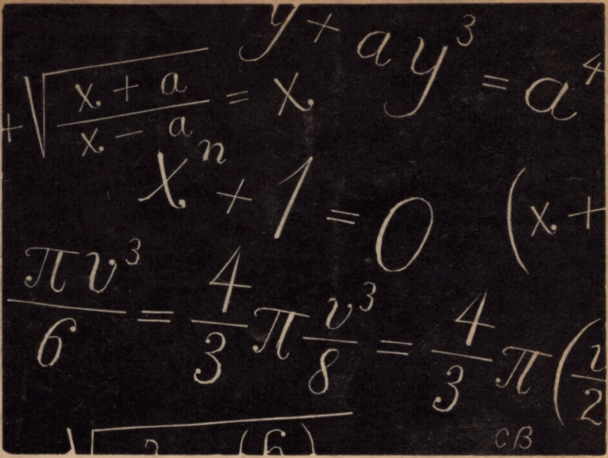
O rovnicích

CESTA K VĚDĚNÍ SV. I.



DR ŠTEFAN SCHWARZ

O ROVNICÍCH

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

K 14

Věnuje autor

CESTA K VĚDĚNÍ

Dr ŠTEFAN SCHWARZ

O ROVNICÍCH

Vyšlo jako 1. svazek sbírky

CESTA K VĚDĚNÍ

vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce

Dra D. IL'KOVIČE, Dra F. VYČICHLO a Dra L. ZACHOVALA

1940

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

PREDMLUVA.

Tato knižka je prvým sväzkom novej sbierky vydávanej Jednotou čes. matematiků a fysiků. Je určená pre žiakov a absolventov najvyšších tried stredných škôl práve tak, ako pre tých, ktorí už majú školské brány dávno za sebou a zaujímajú sa o matematiku ako vedu, alebo ktorí ju pri svojej práci — prírodovedeckej či technickej — potrebujú.

Obsahove nelíši sa mnoho od obvyklých knih podobného druhu. Okrem znalostí priemerného septimána predpokládam iba jedinú vec, totiž vytrvalosť. Chcem popularizovať, nakoľko je ovšem matematiku možno popularizovať. Nikdy nie na úkor presnosti. Ak som niekde vynechal dôkaz (stalo sa tak hlavne pri fundamentálnej vete a pri neriešiteľnosti rovníc piateho stupňa), vždy som na to výslovne upozornil a snažil sa ukázať, kde sú ťažkosti, prečo dôkaz neprevádzam. Chcem čitateľa uviesť nielen do počtárskej, ale i do myšlienkovej podstaty problémov a presvedčiť ho nenásilnou formou, že matematika nie je iba bezmyšlienkovitým premielaním vzorcov a vzorečkov.

Ak v knihe takých malých rozmerov je hodne nad sto príkladov, musí v tom opäť videť úmysel. Čitateľ, ktorý prepočíta príklady, získa nielen počtársku praks, ale pozná i mnoho nových pojmov, pravda, často vyložených na špeciálnych príkladoch. Nezvolil som príklady ľahké. Bezmyšlienkovité užitie odvodených vzorcov nemá (v prvom radu pre náročného čitateľa) mnoho významu.

Je mi milou povinnosťou poďakovať p. doc. dr. *Vl. Knichalovi* a p. doc. dr. *Fr. Vyčichlovi*, ktorí čítali rukopis i korektúru a svojou radou prispeli na mnohých miestach k zdokonaleniu výkladu. *Jednote čes. matematiků a fysiků* ďakujem za pečlivé a vkusné vytlačenie a vydanie.

Bratislava, 19. januára 1940.

Štefan Schwarz.

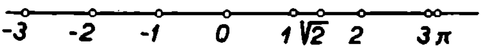
1. Čísla.

Úvod. Základem matematiky jest pojem čísla. Tento pojem jest pro každého absolventa střední nebo odborné školy zdánlivě tak jasný a jednoduchý, že se mu zdá, že je zbytečné o něm vůbec mluviti. Není tomu tak. Jest nutno vyložiti si, jakou asi cestou dospěli jsme k tomu významu pojmu čísla, který mu dnes v elementární matematice dáváme. „Přirozená čísla jsou dána Bohem, vše ostatní jest výmysl lidský“ — to jsou slova slavného matematika J. K. Weierstrasse. Jest tomu vskutku tak.

Od celých kladných t. zv. přirozených čísel 1, 2, 3, . . ., která odpovídají počítání na prstech, oblázcích atd. u lidstva na primitivním stupni vývoje, trvalo dlouho, než jsme se dostali k dnešnímu pojmu komplexního čísla, s kterým nejen v elementární matematice, ale i v technické praxi počítáme.

Uvažujme přirozenou řadu číselnou 1, 2, 3, . . . Sčítáním a násobením prvků této řady dospíváme opět jen k prvkům stejného druhu. Ale již tak elementární početní výkon, jako jest odčítání, vede nás k rozšíření tohoto oboru čísel na čísla záporná a nulu. Abychom pak mohli mluviti o podílu kterýchkoliv dvou čísel, zavádíme zlomky $\frac{p}{q}$, kde p a q jsou čísla celá. Čísla celá jsou pak speciálním případem těchto zlomků. Dostali jsme tak systém elementů, kterým říkáme racionální čísla.

Ale matematická praxe ukazuje, že existují početní výkony, jako na př. odmocňování, logaritmování, kde s racionálními čísly nevystačíme; musíme zavést proto další elementy, t. zv. čísla iracionální (na př. $\sqrt{5}$, π, atd.), jež lze vyjádřiti (na př.) jako nekonečné neperiodické desetinné zlomky. Racionální a iracionální čísla nazýváme pak jediným názvem čísly reálnými. Jejich existence jest geometricky zaručena tím, že každému bodu číselné osy (o které mluvili již staří Řekové) přiřadíme jedno jediné reálné číslo a naopak, každému reálnému číslu jeden jediný bod.



Obr. 1.

Ukáže se však brzo, že kdybychom pod pojmem čísla rozuměli jen reálná čísla, přišli bychom k některým větám, které by neplatily úplně obecně, čímž by nejen věcná, ale i estetická hodnota mnoha vět a vzorců ztrácela na ceně. Tak na př. některé kvadratické rovnice by měly řešení, jiné ne. Rovnice $x^2 + 3x - 4 = 0$ má dva kořeny $x_1 = -4$, $x_2 = +1$, kdežto rovnice $x^2 + 1 = 0$ by neměla žádný kořen (čtverec žádného reálného, ať kladného či záporného čísla není roven -1). Aby výrok: „Každá kvadratická rovnice má dva kořeny" platil úplně obecně, zavádíme symbol $i = +\sqrt{-1}$, mající vlastnost $i^2 = -1$. Říkám výslovně symbol, neboť toto i stane se „číslem" teprve tehdy, když se jednou provždy dohodneme, že jej tak pojmenujeme. Není to číslo v běžném slova smyslu, t. j. mající na př. geometrický význam jako délka úsečky a pod. Je to pouze znak, který zavádíme cestou čistě spekulativní. Číslo i (od nynějška tedy již číslo!) nazýváme imaginární jednotkou. Výraz tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla, nazýváme pak komplexní číslo.

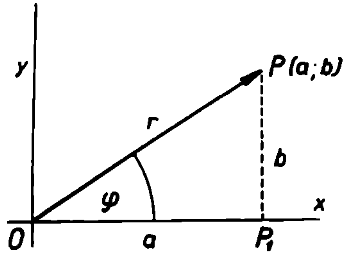
Připomeňme si některé známé vlastnosti kompl. čísel! Kompl. čísla tvoří širší skupinu čísel než čísla reálná, neboť tato dostáváme pro speciální hodnotu $b = 0$. Číslo a jest reálná, číslo b imaginární část komplexního čísla $a + bi$. Dvě komplexní čísla jsou si rovna tenkrát a jenom tenkrát, mají-li stejnou reálnou i imaginární část. S číslem komplexním počítáme úplně stejně jako s číslem reálným, jen pamatujmež, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, . . . Platí:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)\,i,$$
$$(a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)\,i,$$
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)\,(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

Dvě čísla $a + bi$, $a - bi$ nazýváme komplexní sdružená. Jejich součet i součin jsou čísla reálná.

Geometrické znázornění komplexního čísla. Víme, jak dobré služby nám koná geometrické znázornění reálných čísel na ose číselné a jest přirozené, že hledáme analogické geometrické znázornění i pro čísla komplexní $z = a + bi$.*) Toto lehce nalezneme. Mysleme si v rovině pravoúhlý systém souřadnic x, y.

Komplexnímu číslu
$$z = a + bi$$
přiřadíme bod o souřadnicích $P\,(a;\,b)$ a naopak libovolnému bodu P o souřadnicích a, b komplexní číslo
$$z = a + bi.$$



Obr. 2.

Speciálně tedy reálným číslům jsou přiřaděny body osy x (mluvíme o reálné ose); všem číslům tvaru bi (t. zv. ryze imaginárním) přiřaděny jsou body osy y (které proto říkáme osa imaginární). Obrazy dvou čísel komplexních sdružených jsou souměrně sdružené podle reálné osy.

Tento vzájemně jednoznačný vztah mezi body roviny a komplexními čísly bude nám v dalším konati velmi cenné služby.

Libovolný bod P roviny (x, y) může býti charakterisován i jiným způsobem než svými pravoúhlými souřadnicemi $(a;\,b)$. Abychom polohu bodu P dovedli přesně popsati,

*) V dalším budeme často číslo $a + bi$ označovati jediným znakem z. Při tom pamatujeme, že z má reálnou část a, imaginární b.

stačí znáti na př. délku spojnice $r = \overline{OP}$ bodu P s počátkem O, a úhel φ, který svírá polopaprsek $\overrightarrow{OP}$ s kladným směrem osy x.

Úhel φ měříme při tom od 0 do 360°. Ve vyšší matematice jest zvykem nevyjadřovati úhly v stupních, t. j. v míře úhlové, nýbrž v t. zv. míře obloukové, t. j. v délce oblouku jednotkové kružnice, který odpovídá danému úhlu. Obvod jednotkové kružnice jest 2π. Proto úhel 360° jest v míře obloukové roven 2π. Analogicky $180° = \pi$, $45° = \frac{1}{4}\pi$ atd. Tohoto vyjadřování úhlů budeme se v dalším pojednání přidržovati.

Nezáporné číslo $r = \overline{OP}$ nazýváme absolutní hodnotou (nebo též modulem) komplexního čísla $z = a + bi$ a píšeme

$$r = |z| = |a + bi|.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle OP_1P$ plyne

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ t. j. } |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Úhel φ nazýváme amplitudou čísla $a + bi$. Z obr. 2 plyne

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (1)$$

Při tom, aby úhel φ byl až na násobek 360° jednoznačně určen, jest nutno užíti obou rovnic (1); jediná rovnice na př. pro $\sin\varphi$ k tomu nestačí, neboť platí $\sin(180 - \varphi) = \sin\varphi$, takže je-li řešením φ, je řešením i $180 - \varphi$ a nevíme, pro které φ se rozhodnout; to určíme pomocí druhé rovnice.

Z (1) plyne

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi, \text{ tedy } z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Tak získáváme větu:

Každé komplexní číslo z lze psáti ve tvaru

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde r je jeho absolutní hodnota a φ jeho amplituda.

Snadno se přesvědčíme, že toto vyjádření čísla z je jednoznačné (v případě, že $|z| > 0$) to znamená, že z rovnice

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ plyne $r = r'$ za předpokladu, že $r > 0$, $r' > 0$, a že hodnoty φ, φ' jsou reálné. Budeme-li číslo z psáti ve tvaru $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, budeme vždy předpokládati r, φ reálné, $r > 0$.

Rovinu, v níž zobrazení provádíme, nazýváme rovinou Gaussovou, poněvadž Gauss toto zobrazení zavedl.

Moivreova poučka.*) Právě odvozeného vyjádření komplexních čísel užijeme k odvození zajímavého a důležitého vzorce.

Mějme dvě komplexní čísla

$$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Ptáme se, jak určíme amplitudu a modul součinu $z_1 . z_2$ obou čísel. Počítejme podle obvyklých pravidel

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = r_1 . r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 . \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 . \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Slovy: Modul součinu dvou kompl. čísel jest roven součinu modulů obou činitelů; amplituda součinu rovná se součtu amplitud obou činitelů.

Stejně nalezneme, je-li

$$z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$z_1 . z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)]. \tag{2}$$

Mysleme si nyní, že by $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, t. j. $r_1 = r_2 = \ldots = r_n$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n$; z (2) plyne

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{3}$$

*) Abraham de Moivre, franc. matematik, nar. ve Vitry (v Champagni) r. 1667. Po zrušení ediktu nantoského musel, jako protestant, uprchnouti z Francie. Usídlil se v Londýně, kde r. 1754 také zemřel. Byl přítelem Newtonovým a známého astronoma Halleye.

Vzorec (3) se nazývá formulí Moivreovou. Dává vyjádření n-té mocniny komplexního čísla $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde n jest celé, kladné číslo.

Vzorec (3) platí však také pro n celé, záporné. Je totiž — je-li m celé, kladné —

$$z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)} =$$

$$= \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{r^m(\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi)} = r^{-m}(\cos m\varphi - i\sin m\varphi),$$

t. j. $$z^{-m} = r^{-m}[\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)],$$

čímž jest dokázán vzorec (3) pro záporná n.

Pomocí našeho vyjádření komplexních čísel můžeme snadno odmocňovati komplexní čísla. Získáme tak

1. rozšíření vztahu (3) na lomené exponenty,
2. důkaz, že odmocnina komplexního čísla jest opět komplexní číslo (a že tedy, chceme-li neomezeně prováděti odmocňování kompl. čísel, není nutno zaváděti již další symbol analogický číslu i, jak tomu bylo, když jsme chtěli dosáhnouti toho, abychom mohli neomezeně odmocňovati čísla reálná).

Nechť jest tedy dáno komplexní číslo $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$! Hledejme reálná čísla ϱ a ϑ tak, aby

$$\varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}.$$

Ježto n jest celé, máme podle Moivreovy poučky

$$\varrho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$\varrho^n = r, \ \cos n\vartheta = \cos\varphi, \ \sin n\vartheta = \sin\varphi.$$

Odtud $\varrho = \sqrt[n]{r}$, při čemž znakem $\sqrt[n]{r}$ myslíme ono reálné, nezáporné číslo, jehož n-tá mocnina jest r. Druhé dvě rovnice lze psáti ve tvaru

$$\cos n\vartheta = \cos(\varphi \pm 2k\pi), \ \sin n\vartheta = \sin(\varphi \pm 2k\pi),$$
$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

t. j. $\vartheta = \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Z toho však je v podstatě jen n různých hodnot

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \ldots, \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Ostatní se liší od těchto o celistvý násobek 360°.

Platí tedy věta:

n-tá odmocnina libovolného komplexního čísla $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ jest opět komplexní číslo; jeho hodnota jest n-značná a platí vzorec

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{4}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Historická poznámka. Zavedení imaginárních čísel jest dílem teprve 18. století, ačkoliv již Cardano (v polovici 16. stol.) s nimi ve skutečnosti počítal. Mluví se o nich sice později stále, ale velmi opatrně, jako o číslech „nemožných". Teprve Gauss se odhodlal — jsa nucen tolika okolnostmi — zavésti je vědomě do algebry. Písmene i k označení imaginární jednotky zavedl Euler (1777).

Cvičení. 1. Vyjádřete v tvaru $a + bi$ čísla

$$(1 + i)^2, \ \frac{\lambda + \mu i}{\lambda - \mu i}, \ \left(\frac{\lambda + \mu i}{\lambda - \mu i}\right)^2 - \left(\frac{\lambda - \mu i}{\lambda + \mu i}\right)^2!$$

2. Určete modul a amplitudu komplexních čísel

$$i, \ 3i + 4, \ 4i + 3, \ 1, \ -7, \ 3i + 2, \ i + 1!$$

3. Jestliže ve vzorci (3)

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

umocníme levou stranu podle binomické poučky a přirovnáme výrazy na obou stranách, dostáváme vzorce vyjadřující $\sin n\varphi$ a $\cos n\varphi$ jako funkce jednoduchých úhlů. Proveďte nejprve pro $n = 3$, pak obecně!

4. Vyjádřete — užívajíce vzorce (3) — naopak $\cos^4\varphi$ a $\cos^5\varphi$ jako funkci vícenásobných úhlů! [Jest $\cos^4\varphi = \frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{4}{8}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}$; $\cos^5\varphi = \frac{1}{16}\cos 5\varphi + \frac{5}{16}\cos 3\varphi + \frac{10}{16}\cos\varphi$.]

5. Ukažte přímo: $\sqrt{a + bi}$, kde a, b jsou reálná čísla, jest opět komplexní číslo a jeho hodnota jest dvojznačná. [Návod: Položte $\sqrt{a + bi} = x + iy$, kde předpokládáte x, y reálné. Umocněte obě strany, srovnejte a řešte vzniklé rovnice! Vyjde

$$\sqrt{a+bi} = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\right), & \text{je-li } b > 0 \\ \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\right), & \text{je-li } b < 0. \end{cases}$$

Pozor při volbě znaménka!]

6. Ze vztahu $\cos \tfrac{1}{2}\vartheta + i \sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \sqrt{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}$ odvodíte na základě předchozích rovnic ihned známé vzorce

$$\cos \tfrac{1}{2}\vartheta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}, \quad \sin \tfrac{1}{2}\vartheta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}.$$

Proveďte!

7. Nalezněte všechny tři hodnoty $\sqrt[3]{i}$! [$-i$; $+\tfrac{1}{2}i - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$; $+\tfrac{1}{2}i + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$].

8. Pomocí vzorce (4) určete hodnoty $\sqrt[3]{2+2i}$!

9. Dokažte: Je-li $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ platí vztah

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|\,!$$

Sestrojte grafický obraz čísel $z_1, z_2, z_1 + z_2$ v Gaussově rovině a uvažte, jaký jest geometrický význam napsané nerovniny! [Známá věta o velikosti stran v trojúhelníku.]

2. Polynomy.

Rovnice. Ústředním problémem algebry jest nauka o rovnicích. Slova „rovnice" užíváme ovšem ve dvojím různém smyslu. Vztah $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vyjadřující rovnost pravé a levé strany, který platí pro každé a, b, nazývá se rovnicí identickou. Naproti tomu jest $x^2 + 3x + 4 = 0$ vztahem platným jen pro docela určité speciální hodnoty x, je to t. zv. rovnice určovací.

Levá strana takovéto rovnice vyjadřující vztah mezi proměnnou (neznámou) veličinou x a danými konstantami může míti nejrůznější tvar. Dle toho lze určovací rovnice rozděliti na dvě skupiny. Je-li neznámá spjata s konstantami jen pomocí čtyř elementárních početních výkonů (t. zn. sčítání, odčítání, násobení, dělení), t. j. je-li rovnice tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

kde a_i jsou daná, obecně komplexní čísla, anebo jak říkáme, je-li levá strana mnohočlenem (polynomem) n-tého stupně, mluvíme o algebraické rovnici. Není-li levá strana tohoto tvaru, vystupuje-li tedy na př. neznámá jako argument funkcí sin x, log x atd. mluvíme o rovnici transcendentní. (Na př.: $\log x + \sin x + 3^x + 2 = 0$.)

Číslo x, které dosazeno do levé strany rovnice (1) tuto anuluje, nazývá se kořenem (nebo také nulovým bodem) dané rovnice. Naším úkolem bude zabývati se algebraickými rovnicemi. Budeme hledati hlavně její kořeny. Tomuto procesu říkáme řešení rovnic.

V následujících odstavcích musíme promluviti proto nejdříve o některých nejjednodušších vlastnostech polynomů.

Polynomy. Jak právě bylo řečeno, nazýváme výraz

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

polynomem, nebo mnohočlenem. Je-li $a_0 \neq 0$ říkáme, že $P(x)$ je polynom n-tého stupně. Je-li $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, říkáme, že polynom $P(x)$ identicky vymizí. Ze střední školy známe nejjednodušší operace, jako sčítání, odčítání, násobení a dělení dvou mnohočlenů. Všimněme si tohoto posledního výkonu.

Mějme dva mnohočleny $P_1(x)$, $P_2(x)$ stupňů m, n a nechť $m > n$. Právě tak, jako u obyčejných čísel, jest možno polynom $P_1(x)$ děliti polynomem $P_2(x)$. Jestliže dělení provedeme, dostáváme nějaký polynom $Q(x)$ a zbytek $R(x)$, který jest nižšího stupně než polynom $P_2(x)$. Vzorcem

$$P_1(x) = P_2(x) \,.\, Q(x) + R(x). \tag{2}$$

Příklad. $P_1(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $P_2(x) = x^2 + 2x + 2$

$$\begin{array}{l}
(2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) : (x^2 + 2x + 3) \doteq 2x - 1 \\
\underline{\pm\, 2x^3 \pm 4x^2 \pm 6x} \\
\qquad\;\; - x^2 - 4x + 1 \\
\qquad\;\; \underline{\mp\, x^2 \mp 2x \mp 3} \\
\qquad\qquad\;\; - 2x + 4
\end{array}$$

Jest tedy $Q(x) = 2x - 1$, $R(x) = -2x + 4$. Tedy

$$2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x + 3)(2x - 1) + (-2x - 4).$$

Poznamenejme, že zde i v dalším jde o dělení vzhledem k x, t. j. právě tak, jako v provedeném příkladě, můžeme děliti na př. i polynomy $(\sqrt{2}x^3 + \log 2 \,.\, x + 3) : (\pi x^2 + 3i + 1)$ a pod. Jest ovšem jasné, že koeficienty podílu a zbytku budou čísla složená z koeficientů dělence a dělitele jen prvními čtyřmi racionálními operacemi.

Může se státi, že polynom $R(x)$ vyjde roven nule. Pak je

$$P_1(x) = Q(x) \,.\, P_2(x).$$

V tomto případě, kdy tedy dělení „vyjde beze zbytku", říkáme, že polynom $P_1(x)$ jest dělitelný polynomem $P_2(x)$.

Zvláště zajímavé jest dělení polynomu $P(x)$ speciálním lineárním polynomem $x - \alpha$, kde α jest nějaké komplexní číslo. Bude jako v (2)

$$P(x) = (x - \alpha) \, . \, Q(x) + R. \tag{3}$$

Zbytek R musí býti nižšího stupně než $x - \alpha$, t. j. stupně 0-tého, tedy **konstanta**. Její hodnotu však snadno určíme. Dosaďme do (3) $x = \alpha$; máme ihned $P(\alpha) = R$, tedy

$$P(x) = (x - \alpha) \, . \, Q(x) + P(\alpha).$$

Jestliže nyní $P(\alpha) = 0$, jest $P(x)$ dělitelné $x - \alpha$. A naopak: Jestliže $P(x)$ má býti dělitelné $(x - \alpha)$, musí $P(\alpha) = 0$. Máme větu:

Polynom $P(x)$ jest dělitelný výrazem $x - \alpha$ tehdy a jenom tehdy, když α jest kořenem rovnice $P(x) = 0$.

Cvičení. 1. Dokažte, že polynom

$$2x^5 - 17x^4 + 23x^3 - 18x^2 + 29x - 6$$

je dělitelný $x - 7$!

2. Polynom

$$x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$$

je dělitelný $x - 2$. Dokažte!

Největší společný dělitel (společná míra) dvou polynomů. Dány jsou dva polynomy $f_1(x)$, $f_2(x)$. Může se státi, že existuje polynom $g(x)$, kterým jest jak $f_1(x)$, tak také $f_2(x)$ dělitelné. Polynom $g(x)$ nazýváme společným dělitelem (společnou mírou) obou polynomů $f_1(x)$, $f_2(x)$.

Jestliže dva polynomy mají společný kořen α, pak mají jistě společný dělitel. Podle předchozí věty jsou totiž oba dělitelné výrazem $x - \alpha$. Může se ovšem státi, že mají i dělitele vyššího stupně.

Takový společný dělitel, který jest dělitelný každým jiným společným dělitelem, nazývá se největší společný dělitel (největší společná míra) obou polynomů. Dva polynomy, které až na konstantu nemají společného dělitele, nazýváme nesoudělnými.

Ptáme se, jak lze nalézti největší společný dělitel dvou daných polynomů.

K tomu slouží známý **Eucleidův algoritmus postupného dělení.**

Nechť $f_1(x)$ jest vyššího stupně než $f_2(x)$, pak dle (3) lze psáti

$$f_1(x) = Q_1 f_2(x) + f_3(x),$$

kde $f_3(x)$ jest nižšího stupně než $f_2(x)$. Nyní dělíme $f_2(x)$ polynomem $f_3(x)$ atd. Máme po řadě

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= Q_2 f_3(x) + f_4(x)\\
f_3(x) &= Q_3 f_4(x) + f_5(x)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f_{\nu-4}(x) &= Q_{\nu-4} f_{\nu-3}(x) + f_{\nu-2}(x)\\
f_{\nu-3}(x) &= Q_{\nu-3} f_{\nu-2}(x) + f_{\nu-1}(x)\\
f_{\nu-2}(x) &= Q_{\nu-2} f_{\nu-1}(x) + f_\nu.
\end{aligned}$$

Stupně polynomů $f_3, f_4, f_5, \dots$ se stále zmenšují. Jednou přijdeme proto k případu, že stupeň zbytku bude 0, tedy zbytek konstantou. Nechť jest to f_ν. Jsou dvě možnosti:

α) $f_\nu = 0$; pak $f_{\nu-1}(x)$ jest největším společným dělitelem $f_1(x)$ a $f_2(x)$.

Důkaz. Předně jest $f_{\nu-1}$ společným dělitelem. Z rovnic plyne totiž

$$f_{\nu-2} = Q_{\nu-2} f_{\nu-1}, \text{ t. j. } f_{\nu-2} \text{ je dělitelné } f_{\nu-1},$$

dále

$$f_{\nu-3} = (Q_{\nu-3} Q_{\nu-2} + 1) f_{\nu-1}, \text{ t. j. } f_{\nu-3} \text{ je dělitelné } f_{\nu-1},$$

$$f_{\nu-4} = (Q_{\nu-2} Q_{\nu-3} Q_{\nu-4} + Q_{\nu-2} + Q_{\nu-4}) f_{\nu-1}, \text{ t. j. } f_{\nu-4} \text{ je dělitelné } f_{\nu-1} \text{ atd.}$$

Takto postupujíce zjistíme nakonec, že i $f_1(x)$ a $f_2(x)$ jsou dělitelné $f_{\nu-1}$. Máme-li obráceně jakýkoliv polynom $g_1(x)$, který dělí $f_1(x)$ a $f_2(x)$, plyne z první rovnice $f_1 - Q_1 f_2 = f_3$, že $g_1(x)$ dělí také $f_3(x)$, z další rovnice, že $g_1(x)$ dělí $f_4(x)$, atd., nakonec také, že $g_1(x)$ dělí $f_{\nu-1}(x)$.

Podle definice jest tedy $f_{\nu-1}(x)$ největším společným dělitelem obou polynomů $f_1(x)$ a $f_2(x)$, c. b. d.

β) $f_\nu \neq 0$ (a rovno nějaké konstantě). Pak oba polynomy jsou nesoudělné.

Důkaz: Kdyby oba polynomy měly nějaký nekonstantní společný dělitel $g_1(x)$, nalezneme stejně jako dříve, že $g_1(x)$ dělí kromě $f_1(x)$ a $f_2(x)$ též všechna $f_3, f_4, \ldots, f_{\nu-2}, f_{\nu-1}$ a tedy také $f_\nu (= f_{\nu-2} - Q_{\nu-2} f_{\nu-1})$, což jest nemožné, neboť f_ν, jakožto pouhá konstanta ($\neq 0$), nemůže být dělitelná polynomem v x.

Poznamenejme výslovně:

Největší společný dělitel dvou polynomů dovedeme nalézti pouhým užitím racionálních operací (t. j. sčítáním, odčítáním, násobením a dělením).

Cvičení. 1. Určete největší společný dělitel mnohočlenů $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 4$, $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$. [$x^2+1$].

Lineární faktory polynomu. V odstavci o polynomech jsme ukázali: Má-li polynom $f(x)$ stupně n-tého kořen α_1, lze psáti

$$f(x) = (x - \alpha_1)\, f_1(x), \tag{4}$$

kde $f_1(x)$ jest stupně $(n - 1)$-ho s nejvyšším koeficientem a_0. Toto poslední plyne přirovnáním obou stran.

Má-li polynom $f_2(x)$ nějaký kořen α_2, lze psáti analogicky

$$f_1(x) = (x - \alpha_2) \,.\, f_2(x) \text{ atd.}$$

Jestliže tedy všecky polynomy $f, f_1, f_2, \ldots$ mají kořeny, lze psáti

$$f(x) = a_0\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

Odtud plyne pro řešení rovnice n-tého stupně

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0\,(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n) = 0$$

(kde ovšem není $a_0 = 0$) věta:

Rovnice n-tého stupně nemůže míti více než n kořenů.

Jednoduchý důsledek: Jestliže tedy nalezneme pro nějaký algebraický výraz v proměnné x n-tého stupně více než n nulových bodů, je to možné jen tak, že $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$, čili: jestliže polynom $a_0x^n + \ldots + a_n$ vymizí pro více než n hodnot x, vymizí nutně identicky.

Cvičení. 1. Napište rovnici pátého stupně, která má za kořeny čísla -1; 2; 3; $-\frac{3}{4}$; -5!

2. Nalezněte algebraickou rovnici s racionálními koeficienty v a, které hoví funkce

α) $\sqrt{a} + \sqrt{\dfrac{1}{a}}$,

β) $\sqrt{a + \sqrt{a}}$ $\quad [x^4 - 2ax^2 + a^2 - a = 0]$,

γ) $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$.

Mnohonásobné kořeny; derivace. V rovnici (4)

$$f(x) = (x - \alpha) \,.\, f_1(x)$$

může se státi, že polynom $f_1(x)$ má opět týž kořen α, t. j., že platí

$$f(x) = (x - \alpha)^2 f_2(x).$$

Obecněji jest možné, že z polynomu $f(x)$ lze vytknouti $(x - \alpha)$ v mocnině právě r-té, t. j. platí

$$f(x) = (x - \alpha)^r \,.\, f_r(x), \; f_r(\alpha) \neq 0.$$

V tomto případě — z důvodů, které později vysvitnou — říkáme, že daná rovnice má r-násobný kořen α.

Jest otázkou, jak se pozná, má-li daná rovnice takový vícenásobný kořen.

Vícenásobnost kořene souvisí úzce s jistým pojmem známým z diferenciálního počtu — totiž s pojmem derivace.

Jest vždy snahou algebry, nevypůjčovati si potřebných pojmů z jiných partií matematiky (a zvláště ne z těch, kde se operuje s pojmem limity). Proto budeme si definovati tento pojem nezávisle na diferenciálním počtu, více méně čistě formálně — ale ovšem tak, že obě definice ve skutečnosti souhlasí.

Derivací polynomu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \text{*)}$$

(přesněji jeho první derivací) budeme rozuměti polynom

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

*) Přehodili jsme pro pohodlnost — jen v tomto odstavci — označení koeficientů.

Pro proces takto definovaný lehce se dokáže platnost těchto pravidel

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \qquad (5)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \qquad (6)$$

První vztah jest evidentní. Druhého nebudeme potřebovati, proto jej nedokazujeme. Budeme však potřebovati, čemu se rovná derivace výrazu $b\,(x - \alpha)^n$. Umocněme dle binomické poučky; jest

$$b\left[x^n - \binom{n}{1} x^{n-1}\alpha + \binom{n}{2} x^{n-2}\alpha^2 - \ldots + (-1)^n \alpha^n\right].$$

Dle definice derivace jest $[b\,(x - \alpha)^n]'$ rovno výrazu

$$b\left[n\,x^{n-1} - (n-1)\binom{n}{1} x^{n-2}\alpha + (n-2)\binom{n}{2} x^{n-3}\alpha^2 - \ldots\right] =$$

$$= bn\left[x^{n-1} - \binom{n-1}{1} x^{n-2}\alpha + \binom{n-1}{2} x^{n-3}\alpha^2 - \ldots\right] =$$

$$= b \cdot n\,(x - \alpha)^{n-1}.$$

Užili jsme při tom vztahu

$$(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{n-k-1} = n\binom{n-1}{k}.$$

Tedy

$$[b\,(x - \alpha)^n]' = b \cdot n\,(x - \alpha)^{n-1}. \qquad (7)$$

Analogicky k první derivaci zavedeme další pojem. **Druhou derivací** polynomu $f(x)$ budeme rozuměti derivaci z první derivace; obecně **r-tou derivací** daného polynomu budeme rozuměti derivaci z $(r - 1)$-ní derivace.

Jest tedy, zavedeme-li snadno pochopitelné označení ($f^{(n)}(x)$ značí n-tou derivaci funkce $f(x)$)

$$f''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \ldots + n\,(n-1)\,a_nx^{n-2},$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \ldots + n\,(n-1)\,(n-2)\,a_nx^{n-3},$$

atd.

Jest viděti, provedeme-li tento proces n-kráte za sebou, že dostaneme nakonec konstantu

$$f^{(n)}(x) = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!\,a_n.$$

Všechny další derivace klademe rovny nule.

Příklad:
$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1\\
f'(x) &= 4x^3 + 9x^2 - 4x + 3\\
f''(x) &= 12x^2 + 18x - 4\\
f'''(x) &= 24x + 18\\
f^{(4)}(x) &= 24\\
f^{(5)}(x) &= f^{(6)}(x) = \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Abychom se nyní přiblížili o další krok k odpovědi na shora položenou otázku, odvodíme si t. zv. větu Taylorovu.

Nechť jest dán polynom

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

a libovolné číslo α. Ptáme se, je-li možno polynom $f(x)$ vyjádřiti v tvaru

$$b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(x-\alpha)^2 + \ldots + b_n(x-\alpha)^n,$$

t. j. je-li možno určiti koeficienty $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ tak, aby platilo identicky

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n =\\
&= b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(x-\alpha)^2 + \ldots + b_n(x-\alpha)^n.
\end{aligned} \tag{8}$$

Ukážeme, že to lze, a to dokonce ve velmi jednoduchém tvaru.

Vztah (8) má platiti identicky, t. j. pro každé x. Umocníme-li pravou stranu (8) a srovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin x, vidíme: koeficient u x^n na levé straně jest a_n, na pravé b_n, tedy $b_n = a_n$. Srovnáváme-li dále koeficienty u x^{n-1}, $x^{n-2}, \ldots$ atd., dostáváme po řadě hledané koeficienty b_i vždy jako řešení jisté lineární rovnice. Takových rovnic jest $n + 1$, z nich lze koeficienty b_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ úplně vypočítati. Jest tedy vyjádření (8) možné. Zbývá jen určiti jednoduše koeficienty b_i.

Abychom nalezli koeficient b_0, dosaďme do vztahu (8) $x = \alpha$. Je

$$f(\alpha) = b_0.$$

Derivujme nyní vztah (8) [užívajíce vztahu (5) a (7)]! Dostaneme

$$f'(x) = b_1 + 2b_2 (x - \alpha) + \ldots + nb_n (x - \alpha)^{n-1} \tag{9}$$

a dosaďme $x = \alpha$, jest

$$f'(\alpha) = b_1.$$

Derivujme dále

$$f''(x) = 2 \,.\, 1 \,.\, b_2 + 3 \,.\, 2b_3 (x - \alpha) + \ldots + \\ + n(n-1)\, b_n(x - \alpha)^{n-2};$$

pro $x = \alpha$,

$$f''(\alpha) = 2 \,.\, 1 \,.\, b_2.$$

Postupně získáme tak všechny koeficienty, totiž

$$b_0 = f(\alpha),\ b_1 = \frac{1}{1!} f'(\alpha),\ b_2 = \frac{1}{2!} f''(\alpha), \ldots, b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha).$$

Úhrnem tedy:

Je-li dán polynom $f(x)$ n-tého stupně a libovolné číslo α, lze vždy psáti tuto identicky platnou rovnost

$$f(x) \equiv f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} \,.\, (x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!} (x - \alpha)^2 + \\ + \frac{f'''(\alpha)}{3!} (x - \alpha)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n \tag{10}$$

[t. zv. Taylorův*) rozvoj funkce $f(x)$ dle mocnin $(x - \alpha)$].

Příklad: V našem příkladě volme na př. $\alpha = 1$. $f(1) = 6$, $f'(1) = 12$, $f''(1) = 26$, $f'''(1) = 42$, $f^{(4)}(1) = 24$. Platí tedy identicky

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 6 + \frac{12}{1!}(x - 1) + \frac{26}{2!}(x - 1)^2 + \\ + \frac{42}{3!}(x - 1)^3 + \frac{24}{4!}(x - 1)^4.$$

---

*) Brook Taylor (1685—1731), anglický matematik.

Vraťme se nyní k otázce, kterou jsme si položili. Kdy jest kořen $x = \alpha$ r-násobným kořenem dané rovnice? T. j., kdy lze z daného polynomu vytknouti právě činitele $(x - \alpha)^r$? Taylorův rozvoj (10), kde za α si myslíme náš kořen, dává ihned odpověď. Aby z polynomu (10) bylo možno vytknouti právě $(x - \alpha)^r$, k tomu jest nutno a stačí, aby

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0, \text{ ale aby } f^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Aby rovnice $f(x) = 0$ měla kořen α právě r-násobný, jest nutno a stačí, aby platilo

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Tuto podmínku lze formulovati také jinak. Je-li totiž na př. α dvojnásobným kořenem $f(x) = 0$ musí býti $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, t. j. oba polynomy $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ mají společného dělitele $(x - \alpha)$; odtud věta:

Má-li rovnice $f(x) = 0$ r-násobný kořen, mají polynomy $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r-1)}(x)$ společného dělitele.

Ježto $f^{(r-1)}(x)$ lze považovati za $(r - 2)$-hou derivaci polynomu $f'(x)$, plyne dále z téže věty:

Je-li kořen α r-násobným kořenem rovnice $f(x) = 0$, jest $(r - 1)$-násobným kořenem rovnice $f'(x) = 0$, $(r - 2)$-násobným kořenem $f''(x) = 0$ atd. . ., jednoduchým kořenem rovnice $f^{(r-1)}(x) = 0$.

Ukážeme nyní, jak lze na základě předešlých úvah postupným hledáním společného dělitele z rovnice vícenásobné kořeny odstraniti. Nechť rovnice má kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ jednoduché, $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$ dvojnásobné, . . ., $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ r-násobné. Pak, jak víme, lze psáti

$$f(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_\nu) [(x - \beta_1) \ldots (x - \beta_\mu)]^2 \ldots$$
$$\ldots [(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_\sigma)]^r \cdot P(x),$$

kde $P(x)$ jest polynom, který již nemá žádných kořenů. [V následujícím odstavci uvidíme, že to není možné a že

$P(x)$ musí býti konstantou, ale zatím ten případ nesmíme vylučovati. Pro náš účel na tomto místě je to stejně bez významu.]

Sestrojme si derivaci $f'(x)$. Tato rovnice má za kořeny všechny vícenásobné kořeny rovnice $f(x) = 0$, ale — dle poslední věty — v násobnosti o jednotku nižší.*) Největší společný dělitel $f(x)$ a $f'(x)$ obsahuje tedy souhrn všech kořenů dané rovnice, ale každý v násobnosti o jednotku menší**). Dělíme-li tímto největším společným dělitelem danou rovnici, zbývá rovnice $F(x) = 0$, která má za kořeny všechny kořeny dané rovnice, ale každý jen jednoduchý. Tedy:

Racionálními operacemi lze z dané rovnice získati rovnici, která má tytéž kořeny jako rovnice daná, ale každý jen jednoduchý.

Odtud tedy vyplývá:

Ve všech dalších úvahách lze se omeziti na rovnice s kořeny vesměs jednoduchými. To také budeme mlčky činiti:

Příklad. Jest dána rovnice

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Máme zjistiti, má-li vícenásobné kořeny. Jestli ano, jest udati rovnici, která má tytéž kořeny jako $f(x) = 0$, ale každý jen jednoduchý.

Hledejme největší společný dělitel $f(x)$ a $f'(x)$, t. j. $f(x)$ a $5x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 12x + 5$ užitím Euklidova algoritmu. Abychom však při dělení dostali celočíselné koeficienty, násobme $f(x)$ číslem 25; dělíme

$$\begin{array}{l}
(25x^5 + 75x^4 - 50x^3 - 150x^2 + 125x - 25) : (5x^4 + 12x^3 - \\
\qquad\qquad - 6x^2 - 12x + 5) \doteq 5x + 3 \\
\underline{\pm 25x^5 \pm 60x^4 \mp 30x^3 \mp 60x^2 \pm 25x} \\
\qquad 15x^4 - 20x^3 - 90x^2 + 100x - 25 \\
\qquad \underline{- 15x^4 \pm 36x^3 \mp 18x^2 \mp 36x \pm 15} \\
\qquad\qquad - 56x^3 - 72x^2 + 136x - 40 = 8\,(- 7x^3 - \\
\qquad\qquad\qquad - 9x^2 + 17x - 5).
\end{array}$$

*) Tedy $f'(x)$ nemá již za kořeny jednoduché kořeny rovnice $f(x) = 0$.

**) Speciálně neobsahuje tedy již kořenů jednoduchých.

Dělíme dále $f'(x)$ zbytkem (abychom však při dělení nedostali zlomky, násobme resp. dělme opět oba polynomy *49* resp. *8*).

$$
\begin{array}{l}
(245x^4 + 588x^3 - 294x^2 - 588x + 245) : (-7x^3 - 9x^2 + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 17x - 5) \doteq -35x - 39 \\
\underline{\pm 245x^4 \pm 315x^3 \mp 595x^2 \pm 175x} \\
\qquad\qquad 273x^3 + 301x^2 - 763x + 245 \\
\qquad\quad \underline{\pm 273x^3 \pm 351x^2 \mp 663x \pm 195} \\
\qquad\qquad\qquad - 50x^2 - 100x + 50 = -50(x^2 + 2x - 1)
\end{array}
$$

Dělme konečně

$$
\begin{array}{l}
(-7x^3 - 9x^2 + 17x - 5) : (x^2 + 2x - 1) = -7x + 5 \\
\underline{\mp 7x^3 \mp 14x^2 \pm 7x} \\
\qquad\quad 5x^2 + 10x - 5 \\
\quad \pm \underline{5x^2 \pm 10x \mp 5} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dělení vyšlo beze zbytku: $f(x)$ a $f'(x)$ mají největší společný dělitel

$$F(x) = x^2 + 2x - 1.^{*})$$

Dělme tedy dále $f(x) : F(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$. Toto jest polynom, který má tytéž nulové body jako $f(x) = 0$, ale každý jen jednoduchý.**)

Poznámka. Lze dokonce získati souhrn jednotlivých faktorů jednotlivých násobností. Tak na př. souhrn jednoduchých faktorů dané rovnice nalezneme takto: Největší společný dělitel $f(x)$ a $f'(x)$ má kořeny, které byly u $f(x)$ dvojnásobné, za jednoduché, kdežto kořeny, které byly jednoduché, nejsou již kořeny tohoto společného dělitele. Největší společný dělitel $F(x)$ a tohoto dělitele obsahuje tedy všechny kořeny s výjimkou jednoduchých kořenů, a to každý jednoduchý (neboť kořeny $F(x)$ jsou jednoduché). Dělíme-li tímto výrazem $F(x)$, dostáváme hledaný souhrn. [Dle našeho odvození by po případě mohl býti násoben ještě faktorem nemajícím vůbec kořeny — ale jak uvidíme, to nenastane.]

---

*) Během počítání jsme sice násobili resp. dělili rovnice čísly *25*, *8*, *49*, *50*; výsledek musí míti však nutně koeficient u x^2 rovný *1*, jak vidno z daného polynomu $f(x)$. Úkol: Proveďte dělení bez toho, že byste dříve násobili a ukažte, že dostáváte v podstatě tytéž výrazy jako v textu.

**) Ostatně nahlédneme nyní již snadno, že

$$x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = (x^2 + 2x - 1)^2 (x - 1).$$

Cvičení: **1.** Ukažte, že $x = 2$ jest trojnásobným kořenem rovnice $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$. Rozložte levou stranu dané rovnice! $[(x - 2)^3 (x + 1).]$

2. Stanovte vícenásobné kořeny rovnice

$$x^8 + 2x^6 - 2x^2 - 1 = 0!$$

[$(x^2 - 1)(x^2 + 1)^3$; určete nejdřív polynom $F(x)$ ($= (x^2 + 1)^2$); potom jím dělte $f(x)$ a výsledek rozložte!]

3. Určete vícenásobné kořeny rovnice

$$x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32 = 0!$$

[Stejným postupem získáte rozklad $(x + 2)^3 (x - 2)^2$.]

4. Rozviňte polynom $3x^3 + 2x^2 + 1$ dle mocnin $(x - 2)$ v Taylorův rozvoj!

5. Totéž pro $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$ dle mocnin $x - a$!

3. Vlastnosti kořenů algebraické rovnice.

Fundamentální věta algebry. V dosavadních úvahách, kdykoli jsme mluvili o kořenech algebraické rovnice, předem jsme předpokládali, že daná rovnice kořen skutečně má. Není zatím vůbec jasné, že by libovolně napsaná rovnice musela opravdu kořeny míti.

Víme, že u lineární a kvadratické rovnice tomu tak jest. Dovedeme také napsat libovolný počet rovnic majících kořeny: na př. $(x - 3)(x - i)(x - 2 + 3i) = 0$ atd., ale to je zatím vše.

Jest otázkou, zda rovnice

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

kde a_i jsou libovolná komplexní čísla, má vždy kořen. Odpověď zní kladně. Platí tato t. zv. fundamentální věta algebry:

Každá algebraická rovnice n-tého stupně ($n \geq 1$) má alespoň jeden kořen.

Tato věta jest nejdůležitější větou, kterou v této knížce naleznete. První ji dokázal Gauss. Za svého života (v údobí 50 let) nalezl celkem 4 důkazy. Od té doby podali četní matematikové veliké množství nejrůznějších důkazů.

Důkaz jest dost složitý a přesahuje svou povahou rámec této knihy. Ukážeme však alespoň, jak lze problém značně omeziti.

Především lze se omeziti při důkaze na rovnice s reálnými koeficienty.

Abychom to uznali, dokažme si nejdříve tuto jednoduchou větu:

Má-li rovnice $f(x) = 0$ s reálnými koeficienty kořen $\alpha + \beta i$, má též kořen $\alpha - \beta i$.

Důkaz. Ježto $\alpha + \beta i$ jest kořenem, platí $f(\alpha + \beta i) = 0$, t. j. $A(\alpha, \beta) + i\,B(\alpha, \beta) = 0$, tedy $A(\alpha, \beta) = 0$, $B(\alpha, \beta) = 0$. Pak je ale též $A(\alpha, \beta) - i\,B(\alpha, \beta) = 0$. Z tvaru polynomu plyne však, že to není nic jiného než $f(\alpha - \beta i) = 0$. Dosadíme-li totiž do levé strany rovnice $\alpha - \beta i$, nezmění se nic na sudých mocninách i, ježto $(-i)^{2k} = (+i)^{2k}$. Nezmění se tedy A. Liché mocniny změní však znaménko, ježto $(-i)^{2k+1} = -(+i)^{2k+1}$. Změní tedy jen B znaménko.

Tvrdíme nyní:

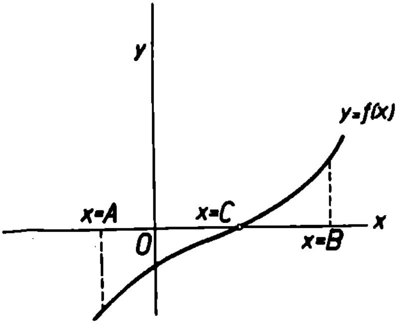
Dokážeme-li, že každá rovnice s reálnými koeficienty má alespoň jeden kořen, plyne z toho, že i každá rovnice s komplexními koeficienty má alespoň jeden kořen.

Důkaz. Jsou-li $f_1(x)$, $f_2(x)$ dva polynomy s koeficienty komplexními sdruženými, má jejich součin $f(x) = f_1(x) \,.\, f_2(x)$ reálné koeficienty. Tato rovnice má dle předpokladu alespoň jeden kořen α, t. j. je $f(\alpha) = 0$; tedy též $f_1(\alpha) \,.\, f_2(\alpha) = 0$ a tedy buď $f_1(\alpha) = 0$, nebo $f_2(\alpha) = 0$. Nechť $f_1(\alpha) = 0$; pak rovnice s komplexními koeficienty $f_1(x) = 0$ má kořen α. Pak ale zároveň — je-li $\bar{\alpha}$ číslo komplexní sdružené k α — je $f_2(\bar{\alpha}) = 0$. Obě rovnice s komplexními koeficienty mají tedy kořeny. Obdobně, je-li $f_2(\alpha) = 0$.

Stačí tedy dokázati: Každá rovnice s reálnými koeficienty má alespoň jeden (reálný nebo komplexní) kořen.

Pro rovnice lichého stupně plyne věta okamžitě z geometrického názoru, resp. grafického znázornění funkce $y = f(x)$.

Máme-li totiž polynom $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ a dosazujeme za x velmi veliké hodnoty (t. j. veliké vzhledem k a_i), jest jasné, že první člen převyšuje všechny další členy, a že tedy znaménko výrazu bude takové, jaké má první člen. Nechť jest nyní n liché; dosadíme-li za x velmi veliké číslo kladné, bude hodnota polynomu takového znaménka, jaké má a_0; dosadíme-li za x velmi veliké číslo záporné, bude hodnota polynomu znaménka opačného, než je znaménko u a_0.*) Nabývá tedy polynom pro jisté $x = A$ hodnoty záporné (kladné), pro jiné $x = B$ hodnoty kladné (záporné). Pak jest ale z grafického znázornění jasné, že křivka $y = f(x)$ musí alespoň v jednom bodě $x = C$ protnouti osu x, t. j. je $f(C) = 0$ a tedy daná rovnice má kořen [dokonce — jak vidíme — reálný].



Obr. 3.

Užíváme při tom mlčky důležité vlastnosti polynomu — totiž, že polynom jest spojitou funkcí proměnné x. Tento pojem, který při vyšetřování funkcí v matematické analyse jest velmi důležitý, shoduje se zhruba s pojmem „spojitý" užívaným v běžné řeči. Užíváme dále věty: Nabývá-li spojitá funkce dvou různých hodnot, nabývá též všech hodnot mezi nimi ležících.

Abychom nyní dokončili důkaz fundamentální věty, stačí omeziti se na rovnice s reálnými koeficienty, a to sudého stupně. To je právě ten nejtěžší krok. Gauss a po něm Jordan postupovali tak, že postupnou transformací uvedli vyšetřování rovnic sudého stupně v souvislost s rovnicemi lichého stupně, u kterých, jak již víme, věta platí.

Jiné důkazy fundamentální věty nečiní rozdílu mezi rovnicemi lichého a sudého stupně. Jsou vedeny pomůckami diferenciálního a integrálního počtu nebo metodami t. zv. funkční

*) Ještě lépe je to viděti, píšeme-li

$$f(x) = a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0 x^n}\right);$$

když x je v absolutní hodnotě velmi veliké, blíží se členy v závorce (kromě prvního) k nule a lze je zanedbati.

teorie atd. Poměrně jednoduchý jest první důkaz Gaussův, založený v podstatě na geometrickém znázornění komplexních čísel.*)

V dalším budeme fundamentální větu předpokládati v plném rozsahu za dokázanou. Nyní lehce dokážeme:

Každá algebraická rovnice n-tého stupně má právě n-kořenů. [Při tom počítáme mnohonásobný kořen s příslušnou násobností.]

Důkaz. Dle fundamentální věty má $f(x)$ alespoň jeden kořen x_1, t. j. $f(x_1) = 0$. Pišme:

$$f(x) = f(x) - f(x_1) =$$

$$= a_0(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - x_1) = 0$$

$$f(x) = (x - x_1)[a_0(x^{n-1} + x^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1}) +$$

$$+ a_1(x^{n-2} + x^{n-3}x_1 + \ldots + x_1^{n-2}) + \ldots + a_{n-1}] = 0.$$

Výraz v lomené závorce jest stupně $n - 1$. Dle fundamentální věty má alespoň jeden kořen x_2. Lze tedy z lomené závorky vytknouti $x - x_2$ atd. Nalezneme konečně rozklad

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \qquad (1)$$

Odtud pak ihned plyne výše uvedené tvrzení.

Výrazům $x - x_1$, $x - x_2$, ... říkáme kořenoví činitelé. (1) představuje pak rozklad polynomu $f(x)$ v kořenové činitele.**)

---

*) V české, resp. slovenské literatuře naleznete důkaz fundamentální věty v knihách: K. Petr: Počet diferenciální, Praha 1923, str. 405 (nákl. JČMF). — K. Petr: Počet integrální, Praha 1931, str. 418 (nákl. JČMF). — J. Hronec: Algebraické rovnice a ich použitie na analytickú geometriu, Brno 1932, str. 47.

**) Čísla $x_1, x_2, \ldots$ nemusí býti vesměs různá. Je-li jich několik stejných, musíme — aby úhrnný počet všech kořenů byl n — počítati je s příslušnou násobností. To je ten důvod, o němž jsme mluvili ve zvláštním odstavci předešlé kapitoly (str. 18 a další).

Dodatek: Máme-li rovnici s reálnými koeficienty, jsou čísla $x_1, x_2, \ldots$ částečně reálná, částečně po dvou komplexní sdružená. Součin dvou faktorů komplexních sdružených jest reálný, proto:

Každý reálný polynom lze rozložiti v součin reálných činitelů prvního nebo druhého stupně.

Poznámka (pro hloubavého čtenáře). Poznamenejme výslovně, v čem záleží důležitost fundamentální věty. Když jsme chtěli, aby každá kvadratická rovnice s reálnými koeficienty měla řešení, musili jsme zavésti čísla obecnější než reálná — totiž komplexní. Analogicky dalo by se čekati, že chceme-li rozřešiti na př. kteroukoli rovnici 3. stupně, budeme musit zavésti nějaký nový symbol obdobný číslu i a uvažovati čísla ještě obecnější než komplexní. Fundamentální věta říká, že tomu tak není; že tedy s čísly komplexními vystačíme již pro všechny rovnice (s komplexními koeficienty), všech stupňů. To je hlavní jádro věty. To, že kořenů jest právě n — to jest jen výsledek vedlejší.

Čtenáři nebude jistě proti mysli, že existují i čísla obecnější než čísla komplexní — na př. t. zv. kvaterniony. Ovšem i zde jde pouze o výplod lidského myšlení — bez reálné interpretace ve všedním životě.

Symetrické funkce. a) V dalších úvahách budeme bez újmy obecnosti psáti $a_0 = 1$. Má-li pak $f(x)$ kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jest

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Vynásobíme-li pravou stranu a přirovnáme koeficienty u stejných mocnin x, máme

$$\begin{aligned} -a_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ -a_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n a_n &= x_1x_2 \ldots x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Budeme psáti krátce

$$-a_1 = \Sigma\, x_1,\ a_2 = \Sigma\, x_1x_2,\ -a_3 = \Sigma\, x_1x_2x_3, \ldots \tag{2}$$

Při tom znaménko Σ znamená, že sčítáme přes všechny kombinace veličin $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a to vždy kombinace toho typu, jaký stojí za součtovým znaménkem.

b) Výrazy (2) mají zvláštní stavbu. Kdybychom zaměnili v nich nějaké x_i za x_k a x_k za x_i, jejich hodnota se nezmění.

Říkáme jim proto symetrické funkce.

Obecně nazýváme symetrickou funkcí proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takovou celistvou, racionální funkci (polynom) proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která se nemění žádnou permutací indexů.

Jiné příklady: Nechť na př. $n = 3$. Pak $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$, nebo $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jsou také symetrickými funkcemi. Naproti tomu $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ není symetrickou funkcí, neboť zaměníme-li x_1 za x_3, dostáváme $x_3^2 + x_2^2 - x_1^2$, což jest jiný výraz.

Funkce (2) jsou zvláště jednoduché symetrické funkce, nazýváme je elementárními symetrickými funkcemi. Platí nyní tato základní věta o symetrických funkcích:

Každá symetrická funkce tvaru $\Sigma x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$ se dá vyjádřiti jako racionální celistvá funkce elementárních symetrických funkcí s celočíselnými koeficienty.

To tedy znamená pro rovnice: Bez řešení rovnice dovedeme udati hodnoty jistých výrazů, které závisí na kořenech — a to z pouhé znalosti koeficientů dané rovnice.

Ověříme si nejdříve tuto větu na dvou příkladech.

1) Zvolme funkci $\Sigma x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Abychom ji vyjádřili v žádaném tvaru, uvažujme součin

$$\Sigma x_1 \,.\, \Sigma x_1 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \,.\, (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= (x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2) + 2\,(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}\,x_n),$$

t. j. $(-a_1)\,.\,(-a_1) = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2\,.\,a_2$

$$\Sigma x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a_1^2 - 2a_2.$$

2. Abychom vypočetli $\Sigma\, x_1^2 x_2$, pišme:

$$\Sigma\, x_1 x_2 \,.\, \Sigma\, x_1 = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots)\,.\,(x_1 + x_2 + \ldots) =$$
$$= (x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + \ldots) + 3\,(x_1 x_2 x_3 + \ldots)$$
$$= \Sigma\, x_1^2 x_2 + 3\, \Sigma\, x_1 x_2 x_3,$$

tedy
$$a_2\,.\,(-a_1) = \Sigma\, x_1^2 x_2 - 3a_3$$
$$\Sigma\, x_1^2 x_2 = 3a_3 - a_1 a_2.$$

Máme-li komplikovanější příklad, postupujeme vždy tak, že uvažujeme součin jednodušších funkcí takových, abychom po vynásobení dostali — mimo jiné — i hledanou funkci.

Zároveň jsme tak vedeni k jednoduchému obecnému důkazu vyslovené věty.

Definujme si pojem „výšky“. Každé symetrické funkci $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$, $(\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots)$ přiřadíme systém čísel $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_k)$, dle kterého budeme posuzovati její výšku. Budeme říkati, že ze dvou symetrických funkcí $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$ $(\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots)$, $\Sigma x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_k^{\beta_k}$, $(\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \ldots)$ jest ta vyšší, u které v obou systémech $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \ldots)$, $(\beta_1; \beta_2; \beta_3; \ldots)$ první lišící se člen jest větší.

Nahoře uvedenou větu dokážeme nyní lehce t. zv. úplnou indukcí.

Jak jsme viděli, jest $\Sigma x_1 = -a_1$, $\Sigma x_1 x_2 = a_2, \ldots$ Jest tedy věta správná pro symetrické funkce nejmenších výšek, totiž $(1; 0; 0; \ldots; 0)$, $(1; 1; 0; \ldots; 0)$, $(1; 1; 1; 0; \ldots; 0)$ atd. Předpokládejme nyní, že platí pro všechny symetrické funkce nižší než $\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$; dokážeme, že platí i pro $\Sigma x_1^{\alpha_1}\,.\,x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$. Tím bude věta dokázána. Neboť, ježto platí pro výšky $(1; 0; 0; \ldots; 0)$, $(1; 1; 0; 0; \ldots), \ldots$, platí pak i pro symetrické funkce nejbližších dalších výšek, t. j. $(2; 0; 0; \ldots; 0)$, $(2; 1; 0; \ldots; 0)$, $(2; 1; 1; 0; \ldots; 0)$ atd., postupně platí pak pro všechny symetrické funkce.

Uvažujme za tím účelem součin

$$\sum x_1^{\alpha_1 - 1}\,.\,x_2^{\alpha_2 - 1} \ldots x_k^{\alpha_k - 1} \sum x_1 x_2 \ldots x_k.$$

Po vynásobení dostaneme především členy tvaru $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k}$ a to s koeficientem 1, pak ještě řadu dalších členů (na př. $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\alpha_k - 1} x_{k+1}$) opatřených celočíselnými koeficienty, ale vždy tedy členy nižších výšek. Tedy:

$$\sum x_1^{\alpha_1-1}\dots x_k^{\alpha_k-1}\,.\,\underbrace{\sum x_1x_2\dots x_k}_{(-1)^k\,.\,a_k} = 1\,.\sum x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k} + \text{(členy „nižší“)}; \qquad (3)$$

odtud

$$\sum x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k} = (-1)^k a_k\,.\sum x_1^{\alpha_1-1}\dots x_k^{\alpha_k-1} - \text{(členy „nižší“)}.$$

Ježto na pravé straně jsou všecky funkce výšky menší než $\Sigma x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k}$ a pro ně větu předpokládáme za platnou, lze psáti i levou stranu jako racionální celistvou funkci elementárních symetrických funkcí s celočíselnými koeficienty; tím je věta dokázána. [Všimněte si důležitosti čísla 1 v (3)!]

c) Potenční součty. Obzvláště zajímavé a důležité jsou speciální symetrické funkce typu

$$\begin{aligned} s_2 &= \Sigma\, x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ s_3 &= \Sigma\, x_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_k &= \Sigma\, x_1^k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k. \end{aligned}$$

Odvodíme si t. zv. **rekurentní vztah**, který nám umožní určiti je jako funkce elementárních symetrických funkcí. Budeme postupovati zrovna tak, jako nahoře. Počítejme na př. $+\,\Sigma\, x^5{}_1 = s_5$.

$$\begin{aligned} \Sigma\, x_1^4\,.\,\Sigma\, x_1 &= (x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4)\,.\,(x_1 + \dots + x_n) = \\ &= (x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_n^5) + (x_1^4x_2 + x_1^4x_3 + \dots) = \\ &= \Sigma\, x_1^5 + \Sigma\, x_1^4x_2. \end{aligned}$$

Tedy $\quad \Sigma\, x_1^5 = \Sigma x_1^4\,.\,(-a_1) - \Sigma\, x_1^4x_2.$

Stejně $\quad \Sigma\, x_1^4x_2 = \Sigma\, x_1^3\,.\,(+a_2) - \Sigma\, x_1^3x_2x_3$

$$\Sigma\, x_1^3x_2x_3 = \Sigma\, x_1^2\,.\,(-a_3) - \Sigma\, x_1^2x_2x_3x_4 \qquad (4)$$

$$\Sigma\, x_1^2x_2x_3x_4 = \Sigma\, x_1\,.\,(+a_4) - 5\,\Sigma\, x_1x_2x_3x_4x_5.$$

Při tom: na př. druhý řádek plyne takto:

$$\begin{aligned} \Sigma x_1^3 \Sigma x_1x_2 &= (x_1^3 + x_2^3 + \dots)(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots) = \\ &= (x_1^4x_2 + \dots) + (x_1^3x_2x_3 + \dots) = \Sigma x_1^4x_2 + \Sigma x_1^3x_2x_3. \end{aligned}$$

Snadno také nahlédneme, že v poslední řádce jest součinitel 5, neboť když uvažujeme součin $\Sigma x_1\,.\,\Sigma x_1x_2x_3x_4 = (x_1 + x_2 + \dots)\,.\,(x_1x_2x_3x_4 + \dots)$, vzniknou kromě členů tvaru $x_1^2x_2x_3x_4$ též členy tvaru $x_1x_2x_3x_4x_5$, a to každý pětkráte. Na př. člen $x_1x_2x_3x_4x_5$ sám vznikne, když

z první	závorky	vezměme	x_1,	z druhé	$x_2x_3x_4x_5$
,,	,,	,,	x_2,	,,	$x_1x_3x_4x_5$
,,	,,	,,	x_3,	,,	$x_1x_2x_4x_5$
,,	,,	,,	x_4,	,,	$x_1x_2x_3x_5$
,,	,,	,,	x_5,	,,	$x_1x_2x_3x_4$.

Násobme nyní v (4) řádky postupně 1, — 1, 1, — 1 a sečtěme; vyjde

$$\Sigma\, x_1^5 = -a_1 \Sigma\, x_1^4 - a_2 \Sigma\, x_1^3 - a_3 \Sigma\, x_1^2 - a_4 \Sigma\, x_1 - 5a_5,$$

t. j.

$$s_5 + a_1s_4 + a_2s_3 + a_3s_2 + a_4s_1 + 5a_5 = 0.$$

Obecně — pokud jest $k < n$ — dostáváme

$$s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \ldots + a_{k-1}s_1 + ka_k = 0. \quad (5)$$

Stejný vztah lze odvoditi i pro $k = n$, $k > n$.

Vztah (5) se nazývá Newtonovou*) rekurentní relací.

Lze z něj vypočítati $s_1, s_2, s_3, \ldots$ Dosadíme-li totiž do (5) po řadě $k = 1; 2; 3; 4; \ldots$ dostaneme

$$\begin{aligned} s_1 + a_1 &= 0 \\ s_2 + a_1s_1 + 2a_2 &= 0 \\ s_3 + a_1s_2 + a_2s_1 + 3a_3 &= 0 \\ s_4 + a_1s_3 + a_2s_2 + a_3s_1 + 4a_4 &= 0 \end{aligned}$$

....

*) Isaac Newton (nar. 5. ledna 1643, zemř. 20. března 1727, pochován v opatství westminsterském) jest zakladatelem matematické fysiky. Jeho práce týkají se gravitačního zákona, teorie šíření se světla, teorie měsíce atd. Jako spoluzakladatel diferenciálního počtu zabýval se i mnohými čistě matematickými otázkami. Těžko zhodnotiti jeho ohromné zásluhy o rozvoj přírodních věd na několika řádcích. Jeho hlavní práce „Philosophiae naturalis principia mathematica“ byla první knihou toho směru, který jest dnes ideálem každé vědy — totiž možnosti, uměti matematicky formulovat přírodní zákony.

$$s_1 = -a_1$$
$$s_2 = a_1^2 - 2a_2$$
$$s_3 = -a_1^3 + 3a_1a_2 + 3a_3$$
$$s_4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 2a_2^2 - 4a_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cvičení. 1. Má-li rovnice s celočíselnými koeficienty

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

celočíselné kořeny, musí tyto děliti a_n. Ježto a_n má jen konečný počet dělitelů, lze nalézti celočíselné kořeny po konečném počtu zkoušek.

Učiňte tak pro rovnice

α) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 \quad (x = 2; -3; 4)$,

β) $x^4 + 28x^3 + 42x^2 - 3452x - 19019 = 0$

$(x = -7; 11; -13; -19)$,

γ) $x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0 \quad$ (jen $x = -5$).

2. Rovnice s celistvými koeficienty uvažovaná v příkl. 1 nemůže míti kořenů lomených; má-li kořeny racionální, mohou býti jen celé. Dokažte! (Návod: Dosaďte do rovnice $\frac{p}{q}$ za x a učiňte závěry!) Užijte tohoto výsledku k řešení rovnice

$$x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0.$$

($x_1 = -2$ dvojnásobný, $x_2 = 1$ dvojnásobný.)

3. Nalezněte racionální kořeny rovnice

$$6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0!$$

$\left(\text{Uvažte, že musí } x_1 . x_2 . x_3 . x_4 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}; \; x_1 = -\frac{2}{3}; \; x_2 = 2.\right)$

4. Sestrojte rovnici, která má za kořeny trojnásobky kořenů rovnice $x^3 + 3x + 2 = 0$! [Návod: Jsou-li kořeny dané rovnice x_1, x_2, x_3 a hledané y_1, y_2, y_3, jest $y_1 = 3x_1$, $y_2 = 3x_2$, $y_3 = 3x_3$, tedy: $y_1 + y_2 + y_3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) = 0$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 9(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 27$, $y_1y_2y_3 = 27x_1x_2x_3 = -54$. Hledaná rovnice jest $y^3 + 27y + 54 = 0$.]

5. Napište rovnici, která má kořeny o b menší než kořeny rovnice $x^2 + a_1x + a = 0$! [Návod: Kořeny hledané rovnice jsou $y_1 = x_1 - b$, $y_2 = x_2 - b$; tedy $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 - 2b = -a_1 - 2b$, $y_1 y_2 = (x_1 - b) . (x_2 - b) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) b + b^2 = a_2 + a_1 b + b^2$. Hledaná rovnice jest tedy $y^2 + (a_1 + 2b) y + a_2 + a_1 b + b^2 = 0$.]

6. Napište rovnici, která má kořeny o 1 menší než kořeny rovnice $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$. [Návod: Úlohu lze řešiti buď pomocí symetrických funkcí jako v předešlém příkladě anebo pomocí Taylorova rozvoje. Rozvineme danou rovnici v Taylorův rozvoj dle $(x - 1)$ a pak dosadíme neznámou $x - 1 = y$. Měla-li původní rovnice kořen x_1, má nová kořen $y_1 = x_1 - 1$ atd. Výsledek: $y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y - 5 = 0$.]

7. Jak nutno voliti veličinu a, aby transformací $x = y + a$ přešla rovnice

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

v rovnici neobsahující člen s y^{n-1}? $\left[x = y - \frac{a_1}{n a_0}\right]$.

8. Jak nutno voliti a, aby transformací $x = y + a$ v rovnici $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$ vypadl člen s y?

9. Sestrojte rovnici, která má za kořeny čtverce kořenů dané rovnice;

α) pro rovnici $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$,

β) pro rovnici $f(x) = 0$.

[α) Kořeny nové rovnice jsou x_1^2, x_2^2, x_3^2; vypočtěte $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$, $x_1^2 x_2^2 x_3^2$ a užijte vlastností vztahů (1); vyjde $y^3 + 3y^2 + 2y - 1 = 0$. β) Sestrojte polynom $f(x) . f(-x)$ a dosaďte $x^2 = y$!]

10. Sestrojte rovnici, která má za kořeny všechny možné součty dvou kořenů rovnice

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0!$$

[Kořeny hledané rovnice jsou $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_1$, $y_3 = x_1 + x_2$; vypočtěte výrazy $y_1 + y_2 + y_3$, $y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3$, $y_1 y_2 y_3$ jako funkci koeficientů a_i a užijte vztahů (1)! Vyjde: $y^3 + 2a_1 y^2 + (a_1^2 + a_2) y + (a_1 a_2 - a_3) = 0$.]

4. Řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně.

Přistoupíme nyní k metodám, jak nalézti kořeny dané obecné rovnice.

Kvadratická rovnice. Rovnici druhého stupně $ax^2 + bx + c = 0$ řešíme — jak známo — tak, že doplníme levou stranu na úplný čtverec. Jest

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (*)$$

Otázka, která nás vždy bude zajímati, jest: Kdy má taková rovnice vícenásobný kořen. Z výrazu pro $x_{1,2}$ jest jasné, že to nastane tenkrát, když výraz $D = b^2 - 4ac$, zvaný diskriminant rovnice, jest roven nule.

Tato otázka dá se však vždy řešiti bez znalosti kořenů; to nyní provedeme ihned dvěma způsoby.

α) Dle obecné teorie o vícenásobných kořenech v 2. kapitole bude míti naše rovnice dvojnásobný kořen, má-li $ax^2 + bx + c = 0$ a derivace $2ax + b = 0$ společné řešení. Ježto druhá rovnice má jen jediné řešení $x = -\frac{b}{2a}$, musí

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0,$$

t. j. $$D = b^2 - 4ac = 0,$$
jak již víme.

β) Instruktivnější — vzhledem k dalšímu — jest řešení téže otázky pomocí symetrických funkcí. Hledejme takovou symetrickou funkci, která se rovná nule, když oba kořeny splynou.

(Když ji nalezneme, máme problém řešen, neboť dle věty o symetrických funkcích lze tuto vyjádřiti pomocí čísel a, b, c.)

Takovou funkcí jest „skoro" $x_1 - x_2$. Tato ale není symetrickou, neboť záměnou indexů změní znaménko. Naproti tomu $(x_1 - x_2)^2$ jest symetrickou funkcí a rovná se nule, když $x_1 = x_2$. Počítejme — pamatujíce na vlastnosti kořenů $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ —

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 =$$
$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{D}{a^2};$$

odtud vidíme tedy: Je-li $D = 0$, je $x_1 = x_2$ a naopak.

Všimněte si úzkého vztahu mezi $(x_1 - x_2)^2$ a D!

Podrobný rozbor rovnice (*) přenechávám laskavému čtenáři.

Cvičení. 1. Řešte rovnici $x^2 - (5 + 4i)\,x + (6 + 8i) = 0$! [$3 + 4i$; 2]

2. Jsou-li koeficienty dané rovnice veliká čísla, volíme místo (*) toto t. zv. goniometrické řešení kvadratické rovnice. Píšeme $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - c}$. Je-li $c > 0$ a $c < \left(\frac{b}{2a}\right)^2$, položme $c = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 . \sin^2\varphi$. Pak $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm$ $\pm \frac{b}{2a}\cos\varphi = -\frac{b}{2a}(1 \mp \cos\varphi) = \begin{cases} -\frac{b}{a}\sin^2\frac{1}{2}\varphi \\ -\frac{b}{a}\cos^2\frac{1}{2}\varphi \end{cases}$, kde φ je definováno vztahem $\sin^2\varphi = \frac{4a^2c}{b^2}$. Tento výraz se hodí k logaritmování. Jsou možná i jiná goniometrická řešení. Nalezněte nějaké další! Řešte rovnici

$$x^2 - 93{,}7062x + 1984{,}74 = 0! \quad [61{,}3607;\ 32{,}3454.]$$

3. Ukažte, že rovnice

$$x^2 + 2(b_1 + ib_2)x + (c_1 + ic_2) = 0$$

má reálný kořen, když $c_2^2 - 4b_1b_2c_2 + 4c_1b_2^2 = 0$!

4. Ukažte: Nutná a postačující podmínka proto, aby oba kořeny rovnice $x^2 + ax + b = 0$ měly absolutní hodnotu rovnou 1 jest: $|a| \leq 2$, $|b| = 1$, $2 \operatorname{ampl} a = \operatorname{ampl} b$.

5. Jestliže do rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dosadíme novou neznámou y vztahem $x = \dfrac{my + n}{py + q}$ (t. zv. lineární lomená substituce) dostaneme opět kvadratickou rovnici v proměnné y. Diskriminant této nové rovnice liší se od diskriminantu původní rovnice jen tím, že jest násobkem tohoto. Faktorem úměrnosti jest výraz $(mq - np)^2$. Jestliže substituce jest taková, že $mq - np = \pm 1$ (t. zv. unimodulární substituce), jsou oba diskriminanty dokonce stejné. Říkáme proto, že výraz $b^2 - 4ac$ jest invariantem vzhledem k těmto lineárním substitucím. Proveďte podrobně!

6. Řešte rovnici $ax^2 + bx + a = 0$! Jakou vlastnost mají kořeny? [Reciproká rovnice.]

7. Dokažte, že mnohočlen 2. stupně, který pro $x = a, b, c$ nabývá po řadě hodnot α, β, γ, má tvar

$$f(x) \equiv \alpha \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \beta \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \gamma \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}!$$

(t. zv. kvadratická interpolace).

8. Rovnice s reálnými koeficienty a kořeny $ax^2 + bx + c = 0$ dá se pohodlně řešiti také takto. Nechť jest $s_k = x_1^k + x_2^k$ a $|x_1| > |x_2|$. Jest $\dfrac{s_{k+1}}{s_k} = \dfrac{x_1^{k+1} + x_2^{k+1}}{x_1^k + x_2^k} = x_1 \cdot \dfrac{1 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{k+1}}{1 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^k}$.

Protože je $\left|\dfrac{x_2}{x_1}\right| < 1$, je pro dosti veliká k hodnota $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^k$ velmi malá. Přesně $\lim\limits_{k=\infty} \dfrac{s_{k+1}}{s_k} = x_1$. $\left(\text{Ježto} \lim\limits_{k=\infty} \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^k = 0\right)$.

Vypočteme-li tedy postupně $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$, lze lehce určiti hodnotu většího z kořenů. Na př. pro rovnici $x^2 - 2x - 1$ (užíváme Newtonových vztahů) $s_0 = 2$, $s_1 = 2$, $s_2 = 2 . 2 + 2 = 6$, $s_3 = 2 . 6 + 2 = 14$, $s_4 = 2 . 14 + 6 = 34$, $s_5 = 2 . 34 + 14 = 82$, $s_6 = 2 . 82 + 34 = 198$, $s_7 = 2 . 198 + 82 = 478$, $s_8 = 2 . 478 + 198 = 1154$, $s_9 = 2 . 1154 + 478 = 2786$, $s_{10} = 2 . 2786 + 1154 = 6726$. Jest $\frac{s_{10}}{s_9} = 2{,}41421393\ldots$ Přesná hodnota jest $2{,}41421356\ldots$ Proč neplatí věta pro rovnice s komplexními kořeny? $\left[\text{Není } \left|\frac{x_2}{x_1}\right| < 1\text{, nýbrž vždy } \left|\frac{x_2}{x_1}\right| = 1\text{. Uvažte na př. při rovnici } x^2 - 2x + 2 = 0!\right]$

9. Sestrojte rovnici, která má za kořeny k-té mocniny kořenů rovnice $x^2 - 2ax + b = 0$! [$x^2 - s_k x + b^k = 0$; s_k má známý význam.]

Kubická rovnice. K rovnicím třetího stupně (kubickým) dospěli matematikové z četných geometrických problémů jako trisekce úhlu, zdvojení krychle a pod. Geometrické úlohy vedoucí ke kubickým rovnicím jsou pravítkem a kružítkem obecně neřešitelné. Jestliže se o ně přes to pokoušeli matematikové starověku a středověku, má to pro dnešní dobu ten význam, že se rozmohlo pěstování rovnic třetího a vyššího stupně a položen tak základ k výstavbě algebry.

a) Dřív než přistoupíme k řešení obecné rovnice třetího stupně, bude nutno rozřešiti tuto speciální rovnici

$$x^3 - 1 = 0. \tag{1}$$

Rovnici (1) lze psáti $(x - 1) . (x^2 + x + 1) = 0$, odkud

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon,\ x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2.$$

Čísla $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ představují nám třetí odmocniny z jedné.

Třetí odmocnina z 1 a vůbec z každého čísla má tedy tři hodnoty. Řešení rovnice

$$x^3 - a = 0 \tag{2}$$

nalezneme tak, že si nejdříve pod znakem $\sqrt[3]{a}$ myslíme jednu docela určitou hodnotu odmocniny; další kořeny jsou pak $\varepsilon\sqrt[3]{a}$, $\varepsilon^2\sqrt[3]{a}$. (Srovnej také s odst. Moivreova poučka v 1. kapitole.)

Rovnicemi tvaru (1) budeme se zabývati obšírně v 5. kapitole.

b) K řešení kubické rovnice

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \tag{3}$$

existuje veliká řada metod. Uvedeme si dvě typické.

První z nich pochází od Huddeho.*)

Především místo x zavedeme novou neznámou y vztahem

$$\underbrace{x = y - \tfrac{1}{3}a_1}$$

$$(y - \tfrac{1}{3}a_1)^3 + a_1(y - \tfrac{1}{3}a_1)^2 + a_2(y - \tfrac{1}{3}a_1) + a_3 = 0.$$

Z rovnice vypadne člen s y^2 a zůstane rovnice tvaru

$$y^3 + py + q = 0, \tag{3'}$$

kde

$$p = a_2 - \tfrac{1}{3}a_1^2 \qquad q = a_3 - \tfrac{1}{3}a_1a_2 + \tfrac{2}{27}a_1^3. \tag{4}$$

Podstatou metody jest nyní, že místo jedné neznámé y zavedeme neznámé dvě: u a v vztahem

$$y = u + v. \tag{5}$$

Tedy $$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

po úpravě

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{6}$$

---

*) První, kdo objevil řešení kubické rovnice byl Scipione del Ferro (od 1496—1526 prof. v Bologni). Poté se rozpoutal nepěkný boj o prioritu mezi Geronimem Cardanem (Hieronymus Cardano 1501—1576, Pavia a Řím) a Nicola Tartagliou (1500—1557, Brescia). Cardano uveřejnil první svoje řešení ve své knize „Ars magna" (Norimberk, 1545), proto se mluví dnes o Cardanově vzorci.

Rozřešení kubické rovnice bylo na tehdejší dobu — kdy ještě neexistovala matematická symbolika a dnešní „mluva vzorců" — výkon skoro zázračný. Cardano pomáhá si geometrickými obrazci, a ježto neznal přirozeně ani imaginárních čísel, musel činiti různé předpoklady o znaménkách koeficientů a pod.

Ježto jsme místo jedné neznámé y zavedli dvě neznámé u, v, můžeme ještě mezi u a v voliti jeden vztah. Volme u, v tak, aby bylo

$$3uv = -p. \tag{7}$$

Pak ale z (6) plyne

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{8}$$

Z těchto dvou rovnic vyjde (jako řešení kvadratické rovnice)

$$v^3 = -\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3},\quad u^3 = -\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}.$$

(anebo obráceně s výměnou u^3 a v^3).

Dále

$$\begin{aligned} v &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}, \\ u &= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Každá z veličin (9) jest trojznačná. Měli bychom tedy pro y zdánlivě 9 hodnot odpovídajících všem kombinacím u, v. Nesmíme však zapomínat, že čísla (9) mají vyhovovat (7) a (8) [a že jsme rovnici (7) během počítání umocnili]. Musíme zjistiti, zda tomu tak jest. Rovnice (8) jest zřejmě splněna, ať pod odmocninou rozumíme kteroukoliv hodnotu odmocniny.

Dle (7) má však býti

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} \cdot \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} = \\ = -\tfrac{1}{3}p. \tag{10}$$

Na levé straně vyjde po vynásobení nejdřív jen trojznačný výraz $\sqrt[3]{-(\frac{1}{3}p)^3} = \sqrt[3]{(-\frac{1}{3}p)^3}$. Má-li býti tento výraz roven pravé straně, musíme to zaříditi tak, že hodnotu odmocniny jednoho faktoru v (10) volíme libovolně, ale hodnotu druhého již ne libovolně, nýbrž právě tak, aby (10) bylo splněno.

Dle (5) jest pak jedno řešení rovnice (3′)

$$y_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}. \tag{11}$$

Jestliže — jak řečeno — jedné odmocnině přisoudíme všechny tři hodnoty a druhé z odmocnin pak takovou hodnotu, aby byl splněn vztah (10), jsou další kořeny — má-li ε, ε^2 význam dříve citovaný —

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \varepsilon\,.\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2+(\tfrac{1}{3}p)^3}}\,+\\ &\quad+\varepsilon^2\,.\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2+(\tfrac{1}{3}p)^3}},\\ y_3 &= \varepsilon^2\,.\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2+(\tfrac{1}{3}p)^3}}\,+\\ &\quad+\varepsilon\,.\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2+(\tfrac{1}{3}p)^3}}.\end{aligned}\right\} \qquad (11')$$

Vzorec (11), (11′) nazývá se **Cardanova formule**.

Chceme-li nyní nalézti řešení původní rovnice (3), stačí se vrátiti k původní proměnné ze (4).

Máme

$$(\tfrac{1}{2}q)^2+(\tfrac{1}{3}p)^3=(\tfrac{1}{2}a_3-\tfrac{1}{6}a_1a_2+\tfrac{1}{27}a_1{}^3)^2+(\tfrac{1}{3}a_2-\tfrac{1}{9}a_1{}^2)^3=$$
$$=\tfrac{1}{4}a_3{}^2-\tfrac{1}{6}a_1a_2a_3-\tfrac{1}{108}a_1{}^2a_2{}^2+\tfrac{1}{27}a_1{}^3a_3+\tfrac{1}{27}a_2{}^3=-\tfrac{1}{108}D,$$

kde D budeme nazývati **diskriminantem** rovnice (1). Je pak

$$x_1=-\tfrac{1}{3}a_1+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}a_3+\tfrac{1}{6}a_1a_2-\tfrac{1}{27}a_1{}^3+\tfrac{1}{18}\sqrt{-3D}}\,+$$
$$+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}a_3+\tfrac{1}{6}a_1a_2-\tfrac{1}{27}a_1{}^3-\tfrac{1}{18}\sqrt{-3D}}$$

a analogicky další.

c) Metoda řešení rovnice (3′) byla jednoduchá, ale do značné míry náhodná. [Němci mají pro podobné obraty výstižné slovo „Kunstgriff".]

Systematičtější jest metoda pomocí symetrických funkcí pocházející od Lagrange.*) Hledejme totiž nějaké jednoduché

*) Joseph Louis Lagrange (1716—1813; pochován jest v pařížském Pantheonu). Jeho život spadá do období francouzské revoluce, znamenající v dějinách matematiky horečnou činnost přečetných znamenitých učenců. Hlavní Lagrangeovy práce týkají se užití infinitesimálního počtu v mechanice.

symetrické funkce kořenů rovnice

$$x^3 + px + q = 0.$$

Takovou jest na př. $x_1 + x_2 + x_3$. Pro tu — ježto chybí člen s x^2 — platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Podobný výraz $x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3$, resp. $x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3$ není symetrickou funkcí; zato však výrazy $t_1 = (x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)^3$ a $t_2 = (x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)^3$ mají tu vlastnost, že se cyklickou*) záměnou indexů vůbec nemění.

Pokusíme se určiti jejich hodnotu. Abychom vypočetli hodnoty t_1 a t_2 jako funkce koeficientů p, q, nalezněme kvadratickou rovnici tvaru

$$t^2 + b_1 t + b_2 = 0,$$

které t_1 a t_2 vyhovují. Pro koeficient b_1 máme

$$\begin{aligned} -b_1 &= (x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)^3 + (x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + \\ &+ x_3^3 + 3\varepsilon\,(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) + 3\varepsilon^2\,(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + \\ &+ x_3^2 x_2) + 6x_1 x_2 x_3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\varepsilon^2\,(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \\ &+ x_3^2 x_1) + 3\varepsilon\,(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2) + 6x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

(Užíváme vztahů $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon^4 = \varepsilon$, $\varepsilon^5 = \varepsilon^2$.) Ježto z $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ plyne $\varepsilon^2 + \varepsilon = -1$, máme

$$\begin{aligned} -b_1 &= 2\,(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 3\,(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + \\ &+ x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2) + 12 x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Přidáme a ubereme člen $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ a $6x_1 x_2 x_3$ a máme:

$$-b_1 = 3\,(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1 + x_2 + x_3)^3 + 18 x_1 x_2 x_3.$$

Dle Newtonových vzorců na str. 35 jest $s_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q$, tedy

$$-b_1 = -9q - 0 - 18q = -27q.$$

Dále

$$\begin{aligned} b_2 &= t_1 \cdot t_2 = (x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)^3\,(x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)^3 = \\ &= [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3]^3 = [(x_1 + \\ &+ x_2 + x_3)^2 - 3\,(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)]^3 = [-3p]^3 = \\ &= -27p^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Jeho práce v algebře, směřující k řešení rovnic, pocházejí z let 1770—71. Lagrange sestrojuje jisté výrazy kořenů a vyšetřuje jejich vlastnosti vzhledem k permutacím indexů. Zavádí pojem resolventy atd. Tyto práce jsou prvním stupněm k dosažení výsledků pocházejících teprve od Abela a E. Galoise.

*) T. j. píšeme-li na př. místo x_1 kořen x_2 a pak místo x_2 kořen x_3 a místo x_3 kořen x_1.

Tedy

$$t^2 + 27qt - 27p^3 = 0.$$

Tuto rovnici nazýváme **kvadratickou resolventou kubické rovnice.** Dovedeme-li totiž rozřešiti tuto rovnici, máme — jak ihned uvidíme — řešenu i původní rovnici.

Jest

$$t_1 = 27\left[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}\right],$$
$$t_2 = 27\left[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}\right].^{*)}$$

Máme tedy tři rovnice

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 &= \sqrt[3]{t_1} \\ x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3 &= \sqrt[3]{t_2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ježto — jak jsme v (12) vypočetli — je $(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3) \cdot (x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3) = -3p$, musíme rozumět odmocninám v (13) opět tak, že si zvolíme jen takové jejich hodnoty, aby součin byl $(-3p)$.

Vzhledem ke vztahu $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ dostaneme sčítáním rovnic (13)

$$x_1 = \tfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}\right).$$

Násobíme-li (13) po řadě 1, ε, ε^2, nebo 1, ε^2, ε a sčítáme, máme

$$x_2 = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon^2\sqrt[3]{t_1} + \varepsilon\sqrt[3]{t_2}\right),$$
$$x_3 = \tfrac{1}{3}\left(\varepsilon\sqrt[3]{t_1} + \varepsilon^2\sqrt[3]{t_2}\right),$$

což jsou Cardanovy formule.

d) Chceme nyní provésti diskusi získaných výsledků.

Uvažujme výraz

$$D = -108\left[(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3\right] = -(27q^2 + 4p^3),$$

který jsme nazvali **diskriminantem** rovnice (3′).

Ukážeme, že jest

$$D = [(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^2. \tag{14}$$

Abychom to dokázali, stačí dosaditi:

---

*) Přímým výpočtem se přesvědčíme, že jsme volili znaménka správně.

$$y_1 = u + v,\ y_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2,\ y_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon,$$
$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3});\ \varepsilon^2 = \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3});\ 1 - \varepsilon = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3};$$
$$1 - \varepsilon^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3};\ \varepsilon - \varepsilon^2 = i\sqrt{3},$$
$$y_1 - y_2 = \tfrac{3}{2}(u + v) - i\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}(u - v),$$
$$y_1 - y_3 = \tfrac{3}{2}(u + v) + i\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{2}(u - v),$$
$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = 3(u^2 + v^2 + uv),\quad y_2 - y_3 = i\sqrt{3}(u - v),$$
$$[(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^2 = -27(u^3 - v^3) = -(27q^2 + 4p^3),$$ c. b. d.

Dosavadní výsledky platily pro kubickou rovnici s libovolnými koeficienty. Nyní předpokládejme, že p a q jsou čísla reálná.

Platí: Jestliže pro diskriminant kubické rovnice s reálnými koeficienty je $D > 0$, má rovnice tři kořeny reálné; je-li $D = 0$, má rovnice tři kořeny reálné, které však nejsou vesměs různé. Je-li $D < 0$, má rovnice jeden kořen reálný a jeden pár kořenů komplexních sdružených.

Důkaz: Ze (14) plyne:

α) Jsou-li y_1, y_2, y_3 reálné a navzájem různé, jest D jako čtverec reálného čísla kladný.

β) Jsou-li kořeny y_1, y_2, y_3 navzájem různé a existuje-li pár komplexních sdružených kořenů, nechť jest to y_1 a y_2. Výraz $(y_1 - y_2)^2$ jest pak záporný, ale $(y_3 - y_1)^2 (y_3 - y_2)^2$ jakožto součin dvou komplexních sdružených čísel jest kladný. Tedy $D < 0$.

γ) Je-li $D = 0$, existuje — jak víme — (alespoň) dvojnásobný kořen; ten jest ovšem reálný, a ježto komplexní kořeny vystupují jen v párech, musí býti i třetí kořen reálný.

e) Cardanův vzorec podává řešení kubické rovnice v nevhodném tvaru, a to ze dvou důvodů.

α) Rovnice $y^3 - 5y + 4 = 0$ má — jak patrno na první pohled — kořen $y = 1$. Cardanův vzorec však dává

$$y = \sqrt[3]{-2 + \tfrac{1}{3}\sqrt{-\tfrac{17}{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \tfrac{1}{3}\sqrt{-\tfrac{17}{3}}}.$$

Jest ovšem $\sqrt[3]{-2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}^7}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{3}^7}$ — jak se přesvědčíme umocněním na třetí — takže úpravou dostáváme $y = 1$; v takovémto případě jest však lépe hledati racionální kořeny zkusmo.

β) Jestliže $D = -4p^3 - 27q^2 > 0$ (to je možné jen pro $p < 0$), má rovnice 3 reálné kořeny. Cardanův vzorec podává je však ve tvaru komplexním. To zdá se býti oklikou, kterou by bylo lépe obejíti. Kdybychom chtěli tyto komplexní veličiny odstraniti, t. j. třetí odmocniny komplexních čísel, které jsou v Cardanově formuli, uvésti na tvar komplexního čísla $A + Bi$, zjistili bychom, že veličiny A, B musí vyhovovati úplně stejné rovnici, jako byla rovnice daná. Kořeny rovnice pro A byly by reálné, takže ve výraze pro A by vystupovaly opět komplexní veličiny. Proto byl tento případ nazván „casus irreducibilis".

Dá se dokázati, že neexistuje žádný tvar algebraického řešení*) rovnic 3. stupně s třemi reálnými kořeny, který by operoval jen reálnými čísly a že tedy objevení se komplexních veličin není důsledkem nevhodně voleného postupu řešení.

f) V případě $D > 0$ pomáháme si proto jednoduše t. zv. řešením goniometrickým.

Je-li $D = -4p^3 - 27q^2 > 0$, musí $p < 0$. Položme ve vzorci

$$y = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3}}$$

$$-\tfrac{1}{2}q = \varrho \cos\varphi,$$

$$\sqrt{-(\tfrac{1}{2}q)^2 - (\tfrac{1}{3}p)^3} = \varrho \sin\varphi,$$

(to lze, neboť $D > 0$). Odtud

$$\varrho = \sqrt{(-\tfrac{1}{3}p)^3} > 0$$

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2\varrho} = -\frac{q}{2\sqrt{(-\frac{1}{3}p)^3}}.$$

*) T. j. (zhruba řečeno) pomocí odmocnin. Přesný výklad viz str. 74.

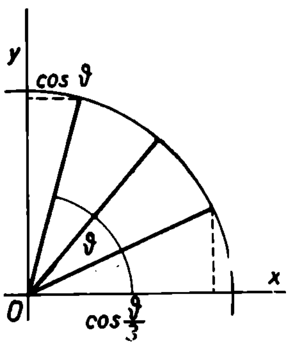
Je $\quad y = \sqrt[3]{\varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + \sqrt[3]{\varrho\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)}.$

(Při tom musí součin obou odmocnin býti, jako vždy, $-\frac{1}{3}p$.) Dle Moivreovy poučky v 1. kapitole je

$$\sqrt[3]{\varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[3]{\varrho}\,[\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)] =$$
$$= \sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,[\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi) + i\sin\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)].$$

Stejně

$$\sqrt[3]{\varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,[\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi) - i\sin\tfrac{1}{3}(\varphi + 2k\pi)].$$



Obr. 4.

Aby součin byl $(-\frac{1}{3}p)$, stačí vzíti v obou výrazech totéž číslo k. Jest tedy pro $k = 0, 1, 2$:

$$y_1 = 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,.\cos\tfrac{1}{3}\varphi,$$
$$y_2 = 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,.\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 2\pi),$$
$$y_3 = 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}\,.\cos\tfrac{1}{3}(\varphi + 4\pi). \tag{15}$$

Také pro $D < 0$ lze odvoditi řešení goniometrické; není však již tak jednoduché.

Poznámka. Goniometrické řešení ukazuje, že řešení kubické rovnice úzce souvisí s úlohou rozděliti úhel na tři díly. Poznáme to přímo takto: Z goniometrie je známý vztah

$$4\cos^3\tfrac{1}{3}\vartheta - 3\cos\tfrac{1}{3}\vartheta = \cos\vartheta.$$

Položme

$$x = 2\cos\tfrac{1}{3}\vartheta,\ \text{pak}\ x^3 - 3x - 2\cos\vartheta = 0.$$

Rozděliti úhel na tři díly znamená nalézti veličinu x, je-li dáno $\cos\vartheta$. (Viz obr. 4.) Ježto pro x jsme dostali rovnici 3. stupně, dá se dokázati, že ji lze řešiti pomocí druhých odmocnin jen pro některé speciální hodnoty ϑ. Jest proto trisekce úhlu pravítkem a kružítkem obecně neřešitelná.*)

*) Bližší výklad viz v knize: Vl. Knichal: Konstrukce pravítkem a kružítkem, (vyjde nákl. JČMF).

Cvičení. 1. Řešte rovnice:

α) $2x^3 - 3x - 3 = 0$. [1,568, . . .]

β) $x^3 + 7x + 3 = 0$. [$-0,4181286$; $0,209064 \pm 2,67042i$.]

γ) $x^3 + 3x + 2 = 0$. [$-0,5961$; . . .]

δ) $x^3 - 9x - 28 = 0$. [4; $-2 \pm i\sqrt{3}$.]

2. Ukažte dle odstavce e) neupotřebitelnost Cardanova vzorce v příkladech:

α) $x^3 + x + 10 = 0$.

β) $x^3 + 2x - 3 = 0$.

γ) $x^3 - 4x - 3 = 0$.

δ) $x^3 - x - 6 = 0$.

3. Řešte $x^3 - 3x - 2 = 0$! [$x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1$.]

4. Řešte rovnici $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, víte-li, že mezi x_1 a x_2 platí vztah $x_2 = x_1^2 + x_1 + 1$.

[Návod: Dosazením za x_2 do původní rovnice jest $x_1^6 + 3x_1^5 - 5x_1^3 - x_1^2 + 2x_1 = 0$. Společný dělitel tohoto výrazu a původní rovnice jest $x_1 - 1$. Jest pak $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.]

5. Jest dán mnohočlen $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ mající kořeny $1, \alpha, \beta$. Nalezněte mnohočlen $\varphi(x)$ druhého stupně, který při $x = 1$ je roven 1, při $x = \alpha$ nabývá hodnoty β a při $x = \beta$ nabývá hodnoty α! [$\varphi(x) = \frac{1}{5}(4x^2 + 3x - 2)$.]

6. Dokažte: Mají-li kořeny rovnice

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \tag{*}$$

tvořiti aritmetickou řadu, musí

$$2a_1^3 - 9a_0a_1a_2 + 27a_3a_0^2 = 0.$$

[Návod. Dosaďte za x do (*) $x_1 - d$, x_1, $x_1 + d$. Ze vzniklých tří rovnic eliminujte dvě neznámé x_1, d!] [Lze také dokázati že výraz na levé straně jest roven součinu $(x_1 - 2x_2 + x_3) \,.\, (x_2 - 2x_3 + x_1) \,.\, (x_3 - 2x_1 + x_2)$, z čehož plyne okamžitě jiný důkaz.]

7. Dokažte, že $a_1^3 \,.\, a_3 - a_0 \,.\, a_2^3 = 0$ je postačující podmínkou, aby rovnice (*) měla kořeny, tvořící geometrickou řadu.

8. Budiž $2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_0a_3^2 = 0$. Pak jeden kořen rovnice (*) jest harmonickým průměrem obou dalších. Dokažte!

9. Aby rovnice (*) měla dva kořeny stejné absolutní hodnoty, ale opačného znaménka, musí platiti

$$a_0a_3 - a_1a_2 = 0. \text{ Dokažte!}$$

[Návod. Rovnici musí hověti $-x$; obě rovnice sečteme a odečteme a eliminujeme proměnnou x^2.]

10. Dokažte, že tyto geometrické úlohy vedou na kubické rovnice nerozložitelné ve dvě části s racionálními koeficienty (a jsou tedy pravítkem a kružítkem obecně neřešitelny):

α) Sestrojiti rovnoramenný trojúhelník, je-li dáno: obvod $2s$ poloměr kružnice vepsané ϱ.

β) Sestrojiti obecný trojúhelník, dáno-li u_α, u_β, u_γ.

γ) Sestrojiti rovnoramenný trojúhelník, dáno-li r, P.

11. Řešení kubické rovnice lze provésti také tak, že do rovnice

$$a_0x^3 - 3a_1x^2 + 3a_2x - a_3 = 0$$

dosadíme y substitucí $x = \dfrac{\mu y - \lambda}{y - 1}$ a volíme μ a λ tak, aby rovnice přešla na tvar $y^3 - A = 0$. Ukažte, že k tomu nutno a stačí zvoliti za λ a μ kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 - \frac{a_0a_3 - a_1a_2}{a_0a_2 - a_1^2} \cdot z + \frac{a_1a_3 - a_2^2}{a_0a_2 - a_1^2} = 0!$$

Rovnice čtvrtého stupně. Řešení a diskusi rovnic čtvrtého stupně nebudeme prováděti již tak detailně jako u rovnice 3. stupně, ježto metody vyšetřování jsou skoro stejné. Na některých místech uvedeme jen výsledky.

a) První metoda k řešení rovnice

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \qquad (1')$$

jest Eulerova*) modifikace metody Huddeovy.**)

*) Leonhard Euler (nar. v Basileji r. 1707). Jeho otec, reform. farář byl žákem slavného J. Bernoulliho. Byl proto prvním učitelem svého syna. Euler již v 23 letech byl členem petrohradské Akademie, později ředitelem berlínské Akademie. Od r. 1735 byl slepý na jedno oko; v r. 1766 dokonce oslepl úplně. Přece však nepřestával pracovati a své práce až do r. 1783, kdy zemřel, diktoval. Euler byl poslední matematik všestranně činný. Jeho práce v integrálním počtu, v teorii čísel, v trigonometrii, v teorii křivek, hlavně však v nauce o řadách jsou základem, na němž spočívá veliká část dnešní matematiky. Nemalá jest také zásluha Eulerova, že zavedl definitivní symboliku, názvosloví a označování matematických veličin (jako e, π, i, kombinační čísla atd.). Vydal veliký počet prací, psaných velmi jasně a srozumitelně.

Substitucí $x = y - \frac{a_1}{4}$ odstraníme člen s x^3. Bude

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{1}$$

kde
$$p = a_2 - \tfrac{3}{8}a_1^2,$$
$$q = a_3 - \tfrac{1}{2}a_1a_2 + \tfrac{1}{8}a_1^3,$$
$$r = a_4 - \tfrac{1}{4}a_1a_3 + \tfrac{1}{16}a_1^2a_2 - \tfrac{3}{256}a_1^4.$$

Dosaďme místo jedné neznámé y tři neznámé u, v, w, vztahem

$$2y = u + v + w.$$

Pamatujme při tom, že máme pak ještě k disposici dva vztahy mezi u, v, w, které si můžeme voliti vhodným způsobem. Počítejme

$$4y^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2\,(uv + uw + vw),$$
$$16y^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4\,(u^2 + v^2 + w^2)\,(uv + vw + wu) + \\ + 4\,(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 8uvw\,(u + v + w).$$

Dosaďme do (1) násobené 16; je

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4\,(uv + vw + wu)\,(u^2 + v^2 + w^2 + 2p) + \\ + 4p\,(u^2 + v^2 + w^2) + 8\,(uvw + q)\,(u + v + w) + \\ + 4\,(u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2) + 16r = 0. \tag{2}$$

Za dva volitelné vztahy vezmeme

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2p, \tag{3}$$
$$uvw = -q. \tag{4}$$

Z rovnice (2) zůstává po dosazení

$$u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2 = p^2 - 4r. \tag{5}$$

[J. Bernoulli, o kterém se vpředu zmiňujeme, byl jedním z členů proslavené matematické rodiny Bernoulliů (1654 až 1863), z které pochází neméně než 11 znamenitých matematiků. Rodina ta pocházela původně z Antverp; pronásledována z náboženských důvodů uchýlila se však do Basileje. Členové této rodiny byli profesory na universitách v Basileji, Groningách, Padově atd.]

**) První nalezl řešení rovnice čtvrtého stupně Luigi Ferrari (1522—1565, Bologna, Milán), žák Cardanův.

Umocníme-li (4) na druhou

$$u^2v^2w^2 = q^2. \tag{6}$$

Vztahy (3), (5), (6) ukazují, že veličiny u^2, v^2, w^2 jsou kořeny rovnice třetího stupně

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)\,t - q^2 = 0. \tag{7}$$

Tuto rovnici nazýváme kubickou resolventou bikvadratické rovnice (1). Nechť její kořeny jsou t_1, t_2, t_3, pak

$$u = \sqrt{t_1},\ v = \sqrt{t_2},\ w = \sqrt{t_3}.$$

Znaménka odmocnin nejsou ovšem zcela libovolná, neboť dle (4) musí*)

$$\sqrt{t_1}\,.\,\sqrt{t_2}\,.\,\sqrt{t_3} = -q, \tag{8}$$

t. j. u dvou lze voliti znaménka libovolně, znaménko třetí jest pak vztahem (8) jednoznačně určeno. Dostáváme pak 4 kořeny, které lze psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} 2y_1 &= \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} \\ 2y_2 &= \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3} \\ 2y_3 &= -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3} \\ 2y_4 &= -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ve všech čtyřech výrazech mají příslušné odmocniny týž pevný význam, stanovený ve shodě s (8). Kdybychom volili jinou trojici hodnot odmocnin, ale tak, aby (8) zůstalo zachováno, dostali bychom tytéž kořeny, ale v přeházeném pořadí.

b) Diskusi bikvadratické rovnice s reálnými koeficienty jen naznačíme (v případě, že t_1, t_2, t_3 jsou navzájem různé). Ježto ze (7) plyne $t_1\,.\,t_2\,.\,t_3 = q^2$ (což je nezáporné), jsou možny jen tyto tři případy.

α) t_1, t_2, t_3 jsou reálná, nezáporná čísla; pak má (1) 4 reálné kořeny.

*) Nesmíme opět zapomenout, že jsme (4) umocnili.

β) t_1 reálné, nezáporné, t_2, t_3 reálné, záporné. Z (9) plyne, že všechny kořeny jsou pak komplexní, a to y_1 sdružené s y_2, y_3 sdružené s y_4.

γ) Resolventa má dva kořeny komplexní sdružené na př. t_2 a t_3, a reálný nezáporný kořen t_1. Hodnoty odmocnin volme tak, aby $\sqrt{t_2}$ a $\sqrt{t_3}$ byly komplexní sdružené. Pak kořeny x_1 a x_2 jsou reálné, x_3 a x_4 komplexní sdružené.

Který z uvedených případů nastane, závisí pouze na diskriminantu rovnice (1). Diskriminantem rovnice (1) nazýváme výraz

$$D = [(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)]^2.$$

Je to symetrická funkce kořenů rovnice (1) a lze ji tedy vyjádřiti pomocí veličin p, q, r. Po dlouhém výpočtu vyjde:

$$D = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144prq^2 + 256r^3 - 27q^4.$$

Výpočtem se přesvědčíme, že diskriminanty rovnice (1) a její resolventy (7) jsou stejné.

Odtud nalezneme ihned (užívajíce známých výsledků o kubické rovnici):

Je-li $D < 0$, má rovnice (1) 2 kořeny reálné a 2 komplexní sdružené.

Je-li $D > 0$ a platí $p < 0$, $p^2 - 4r > 0$, má (1) 4 kořeny reálné, jinak 2 páry kořenů komplexních sdružených.

Je-li $D = 0$, má (1) vícenásobný kořen.

c) Rovnici

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

lze řešiti mnoha dalšími způsoby. Matematicky jest opět nejcennější metoda analogická metodě Lagrangeově, o které jsme mluvili u kubické rovnice. Hledáme takovou funkci kořenů, která není sice symetrická, ale všemi permutacemi čtyř indexů přechází v méně než 4 jiné funkce. Na př. má žádanou vlastnost trojice

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1x_2 + x_3x_4, \\ t_2 &= x_1x_3 + x_2x_4, \\ t_3 &= x_1x_4 + x_2x_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Každý z těchto výrazů má tu vlastnost, že kteroukoliv ze $4! = 24$ permutací 4 indexů 1, 2, 3, 4 buď se vůbec nezmění, anebo přejde v některou z druhých dvou. To tedy znamená, že výrazy

$$t_1 + t_2 + t_3, \quad t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3, \quad t_1t_2t_3 \tag{11}$$

jsou symetrickými funkcemi kořenů x_1, x_2, x_3, x_4. Dovedeme je tedy (po jisté počtářské námaze ovšem) vyjádřiti pomocí veličin a_1, a_2, a_3, a_4. Pak ale dovedeme také napsati ihned kubickou rovnici (resolventu), která má čísla t_1, t_2, t_3 za kořeny. Podrobným výpočtem vyjde

$$t^3 - a_2t^2 + (a_1a_3 - 4a_4)\,t - (a_1{}^2a_4 - 4a_2a_4 + a_3{}^2) = 0.$$

Tuto rovnici řešíme, čímž nalezneme hodnoty t_1, t_2, t_3. Další postup je pak jednoduchý, neboť na př. z rovnic

$$x_1x_2 + x_3x_4 = t_1$$
$$x_1x_2 \,.\, x_3x_4 = a_4$$

lze určiti x_1x_2 a x_3x_4. Stejně x_1x_3, x_2x_4; x_1x_4, x_2x_3. Konec výpočtu jest pak zcela elementární. Nutno ovšem dáti pozor na vhodné kombinace znamének u odmocnin a pod.

Funkcí vlastností (10) existuje ovšem více. Užívajíce na př. systém

$$t_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$
$$t_2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,$$
$$t_3 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2,$$

dostali bychom v podstatě řešení odstavce a).

d) Uvedeme ještě jednu velmi přirozenou metodu. Pokusíme se totiž levou stranu bikvadratické rovnice — kterou píšeme s koeficienty poněkud upravenými v tvaru

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \tag{12}$$

— rozložiti na součin dvou kvadratických trojčlenů

$$a_0\,(x^2 + 2px + q)\,.\,(x^2 + 2p_1x + q_1). \tag{13}$$

Podaří-li se nám nalézti p, q, p_1, q_1, lze rovnici považovati za řešenou. Srovnáním koeficientů u stejných mocnin x v (12) a (12) dostáváme

$$p + p_1 = 2\frac{a_1}{a_0}, \quad pq_1 + p_1q = 2\frac{a_3}{a_0},$$

$$q + q_1 + 4pp_1 = 6\frac{a_2}{a_0}, \quad qq_1 = \frac{a_4}{a_0}.$$

Z třetí rovnice

$$\frac{a_2}{a_0} - pp_1 = \frac{1}{4}\left(q + q_1 - \frac{2a_2}{a_0}\right).$$

Zavedeme novou neznámou t

$$t = \frac{a_2}{a_0} - pp_1 = \frac{1}{4}\left(q + q_1 - 2\frac{a_2}{a_0}\right).$$

Ze čtyř původních rovnic chceme vyloučiti p, p_1, q, q_1 a zavésti tam t.

To se nám jednoduše podaří tímto umělým obratem: Vypočtěme si veličiny:

$$p^2 + p_1^2 = (p + p_1)^2 - 2pp_1 = 2t + 2\,.\,\frac{2a_1^2 - a_0a_2}{a_0^2},$$

$$q^2 + q_1^2 = (q + q_1)^2 - 2qq_1 = \left(4t + \frac{2a_2}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_4}{a_0},$$

$$(pq_1 - p_1q)^2 = (pq_1 + p_1q)^2 - 4pp_1qq_1 = 4\frac{a_3^2}{a_0^2} + 4\left(t - \frac{a_2}{a_0}\right).\frac{a_4}{a_0},$$

$$(pq + p_1q_1)^2 = [(p + p_1)(q + q_1) - (pq_1 + p_1q)]^2 = \left(8\frac{a_1}{a_0}t + \right.$$
$$\left. + 2\frac{2a_1a_2 - a_0a_3}{a_0^2}\right)^2,$$

a dosaďme do identity

$$(p^2 + p_1^2)(q^2 + q_1^2) = (pq_1 - p_1q)^2 + (pq + p_1q_1)^2;$$

dostáváme po úpravě

$$4a_0^3t^3 - a_0(a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3)\,t +$$
$$+ (a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3) = 0.$$

Označme

$$I = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3,$$
$$J = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3.$$

Kubická resolventa jest potom

$$4a_0^3t^3 - a_0It + J = 0. \qquad (14)$$

Nalezneme-li nějaký kořen t_1 této rovnice, jest

$$p + p_1 = 2\frac{a_1}{a_0}, \quad pp_1 = \frac{a_2}{a_0} - t_1 \quad \text{a} \quad q + q_1 = 4t_1 + \frac{2a_3}{a_0}, \quad qq_1 = \frac{a_4}{a_0}.$$

Odtud určíme tedy p, p_1, q, q_1, čímž úloha je řešena.

Jest jasné, že pro t musela vyjíti kubická rovnice. Myslíme-li si totiž rozklad (12) v kořenové činitele

$$a_0(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3).(x - x_4)$$

jsou myslitelny tři kombinace, a to

$$(x - x_1)(x - x_2) \text{ a } (x - x_3)(x - x_4),$$
$$(x - x_1)(x - x_3) \text{ a } (x - x_2)(x - x_4),$$
$$(x - x_1)(x - x_4) \text{ a } (x - x_2)(x - x_3).$$

Cvičení. 1. Řešte rovnici $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5 = 0$, víte-li, že jeden kořen jest $(-i)$! [i; $\frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{11})$.]

2. Víte-li, že kořeny rovnice

$$x^4 - 21\tfrac{1}{4}x^3 + 89\tfrac{1}{4}x^2 - 85x + 16 = 0$$

tvoří geometrickou řadu, nalezněte je! [$\frac{1}{4}$; 1; 4; 16.]

3. Řešte rovnici $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$, víte-li, že součet dvou kořenů jest 4.

[Návod: Ježto $x_2 = 4 - x_1$, dosadíme-li x_2 do původní rovnice, máme rovnici $x_1^4 - 9x_1^3 + 29x_1^2 - 39x_1 + 18 = 0$. Tato a původní rovnice mají společného dělitele $x_1 - 1$; tedy $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$. Další kořeny řešením kvadratické rovnice.]

4. Nalezněte podmínku, aby rovnice

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

měla dva kořeny stejné absolutní hodnoty, ale opačného znaménka. [Návod: viz př. 9, str. 49. Výsledek $a_0a_3^2 - a_1a_2a_3 + a_1^2a_4 = 0$.]

5. Je-li

$$16a_1^4 - 24a_0a_1^2a_2 + 8a_0^2a_1a_3 - a_0^3a_4 = 0,$$

má rovnice

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0 \qquad (**)$$

jeden kořen, který jest roven součtu všech zbývajících. Dokažte!

6. Je-li $3a_1^4 - 6a_0a_1^2a_2 + 4a_0^2a_1a_3 - a_0^3a_4 = 0$, má rovnice (**) jeden kořen, který jest roven aritmetickému průměru zbývajících tří. Dokažte!

7. Čtyři kořeny rovnice (**) tvoří harmonickou čtveřinu, když

$$a_0a_3^2 + a_1^2a_4 + a_2^3 - a_0a_2a_4 - 2a_1a_2a_3 = 0.$$

Dokažte!

[Návod: Čtyři čísla x_1, x_2, x_3, x_4 tvoří harmonickou čtveřinu (v tomto pořadí), je-li $\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = -1$. Tato podmínka kombinována s podmínkami (1) na str. 30 3. kapitoly, po vyloučení x_1, x_2, x_3, x_4, dá hledaný vztah. Jinak lze získati týž výsledek, vyjádříme-li součin $H_{23\cdot14} \cdot H_{31\cdot24} \cdot H_{12\cdot34}$, kde na př.

$$H_{23\cdot14} = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_4),$$

pomocí koeficientů dané rovnice.]

8. Dokažte: Má-li rovnice $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kořeny tvořící aritmetickou řadu, jest nutně

$$a^3 - 4ab + 8c = 0,$$

$$11a^4 - 8a^2b - 144b^2 + 1600d = 0.$$

9. Výrazy I a J zavedené v textu jsou invarianty (viz př. 5 u kvadratické rovnice) polynomu (11). Dokažte to, alespoň pro I!

10. Užívajíce vztahu mezi diskriminantem rovnice a její resolventy, dokažte z (14), že diskriminant polynomu (12), D a invarianty I, J jsou vázány relací

$$D = 16a_0^6 (27J^2 - I^3).$$

11. Má-li bikvadratická rovnice (12) tři kořeny stejné, jest

$I = 0$ a $J = 0$. Dokažte!

12. Rovnici $x^4 + 6c_2x^2 + 4c_3x + c_4 = 0$ lze řešiti také tak, že zavedeme novou neznámou $x = \mu y + \lambda$, při čemž volíme μ a λ tak, aby rovnice přešla v reciprokou.

Pro μ a λ dostáváme pak rovnice

$$\mu^2 = \frac{1}{\lambda}(\lambda^3 + 3c_2\lambda + c_3),$$

$$-2c_3\lambda^3 + (9c_2^2 - c_4)\lambda^2 + 6c_2c_3\lambda + c_3^2 = 0,$$

takže jest řešení převedeno na řešení rovnic nižšího stupně. Dokažte!

5. Některé zvláštní typy rovnic.

Rovnice pro dělení kruhu. Zajímavým a důležitým typem rovnic jest rovnice tvaru

$$x^n - 1 = 0. \qquad (1)$$

Řešením této rovnice jest $x = \sqrt[n]{1}$. Víme z Moivreovy poučky (str. 9), že n-tá odmocnina z každého komplexního čísla má n hodnot a platí vzorec

$$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ježto $1 = \cos 0 + i\sin 0$, dosadíme sem $\varphi = 0$ a máme ihned

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Označme první kořen $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \varepsilon$.

Dle Moivreovy poučky jest

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \varepsilon^k;$$

tedy: Řada čísel

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1 \qquad (2)$$

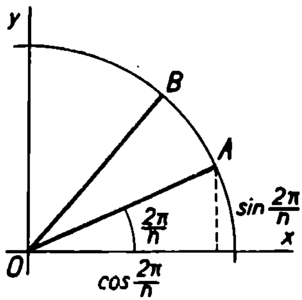
představuje všecky kořeny dané rovnice (1).

Nalezením kořenů dané rovnice v goniometrickém tvaru jsme úlohu v jistém směru úplně rozřešili.

Všimněme si nyní geometrického významu řešení (2). Abychom v komplexní rovině nalezli bod $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, sestrojíme kružnici o poloměru $r = 1$ a rozdělíme její obvod na n-stejných dílů. Bod A příslušející úhlu $\frac{2\pi}{n}$ představuje číslo $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \varepsilon$. Bod B příslušející úhlu $\frac{4\pi}{n}$ představuje číslo $\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \varepsilon^2$ atd.

Vidíme tedy, že řešiti rovnici (1) neznamená geometricky nic jiného, než rozděliti plný úhel na n stejných dílů [anebo — což je totéž — sestrojiti pravidelný n-úhelník vepsaný do kružnice].

Odtud pochází název uvedený v nadpisu.



Obr. 5.

Goniometrické řešení nás však úplně neuspokojuje. Zajímá nás řešení algebraické,*) t. j. takové, kde kořeny máme vyjádřeny jen pomocí odmocnin, bez goniometrických funkcí.

Na př. pro rovnici $x^3 - 1 = 0$ jsme nalezli $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. Řešme ještě rovnici $x^5 - 1 = 0$. Po dělení kořenovým činitelem $x - 1$ lze psáti

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0.$$

Dosadíme-li $x + \frac{1}{x} = y$, máme

*) Přesný výklad pojmu algebraické řešitelnosti jest podán na str. 74.

$$y^2 - 2 + y + 1 = 0,$$
$$y_{12} = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}),$$

odkud po dosazení do $x + \frac{1}{x} = y$ a řešení kvadratické rovnice:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \tfrac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{5} + \sqrt{-10 \mp 2\sqrt{5}}\right), \\ x_{3,4} &= \tfrac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{5} - \sqrt{-10 \pm 2\sqrt{5}}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Vhodným obratem lze řešiti několik prvních rovnic, na př. také $x^7 - 1 = 0$ atd. Gaussovi**) se podařilo důvtipným způsobem nalézti obecnou metodu k řešení takových rovnic. Dokázal tím, že obecná rovnice typu (1) jest vždy algebraicky řešitelná. Jeho výsledky na tomto poli byly rozhodující důležitosti pro další vývoj nauky o rovnicích.

Gauss zároveň dokázal, že kořeny této rovnice lze vyjádřiti pomocí druhých odmocnin jenom tenkráte, je-li n číslo složené z libovolné mocniny 2^ν a prvočísel tvar $2^k + 1$, při čemž každé z nich smí vystupovati jen v první mocnině.

Ježto kružítkem a pravítkem lze sestrojiti jen takové

**) Karel Bedřich Gauss byl vůdčím duchem matematickým počátkem 19. století (nar. 30. dubna 1777 v Brunšviku, zemřel 23. února 1855 v Gotinkách). Jeho všestranný duch zasáhl hluboko do všech odvětví matematiky a astronomie, fysiky i geodesie. Gauss vynikl svou obsáhlostí a koncepcí daleko nad své současníky. Ať v číselné teorii a algebře, nebo v teorii magnetismu, nebo v otázkách nebeské mechaniky, všude jsou Gaussovy práce základem dalšího vývoje. Roku 1801 vydal svoje proslavené dílo „Disquisitiones arithmeticae“ — vrchol tehdejší čisté matematiky. Gaussovi patří také zásluha, že zavedl čísla imaginární, dokázal první fundamentální větu, řadu vět z teorie ploch atd. Jeho objevy v teorii rovnic pro dělení kruhu měly nesmírný význam pro celé další století. Gauss byl si také vědom jejich ceny. Říká se, že jako si kdysi přál Archimedes, aby na jeho náhrobním kameni byl válec s koulí, tak i Gauss si přál, aby na jeho náhrobním kameni byl zvěčněn sedmnáctiúhelník — kterého se týká jedno z jeho vrcholných děl.

obecné algebraické výrazy, v kterých se vyskytují jen druhé odmocniny, znamená to, že **kružítkem a pravítkem** lze sestrojiti jen takové pravidelné mnohoúhelníky, jejichž počet stran má shora vytčenou vlastnost.

Speciálně pro mnohoúhelníky o prvočíselném počtu stran p, musí

$$p = 2^k + 1.$$

Toto číslo může býti prvočíslem — jak se lehce zjistí — jenom tenkráte, když $k = 2^\lambda$, tedy

$$p = 2^{2^\lambda} + 1.$$

Pro $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ máme prvočísla $p = 3, 5, 17, 257, 65\,537$. Pro $\lambda = 5$ však číslo 4 294 967 297 jest — jak Euler ukázal — dělitelné číslem 641 a tedy není prvočíslem.*) Nevíme, zda existují ještě vůbec další prvočísla tohoto tvaru.

Z napsaných čísel vyplývá, že pravidelný 5-úhelník a 17-úhelník lze pravítkem a kružítkem sestrojiti, ne však na př. pravidelný 7-úhelník. Další pravítkem a kružítkem konstruovatelný mnohoúhelník má 257 stran.

Konstrukce pravidelného pětiúhelníka byla známa již v starověku. Je zajímavé, že sedmnáctiúhelník sestrojil první teprve Gauss a to až tehdy, když již znal řešení rovnice $x^{17} - 1 = 0$.

Cvičení. 1. Dokažte:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = 0.$$

2. Dokažte, je-li ω třetím kořenem z jedné jest

$$(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz!$$

3. Řešení rovnice $x^7 - 1 = 0$ lze převésti na řešení těchto dvou rovnic po sobě

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0,$$
$$x^2 - yx + 1 = 0.$$

Dokažte!

*) Euler tak také vyvrátil hypotetické tvrzení Fermatovo (1601—1665), že všechna čísla tvaru $2^{2^\lambda} + 1$ jsou prvočísla.

Usuďte odtud, že pravidelný sedmiúhelník nelze sestrojiti pravítkem a kružítkem.

4. Dokažte, že platí:

α) pro n sudé: $(x^n - 1) = (x^2 - 1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}x + 1\right) \cdot$
$\cdot \left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{n}x + 1\right) \dots \left(x^2 - 2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}x + 1\right)$,

β) pro n liché: $(x^n - 1) = (x - 1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}x + 1\right) \cdot$
$\cdot \left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{n}x + 1\right) \dots \left(x^2 - 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}x + 1\right)$.

{Návod: Rozložíme v kořenové činitele a vynásobíme členy s koeficienty komplexními sdruženými:

$$\left[x - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\left[x - \left(\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right] = x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}x + 1.\}$$

5. Dokažte pomocí rovnice

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\cdot\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\dots$$
$$\dots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right)$$

tento zajímavý vztah:

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot\sin\frac{3\pi}{2n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

[Návod: Dělte levou stranu $x - 1$. Dosaďte pak $x = 1$. Obecný výraz na pravé straně bude $2 - 2\cos\frac{k\pi}{n} = 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$. Nalevo máme pak $2n$.]

Reciproké rovnice. Rovnici tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{4}$$

nazveme reciprokou — a to prvního nebo druhého druhu — platí-li pro koeficienty vztahy buď (I): $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \ldots,$ (5)

nebo (II): $a_0 = -a_n, a_1 = -a_{n-1}, a_2 = -a_{n-2}, \ldots$ (6)

Takto definované rovnice vyznačují se touto vlastností:

Má-li reciproká rovnice kořen α, má i kořen $\frac{1}{\alpha}$.

Důkaz: Dle předpokladu jest α kořenem (4), t. j. platí

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0.$$

Abychom dokázali, že $\frac{1}{\alpha}$ vyhovuje též rovnici (4), dosaďme tam. Máme

$$a_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n . (a_n\alpha^n + a^{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0). \quad (7)$$

V případě (I) máme však vzhledem k (5) místo (7) výraz

$$\frac{1}{\alpha^n} . (a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n),$$

který je vskutku roven nule.

V případě (II) máme místo (7)

$$-\frac{1}{\alpha^n} . (a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n),$$

což opět vymizí.

Řešení takovýchto rovnic lze lehce převésti na řešení rovnic nižšího stupně. To nyní ukážeme.

(Ia) Rovnice (4) buď sudého stupně, tvaru

$$a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0.$$

Spojme první člen s posledním atd. a dělme x^k

$$a_0\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + \ldots + a_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k = 0. \quad (8)$$

Nyní dosadíme novou neznámou

$$x + \frac{1}{x} = y. \tag{9}$$

Postupně

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^m + \frac{1}{x^m} = y^m - my^{m-2} + \frac{m\,(m-3)}{1\,.\,2}\,y^{m-4} -$$

$$- \frac{m\,(m-4)\,(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^{m-6} + \ldots$$

Dosazením do (8) máme rovnici k-tého stupně

$$b_0 y^k + b_1 y^{k-1} + \ldots + b_k = 0. \tag{10}$$

Tato rovnice má k kořenů, které nutno pak dosaditi do (9).

Problém se redukoval na řešení jediné rovnice k-tého stupně (10) a k rovnic kvadratických (9).

(Ib) Rovnice (4) jest lichého stupně:

$$a_0 x^{2k+1} + a_1 x^{2k} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Tato rovnice má vždy kořen $x = -1$ (jak se lehce přesvědčíme dosazením). Dělením faktorem $x + 1$ dostaneme reciprokou rovnici sudého stupně, kterou jsme vyšetřovali sub a).

(II) Reciproká rovnice druhého druhu

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots - a_1 x - a_0 = 0$$

má vždy kořen $x = 1$, což plyne dosazením. Po dělení faktorem $x - 1$ zůstává pak rovnice $(n - 1)$ stupně, ale I. druhu, které jsme právě vyšetřili.

Poznámka historická. Řešením reciprokých rovnic zabýval se první Francouz Abraham de Moivre (1667—1754). Substituce $y = x + \frac{1}{x}$ pochází od Lagrangea (kolem r. 1770).

Poznámka 1. Rovnice pro dělení kruhu jest zvláštním případem rovnic reciprokých a zvláštním případem obecné třídy rovnic zvaných rovnicemi Abelovými. Tak nazýváme totiž nerozložitelné algebraické rovnice, u kterých jeden kořen jest racionální funkcí jiného kořene. Tak u rovnice pro dělení kruhu jsou všechny kořeny mocninami jediného. Abelovy rovnice se vyznačují tím, že se dají vždy algebraicky řešiti.

Poznámka 2. Často se stává, že jest předložena k řešení rovnice s numerickými koeficienty vhodným způsobem specialisovaná. Zde ovšem záleží všecko na vhodné úpravě výrazů. Získati zručnosti v řešení takových příkladů jest věcí početní a matematické bystrosti a hlavně praxe. Zde nelze udati obecné metody, nutno každý případ vyšetřiti zvláště. Ve cvičení podáváme několik příkladů pro čtenáře.

Cvičení. 1. Uvažte podrobně: Ježto dovedeme řešiti obecnou rovnici třetího a čtvrtého stupně, dovedeme řešiti reciproké rovnice I. druhu až do devátého stupně a rovnice II. druhu dokonce až do desátého stupně.

2. Řešiti $(x + 1)^6 + (x - 1)^6 = a(x^6 + 1)$!

3. Řešiti $(x + 1)^8 + (x - 1)^8 = a(x^8 + 1)$!

4. Řešiti $(x + 1)^{12} + (x - 1)^{12} = 2(x^4 + 6x^2 + 1)^3$. (Substituce $y = x + \dfrac{1}{x}$; $y_{1,2} = 0$, $y_{3,4} = \pm i$, $x_{1,2,3,4} = \pm 2i$, $x_{5,6,7,8} = \pm (1 \pm \sqrt{2})\, i$.)

5. Čtverce kořenů jisté reciproké rovnice čtvrtého stupně jsou kořeny reciproké rovnice čtvrtého stupně identické s původní. Nalezněte všechny rovnice žádané vlastnosti! [Jsou čtyři: $(x - 1)^4 = 0$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, $(x^2 + x + 1)^2 = 0$, $(x - 1)^2 (x^2 + x + 1) = 0$.]

Jest řešiti rovnice:

6. $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$ [$x_{1,2} = \pm 1{,}732\ldots$; $x_3 = 3$].

7. $x^4 + x^3 + 6x^2 + 8x + 2 = 0$ [$x_1 = -1$; $x_2 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) \pm i\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$].

8. $x^6 - 2x^3 + 2 = 0$.

9. $x(x+2)(x+4)(x+6) = 105$ [$z = x + 3$ nová nezn.; $1; -7; -3 \pm i\sqrt{6}$].

10. $x^3 + 6x^2 + 12x = 117$ [$3; \frac{1}{2}(-9 \pm 5i\sqrt{3})$].

11. $3x^3 + 26x^2 + 52x + 24 = 0$ ($-2; -\frac{2}{3}; -6$).

12. $x^4 - 4x^3 + 6x - 4x^2 = 15$.

13. Metodou, kterou jsme rozřešili rovnici třetího stupně při Cardanově vzorci, lze řešiti i obecnější rovnice tvaru

$$x^n - \frac{n}{1}\binom{n-2}{0}\frac{p}{n}x^{n-2} + \frac{n}{2}\cdot\binom{n-3}{1}\frac{p^2}{n^2}x^{n-4} - \ldots - P = 0.$$

Řešte tak $x^5 - px^3 + \frac{1}{5}p^2x + q = 0$! [Vyjde $x_1 = A + B = \sqrt[5]{-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4(\frac{1}{5}p)^5}} + \sqrt[5]{-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4(\frac{1}{5}p)^5}}$; $x_2 = \varepsilon A + \varepsilon^4 B$, $x_3 = \varepsilon^2 A + \varepsilon^3 B$, $x_4 = \varepsilon^3 A + \varepsilon^2 B$, $x_5 = \varepsilon^4 A + \varepsilon B$.] [$\varepsilon$ jest pátý kořen z 1.]

Řešte rovnice:

14. $x^3 - 3ax + a^3 + 1 = 0$.

15. $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + (a^5 + 1) = 0$.

6. Neřešitelnost rovnic vyššího než čtvrtého stupně.

V předcházejících kapitolách naučili jsme se řešiti rovnice třetího a čtvrtého stupně. Jest přirozené, že hledáme obdobné metody k řešení rovnic pátého stupně. Chtěli bychom totiž nalézti nějaké řešení analogické na př. Cardanovu vzorci. Nalézti takovéto řešení se matematikům přes veškeré úsilí dlouho nedařilo. Starší matematikové si ovšem nelámali vůbec hlavu nad tím, zda takovéto řešení existuje, t. j. zda jest možné — považovali to za samozřejmé. Tady byl kámen úrazu. Ukázalo se totiž — když nesčetné pokusy nevedly k cíli — a po dlouhé době — že takové řešení obecně vůbec není možné.

První důkaz tohoto tvrzení pochází v podstatě od italského matematika Ruffiniho. Otázkou tou zabývali se později Cauchy, Abel a nakonec geniální matematik Galois.*)

*) Paolo Ruffini (1765—1822), původně lékař, stal se profesorem matematiky na universitě v Modeně. Jeho, zde citovaný důkaz, byl těžký a i Cauchy mu jen stěží rozuměl; přes to jeho zásluha jest nesporná.

Augustin Louis Cauchy narodil se 1789 v Paříži. Žil po červencové revoluci jako vychovatel u vévody z Bordeaux v Praze po dobu šesti let. Později působil opět na pařížské universitě. Žil v době rušných politických změn a dostával se často do nepříjemných situací pro svůj zatvrzelý odpor proti Napoleonovi i revoluci, zachovávaje věrnost královskému rodu bourbonskému. Přes to, uznávajíc jeho ohromné vědecké dílo, zachovala se k němu revoluce s nejkrajnější šetrností a byla mu několikráte nabídnuta universitní stolice. Na konec stal se prof. teor. astronomie v Paříži. Zemřel r. 1857 v Sceaux. Je jedním z nejvšestrannějších badatelů a nejplodnějších spisovatelů skoro ve všech oborech matematiky a matematické

Obsahem této kapitoly jest ukázati, proč rovnice pátého (a tím spíše vyššího) stupně jest neřešitelná v takové formě, v jaké jsme zvyklí počítati na př. kořeny kvadratické rovnice. I když neprovedeme důkaz do všech detailů (proč — to se ukáže na příslušném místě), máme aspoň možnost vniknouti hlouběji do struktury algebraických rovnic.

Tato kapitola bude poněkud obtížnější než předchozí, neboť musíme zavést několik nových pojmů. Odměnou za

---

fysiky. Jeho „Sebrané spisy" vycházejí stále v mnoha svazcích vydávaných pařížskou Akademií. Kromě prací v algebře zasloužil se Cauchy hlavně o solidní výstavbu diferenciálního počtu, teorie nekonečných řad, diferenciálních rovnic, teorie funkcí atd.

Niels Henrik Abel, narozený 5. srpna 1802 ve Finnö u Stavangeru v Norsku, zemřel ve věku 27 let dne 6. dubna 1829 ve Frolandu v Norsku. Milý a družný, avšak stále churavějící mladý tento muž, jest typem genia, stíhaného životním osudem. Pocházeje z chudé rodiny vystudoval v bídě a v neradostném světě. Vzdělával se nejdříve sám. Když se po studijním pobytu ve Francii a Německu vrátil do Kristianie, stal se tam docentem. O rok později (1829) zemřel ve chvíli, kdy měl býti povolán jako řádný profesor na berlínskou universitu. Cenu francouzské Akademie na r. 1830, kterou obdržel zároveň s Jacobim za vynikající práce matematické, dostali už jenom jeho dědici. Matematické zásluhy Abelovy jsou nesmrtelné. Jeho vyšetřování rovnic pátého stupně obsahují sice jisté nedostatky, ale jako zakladatel nauky o eliptických funkcích projevil intuici a nadání pro všechny časy těžko napodobitelné.

Evarist Galois jest jedinečnou postavou v dějinách matematiky. Narodil se 26. října 1811 v Paříži. Zemřel v souboji v květnu 1832 ve věku 21 let. Jeho romantický skon (šlo o milostnou záležitost) je pouze vyvrcholením jeho stejně pestrého — byť krátkého — života. V předtuše smrti, v předvečer osudného souboje, uložil své nejdůležitější výsledky v dopise svému příteli Augustu Chevalierovi. Práce ty vyšly pak několikrát během minulého století. Galois předstihl své vrstevníky o celé půlstoletí. Jeho neobyčejně jasné a překrásné práce byly na tehdejší dobu příliš abstraktní a těžké. Nebyl dlouho pochopen. Až koncem minulého a začátkem tohoto století řada matematiků propracovala jeho náměty a myšlenky. Pak teprve algebra dosáhla nečekaného rozkvětu.

námahu s tím spojenou dotkne se čtenář věcí, které patří k nejkrásnějším partiím matematiky a k nejhlubším pravdám, kterých se lidský duch dodnes vůbec dopracoval.

Číselná tělesa. Tělesem budeme rozuměti souhrn čísel majících tu vlastnost, že sčítáním, odčítáním, násobením a dělením čísel z toho souhrnu dostáváme opět jenom čísla z téhož souhrnu.

Na př. a) Souhrn všech čísel racionálních tvoří těleso. Neboť sčítáním, odčítáním, násobením a dělením dvou racionálních čísel obdržíme opět racionální čísla. Ve vzorcích

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Toto těleso budeme značiti znakem **R**.*)

b) Souhrn všech čísel reálných (t. j. racionálních a iracionálních) tvoří těleso.

c) Všechna čísla komplexní tvoří těleso.

d) Všechna čísla tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde a, b jsou čísla racionální, tvoří těleso, které označme **T**.

Neboť

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2}.$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2},$$

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{c^2 - 2d^2} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}.$$

Všimněme si tohoto tělesa. Obsahuje „více" elementů než těleso **R**. Položíme-li totiž v **T** $b = 0$ a a necháme probíhati všechna racionální čísla, dostaneme právě **R**. Těleso **T** jest tedy „širší" než těleso **R**.

Říkáme, že těleso **T** jest nadtělesem tělesa **R**. Těleso **T** vzniklo z tělesa **R** přidáním, nebo tak zvanou adjunkcí

---

*) Čtenáře snad nepřekvapuje, že značíme celý souhrn čísel jediným znakem. Počínáme si obdobně, jak jsme zvyklí z geometrie, kde na př. kružnici (t. j. souhrn nekonečně mnoho bodů roviny) značíme také jediným znakem k a pod.

čísla $\sqrt{2}$ (**T** je „nejmenší" těleso obsahující **R** a $\sqrt{2}$). Značíme $\mathbf{R} \subset \mathbf{T}$; $\mathbf{T} = \mathbf{R}(\sqrt{2})$.

e) Adjunkcí elementu i k tělesu čísel racionálních **R** vznikne těleso $\mathbf{R}(i)$. To obsahuje všechna čísla tvaru $a + bi$, kde a, b jsou racionální.

Podobně adjunkcí čísla i k tělesu čísel reálných vznikne těleso čísel komplexních.

f) Těleso $\mathbf{R}(\sqrt{2})$ vzniklo tak, že jsme k tělesu **R** adjungovali kořen rovnice $x^2 - 2 = 0$. Podobně adjunkcí kořene rovnice $x^2 + 1 = 0$ k tělesu čísel reálných vznikne těleso čísel komplexních.

Tento postup lze zobecniti. Je dáno těleso racionálních čísel **R** a nějaká nerozložitelná*) algebraická rovnice n-tého stupně s racionálními koeficienty

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Jeden pevně zvolený kořen této rovnice budiž Θ. Sčítáním, odčítáním, násobením a dělením racionálních čísel a čísla Θ lze vytvořiti těleso, které budeme značiti $\mathbf{R}(\Theta)$.

Obecný prvek tohoto tělesa takto získaný jest nejdříve tvaru

$$\alpha = \frac{b_0 + b_1\Theta + \ldots + b_m\Theta^m}{c_0 + c_1\Theta + \ldots + c_l\Theta^l},$$

kde b_i, c_i jsou racionální čísla. Z původní rovnice však plyne

$$\begin{aligned}
\Theta^n &= -a_1\Theta^{n-1} - a_2\Theta^{n-2} - \ldots - a_n,\\
\Theta^{n+1} &= -a_1\Theta^n - a_2\Theta^{n-1} - \ldots - a_n\Theta =\\
&= -a_1(-a_1\Theta^{n-1} - a_2\Theta^{n-2} - \ldots - a_n) -\\
&\quad - a_2\Theta^{n-1} - \ldots - a_n\Theta =\\
&= a'_1\Theta^{n-1} + a'_2\Theta^{n-2} + \ldots + a'_n.
\end{aligned}$$

Lze tedy z α mocniny Θ, vyšší než Θ^{n-1} odstraniti a psáti

*) Tím rozumíme nerozložitelná ve dva polynomy s racionálními koeficienty.

$$\alpha = \frac{b'_0 + b'_1\Theta + \ldots + b'_{n-1}\Theta^{n-1}}{c'_0 + c'_1\Theta + \ldots + c'_{n-1}\Theta^{n-1}}.$$

Lze dokázati však dále, že vhodným rozšířením jmenovatele (tak jak to děláme na př. při usměrňování jmenovatele zlomku) lze číslo Θ z jmenovatele odstraniti a lze tedy úhrnem říci:

Každé číslo tělesa $\mathbf{R}(\Theta)$, vzniklého adjunkcí čísla Θ k tělesu $\mathbf{R}$, lze psáti ve tvaru

$$\alpha = d_0 + d_1\Theta + \ldots + d_{n-1}\Theta^{n-1}, \qquad (1)$$

kde $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ jsou racionální čísla.

Cvičení. 1. Vyjádřiti ve tvaru (1) výraz

$$\alpha = \frac{5\Theta + 6}{1 + \Theta + \Theta^2},$$

kde Θ jest kořenem rovnice $x^3 - 2 = 0$!

[Návod: Rozšiřte číslem $\Theta - 1$ a uvažte, že je $\Theta^3 = 2$! $\alpha = 5\Theta^2 + \Theta - 6$.]

2. Totéž pro výraz $\alpha = \dfrac{1}{\Theta^3 - \Theta + 2}$, kde Θ vyhovuje rovnici $x^4 - 5 = 0$. [$\alpha = -\frac{1}{4}\,(2\Theta^3 + 3\Theta^2 + 4\Theta + 7)$.]

Reducibilní a ireducibilní polynomy. S pojmem tělesa souvisí úzce pojem t. zv. reducibility a ireducibility polynomů.

Budiž dán polynom s racionálními koeficienty — budeme říkati stručně polynom z $\mathbf{R}$ — na př.

$$x^2 - 2. \qquad (2)$$

Tento polynom nelze rozložiti na součin lineárních faktorů, žádáme-li, aby jejich koeficienty byly racionální čísla. Říkáme: Polynom (2) jest v tělese racionálních čísel ireducibilní. Naproti tomu připustíme-li, aby koeficienty byly čísla z tělesa $\mathbf{R}(\sqrt{2})$, lze psáti

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})\,(x - \sqrt{2}).$$

Polynom (2) jest v tělese $\mathbf{R}(\sqrt{2})$ reducibilní.

Zrovna tak polynom $x^4 + 1$ jest v $\mathbf{R}$ ireducibilní; naproti tomu v $\mathbf{R}(\sqrt{2})$ se dá rozložiti v součin

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)\,(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Polynom $x^2 + 5$ jest v tělese $\mathbf{R}$ ireducibilní. Ani v tělese $\mathbf{R}(\sqrt{5}) = \mathbf{T}_1$ není ještě reducibilní. Jestliže však k tomuto tělesu adjungujeme ještě číslo i a vytvoříme těleso $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1(i) = \mathbf{R}(\sqrt{5}, i)$ pak v tomto tělese $\mathbf{T}_2$ lze psáti

$$x^2 + 5 = (x + i\sqrt{5})\,(x - i\sqrt{5}).$$

Jiný příklad. Polynom $x^4 - 16x^2 + 4$ se nedá v $\mathbf{R}$ rozložiti. V tělese $\mathbf{R}(\sqrt{3})$ lze však psáti

$$x^4 - 16x^2 + 4 = (x^2 - 2x\sqrt{3} - 2)\,.\,(x^2 + 2x\sqrt{3} - 2).$$

Žádný z obou faktorů na pravé straně nelze již v $\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}(\sqrt{3})$ dále rozložiti. Jestliže však k tělesu $\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}(\sqrt{3})$ adjungujeme ještě číslo $\sqrt{5}$, t. j. vytvoříme těleso $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1(\sqrt{5}) = \mathbf{R}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, lze dokonce psáti

$$x^4 - 16x^2 + 4 =$$
$$= (x - \sqrt{3} + \sqrt{5})\,(x - \sqrt{3} - \sqrt{5})\,(x + \sqrt{3} + \sqrt{5})\,.$$
$$.\,(x + \sqrt{3} - \sqrt{5}).$$

Všimněme si jednotlivých těles!

Těleso $\mathbf{R}$ se skládá ze všech racionálních čísel.

Těleso $\mathbf{T}_1$ se skládá ze všech čísel tvaru $a + b\sqrt{3}$, kde a, b jsou čísla racionální.

Těleso $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1(\sqrt{5}) = \mathbf{R}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ se skládá ze všech čísel tvaru $r + s\sqrt{5}$, kde r a s jsou libovolná čísla z $\mathbf{T}_1$, t. j. ze všech čísel tvaru

$$(r_1 + r_2\sqrt{3}) + (s_1 + s_2\sqrt{3})\,.\,\sqrt{5} = r_1 + r_2\sqrt{3} + s_1\sqrt{5} + s_2\sqrt{15},$$

kde r_1, r_2, s_1, s_2 jsou racionální.

Těleso $\mathbf{T}_2$ obsahuje v sobě těleso $\mathbf{T}_1$ (k tomu stačí položiti $s_1 = s_2 = 0$, r_1, r_2 libovolné) a toto těleso $\mathbf{T}_1$ obsahuje v sobě opět těleso R (k tomu stačí položiti $s_1 = s_2 = r_2 = 0$, r_1 libovolné). Píšeme proto

$$\mathsf{R} \subset \mathsf{T}_1 \subset \mathsf{T}_2.$$

Cvičení. 1. Kdy jest polynom $ax^2 + bx + c$ s celočíselnými a, b, c rozložitelný v R? [Musí platiti $b^2 - 4ac = m^2$, kde m jest celé číslo.]

2. Kdy jest $ax^2 + bx + c$ s racionál. koeficienty a, b, c rozložitelný v $\mathsf{R}(\sqrt{7})$? [Musí $b^2 - 4ac = 7m^2$, kde m jest racionální.]

Postupná adjunkce a řešení algebraických rovnic. Když jsme v předcházejících příkladech k základnímu tělesu R přidávali postupně nové prvky, čili konstruovali nadtělesa, stala se rovnice postupně reducibilní, až se nakonec dala rozložiti v součin samých lineárních činitelů.

Pro jednoduchost budeme v dalším uvažovati jen rovnice z R, t. j. rovnice s racionalními koeficienty, ačkoliv všechny úvahy platí i tenkráte, zvolíme-li jiné těleso za základní.

Při řešení algebraických rovnic sestrojujeme vlastně postupně k původnímu tělesu R řetězec nadtěles

$$\mathsf{R} \subset \mathsf{T}_1 \subset \mathsf{T}_2 \subset \ldots \subset \mathsf{T}_{N-1} \subset \mathsf{T}_N$$

takový, že se v posledním tělese T_N dá již původní polynom rozložiti v samé lineární faktory.

Když se nám podaří sestrojiti takové těleso T_N, (ve kterém jest možný úplný rozklad daného polynomu v lineární činitele), pak víme, že v tomto tělese leží všechny kořeny dané rovnice.

Dříve jsme hledali řešení dané rovnice v tom smyslu, že jsme chtěli nalézti přímo hodnotu jejích kořenů. Nehledejme nyní hodnotu kořenů, nýbrž pouze těleso, ve kterém se kořeny nalézají.

Opakuji ještě jednou: Nepůjde nám — na chvíli — o žádné řešení vyjádřitelné nějakým vzorcem, nýbrž o pouhou — více méně myšlenkovou — konstrukci jistého tělesa T_N (nadtělesa k tělesu R).

Tato úloha jest do jisté míry jednodušší. Po stránce čistě matematické a myšlenkové jest však skoro ekvivalentní s úlohou dřívější — i když tady nutno více mysliti a uvažovati než počítati.*)

Výklad pojmu algebraického řešení rovnic. V příkladě f) na str. 70 jsme viděli, jak pomocí kořene Θ algebraické rovnice z $\mathbf{R}$ lze vytvořiti těleso, které je nadtělesem tělesa $\mathbf{R}$. Každé číslo takového tělesa lze pak vyjádřiti ve tvaru (1).

Z algebraických rovnic zvlášť jednoduché jsou rovnice zvané binomické. Budeme se nyní zabývati tělesy, které vzniknou adjunkcí kořenů takovýchto binomických rovnic.

Binomická rovnice tvaru

$$x^n - a = 0,$$

kde a jest racionální číslo a nikoliv n-tá mocnina, má, jak víme, n kořenů. Zvolme jeden z nich a označme jej $\Theta = \sqrt[n]{a}$. Takovýto symbol budeme nazývati radikálem. Přesněji: radikálem n-tého stupně nad těles m $\mathbf{R}$. Obecněji: Nechť jest $\mathbf{T}_K$ nějaké těleso a číslo a nikoliv n-tá mocnina z toho tělesa, potom číslo $\sqrt[n]{a}$ nazveme radikálem n-tého stupně nad $\mathbf{T}_K$.

Na př. Rovnice $x^3 - 7 = 0$ má kořeny $x_1 = \sqrt[3]{7}$, $x_2 = \varepsilon\sqrt[3]{7}$, $x_3 = \varepsilon^2\sqrt[3]{7}$. Zvolme $\Theta = \sqrt[3]{7}$. Potom těleso $\mathbf{R}(\Theta)$ skládá se ze všech čísel tvaru

*)Poznamenejme výslovně (a čtenář si toho jistě všiml), že $\mathbf{R}, \mathbf{T}_1 \ldots \mathbf{T}_N$ a vůbec každé číselné těleso, o kterém zde mluvíme jest obsaženo v „daleko širším“ tělese všech komplexních čísel. Podle fundamentální věty algebry rozpadne se v tomto tělese, jak již dávno víme, každý polynom z tělesa $\mathbf{R}$ (ba dokonce každý polynom s komlexními koeficienty) v samé lineární činitele. Nás však, na tomto místě, zajímá vždy „malé“ těleso $\mathbf{T}_N$, v němž tento rozklad v lineární činitele jest již možný.

$$\alpha = d_0 + d_1 \,.\, \sqrt[3]{7} + d_2(\sqrt[3]{7})^2,$$

kde d_1, d_2, d_3 jsou libovolná rac. čísla.

Zvolíme-li $\Theta = \varepsilon\sqrt[3]{7}$, jest $\mathbf{R}(\Theta)$ souhrn všech čísel tvaru

$$\alpha = d_0 + d_1 \,.\, \varepsilon \,.\, \sqrt[3]{7} + d_1 \,.\, \varepsilon^2 \,.\, (\sqrt[3]{7})^2,$$

kde d_1, d_2, d_3 jsou opět libovolná racionální čísla.

Jiný příklad. Rovnice z tělesa $\mathsf{T} = \mathbf{R}(\sqrt{2})$

$$x^3 - (1 + \sqrt{2}) = 0$$

má 3 kořeny a to

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, \ \varepsilon\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}, \ \varepsilon^2 \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}.$$

Zvolme $\Theta = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$; potom Θ jest radikálem třetího stupně nad tělesem T a těleso $\mathsf{T}(\Theta)$ se skládá ze souhrnu všech čísel tvaru

$$\alpha = d_0 + d_1\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + d_2 (\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}})^2,$$

kde d_0, d_1, d_2 jsou lib. čísla z tělesa $\mathsf{T} = \mathbf{R}(\sqrt{2})$, t. j. tvaru $a + b\sqrt{2}$, kde a, b jsou racionální.

Rovnice $x^2 - a = 0$, je-li a racionální, ale nikoliv čtverec, není v $\mathbf{R}$ řešitelná. Avšak v tělese $\mathbf{R}(\sqrt{a})$, které dostáváme z $\mathbf{R}$ adjunkcí $\sqrt{a}$ lze psáti $x_{1,2} = \pm \sqrt{a}$. Kořen rovnice jest vyjádřen radikálem. Říkáme: daná rovnice jest řešitelná pomocí radikálů.

Zrovna tak rovnice $(x^2 - a)^3 - b = 0$, kde a, b jsou rac. čísla, má zřejmě kořen $x = \sqrt{a + \sqrt[3]{b}}$. Tato rovnice jest opět řešitelna radikály. Jenom, že nyní jest nutno adjungovati radikály postupně za sebou dvakrát. Nejdříve totiž k tělesu $\mathbf{R}$ adjungovati kořen rovnice

$$x^3 - b = 0, \text{ t. j. radikál } \beta = \sqrt[3]{b},$$

potom ještě kořen rovnice

$$x^2 = a + \beta, \text{ t. j. radikál } \sqrt[3]{a + \beta}.$$

Obecně budeme říkati, že nějaké číslo lze vyjádřiti radikály, jestliže jest obsaženo v tělese, které vzniklo z tělesa racionálních čísel konečným počtem postupných adjunkcí radikálů, vždy z tělesa předcházejícího.

Viděli jsme, že kořeny rovnice 2., 3., 4. stupně jsou vždy vyjádřeny radikály, t. j. rovnice 2., 3., 4. stupně lze vždy řešiti pomocí radikálů. Bylo snahou matematiků nalézti takové řešení (t. j. pomocí radikálů) i pro obecnou rovnici pátého a vyššího stupně. To však právě pro obecnou rovnici pátého (a tím spíše vyššího) stupně nejde. To znamená: Ne ke každé algebraické rovnici pátého stupně s racionálními koeficienty lze sestrojiti postupnou adjunkcí radikálů takové nadtěleso T_N, ve kterém se rovnice dá rozložiti v samé lineární činitele. Jinými slovy: Existují algebraické rovnice pátého stupně s racionálními koeficienty, jichž kořeny nelze vyjádřiti radikály. Proto nelze také kořeny algebraické rovnice pátého stupně s obecnými koeficienty $a, b, c, \dots$ vyjádřiti vzorcem, který by byl funkcí koeficientů a neobsahoval žádných jiných matematických symbolů než konečný počet odmocnin.

Říkáme: Obecná rovnice pátého stupně jest algebraicky neřešitelná.

To ovšem neznamená, když jsou koeficienty dané rovnice vhodným způsobem specialisovány, že by se daná rovnice nedala řešiti pomocí radikálů. Naopak, dovedeme již řešiti speciální rovnice (na př. reciproké, pro dělení kruhu) i stupňů vyšších než čtvrtého. Obecně nazýváme rovnice, které lze řešiti radikály rovnicemi metacyklickými.

Poznámka I. Aby nevzniklo nedorozumění, jest nutno ještě jednou výslovně podotknouti: Máme-li předloženou rovnici jakéhokoliv stupně s danými numerickými koeficienty, dovedeme nalézti — jak později ještě podrobněji ukážeme — její kořeny s jakoukoliv přesností, t. j. na jakýkoliv počet desetinných míst. Zrovna tak (dle analogie goniometrického řešení rovnic třetího stupně) dovedeme řešiti rovnici pátého stupně pomocí t. zv. eliptických funkcí. Neexistuje však vzorec obsahující jen konečný počet odmocnin, kamž by stačilo dosaditi koeficienty předložené rovnice, abychom dostali hledané kořeny.

Poznámka II. Hledíme-li na řešení rovnic jako na konstrukci jistého nadtělesa T_N k tělesu **R**, nebudeme již jistě překvapeni tím, že každou rovnici (pátého a vyššího stupně) nelze algebraicky řešiti. Při algebraickém řešení, tak jak jsme si je definovali, smíme užíti k sestrojení hledaného nadtělesa T_N jen binomických rovnic. V příkladě f) na str. 70 jsme však viděli, že nadtělesa lze sestrojovati pomocí jakýchkoliv rovnic. Bylo by tedy právě naopak překvapující, kdyby zrovna binomické rovnice (přes svůj jednoduchý tvar) měly tak privilegované postavení, že by pomocí nich bylo možno sestrojiti k libovolnému polynomu těleso, v němž se tento rozpadne v samé lineární faktory.

Obecná rovnice pátého stupně jest neřešitelná pomocí radikálů. Měli bychom nyní provésti důkaz nahoře uvedeného tvrzení. Od podrobného důkazu musíme upustiti, neboť svoji povahou zasahuje příliš hluboko do jemných otázek algebry a čtenář, kterému jest tato knížka určena, těžko by dovedl vystihnouti všechny podrobnosti důkazu. Důkaz lze provésti na př. tak, že se nejdříve dokáže tato věta:

Algebraická ireducibilní rovnice pátého stupně s racionálními koeficienty, která jest řešitelná pomocí radikálů, musí míti buď jeden kořen reálný a dva páry kořenů komplexních sdružených, anebo 5 kořenů reálných.*)

Abychom potom ukázali, že algebraická rovnice pátého stupně

---

*) Tato věta pochází od Kroneckera; v jejím důkazu spočívá jádro důkazu našeho tvrzení. Věta jest speciálním případem podobné obecné věty o rovnicích prvočíselného stupně. Neřešitelnost obecných rovnic vyššího než čtvrtého stupně lze dokázati též jinými metodami, kde o stupni n rovnice nečiníme žádných zvláštních předpokladů (kromě $n > 4$). Takový důkaz, vyžadující však již hlubší znalosti teorie těles a t. zv. teorie grup, nalezne čtenář na př. v knize O. Perron: Lehrbuch der Algebra, II. díl.

není obecně řešitelna pomocí radikálů, stačí sestrojiti ired. rovnici pátého stupně, která má racionální koeficienty a jeden pár kořenů komplexních sdružených a tři kořeny reálné. Takových rovnic dovedeme udati, kolik chceme. Jest takovou na př.

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

(Že má tři kořeny reálné, zjistíme z grafického znázornění — že je ireducibilní, dá se též lehce dokázati.) Tato rovnice není řešitelna pomocí odmocnin, čímž naše tvrzení dokázáno.

Poznámka. Uvedený důkaz není jediným možným. Jiný důkaz — a ovšem úplný — nalezne čtenář v knize O. Perron: Algebra, a ještě jiný v knize Weber: Lehrbuch der Algebra. Všechny důkazy předpokládají však znalost z teorie těles a po případě z tak zvané teorie grup.

Dodatek. Když tedy obecná rovnice stupně vyššího než čtvrtého jest pomocí odmocnin neřešitelná, zajímají nás rovnice, které řešitelny jsou, čili — jak jsme je nazvali — rovnice metacyklické. Ptáme se na př. kdy rovnice s racionálními koeficienty jest metacyklická? Takové a podobné úvahy vedly k vyšetřování funkcí kořenů, kterých hodnota se jistými permutacemi indexů nemění — tak, jak jsme to již viděli dříve. Ukázalo se dále nanejvýš plodným vyšetřování jistého souhrnu permutací — anebo, jak říkáme, grup permutací. Ke každé algebraické rovnici přísluší jistá grupa permutací, zvaná grupou Galoisovou. Vlastnosti této grupy podávají jasný obraz o vlastnostech dané rovnice, na př. také o řešitelnosti pomocí radikálů.

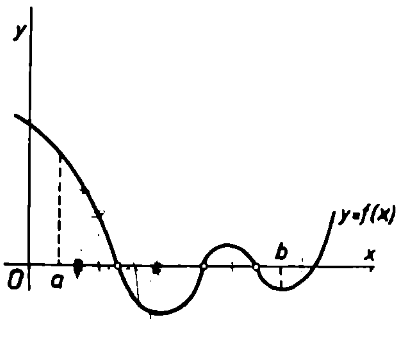
Tato vyšetřování jsou dost obtížná; patří však nesporně — jak ještě jednou zdůrazňujeme — k nejhezčím partiím matematiky vůbec.

7. Dva další problémy o algebraických rovnicích.

Numerické řešení rovnic. V předcházejících kapitolách naučili jsme se řešiti algebraicky rovnice 2., 3., 4. stupně a naznačili jsme důkaz, proč to u rovnic 5. stupně není možné. Již tam jsme řekli, že nedovedeme sice obecně řešiti rovnici vyššího stupně než čtvrtého, dovedeme však s libovolnou přesností udati kořeny každé, numericky dané předložené rovnice. V takovém případě mluvíme o numerickém řešení dané rovnice.

Máme-li rovnici $f(x) = 0$ a sestrojíme grafické znázornění funkce $y = f(x)$, dávají průsečíky takto vzniklé křivky s osou x prvý hrubý odhad velikosti reálných kořenů. K přesnějšímu výpočtu nutno nahraditi metodu geometrickou metodou algebraickou.

Postup, kterého užíváme, skládá se ze dvou kroků: separace a aproximace kořenů. Separace záleží v hledání intervalů, v kterých jest obsažen pouze jediný kořen. Aproximace značí pak: postupně zužovati interval, v němž se uvažovaný kořen nalézá, tak dlouho, až nalezneme jeho hodnotu s takovou přesností, s jakou chceme.



Obr. 6.

Při separaci užíváme nejčastěji věty, o níž jsme již mluvili při důkazu fundamentální věty: Jestliže pro $x = a$ a $x = b$ jsou hodnoty $f(a)$ resp. $f(b)$ opačných znamének, leží mezi a a b lichý počet kořenů. Jsou-li však $f(a)$, $f(b)$ stejných znamének, jest mezi a a b buď žádný anebo sudý počet kořenů. (Viz obr. 6.)

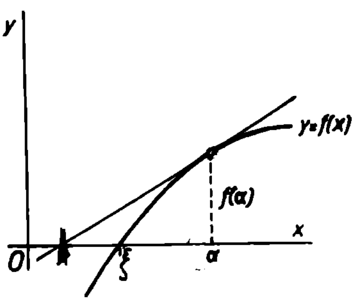
Hledáme proto takové — pokud možno úzké — intervaly (a, b), aby bylo $f(a)$ opačného znaménka než $f(b)$.

Postup osvětlíme nejlépe na příkladě. Jest separovati reálné kořeny rovnice $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Rovnice může míti jeden, nebo tři reálné kořeny. Již nejhrubší graf ukazuje, že existuje jenom jeden, jediný, reálný kořen. Abychom jej nalezli, dosazujme postupně:

$$\begin{array}{rl} x = & \ldots\; -2;\; -1;\; 0;\; 1;\; 2;\; 3;\; \ldots \\ f(x) = & \ldots\; -11;\; -2;\; -1;\; -2;\; 1;\; 14;\; \ldots \end{array}$$

Jelikož jest tedy mezi 1 a 2 změna znaménková, jest hledaný kořen mezi 1 a 2.

Dosaďme nyní $x = 1{,}5$; jest $f(1{,}5) = 1{,}5^3 - 1{,}5^2 - 1{,}5 - 1 = -1{,}375$. Kořen leží mezi 1,5 a 2. Dosaďme $x = 1{,}8$. Vyjde $f(1{,}8) = -0{,}208$. Kořen jest v intervalu (1,8; 2). Dosadíme-li $x = 1{,}9$, dostáváme $f(1{,}9) = 0{,}349$. Kořen leží tedy mezi 1,8 a 1,9. Interval mohli bychom dále zužovati a vypočítati jeho hodnotu s přesností, s jakou chceme.



Obr. 7.

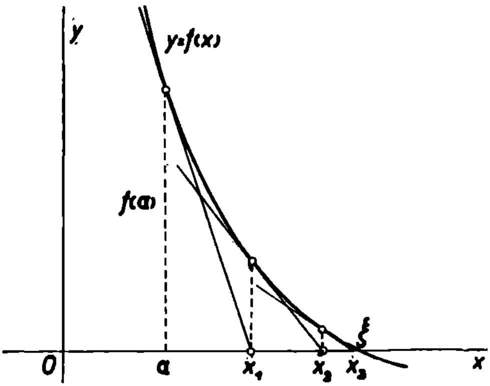
Když už jsme nalezli dosti přibližnou hodnotu kořene dané rovnice, jest výhodné, užíti k dalšímu výpočtu tak zvané metody Newtonovy, kterou krátce vyložíme.

Mysleme si v obr. 7 zobrazenou křivku $y = f(x)$ a budiž α přibližná hodnota kořene. Přesná hodnota kořene rovnice $f(x) = 0$ budiž ξ. Sestrojme v bodě o souřadnicích $(\alpha; f(\alpha))$ tečnu. Její směrnice v tomto bodě — jak známo z diferenciálního počtu — jest $f'(\alpha)$. Rovnice tečny jest tudíž

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha) \,.\, (x - \alpha).$$

Její průsečík s osou x jest (pro $y = 0$)

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$



Obr. 8.

Jestliže rozdíl $\xi - \alpha$ byl dosti malý, t. j. hodnota α se nelišila příliš od skutečné hodnoty ξ, jest tato nová hodnota x — jak z geometrického zobrazení je jasně viděti, ale jak lze i početně lehce dokázati — lepší než původní hodnota α. Několikanásobným užitím téhož postupu dostáváme velmi přesnou hodnotu kořene. (Geometrický obraz postupného užití viz obr. 8.)

Jak viděti, nahrazujeme v podstatě v okolí hledaného bodu ξ křivku $f(x)$ její tečnou.

Příklad. U rovnice $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ nalezli jsme přibližnou hodnotu kořene $x = 1{,}8$. Jest $f(1{,}8) = -0{,}208$. Derivace $f'(1{,}8) = 3\,.\,1{,}8^2 - 2\,.\,1{,}8 - 1 = 5{,}12$

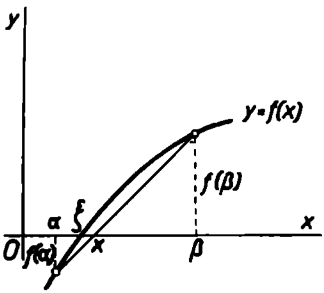
$$x = 1{,}8 - \frac{-0{,}208}{5{,}12} = 1{,}8406\ldots$$

Dosadíme-li nyní opět $\alpha = 1{,}840$, dostáváme obdobně $x = 1{,}839264\ldots$, což souhlasí již na 5 cifer se skutečnou hodnotou (jak se dá na př. dosazením zjistiti).

Při podrobném provádění jest ovšem dobře míti stálou kontrolu a abychom věděli s jakou přesností počítáme, všímati si obou mezí intervalu. Nemůžeme se však pouštěti do podrobností.

Jinou metodou jest t. zv. „*regula falsi*". Je-li $f(x) = 0$ opět daná rovnice a (α, β) interval, ve kterém leží kořen, ξ jeho přesná hodnota, spojme body $[\alpha; f(\alpha)]$, $[\beta; f(\beta)]$, t. j. nahraďme křivku $f(x)$ sečnou. Rovnice této sečny jest

$$y - f(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha).$$



Obr. 9.

Průsečík s osou $y = 0$ (obr. 9) dává přibližnou hodnotu kořene

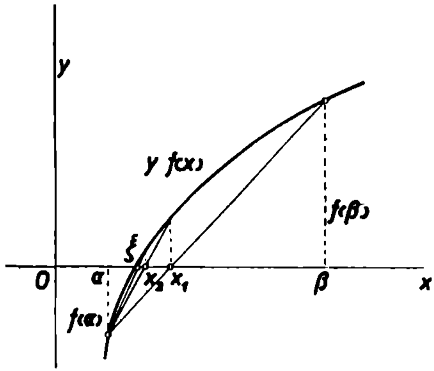
$$x = \frac{\alpha\, f(\beta) - \beta\, f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

Obecně však vede metoda Newtonova rychleji k cíli než tato. (Geometrický obraz postupného užití viz obr. 10.)

Numerický výpočet kořenů jest pro praksi, hlavně technickou, velmi důležitý. Je známo množství dalších metod k separaci i aproximaci. Pro pohodlný výpočet (dosazování, sčítání, násobení velikých čísel) vypracována jsou jistá schemata (na př. t. zv. Hornerovo schema), která výpočet usnadňují. I počítací stroje a tabulky se zde uplatní.

Při separaci se často užívá s výhodou této t. zv. věty Descartovy: Počet kladných kořenů rovnice s reálnými koeficienty jest nejvýše roven počtu změn znaménkových v rovnici; je-li menší, jest menší o sudý počet. Při tom změnou rozumíme, když u koeficientů rovnice za znaménkem (+) přijde (—) anebo opačně. Na př. V rovnici $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ jest jediná změna (totiž mezi prvým a druhým členem); tedy rovnice má jeden kladný kořen. Abychom nalezli počet záporných kořenů, položme $x = -y$ a počítejme počet kladných kořenů. Jest $-y^3 - y^2 + y - 1 = 0$. Tato rovnice má dvě změny, tedy počet záporných kořenů jest 2 nebo 0 (t. j. o sudý počet méně); my víme již, že je to 0.

Obratné užívání Descartova pravidla umožní separaci kořenů bez jakéhokoliv grafického znázornění.



Obr. 10.

Čtenář, který by se zajímal o tyto a podobné otázky, nalezne obšírné poučení v knize Láska-Hruška: Teorie a praxe numerického počítání, Praha 1934 (nákl. JČMF).

Cvičení. 1. Dokažte: je-li A (> 0) absolutní hodnota největšího koeficientu reálného polynomu $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, jest

$$f(x) > 0 \text{ pro všechna } x > A + 1,$$

$$f(x) \begin{cases} < 0 \text{ pro všechna } x < -(A+1), \text{ pro } n \text{ liché}, \\ > 0 \text{ pro všechna } x < -(A+1), \text{ pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

[Návod (viz též str. 28): Pro kladná $x > 1$ jest $f(x) = x^n \Big[1 + \frac{a_1}{x} +$

$+ \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\Big] \geqq x^n \left[1 - A\left(\frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^n}\right)\right] \geqq \Big[1$ $- A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right)\Big] = \left[1 - \frac{A}{x - 1}\right]$. Závorka bude kladná pro $x > A + 1$. Analogicky další případy.]

2. Separujte reálné kořeny

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 0{,}9 = 0!$$

[$(-2; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(3; 4)$].

3. Dokažte: Jsou-li veličiny $A_i > 0$, má rovnice $\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n} = 0$ samé reálné kořeny!

[Návod: Srovnejte $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, a uvažujte intervaly $(a_1; a_2)$ $(a_2; a_3)$ ... (Místo zlomků musíte ovšem uvažovati polynom.) Užijte věty citované na začátku!]

4. Užijte Newtonovy metody k řešení rovnice $x^2 - 2 = 0$! [Vyjděte od hodnoty $x_1 = \frac{3}{2}$ jakožto první aproximace; je $x_1 = \frac{17}{12} = 1{,}417\ldots$, $x_2 = \frac{577}{408} = 1{,}414215\ldots$ (tedy přesnost na 5 míst).]

5. Řešte analogicky $x^3 - 2 = 0$!

6. Newtonova metoda a metoda „regula falsi" **blíží se ke kořenu vzájemně opačným směrem.** Užívajíce této vlastnosti, sovřete kořen rovnice

$$x^5 + 5x + 1 = 0$$

mezi dvě meze lišící se o $\frac{1}{10^5}$.

[$-0.19993611 < x < -0{,}19993603$.]

7. Řešte rovnici

$$x^3 - 9x^2 + 20x - 11 = 0!$$

[$0{,}834\ldots$; $2{,}217\ldots$; $5{,}949\ldots$]

8. (**Gräffeho** metoda.) Analogicky jako u kvadratické rovnice (viz př. 8 str. 39) lze největší reálný kořen libovolné rovnice s reálnými koeficienty vypočítati jako limitu

$$x = \lim_{k=\infty} \frac{s_{k+1}}{s_k},$$

kde s_k jsou mocninné součty. Proveďte u rovnice $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$!

[$s_0 = 3$, $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 7$, $s_4 = 11$, $s_5 = 21$, $s_6 = 39$, $s_7 = 71$, $s_8 = 131$, $s_9 = 241$, $s_{10} = 443$, $s_{11} = 815$, $s_{12} = 1499$,

$$x \doteq \frac{1499}{815} = 1{,}839264\ldots].$$

9. Metodou Newtonovou lze řešiti i rovnice transcendentní. Řešte na př. $\log x - \frac{1}{x} = 0$! [2,506...].

Systémy rovnic o více neznámých. a) Naše dosavadní úvahy vztahovaly se jen na rovnice o jedné neznámé. Je pochopitelné, že obecná teorie soustavy (systému) rovnic o více neznámých bude komplikovanější. Lze dokonce říci, že je v tom směru dodnes mnoho nerozřešených problémů — ač jde o otázky již značně staré.

Obecný systém n rovnic o m neznámých $x, y, z, \ldots$ stupňů $q_1, q_2, q_3, \ldots$ má tvar

$$f_1(x, y, z, \ldots) = 0,\ f_2(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots\ f_n(x, y, z, \ldots) = 0, \quad (1)$$

kde f_1, f_2, f_3 jsou polynomy proměnných $x, y, z, \ldots$ stupňů $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Tak na př. obecný systém 2 rovnic o 2 neznámých druhého stupně jest tvaru

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$
$$a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y + f' = 0,$$

při tom čísla $a, b, \ldots a', b', \ldots$ jsou daná, obecně komplexní čísla.

U rovnic o jedné neznámé zaručovala nám fundamentální věta vždy existenci n kořenů. Docela jinak jest tomu tady. U takového systému (1) lze se ptáti:

α) Má systém (1) řešení? T. j. existuje soustava čísel $(x; y; z; \ldots)$ hovící systému (1)?

β) Má-li, tak kolik?

γ) Jak poznáme, má-li (1) řešení nebo ne?

δ) Existuje-li řešení, jak se nalezne?

atd.

Na tyto otázky nelze obecně dáti odpověď. Může se státi, že takový systém má jen konečný počet řešení, ale zrovna tak se může státi, že má nekonečně mnoho řešení anebo vůbec žádné řešení. V tom směru nutno vyšetřovati každý předložený případ zvláště.

Obecný postup řešení jest možno — alespoň myšlenkově — provésti takto. Máme-li na př. 3 rovnice o 3 neznámých jakéhokoliv stupně, vypočteme z jedné rovnice jednu neznámou a dosadíme do zbývajících dvou. Pak z takto získaných 2 rovnic zvolíme jednu a vypočteme z ní opět jednu další neznámou. Když ji dosadíme do zbývající jediné rovnice, obdržíme jedinou rovnici o jedné neznámé, jejíž teorii již známe. Další neznámé se pak vypočtou z původních rovnic.

Řekli jsme, že jest to pochod pouze teoretický, neboť na př. při systému

$$x^7 + 2y^5x + y^4 + 4 = 0$$
$$x^5y^2 + 3x^2y + y^5 + 7 = 0,$$

nedovedeme vypočítati ze žádné z nich ani x ani y. Prakticky provést naznačenou myšlenku lze jen v některých jednoduchých příkladech.

Základní myšlenkou každého takového pochodu jest tedy vyloučiti z několika rovnic všechny neznámé s výjimkou jediné tak, abychom dostali jen rovnici (po případě rovnice) o jediné neznámé.

Tomuto pochodu říkáme eliminace. Dá se ukázati, že tuto lze provésti vždy i bez řešení rovnic jen pomocí racionálních operací. To jsou však již problémy daleko složitější a nespadají do rámce této knížky.

Snadno nahlédneme nyní, že jsou myslitelné a možné nejrůznější případy. Mysleme si, že jsme v daném systému provedli již eliminaci všech neznámých s výjimkou jediné. Může nyní nastati několik případů:

1. Po eliminaci zbývá jediná rovnice o jediné neznámé.
2. Po eliminaci zůstalo nám více rovnic o jediné neznámé.
3. Eliminaci jsme nemohli provést do konce, neboť již dříve, než jsme vyloučili všechny neznámé s výjimkou

jediné, zbyla nám jediná rovnice obsahující však více neznámých.

Úvaha — spíše jen orientační — nám nyní ukazuje: V případě

1. bude normálním zjevem, že ke každému kořenu vzniklé rovnice nalezneme jednu nebo více hodnot pro zbývající neznámé. Bude tedy existovati v tomto případě zpravidla konečný počet řešení.

2. V druhém případě může se státi lehce — a bude to opět normálním zjevem — že rovnice o jedné neznámé, které zůstaly, si navzájem odporují. V tomto případě neexistuje řešení.

3. V třetím případě, ježto máme jednu rovnici a více neznámých, lze několik neznámých voliti libovolně a ostatní jsou pak již určeny. V tomto případě bude existovati nekonečný počet řešení.

b) Ukážeme na několika jednoduchých příkladech to, o čem jsme mluvili v předešlém odstavci. Pomůžeme si geometrickým názorem.

α) Systém dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Každá z těchto dvou rovnic představuje v pravoúhlém systému souřadnic přímku. Dvě přímky mohou být různoběžné, rovnoběžné anebo totožné. V prvním případě mají rovnice jediné řešení odpovídající souřadnicím průsečného bodu. V druhém případě, kdy přímky jsou rovnoběžné, nemá příslušný systém řešení. V případě třetím, kdy obě přímky jsou totožné, existuje nekonečně mnoho řešení — totiž souřadnice všech bodů společné přímky. Uvádíme příklady na každý systém.

$3x + 2y = 4$	$2x + 3y = 5$	$3x + 4y = 3$
$2x + y = 3$	$2x + 3y = 7$	$6x + 8y = 6$
$x = 2,\ y = -1$		

Lehce se zjistí, že první případ nastane vždy, když $a_1 : b_1 \neq a_2 : b_2$, t. j. když determinant*)

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

β) Systém tří rovnic o třech neznámých.

Ještě názorněji jest viděti poměry u systému

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

V trojrozměrném prostoru značí totiž taková rovnice vždy rovinu. Dle toho, jaká je vzájemná poloha tří různých rovin, má tento systém buď žádný, konečný (totiž právě jeden) nebo nekonečný počet řešení. Nemůžeme se pouštěti do detailného rozboru, jen stručně poznamenáváme. Obecně — pokud tedy koeficienty $a_1, b_1, \ldots$ nepodléhají nějakým podmínkám — protnou se tři roviny v jednom bodě — proto i tyto tři rovnice budou míti jediné řešení, t. j. existuje jediná trojice $(x; y; z)$, která vyhovuje všem daným třem rovnicím.

Ovšem jsou možné i jiné případy. Na př. dané tři roviny mohou tvořiti svazek, t. j. mají společnou přímku: pak existuje nekonečně mnoho řešení. Jiný případ: Jsou-li dvě z rovin rovnoběžné, neexistuje řešení atd.

Dá se dokázati, že otázka, který případ nastane, závisí na determinantu

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$$

resp. na determinantech s ním souvisících.

*) Teorie lineárních rovnic dá se celá obecně vybudovati tak, že tvoří uzavřený harmonický celek. Jest při tom zapotřebí znáti ovšem teorii determinantů, k jejíž vybudování vyšel popud právě z řešení lineárních rovnic. Kdo se o to zajímá podrobněji, nalezne bližší výklad v knize B. Bydžovský: Základy teorie determinantů a matic a jich užití, Praha 1930 (nákl. JČMF).

γ) Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 9x^2 - 16y^2 &= 144 \\ 3x - 4y &= 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice $x = \frac{4}{3}y$. Dosazením do první dostaneme

$$9 \cdot \frac{16y^2}{9} - 16y^2 = 144$$

$$0 = 144,$$

což ovšem není pravda. Daný systém nemá řešení. Když tento systém znázorníme graficky, vidíme, že jde o hyperbolu a její asymptotu, a o těch ovšem víme, že se v konečnu neprotnou.

δ) Zvolme jiný případ. Jest řešiti systém

$$\begin{aligned} 6x^2 + xy - 2y^2 &= 0 \qquad (*) \\ 3x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = -\frac{2}{3}y$ do první rovnice máme

$$\begin{aligned} 6 \cdot (-\tfrac{2}{3}y)^2 - \tfrac{2}{3}y^2 - 2y^2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice jest splněna identicky pro jakoukoliv hodnotu y.

Daný systém má nekonečně mnoho řešení, totiž všechny body vyplňující přímku $3x + 2y = 0$. V grafickém znázornění křivka (*) jest složena ze dvou přímek, z nichž jednou jest právě přímka $3x + 2y = 0$.

Tyto dva příklady, řekli bychom „pathologické“, jasně ukazují okolnosti, které musíme míti na zřeteli vždy tenkráte, když se zabýváme systémem algebraických rovnic. Může se totiž státi, že křivky příslušející uvažovaným rovnicím mají „společnou součást“, nebo, že „průsečík křivek padne do nekonečna“.

c) Jinou obecnou metodu k řešení rovnic o více neznámých, než jsme udali, udati nelze. Pokud jde o počet řešení platí však důležitá obecná věta Bezoutova, kterou formulujeme jen pro dvě neznámé. Dvě rovnice

n-tého a m-tého stupně mají obecně $m \cdot n$ řešení. Při tom slovu „obecně“ jest rozuměti takto: V obecném případě nebudou míti obě rovnice společnou součást (viz příkl. δ), ani se nestane, že kořen padne do nekonečna (viz příkl. γ). Při tom jest ovšem nutno počítati každý kořen s příslušnou násobností. Násobnost se pak definuje vhodným způsobem. Geometrická interpretace této věty jest pak tato: Dvě křivky stupně m-tého a n-tého — nemají-li společnou součást — protínají se v $m \cdot n$ bodech. (Při tom počítáme i eventuální průsečíky v nekonečnu a béřeme zřetel k násobnosti průsečíků.)

d) Zatím co lze obecnou teorii systému více rovnic jen těžko ovládnouti, dovedeme poměrně lehce řešiti rozličné specialisované systémy.

Takové systémy jsou na př. rovnice zvané symetrické, homogenní atd. Ježto jsou to však z obecného hlediska jen speciální případy, kterých řešení vyžaduje všelijakých umělých obratů a jest věcí matematické a početní zručnosti, uvádíme je jen v cvičeních. Při tom, jak zjistíte, jde při řešení v podstatě o to, onu eliminaci, o které jsme nahoře mluvili, provésti nějakým, vtipným jednoduchým obratem.

Cvičení: Řešte systémy rovnic:

1. $x^2 + y^2 = r^2$
$y = kx + q$. (Proveďte rozbor!)

2. Řešte obecný systém t. zv. souměrných rovnic:
$a(x^2 + y^2) + bxy + d(x + y) + f = 0$
$a'(x^2 + y^2) + b'xy + d'(x + y) + f' = 0$.
[Návod: Za $x + y$ a xy dosaďte nové neznámé!]

3. $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ (t. zv. homogenní rovnice)
$y = kx + q$.
[Návod: Vypočtěte $\frac{y}{x}$!]

4. $x^2 - 2xy + 6y^2 = 5$
$3x^2 + 3xy + 2y^2 = 8$.

[Návod: Vyloučením pravých stran určete nejprve homogenní rovnici!]

5. a) $x^3 + y^3 = m^3$ b) $x^4 + y^4 = m^4$
$x + y = n.$ $x + y = n.$

[Umocněte druhou rovnici třemi resp. čtyřmi a vypočtěte xy!]

6. $x + y + \dfrac{x}{y} = 5$
$x^2 + y^2 + \dfrac{x^2}{y^2} = 15.$ $[(5, \pm i\sqrt{5}), (1, 2 \pm \sqrt{3}).]$

7. $x^2 + y^2 = 5\sqrt[3]{x^3 + y^3}$
$x^2 - y^2 = 3\sqrt[3]{x^3 + y^3}.$

(Pozor na počítání třetími odmocninami!)

8. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 15$
$x^6 + x^4y^2 + xy^4 + y^6 = 85.$

(Rozložte levé strany a zaveďte nové neznámé! (1; 2) další kořeny složitější.)

9. $x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = a$
$x^2 - y^2 + xy = b$

[Nové neznámé $x^2 - y^2 = u$, $xy = v$!]

10. $x^4 + y^4 + x^2y^2 = a$
$x^2 + y^2 - xy = b.$

11. $x^2 - xy + 2y + 3 = 0$
$xy - y^2 + 4x + 6 = 0.$

[Odečtěte od dvojnásobku první rovnice rovnici druhou a rozložte! $(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$, $(4 \pm \sqrt{11}; 2(2 \pm \sqrt{11}))$.]

12. $x + y + z = a$
$xy + xz + yz = -a$
$xyz = -1.$

$[(-1; \frac{1}{2}(a + 1 + \sqrt{a^2 + 2a - 3});$ $\frac{1}{2}(a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a - 3}))$ a dalších pět trojic z týchž tří čísel.]

13. $x + y + z = a$
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
$x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$

[Umocněte první rovnici dvěma a třemi! $(0, 0, a)$, $(0, a, 0)$, $(a, 0, 0)$.]

14. $x(y + z) = a$
$y(z + x) = b$
$z(x + y) = c.$

(Rovnice sečtěte!)

15. $x + y + z + xyz = 3$
$x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2z^2 - 1$
$xy + yz + zw = 2.$

[Vypočtěte nejprve $t = xyz$. Vyjde $t = 1$; kořeny $(1; \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}))$, atd.]

16. $x^2 + y^2 + xy = 7$
$y^2 + z^2 + yz = 19$
$z^2 + x^2 + xz = 13.$

[Po odečtení rovnic od sebe, rozložte! $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \pm \frac{5}{3}\sqrt{3}$, $y_{1,2} = \pm 2$, $y_{3,4} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $z_{1,2} = \pm 3$, $z_{3,4} = \pm \frac{7}{3}\sqrt{3}$.]

17. $x^3 = xyz + 3$
$y^3 = xyz + 1$
$z^3 = xyz + 10.$

(Určete nejprve xyz! $(\sqrt[3]{1}; \sqrt[3]{-1}; \sqrt[3]{8})$; $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{14}}; \frac{-1}{\sqrt[3]{14}}; \frac{5}{\sqrt[3]{14}}\right)$ celkem 18 trojic kořenů.)

Závěrem. Některé příklady zde uvedené jsou vybrány z „Rozhledů matematicko-přírodovědeckých“, kde v novějších i starších ročnících nalezne čtenář řadu poměrně těžších (a právě proto vábivých) příkladů. Pisatel těchto řádků věří, že pozorný čtenář jeho knihy příklady zde i tam uveřejněné lehce rozřeší a při jejich řešení obohatí a zdokonalí svůj matematický obzor. To bylo také účelem této knížky.

Obsah.

1. Čísla.

CESTA K VĚDĚNÍ

Sv. 2
Doc. Dr. V. Petržílka -
Ing. Dr. J. B. Slavík:

PIEZOELEKTŘINA A JEJÍ POUŽITÍ V TECHNICKÉ PRAXI

Brož. K 19,—

●

Sv. 3
Prof. Dr. D. Ilkovič:

POLAROGRAFIE

V tisku

●

Sv. 4
Prof. J. Holubář:

METODY PLANIMETRIE A APOLLONIOVA ÚLOHA

V tisku

●

Sv. 5
Ing. Dr. J. Strnad:

ZVUKOVÝ FILM

V tisku

●

Sv. 6
Doc. Dr. F. Link:

JAK POZNÁVÁ ASTROFYSIKA VESMÍR

V tisku

●

Knihtiskárna „Prometheus", Praha VIII.