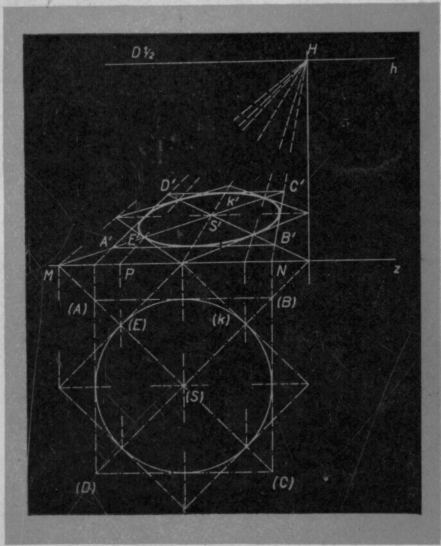
Perspektiva



PERSPEKTIVA

EMIL KRAEMER

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

EMIL KRAEMER *PERSPEKTIVA*

EMIL KRAEMER

PERSPEKTIVA

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

PRAHA 1951

Obálku navrhl a graficky upravil Milan Hegar

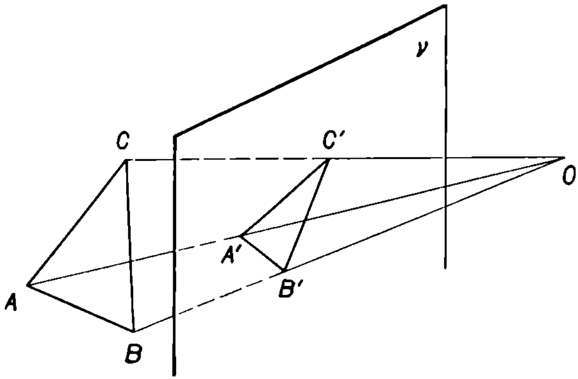
ÚVOD

Odedávna se člověk snažil zachytit kresbou i malbou věci tak, jak je kolem sebe viděl. Trvalo mu však velmi dlouho, než si osvojil zákony tohoto zobrazování, a ještě déle trvalo, nežli je uvedl v úplnou a správnou vědeckou soustavu zvanou *perspektiva*. Je tedy perspektiva nauka shrnující pravidla, která musíme zachovávat, abychom zobrazili předměty přibližně tak, jak je vidíme. Přitom musíme zobrazit jednak hrany a obrysy daných předmětů, jednak vystihnout jejich zabarvení. První část je úkolem *perspektivy lineární*, druhá *perspektivy malířské*. Patří tedy malířská perspektiva do oboru umění, kdežto perspektiva lineární je součástí deskriptivní geometrie. Úkolem této knížky je podat základy perspektivy lineární.

Chceme-li správně nakreslit předměty tak, jak je vidíme, musíme si nejdříve dobře uvědomit, jak probíhá naše vidění. Na předměty kolem nás se díváme dvěma očima a na sítnici každého oka dostáváme obrazy pozorovaného předmětu. Z těchto obrazů, které nejsou úplně stejné, vzniká jediný vjem. Je tedy výjev vidění značně složitý. Důležitou úlohu tu hraje různost pohledů viděných pravým a levým okem, která umožňuje prostorovou kvalitu vjemů. Při kresbě nějakého předmětu však kreslíme jenom jeden jeho obraz. Můžeme jej nakreslit na příklad takto: mezi své oči a zobrazovaný předmět postavíme skleněnou tabuli tak, abychom na ni dosáhli nataženou paží. Potom vidíme na tabuli předmět a můžeme (třeba tuší) nakreslit na této tabuli jeho obrysy.

Téměř stejný obraz však dostaneme, nakreslíme-li předmět tak, jak jej vidíme na tabuli jenom jedním okem. Zjednodušíme-li si ještě situaci tím, že pokládáme oko za bod, můžeme vznik perspektivního obrazu vyložit čistě geometricky: obrazy jednotlivých bodů předmětu jsou průsečíky tabule s přímkami spojujícími tyto body s okem.

Na obr. 1 je znázorněn trojúhelník ABC a jeho perspektivní obraz $A'B'C'$ pozorovaný z oka O. Díváme-li se z bodu O



Obr. 1.

jedním okem na trojúhelník $A'B'C'$, splývá zdánlivě s trojúhelníkem ABC. Je tedy trojúhelník $A'B'C'$ správným perspektivním obrazem trojúhelníka ABC (pozorovaného jedním okem).

Perspektivní obrazy získané právě popsaným způsobem neodpovídají sice dokonale našemu vidění, avšak jsou přece jen velmi názorné a jejich konstrukce — jak později uvidíme — je poměrně jednoduchá. *Proto vždy v lineární perspektivě předpokládáme, že se díváme na zobrazovaný předmět jedním okem, které si představujeme jako bod.* Obraz libovolného bodu A je vlastně průsečík A' přímky OA s tabulí ν

(obr. 1). V deskriptivní geometrii*) říkáme tabuli ν (kterou si myslíme jako celou rovinu) *průmětna*, oku O *střed promítání* a přímce OA *promítací paprsek* bodu A; bod A' pak nazýváme *průmětem* bodu A. Postupu, jímž takto vznikají obrazy jednotlivých bodů, říkáme *středové (čili centrální) promítání*. Tímto způsobem můžeme, ovšem velmi pracně, skutečně sestrojit průmět nějakého předmětu. Tento průmět můžeme potom překreslit na jinou tabuli nebo na papír a přitom jej můžeme libovolně zmenšit nebo zvětšit; tak dostáváme znázornění předmětu, jemuž teprve říkáme *obraz* předmětu. V praxi se však obyčejně tyto dva pojmy tak přesně nerozlišují a říká se často i obrazu průmět. Ve skutečnosti ovšem postupujeme v deskriptivní geometrii tak, že nejprve vyvodíme pravidla, jimž jsou podrobeny průměty (a tedy i obrazy) geometrických útvarů, a na základě těchto pravidel potom přímo sestrojujeme obrazy těles. Proces promítání probíhá přitom jenom v naší mysli.

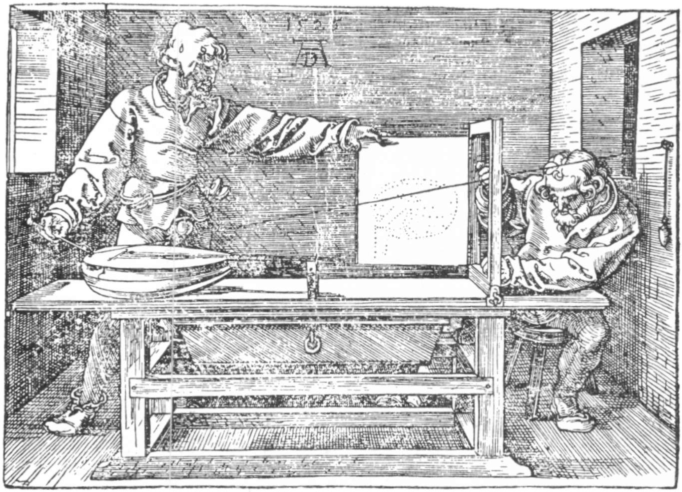
Z uvedeného výkladu vyplývá, že se stanoviska deskriptivní geometrie je lineární perspektiva středovým promítáním. Chceme-li se jí tedy naučit, musíme nejdříve poznati hlavní zákony středového promítání. Je však zajímavé připomenout nejprve historický vývoj perspektivy.

Pravidla perspektivního kreslení nebyla lidstvu dlouho známa. Ze starověku se zachovalo tak málo materiálu, že nemůžeme bezpečně rozhodnout, zdali tehdy byla perspektiva známa či nikoliv. Vývoj perspektivy můžeme podrobně sledovat až v novější době; velmi zajímavě ho líčí ve své krásné knize „Perspektiva“ (vydané v Praze roku 1922) profesor František Kadeřávek.**) Jak praví profesor Kadeřávek, „nechybíme mnoho, řekneme-li, že se perspektiva zrodila, po případě znovuzrodila, s italským malířstvím.“

---

*) Deskriptivní geometrie učí, jak se zobrazují prostorové útvary pomocí geometrických konstrukcí na danou plochu, jíž bývá nejčastěji rovina.

**) Z této knihy jsou také vybrány tyto historické poznámky.



Obr. 2.

Její rozvoj nastal v 15. a 16. století a jeho základem se stal výklad vzniku obrazu, který podal Leone Battista Alberti (1404—1472) ve své knize o malířství. Podle něho vzniká obraz předmětu jako jeho středový průmět z jednoho oka na plochu obrazu, tedy způsobem, který jsme výše popsali. Tímto způsobem také tehdejší malíři skutečně sestrojovali perspektivní obrazy různých těles. Tak na příklad známý německý malíř Albrecht Dürer (1471—1528) si sestrojil okénko, ve kterém měl místo skla napjatý papír; oko nahradil očkem, kterým protáhl nit představující promítací paprsek a zatížil ji olůvkem. Otevřel okénko, spojil očko s určitým bodem daného předmětu nití a stanovil průmět tohoto bodu na rovinu okénka průsečíkem dvou nití přilepených voskem na rámec okénka. Potom odstranil nit, zavřel okénko a na papíře v něm napjatém vyznačil při průsečíku nití tečku; tak bod za bodem sestrojil na příklad obraz loutny. (Toto Dürerovo okénko je na obr. 2). Z takto sestrojených perspektivních obrazů se učili tehdejší malíři ponenáhlu zákonům perspektivy.

Poznali tedy základy perspektivy nejdříve malíři pokusem a zkušeností; až v 17. století začali se perspektivou zabývat matematikové, kteří podali teprve její soustavný theoretický výklad. Ve značné úplnosti shrnul pravidla perspektivy známý anglický matematik Brook Taylor (1685—1731) ve své knize o lineární perspektivě, vydané po prvé r. 1715 a po druhé r. 1719. Od dob zakladatele deskriptivní geometrie francouzského matematika Gasparda Monge (1746—1818) je lineární perspektiva částí deskriptivní geometrie a její základy jsou vyloženy v každé soustavné učebnici této nauky. Zákony, jejichž poznání ze zkušenosti trvalo staletí, se v deskriptivní geometrii vyloží na několika stránkách.

1. HLAVNÍ PRAVIDLA STŘEDOVÉHO PROMÍTÁNÍ

Při označování bodů, přímek a rovin budeme zachovávat obvyklá pravidla. Budeme tedy body označovat latinskými písmeny A, B, C, ..., přímky a, b, c, ..., kdežto roviny některými písmeny řecké abecedy (ϱ = ró, σ = sigma, τ = = tau). Při výkladu předpokládáme znalost základních stereometrických pojmů a pouček.*) Shrneme si je a očíslujeme tak, abychom se na ně mohli později odvolávat.

A) O dvou přímkách a, b říkáme, že jsou rovnoběžné (píšeme $a \parallel b$ nebo $b \parallel a$), jestliže splývají anebo nemají ani jeden společný bod a leží v téže rovině.

B) O přímce a říkáme, že je rovnoběžná s rovinou ϱ (píšeme $a \parallel \varrho$), jestliže leží v rovině ϱ anebo s ní nemá ani jeden společný bod.

C) O rovinách ϱ, σ říkáme, že jsou rovnoběžné (píšeme $\varrho \parallel \sigma$ nebo $\sigma \parallel \varrho$), jestliže splývají anebo nemají ani jeden společný bod.

O vzájemné poloze bodů, přímek a rovin platí různé poučky. Pro nás jsou nejdůležitější tyto:

I. Leží-li dva různé body v rovině, potom přímka, která jimi prochází, leží také v této rovině.

II. Přímkou a bodem ležícím mimo ni prochází jediná rovina.

*) Stereometrie je část geometrie, která se zabývá prostorovými útvary.

III. Dvě různé roviny, které mají společný bod, mají společnou přímku, která prochází tímto bodem. Kromě této přímky nemají již žádný další společný bod.

IV. Bodem lze vésti k přímce jedinou rovnoběžku.

V. Bodem lze vésti k rovině jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

VI. Je-li $a \parallel b$, $b \parallel c$, potom je též $a \parallel c$.

VII. Je-li $a \parallel b$, $b \parallel \varrho$, potom je též $a \parallel \varrho$.

VIII. Je-li $a \parallel \varrho$, $\varrho \parallel \sigma$, je také $a \parallel \sigma$.

IX. Je-li $\varrho \parallel \sigma$, $\sigma \parallel \tau$, potom je také $\varrho \parallel \tau$.

X. Jestliže roviny ϱ, σ jsou rovnoběžné a jestliže rovina τ protíná rovinu ϱ v přímce r, potom také protíná rovinu σ v přímce s a o těchto průsečnicích platí $r \parallel s$.

XI. Sestrojíme-li bodem O přímky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou ϱ, potom tyto přímky leží v rovině σ, která je rovnoběžná s rovinou ϱ a prochází bodem O.

XII. Je-li přímka p rovnoběžná s dvěma různoběžnými (t. j. protínajícími se) rovinami, je také rovnoběžná s jejich průsečnicí.

Správnost těchto vět je patrná už z názoru; věty V až XII je možné také dokázat logickou úvahou. Důkazy téměř všech těchto vět jsou provedeny na příklad v učebnici deskriptivní geometrie pro první třídu gymnasií vydané r. 1950 ve Státním nakladatelství učebnic v Praze. Pro porozumění našemu výkladu stačí ovšem znát jen obsah těchto pouček.

Zvolme si určitou rovinu ν, na kterou budeme promítat; budeme jí říkat průmětna. Mimo tuto rovinu zvolíme bod O — střed promítání. Průmětna ν rozdělí celý prostor na dvě části, které nazýváme poloprostory vyťaté průmětnou ν. *O bodech ležících v témže poloprostoru jako střed promítání O říkáme, že jsou před průmětnou, o bodech ležících v opačném poloprostoru než bod O říkáme, že jsou za průmětnou.*

Nesplývá-li bod P se středem promítání O, určuje s ním jedinou přímku $O\bar{P}$ (promítací paprsek bodu P); její průsečík P' s průmětnou ν nazýváme průmětem bodu P. Průmět středu promítání O nemůžeme takto jednoznačně sestrojit. Prochází jím totiž nekonečně mnoho přímek a každou můžeme pokládat za promítací paprsek bodu O; pak ovšem dostaneme nekonečně mnoho průmětů bodu O. To by nebylo účelné; lépe je označit bod O jakožto výjimečný (singulární) a stanovit si tuto úmluvu, kterou označíme jako větu 1.

Věta 1. Střed promítání nemá vůbec žádný průmět.

Každý bod P, který nesplývá s bodem O, je možno spojit s bodem O jedinou přímkou. Aby měl bod P průmět, musí přímka OP protínat průmětnu ν, t. j. nesmí být $OP \parallel \nu$. Bude-li $OP \parallel \nu$, nebude míti bod P vůbec průmět. Podle poučky XI leží všechny přímky proložené bodem O rovnoběžně k rovině ν v rovině $\delta \parallel \nu$. Tato rovina se nazývá *distanční rovina*. Dokázali jsme tedy větu:

Věta 2. Každý bod, který neleží v distanční rovině, má průmět. Body ležící v distanční rovině nemají průměty.

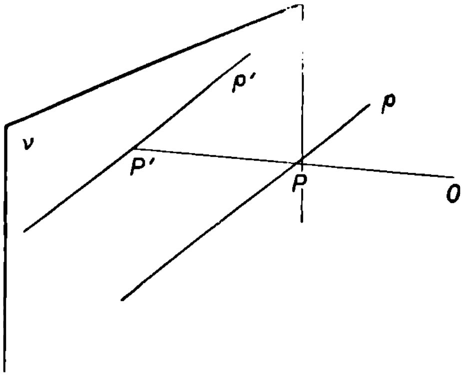
Je-li dán libovolný geometrický útvar, potom jeho průmětem nazýváme souhrn průmětů všech jeho bodů.

Důsledek: Přímka, která leží v distanční rovině, nemá průmět.

Všimněme si tedy, jak se promítá přímka p, která neleží v distanční rovině. Prochází-li přitom středem promítání O, pak není rovnoběžná s průmětnou (jinak by ležela v distanční rovině) a tedy ji protíná; přitom splývá s promítacím paprskem každého svého bodu. Promítá se tudíž každý její bod (bod O ovšem podle věty 1 vylučujeme) do jejího průsečíku s průmětnou, který se nazývá *stopník přímky p*; říkáme, že tento bod je průmětem přímky p. Víme-li naopak, že průmětem přímky p je bod, znamená to, že všechny body této přímky leží na přímce spojující tento bod se středem promítání O, t. j. přímka p prochází bodem O. Platí tedy tato věta:

Věta 3. Prochází-li přímka středem promítání tak, že není *rovnoběžná s průmětnou, je jejím průmětem její stopník a naopak, je-li průmětem přímky bod, prochází tato přímka středem promítání.*

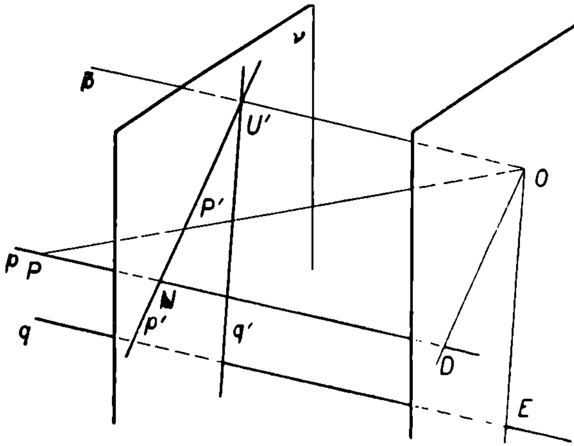
Neprochází-li přímka p středem promítání O, určuje s ním podle poučky II jedinou rovinu ϱ. Podle poučky I leží promítací paprsek každého bodu přímky p v rovině ϱ; proto



Obr. 3.

říkáme rovině ϱ *promítací rovina přímky* p. Neleží-li přímka p v distanční rovině, není podle poučky V rovina ϱ rovnoběžná s průmětnou a tedy ji protíná v přímce p' (obr. 3 a 4). Protože přímky p, p' leží v rovině, jsou rovnoběžné anebo se protínají. To záleží na tom, jakou polohu má přímka p vzhledem k průmětně.

Leží-li přímka p v průmětně, pak splývá se svým průmětem p'; je tedy podle definice A také $p' \parallel p$. Je-li přímka p rovnoběžná s průmětnou ν, ale neleží v ní, jest $p' \parallel p$ (obr. 3). Kdyby se totiž přímky p, p' protínaly v bodě R, byl by to průsečík přímky p s průmětnou; takový bod však na přímce p vůbec není, neboť $p \parallel \nu$ a neleží v ν. Protože je $p' \parallel p$ a protože přímky p, p' leží s bodem O v jediné rovině, protíná promítací paprsek každého bodu P přímky p také přímku p'. (Kdyby bylo $OP \parallel p'$, bylo by podle poučky VI také $OP \parallel p$.) A stejně naopak přímka OP' spojující libovolný bod P' přímky p' se středem O protíná přímku p. Má tedy každý bod přímky p průmět na přímce p' a naopak každý bod přímky p' je průmětem jediného bodu přímky p. Je tedy přímka p' průmětem přímky p. Výsledek úvah tohoto odstavce vyslovíme větou:



Obr. 4.

Věta 4. Průmětem přímky p, která je rovnoběžná s průmětnou a neleží v distanční rovině, je přímka $p' \parallel p$; přímka ležící v průmětně splývá se svým průmětem.

Není-li přímka p rovnoběžná s průmětnou, protíná ji v bodě N, jemuž říkáme stopník (obr. 4). Protíná také distanční rovinu δ v bodě D. (Kdyby bylo $p \parallel \delta$, pak vzhledem k tomu, že $\delta \parallel \nu$ bylo by podle poučky VIII také $p \parallel \nu$; protože však není $p \parallel \nu$, nemůže býti ani $p \parallel \delta$.) Promítací rovina ϱ přímky p má s průmětnou ν společný bod N a tedy ji podle poučky III protíná v přímce p', která prochází stopníkem N; podle poučky X protíná také distanční rovinu v přímce $OD \parallel p'$. Přímka OD tedy neprotíná přímku p'; jak víme z věty 2, nemá bod D průmět. Promítací paprsek OP každého jiného bodu P (kromě D) přímky p není rovnoběžný s přímkou p' (podle poučky IV) a tedy protíná přímku p' v bodě P'. Má tedy každý bod přímky p průmět na přímce p'; jedinou výjimku tvoří bod D, který nemá průmět. Ptejme se, zdali naopak každý bod P' přímky p' je průmětem nějakého bodu přímky p. To skutečně nastane pro každý bod P', jehož promítací paprsek OP' není rovnoběžný s přímkou p. Protože středem promítání O prochází jediná přímka $\overline{p} \parallel p$, existuje na přímce p' jediný bod, který není průmětem žádného bodu přímky p; označíme ho U'. Je to průsečík přímek p', $\overline{p}$. (Proč se tyto přímky skutečně protínají?) Zjistili jsme tedy, že každý bod přímky p' kromě jediného bodu U' je průmětem nějakého bodu přímky p. Přímka p' je tedy opět průmětem přímky p; přitom ovšem musíme pamatovat, že existují dva výjimečné body, totiž D a U'. Platí tudíž:

Věta 5. Protíná-li přímka p průmětnu v a neprochází-li středem promítání O, potom jejím průmětem je přímka p', která protíná přímku p v jejím stopníku N. — Na přímce p je jediný bod, který nemá průmět (její průsečík s distanční rovinou); na přímce p' leží jediný bod, který není průmětem žádného bodu přímky p (je to stopník přímky $\overline{p} \parallel p$ *vedené bodem O). Tomuto bodu říkáme úběžník přímky p.*

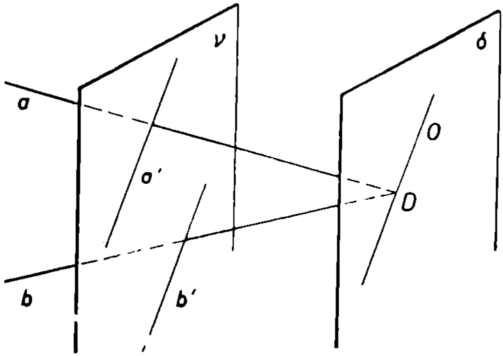
Na mnohých technických předmětech (domech, mostech a pod.) bývá několik rovnoběžných hran. Ze zkušenosti však víme, že při pohledu na větší takové objekty nevidíme obvykle tyto hrany jako rovnoběžky. Všimněme si proto, jak se zobrazují rovnoběžky ve středové projekci.

Podle věty 4 víme, že průmětem přímky p rovnoběžné s průmětnou je přímka $p' \parallel p$. Jsou-li tedy přímky $p \parallel q$ rovnoběžné s průmětnou, jest $p' \parallel p$, $q' \parallel q$. Je tedy $p' \parallel p \parallel q \parallel$

$\parallel q'$ a tedy podle poučky VI je také $p' \parallel q'$. (Přitom ovšem vylučujeme přímky ležící v distanční rovině, neboť tyto přímky nemají průměty.) Dokázali jsme větu:

Věta 6. Průměty rovnoběžných přímek, které jsou rovnoběžné s průmětnou (a neleží v distanční rovině), jsou zase přímky rovnoběžné.

Poznámka. Průměty přímek a, b mohou býti rovnoběžky $a' \parallel b'$, i když přímky a, b nejsou rovnoběžné (obr. 5). Protí-



Obr. 5.

nají-li se na příklad přímky a, b v bodě D, který leží v distanční rovině, protíná promítací rovina přímky a distanční rovinu v přímce OD a tedy podle poučky X průmětnu ν v přímce $a' \parallel OD$; z téhož důvodu je průmět b' přímky b rovnoběžný s přímkou OD. Je tedy $a' \parallel OD \parallel b'$ a tudíž podle poučky VI je také $a' \parallel b'$.

Zbývá probrat průměty rovnoběžek, které protínají průmětnu. V obr. 4 je znázorněna přímka p, protínající průmětnu ν, a její průmět p'. Přímka p' prochází stopníkem U' přímky $\overline{p}$ vedené středem promítání O rovnoběžně s přímkou p. Jak víme z věty 5, není bod U' průmětem žádného bodu přímky p. Je-li q libovolná přímka rovnoběžná s přímkou p

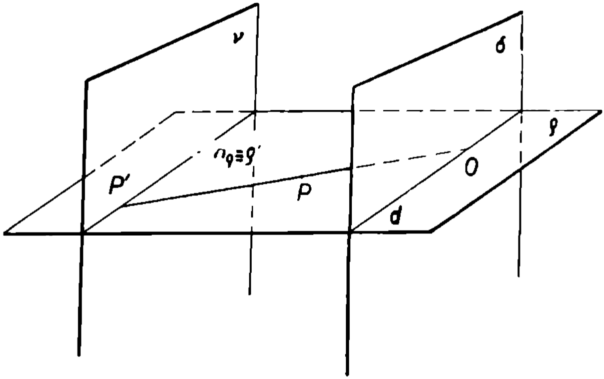
a neprocházející středem promítání O, jest $q \parallel p \parallel \overline{p}$ a tedy podle poučky VI je též $q \parallel \overline{p}$. Splývá tudíž rovina σ určená přímkami q, $\overline{p}$ s rovinou proloženou středem promítání O a přímkou q a je tedy promítací rovinou přímky q. Podle poučky III protíná rovina σ průmětnu v přímce q', jež prochází stopníkem U' přímky $\overline{p}$; bod U' není zase průmětem žádného bodu přímky q. Sbíhají se tedy průměty všech přímek rovnoběžných s přímkou p do jediného bodu U', jemuž proto říkáme *úběžník těchto přímek;* je to stopník přímky $\overline{p}$ proložené středem promítání O rovnoběžně s danými přímkami. Tento bod je podle věty 3 průmětem přímky $\overline{p}$. Protože bodem O prochází jediná rovnoběžka k přímce p, přísluší k daným rovnoběžkám jediný úběžník. Dokázali jsme tedy větu:

Věta 7. Průměty rovnoběžných přímek, které nejsou rovnoběžné s průmětnou, se protínají v jediném bodě zvaném úběžník. Tento bod je průmětem té rovnoběžky, která prochází středem promítání; jinak není průmětem žádného bodu žádné z ostatních rovnoběžek.

Poznámka. Průměty a', b', c', ... přímek a, b, c, ... se mohou však protínat v jednom bodě, i když přímky a, b, c, ... nejsou rovnoběžné. Protínají-li se na příklad přímky a, b, c, ... v jednom bodě P, který neleží v distanční rovině, protínají se jejich průměty a', b', c', ... v průmětě P' tohoto bodu.

Víme-li však, že bod U' je úběžník přímek a', b', c', ..., potom jsou přímky a, b, c, ... rovnoběžné, neboť podle věty 7 je každá z nich rovnoběžná s přímkou OU'.

Při zobrazování stavitelských objektů vycházíme z perspektivního obrazu jejich půdorysu, t. j. útvaru ležícího v rovině. Proto si ještě probereme zobrazování roviny. Protože podle věty 2 nemá žádný bod distanční roviny průmět, nemá ani tato rovina průmět. Zkoumejme nyní rovinu ϱ, která prochází středem promítání a není rovnoběžná s průmětnou, t. j. nesplývá s distanční rovinou. Tato rovina protíná průmětnu v přímce n_ϱ, které říkáme *stopa roviny;* podle poučky X protíná rovina ϱ také distanční rovinu δ v přímce $d \parallel n_\varrho$ (obr. 6). Promítací paprsek každého bodu P roviny ϱ leží podle poučky I v této rovině a tedy protíná stopu n_ϱ anebo je s ní rovnoběžný. Bodem O však prochází jediná rovnoběžka k přímce n_ϱ, totiž přímka d. Jedině tedy promítací



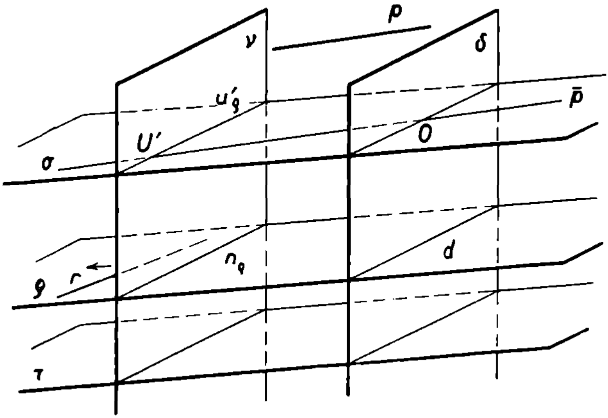
Obr. 6.

paprsky bodů přímky d neprotínají stopu n_ϱ, což je ve shodě s tím, že body distanční roviny nemají průměty. Promítací paprsek každého bodu P roviny ϱ, jenž neleží na přímce d, protíná stopu n_ϱ v bodě P', který je průmětem bodu P. Říkáme, že stopa $n_\varrho \equiv \varrho'$ je průmětem roviny ϱ. Lehce dokážete, že také naopak každá rovina, která má za průmět přímku, prochází středem promítání O. Platí tedy věta:

Věta 8. Distanční rovina nemá průmět. Průmětem každé jiné roviny, která prochází středem promítání, je přímka. Je-li naopak průmětem roviny přímka, prochází tato rovina středem promítání. V každé takové rovině je nekonečně mnoho bodů, které nemají průměty; jsou to body její průsečnice s distanční rovinou.

Neprochází-li rovina ϱ středem promítání a je-li rovnoběžná s průmětnou, má každý její bod průmět a naopak každý bod průmětny je průmětem jediného bodu roviny ϱ. Dokažte nepřímo pomocí poučky VIII; tím dokážete větu:

Věta 9. Průmětem roviny ϱ, která je rovnoběžná s průmětnou a neprochází středem promítání, je celá průmětna. Každý bod roviny ϱ má průmět a každý bod v průmětně je průmětem jednoho bodu roviny ϱ.



Obr. 7.

Zbývá konečně probrat případ roviny ϱ, která neprochází středem promítání a není rovnoběžná s průmětnou (obr. 7). Tato rovina má stopu n_ϱ; podle poučky X protíná distanční rovinu δ v přímce $d \parallel n_\varrho$. Podle věty 2 nemá žádný bod přímky d průmět; každý jiný bod roviny ϱ má (podle téže věty) průmět. Naopak bod P' ležící v průmětně je průmětem nějakého bodu P roviny ϱ tehdy a jenom tehdy, když přímka OP' není rovnoběžná s rovinou ϱ. Podle poučky XI vyplní však všechny přímky vedené bodem O rovnoběžně k rovině ϱ rovinu $\sigma \parallel \varrho$ proloženou bodem O. Podle poučky X protíná rovina σ průmětnu v přímce $u_\varrho' \parallel n_\varrho$; tuto přímku u_ϱ' nazýváme úběžnice roviny ϱ. Žádný bod této úběžnice není tedy průmětem nějakého bodu roviny ϱ; každý jiný bod průmětny je průmětem jediného bodu roviny ϱ. Dokázali jsme tedy větu:

Věta 10. Průmětem roviny ϱ, která neprochází středem promítání a není rovnoběžná s průmětnou, je celá průmětna s výjimkou jediné přímky u_ϱ' (zvané úběžnice roviny ϱ), jež je rovnoběžná se stopou n_ϱ roviny ϱ. Úběžnice u_ϱ' je stopa roviny proložené středem promítání rovnoběžně s rovinou ϱ. — V rovině ϱ existuje nekonečně mnoho bodů ležících na její průsečnici d s distanční rovinou, které nemají průmět.

Neprochází-li rovina τ středem promítání a je-li rovnoběžná s rovinou ϱ (obr. 7), jest její úběžnice u_τ' průsečnice průmětny s rovinou $\bar{\sigma} \parallel \tau$ proloženou středem promítání O. Protože $\bar{\sigma} \parallel \tau \parallel \varrho$, je podle poučky IX také $\bar{\sigma} \parallel \varrho$. Podle poučky V splývá tedy rovina $\bar{\sigma}$ s rovinou σ a tedy také úběžnice u_τ' splývá s úběžnicí u_ϱ'. Podle věty 10 víme, že tato úběžnice není průmětem žádné přímky roviny ϱ a žádné přímky roviny τ. — Víme-li naopak, že roviny ϱ, τ mají společnou úběžnici, znamená to, že jsou obě rovnoběžné s rovinou σ proloženou touto úběžnicí a středem promítání O; tudíž podle poučky IX jsou také spolu rovnoběžné. Výsledek tohoto odstavce je věta:

Věta 11. Všechny roviny, které jsou spolu rovnoběžné a protínají průmětnu, mají společnou úběžnici a naopak, mají-li roviny společnou úběžnici, jsou spolu rovnoběžné. — Úběžnice je průmětem té z těchto rovin, která prochází středem promítání; jinak není průmětem žádné přímky žádné z ostatních rovin.

Ke konci ještě probereme zobrazování přímek rovnoběžných s rovinou; přirozeně předpokládáme, že tyto přímky neleží v distanční rovině. Je-li rovina rovnoběžná s průmětnou, pak průměty přímek s ní rovnoběžných nemají žádnou zvláštní vlastnost; mohou mít v průmětně jakoukoliv polohu. Studujme proto rovinu ϱ, která není rovnoběžná s průmětnou ν. Je-li přímka $p \parallel \varrho$, pak je buď s její stopou n_ϱ rovnoběžná anebo nikoliv. Je-li $p \parallel n_\varrho$, je podle poučky VII také rovnoběžná s průmětnou ν a tedy podle věty 6 průmět p' přímky p je také rovnoběžný se stopou n_ϱ. Je-li naopak $p' \parallel n_\varrho$, nemusí býti $p \parallel n_\varrho$, ba ani nemusí být $p \parallel \varrho$, neboť p' je průmětem každé přímky ležící v rovině určené přímkou p' a středem promítání. Je-li však $p' \parallel n_\varrho$ a nesplývá s ní a víme-li, že přímka p leží v rovině ϱ, která neprochází středem promítání, potom jest $p \parallel n_\varrho$. Kdyby totiž přímka p protínala stopu n_ϱ v bodě N, procházela by jím (podle věty 5) také přímka p'; to však není možné, neboť p' podle předpokladu neprotíná stopu n_ϱ. Dokázali jsme větu, jejíž první část platí i pro rovinu ϱ procházející středem promítání:

Věta 12. Je-li přímka p (neležící v distanční rovině) rovnoběžná se stopou roviny ϱ, je také její průmět s touto stopou rovnoběžný. — Je-li naopak průmět p' přímky p, která leží v rovině neprocházející středem promítání, rovnoběžný se stopou této roviny, je také přímka p s touto stopou rovnoběžná.

Protíná-li rovina ϱ průmětnu a je-li p přímka rovnoběžná s rovinou ϱ, ale nikoliv s její stopou, potom přímka p protíná průmětnu ν. (Kdyby bylo $p \parallel \nu$, bylo by vzhledem k tomu, že je $p \parallel \varrho$, také $p \parallel n_\varrho$; viz poučku XII.) Potom také přímka $\overline{p} \parallel p$ vedená středem promítání O protíná průmětnu (plyne z poučky VII) v bodě U'. Podle věty 5 je bod U' úběžníkem přímky p. Protože $\overline{p} \parallel p \parallel \varrho$, je podle poučky VII také $\overline{p} \parallel \varrho$. Podle poučky XI leží tudíž přímka $\overline{p}$ v rovině $\sigma \parallel \varrho$ proložené středem promítání O (obr. 7). Podle věty 10 protíná rovina σ průmětnu v úběžnici u_ϱ' roviny ϱ; protože $\overline{p}$ leží v rovině σ a protíná průmětnu v bodě U', leží (poučka III) tento bod na průsečnici u_ϱ' roviny σ s průmětnou. Leží tedy úběžník U' na úběžnici u_ϱ'.

Leží-li úběžník U' přímky p na úběžnici roviny ϱ, leží přímka $\overline{p}$ spojující úběžník U' se středem promítání O v rovině $\sigma \parallel \varrho$ a je tedy $\overline{p} \parallel \sigma$. Protože $p \parallel \overline{p} \parallel \sigma$, je podle poučky VII také $p \parallel \sigma$; protože $\sigma \parallel \varrho$, je podle poučky VIII též $p \parallel \varrho$.

Dokázali jsme tedy větu:

Věta 13. Protíná-li rovina ϱ průmětnu a je-li přímka p rovnoběžná s touto rovinou, ale nikoliv s její stopou, leží úběžník této přímky na úběžnici roviny ϱ. Leží-li naopak úběžník přímky p na úběžnici roviny ϱ, je tato přímka rovnoběžná s rovinou ϱ.

Dokázali jsme přesně ty základní poučky středového promítání, kterých se nejvíc v perspektivě užívá. Pro praxi jsou důležité zejména věty 4, 6, 7, 11, 12 a 13.

Cvičení

Ve všech příkladech se předpokládá, že žádná ze zkoumaných přímek neleží v distanční rovině.

1. Přímka *a* prochází středem promítání, přímka *b* nikoliv; jakou vlastnost mají jejich průměty, jsou-li přímky *a*, *b* a) rovnoběžné, b) různoběžné, c) mimoběžné?
2. Jsou-li přímky *a*, *b* rovnoběžné, nesplývají a žádná z nich neprochází středem promítání, potom jejich průměty splývají nebo jsou rovnoběžné (nesplývající) anebo různoběžné. Kdy který případ nastává?
3. Jsou-li přímky *a*, *b* různoběžné a žádná z nich neprochází středem promítání, potom jejich průměty splývají nebo jsou rovnoběžné (nesplývající) anebo různoběžné. Kdy který případ nastává?
4. Jsou-li přímky *a*, *b* mimoběžné a žádná z nich neprochází středem promítání, potom jejich průměty jsou rovnoběžky (nesplývající) anebo různoběžky. Kdy který případ nastává?
5. Průměty a', b' přímek *a*, *b* splývají v jedinou přímku. Jakou vzájemnou polohu mohou mít přímky *a*, *b*?
6. Průměty a', b' přímek *a*, *b* jsou a) nesplývající rovnoběžky, b) různoběžky. Jakou vzájemnou polohu mají přímky *a*, b?
7. V průmětně jsou dány dvě různé přímky a', b' jako průměty přímek *a*, *b*. Přímky a', b' mají různé stopníky a různé úběžníky, Jak poznáme, zda jsou přímky *a*, *b* v prostoru různoběžné anebo mimoběžné? Proč nejsou rovnoběžné?

2. ÚBĚŽNÉ BODY A ÚBĚŽNÉ PŘÍMKY

Pravidla vyvozená v minulém odstavci se zjednoduší, zavedeme-li si pro rovnoběžnost přímek a rovin nové vhodné pojmy.

O rovnoběžných přímkách se obvykle říká, že mají týž *směr*. Podle věty 7 je každému směru, který není rovnoběžný s průmětnou, přiřazen v průmětně jediný bod U', zvaný úběžník tohoto směru. A naopak každému úběžníku U' je přiřazen v prostoru jediný směr, určený přímkou OU' (kde O je střed promítání). Přitom víme, že úběžník U' není průmětem žádného bodu žádné přímky, která je rovnoběžná s přímkou OU' a nesplývá s ní. Mohli bychom tedy říkat, že bod U' je průmětem směru společného všem přímkám rovnoběžným s přímkou OU'. Je však výhodnější říkat i směru „bod"; abychom ho však odlišili od ostatních skutečných bodů, nazýváme jej *nevlastní* anebo také *úběžný bod*. Skutečné body potom nazýváme body vlastními. Přesně zavádíme pojem nevlastního bodu touto definicí:

Definice 1. O přímkách, které mají týž směr (jsou spolu rovnoběžné), říkáme, že mají společný úběžný (nevlastní) bod, kterým procházejí.

K této definici nás vede i názor (obr. 4). Běží-li totiž bod P, ležící za průmětnou, po přímce p (která protíná průmětnu) tak, že se stále vzdaluje od průmětny, blíží se jeho průmět P' po průmětu p' přímky p k úběžníku U' této přímky. Čím více se bod P vzdálí od průmětny, tím více se jeho průmět P' přibližuje k úběžníku U'; jinak říkáme: Vzdaluje-li se (ubíhá-li) bod P po přímce p do nekonečna, přibližuje se jeho průmět P' po přímce p' neomezeně k úběžníku U'. Stejně je tomu tak, pohybuje-li se bod P po přímce p opačným směrem tak, že se stále vzdaluje od distanční roviny. Totéž platí pro body každé přímky q, která je rovnoběžná s přímkou p a neprochází středem promítání. Vzdaluje-li se bod do nekonečna po přímce $\overline{p} \parallel p$ procházející středem promítání, je stále jeho průmět zase v úběžníku U'. Z uvedených důvodů *je vhodné pokládat úběžník U' rovnoběžných přímek za průmět jejich společného úběžného bodu,* který označujeme ∞U; přímka $\overline{p}$ je promítacím paprskem tohoto úběžného bodu.

O rovnoběžných rovinách neříkáme, že mají týž směr, nýbrž že mají totéž *zaměření*. Podle věty 10 je každému zaměření (s výjimkou toho, jež je určeno průmětnou) přiřazena v průmětně jediná přímka u', totiž úběžnice všech rovin tohoto zaměření. A také naopak každé přímce u' v průmětně, pokládané za úběžnici, je v prostoru přiřazeno zaměření určené rovinou σ proloženou přímkou u' a středem promítání. Přitom víme, že úběžnice u' není průmětem žádné přímky, která by ležela v některé z rovin tohoto zaměření (kromě roviny σ). Mohli bychom úběžnici u' nazvat „průmětem" zaměření. Názornější je však pokládat i zaměření za přímku, kterou ovšem od jiných skutečných (vlastních) přímek odlišujeme tím, že ji nazýváme *úběžnou (nebo nevlastní) přímkou*. Přesně zavádíme pojem nevlastní přímky touto definicí:

Definice 2. O rovinách, které jsou spolu rovnoběžné (mají totéž zaměření), říkáme, že mají společnou úběžnou (nevlastní) přímku, kterou procházejí.

K této definici nás vede také názor. Posouvá-li se totiž v rovině ϱ (která neprochází středem promítání) přímka r tak, že každý její bod ležící za průmětnou se vzdaluje od průmětny, přibližuje se promítací rovina této přímky stále víc a více k rovině $\sigma \parallel \varrho$ procházející středem promítání. (V obr. 7 je směr posouvání přímky r vyznačen šipkou.) Tudíž průmět r' přímky r se stále přibližuje k úběžnici u_ϱ'. Průmět každé přímky roviny σ splývá stále s úběžnicí $ú_\varrho$. Proto říkáme, že *úběžnice $ú_\varrho$ roviny ϱ a všech rovin s ní rovnoběžných je průmětem společné úběžné přímky těchto rovin*, kterou označujeme ∞u; rovina σ je promítací rovinou této úběžné přímky.

Zbývá ještě říci, kdy leží nevlastní bod na nevlastní přímce:

Definice 3. Nevlastní bod každé přímky rovnoběžné s rovinou daného zaměření leží na nevlastní přímce dané tímto zaměřením.

Zavedením úběžných bodů a přímek jsme rozšířili prostor; tím docílíme jednoduššího a názornějšího výkladu středového promítání. *V takto rozšířeném prostoru zůstane jediným výjimečným (singulárním) bodem střed promítání, který nemá vůbec žádný průmět. Každý jiný bod má průmět.* Pro body ležící mimo distanční rovinu to víme z věty 2; lehce dokážeme, že *každý bod distanční roviny kromě středu promítání má průmět v určitém úběžném bodě průmětny.* Promítací paprsek takového bodu D distanční roviny v ní leží a tedy podle definice 3 leží jeho úběžný bod $\infty D'$ na úběžné přímce této roviny; protože je to podle definice 2 také úběžná přímka průmětny, leží bod $\infty D'$ v průmětně. Je to tedy průsečík promítacího paprsku bodu D s průmětnou čili průmět bodu D. Důsledek toho je, že *průmětem přímky, která leží v distanční rovině a prochází středem promítání, je úběžný bod průmětny, průmětem každé jiné přímky distanční roviny je úběžná přímka průmětny, která je také průmětem celé distanční roviny (s jedinou výjimkou středu promítání)*. Dokažte podrobně.

Úběžníkem přímky p rovnoběžné s průmětnou je průsečík průmětny s přímkou $\overline{p} \parallel p$ proloženou středem promítání. Podle definice 3 je to úběžný bod přímky $\overline{p}$, který je současně podle definice 1 úběžným bodem přímky p. *Je tedy úběžníkem přímky p rovnoběžné s průmětnou její úběžný bod.* Stejně dokážeme, že *úběžnicí roviny rovnoběžné s průmětnou je její úběžná přímka.*

Důsledkem definice 3 je také, že každý bod úběžnice u_ϱ' roviny ϱ je průmětem jednoho úběžného bodu této roviny. Z definice 3 a z věty 13 také plyne, že i naopak každý úběžný bod roviny ϱ se promítá do bodu úběžnice u_ϱ' této roviny.

Zavedeme-li tedy úběžné body a přímky a pokládáme-li úběžníky za průměty úběžných bodů a úběžnice za průměty úběžných přímek, můžeme věty 1 až 13 vysloviti takto:

I. Střed promítání nemá průmět.

II. Každý bod nesplývající se středem promítání má průmět (vlastní nebo úběžný).

III. Průmět každé přímky procházející středem promítání je bod (vlastní nebo úběžný); naopak, je-li průmětem přímky bod, prochází tato přímka středem promítání.

IV. (místo vět 4 a 5). Průmětem každé přímky p, která neprochází středem promítání, je přímka p'. Každý bod přímky p má průmět na přímce p' a každý bod přímky p' je průmětem jednoho bodu přímky p.

V. (místo vět 6 a 7). Průměty přímek, které mají společný úběžný bod a z nichž žádná neprochází středem promítání, jsou přímky, které mají společný úběžník (vlastní nebo úběžný).

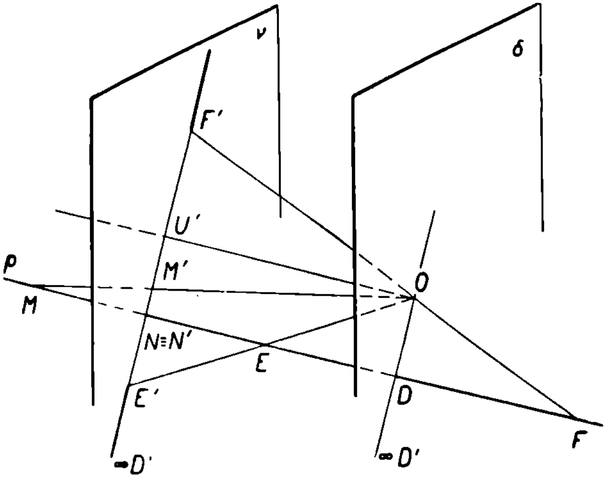
VI. (místo věty 8). Průmětem každé roviny, která prochází středem promítání, je přímka (vlastní nebo úběžná); a naopak, je-li průmětem roviny přímka (vlastní nebo úběžná), prochází rovina středem promítání.

VII. (místo vět 9 a 10). Průmětem každé roviny ϱ, která neprochází středem promítání, je celá průmětna, t. j. každý bod roviny ϱ má průmět a naopak každý bod průmětny je průmětem jednoho bodu roviny ϱ.

VIII. (místo věty 11). Všechny roviny, které mají společnou úběžnou přímku, mají společnou úběžnici (vlastní nebo úběžnou).

IX. (místo vět 12 a 13). Leží-li úběžný bod přímky p na úběžné přímce roviny ϱ, leží úběžník této přímky na úběžnici roviny ϱ. Platí i věta obrácená.

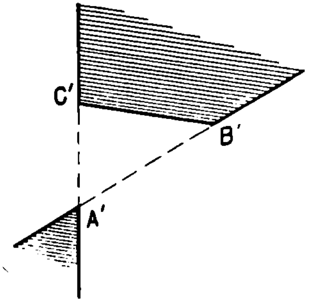
Zavedením úběžných prvků se však také názorněji vyloží mnohá paradoxa středových průmětů útvarů. Promítneme-li na př. úsečku MN, která leží na přímce p za průmětnou (obr. 8), dostaneme jako průmět opět úsečku $M'N'$ na prů-



Obr. 8.

mětu p' přímky p. Probíhá-li bod úsečku MN od bodu M k bodu N, probíhá jeho průmět úsečku $M'N'$ od bodu M' k bodu N'. Jestliže však je na přímce p dána úsečka EF, která protíná distanční rovinu v bodě D, potom průmět úsečky ED je polopřímka s počátkem v bodě E' a průmětem úsečky DF je polopřímka s počátkem v bodě F'. (V obr. 8 jsou tyto dvě polopřímky silně vytaženy.) Rozpadá se tedy průmět úsečky EF ve dvě od sebe oddělené polopřímky. Velmi názorně se tento zjev vysvětlí, připustíme-li za průmět bodu D úběžný bod D' přímek p', OD. Probíhá-li bod úsečku

EF od bodu E přes bod D do bodu F, běží jeho průmět od bodu E' přes bod D' do bodu F', takže uvedené dvě silně vytažené polopřímky tvoří vlastně „úsečku“ $E'F'$ obsahující úběžný bod D' přímky p'. V tomto smyslu je tedy i v tomto případě průmětem úsečky zase úsečka.



Obr. 9.

Cvičení

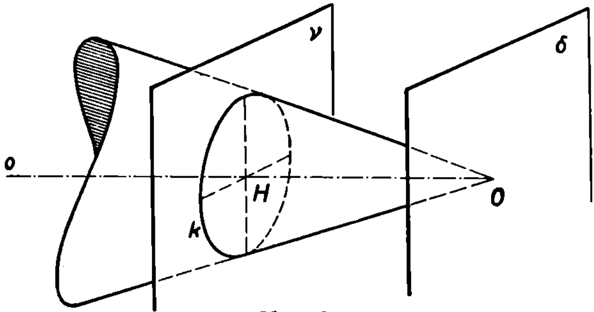
8. Rozšíříme-li prostor o nevlastní body a přímky, pak ve cvičeních 1—6 můžeme připustit i přímky a, b, ležící v distanční rovině. Učiňte tak a proveďte řešení těchto cvičení s užitím nevlastních bodů a přímek.
9. V rovině ϱ, která protíná distanční rovinu, je dán čtverec $ABCD$, který má stranu AB v distanční rovině. Co je středovým průmětem tohoto čtverce?
10. V rovině ϱ, která protíná distanční rovinu je dán trojúhelník ABC tak, že jeho dvě strany protínají distanční rovinu. Dokažte, že jeho středový průmět vypadá tak, jak je naznačeno šrafováním v obr. 9. (Uvědomte si, že strany trojúhelníka protínající distanční rovinu mají průměty takové jako úsečka EF v obr. 8.)

3. PODMÍNKY SPRÁVNÉHO PERSPEKTIVNÍHO ZOBRAZENÍ

Na konci minulého odstavce a ve cvičeních 9 a 10 jsme poukázali na některá paradoxa středového promítání. Ze zkušenosti však víme, že nikdy nevidíme úsečku EF tak, jak se jeví ve středovém průmětě na obr. 8; také nikdy nevidíme trojúhelník ABC způsobem vyznačeným v obr. 9. Už tyto dva příklady ukazují, že každý středový průmět nějakého předmětu není ještě jeho správným perspektivním obrazem (t. j. neodpovídá ani přibližně našemu vidění). Abychom dostali správný perspektivní obraz předmětu, musíme splnit určité podmínky, které si nyní probereme.

Distanční rovina dělí prostor na dva poloprostory (obr. 10). Díváme-li se jedním okem ze středu promítání O (jemuž budeme krátce říkat oko) tak, že je naše čelo rovnoběžné s průmětnou, vidíme jenom útvary, které leží v témže poloprostoru jako průmětna ν. Tomuto poloprostoru proto říkáme viditelný poloprostor; opačný k němu poloprostor vyťatý distanční rovinou se nazývá neviditelný poloprostor. Díváme-li se popsaným způsobem, nevidíme nikdy předměty ležící v neviditelném poloprostoru. Proto nevidíme také nikdy úsečku ani trojúhelník tak, jak ukazují obr. 8 a 9. Nepohybujeme-li okem, nevidíme ani celý viditelný prostor. Díváme-li se totiž tak, že naše čelo je rovnoběžné s průmětnou a naše oko O je v klidu, vidíme jenom ty předměty, které leží uvnitř rotačního kužele, jenž má vrchol v bodě O, osu o v polopřímce vycházející z oka O kolmo k průmětně a povrchové přímky svírající s osou o úhel asi 20°. (Výšku kužele neudáváme.) Tento kužel nazýváme *zorný kužel.* (Obr. 10.)

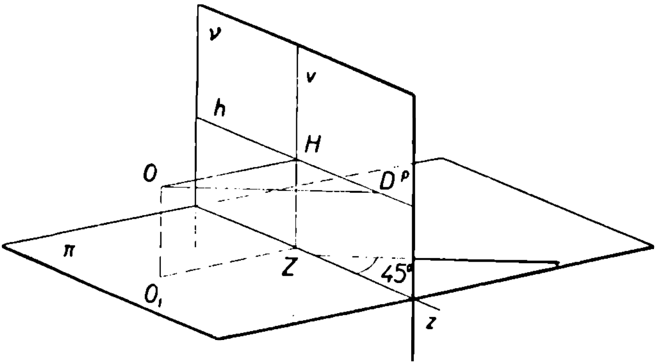
Patu kolmice spuštěné z oka O na průmětnu ν nazýváme *hlavním bodem* průmětny a označujeme H. Vzdálenost středu promítání od průmětny se jmenuje *distance* a označuje se d; je rovna délce úsečky OH. Zorný kužel protíná průmětnu ν v kružnici k, opsané z hlavního bodu H poloměrem rovným asi jedné třetině distance. *Aby tedy byl daný předmět správně*



Obr. 10.

perspektivně zobrazen, musí jeho obraz ležet v zorném poli, t. j. uvnitř kružnice opsané kolem hlavního bodu H poloměrem rovným asi jedné třetině distance. Jenom takový obraz přehlédneme celý klidným okem z příslušného k němu středu promítání. (Tento střed promítání O leží na kolmici vztyčené v hlavním bodě H k průmětně a jeho vzdálenost od průmětny jest $\overline{OH} = d$.)

Nestačí však umístit předmět dovnitř zorného kužele; je také třeba volit přiměřeně distanci. *Distance má býti aspoň 20—25 cm,* neboť na menší vzdálenost se už oko nemůže přizpůsobit. Obrazy s menší distancí než 20—25 cm nemůžeme už dobře vidět z příslušného k nim středu promítání, a proto už také nepůsobí tak dobrým prostorovým dojmem. Nazýváme je *miniatury;* můžeme o nich předpokládat, že vznikly zmenšením obrazů sestrojených při správné volbě distance. Distanci volíme tedy aspoň 20 cm. *Vyhýbáme se však i příliš veliké distanci,* neboť obraz s takovou distancí je příliš plochý; kromě toho padají při velké distanci téměř všechny úběžníky obrazu mimo nákresnu, takže se komplikuje jeho konstrukce. *Nejvhodnější je, zvolit distanci rovnou asi třem polovinám délky úsečky spojující dva od sebe nejvíc vzdálené body zobrazovaného předmětu.* (Předměty, které zobrazujeme, stavíme ovšem při tom vždy za průmětnu.)



Obr. 11.

Je zajímavé připomenout z historie malířství, že staří mistři užívali menších distancí; velmi malé distance užíval zejména v úvodu již zmíněný Albrecht Dürer. Také je zajímavé, že již ve XIV. století bylo užíváno hlavního bodu jako úběžníku hloubkových přímek; obecný zákon o společném úběžníku libovolných rovnoběžných přímek dokázal však až r. 1600 Quido Ubaldo del Monte ve své knize o perspektivě.

Obvykle zobrazujeme předměty na svislou rovinu; proto i *v perspektivě předpokládáme, že průmětna v je svislá.* Předměty, které zobrazujeme, stojí obyčejně na vodorovné rovině, jíž říkáme *základní rovina* a kterou označujeme π. Je-li oko znázorněno jako bod O, potom pata O_1 kolmice spuštěné z bodu O na základní rovinu π se nazývá *stanoviště*. Úsečka OO_1 udávající výšku oka nad základní rovinou se jmenuje *výška oka*. (Obr. 11.) Průsečnice základní roviny π s průmětnou ν se nazývá *základnice* a označuje se z. Přímka v proložená hlavním bodem H kolmo k základnici z se nazývá *vertikála;* podle věty 10 (odst. 1) je to úběžnice všech rovin kolmých k základnici z. Vertikála v protíná základnici z v *základním bodě* Z.

Rovina $\sigma \parallel \pi$ proložená okem O protíná průmětnu ν v přímce $h \parallel z$ (podle poučky X), která je podle věty 10 (odst. 1) úběžnicí všech vodorovných rovin; říkáme jí *horizontála* nebo také *horizont*. Podle věty 13 (odst. 1) leží na horizontále úběžníky všech vodorovných přímek. Přímky kolmé k průmětně nazýváme *hloubkové přímky;* jsou rovnoběžné s přímkou OH, takže podle věty 7 (odst. 1) je hlavní bod H jejich společným úběžníkem.

Každá svislá přímka je rovnoběžná s vertikálou v a tedy podle poučky VII také s průmětnou ν; tudíž podle věty 6 (odst. 1) je průmět této přímky rovnoběžný s vertikálou, t. j. svislý.

Kružnice opsaná kolem hlavního bodu H poloměrem rovným distanci se nazývá *distanční kružnice;* protíná horizontálu v pravém a levém distančníku (D^p, D^l) a vertikálu v v horním a dolním distančníku (D^h, D^d). V základní rovině jsou dvě osnovy přímek, z nichž každá svírá se základnicí úhel 45°. Úběžník jedné osnovy těchto přímek leží na úběžnici základní roviny, t. j. na horizontále h, a tvoří s body H, O pravoúhlý trojúhelník, který má při oku O úhel 45°. Tento trojúhelník je tedy rovnoramenný, takže vzdálenost úběžníku od hlavního bodu H je rovna distanci; leží tedy úběžníky uvedených přímek v pravém, respektive levém distančníku.

V posledních třech odstavcích jsme vyvodili věty, které jsou ovšem jen zvláštním případem dřívějších obecných vět. Je však výhodné si je zapamatovat, neboť jsou velmi důležité pro konstrukci perspektivních obrazů na svislou rovinu. Jsou to tyto věty:

Věta A. Hlavní bod H je úběžník všech hloubkových přímek.

Věta B. Horizontála h je úběžnicí všech vodorovných rovin; leží na ní úběžníky všech vodorovných přímek.

Věta C. Svislé přímky se promítají zase jako svislé.

Věta D. Pravý a levý distančník jsou úběžníky vodorovných přímek, které svírají se základnicí úhel 45°.

Věta E. Horní a dolní distančník jsou úběžníky přímek, které leží v rovinách kolmých k základnici a svírají s vertikálou úhel 45°.

Poznámka. Věta E se dokáže obdobně jako věta D.

Kromě uvedených názvů se užívá v perspektivě často pojmů průčelná poloha a neprůčelná poloha. *Průčelná přímka* je přímka, která leží v průmětně anebo je s ní rovnoběžná. *Neprůčelná přímka* je přímka, která neleží v průmětně ani s ní není rovnoběžná. Obrazec nazýváme průčelným, jestliže jeho rovina je rovnoběžná s průmětnou. O hranolu říkáme, že je v poloze průčelné, jestliže některá jeho pobočná stěna je rovnoběžná s průmětnou. U jehlanu mluvíme o průčelné poloze, jestliže má vodorovnou podstavu, jejíž některá hrana je rovnoběžná se základnicí.

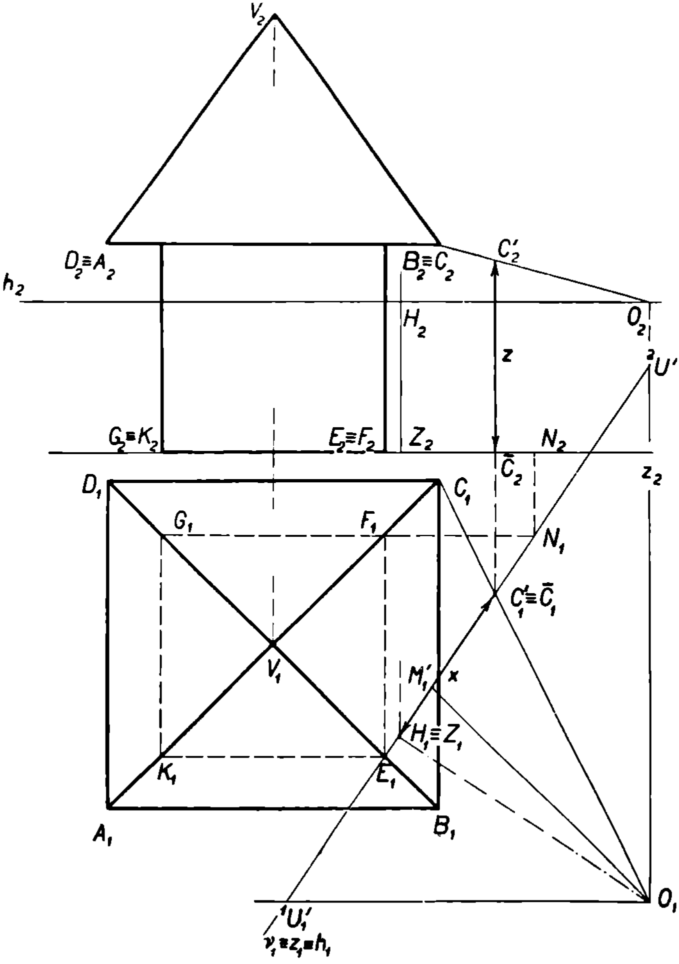
4. PRŮSEČNÁ METHODA. POMOCNÉ KONSTRUKCE

V lineární perspektivě nezobrazujeme obvykle skutečně již existující objekty (jejichž názorné obrazy můžeme rychleji sestrojit fotografováním), nýbrž ty předměty, které jsou teprve navrženy k provedení (projekty). Bývají to nejčastěji objekty stavitelské, jejichž perspektivní obrazy sestrojujeme podle jejich půdorysu a nárysu. *V podstatě jsou dvě základní methody konstrukce perspektivních obrazů: průsečná a přímá.* V průsečné methodě zobrazíme půdorys a nárys daného předmětu, volíme průmětnu i střed promítání a sestrojujeme skutečné obrazy jednotlivých bodů jako průsečíky jejich zorných paprsků se zvolenou průmětnou. Přímou methodou nazýváme postup, při kterém sestrojujeme přímo v nákresně (kde zvolíme základnici, horizont, hlavní bod a distanci) perspektivní obrazy, aniž bychom jednotlivé body hledali jako průsečíky jejich zorných paprsků s průmětnou.

Ukážeme si na jednoduchém příkladě, jak postupujeme při použití průsečné methody.

Úloha. Zobrazte perspektivu (jak stručně říkáme) tělesa složeného z kvádru a pravidelného čtyrbokého jehlanu; jehlan stojí na kvádru tak, že hrany jeho podstavy jsou rovnoběžné s podstavnými hranami kvádru.

Těleso je zobrazeno v půdoryse a náryse na obr. 12; dolní část je kvádr se čtvercovou podstavou $EFGK$, horní jehlan $VABCD$. Perspektivní průmětnu ν volíme — jako obvykle — svislou; je výhodné ji proložit jednou svislou hranou kvádru,

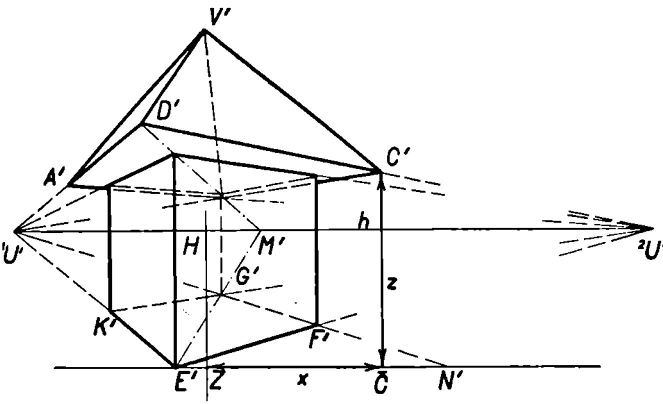

V_2
$D_2 \equiv A_2$
$B_2 \equiv C_2$
C_2'
h_2
H_2
O_2
z
$^2U'$
$G_2 \equiv K_2$
$E_2 \equiv F_2$
Z_2
N_2
$\bar{C}_2$
z_2
D_1
C_1
G_1
F_1
N_1
$C_1' \equiv \bar{C}_1$
V_1
M_1'
x
$H_1 \equiv Z_1$
K_1
E_1
A_1
B_1
O_1
$^1U_1'$
$\nu_1 \equiv z_1 \equiv h_1$

Obr. 12.

na př. hranou vycházející z vrcholu E. Protože je rovina ν kolmá k půdorysně, jest jejím půdorysem přímka ν_1 procházející půdorysem E_1 vrcholu E. Rovina ν protne první průmětnu v základnici z ($z_1 \equiv \nu_1$, z_2 splývá s nárysem první průmětny, t. j. s osou x). Zvolíme oko O tím, že zvolíme jeho sdružené obrazy O_1, O_2, a sestrojíme půdorys a nárys základního bodu Z a hlavního bodu H. Oko O volíme nejlépe tak, aby půdorys přímky OH procházel středem V_1 půdorysu daného útvaru. (Protože jest rovina ν svislá, jest přímka $OH \perp \nu$ vodorovná a je tedy $O_1H_1 \perp \nu_1$, $O_2H_2 \parallel z_2$.) Přímka O_2H_2 je nárysem horizontály h.

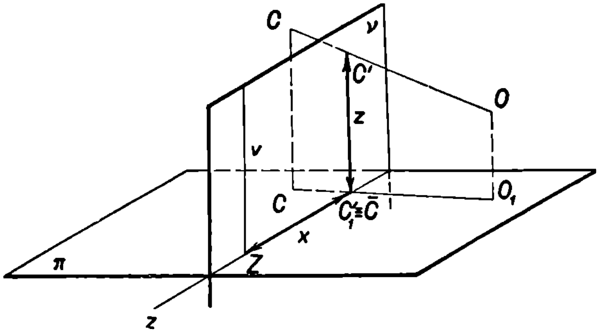
Perspektivu tělesa můžeme sestrojit tak, že sestrojíme perspektivní obrazy všech jeho vrcholů a patřičně je spojíme. Konstrukci průmětů bodů vyložíme třeba pro vrchol C. Promítací paprsek OC bodu C protíná průmětnu ν v průmětu C' bodu C. Protože půdorys celé roviny ν je přímka ν_1, jest půdorys C_1' bodu C' v průsečíku přímek O_1C_1, ν_1; jeho nárys C_2' jest s půdorysem C_1' na ordinále a na nárysu O_2C_2 přímky OC. Stejně můžeme sestrojit sdružené obrazy průmětů ostatních vrcholů tělesa. Avšak ani v půdoryse ani v náryse nedostaneme středový průmět tělesa ve skutečné velikosti. Tuto skutečnou velikost však dostaneme, položíme-li průmětnu ν do nákresny. Postupujeme při tom tak, že zvolíme vodorovnou základnici z, na ní základní bod Z a jím proložíme vertikálu $v \perp z$; na vertikále leží bod H ($\overline{ZH} = \overline{Z_2H_2}$). Hlavním bodem H prochází horizontála $h \parallel z$ (obr. 13). K přenesení průmětu C' bodu C do nového obrazu stačí odměřit dvě úsečky. Víme totiž (podle věty C z odst. 3), že svislá přímka CC_1 se promítá centrálně opět do svislé přímky, která protíná základnici z v půdoryse C_1' bodu C' (obr. 14). Označíme-li $\overline{ZC_1'} = x$, $\overline{C_1'C'} = z$, pak úsečky x, z nazýváme *souřadnicemi* bodu C' v rovině ν vzhledem k osám z, v. První souřadnice $x = \overline{ZC_1'}$ leží na základnici z, t. j. v první průmětně, a tedy je v půdoryse (obr. 12) ve skutečné velikosti $x = \overline{Z_1C_1'}$. Druhá souřadnice $z = \overline{C_1'C'}$ je na svislé přímce a tedy je v náryse (obr. 12) ve skutečné velikosti $z = \overline{C_2C_2'}$. Odměříme tedy kružítkem v obr. 12 souřadnici $x = \overline{Z_1C_1'}$ a přeneseme ji do obr. 13 na základnici z od bodu Z vpravo (neboť také v obr. 12 je bod C_1' vpravo od bodu Z_1); tím dostaneme bod $\bar{C}$. (V obr. 13 užijeme raději označení $\bar{C}$, neboť znakem C_1' se označuje perspektivní průmět půdorysu C_1 bodu C. Tento bod C_1' by na obr. 14 byl v průsečíku přímek OC_1, $\bar{C}C'$.) Bod C' leží na svislé přímce $\bar{C}C' \parallel v$ ve vzdálenosti $z = \overline{\bar{C}_2C_2'}$ od bodu $\bar{C}$; souřadnici z nanesme nad základnici, neboť také v obr. 12 je bod C_2' nad přímkou z_2. Aby konstrukce byla jasně viditelná, jsou souřadnice x, z ve všech třech obrázcích vyznačeny šipkami.

Popsaným způsobem můžeme sestrojit perspektivní obrazy ostatních bodů. Avšak je mnohem přesnější a výhodnější použíti při konstrukci úběžníků a stopníků prodloužených hran daného tělesa. Na zobrazovaném tělese jsou dvě skupiny vodorovných, spolu rovnoběžných hran ($AB \parallel CD \parallel \ldots$ a dále $AD \parallel BC \parallel \ldots$). Přímky, na kterých leží hrany první



Obr. 13.

skupiny, protínají průmětnu, a tedy podle věty 7 (odst. 1) mají společný úběžník ${}^1U'$, který sestrojíme jako průsečík průmětny s přímkou $O{}^1U' \parallel AB$; je tedy ${}^1U_1'$ průsečík přímek ν_1, $O_1{}^1U_1' \parallel A_1B_1$. Podle věty B (odst. 3) leží tento úběžník na horizontále h. Stejně sestrojíme úběžník ${}^2U'$ přímek druhé



Obr. 14.

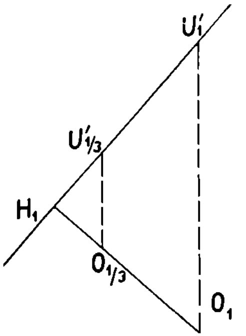
skupiny a úběžník M' uhlopříček $EG \parallel BD$. Tyto tři úběžníky přeneseme do obr. 13 ($\overline{H{}^1U'} = \overline{H_1{}^1U_1'}$, $\overline{H{}^2U'} = \overline{H_1{}^2U_1'}$, $\overline{HM'} = \overline{H_1M_1'}$). Potom lehce narýsujeme perspektivní obraz daného tělesa. Sestrojíme na základnici z výše popsaným způsobem bod E' ($\overline{ZE'} = \overline{Z_1E_1}$) a stopník N' přímky FG ($\overline{ZN'} = \overline{Z_1N_1}$). Potom bod F' je průsečík přímek $E'{}^2U'$, $N'{}^1U'$, bod G' je průsečík přímek $E'M'$, $N'{}^1U'$ a konečně bod K' leží v průsečíku přímek $E'{}^1U'$, $G'{}^2U'$. Svislé hrany kvádrů se promítají jako svislé. Při tom hrana vycházející z bodu E leží v průmětně, takže podle věty 4 (odst. 1) splývá se svým průmětem; její délka je v perspektivním obraze ve skutečné velikosti a odměří se na obr. 12 v nárysu. Pomocí úběžníků ${}^1U'$, ${}^2U'$, M' lehce sestrojíme obraz horní podstavy kvádru. Při konstrukci obrazu jehlanu stačí sestrojit obrazy C', D', V' bodů C, D, V; zbývající dva vrcholy podstavy sestrojíme pomocí úběžníků ${}^1U'$, ${}^2U'$, M'. Obdobným způsobem postupujeme v každé úloze; při tom si pamatujeme:

Sestrojujeme-li perspektivu nějakého předmětu průsečnou methodou, sestrojíme vždy (pokud jsou v nákresně) úběžníky přímek, ve kterých leží jeho hrany; s výhodou používáme také průsečíků těchto přímek s perspektivní průmětnou.

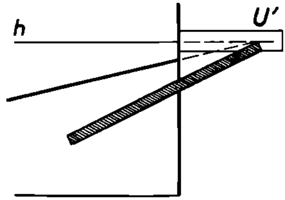
Poznámka. Sestrojujeme-li perspektivu tělesa právě popsaným způsobem, můžeme ji při tom současně libovolně zvětšit nebo zmenšit. Zvětšíme-li na př. dvakrát každou úsečku, kterou přenášíme z obr. 12 do obr. 13, dostaneme obrázek zvětšený proti obr. 13. v poměru 1 : 2.

Na obr. 13 je obraz tělesa dost skreslen; to je způsobeno tím, že jsme zvolili malou distanci. Proto také obraz neleží uvnitř zorného pole, t. j. uvnitř kružnice opsané kolem hlavního bodu H poloměrem rovným asi třetině distance. Podle zásad, které jsme uvedli v odst. 3, by měla být distance aspoň dvakrát větší, než je tomu v obr. 12 a 13. Zvolíme-li však tak velikou distanci, vyjde na obr. 12 půdorys úběžníku ${}^2U'$ mimo nákresnu. K určení úběžníku však nepotřebujeme ani jeho půdorys; stačí nám, když zjistíme jeho vzdálenost od hlavního bodu. Obr. 15 ukazuje, jak můžeme tuto délku zjistit. Sestrojíme na úsečce H_1O_1 bod $O_1/3$, který má od bodu H_1 vzdálenost rovnou na př. třetině distance; je tedy $\overline{H_1O_1/3} = \frac{1}{3}\overline{H_1O_1}$. Tímto bodem vedeme přímku rovnoběžnou s přímkou O_1U_1' a sestrojíme její průsečík $U_1'/3$ s přímkou ν_1. Potom jest — jak se dokazuje v geometrii — $\overline{H_1U_1'/3} = \frac{1}{3}\overline{H_1U'_1}$. Je-li tedy velká distance, sestrojíme na úsečce O_1H_1 bod $O_1/3$ (říkáme, že *redukujeme* distanci na třetinu), proložíme tímto bodem přímku rovnoběžnou s příslušnou hranou tělesa a určíme její průsečík $U_1'/3$ s půdorysem ν_1 průmětny ν. Potom vzdálenost úběžníku U' od hlavního bodu je rovna trojnásobku úsečky $H_1U_1'/3$. Podle potřeby můžeme redukovat distanci na polovinu nebo čtvrtinu a pod.

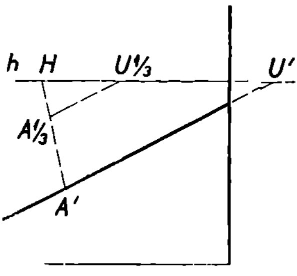
Jestliže však v nákresně, kde sestrojujeme perspektivu tělesa (obr. 13), vychází některý úběžník mimo nákresnu, pomáháme si různým způsobem. Architekti často používají velmi jednoduché pomůcky. Na rýsovací desku přiklepnou zespodu pod horizontálu h laťku, na kterou prodlouží hori-



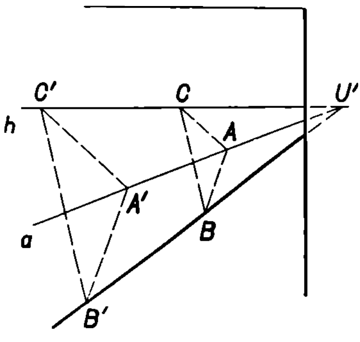
Obr. 15.



Obr. 16.



Obr. 17.



Obr. 18.

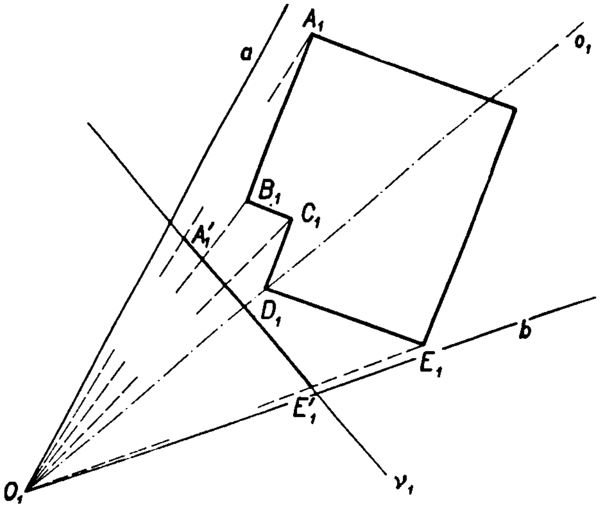
zontálu a vyznačí na ní příslušný úběžník U'. Do tohoto bodu zarazí hřebíček, ke kterému přikládají pravítko (obr. 16).

Také můžeme použíti známých pouček z geometrie. Sestrojíme-li na př. na horizontále h bod $U'/3$, vzdálený od hlavního bodu H o třetinu délky HU', můžeme bod A' spojit s nepřístupným úběžníkem U' takto (obr. 17): Spojíme bod A' s hlavním bodem H a úsečku HA' rozdělíme na tři stejné díly. Označíme-li $A'/3$ ten dělící bod, který leží blíž k hlavnímu bodu H, jest — jak se dokazuje v geometrii — přímka $A'U'$ rovnoběžná s přímkou $A'/3\,U'/3$. Známe-li již dvě přímky, které procházejí nepřístupným úběžníkem U', na př. horizontálu h a přímku a, spojíme další bod B' s úběžníkem U' na př. touto konstrukcí (obr. 18): sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$, který má vrchol A' na přímce a, další vrchol v daném bodě B' a třetí vrchol C' na horizontále h. Potom sestrojíme druhý trojúhelník ABC tak, aby měl vrchol A v libovolně zvoleném bodě na přímce a, vrchol C na horizontále h a strany rovnoběžné se stranami trojúhelníka $A'B'C'$ (t. j. $AC \parallel A'C'$, $CB \parallel C'B'$, $AB \parallel A'B'$). Potom přímka BB' prochází také bodem U'. — Při konstrukci používáme této věty z geometrie: jsou-li strany trojúhelníka ABC rovnoběžné se stranami trojúhelníka $A'B'C'$ ($AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$) a nejsou-li tyto trojúhelníky shodné, potom přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem U'.

Praktikové užívají při rýsování přímek procházejících nepřístupným bodem i různých přístrojů; velmi užitečným takovým přístrojem je t. zv. *Nicholsonovo trojpravítko,* které sestrojil již před rokem 1797 stavitel Petr Nicholson a které později zdokonalil německý profesor Schilling. (Bližší viz v Kadeřávkově Perspektivě na str. 72 nebo v I. díle učebnice deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické, sepsané profesory Kadeřávkem, Klímou a Kounovským.)

Průsečná methoda se v praxi různě upravuje. Zvolíme-li na př. perspektivní průmětnu ν přímo v druhé průmětně (takže potom v obr. 12 splyne přímka ν_1 s nárysem podstavné roviny kvádru), můžeme obr. 13 sestrojit přímo do obr. 12, tedy bez jakéhokoliv přenášení úseček. Nevýhodou tohoto postupu, zejména při sestrojování perspektivy složitějšího útvaru, jest hromadění čar v náryse.

Různé praktické úpravy průsečné methody uvádí ve své Perspektivě profesor Kadeřávek (str. 34—36). Byly dokonce sestrojeny i přístroje, které rýsují z daného půdorysu a ná-



Obr. 19.

rysu předmětu jeho perspektivní obraz; nazývají se *perspektografy*.

Poznámka. Pro sestrojení správného perspektivního obrazu je důležité zvolit vhodně distanci, stanoviště a polohu průmětny vzhledem k danému tělesu. O správné volbě distance jsme se zmínili ve 3. odstavci. Stanoviště a polohu průmětny si můžeme dobře najít t. zv. *perspektivním hledáčkem,* který si lehce sestrojíme.

Protože zorný kužel je rotační kužel s vodorovnou osou

$o \equiv OH$, je jeho půdorysem rovnoramenný trojúhelník, jehož ramena svírají s půdorysem $o_1 \equiv O_1H_1$ osy kužele úhel rovný úhlu jeho povrchových přímek s osou o, t. j. asi 20° (odst. 3). Narýsujeme tedy na průhledný papír polopřímku o_1 (půdorys osy o kužele) s počátkem O_1 (půdorys oka O) a tímto bodem proložíme dvě polopřímky a, b tak, aby každá svírala s polopřímkou o_1 úhel 20° (obr. 19). Na polopřímku o_1 naneseme od bodu O_1 zvolenou distanci do bodu Z, kterým proložíme přímku $\nu_1 \perp o_1$ představující půdorys perspektivní průmětny ν.

Hledáček položíme na daný půdorys (v obr. 19 je to půdorys nějaké budovy) tak, aby celý půdorys ležel uvnitř úhlu polopřímek a, b, a byl v opačné polorovině vyťaté přímkou ν_1 než bod O_1. Položíme-li na př. hledáček tak, jak je tomu na obr. 19, vidíme, že perspektivní obraz celého půdorysu je úsečka $A_1'E_1'$. Zároveň vidíme, že stěny nad $A_1B_1C_1D_1E_1$ budou viditelné, kdežto zbývající dvě budou neviditelné. Protože osa o_1 prochází bodem D_1, bude perspektivní obraz svislé hrany, která vychází z bodu D, splývat s vertikálou. Kromě toho vidíme, že obraz stěny nad A_1B_1 bude velmi úzký obrazec. Chceme-li nechat perspektivní obraz bodu D_1 uprostřed obrazu a získat širší obraz stěny nad A_1B_1, otočíme hledáček okolo bodu D_1 do vhodné polohy, vyznačíme na ryse polohu bodu O_1 i přímky ν_1 a provedeme konstrukci. Můžeme tedy pomocí hledáčku zvolit stanoviště O_1 a průmětnu podle toho, jaký obraz chceme získat.

Cvičení

V každém příkladě postupujte tak, že si sestrojíte sdružené obrazy daného tělesa, zvolíte distanci, stanoviště i perspektivní průmětnu a sestrojíte průsečnou methodou perspektivu tělesa. Je-li těleso příliš velké, sestrojíte jeho půdorys a nárys ve zmenšení (na př. 1 : 2) a perspektivní obraz zvětšíte podle poznámky na straně 42.

11. Pravidelný šestiboký hranol s podstavou v základní rovině; rozměry si zvolte libovolně.
12. Pravidelný šestiboký jehlan s podstavou rovnoběžnou se základní rovinou a s hlavním vrcholem v základní rovině. Rozměry si zvolte libovolně.

13. Pravidelný osmistěn se svislou tělesovou uhlopříčkou $u = 8$ cm, která má dolní krajní bod v základní rovině.

14. Těleso složené z pravidelného šestibokého hranolu a na něm ležící pravidelné šestiboké desky (podoby hranolu); obě tělesa mají společnou svislou osu. Hranol stojí na základní rovině, má podstavnou hranu 3,5 cm a výšku 9,5 cm. Deska má podstavnou hranu dlouhou 5 cm a výšku 1,5 cm. — Volte výšku oka 5,5 cm a distanci asi 24 cm.

15. Těleso složené z pravidelného šestibokého hranolu a na něm stojícího pravidelného čtyrbokého jehlanu; obě tělesa mají společnou svislou osu. Hranol stojí na základní rovině, má podstavnou hranu 3 cm a výšku 10 cm. Jehlan má podstavnou hranu 9 cm a výšku 8 cm. Volte výšku oka 6 cm a distanci asi 24 cm.

5. PŘÍMÁ METHODA (VOLNÁ PERSPEKTIVA)

Nevýhoda průsečné methody je v tom, že v perspektivním obraze sestrojeném touto methodou nemůžeme prováděti případné změny a doplňky. Musíme je nejdříve provést v půdoryse a náryse a teprve potom je přenést do perspektivy. Sestrojujeme-li perspektivní obraz přímo do daného půdorysu a nárysu (jak jsme to naznačili v minulém odstavci na str. 44), hromadí se v nákresně mnoho čar; přenášíme-li perspektivu do nového obrazu (jak jsme to prováděli v obr. 13), zvyšuje se opět nepřesnost konstrukcí. Kromě toho vyžaduje průsečná methoda při správné volbě distance hodně místa. Z těchto důvodů se obyčejně sestrojují perspektivní obrazy daných předmětů *přímo;* při tom nezáleží na tom, jak jsou tyto předměty určeny (zda sdruženými obrazy či jinak).

Perspektivy se nejčastěji užívá pro znázornění stavitelských objektů. Při konstrukci perspektiv postupujeme při tom tak, že *nejdříve sestrojíme perspektivní obraz půdorysu dané stavby a potom nad ním vyneseme příslušné výšky. Aby byla konstrukce co nejpřesnější, užíváme při ní všech dostupných úběžníků.* Jde zde tedy o řešení tří základních úloh:

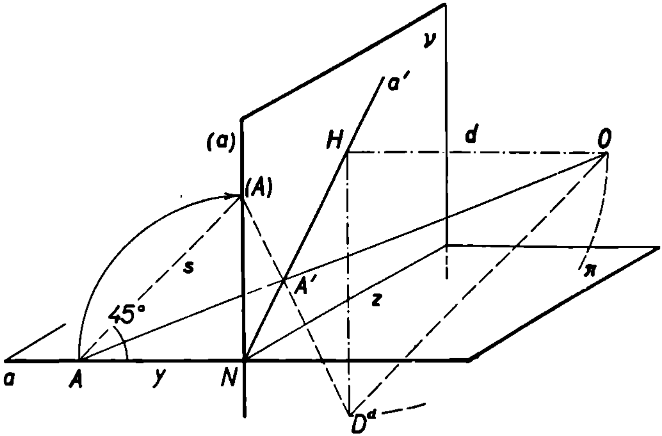
1. Sestrojit perspektivu obrazce ležícího ve vodorovné rovině.

2. Sestrojit úběžníky daných vodorovných přímek.

3. Sestrojit nad perspektivním půdorysem správně perspektivní obrazy výšek.

Konstrukci jednotlivých bodů perspektivního obrazu je možné vždy provést (i při velké distanci). Teprve při rýsování perspektivních obrazů přímek se objeví potíže, neboť jejich úběžníky, které jsou pro přesnou konstrukci velmi důležité, vycházejí často mimo nákresnu.

Všimněme si nejdříve, jak se sestrojí perspektiva bodu A, který leží v základní rovině. (Obr. 20.) Proložme bodem A



Obr. 20.

hloubkovou přímku $\dot{a} \perp z$ a její stopník (ležící na základnici z) označme N. Podle věty 5 (odst. 1) a podle věty A (odst. 3) prochází její středový průmět a' stopníkem N a hlavním bodem H. Podle věty 5 leží průmět A' bodu A na přímce a'. Otočme základní rovinu π kolem základnice z do průmětny. Toto otočení (jemuž také říkáme sklápění) můžeme provésti dvojím způsobem: buď sklápíme tak, že body ležící za průmětnou přejdou do bodů ležících nad základnicí z anebo tak, že tyto body přejdou pod tuto základnici. V obr. 20 jsme provedli sklopení základní roviny prvním způsobem. Přímka

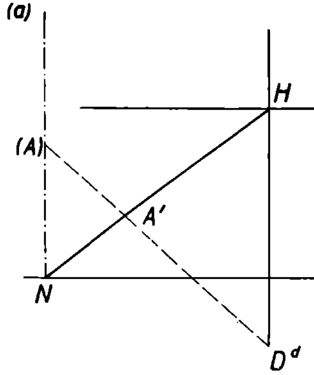
a se sklopí do přímky (a) procházející stopníkem N kolmo k základnici; bod A se sklopí do bodu (A), který leží na přímce (a). Protože trojúhelník $AN(A)$ je pravoúhlý při vrcholu N a protože $\overline{AN} = \overline{N(A)}$, jest úhel $NA(A)$ roven 45°. Dostaneme tedy také bod (A) jako stopník přímky s, která prochází bodem A, leží v rovině ϱ kolmé k základnici z a svírá s hloubkovou přímkou a úhel 45°. Podle věty E je úběžník této přímky v dolním distančníku D^d. Je tedy perspektivní průmět s' přímky s přímka spojující bod (A) s dolním distančníkem D^d; na této přímce s' leží průmět A' bodu A.

Každá přímka b, která leží v základní rovině a je rovnoběžná se základnicí, přejde po sklopení do přímky $(b) \parallel z$; podle věty 6 je průmětem přímky b přímka $b' \parallel z$. Každá přímka c ležící v základní rovině a protínající základnici z v bodě M, přejde sklopením do přímky (c), která opět prochází bodem M; podle věty 5 prochází bodem M (stopníkem) také průmět c' přímky c. — Sklopíme-li základní rovinu druhým způsobem, nastane změna jedině v tom, že přímka s' prochází horním distančníkem. Dokázali jsme tedy větu, která — jak je patrno z důkazu — platí pro každou vodorovnou rovinu:

Věta F. Otočíme-li základní rovinu kolem základnice z do průmětny tak, že body ležící za průmětnou přejdou do bodů nad (pod) základnicí z, potom perspektivní průmět A' libovolného bodu A základní roviny leží se sklopením (A) tohoto bodu na přímce, která prochází dolním (horním) distančníkem. — Je-li l libovolná přímka základní roviny, (l) její sklopení a l' její průmět, potom jest buď $l' \parallel (l) \parallel z$, anebo se přímky l', (l), protínají v jednom bodě (stopníku přímky l) na základnici z.

Podle této věty sestrojíme snadno perspektivní obraz A' bodu A ležícího v základní rovině (obr. 21). Sklopíme základní rovinu kolem základnice z do průmětny; při tom přejde hloubková přímka a bodu A do přímky $(a) \perp z$, jejíž stopník N je na základnici z. Potom obraz A' bodu A je v průsečíku přímky $a' \equiv NH$ s přímkou spojující bod (A) s dolním distančníkem D^d.

Poznámka. Věty F je možné také užíti k řešení obrácené úlohy, t. j. sestrojit z daného perspektivního půdorysu



Obr. 21.

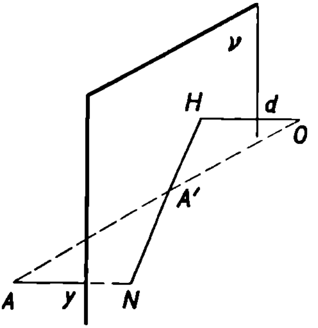
útvaru, který leží v základní rovině, skutečnou velikost tohoto půdorysu.

Konstrukce narýsovaná v obr. 21 se však nedá provést v případě, kdy bude značně velká distance; potom totiž padne dolní distančník D^d mimo nákresnu. Ukážeme si nyní, jak se sestrojuje perspektivní obraz bodu A ležícího kdekoliv v prostoru; při tom je možné provést tuto konstrukci i v případě, kdy je distance jakkoliv velká. Bodem A proložíme hloubkovou přímku a najdeme její stopník N; délka y úsečky NA je rovna vzdálenosti bodu A od průmětny (obr. 22). Při tom *pokládáme vzdálenost y bodu A od průmětny za kladnou, leží-li bod A před průmětnou; pokládáme ji za zápornou, leží-li bod A za průmětnou.* Průmět A' bodu A leží na průmětu NH hloubkové přímky AN. Z obr. 22 je vidět, že $\sphericalangle AA'N = \sphericalangle OA'H$ (vrcholové úhly) a že $\sphericalangle ANA' =$

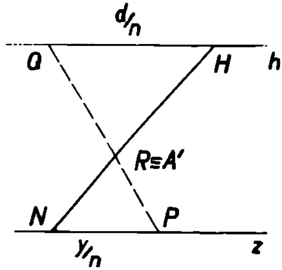
$= \sphericalangle OHA' = 90°$. Trojúhelníky ANA', OHA' mají dva stejné úhly a tedy jsou podobné; jak je známo z geometrie, jsou jejich přiřazené strany úměrné (přiřazené strany jsou ty, které leží proti stejným úhlům), t. j. platí také:

$$\overline{NA'} : \overline{HA'} = \overline{NA} : \overline{HO} = y : d.$$

Je-li bod A pevně zvolen, jest N pevný bod; rovněž bod hlavní H je pevný bod. Poměr $\overline{NA'} : \overline{HA'}$ se nazývá *dělicí*



Obr. 22.



Obr. 23.

poměr bodu A' vzhledem k základním bodům N (první základní bod), H (druhý základní bod). V geometrii se dokazuje, že ke každému číslu patří na přímce NH jediný bod A', jehož dělicí poměr je roven tomuto číslu; číslu 1 patří nevlastní bod přímky NH. Při tom k číslům kladným patří body ležící vně úsečky NH, číslům záporným body ležící uvnitř úsečky NH. Nule je přiřazen bod N. Platí tedy věta:

Věta G. Perspektivní obraz A' bodu A leží na přímce spojující hlavní bod H se stopníkem N hloubkové přímky procházející bodem A. Dělicí poměr bodu A' vzhledem k základním bodům N, H jest $\overline{NA'} : \overline{HA'} = y : d$. Při tom značí d distanci a y vzdálenost bodu A od průmětny.

Z této věty plyne jednoduchá konstrukce bodu A', která se dá provést pro každou distanci; konstrukce provedená v obr. 21 je jenom jejím zvláštním případem.

1. základní úloha. Sestrojte perspektivní obraz daného bodu A (nezáleží na tom, leží-li bod A v základní rovině či nikoliv).

Proložíme bodem A hloubkovou přímku a sestrojíme její stopník N (obr. 23). Perspektivní obraz A' bodu A leží na perspektivním obraze NH této hloubkové přímky a dělí úsečku NH v poměru $y : d$ (věta G). Proložíme body N, H dvě libovolné nesplývající rovnoběžky z, h ($z \parallel h$), na přímku h naneseme od bodu H délku d/n ($n = 1$ nebo 2 nebo 3 atd. podle toho, jak je velká distance) do bodu Q a na přímku z naneseme od bodu N délku y/n do bodu P. Při tom nanášíme tyto délky v témže smyslu (takže body P, Q leží v téže polorovině vyťaté přímkou NH) anebo v opačném (body P, Q leží v opačných polorovinách o hranici NH) podle toho, je-li y kladné nebo záporné. Je-li kladné y rovno d (bod A leží v distanční rovině), potom jsou přímky NH, PQ rovnoběžné, t. j. protínají se v úběžném bodě A', který je skutečně — jak víme — obrazem bodu A. V každém jiném případě se přímky NH, PQ protnou v bodě R (vlastním). Z podobnosti trojúhelníků NPR, HQR plyne:

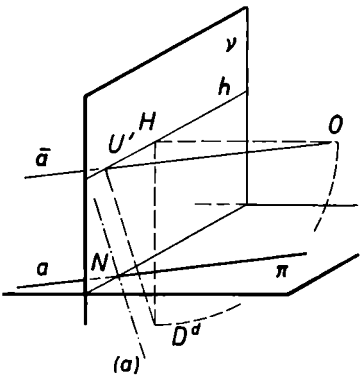
$$\overline{NR} : \overline{HR} = y/n : d/n = y : d.$$

Má tedy bod R na přímce NH dělicí poměr (vzhledem k bodům N, H) rovný číslu y/d; protože tentýž dělicí poměr má perspektivní obraz A' bodu A a protože na přímce NH je jenom jeden bod s daným dělicím poměrem (vzhledem k bodům N, H), splývá bod R s perspektivním obrazem A' bodu A.

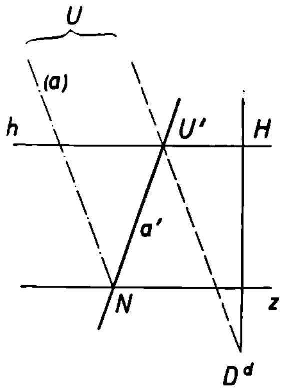
Poznámka. Protože vždy v perspektivním obraze rýsujeme horizontálu, volíme za pomocnou přímku proloženou bodem H obyčejně horizontálu h. Leží-li ještě bod A v základní rovině, splyne potom druhá pomocná rovnoběžka $z \parallel h$ se základnicí.

2. základní úloha. V základní rovině je dána přímka a protínající základnici z v bodě N; sestrojte úběžník U' této přímky.

Podle věty 5 (odst. 1) je úběžník U' přímky a stopníkem přímky $\bar{a} \parallel a$ proložené okem O (čili je to průmět jejího úběžného bodu U); podle věty B leží tento úběžník na hori-



Obr. 24.

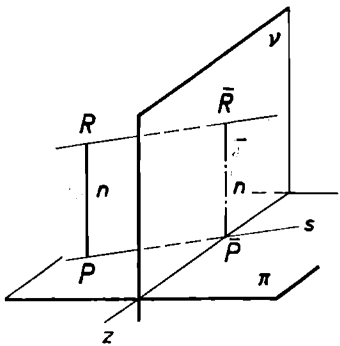


Obr. 25.

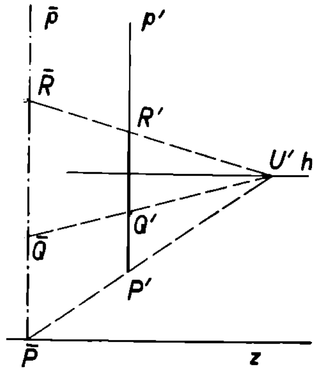
zontále h. (Obr. 24.) Otočíme-li základní rovinu π kolem základnice z tak, aby se body ležící za průmětnou ν sklopily do bodů ležících nad základnicí z, a otočíme-li současně rovinu $\sigma \parallel \pi$ kolem horizontály h tak, aby se oko O sklopilo do dolního distančníku D^d, je i ve sklopení přímka $\bar{a}$ rovnoběžná se sklopením (a) přímky a. Je tedy $D^dU' \parallel (a)$, takže úběžník U' sestrojíme jako průsečík horizontály h s přímkou $D^dU' \parallel (a)$.

Konstrukce je provedena v obr. 25; protože podle definice 1 z odst. 2 procházejí přímky (a), $D^dU' \parallel (a)$ společným úběžným bodem U, je přímka D^dU' spojnice distančníku D^d s úběžným bodem přímky (a). Tento úběžný bod je však sklopený úběžný bod přímky a. Z toho plyne, že konstrukce úběžníku U' se provádí docela stejně jako konstrukce perspektivního obrazu A' kteréhokoliv vlastního bodu A přímky a, t. j. podle věty F. Doplníme si tedy znění věty F touto poznámkou:

Doplněk věty F. Konstrukce úběžníku libovolné přímky a, která leží v základní rovině a protíná základnici, se provádí stejně jako konstrukce (popsaná ve větě F) průmětu jejího



Obr. 26.



Obr. 27.

libovolného vlastního bodu. To znamená: úběžník U' leží na přímce spojující dolní (horní) distančník se sklopeným úběžným bodem přímky a čili $D^dU' \parallel (a)$, respektive $D^hU' \parallel (a)$.

3. základní úloha: Na svislou přímku p, která protíná základní rovinu π v bodě P, naneste od tohoto bodu P danou délku n.

Všimněme si nejprve názorného obr. 26. Sestrojíme bodem P přímku s tak, aby ležela v základní rovině a protínala základnici z v bodě $\bar{P}$ (směr přímky s je jinak libovolný). Vztyčíme-li v průmětně ν v bodě $\bar{P}$ kolmici $\bar{p}$ k základnici z, je přímka $\bar{p}$ také svislá, t. j. $\bar{p} \parallel p$. Naneseme-li na rovnoběžky $\overline{p}$, p od bodu $\overline{P}$, respektive P v témže smyslu stejnou délku n, dostaneme rovnoběžník $\overline{P}\overline{R}RP$; je tedy $R\overline{R} \parallel s$.

Protože perspektivní obrazy svislých přímek jsou zase svislé přímky a protože obrazy vodorovných přímek $P\overline{P}$, $R\overline{R}$ procházejí společným úběžníkem U' ležícím na horizontále h, je obraz rovnoběžníka $\overline{P}\overline{R}RP$ lichoběžník $\overline{P}\overline{R}R'P'$, jehož základna $\overline{P}\overline{R}$ (ležící v průmětně) má délku n a jehož (prodloužená) ramena procházejí úběžníkem U' (obr. 27). Zvolíme-li tedy na horizontále libovolný úběžník U', bude průsečík $\overline{P}$ přímky $P'U'$ se základnicí z vrcholem uvedeného lichoběžníka, jehož základny $\overline{P}\overline{R}$, $P'R'$ leží na svislých přímkách $\overline{p}$, p'; při tom základna $\overline{P}\overline{R}$ má délku rovnou n. Dostaneme tedy bod R' jako průsečík přímek p', $U'\overline{R}$.

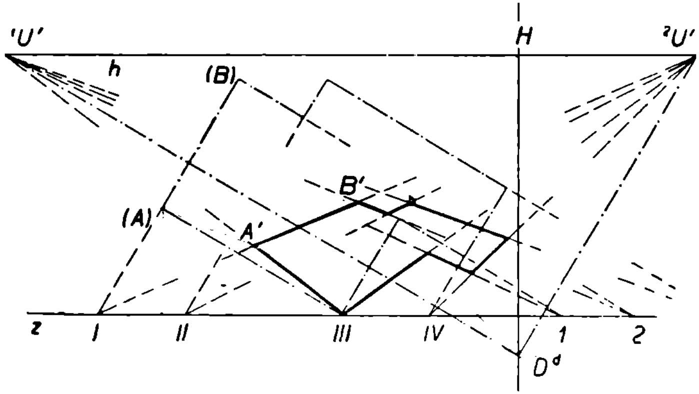
Poznámky. 1. Máme-li na svislou přímku p nanést danou délku od bodu Q, který neleží v základní rovině, postupujeme obdobně, t. j. sestrojíme nejdříve na základnici bod $\overline{P}$, pak přímku $\overline{p}$, na ní bod $\overline{Q}$ a dále postupujeme stejně jako dříve (obr. 27). — 2. Z obr. 27 také plyne, jak naopak sestrojíme skutečnou velikost svislé úsečky QR, známe-li její perspektivní obraz $Q'R'$ a perspektivní obraz P' jejího průsečíku P se základní rovinou.

Ukážeme si na dvou příkladech, jak užíváme právě vyložených základních konstrukcí při zobrazování nějakého tělesa.

Úloha. Sestrojte perspektivu půdorysu budovy, je-li dáno sklopení tohoto půdorysu do průmětny; jako obvykle předpokládáme, že budova stojí za průmětnou (obr. 28).

Na daném půdoryse jsou dvě osnovy rovnoběžek. Podle 2. základní úlohy sestrojíme jejich úběžníky ${}^1U'$, ${}^2U'$. Tak na příklad úběžník ${}^2U'$ je průsečík horizontály h s přímkou vedenou dolním distančníkem D^d rovnoběžně k přímce $(A)(B)$. Potom sestrojíme stopníky I, II, III, IV, 1, 2, 3 všech přímek, na kterých leží jednotlivé úsečky půdorysu.

Perspektivní obraz každé přímky půdorysu je potom spojnice jejího stopníku s jejím úběžníkem. Tak na příklad hrana AB má stopník v bodě I a úběžník v bodě ${}^2U'$; je tedy její perspektivní obraz $A'B'$ na přímce spojující body I, ${}^2U'$. Perspektivní obrazy přímek půdorysu se protínají v perspektivních obrazech vrcholů tohoto půdorysu.



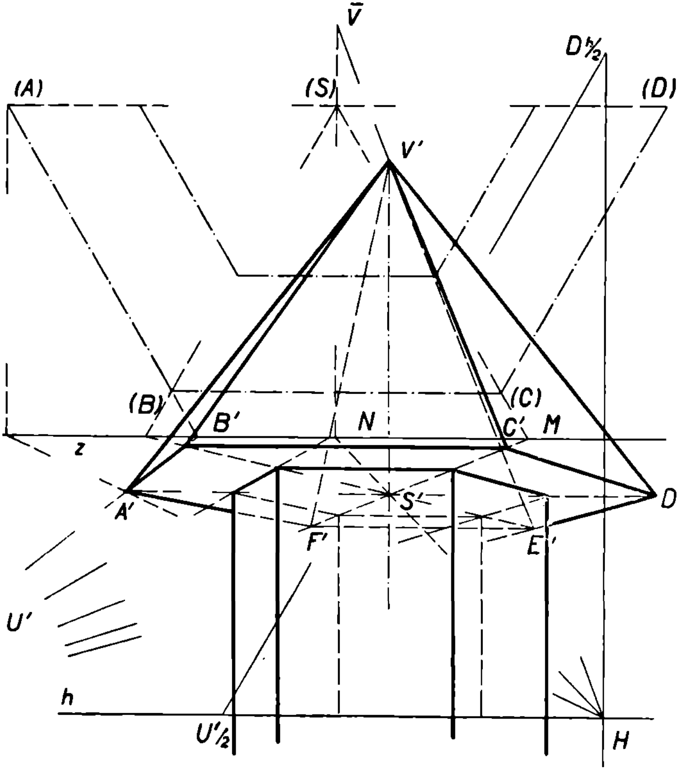
Obr. 28.

Poznámka. Přesnost konstrukce můžeme dobře kontrolovat podle věty F. Podle této věty procházejí přímky $(A)A'$, $(B)B'$ atd. dolním distančníkem D^d.

Úloha. Sestrojte perspektivu vrcholu věže, je-li dáno sklopení jejího půdorysu do průmětny (věž je za průmětnou). Věž má podobu pravidelného šestibokého hranolu a je zakončena střechou podoby pravidelného šestibokého jehlanu, jehož výška je udána.

Základní rovinu položíme do roviny, ve které končí zdivo věže; potom bude základní rovina podstavnou rovinou jehlanu, jenž tvoří střechu věže. Pozorovatel (t. j. oko) je pod touto základní rovinou, takže vidí vrchol věže zespodu. Proto je v obr. 29 základnice z nad horizontálou h; obraz tělesa, který dostaneme, se nazývá *podhled.* V obr. 29 je také vyznačen hlavní bod H; distance je rovina dvojnásobku úsečky $HD^h/2$. Bod $D^h/2$ nazýváme *redukovaným (na polovinu) horním distančníkem.*

Podstava jehlanu je pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$; v obr. 29 je narýsována polovina sklopeného půdorysu tohoto obrazce. Menší šestiúhelník, jehož polovina je narýso-



Obr. 29.

vána v obrázku, je sklopeným půdorysem pravidelného šestibokého hranolu, tvořícího dolní část věže; aby se obrázek příliš nezaplnil písmeny, nejsou vrcholy menšího šestiúhelníka označeny.

Vysvětlíme konstrukci perspektivního obrazu šestiúhelníka $ABCDEF$; obdobně se sestrojí perspektiva menšího šestiúhelníka. — Protože přímky AD, BC, EF jsou rovnoběžné se základnicí z, jsou podle věty 6 (odst. 1) také jejich perspektivní obrazy s ní rovnoběžné. Sestrojíme si ještě úběžník $Ú$ přímek $AB \parallel CF \parallel DE$; podle věty B (odst. 3) leží bod $Ú$ na horizontále h a sestrojí se podle 2. základní úlohy. Protože však je dolní distančník D^d nepřístupný, užijeme horního distančníku D^h. Potom však musíme sklopit uvedené přímky pod základnici z (věta F); stačí to ovšem provést pro jedinou z těchto přímek, na příklad pro přímku AB. Sklopíme-li však základní rovinu pod základnici z, bude nové sklopení přímky AB souměrně položeno k přímce $(A)(B)$ podle osy souměrnosti z čili bude rovnoběžné s přímkou $(C)(D)$ — jak plyne z toho, že $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník s jednou úhlopříčkou rovnoběžnou se základnicí z. Podle 2. základní úlohy je tedy úběžník $Ú$ v průsečíku horizontály h s přímkou $D^hÚ \parallel (C)(D)$. Protože je však i bod D^h nedostupný, použijeme redukovaného distančníku $D^h/2$, t. j. sestrojíme průsečík $Ú/2$ horizontály h s přímkou vedenou bodem $D^h/2$ rovnoběžně k přímce (C) (D). Sestrojíme-li potom na polopřímce $HÚ/2$ bod $Ú$ tak, aby $\overline{HÚ} = 2\overline{HÚ'/2}$, dostaneme hledaný úběžník $Ú$. (Použili jsme konstrukce úběžníku vyložené v odst. 3 v textu k obr. 15.) Protože by však v obr. 29 vyšel bod $Ú$ mimo rámec sazby, není v obrázku vyznačen. (Stejně bychom sestrojili úběžník přímek $CD \parallel BE \parallel FA$, který však vychází dost daleko vně nákresny.)

Nyní snadno sestrojíme perspektivní obrazy jednotlivých vrcholů šestiúhelníků. Chceme-li na příklad sestrojit obraz středu S obou obrazců, proložíme bodem (S) sklopenou hloubkovou přímku (kolmo k základnici z), určíme její stopník N a její obraz NH. Bod S' je v průsečíku přímky NH s perspektivním obrazem $M\acute{U}$ úhlopříčky SC šestiúhelníka; stopník M této úhlopříčky je v průsečíku přímky $(S)(C)$ se základnicí z. Při konstrukci pamatujeme na to, že jest $A'D' \parallel B'C' \parallel E'F' \parallel z$ (jak jsme dokázali hned na počátku výkladu).

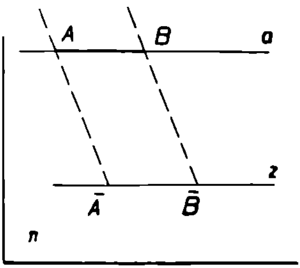
Perspektivní obraz V' vrcholu V jehlanu $VABCDEF$ sestrojíme podle 3. základní úlohy; přitom za úběžník $\acute{U}$ zvolíme na příklad hlavní bod H. Je tedy potom $N\overline{V} \perp z$ a délka úsečky $N\overline{V}$ je rovna výšce jehlanu; bod V' je průsečík přímky $H\overline{V}$ se svislým průmětem výšky, který prochází průmětem S' středu S podstavy jehlanu.

Poznámka. Často potřebujeme sestrojit v perspektivě půdorysu nějakého objektu obrazy úseček nanášených na některou vodorovnou přímku. Můžeme postupovat tak, že naneseme tyto úsečky na sklopenou polohu dané přímky a potom sestrojíme podle 1. základní úlohy perspektivní obrazy takto získaných bodů. Výhodnější je však řešit tuto úlohu přímo v perspektivním obraze (bez sklápění základní roviny). Řešení této úlohy provádíme dvojím způsobem podle toho, je-li daná vodorovná přímka *průčelná* (t. j. rovnoběžná se základnicí) anebo je-li *neprůčelná* (t. j. sice vodorovná, ale protínající základnici). Protože se v perspektivě tyto dvě úlohy často vyskytují, označíme je jako další dvě základní úlohy.

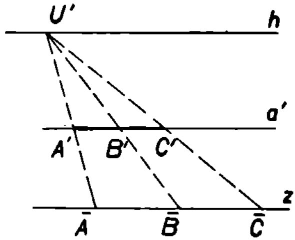
4. základní úloha. Na průčelnou vodorovnou přímku a naneste od daného bodu A dvakrát za sebou danou délku n.

Rovina π proložená přímkou a kolmo k průmětně v je vodorovná a tedy ji můžeme zvolit za základní rovinu; její průsečnice s průmětnou je tedy základnice z. (Předpokládáme ovšem, že rovina π neprochází okem O; o tomto zvláštním případě se zmíníme až na konec.) Protože je $a \parallel v$, $a \parallel \pi$ (neboť leží v π), je podle poučky XII (odst. 1) také $a \parallel z$. Proložíme-li tedy dvěma body A, B přímky a libovolné dvě rovnoběžky ležící v základní rovině π a protínající základnici v bodech $\bar{A}$, $\bar{B}$, jest obrazec $A\bar{A}\bar{B}B$ rovnoběžník a tedy úsečky AB, $\bar{A}\bar{B}$ jsou stejně dlouhé (obr. 30).

Z toho plyne ihned řešení naší úlohy (obr. 31). Podle věty 6 (odst. 1) je $a' \parallel z$ a podle věty B (odst. 3) mají průměty rovnoběžek $A\bar{A}$, $B\bar{B}$ společný úběžník $\acute{U}$, ležící na horizon-



Obr. 30.



Obr. 31.

tále h. Protože směr těchto přímek můžeme volit libovolně a protože každý bod horizontály h je úběžníkem nějakého směru základní roviny, můžeme bod $\acute{U}$ volit na horizontále libovolně. Zvolíme tedy na horizontále h úběžník $\acute{U}$ a sestrojíme bod $\bar{A}$ jako průsečík přímky $U'A'$ se základnicí z. Protože základnice z leží v průmětně, jeví se na ní všechny délky ve skutečné velikosti; proto naneseme od bodu $\bar{A}$ na základnici z dvakrát danou délku n. Tím dostaneme body $\bar{B}$, $\bar{C}$; průsečíky B', C' přímky a' s přímkami $U'\bar{B}$, $\acute{U}\bar{C}$ jsou průměty hledaných bodů B, C.

Poznámka. Podle věty o úměrnosti úseček vyťatých třemi různoběžkami na dvou rovnoběžkách (která se dokazuje v geometrii) je z obr. 31 patrno, že platí:

$$\overline{A'B'} : \overline{B'C'} = \overline{AB} : \overline{BC}.$$

Je-li tedy $\overline{AB} = \overline{BC}$, je také $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. Platí tedy věta:

Věta H. Stejně dlouhé úsečky ležící na vodorovné průčelné přímce (t. j. přímce rovnoběžné se základnicí) mají za perspektivní obrazy úsečky, které jsou mezi sebou také stejně dlouhé.

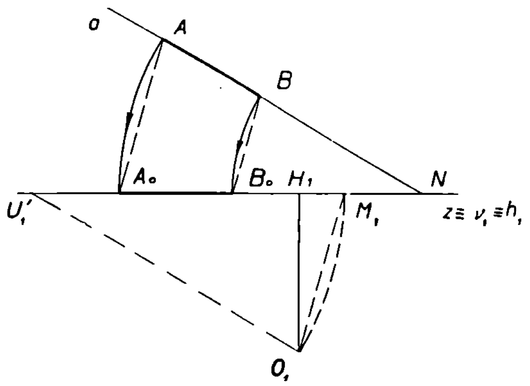
Důsledek. Máme-li tedy sestrojit perspektivní obrazy bodů, které dělí danou vodorovnou průčelnou úsečku AB na n stejných dílů, rozdělíme perspektivní obraz $A'B'$ této úsečky na n stejných dílů; tím dostaneme již obrazy dělících bodů úsečky AB. — Tak na příklad v obr. 29 je bod S' středem úsečky $A'D'$, neboť úsečka AD je rovnoběžná se základnicí.

Poznámky. 1. Z řešení 4. základní úlohy také plyne, jak sestrojíme naopak skutečnou velikost vodorovné průčelné úsečky AB, je-li dán její perspektivní obraz $A'B' \parallel z$. Popište a odůvodněte tuto konstrukci. — 2. Konstrukce provedená v obr. 31 ovšem selže, bude-li přímka $a \parallel z$ ležet v rovině procházející okem. V tom případě však ji provedeme pro půdorys a_1 této přímky a pak sestrojíme (na svislých přímkách) obrazy dělících bodů z jejich perspektivních půdorysů. V prostoru je totiž $a \parallel a_1$, takže $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$.

5. základní úloha. Na neprůčelnou vodorovnou přímku a (t. j. přímku protínající průmětnu) naneste od daného bodu A danou délku n.

Rovina π proložená přímkou a kolmo k průmětně ν je vodorovná; prochází-li okem, zvolíme jinou základní rovinu $\pi' \parallel \pi$, sestrojíme v ní půdorys a_1 přímky a, pro který úlohu rozřešíme, a pak přeneseme na přímku a (viz minulou poznámku).

Předpokládejme tedy, že vodorovná rovina π proložená přímkou a neprochází okem O; zvolíme-li ji za základní rovinu, bude její stopa $z \parallel h$ základnicí. Sestrojme na této rovině π půdorys O_1 oka O a půdorys ν_1 průmětny ν. Protože perspektivní průmětna $\nu \perp \pi$, je ν_1 přímka splývající se základnicí z, která je také půdorysem horizontály h (obr. 32). Protože přímka a leží v π, splývá se svým půdorysem a_1, který proto označíme jen a. Na přímce a je dána úsečka AB



Obr. 32.

o délce n a je vyznačen její průsečík N s perspektivní průmětnou ν. Otočíme-li v základní rovině přímku a kolem jejího stopníku N do základnice z (to můžeme provést dvojím způsobem), otočí se úsečka AB do stejně dlouhé úsečky A_0B_0. Protože $\overline{NA_0} = \overline{NA}$, $\overline{NB_0} = \overline{NB}$, jsou trojúhelníky NA_0A, NB_0B rovnoramenné a mají společný úhel při vrcholu N; je tedy také $\sphericalangle\, AA_0N = \sphericalangle\, BB_0N$ čili přímky AA_0, BB_0 jsou rovnoběžné. Můžeme tedy body A_0, B_0 sestrojit také jako průsečíky základnice z s rovnoběžnými přímkami AA_0, BB_0. Určíme-li úběžník těchto rovnoběžek, budeme umět i v perspektivě sestrojit na základnici z úsečku A_0B_0 rovnou dané délce n a potom obraz B' hledaného bodu B.

Úběžník M^a přímek $AA_0 \parallel BB_0$ sestrojíme podle věty 5 (odst. 1) jako průsečík přímky $OM^a \parallel AA_0$ s průmětnou ν; jeho půdorys $M_1{}^a$ je v průsečíku uvedené rovnoběžky s půdorysem ν_1 průmětny ν. Sestrojíme ještě úběžník $\acute{U}$ přímky a ($O_1\acute{U}_1 \parallel a$). Protože přímky OM^a, $O\acute{U}$ jsou vodorovné, jeví se úsečky OM^a, $O\acute{U}$ v půdoryse ve skutečné velikosti. Protože trojúhelníky $OM^a\acute{U}$, AA_0N mají rovnoběžné strany, mají také stejné úhly a jsou tedy podobné. Protože přiřazené strany podobných trojúhelníků jsou úměrné, jest

$$\overline{\acute{U}M^a} : \overline{\acute{U}O} = \overline{NA_0} : \overline{NA}.$$

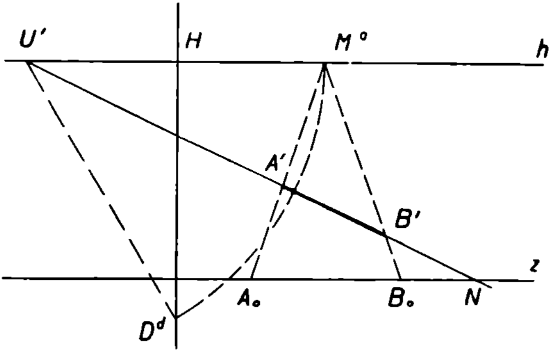
Protože však $\overline{NA_0} = \overline{NA}$, je také $\overline{\acute{U}M^a} = \overline{\acute{U}O}$ čili *vzdálenost bodu M^a od úběžníku $\acute{U}$ přímky a je rovna vzdálenosti tohoto úběžníku od oka.* Protože je možné otočit přímku a do základnice z ještě v opačném smyslu než v obr. 32, je možné sestrojit na horizontále h ještě jeden bod M^a, který má také od úběžníku $\acute{U}$ vzdálenost rovnou délce $\acute{U}O$.

Budiž nyní v obr. 33 dán hlavní bod H, horizontála h, dolní distančník D^d a perspektivní obraz a' neprůčelné vodorovné přímky a, která má úběžník $\acute{U}$ a stopník N. Potom přímka $z \parallel h$ proložená bodem N je stopou základní roviny π proloženou přímkou a. Na horizontále h sestrojíme bod M^a tak, aby $\overline{\acute{U}M^a} = \overline{\acute{U}O} = \overline{\acute{U}D^d}$, a promítneme z něho daný bod A' do bodu A_0 na základnici z. Na základnici sestrojíme úsečku A_0B_0 rovnou dané délce n a bod B_0 promítneme z bodu M^a na přímku a' do bodu B'. Potom — jak jsme dokázali — jest $A'B'$ obrazem úsečky AB rovné délce úsečky A_0B_0, t. j. rovné délce n.

Bod M^a, jehož jsme použili při řešení úlohy, se jmenuje *měřicí (nebo dělicí) bod přímky a.* Dělicí bod se mu říká proto, že se ho původně používalo ke konstrukci obrazů bodů, které dělí danou úsečku AB na stejné díly. Uvidíme však, že při řešení této úlohy (dělení úseček na stejné díly) bod M^a nepotřebujeme; za to ho potřebujeme pro určení skutečné délky úsečky AB dané perspektivním obrazem $A'B'$ na obraze a' přímky a. Proto je vhodnější říkat bod měřicí;

většinou se však užívá názvu dělicí bod. — Výsledek uvedených úvah vyslovíme větou:

Věta K. Je-li a vodorovná neprůčelná přímka se stopníkem N a úběžníkem Ú, potom na horizontále h jsou dva body M^a, $\overline{M^a}$ *(měřicí čili dělicí body přímky a), ze kterých se promítá*



Obr. 33.

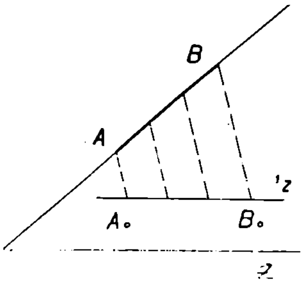
perspektivní obraz A'B' každé úsečky AB ležící na přímce a do úsečky A_0B_0 *na základnici z tak, že* $\overline{A_0B_0} = \overline{AB}$. — *Každý měřicí bod má od úběžníku Ú přímky a vzdálenost rovnou vzdálenosti tohoto úběžníku od oka O, t. j.* $\overline{\text{Ú}M^a} = \overline{\text{Ú}\overline{M^a}} =$ $= \overline{\text{Ú}O} = \overline{\text{Ú}D^h} = \overline{\text{Ú}D^d}$.

Poznámka. Protože rovnoběžné neprůčelné přímky mají společný úběžník, mají také společné měřicí body. — Z konstrukce také plyne, že měřicí body hloubkových přímek jsou pravý a levý distančník.

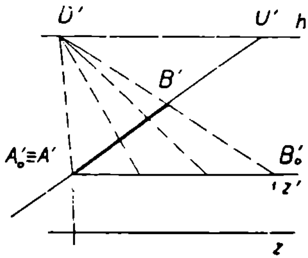
Ještě ukážeme, jak se sestrojují perspektivní obrazy bodů dělících danou vodorovnou neprůčelnou úsečku *AB* na stejné díly.

6. základní úloha. Sestrojte perspektivní obrazy bodů, které dělí danou vodorovnou neprůčelnou úsečku *AB* na *n* stejných dílů.

Proložíme-li přímkou a vodorovnou rovinu π, protne průmětnu v přímce $z \parallel h$. Promítneme-li v rovině π danou úsečku AB, ležící na přímce a a rozdělenou na n stejných dílů, i s dělícími body do libovolné přímky ${}^1z \parallel z$ (obr. 34), dostaneme úsečku A_0B_0 rozdělenou rovněž na n stejných dílů (jak víme z geometrie). Protože podle důsledku věty H se



Obr. 34.



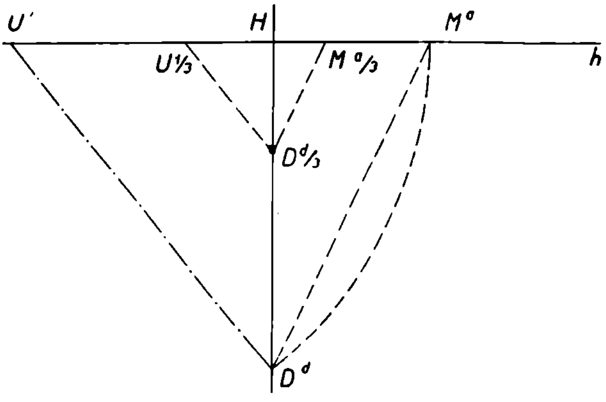
Obr. 35.

dělící body průčelné vodorovné úsečky A_0B_0 promítají v perspektivě do bodů dělících průmět $A_0'B_0'$ této úsečky rovněž na stejné díly, můžeme naši úlohu řešit takto (obr. 35): z libovolného bodu D' (úběžníku směru $AA_0 \parallel BB_0$) na horizontále h promítneme obraz $A'B'$ úsečky AB na přímku ${}^1z' \parallel z$ do úsečky $A_0'B_0'$, tu rozdělíme na žádaný počet stejných dílů a dělící body promítneme z bodu D' na úsečku $A'B'$. — Přímku ${}^1z'$ jsme v obr. 35 zvolili výhodně tak, aby procházela bodem A'.

Pomocné konstrukce. Zbývá ještě ukázat, jak sestrojíme měřicí bod M^a vodorovné neprůčelné přímky a, je-li její úběžník $\acute{U}$ nedostupný, respektive jak řešíme 5. základní úlohu v případě, kdy leží měřicí bod M^a mimo nákresnu.

1. Je-li úběžník $\acute{U}$ přímky a nedostupný, ale měřicí bod M^a leží v nákresně, můžeme jej sestrojit pomocí redukce distance. Předpokládejme, že v obr. 36 je dán dolní distančník D^d, úběžník $\acute{U}$ přímky a a její měřicí bod M^a ($\overline{\acute{U}M^a} = \overline{\acute{U}D^d}$).

Sestrojme redukovaným dolním distančníkem $D^d/3$ ($\overline{HD^d/3} = \frac{1}{3}\overline{HD^d}$) rovnoběžky s přímkami $D^d Ú$, $D^d M^a$ a jejich průsečíky s horizontálou h označme $Ú/3$, $M^a/3$. Z geometrie je známo, že potom je $\overline{HÚ/3} = \frac{1}{3}\overline{HÚ}$, $\overline{HM^a/3} = \frac{1}{3}\overline{HM^a}$.



Obr. 36.

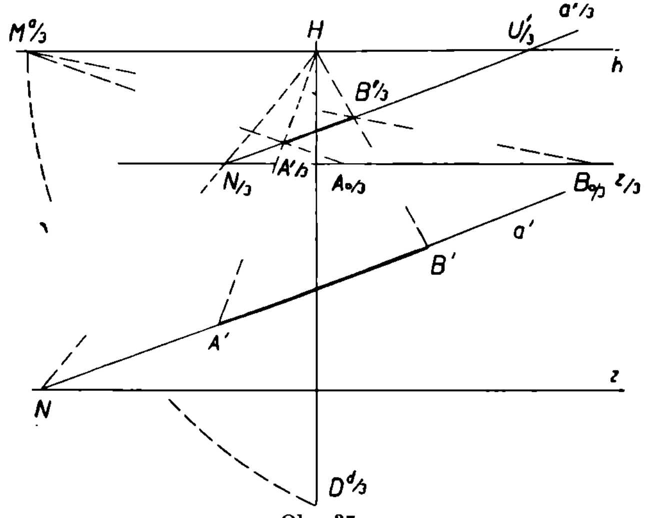
Protože trojúhelníky $ÚD^dM^a$, $Ú/3D^d/3M^a/3$ jsou podobné, platí o jejich přiřazených stranách úměra:

$$\overline{ÚD^d} : \overline{ÚM^a} = \overline{Ú/3D^d/3} : \overline{Ú/3M^a/3}.$$

Protože $\overline{ÚD^d} = \overline{ÚM^a}$, je také $\overline{Ú/3D^d/3} = \overline{Ú/3M^a/3}$. Tedy:

Je-li úběžník Ú přímky a nepřístupný, zredukujeme jej pomocí redukovaného dolního nebo horního distančníku (jak jsme to provedli na př. v obr. 29) t. j. sestrojíme bod $Ú/n$; potom sestrojíme redukovaný měřicí bod M^a/n ($\overline{Ú/nM^a/n} = \overline{Ú/nD^d/n}$ a konečně měřicí bod M^a ($\overline{HM^a} = n\overline{HM^a/3}$).

2\. Neleží-li ani úběžník ani měřicí bod v nákresně, musíme celou konstrukci provést jinak. Obyčejně užíváme stejnolehlosti. Je-li H pevný bod (střed stejnolehlosti) a sestrojíme-li ke každému bodu A nějakého geometrického útvaru U na polopřímce HA bod $A/3$ na př. tak, že $\overline{HA/3} = \frac{1}{3}\overline{HA}$, potom každá přímka daného útvaru U přejde v přímku zmenšeného útvaru, která je rovnoběžná s danou přímkou; přitom každá úsečka AB útvaru U přejde v úsečku $A/3$ $B/3$ zmenšeného útvaru, jejíž délka je rovna jedné třetině úsečky AB. Říkáme, že jsme zmenšili daný útvar U v poměru 1 : 3 vzhledem ke středu stejnolehlosti H.



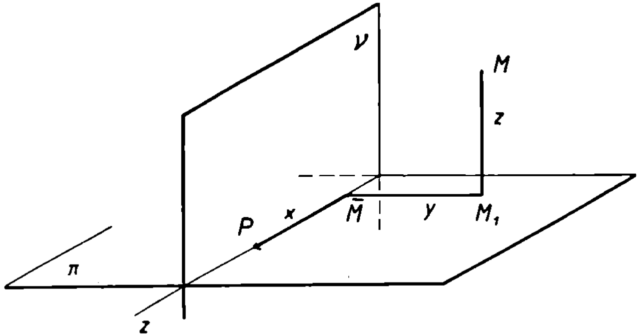
Obr. 37.

Vycházi-li tedy dělicí bod M^a přímky a (a třeba i úběžník $\acute{U}$) mimo nákresnu, zmenšíme celý perspektivní obraz v určitém poměru podle hlavního bodu H jako středu stejnolehlosti, provedeme příslušnou konstrukci ve zmenšeném obraze a pak její výsledek přeneseme do původního obrazu. V obr. 37 je tímto způsobem řešena 5. základní úloha; použili jsme přitom poměru stejnolehlosti 1 : 3. Postupujeme obvykle tak, že nejdříve sestrojíme přímku $z/3 \parallel z$ ležící od horizontály h ve vzdálenosti rovné jedné třetině vzdálenosti horizontály od základnice, potom přímku $a'/3 \parallel a'$, na ní bod $A'/3$, redukovaný úběžník $\acute{U}/3$ a pomocí redukovaného dolního distančníku $D^d/3$ redukovaný dělicí bod $M^a/3$. Ve zmenšeném obraze provedeme řešení úlohy a tak dostaneme bod $B'/3$. Hledaný bod B' je potom průsečík přímky a' s přímkou $HB'/3$.

Tato konstrukce je dost složitá a (zejména v malých obrazech) nepřesná. Užíváme jí hlavně, když pracujeme s velkou distancí a ve velké nákresně.

V perspektivě se užívá ještě jiných konstrukcí, jimiž si pomáháme při nepřístupných úběžnících a měřicích bodech. V této knížce, věnované jen základům perspektivy, je ovšem nemůžeme všechny uvádět. Čtenář je nalezne jednak ve jmenované již Perspektivě profesora Kadeřávka, jednak v I. díle učebnice deskriptivní geometrie profesorů Kadeřávka, Klímy a Kounovského; některé jsou též v nové učebnici deskriptivní geometrie pro IV. třídu gymnasií (vydané ve Státním nakladatelství učebnic v Praze r. 1951).

Poznámka. Ve cvičeních následujících za tímto odstavcem je vždy udána poloha předmětů, které se mají zobrazit, vzhledem k základní rovině π a průmětně ν. Každý bod je udán třemi čísly, jímž říkáme souřadnice tohoto bodu a označujeme je x (první souřadnice), y (druhá souřadnice), z (třetí souřadnice). Znak $M(x, y, z)$ znamená, že bod M má souřadnice x, y, z. První dvě souřadnice udávají polohu půdorysu M_1 bodu M v základní rovině, třetí značí vzdálenost bodu M od základní roviny π. Při znázornění bodu M určeného souřadnicemi x, y, z vycházíme od pevně zvoleného bodu P (jemuž se říká počátek) na základnici z (obr. 38). První souřadnici x nanášíme na základnici z od počátku P a to vpravo, je-li $x > 0$, vlevo, je-li $x < 0$. Tak dostaneme na základnici z bod $\overline{M}$; je-li $x = 0$, splyne bod $\overline{M}$ s počátkem P. V bodě $\overline{M}$ sestrojíme v základní rovině π kolmici k základnici z a na ní naneseme od bodu $\overline{M}$ úsečku, rovnou druhé souřadnici y, a to před průmětnu, je-li $y > 0$, za průmětnu, je-li $y < 0$. Tak dostaneme v základní rovině π půdorys M_1 bodu M; je-li $y = 0$, splyne bod M_1 s bodem $\overline{M}$. Třetí souřadnice z udává vzdálenost bodu M od základní roviny π, t. j. délku úsečky M_1M; je kladná pro body ležící nad základní rovinou, záporná pro body pod základní rovinou a rovna nule pro body ležící v základní rovině π. Sklopíme-li základní rovinu kolem základnice z do průmětny ν, můžeme ze souřadnic x, y sestrojit sklopený půdorys daného útvaru; protože známe také výšky (t. j. souřadnice z) nad základní rovinou, můžeme sestrojit perspektivu celého útvaru. *Oko O udáváme také souřadnicemi; jeho druhá souřadnice je vždy kladná a udává zároveň distanci, třetí souřadnice znamená výšku oka nad základní rovinou čili udává vzdálenost horizontály od základnice.*



Obr. 38.

Ve všech cvičeních se má sestrojiti perspektiva daných předmětů; počátek P zvolte vždy na základnici z tak, aby byl stejně vzdálen od levého a pravého okraje papíru. Souřadnice i rozměry vynášejte vždy v centimetrech.

16. Pomník je složen ze tří na sobě položených kvádrů, které mají čtvercové podstavy ve vodorovných rovinách; na nejvýše položeném kvádru stojí pravidelný čtyrboký jehlan, jehož podstava splývá s horní podstavou tohoto kvádru. Všechny tři kvádry mají společnou svislou osu a jejich hrany jsou spolu rovnoběžné. (Pomník je za průmětnou.) Body A (2; 0; 0), B (—7,5; —5,5; 0) jsou vrcholy čtvercové podstavy $ABCD$ nejspodnějšího kvádru, jehož výška je 2. Druhý kvádr má podstavnou hranu 8 a výšku 1,5. Třetí kvádr má pobočnou hranu 5 a výšku 7,5; výška jehlanu je 2. — Oko O (2; 15; 8).

17. Věž má podobu pravidelného šestibokého hranolu a její střecha podobu pravidelného jehlanu (obdobně jako v obr. 29); obě tělesa mají společnou svislou osu, která protíná základní rovinu v bodě S (—4; —6; 0). Hranol má podstavnou hranu o délce 3,5, výšku 10 a stojí vzhledem k průmětně v poloze nárožní (t. j. jedna, středem S procházející úhlopříčka podstavy je kolmá k základnici z). Jehlan je v poloze průčelné (viz konec odst. 3), má hranu podstavy 6 a výšku 8. — Oko O (2; 24; 6).

18. Kříž stojí (za průmětnou) na desce, která má podobu kvádru se čtvercovou podstavou $ABCD$ a výšku rovnou 1. A (—12; —1,5; 0), B (—3,5; 0; 0). Kříž stojí uprostřed desky, má hrany rovnoběžné s hranami desky a skládá se ze dvou kvádrů (svislého a vodorovného); každý z nich má dvě čtvercové stěny o hraně rovné 2,4. Výška celého kříže je 14, výška vrcholu kříže nad vodorovným ramenem je 3,3; vodorovné rameno kříže má délku rovnou délce podstavné hrany desky. — Oko O (0; 24; 7).

19. Schodiště o dvanácti schodech vysokých 12 cm a hlubokých 24 cm. První schod spočívá na základní rovině a má dva přední dolní vrcholy A (—8; —33; 0), B (90; —90; 0). - Oko O (20; 160; 75). Proveďte v měřítku 1 : 10.

20. Podstava pomníku. Základ tvoří čtverec $ABCD$; nad tímto čtvercem je v každém rohu krychle o hraně 3,3. Mezi každé dvě krychle je vloženo čtyřdílné schodiště, každé o třech stejně velkých stupních; čtvrté stupně splývají ve společnou plošinu. Narýsujte jen dvoje přední schodiště. A (2,5; 0; 0), B (—9,5; —4,5; 0), oko O (2,5; 18; 11).

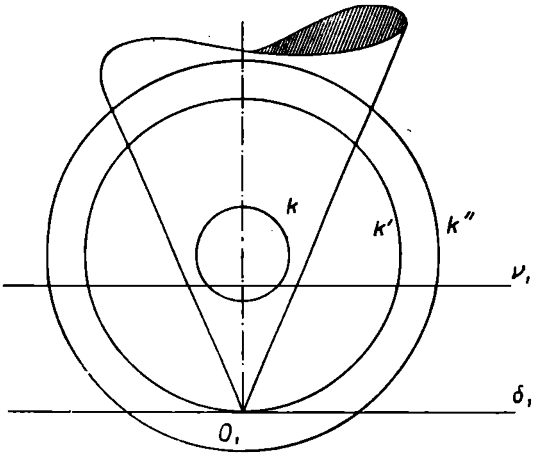
6. PERSPEKTIVA KRUŽNICE

Ze zkušenosti víme, že vidíme kruhové hrany na rozličných předmětech v různé podobě podle toho, z jakého místa se na ně díváme. Tvar středového průmětu kružnice také skutečně závisí na tom, jak je položena rovina ϱ, v níž kružnice leží. Tato rovina je s distanční rovinou ϱ rovnoběžná anebo ji protíná v přímce d. Průsečíky kružnice k s distanční rovinou δ mohou ležet jedině na této přímce d; protože přímka protíná kružnici nejvýše ve dvou bodech, protíná i distanční rovina δ kružnici nejvýše ve dvou bodech.

Neprotíná-li kružnice k vůbec distanční rovinu δ, potom podle věty 2 (odst. 1) se promítne každý její bod do vlastního bodu průmětny a tedy se dá celý průmět kružnice k narýsovat (při dostatečně veliké průmětně). Protíná-li však kružnice k distanční rovinu δ v bodě D, je průmětem tohoto bodu úběžný bod průmětny; přibližuje-li se bod P po kružnici k k bodu D, vzdaluje se jeho průmět P' po průmětu k' do nekonečna. Už z této úvahy opírající se o názor vidíme, že v tomto případě bude zřejmě průmět k' kružnice k křivka, která bude míti úplně jiný vzhled než kružnice. Podrobným zkoumáním různých druhů středového průmětu kružnice se zabývá deskriptivní geometrie; k tomu je však třeba hlubších znalostí geometrie. Proto se omezíme na to, že vyslovíme bez důkazu tuto základní větu:

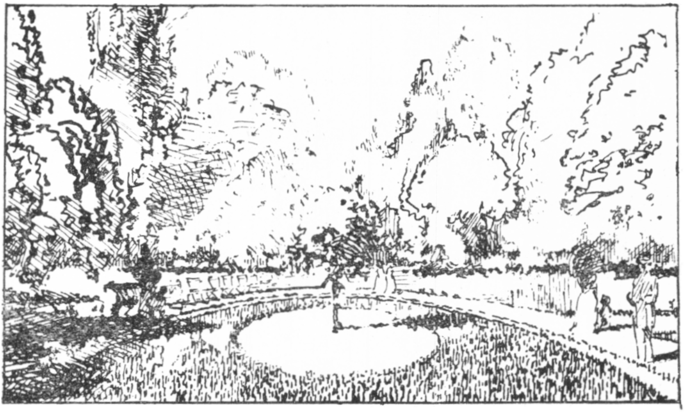
Prochází-li rovina ϱ kružnice k středem promítání, je průmětem této kružnice k stopa roviny ϱ nebo dvě polopřímky ležící na této stopě anebo úsečka ležící na této stopě. —

Leží-li kružnice k v rovině, která neprochází středem promítání, je jejím průmětem k' elipsa (speciálně kružnice) nebo parabola nebo hyperbola. Průmět k' je elipsa (eventuálně kružnice) tehdy, jestliže kružnice k nemá s distanční rovinou ani jeden společný bod). Průmět k' je parabola tehdy, jestliže kružnice k se dotýká distanční roviny v jediném bodě. Průmět k' kružnice k je hyperbola tehdy, jestliže kružnice k protíná distanční rovinu ve dvou bodech.

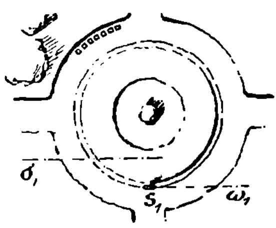


Obr. 39.

Díváme-li se však z oka O na kružnici k, vidíme ji celou jedině tehdy, když leží uvnitř zorného kužele (odst. 3). Protíná-li však distanční rovinu, neleží celá uvnitř tohoto kužele a nemůžeme ji tedy celou z oka O vidět. (Kružnice může ovšem ležet také celá vně zorného kužele.) *Je tedy v případě parabolického nebo hyperbolického průmětu kružnice jejím správným perspektivním obrazem nejvýše nějaký oblouk této paraboly nebo hyperboly.* Názorně to vidíme na obr. 39, ve kterém jsou narýsovány půdorysy tří kružnic k, k', k'', ležících v základní rovině π, půdorys ν_1 perspektivní průmětny ν a půdorysy δ_1, O_1 distanční roviny δ a oka O. V obrázku je také naznačen půdorys zorného kužele. Z obrázku jasně vidíme, že větší části kružnic k', k'' (z nichž jedna má s distanční



Obr. 40a.



Obr. 40b.

rovinou společný jeden a druhá dva body) leží vně zorného kužele a nemohou tudíž býti z oka O viditelné.

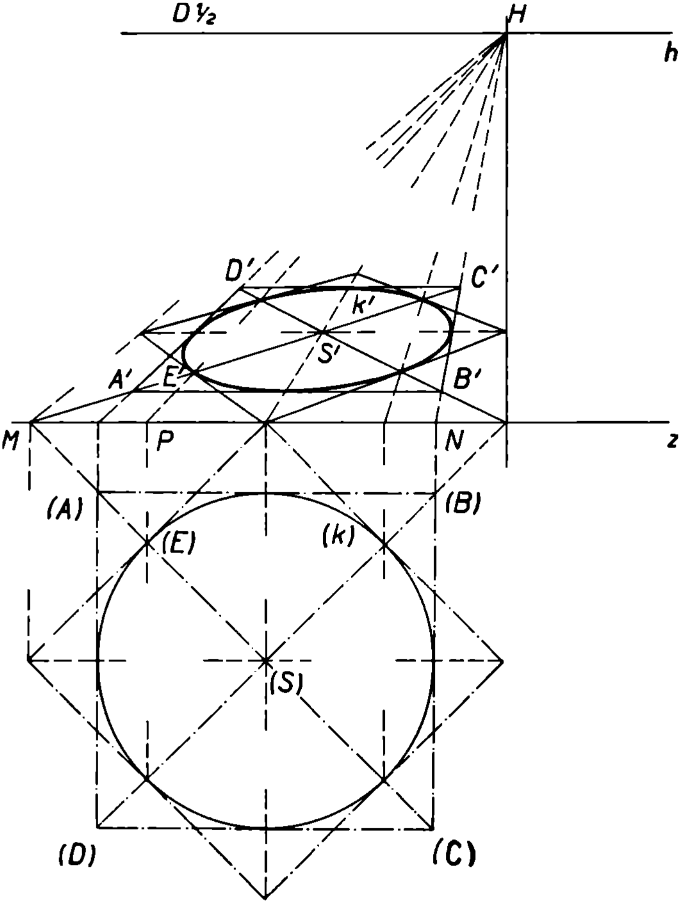
Vyskytne-li se tedy v perspektivě případ, kdy je průmětem kružnice parabola nebo hyperbola, leží v zorném poli jenom nějaký oblouk této křivky, který sestrojíme jednoduše jako spojnici obrazů několika bodů. V obr. 40a je perspektivní obraz několika soustředných kružnic Z obr. 40b, kde je vyznačeno stanoviště S_1 a půdorys distanční roviny ω_1, je vidět, které z těchto kružnic se promítají do elips, která do paraboly a které do hyperboly.

Zbývá tedy probrat případ, kdy perspektivním obrazem kružnice je kružnice nebo elipsa. Ukážeme si konstrukci tohoto obrazu jenom pro případy, které se v praxi nejvíce vyskytují, t. j. kdy rovina kružnice je průčelná, vodorovná nebo kolmá k základnici z.

1. Perspektiva kružnice ležící v průčelné rovině (čili v rovině rovnoběžné s průmětnou) se sestrojí velmi snadno. Je možné totiž dokázat, že v tomto případě je průmětem kružnice k kružnice k', jejíž střed S' je průmětem středu kružnice k. — Sestrojíme tedy průmět S' středu S kružnice k a průmět P' jejího libovolného bodu P; potom průmět k' kružnice k je kružnice se středem S' a poloměrem rovným délce úsečky $S'P'$.

2. Perspektiva kružnice ležící ve vodorovné rovině. (Omezíme se na případ, kdy je průmětem kružnice elipsa.) Rovinu π kružnice k zvolíme za základní rovinu, takže její stopa z bude základnicí. Rovinu s kružnicí k sklopíme kolem základnice z do průmětny; tak dostaneme v průmětně kružnici (k). K rychlému a dosti přesnému narýsování elipsy k' užíváme obyčejně t. zv. *osmibodové konstrukce* (obr. 41). Sklopené kružnici (k) opíšeme průčelný čtverec $(A)(B)(C)(D)$, sestrojíme jeho úhlopříčky a v jejich průsečících s kružnicí (k) sestrojíme k této křivce tečny. Tím dostaneme na kružnici (k) osm bodů a osm tečen, sestrojíme jejich perspektivní obrazy a tak dostaneme pro elipsu k' také osm bodů a osm tečen.

Perspektivu čtverce $ABCD$ snadno sestrojíme, neboť dvě jeho strany jsou přímky hloubkové a druhé dvě přímky



Obr. 41.

průčelné. Perspektivní obrazy stran $AB \parallel CD$ leží podle věty 6 (odst. 1) na přímkách $A'B' \parallel C'D' \parallel z$; úběžník stran $AD \parallel BC$ je podle věty A (odst. 3) hlavní bod H. Stačí sestrojit podle 1. základní úlohy (odst. 5) perspektivu jediného bodu, na příklad vrcholu C. Potom je obraz A' bodu A v průsečíku úhlopříčky MC' s obrazem hloubkové přímky bodu A; přitom M je stopník úhlopříčky AC, t. j. průsečík přímky $(A)(C)$ se základnicí z. Obrazy B', D' bodů B, D sestrojíme jako průsečíky hloubkových přímek těchto bodů s přímkami $A'B' \parallel C'D' \parallel z$. Z obrázku je také patrna konstrukce obrazu druhé úhlopříčky i konstrukce bodů elipsy ležících na přímkách $A'C'$, $B'D'$.

Protože úhlopříčky čtverce $ABCD$ svírají se základnicí úhly 45°, mají úběžníky v pravém a levém distančníku (věta D z odst. 3). Těchto bodů nemůžeme však při konstrukci použít, neboť oba vycházejí mimo nákresnu.

3. Perspektiva kružnice, která leží v rovině kolmé k základnici z se sestrojí obdobným způsobem jako perspektiva kružnice vodorovné. Rovinu ϱ kružnice k sklopíme i s touto kružnicí kolem její svislé stopy n_ϱ do průmětny, sklopené kružnici (k) opíšeme zase čtverec, který má dvě strany svislé a dvě v hloubkových přímkách, a elipsu k' sestrojíme zase osmibodovou konstrukcí.

Poznámka. Je snad zajímavé připomenout, kdy byl prvně sestrojen správný perspektivní obraz kružnice ležící v neprůčelné rovině. Konstrukci obrazu takové kružnice naznačil ve svém spise o malířství již dříve jmenovaný Leone Battista Alberti. Avšak přesně sestrojil po prvé perspektivní obraz kružnice Sandro Botticelli (1447—1518); užil při tom do kružnice vepsaného pravidelného šestnáctiúhelníka.

Kromě konstrukce, kterou jsme popsali, se užívá při sestrojování perspektivy kružnice ještě různých jiných konstrukcí; řadu jich uvádí na příklad ve své Perspektivě profesor Kadeřávek (str. 42—44).

Cvičení

21. Zobrazte perspektivu kružnice, která leží v rovině ϱ kolmé k základnici z, má střed S (—6,5; —6; 6) a poloměr 4,5. - Oko O (0; 24; 7).

22. Zobrazte perspektivu vrcholu věže, jejíž zděná (dolní) část má podobu rotačního válce a jejíž střecha má tvar pravidelného čtyrbokého jehlanu. Zdivo je ukončeno ve vodorovné rovině, která prochází středem podstavy válce S (—5; —6; 8); poloměr válce je 4. Jehlan je v poloze průčelné, má podstavnou hranu 12 a výšku 6. — Oko O (0; 30; 3).

23. Zobrazte perspektivu vrcholu věže, jejíž zděná část má podobu rotačního válce a jejíž střecha má tvar rotačního kužele. Zdivo je ukončeno ve vodorovné rovině, která prochází středem horní podstavy válce S (—3; —5; 7); poloměr válce je 3. Rotační kužel má poloměr podstavy 5 a výšku 9. — Oko O (0; 8; 4).

7. KONSTRUKCE PERSPEKTIV V PRAXI

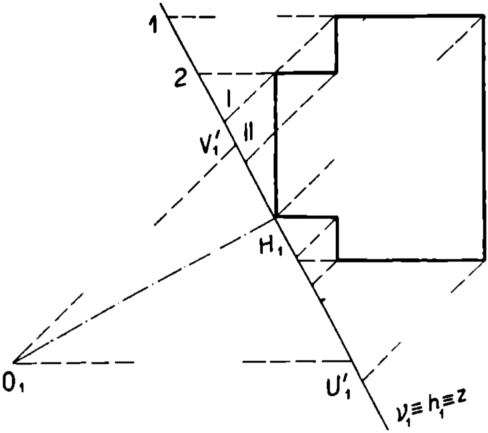
V praxi se obyčejně kombinuje přímá methoda s methodou průsečnou. Postupujeme přitom tak, že ve zmenšeném měřítku narýsujeme půdorys a nárys objektu, zvolíme perspektivní průmětnu (jejím půdorysem v půdoryse objektu) i oko a sestrojíme půdorys hlavního bodu, úběžníky, stopníky a (je-li to třeba) dělicí body význačných přímek tělesa. Tím se rozdělí horizontála i základnice; toto dělení přeneseme v libovolném zvětšení do perspektivního obrazu a tak získáme nejdůležitější body perspektivního obrazu. Přitom se snažíme volit průmětnu a střed promítání tak, aby aspoň úběžník jednoho, pro obraz důležitého směru, byl v nákresně.

V perspektivním obraze užijeme všech přenesených (dostupných) stopníků a úběžníků; při další konstrukci potom používáme method volné perspektivy (odst. 5). Výhoda tohoto postupu je v tom, že můžeme zvolit polohu průmětny a oka tak, abychom získali takový pohled, jaký potřebujeme; přitom můžeme využíti i všech method volné perspektivy.

Ukážeme si postup na příkladě. Protože vynášení výšek je v perspektivě velmi jednoduché (viz 3. základní úlohu, odst. 5), omezíme se na konstrukci perspektivy útvaru ležícího ve vodorovné rovině.

Úloha. Sestrojte perspektivu daného půdorysu ležícího v základní rovině.

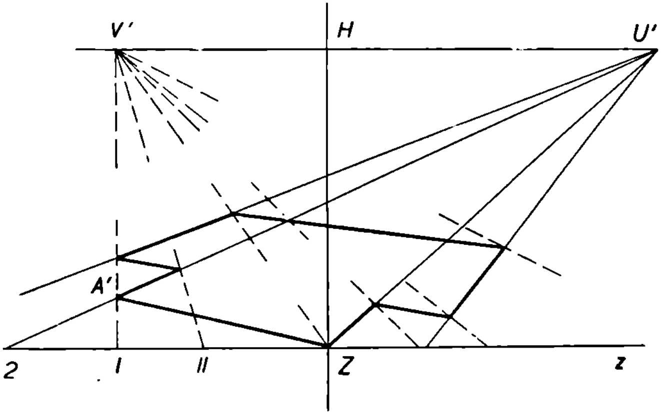
Narýsujeme daný půdorys (obr. 42), zvolíme průmětnu ν a půdorys O_1 oka O. Potom sestrojíme stopníky *1, 2, 3, 4* čtyř rovnoběžných přímek daného půdorysu (v obr. 42 jsou označeny jen body *1* a *2*) a půdorys $\acute{U}_1$ jejich úběžníku $\acute{U}$. Protože úběžník směru druhých rovnoběžek půdorysu je



Obr. 42.

nedostupný, sestrojíme všemi vrcholy půdorysu jiné rovnoběžky (tak, aby jejich úběžník byl dostupný), určíme jejich stopníky *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* (v obr. 42 jsou zase označeny jen dva z nich) a půdorys V_1' jejich úběžníku.

Podle velikosti nákresny, na kterou rýsujeme perspektivní obraz, si zvolíme vhodné zvětšení tohoto obrazu (v obr. 43 jsme provedli zvětšení v poměru 1 : 2), zvolíme výšku oka, narýsujeme základnici, horizontálu, zvolíme hlavní bod H a určíme na základnici základní bod Z. Potom přeneseme z obr. 42 do obr. 43 úběžníky $\acute{U}$, V' ($\overline{H\acute{U}} = 2\overline{H\acute{U}_1}$, $\overline{HV'} = 2\overline{HV_1'}$) a stopníky použitých přímek (na př. $\overline{ZI} = 2\overline{H_1I}$). Obrazy rovnoběžek jedné osnovy jsou spojnice bodů *1*, *2*, ... s úběžníkem $\acute{U}$, obrazy přímek druhé osnovy spojují body *I*, *II*, ... s úběžníkem V'. Průsečíky příslušných přímek (které vidíme v půdoryse) se protínají v obrazech vrcholů

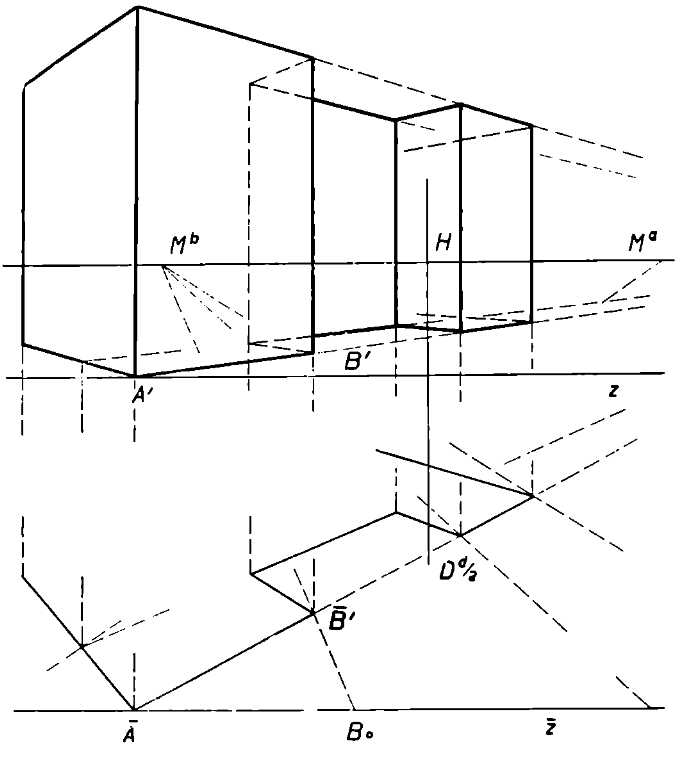


Obr. 43.

daného půdorysu. Tak na př. obraz A' bodu A je průsečík přímek $2\acute{U}$, IV', neboť také v půdoryse je bod A průsečíkem přímky procházející bodem *2* rovnoběžně k $O_1\acute{U}_1$ s přímkou proloženou bodem *I* rovnoběžně k přímce O_1V_1'.

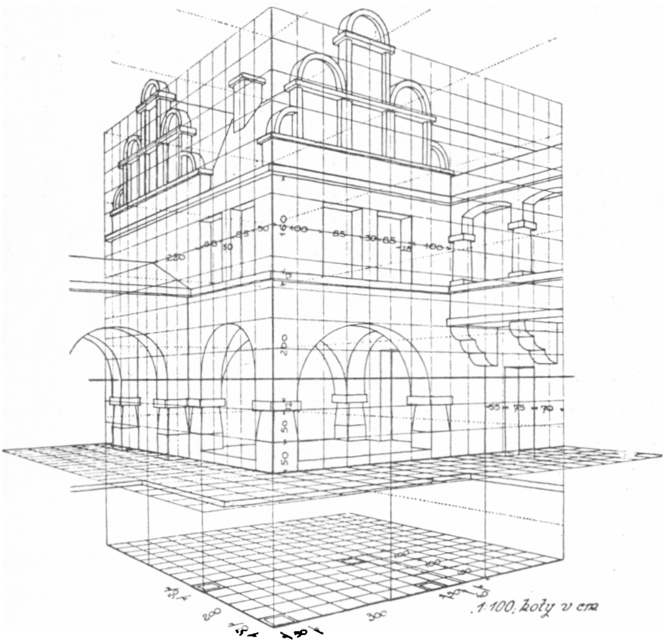
Je-li výška oka velmi malá, vychází perspektivní obraz půdorysu ležícího v základní rovině za průmětnou do úzkého pásu mezi horizontálou a základnicí. Obraz je potom velmi úzký a jeho konstrukce je značně nepřesná, neboť jeho přímky se protínají tak, že svírají velmi malé úhly. V tomto případě si pomáháme tím, že snížíme celý půdorys do roviny rovnoběžné se základní rovinou, sestrojíme perspektivu takto *sníženého půdorysu* a nad ním teprve sestrojíme perspektivu skutečného půdorysu (vynášením výšek podle 3. základní úlohy z odst. 5). Tohoto sníženého půdorysu se užívalo již v XVI. století a říkalo se mu sklepní půdorys. Můžeme ovšem také použít *půdorysu zvýšeného* (vzdušného), t. j. půdorysu vysunutého nad základní rovinu.

Snížením půdorysu přejde každá přímka do přímky s ní rovnoběžné, takže v perspektivě mají obě tyto přímky společný úběžník a tudíž také společný dělicí bod. Můžeme tedy při



Obr. 44.

použití sníženého půdorysu vynášet na danou přímku a danou délku tak, že provedeme (podle 5. základní úlohy z odst. 5) konstrukci ve sníženém půdoryse a potom výsledné body přeneseme svislými přímkami ze snížené přímky na přímku



Obr. 34

Obr. 45.

původní. Tohoto postupu bylo použito na př. v obr. 44, kde je sestrojena perspektiva průčelí divadla. V pomocném půdoryse (který není v knížce narýsován) byla zvolena průmětna, oko, a byly sestrojeny úběžníky obou osnov vodorovných hran budovy; také byly v půdoryse sestrojeny dělicí body

M^a, M^o těchto dvou směrů. (Při této konstrukci můžeme použít po případě redukce distance.) Potom byly podle minulé úlohy přeneseny úběžníky a dělicí body do perspektivní nákresny (úběžníky jsou v obr. 44 mimo rámec sazby) a pak byl sestrojen nejprve snížený půdorys o základnici $\bar{z} \parallel z$. Protože bod A leží na základnici z, leží snížený bod $\bar{A}$ na přímce $\bar{z}$; jeho spojnice s oběma úběžníky jsou snížené půdorysy dvou podstavných hran budovy.

Protože v obr. 44 vycházejí snížené stopníky dalších podstavných hran většinou dost daleko mimo nákresnu, použijeme ke konstrukci obrazů dalších vrcholů dělicích bodů M^b, M^a obou osnov rovnoběžek. Tak na př. na základnici $\bar{z}$ naneseme délku AB_o, rovnou skutečné velikosti hrany AB (ovšem v příslušném poměru zvětšení), a sestrojíme podle 5. základní úlohy z odst. 5 snížený obraz $\overline{B}'$ bodu B. Konstrukce půdorysu v základní rovině (nad sníženým půdorysem) je z obrázku jasně patrná: nejdříve sestrojíme bod A', potom obrazy z něho vycházejících hran a potom další vrcholy. Nakonec vyneseme výšky (nad půdorysem v základní rovině).

Poznámka. V praxi se také často používá t. zv. *síťové methody,* které se říká podle jejího původce, anglického architekta Robertse, R-methoda. Na stavitelských objektech se vyskytují nejčastěji roviny trojího zaměření: jedny jsou vodorovné, druhá dvě zaměření jsou svislá a na sebe kolmá. Tři roviny, z nichž každá patří do jiného z těchto tří zaměření, se protínají ve třech přímkách x, y, z, které procházejí jedním bodem P. Naneseme-li od tohoto bodu P na každou z přímek x, y, z stejný počet stejných dílů a každým takto sestrojeným dělicím bodem proložíme rovnoběžky k druhým dvěma z přímek x, y, z, dostaneme v každé rovině čtvercovou síť. Sestrojíme-li perspektivní obraz těchto tří sítí, dostaneme *perspektivní síť (schema).* Položíme-li na takovou síť průhledný papír, můžeme snadno na základě daných rozměrů těles narýsovat jeho perspektivní obraz. Ukázka takové sítě (s vkreslenou perspektivou) je na obr. 45.

Cvičení

24. Sestrojte perspektivu dlažby, která leží v základní rovině a je tvořena shodnými, pravidelnými šestiúhelníky. — Sestrojte si nejdříve půdorys dlažby, zvolte si průmětnu i oko a potom postupujte jako v první úloze tohoto odstavce.
25. Narýsujte si půdorys a nárys jednoduché budovy a sestrojte její perspektivní obraz.

8. RŮZNÉ DRUHY PERSPEKTIVY

Závěrem je snad vhodné připomenout, že v malířství byla perspektivní malba v největší oblibě v době renaissance a baroka. Obrazy mohutných architektur se v této době malují nejen na stěny, nýbrž i na stropy, klenby, ba i na podlahy. Je zajímavé, že už někteří tehdejší malíři si byli vědomi i známé vady perspektivy, totiž *skreslování v okrajích obrazu,* které je nápadné zejména u velikých obrazů, kreslených přesně podle pravidel lineární perspektivy. Proto se malíři velikých perspektivních komposic odchylují v okrajích obrazu od přesné perspektivy. Tak činil na př. už italský mistr Michelangelo Buonarotti (1474—1547), který při malbě stropu Sixtiny dělí strop na pole, každé zvlášť perspektivně vyřešené a přecházející nenápadně do sebe.

Tuto vadu perspektivy odstraníme, promítáme-li na průmětnu, která je částí kulové plochy; střed promítání je přitom ve středu této plochy *(perspektiva sférická).* Příkladem takové perspektivy jsou malby na chrámových kopulích. U nás byl vynikajícím malířem kopulí zejména Václav Vavřinec Reiner (1689—1743), jehož nejkrásnější malby jsou v kostele sv. Kateřiny v Praze II. Je snad zajímavé připomenout, jak si malíři pomáhali při malbě na klenbách a kopulích. Pod klenbou (kopulí) si myslili rovný strop s narýsovanou čtvercovou sítí, a na něm zkomponovali obraz. Pod kopulí potom sestrojili místo tohoto rovného stropu čtvercovou provazovou síť a vyznačili si na kopuli vržený stín této sítě; přitom oko nahradili hořící pochodní. Do takto sestrojené sítě přenesli na kopuli obraz, zkomponovaný původně pro rovný strop. Vzbuzuje tedy stropní malba na klenbě nebo kopuli správný prostorový dojem jenom tehdy, je-li pozorována z místa, ve kterém leží oko (t. j. kde byla pochodeň).

Konstrukce obrazů ve sférické perspektivě je dost složitá; proto se spíše užívá *perspektivy cylindrické,* ve které se promítá na rotační válcovou plochu z oka ležícího na její ose. V této perspektivě nedostáváme sice tak pěkné obrazy jako v perspektivě sférické, avšak jejich konstrukce je značně pohodlnější. Konstrukce se totiž provedou v rovině, do níž se dá rotační válec rozvinout, a teprve hotový obraz se napne do válcovitě zakřiveného rámu. Příklad této cylindrické perspektivy (jíž také říkáme panorama nebo cyklorama) vidíme na Maroldově Bitvě u Lipan vystavené ve Stromovce v Praze.

Podrobnější poučení o těchto různých druzích perspektivy (divadelní, letecká) nalezne čtenář v knize architekta Ritschla a profesorky Ritschlové Deskriptivní geometrie v praxi, vydané v Praze r. 1938. Nejlepší poučení o perspektivě, zejména v jejích vztazích k výtvarnému umění, poskytuje tolikráte již citovaná krásná kniha profesora Kadeřávka.

OBSAH

Úvod 7

1. Hlavní pravidla středového promítání 13
2. Úběžné body a úběžné přímky 26
3. Podmínky správného perspektivního zobrazení 32
4. Průsečná methoda. Pomocné konstrukce 37
5. Přímá methoda (Volná perspektiva) 48
6. Perspektiva kružnice 72
7. Konstrukce perspektiv v praxi 79
8. Různé druhy perspektivy 86

BRÁNA K VĚDĚNÍ, sv. 23

EMIL KRAEMER

PERSPEKTIVA

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1951. Šéfredaktor Miroslav Střída, odborný redaktor Miroslav Fuka, výtvarný redaktor Miloš Hrbas, jazyková redaktorka Věra Pašková. Z nové sazby písmem borgis Extended vytiskla Státní tiskárna n. p., závod 0,5 (Prometheus). — 1. vydání, náklad 4400 výtisků — 30103/130 — 45971/51/8/III/1. — 80 — 1% — Sazba 3. 5. 1951 — Tisk 25. 6. 1951. — 2,88 plánovacích archů, 3,57 autorských archů, 3,68 vydavatelských archů. 92 stran, 45 obrázků. Papír 221-07, formát 70×100 cm, 80 g.
Cena brož. 30 Kčs.

BRÁNA
K VĚDĚNÍ
svazek

23

Brož. 30 Kčs

30103-130