ik} osové souřadnice přímky p, π_i ($i = 1; 2; 3; 4$) roviny určené přímkou p a vrcholy souřadnicového čtyrstěnu [srovnej se (17,12)!] a je-li dále x ($x_1; x_2; x_3; x_4$) bod na $p$neležící, pak rovina π_x určená přímkou p a bodem x je lineární kombinace rovin π_i

$$\pi_x = x_1\pi_1 + x_2\pi_2 + x_3\pi_3 + x_4\pi_4. \tag{17,15}$$

Rovnice

$$x_1\pi_1 + x_2\pi_2 + x_3\pi_3 + x_4\pi_4 = 0 \tag{17,16}$$

je nutná a postačující podmínka pro to, aby bod x ležel na přímce p.

Doplňme předchozí úvahu řešením úkolu určiti společnou rovinu ξ, resp. společný bod x dvou různoběžných přímek p, r daných přímkovými, resp. osovými souřadnicemi. Různoběžnost obou přímek je zde vyjádřena podmínkou incidence [viz (17,3)] $Spr = 0$.

Rovina ξ obsahuje všechny body p_i ($i = 1; 2; 3; 4$) přímky p stejně jako všechny body r_i přímky r, takže platí všech 8 rovnic $S\xi p_i = 0$ a $S\xi r_i = 0$. Na př. pro $i = 1$ jsou to s ohledem na (17,6) rovnice

$$\begin{aligned} \xi_2 p_{12} + \xi_3 p_{13} + \xi_4 p_{14} &= 0, \\ \xi_2 r_{12} + \xi_3 r_{13} + \xi_4 r_{14} &= 0, \end{aligned}$$

z nichž vychází

$$\xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \left\| \begin{matrix} p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ r_{12} & r_{13} & r_{14} \end{matrix} \right\|. \tag{17,17}$$

Stejným způsobem při $i = 2$ vychází

$$\xi_1 : \xi_3 : \xi_4 = \left\| \begin{matrix} p_{21} & p_{23} & p_{24} \\ r_{21} & r_{23} & r_{24} \end{matrix} \right\|, \tag{17,17}$$

při $i = 3$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_4 = \begin{Vmatrix} p_{31} & p_{32} & p_{34} \\ r_{31} & r_{32} & r_{34} \end{Vmatrix} \tag{17,17}$$

a konečně při $i = 4$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \begin{Vmatrix} p_{41} & p_{42} & p_{43} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \end{Vmatrix}. \tag{17,17}$$

K skutečnému výpočtu souřadnic ξ_i roviny ξ patrně postačují kterékoliv *2* z úměr (17,17).

Duálně, souřadnice x_i společného bodu x přímek p, r lze vypočísti z jejich osových souřadnic π_{ik} a ϱ_{ik} podle úměr

$$x_2 : x_3 : x_4 = \begin{Vmatrix} \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \varrho_{12} & \varrho_{13} & \varrho_{14} \end{Vmatrix}, \tag{17,18}$$

$$x_1 : x_3 : x_4 = \begin{Vmatrix} \pi_{21} & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \varrho_{21} & \varrho_{23} & \varrho_{24} \end{Vmatrix}, \tag{17,18}$$

atd.

V souvislosti s právě rozřešeným úkolem uvažme množství všech přímek procházejících bodem x a ležících v rovině ξ. Toto množství, jak je známo, je t. zv. **svazek přímek**; je jednoznačně určeno kterýmikoliv dvěma ze svých přímek, na př. přímkami p, r.

Dokažme, že lineární kombinace těchto dvou přímek

$$s = \lambda p + \mu r, \tag{17,19}$$

kde λ a μ nejsou současně nuly, je též přímka svazku.

Především nutno dokázati, že s je přímka, t. j. že $Sss = 0$. Skutečně, protože $Sss = \lambda^2 Spp + 2\lambda\mu Spr + \mu^2 Srr$, je tomu tak, neboť $Spp = Spr = Srr = 0$.

Přímka s náleží svazku, protože ze symbolických rovnic $\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 + \xi_4 p_4 = 0$, $\xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \xi_3 r_3 + \xi_4 r_4 = 0$ resp. $x_1\pi_1 + x_2\pi_2 + x_3\pi_3 + x_4\pi_4 = 0$, $x_1\varrho_1 + x_2\varrho_2 + x_3\varrho_3 + x_4\varrho_4 = 0$ plyne $\xi_1 s_1 + \xi_2 s_2 + \xi_3 s_3 + \xi_4 s_4 = 0$, resp. $x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 + x_4\sigma_4 = 0$, neboť podle (17,19) je $s_i = \lambda p_i + \mu r_i$ (v souřadnicích osových $\sigma_i = \lambda\pi_i + \mu\varrho_i$).

Podobně jsou-li p, r, s tři přímky, z nichž každé dvě jsou různoběžny, takže jest

$$Spp = Srr = Sss = Spr = Sps = Srs = 0 \quad (17,20)$$

je i každá jejich lineární kombinace

$$t = \lambda p + \mu r + \varkappa s, \quad (17,21)$$

kde alespoň jedno z čísel $\lambda, \mu, \varkappa$ je od nuly různé, opět přímka. Skutečně, rovnice $Stt = 0$, t. j. rovnice
$\lambda^2 Spp + \mu^2 Srr + \varkappa^2 Sss + 2\lambda\mu Spr + 2\lambda\varkappa Sps + 2\mu\varkappa Srs = 0$,
je v důsledku rovnice (17,20) splněna při jakýchkoliv hodnotách $\lambda, \mu, \varkappa$.

Množství všech přímek (17,21) jest buď rovinné přímkové pole nebo trs přímek. Prvý případ nastává tehdy, když přímky p, r, s jsou různoběžné tím způsobem, že leží v téže rovině ξ, aniž však náleží jedinému paprskovému svazku, kdežto druhý případ, k prvému duální, nastává, procházejí-li přímky p, r, s týmž bodem x, avšak neleží v jedné rovině.

V prvém případě souřadnice roviny ξ lze vypočísti ze souřadnic prvých dvou přímek, p a r, podle (17,17). V této rovině leží též přímka s, jsou-li splněny rovnice

$$S\xi s_1 = S\xi s_2 = S\xi s_3 = S\xi s_4 = 0$$

čili

$$\begin{vmatrix} p_{12} p_{13} p_{14} \\ r_{12} r_{13} r_{14} \\ s_{12} s_{13} s_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{23} p_{24} p_{21} \\ r_{23} r_{24} r_{21} \\ s_{23} s_{24} s_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{31} p_{32} p_{34} \\ r_{31} r_{32} r_{34} \\ s_{31} s_{32} s_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{41} p_{42} p_{43} \\ r_{41} r_{42} r_{43} \\ s_{41} s_{42} s_{43} \end{vmatrix} = 0, \quad (17,22)$$

z nichž však pouze kterékoliv dvě obecně jsou nezávislé, neboť body s_1, s_2, s_3, s_4 náležejí téže přímce s.

Pokládáme-li v rovnicích (17,22) souřadnice přímky s za běžné, zatím co souřadnice různoběžek p, r jsou konstantní, lze je pokládati za rovnice rovinného pole přímkového, určeného svými dvěma přímkami p, r, v souřadnicích přímkových.

Duálně, rovnice trsu přímek, určeného svými dvěma přímkami p, r, jejichž osové souřadnice jsou π_{ik}, ϱ_{ik}, jsou rovnice (17,22), změněné tím způsobem, že místo p, resp. r, resp. s je všude psáno π, resp. ϱ, resp. σ. V těchto rovnicích

σ_{ik} jsou běžné rovinové souřadnice přímky s, vytvořující trs.

Jsou-li p, r dvě mimoběžné přímky, pak žádná z lineárních kombinací (17,19) není přímka, neboť v takovém případě je $Sss = 2\lambda\mu \,.\, Spr$, kde $\lambda\mu \neq 0$, $Spr \neq 0$, takže i $Sss \neq 0$.

Jsou-li p, r, s tři přímky, z nichž každé dvě jsou mimoběžné, pak v množství jejich lineárních kombinací (17,21) se vyskytují přímky, tvořící t. zv. *regulus* přímek. Skutečně, za učiněných předpokladů, podmínka, aby lineární kombinace (17,21) byla přímka, t, j. podmínka $Stt = 0$, nabývá tvaru

$$\lambda\mu Spr + \lambda\varkappa Sps + \mu\varkappa Srs = 0. \qquad (17,23)$$

Tato rovnice je rovnicí druhého stupně v $\lambda, \mu, \varkappa$, jež jsou souřadnicemi přímek regulu v užším smyslu.

Regulus přímek je útvar k sobě duální; kdybychom užili osových souřadnic, dospěli bychom k rovnici totožné s rovnicí (17,23).

Je zřejmé, že přímky t, tvořící regulus, vyhovují svými souřadnicemi trojici lineárních rovnic a podmínce $Stt = 0$. Obráceně, tři nezávislé lineární rovnice mezi přímkovými souřadnicemi definují regulus.

e) Dosavadní naše úvahy o přímkových a osových souřadnicích náležejí do t. zv. projektivní přímkové geometrie. S prospěchem se však užívá těchto souřadnic k řešení otázek metrických stejně jako v četných aplikacích ve statice a dynamice.

V těchto případech se ovšem užívá souřadnicové soustavy rovnoběžkové. Pak bod $p_4\,(p_{41}; p_{42}; p_{43}; 0)$ je zřejmě bod nevlastní a tři ze souřadnic přímky p, t. j. souřadnice p_{41}, p_{42}, p_{43} jsou její *směrové parametry*. Je-li souřadnicová soustava kartézská pravoúhlá, lze předpokládati, že faktor úměrnosti homogenních souřadnic přímky p byl zvolen tak, aby bylo

$$p_{41}^2 + p_{42}^2 + p_{43}^2 = 1, \qquad (17,24)$$

neboť pouze pro nevlastní přímky je současně $p_{41} = p_{42} = p_{43} = 0$.

Požadavkem (17,24) je faktor úměrnosti určen až na znaménko. Jeho dvojí možné volbě koresponduje dvojí orientace přímky p, jejíž směrové kosiny za předpokladu (17,24) jsou

$$\cos\alpha = p_{41},\ \cos\beta = p_{42},\ \cos\gamma = p_{43}. \tag{17,25}$$

Ze (17,4) plyne, že zbývající tři přímkové souřadnice jsou s jejími směrovými kosiny vázány vztahem

$$p_{23}\cos\alpha + p_{31}\cos\beta + p_{12}\cos\gamma = 0. \tag{17,26}$$

Jako příklad užití přímkových souřadnic k řešení úloh metrických uvedeme určení vzdálenosti bodu $P_0\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ od přímky p, dané přímkovými souřadnicemi, za předpokladu, že souřadnicová soustava je kartézská pravoúhlá a že jsou splněny vztahy (17,24), (17,25), (17,26).

Bodem P_0 procházející rovina ξ, kolmá na p, má normální rovnici

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0,$$

t. j.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0, \tag{17,27}$$

kde

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma \tag{17,28}$$

je vzdálenost počátku O od roviny ξ.

Průsečík P_1 této roviny s přímkou p, čili pata kolmice spuštěné s P_0 na p, je podle (17,13) bod

$$P_1 \equiv p_1\cos\alpha + p_2\cos\beta + p_3\cos\gamma - dp_4,$$

t. j. podle (17,6) bod

$$P_1\,(d\cos\alpha - p_{21}\cos\beta - p_{31}\cos\gamma;\ d\cos\beta - p_{12}\cos\alpha - p_{32}\cos\gamma;\ d\cos\gamma - p_{13}\cos\alpha - p_{23}\cos\beta).$$

Ze souřadnic bodů P_0 a P_1 snadno vypočteme čtverec hledané vzdálenosti $\overline{P_0P_1} = v$ bodu P_0 od přímky p. Po jednoduchém počtu vychází

$$v^2 = p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - d^2 + 2\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ p_{23} & p_{31} & p_{12} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}. \tag{17,29}$$

Na př. k výpočtu vzdálenosti bodu $P_0\,(1;\,2;\,3)$ od přímky $p\,(-3;\ -2-\sqrt{2};\ -1;\ -\sqrt{2};\ -1;\ 4\sqrt{2}+2)$ [srovnej se (17,5) a přesvědč se, že je splněna základní rovnice (17,4)] je nutno nejdříve násobiti souřadnice přímky p faktorem $\pm\dfrac{1}{\sqrt{p_{41}^2+p_{42}^2+p_{43}^2}}=\pm\dfrac{1}{2}$, aby byly splněny vztahy (17,24), (17,25), (17,26). Rozhodneme-li se pro horní znaménko, nové souřadnice přímky p jsou $p_{41}=\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $p_{42}=\cos\beta=$ $=-\frac{1}{2}$, $p_{43}=\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $p_{23}=2\sqrt{2}+1$, $p_{31}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $p_{12}=-\frac{3}{2}$. Dosazením těchto hodnot a souřadnic daného bodu do (17,29) snadno nalezneme

$$v^2=\tfrac{1}{2}\,(9-4\sqrt{2}).$$

Příklady k cvičení.

71. Udejte přímkové souřadnice hrany $x_1=x_2=0$ souřadnicového čtyrstěnu jakož i ostatních hran! [(1; 0; 0; 0; 0; 0) atd.]

72. Napište rovnici speciálního lineárního komplexu, jehož osou je v minulém příkladě uvedená hrana; napište tyto rovnice i pro ostatní hrany souř. čtyrstěnu! [$p_{34}=0$ atd.]

73. Dokažte, že všechny přímky obecného (i speciálního) komplexu, procházející jedním bodem (který v případě spec. komplexu neleží na jeho ose), tvoří svazek přímek! [Jsou-li q_{ik} v (17,3) pevná čísla, y pevný bod, jest rovnice 17,3 lineární v z_1, z_2, z_3, z_4.]

74. Kolika svými přímkami je určen lineární komplex a) obecný, b) speciální? [a) pěti přímkami jednoznačně, b) čtyřmi přímkami dvojznačně.] Kolika svými přímkami je určen regulus? [Třemi.] Jaké jsou každé dvě přímky regulu navzájem? (Mimoběžné.)

75. Dokažte, že dvě rovnoběžné přímky $p \parallel q$ splňují podmínku incidence (17,3)! [Jsou-li souřadnice rovnoběžkové, je

$$p_{41}:p_{42}:p_{43}=q_{41}:q_{42}:q_{43},$$

odkud podle (17,4) platí (17,3), c. b. d.]

76. Jsou-li souřadnice rovnoběžkové, přímka je nevlastní, když $p_{41}=p_{42}=p_{43}=0$. [Z těchto rovnic plyne $y_4=z_4=0$.]

OBSAH.