Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

INTEGRÁLNÍ ROVNICE

S. G. MICHLIN

PŘÍRODOVĚDECKÉ
VYDAVATELSTVÍ

S. G. MICHLIN

INTEGRÁLNÍ ROVNICE

a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

PRAHA 1952

Originál Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники vydalo Gosudarstvennoje izdatelstvo techniko-teoretičeskoj literatury v Moskvě a Leningradě r. 1949. Druhé opravené a doplněné vydání přeložil z ruštiny Dr Otto Vejvoda. Obálku navrhl Miloš Hrbas a graficky upravil Petr Tučný.

PŘEDMLUVA K PRVÉMU VYDÁNÍ

Za poslední dvě — tři desetiletí vyšlo mnoho prací, v nichž se problémy důležité pro theorii i pro aplikace řeší pomocí integrálních rovnic. Stačí se na příklad zmínit o pracích ze statické theorie pružnosti a pracích o problému obtékání v hydrodynamice. Je také známo, jak důležitou úlohu hrají integrální rovnice v theorii kmitů, v úlohách o stabilitě stlačovaných tyčí a v mnoha jiných problémech.

Zdá se mi, že se stalo naléhavým systematické zpracování obšírného materiálu o užití integrálních rovnic, který se nahromadil v časopisech v uvedeném období. Pokusem o takové zpracování je tato kniha.

Kniha se skládá ze dvou nestejně velkých částí. Prvá kapitola obsahuje základní výsledky theorie integrálních rovnic a také methody jejich přibližného řešení. Zvláštní místo zaujímá v této kapitole theorie singulárních integrálních rovnic, obsahujících hlavní hodnotu integrálu. Tato theorie, ačkoliv je dostatečně dobře zpracovaná a má četné, velmi plodné aplikace, nenašla dosud místa v učebnicích integrálních rovnic. Proto jsem považoval za nutné vyložit zde stručně základy této theorie.

Značná část prvé kapitoly obsahuje věci, vykládané obyčejně v učebnicích integrálních rovnic. V takových případech zpravidla uvádím pouze výsledek a pro důkaz odkazuji čtenáře na příslušné učebnice.

Všude, kde to bylo možné, jsou výsledky theorie ilustrovány na numerických příkladech.

Druhá kapitola, značně obšírnější než prvá, je věnována aplikacím. Přehled úloh, řešených ve druhé kapitole, je jasný z obsahu. Poznamenávám, že jsem věnoval pozornost především problémům theorie pružnosti a hydrodynamiky. To nevyplývá jen z mých zálib, nýbrž i z toho, že v těchto dvou oblastech jsou aplikace integrálních rovnic nejčetnější. Většinou se omezuji na úlohy lineární a rovinné. Methodě integrálních rovnic se často vytýká, a ne bez jistého oprávnění, nedostatečná efektivnost. Tato výtka je zvláště oprávněná, pokud se týče trojdimensionálních úloh. Když jsem se chtěl omezit na ty případy, v nichž lze získat efektivní řešení, byl jsem nucen se zříci vyšetřování prostorových problémů.

Leningrad, červenec 1944. *S. Michlin*

PŘEDMLUVA K DRUHÉMU VYDÁNÍ

Druhé vydání se značně liší od prvého, hlavně v prvé části (kapitola I prvého vydání). Ve druhém vydání upouštím od stručného výkladu theorie integrálních rovnic a vykládám je s dostatečně podrobnými důkazy. Požadavky aplikability i vlastní theorie mě přiměly zříci se v učebnicích tradičního předpokladu o spojitosti jádra. Nahrazuji jej předpokladem, že jednoduchý integrál čtverce jádra je omezený; pak zůstávají v platnosti věty o stejnoměrné konvergenci posloupnosti postupných aproximací a řady Hilbert-Schmidtovy. Přesné odůvodnění theorie za předpokladů, které jsem učinil, vyžaduje užití Lebesgueova integrálu. Čtenář, jenž Lebesgueovu theorii nezná, musí existenci příslušných integrálů postulovat.

Ve druhé části (kapitola II prvého vydání), věnované aplikacím, je přidáno několik nových paragrafů, z nichž dva se vztahují na trojdimensionální problémy. Ostatní změny spočívají v tom, že jsou zpravidla provedeny dostatečně podrobně důkazy tam, kde byly pouze naznačeny nebo vůbec nebyly.

V druhém vydání byly opraveny tiskové chyby a jiné vady prvého vydání; byly zkontrolovány a v nutných případech opraveny výpočty.

Profesoři G. M. Goluzin a L. V. Kantorovič mě upozornili na některé vady prvého vydání. Prof. Dorodnicyn uvedl v recensi, uveřejněné v tisku, některé terminologické nedostatky. Aspirant J. A. Ickovič upozornil na řadu tiskových chyb. Jim všem patří můj upřímný dík.

Leningrad, květen 1948. *S. Michlin*

ČÁST I

METHODY ŘEŠENÍ INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

KAPITOLA 1

ROVNICE FREDHOLMOVA TYPU

§ 1. Klasifikace integrálních rovnic. Mnohé úlohy mechaniky, matematické fysiky a techniky vedou k rovnicím typu

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = f(x), \tag{1}$$

kde $\varphi(x)$ je neznámá funkce. Tyto rovnice se nazývají *integrální*, protože neznámá funkce se v nich vyskytuje v integrandu.

Tyto úlohy zde nebudeme uvádět, neboť velký počet jich bude vyšetřován v druhé části. Přistoupíme ihned ke zkoumání vlastních rovnic.

Známé prvky, jež se vyskytují v integrální rovnici (1), se nazývají takto: $f(x)$ — pravá strana, funkce $K(x, s)$ — jádro a číselný koeficient λ — parametr rovnice. Parametr není nutno zavádět. Je možno jej vždy učinit rovným jednotce tím, že označíme součin $\lambda\, K(x, s)$ jako $K_1(x, s)$ a uvažujeme $K_1(x, s)$ jako nové jádro. Uvidíme však, že se zavedení tohoto parametru při vyšetřování integrálních rovnic ukazuje užitečným.

Budeme předpokládat, že meze a a b jsou konečné konstanty.

Poznamenejme, že parametr λ i funkce $\varphi(x)$, $K(x, s)$ a $f(x)$ mohou nabývat jak reálných, tak komplexních hodnot.

Charakter integrální rovnice je v podstatě určen vlastnostmi jejího jádra. V aplikacích se často setkáme se spojitým jádrem, avšak vyskytují se i nespojitá jádra. Budeme uvažovat tři typy rovnic:

1. Když jádro $K(x, s)$ je spojité pro $a \leqq x \leqq b$ a $a \leqq s \leqq b$ nebo když nespojitosti jsou takové, že alespoň dvojný integrál

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| \, dx \, ds$$

je konečný, budeme rovnici (1) nazývat *rovnicí Fredholmova typu.*

2. Když jádro má tvar

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x - s|^\alpha},$$

kde $H(x, s)$ je omezená a α je konstanta vyhovující nerovnosti

$$0 < \alpha < 1,$$

budeme rovnici (1) nazývat *rovnicí se slabou singularitou.*

3. K třetímu typu integrálních rovnic přijdeme, jestliže uvažujeme jádra typu

$$K(x, s) = \frac{A(x, s)}{x - s},$$

kde čitatel $A(x, s)$ je diferencovatelná funkce x a s.[1] V tomto případě integrál

$$\int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds = \int_a^b \frac{A(x, s)}{x - s} \varphi(s) \, ds,$$

vyskytující se v rovnici (1), je obecně divergentní. Avšak při velmi obecných předpokladech ohledně funkce $\varphi(x)$ existuje hlavní hodnota tohoto integrálu, t. j. limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{x-\varepsilon} K(x, s) \, \varphi(s) \, ds + \int_{x+\varepsilon}^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds\right].$$

Jestliže nyní v rovnici (1) chápeme divergentní integrál ve smyslu této hlavní hodnoty,[2] přicházíme k třetímu typu integrálních rovnic, jež budeme nazývat *singulárními.*

---

[1] Tento předpoklad je možno nahradit slabším.

[2] Podrobněji o pojmu hlavní hodnoty integrálu viz kap. III, §§ 21 a 22.

Uveďme několik příkladů.

a) Rovnice

$$\varphi(x) - \int_0^1 (x^2 + s^2)\, \varphi(s)\, ds = x^2$$

je Fredholmova typu, neboť její jádro $K(x, s) = x^2 + s^2$ je spojité pro $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$. V této rovnici $\lambda = 1$, $f(x) = x^2$.

b) Rovnice

$$\varphi(x) - \int_0^l \lg|x - s|\, \varphi(s)\, ds = f(x)$$

je také Fredholmova, neboť i když jádro je nespojité pro $x = s$, dvojný integrál

$$\int_0^l \int_0^l \lg^2|x - s|\, dx\, ds$$

je konečný.

c) Vyšetřujme rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x - s)^\alpha}\, ds = f(x); \quad 0 < \alpha < 1. \qquad (*)$$

Nechť je $f(x)$ definována a řekněme spojitá v intervalu $0 \leqq x \leqq a$. Potom má smysl uvažovat tuto rovnici v tomto intervalu. Spadá pod obecný typ (1), i když to není tak očividné jako v prvých dvou případech. Abychom se přesvědčili, že rovnice (*) je typu (1), položme

$$K(x, s) = \begin{cases} (x - s)^{-\alpha}, & s < x \\ 0, & s \geqq x. \end{cases}$$

Nyní se rovnice (*) napíše ve tvaru (1):

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^a K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x).$$

Rovnice (*) má slabou singularitu; bude současně i Fredholmova, jestliže $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, protože potom dvojný integrál

$$\int_0^a \int_0^a K^2(x, s)\, dx\, ds = \int_0^a dx \int_0^x \frac{ds}{(x - s)^{2\alpha}} = \frac{a^{2-2\alpha}}{(1 - 2\alpha)(2 - 2\alpha)}$$

je konečný.

d) Rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{cotg} \frac{s - x}{2}\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = f(x),$$

v které se integrál chápe ve smyslu jeho hlavní hodnoty, je singulární, poněvadž její jádro je možno vyjádřit ve tvaru

$$\frac{1}{x - s} (x - s) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(s - x),$$

a funkce

$$(x - s) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(s - x)$$

je spojitá a diferencovatelná v intervalu $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

K naší klasifikaci je nutno poznamenat, že je především neúplná; je možno uvést mnohé typy integrálních rovnic, jež nelze zahrnout pod tři uvedené. Omezíme se však na tyto tři jako na rovnice zvláště důležité pro aplikace. Dále musíme říci, že rozdíl mezi rovnicemi Fredholmova typu a rovnicemi se slabou singularitou není příliš podstatný. Až na několik výjimek jsou nejdůležitější výsledky theorie společné pro rovnice obou typů.

V řadě případů je třeba uvažovat integrální rovnice, v kterých je neznámá funkce definována nikoliv na úsečce osy x, nýbrž na nějaké rovinné či prostorové křivce nebo na oblasti dvoj- či trojrozměrné. Prvý případ nepředstavuje nic nového: stačí jako nezávisle proměnnou zavést délku oblouku křivky nebo jiný parametr, jenž určuje polohu bodu na křivce, a dostaneme se již k uvažovanému typu rovnic.

Jestliže je neznámá funkce definována v n-rozměrné oblasti Ω (v příkladech důležitých pro aplikace se n obyčejně rovná dvěma nebo třem, obecně však může být libovolné), budeme se místo (1) zabývat rovnicí

$$\varphi(M) - \lambda \int_\Omega K(M, M_1)\, \varphi(M_1)\, \mathrm{d}M_1 = f(M), \qquad (2)$$

kde M a M_1 jsou body oblasti Ω a $\mathrm{d}M$ je element oblasti. Podle předešlého budeme λ nazývat parametrem, funkci $K(M, M_1)$ jádrem a $f(M)$ pravou stranou integrální rovnice (2). Rovnice typu (2) budeme klasifikovat takto:

Jestliže má integrál

$$\int_\Omega \int_\Omega |K^2(M, M_1)| \, \mathrm{d}M \, \mathrm{d}M_1$$

konečnou hodnotu, pak zahrneme rovnici (2) k typu Fredholmovu. Speciálně, rovnice (2) bude Fredholmova, když bude jádro spojité nebo alespoň omezené.

Vzdálenost mezi M a M_1 označme r. Rovnici (2) zahrneme k typu rovnic se slabou singularitou, jestliže její jádro má tvar

$$K(M, M_1) = \frac{H(M, M_1)}{r^\alpha},$$

kde $H(M, M_1)$ je omezená funkce a α leží v mezích $0 < \alpha < n$.

Je možno definovat i singulární integrální rovnici s několika nezávisle proměnnými. Neuděláme to však, protože takové rovnice jsou pro aplikace méně důležité.

Integrální rovnice se nazývá *homogenní*, jestliže její pravá strana je identicky rovna nule. Homogenní rovnice má tedy tvar

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, \mathrm{d}s = 0 \tag{3}$$

resp.

$$\varphi(M) - \lambda \int_\Omega K(M, M_1) \, \varphi(M_1) \, \mathrm{d}M_1 = 0. \tag{4}$$

Jestliže pravá strana není identicky rovna nule, rovnice se nazývá *nehomogenní*.

Theorie a také praktické methody řešení Fredholmových rovnic jsou úplně stejné pro případ jak jedné, tak několika nezávisle proměnných. Budeme proto uvažovat v nejbližších paragrafech pouze rovnice s jednou nezávisle proměnnou. Je velmi lehké vyslovit nalezené výsledky pro případ několika nezávisle proměnných.

Rovnice tvaru (1) a (2) se nazývají *integrálními rovnicemi druhého druhu* na rozdíl od *rovnic prvého druhu*, které mají tvar

$$\int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, \mathrm{d}s = f(x), \tag{5}$$

nebo pro případ několika proměnných

$$\int_\Omega K(M, M_1) \, \varphi(M_1) \, \mathrm{d}M_1 = f(M). \tag{6}$$

§ 2. Methoda postupných aproximací. Pojem resolventy. Přistupme k řešení integrálních rovnic. V §§ 2 až 9 této kapitoly budeme uvažovat pouze rovnice typu Fredholmova.

Jádra těchto rovnic podrobíme dalšímu doplňujícímu omezení: budeme předpokládat, že jednoduchý integrál ze čtverce absolutní hodnoty jádra je omezený:

$$\int_a^b |K^2(x, s)| \, ds < C_1; \; C_1 = \text{konst.} \tag{1}$$

O pravé straně budeme předpokládat, že integrál ze čtverce její absolutní hodnoty je konečný:

$$\int_a^b |f^2(x)| \, dx < \infty. \tag{1_1}$$

Budeme hledat řešení integrální rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds = f(x) \tag{2}$$

methodou postupných aproximací. Za tím účelem napíšeme rovnici (2) ve tvaru

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds. \tag{3}$$

Jako nultou aproximaci vezmeme pravou stranu rovnice (2):

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

Nultou aproximaci dosadíme do pravé strany rovnice (3) a nalezený výsledek vezmeme za prvou aproximaci:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \, \varphi_0(s) \, ds.$$

Prvé přiblížení opět dosadíme do pravé strany rovnice (3) atd. Obecně řečeno, jestliže byla nalezena n-tá aproximace $\varphi_n(x)$, pak za $(n + 1)$-vou aproximaci vezmeme výsledek dosazení $\varphi_n(x)$ do pravé strany rovnice (3). Postupné aproximace jsou tedy určeny rekurentním vztahem

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \, \varphi_n(s) \, ds. \tag{4}$$

Jestliže postupné aproximace stejnoměrně konvergují k nějaké limitě, je tato limita řešení rovnice (3); jestliže tato limita neexistuje, pak použití methody postupných aproximací nemá zřejmě smysl.

Vyšetřeme podrobněji strukturu postupných aproximací. Zřejmě

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, f(s)\, ds.$$

Dále

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_1(s)\, ds =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, f(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b K(x, t)\, dt \int_a^b K(t, s)\, f(s)\, ds.$$

V dvojnásobném integrálu provedeme záměnu pořádku integrování. Označíme-li pro stručnost

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, dt, \tag{5}$$

dostaneme:

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, f(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, s)\, f(s)\, ds.$$

Právě tak najdeme:

$$\varphi_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, f(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, s)\, f(s)\, ds +$$

$$+ \lambda^3 \int_a^b K_3(x, s)\, f(s)\, ds,$$

kde

$$K_3(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, K_2(t, s)\, dt, \tag{6}$$

a obecně

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b K_m(x, s)\, f(s)\, ds; \tag{7}$$

$K_m(x, s)$ je určeno rekurentní formulí

$$K_1(x, s) = K(x, s); \quad K_m(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, K_{m-1}(t, s)\, dt. \tag{8}$$

Funkce $K_m(x, s)$ se nazývá *m-tým iterovaným jádrem* vzhledem k danému jádru. Dá se lehko dokázat, že iterovaná jádra vyhovují obecnější formuli než (8):

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_r(x, t)\, K_{m-r}(t, s)\, \mathrm{d}t, \tag{9}$$

kde r je libovolné přirozené číslo menší než m.

Vyjádříme-li v (8) jádro $K_{m-1}(t, s)$ pomocí K_{m-2} podle téže formule (8), dostaneme

$$K_m(x, s) = \int_a^b \int_a^b K(x, t_1)\, K(t_1, t_2)\, K_{m-2}(t_2, s)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2.$$

Jádro $K_{m-2}(t_2, s)$ je možno vyjádřit pomocí K_{m-3} atd. Pokračujeme-li v tomto postupu, dostaneme po konečném počtu kroků vzorec

$$K_m(x, s) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(x, t_1)\, K(t_1, t_2) \ldots K(t_{m-1}, s)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_{m-1}. \tag{*}$$

Oddělíme-li integrování podle t_r, můžeme transformovat poslední vzorec na tvar

$$K_m(x, s) = \int_a^b \mathrm{d}t_r \left\{ \int_a^b \ldots \int_a^b K(x, t_1)\, K(t_1, t_2) \ldots K(t_{r-1}, t_r)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{r-1} \,. \right.$$

$$\left. . \int_a^b \ldots \int_a^b K(t_r, t_{r+1}) \ldots K(t_{m-1}, s)\, \mathrm{d}t_{r+1} \ldots \mathrm{d}t_{m-1} \right\}.$$

Podle vzorce (*) je prvý z integrálů ve složené závorce roven $K_r(x, t_r)$ a druhý $K_{m-r}(t_r, s)$. Tedy

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_r(x, t_r)\, K_{m-r}(t_r, s)\, \mathrm{d}t_r.$$

Zaměníme-li zde označení t_r na t, dostaneme vzorec (9).

Předpokládáme-li, že postupné aproximace konvergují, a provedeme-li v (7) limitní přechod, dostaneme řešení integrální rovnice (2) ve tvaru nekonečné řady

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x, s)\, f(s)\, \mathrm{d}s, \tag{10}$$

jejímž n-tým částečným součtem je $\varphi_n(x)$.

Vyjasněme rychlost konvergence postupných aproximací. Označme C_m supremum integrálu

$$\int_a^b |K_m(x, s)|^2 \, ds$$

a najděmė odhad veličiny C_m. Ve vzorci (9) položme $r = m - 1$; potom

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_{m-1}(x, t)\, K(t, s)\, dt. \tag{8_1}$$

Použijme na daný integrál Buňakovského[1] nerovnosti

$$|K_m(x, s)|^2 \leqq \int_a^b |K_{m-1}(x, t)|^2 \, dt \int_a^b |K(t, s)|^2 \, dt.$$

Integrujíce tuto nerovnost podle s, dostaneme:

$$\int_a^b |K_m(x, s)|^2 \, ds \leqq B^2 \int_a^b |K_{m-1}(x, t)|^2 \, dt \leqq B^2 C_{m-1}.$$

Pro supremum integrálu na levé straně tedy najdeme:

$$C_m \leqq B^2 C_{m-1}.$$

Z této rekurentní nerovnosti plyne přímo hledaný odhad:

$$C_m \leqq B^{2m-2} C_1. \tag{11}$$

Zaveďme do úvah veličinu

$$D = \sqrt{\int_a^b |f^2(s)| \, ds}.$$

Na obecný člen řady (10) užijme Buňakovského nerovnosti:

$$\left|\int_a^b K_m(x, s)\, f(s)\, ds\right|^2 \leqq \int_a^b |K_m^2(x, s)| \, ds \int_a^b |f(s)|^2 \, ds \leqq C_1 D^2 B^{2m-2}.$$

Odtud plyne, že obecný člen řady (10) je absolutně menší než veličina

$$D\sqrt{C_1}\,|\lambda|^m B^{m-1},$$

takže řada (10) konverguje rychlejší než geometrická řada s kvocientem $|\lambda| B$.

---

[1] Tato nerovnost je často nazývána nerovností Schwarzovou, ačkoliv ji po prvé odvodil Buňakovskij. Pozn. překladatele.

Z toho plyne řešitelnost rovnice (2), jestliže $|\lambda| < B^{-1}$. Dokážeme nyní, že pro tato λ má pouze jedno řešení. Předpokládejme opak a nechť $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou dvě řešení rovnice (2). Potom

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_1(s)\, ds = f(x),$$

$$\varphi_2(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_2(s)\, ds = f(x).$$

Odečteme-li obě rovnice a položíme-li $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \omega(x)$, dostaneme

$$\omega(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, \omega(s)\, ds.$$

Užijeme Buňakovského nerovnosti:

$$|\omega^2(x)| \leqq |\lambda|^2 \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds \int_a^b |\omega^2(s)|\, ds; \tag{12}$$

nalezenou nerovnost integrujeme podle x. Potom dostaneme

$$\int_a^b |\omega^2(x)|\, dx \leqq |\lambda^2| \int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds \int_a^b |\omega^2(s)|\, ds$$

neboli

$$(1 - |\lambda^2| B^2) \int_a^b \omega^2(s)\, ds \leqq 0.$$

Prvý součinitel nalevo je kladný a druhý je nezáporný, tudíž je nutně

$$\int_a^b |\omega^2(s)|\, ds = 0.$$

Nyní z (12) plyne, že $|\omega^2(x)| \leqq 0$ a odtud $\omega(x) = 0$ čili $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Rovnice (2) má tedy jediné řešení.

Z našich úvah plyne tato věta.

Věta. *Jestliže*

$$\int_a^b |K^2(x, s)|\, ds \leqq C_1, \quad C_1 = \text{konst.},$$

pak postupné aproximace stejnoměrně konvergují pro všechny hodnoty λ, *jež leží uvnitř kruhu*

$$|\lambda| \leqq \frac{1}{B}; \quad B^2 = \int_a^b\int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds.$$

Limita postupných aproximací je řešení rovnice (2), a to řešení jediné.

Jestliže se v řadě (10) omezíme na členy, jež obsahují λ až do n-té mocniny, je zřejmé, že chyba nebude větší než

$$D\sqrt{C_1}\,\frac{|\lambda|^{n+1}B^n}{1 - |\lambda|B}. \tag{13}$$

Jako příklad uvažujme rovnici

$$\varphi(x) - 0{,}1\int_0^1 K(x, s)\,\varphi(s)\, ds = 1; \qquad K(x, s) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq s), \\ s & (s \leqq x \leqq 1). \end{cases}$$

Zde je $\lambda = 0{,}1$, $B = 1 : \sqrt{6}$, $C_1 = 1 : 3$ a postupné aproximace konvergují. Dále je zřejmě $D = 1$. Najdeme přibližné řešení, při čemž se omezíme na dvě aproximace. Pak v řadě (10) zůstanou tři členy a chyba nepřevýší

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{0{,}1^3 \cdot \frac{1}{6}}{1 - \frac{0{,}1}{\sqrt{6}}} \approx 0{,}0001.$$

Máme

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1,\\
\varphi_1(x) &= 1 + \tfrac{1}{10}x - \tfrac{1}{20}x^2,\\
\varphi_2(x) &= 1 + \tfrac{31}{300}x - \tfrac{1}{20}x^2 - \tfrac{1}{600}x^3 + \tfrac{1}{2400}x^4.
\end{aligned}$$

Jestliže položíme přibližně $\varphi(x) = \varphi_2(x)$, pak s chybou menší než 0,0001 budeme mít:

$$\varphi(x) = 1 + \tfrac{31}{300}x - \tfrac{1}{20}x^2 - \tfrac{1}{600}x^3 + \tfrac{1}{2400}x^4.$$

Předpokládejme, že jádro je omezené, t. j. existuje taková konstanta A, že

$$|K(x, s)| < A$$

pro všechny hodnoty x a s. Snadno vidíme, že postupné aproximace stejnoměrně konvergují pro všechny komplexní hodnoty λ, jež leží uvnitř kruhu

$$|\lambda| < \frac{1}{A(b - a)}$$

v komplexní rovině λ.

Jestliže integrál (1) není omezený, avšak dvojný integrál

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| \, dx \, ds$$

má konečnou hodnotu, pak i když postupné aproximace mohou divergovat v obyčejném smyslu, konvergují v jistém zobecněném smyslu (t. zv. konvergence v průměru, viz § 20) a jejich zobecněná limita dává řešení rovnice (2) a to jediné. Rámec naší knihy nám však nedovoluje, abychom se u toho zdržovali déle.

Zaměňme v řadě (10) pořádek sčítání a integrování.[1] Potom

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b f(s) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m K_m(x, s) \, ds.$$

Zaveďme označení

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s). \tag{14}$$

Funkce $\Gamma(x, s; \lambda)$ se nazývá *resolventou* rovnice (2). Její pomocí lze napsat řešení v obzvlášť kompaktním tvaru:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(s) \, \Gamma(x, s; \lambda) \, ds. \tag{15}$$

Tento vzorec dovoluje okamžitě napsat řešení integrální rovnice (2), jestliže byla napřed vypočtena její resolventa.

Vzorec (14) definuje resolventu pouze pro $|\lambda| < 1 : B$. Zaveďme nyní obecnou definici. Řekneme, že pro dané λ má integrální rovnice (2) resolventu $\Gamma(x, s; \lambda)$, jestliže tato rovnice má řešení, a to jediné, při libovolné pravé straně a je-li toto řešení určeno vzorcem (15).

Jestliže resolventa existuje, pak je jediná. Nechť má rovnice (2) pro $\lambda = \lambda_0$ dvě resolventy $\Gamma(x, s; \lambda_0)$ a $\Gamma_1(x, s; \lambda_0)$. Libovolná funkce $f(x)$ splňuje identitu:

$$f(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda_0) \, f(s) \, ds = f(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma_1(x, s; \lambda_0) \, f(s) \, ds,$$

která vyjadřuje tu skutečnost, že pro $\lambda = \lambda_0$ má rovnice (2) jediné řešení. Odtud

$$\int_a^b u(x, s) \, f(s) \, ds \equiv 0; \quad u(x, s) = \Gamma(x, s; \lambda_0) - \Gamma_1(x, s; \lambda_0).$$

---

[1] Lehce se dokáže, že tato záměna je dovolena.

Poněvadž $f(s)$ je libovolná funkce, zvolme x pevně a položme $f(s) = \overline{u(x, s)}$. Potom

$$\int_a^b |u(x, s)|^2 \, ds = 0$$

a $u(x, s) \equiv 0$, což dokazuje, že resolventa je jediná.

V § 9 uvedeme takové vyjádření resolventy, jež platí pro všechny hodnoty λ, pro které resolventa existuje.

Na závěr ještě uvedeme poznámku, která má praktický význam: Methoda postupných aproximací vede k řadám, jež se obyčejně nedají sečíst v uzavřeném tvaru. V praxi může dát methoda postupných aproximací pouze přibližné řešení integrální rovnice; v těch případech, kdy se podaří sečíst řadu (10) v uzavřeném tvaru, ukáže se zpravidla možným řešit integrální rovnici speciálním postupem, aniž použijeme obecné theorie.

§ 3. Rovnice Volterrova typu.

Některé úlohy matematické fysiky vedou k Fredholmovým rovnicím speciálního tvaru, nazývaným *rovnice Volterrovy*. Budeme tak nazývat rovnice, jejichž jádra jsou omezená a pro $s > x$ identicky rovna nule. Za těchto předpokladů je v integrálu

$$\int_a^b K(x, s) \, \varphi(s) \, ds$$

intergrand roven nule pro $x < s \leqq b$ a uvedený integrál je roven

$$\int_a^x K(x, s) \, \varphi(s) \, ds.$$

Integrální rovnice typu Volterrova má tedy tvar:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \, \varphi(s) \, ds = f(x). \tag{1}$$

Pro rovnici Volterrova typu platí následující věta.

Věta. *Jestliže pravá strana rovnice Volterrova typu je absolutně integrovatelná, pak postupné aproximace řešení této rovnice konvergují pro všechny hodnoty λ.*

Dokážeme především, že se iterovaná jádra Volterrovy rovnice rovnají nule pro $x < s$ a pro $x > s$ jsou dána vzorcem

$$K_m(x, s) = \int_s^x K(x, t)\, K_{m-1}(t, s)\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Máme

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, \mathrm{d}t.$$

Pro $t > x$ je roven nule prvý činitel za integračním znamením a pro $t < s$ činitel druhý. Jestliže $x < s$, je vždy buď $t > x$, nebo $t < s$ a integrál je roven nule. Jestliže $x > s$, je integrand různý od nuly pouze pro $s < t < x$, a tak dostaneme formuli (2) pro případ $m = 2$. Úplnou indukcí je možno dokázat (2) pro libovolné m.

Podle definice je jádro $K(x, s)$ omezené; nechť $|K(x, s)| < M$. Předpokládejme, že pro nějaké m je správný odhad

$$|K_m(x, s)| < \frac{M^m(x - s)^{m-1}}{(m - 1)!}. \tag{3}$$

Dosadíme-li ve (2) $m + 1$ místo m, dostaneme

$$|K_{m+1}(x, s)| = \left|\int_s^x K(x, t)\, K_m(t, s)\, \mathrm{d}t\right| < \frac{M^{m+1}}{(m - 1)!} \int_s^x (t - s)^{m-1}\, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{M^{m+1}(x - s)^m}{m!},$$

t. j. odhad (3) je správný i pro index $m + 1$. Poněvadž je triviální pro $m = 1$, je správný pro libovolné m. Nahradíme-li ve (3) rozdíl $(x - s)$ jeho největší hodnotou $b - a$, dostaneme

$$|K_m(x, s)| < \frac{M^m(b - a)^{m-1}}{(m - 1)!}.$$

Obecný člen řady (10), § 2 je tedy absolutně menší než

$$\frac{|\lambda|^m M^m(b - a)^{m-1}}{(m - 1)!} \int_a^b |f(s)|\, \mathrm{d}s$$

a odtud plyne absolutní a stejnoměrná konvergence uvedené řady pro libovolné λ.

Je možné uvažovat Volterrovy rovnice, jejichž jádra nejsou omezená, mají však slabou singularitu. Tyto rovnice mají tvar

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x \frac{H(x, s)}{(x - s)^\alpha} \varphi(s) \, ds = f(x); \; 0 < \alpha < 1. \tag{4}$$

Postupné aproximace pro tyto rovnice také konvergují, i když poněkud pomaleji. Dokážeme to.

Nechť $|H(x, s)| < M$, kde M je konstanta, takže

$$|K(x, s)| < \frac{M}{(x - s)^\alpha}.$$

Najdeme odhad pro iterovaná jádra.

Předpokládejme, že pro nějaké m platí odhad

$$|K_m(x, s)| < \frac{M^m (x - s)^{m-1-m\alpha} \Gamma^m(1 - \alpha)}{\Gamma(m - m\alpha)}, \tag{5}$$

kde Γ je známá Eulerova funkce gamma.

Dosadíme-li ve (2) $m + 1$ místo m a odhadneme-li pravou stranu pomocí nerovnosti (5), dostaneme

$$|K_{m+1}(x, s)| < \frac{M^{m+1} \Gamma^m(1 - \alpha)}{\Gamma(m - m\alpha)} \int_s^x (x - t)^{-\alpha} (t - s)^{m-1-m\alpha} \, dt.$$

V posledním integrálu proveďme substituci $t = s + (x - s) v$. Potom

$$|K_{m+1}(x, s)| < \frac{M^{m+1} (x - s)^{m-(m+1)\alpha} \Gamma^m(1 - \alpha)}{\Gamma(m - m\alpha)} \int_0^1 v^{m-1-m\alpha} (1 - v)^{-\alpha} \, dv =$$

$$= \frac{M^{m+1} (x - s)^{m-(m+1)\alpha} \Gamma^{m+1}(1 - \alpha)}{\Gamma(m + 1 - (m + 1) \alpha)}.$$

Odhad (5) je tedy správný i pro $m + 1$. Poněvadž zřejmě platí i pro $m = 1$, platí pro všechna m. Pro dostatečně velká m bude exponent u $(x - s)$ kladný. V tom případě můžeme nahradit $(x - s)$ větší hodnotou $b - a$. Potom pro abs. hodnotu obecného členu řady (10), § 2 platí odhad

$$\frac{|\lambda|^m M^m (b - a)^{m-1-m\alpha} \Gamma^m(1 - \alpha)}{\Gamma(m - m\alpha)} \int_a^b |f(s)| \, ds. \tag{6}$$

Dokážeme, že řada s obecným členem (6) konverguje. Použijeme k tomu Stirlingovy formule

$$\Gamma(p) = \sqrt{\frac{2\pi}{p}}\, p^p \mathrm{e}^{-p+\frac{\vartheta}{12p}}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Označíme-li pro stručnost veličinu (6) a_m, máme

$$\sqrt[m]{a_m} = \frac{|\lambda|\, M(b-a)^{1-\alpha-\frac{1}{m}}\, \Gamma(1-\alpha)[m(1-\alpha)]^{\frac{1}{2m}+\alpha}\, \mathrm{e}^{1-\alpha-\frac{\vartheta}{12m^2(1-\alpha)}}}{m(1-\alpha)(2\pi)^{\frac{1}{2m}}} .$$

$$\cdot\, [\int_a^b |f(s)|\, \mathrm{d}s]^{\frac{1}{m}}.$$

Tento výraz konverguje k nule pro $m \to \infty$; podle Cauchyova kriteria řada (10), § 2 konverguje absolutně a stejnoměrně pro libovolné λ.

Jako příklad budeme uvažovat rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x \mathrm{e}^{x-s}\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = f(x). \tag{7}$$

Vypočteme iterovaná jádra a resolventu. Dostaneme

$$K_2(x, s) = \int_s^x \mathrm{e}^{x-t}\mathrm{e}^{t-s}\, \mathrm{d}t = (x-s)\, \mathrm{e}^{x-s}.$$

Obdobně najdeme

$$K_3(x, s) = \frac{(x-s)^2}{2!}\, \mathrm{e}^{x-s}$$

a obecně

$$K_m(x, s) = \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}\, \mathrm{e}^{x-s}.$$

Nyní

$$\Gamma(s, x; \lambda) = \mathrm{e}^{x-s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} = \mathrm{e}^{(\lambda+1)(x-s)}.$$

Tento vzorec platí pro $s \leq x$; pro $s > x$ je zřejmě $\Gamma(x, s; \lambda) \equiv 0$. Podle vzorce (15), § 2 dostaneme řešení ve tvaru

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \mathrm{e}^{(\lambda+1)(x-s)}\, f(s)\, \mathrm{d}s. \tag{8}$$

Řadu postupných aproximací se podařilo sečíst v uzavřeném tvaru.

Poznamenejme, že se integrální rovnice (7) dá převést na velmi jednoduchou diferenciální rovnici. Derivujeme-li (7), dostaneme:

$$\varphi'(x) - \lambda\,\varphi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-s}\,\varphi(s)\,ds = f'(x). \tag{9}$$

Vyloučíme-li integrál z (9) pomocí (7), dostaneme lineární diferenciální rovnici 1. řádu s neznámou $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) - (\lambda + 1)\,\varphi(x) = f'(x) - f(x).$$

Integrujeme-li ji při počáteční podmínce $\varphi(0) = f(0)$,[1] dostaneme řešení (8).

§ 4. Integrální rovnice s degenerovaným jádrem. Existuje důležitá třída integrálních rovnic, jež se jednoduše řeší převedením na soustavu algebraických rovnic. Budeme nazývat jádro *degenerovaným*, jestliže je součtem konečného počtu sčítanců, z nichž každý je opět součinem dvou činitelů, ze kterých jeden je funkcí pouze x a druhý pouze s. Degenerované jádro má tedy tvar

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,b_i(s); \tag{1}$$

integrální rovnice s degenerovaným jádrem se dá napsat ve tvaru

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(s)\,\varphi(s)\,ds = f(x). \tag{2}$$

Funkce $a_i(x)$ lze považovat za lineárně nezávislé; v opačném případě lze počet sčítanců v (1) snížit. Stejně lze považovat funkce $b_i(s)$ za nezávislé.

Integrální rovnice s degenerovaným jádrem se řeší takto: Označíme

$$c_i = \int_a^b b_i(s)\,\varphi(s)\,ds. \tag{3}$$

Veličiny c_i jsou neznámé konstanty, neboť neznáme funkci $\varphi(x)$. Z rovnice (2) nyní dostaneme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\,a_i(x) \tag{4}$$

---

[1] Tuto počáteční podmínku dostaneme, položíme-li v (7) $x = 0$.

a zbývá ještě určit konstanty c_i. Dosadíme proto výraz (4) do integrální rovnice (2). Po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\{c_i - \int_a^b b_i(s)[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k\, a_k(s)]\, ds\} = 0.$$

Poněvadž funkce $a_i(x)$ jsou lineárně nezávislé, plyne z poslední rovnice:

$$c_i - \int_a^b b_i(s)[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k\, a_k(s)]\, ds = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Označme ještě pro stručnost

$$\int_a^b b_i(s)\, f(s)\, ds = f_i, \quad \int_a^b b_i(s)\, a_k(s)\, ds = a_{ik}.$$

Potom je

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k = f_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Konstanty c_i jsou tedy řešením soustavy lineárních algebraických rovnic. Jejím řešením najdeme i řešení rovnice (2); její řešení je dáno vzorcem (4). Naopak není-li soustava (5) řešitelná, nemá řešení ani integrální rovnice.

Determinant soustavy (5) se rovná

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11}, & -\lambda a_{12}, & \ldots, & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21}, & 1 - \lambda a_{22}, & \ldots, & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ -\lambda a_{n1}, & -\lambda a_{n2}, & \ldots, & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

To je polynom nejvýše n-tého stupně pro λ; není roven identicky nule, neboť pro $\lambda = 0$ má hodnotu 1. Z toho plyne, že existuje nejvýše n různých hodnot, pro něž $D(\lambda) = 0$. Pro tyto hodnoty λ je soustava (5) a s ní i integrální rovnice (2) buď neřešitelná, nebo má nekonečně mnoho řešení. Pro ostatní hodnoty λ má integrální rovnice řešení, a to jediné.

Poznamenejme, že soustavu (5) je možno napsat, aniž dosadíme výraz (4) do rovnice. Stačí vynásobit rovnici (4) $b_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a zintegrovat v mezích od a do b. Zaměníme-li označení i za k a naopak, dostaneme soustavu (5).

Příklad. Budiž dána rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x + s)\, \varphi(s)\, ds = f(x).$$

Její řešení má tvar

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda(c_1 x + c_2).$$

Podle výše vyložené methody dostaneme pro určení konstant c_1 a c_2 soustavu:

$$(1 - \tfrac{1}{2}\lambda)\, c_1 - \lambda c_2 = f_1,$$
$$-\tfrac{1}{3}\lambda c_1 + (1 - \tfrac{1}{2}\lambda)\, c_2 = f_2,$$

kde

$$f_1 = \int_0^1 f(s)\, ds, \quad f_2 = \int_0^1 s\, f(s)\, ds.$$

Determinant této soustavy, rovný $-\frac{1}{12}\lambda^2 - \lambda + 1$, rovná se nule pro dvě hodnoty λ:

$$\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}.$$

Pro λ různé od λ_1 a λ_2 má naše rovnice jediné řešení:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{6(\lambda - 2)(x + s) - 12xs - 4\lambda}{\lambda^2 + 12\lambda - 12} f(s)\, ds.$$

Pro $\lambda = \lambda_1$ nebo $\lambda = \lambda_2$ je naše rovnice obecně neřešitelná. Čtenář snadno najde podmínky, jež musí splňovat funkce $f(x)$, aby řešení existovalo i při těchto výjimečných hodnotách λ, a také najde tvar obecného řešení.

Uvažme ještě rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos s\, \varphi(s)\, ds = f(x).$$

Položíme-li

$$\int_0^{2\pi} \varphi(s) \cos s\, ds = c,$$

máme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda c \sin x.$$

Vynásobme poslední rovnici $\cos x$ a zintegrujme v mezích od 0 do 2π. Pak dostaneme

$$c = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx,$$

a tedy

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos s\, f(s)\, ds.$$

§ 5. Obecný případ Fredholmovy rovnice. Řešení Fredholmovy rovnice v obecném případě je možno převést na řešení rovnice s degenerovaným jádrem. To je možno učinit mnoha způsoby. Napišme na příklad Fourierův rozvoj jádra $K(x, s)$ v dvojnou kosinovou řadu

$$K(x, s) \sim \sum_{i,k=0}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a}. \tag{1}$$

Přitom nepředpokládáme, že Fourierova řada konverguje. Označme nyní

$$\sum_{i,k=0}^{n} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a} = P(x, s),$$

$$K(x, s) - P(x, s) = K'(x, s).$$

Danou integrální rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{2}$$

přepíšeme ve tvaru

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K'(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) + \lambda \int_a^b P(x, s)\, \varphi(s)\, ds. \tag{3}$$

Výraz na pravé straně v (3) budeme dočasně považovat za známý. Potom je možno uvažovat rovnici (3) jako integrální rovnici s jádrem $K'(x, s)$, parametrem λ a pravou stranou

$$f(x) + \lambda \int_a^b P(x, s)\, \varphi(s)\, ds.$$

Dokážeme, že rovnice (3) je řešitelná methodou postupných aproximací, a to za toho jediného předpokladu, že n je dostatečně velké.

Jádru $K'(x, s)$ přísluší Fourierův rozvoj

$$K'(x, s) \sim \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a} + \\ + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a}.$$

Zaveďme označení

$$\int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2\, dx\, ds = B'^2.$$

V důsledku Parsevalovy rovnice

$$B'^2 = \frac{(b-a)^2}{4}\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}|A_{ik}|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|A_{ik}|^2\right\}. \tag{4}$$

Řada (4) je zbytek konvergentní řady

$$\frac{(b-a)^2}{4}\sum_{i,\,k=0}^{\infty}|A_{ik}|^2$$

a pro dostatečně velká n lze její součet učinit libovolně malým. Zvolíme n tak, aby byla splněna nerovnost

$$B' < 1 : |\lambda|.$$

Podle věty § 2 lze rovnici (3) řešit methodou postupných aproximací; existuje resolventa

$$\Gamma'(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1} K'_m(x, s)^{1}$$

a řešení rovnice (2) lze napsat podle vzorce (15), § 2:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b P(x, s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)[f(t) +$$
$$+ \lambda\int_a^b P(t, s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s]\,\mathrm{d}t.$$

Zaveďme označení

$$f(x) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)\,f(t)\,\mathrm{d}t = F(x),$$

$$P(x, s) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)\,P(t, s)\,\mathrm{d}t = K''(x, s). \tag{5}$$

Potom poslední rovnice nabývá tvaru

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K''(x, s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s = F(x). \tag{6}$$

To je integrální rovnice s neznámou $\varphi(s)$, jež je ekvivalentní rovnici (3). Dokážeme, že její jádro $K''(x, s)$ je degenerované. Skutečně, $P(x, s)$ je trigonometrický polynom. Vyjádříme jej ve tvaru

$$P(x, s) = \sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi x}{b-a}\,b_i(s),$$

---

[1] $K'_m(x, s)$ jsou iterovaná jádra, získaná z jádra $K'(x, s)$.

kde

$$b_i(s) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cos \frac{k\pi s}{b-a}.$$

Dále

$$\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda)\, P(t, s)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} b_i(s) \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \cos \frac{i\pi t}{b-a}\, \mathrm{d}t.$$

Zavedeme-li nyní označení

$$a_i(x) = \cos \frac{i\pi x}{b-a} + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \cos \frac{i\pi t}{b-a}\, \mathrm{d}t,$$

můžeme napsat

$$K''(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s);$$

jádro $K''(x, s)$ je skutečně degenerované. Způsobem uvedeným v § 4 převedeme integrální rovnici na soustavu lineárních algebraických rovnic.

Uvedený způsob není ovšem jediný možný; obecnou Fredholmovu rovnici převedeme na rovnici s degenerovaným jádrem, jestliže jakýmkoliv způsobem rozložíme jádro na dva sčítance:

$$K(x, s) = P(x, s) + K'(x, s), \tag{*}$$

z nichž prvý má charakter degenerovaného jádra a druhý splňuje nerovnost

$$B'^2 = \int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s < \frac{1}{|\lambda|^2}.$$

Vyloženého způsobu se v praxi užívá v tomto zjednodušeném tvaru.

Nechť rozklad (*) je takový, že

$$\int_a^b |K'(x, s)|^2\, \mathrm{d}s \leqq C',$$

kde C' je dostatečně malá konstanta. Připustíme-li, že daná integrální rovnice má řešení, vidíme, že integrál

$$\int_a^b K'(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s$$

je také malý. V důsledku Buňakovského nerovnosti skutečně máme

$$\left|\int_a^b K'(x, s)\,\varphi(s)\,ds\right|^2 \leq \int_a^b |K'(x, s)|^2\,ds \int_a^b |\varphi^2(s)|\,ds \leq C' \int_a^b |\varphi^2(s)|\,ds.$$

Zanedbáme-li tuto malou veličinu, dostaneme místo rovnice (3) hned rovnici s degenerovaným jádrem:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b P(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x).$$

Postup tedy spočívá v tom, že nahradíme jádro blízkým jádrem degenerovaným, aniž měníme pravou stranu rovnice, při čemž stupeň blízkosti jader je určen veličinou C'.

Uvažujme další příklad. Řešení Dirichletova problému pro konečnou rovinnou oblast ohraničenou křivkou L může být převedeno na řešení integrální rovnice[1]

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r}\,\mu(\tau)\,d\sigma = f(t). \tag{7}$$

Zde jsou t a τ hodnoty parametru, jenž určuje polohu bodu na křivce L; r je vzdálenost mezi body, jež odpovídají těmto hodnotám parametru; ν je vnější normála k L v bodě τ; $d\sigma$ je element oblouku L; konečně $\mu(t)$ je neznámá a $f(t)$ daná funkce.

Ve druhé části bude dokázáno, že rovnice (7) má řešení pro libovolnou funkci $f(t)$.

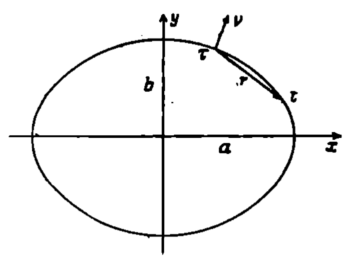
Řešme přibližně rovnici (7) za předpokladu, že hranice oblasti je elipsa s poloosami a a b (obr. 1). Její parametrické rovnice jsou

$$x = a\cos\tau, \quad y = b\sin\tau;$$

parametr τ se mění od 0 do 2π. Určeme jádro rovnice. Především

$$r^2 = a^2(\cos t - \cos\tau)^2 + b^2(\sin t - \sin\tau)^2 =$$
$$= 4a^2 \sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right),$$

kde $\varepsilon = \dfrac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ je číselná excentricita elipsy. Dále



Obr. 1.

[1] Viz část II, kap. I, § 29.

$$\cos(\nu, r)\, d\sigma = [\cos(\nu, x)\cos(r, x) + \cos(\nu, y)\cos(r, y)]\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{r}[a(\cos t - \cos\tau)\, dy - b(\sin t - \sin\tau)\, dx] =$$
$$= \frac{ab}{r}[\cos\tau(\cos t - \cos\tau) + \sin\tau(\sin t - \sin\tau)]\, d\tau =$$
$$= -\frac{2ab}{r}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\, d\tau.$$

Nyní

$$\frac{1}{r}\cos(\nu, r)\, d\sigma = -\frac{b}{2a}\frac{d\tau}{1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}} =$$
$$= -\frac{b}{2a}\left(1 + \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2} + \varepsilon^4\cos^4\frac{t+\tau}{2} + \ldots\right) d\tau. \tag{8}$$

Tím, že se v napsané řadě omezíme na konečný počet členů, nahradíme jádro naší rovnice jádrem degenerovaným. Řešit rovnici je už potom lehké. Provedeme další výpočty za předpokladu, že excentricita je malá, takže je možno se omezit na členy s ε^2.

Máme tedy řešit rovnici

$$\mu(t) + \frac{b}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\left(1 + \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)\mu(\tau)\, d\tau = f(t).$$

Dosadíme-li $\frac{1}{2}[1 + \cos(t+\tau)]$ za $\cos^2\frac{1}{2}(t+\tau)$, dostaneme:

$$\mu(t) + \int_0^{2\pi}(\alpha + \beta\cos t\cos\tau - \beta\sin t\sin\tau)\,\mu(\tau)\, d\tau = f(t). \tag{9}$$

Zde jsme označili .

$$\alpha = \frac{b}{2\pi a}(1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2),\ \beta = \frac{b\varepsilon^2}{4\pi a}.$$

Z (9) plyne, že

$$\mu(t) = f(t) - c_1 - c_2\cos t - c_3\sin t, \tag{10}$$

kde

$$c_1 = \alpha\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\, d\tau,\ c_2 = \beta\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\cos\tau\, d\tau,$$
$$c_3 = -\beta\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\sin\tau\, d\tau.$$

Vynásobíme-li (10) výrazy α, $\beta \cos\tau$ a $-\beta \sin\tau$ a zintegrujeme-li ji v mezích od 0 do 2π, dostaneme následující rovnice pro neznámé c_1, c_2, c_3:

$$c_1 = f_1 - 2\pi\alpha c_1,$$
$$c_2 = f_2 - \pi\beta c_2,$$
$$c_3 = f_3 + \pi\beta c_3,$$

kde

$$f_1 = \alpha \int_0^{2\pi} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad f_2 = \beta \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos\tau\,\mathrm{d}\tau, \quad f_3 = -\beta \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin\tau\,\mathrm{d}\tau.$$

Odtud najdeme

$$c_1 = \frac{f_1}{1 + 2\pi\alpha}, \quad c_2 = \frac{f_2}{1 + \pi\beta}, \quad c_3 = \frac{f_3}{1 - \pi\beta}. \tag{11}$$

Užijeme-li téhož postupu, není obtížné nalézt i přesnější řešení. Stačí ponechat v rozvoji jádra vyšší mocniny ε. Můžeme získat i přesné řešení, avšak ve tvaru nekonečné řady. Abychom toto řešení dostali, užijeme tohoto postupu: Rozvineme funkci

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\vartheta}$$

ve Fourierovu řadu. Tato funkce je sudá; mimo to se nemění, položíme-li $\vartheta + \pi$ za ϑ. Z toho lze lehko usoudit, že její Fourierova řada má tvar

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\vartheta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2k\vartheta$$

neboli

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\vartheta} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} \mathrm{e}^{2ik\vartheta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} \mathrm{e}^{-2ik\vartheta}.$$

Odtud, podle známých vzorců,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

$$\tfrac{1}{2} a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{2ik\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta}{1 - \varepsilon^2 \cos^2\vartheta}, \quad k \geqq 1.$$

Abychom vypočetli poslední integrál, položíme $e^{i\vartheta} = z$. Po elementárních úpravách dostaneme

$$\tfrac{1}{2}a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{4z^{2k+1}\,dz}{4z^2 - \varepsilon^2(z^2+1)^2},$$

kde γ je kružnice $|z| = 1$. Uvnitř γ leží póly integrované funkce

$$z_1 = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad z_2 = -z_1 = -\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Residua mají v pólech z_1 a z_2 stejnou hodnotu, a to

$$\frac{\varepsilon^{2k}}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^{2k}}.$$

Odtud najdeme

$$a_k = \frac{2\varepsilon^{2k}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^{2k}}, \quad k \geqq 1.$$

Hledaný rozvoj má tvar

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{2k}\cos 2k\vartheta\right].$$

Nyní

$$\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)^{-1} = \frac{a}{b}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\,(\cos kt\cos k\tau - \sin kt\sin k\tau)\right],$$

kde c je výstřednost elipsy; naše integrální rovnice nabude tvaru

$$\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\cos kt\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\cos k\tau\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\sin kt\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\sin k\tau\,d\tau = f(t). \qquad (12)$$

Označme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\,d\tau = A_0,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\cos k\tau\,d\tau = A_k,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\sin k\tau\,d\tau = B_k.$$

Potom, jak plyne z (12),

$$\mu(t) = f(t) - A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k} (A_k \cos kt - B_k \sin kt). \tag{13}$$

Znásobíme-li (13) postupně výrazy $\frac{1}{2\pi}$, $\frac{\cos kt}{\pi}$ a $\frac{\sin kt}{\pi}$ a zintegrujeme-li ji, najdeme

$$A_0 = \tfrac{1}{2}F_0, \quad A_k = \frac{(a+b)^k F_k}{(a+b)^k + (a-b)^k}, \quad B_k = \frac{(a+b)^k F'_k}{(a+b)^k - (a-b)^k}, \tag{14}$$

kde F_0, F_k a F'_k jsou Fourierovy koeficienty funkce $f(t)$:

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, d\tau, \quad F_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos k\tau\, d\tau, \tag{15}$$

$$F'_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin k\tau\, d\tau.$$

Pro kružnici $c = 0$ a řešení má tvar

$$\mu(t) = f(t) - A_0 = f(t) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

Toto poslední řešení však dostaneme jednoduše̍ji přímo. Skutečně, pro kružnici $a = b$, $\varepsilon = 0$ a rovnice (7) nabývá tvaru

$$\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau)\, d\tau = f(t).$$

Odtud

$$\mu(t) = f(t) - c, \quad c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\tau)\, d\tau.$$

Integrujeme-li poslední rovnici v mezích $\langle 0, 2\pi \rangle$, najdeme

$$c = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, d\tau,$$

což znovu dává vzorec (16).

§ 6. Soustavy integrálních rovnic. V aplikacích se často setkáváme se soustavami integrálních rovnic. Taková soustava má tvar

$$\varphi_i(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b K_{ik}(x, s)\, \varphi_k(s)\, \mathrm{d}s = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Theorie a také methody řešení soustav integrálních rovnic jsou tytéž jako pro jednu rovnici. Tak postupné aproximace konvergují pro malá λ, speciálně jestliže λ vyhovuje nerovnosti

$$|\lambda| < \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K_{ik}(x, s)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s} \right\}^{-1} \tag{2}$$

a integrály

$$\int_a^b |K_{ik}(x, s)|^2\, \mathrm{d}s$$

jsou omezené. Jestliže jádra $K(x, s)$ jsou degenerovaná, převede se soustava (1) na soustavu lineárních algebraických rovnic. V obecném případě se soustava (1) převede na soustavu s degenerovanými jádry methodami vyloženými v § 5.

Soustavu integrálních rovnic lze nahradit jedinou rovnicí takto: Uvažujme proměnné x a s, probíhající interval $\langle a, nb - (n - 1)\, a \rangle$, jehož délka je n-krát větší než délka počátečního intervalu $\langle a, b \rangle$. Definujme funkce $\Phi(x)$, $F(x)$, $K(x, s)$ ve zmíněném intervalu vzorci:

$$\Phi(x) = \varphi_i(x - (i - 1)(b - a)),$$

když

$$(i - 1)\, b - (i - 2)\, a \leqq x < ib - (i - 1)\, a;$$

$$F(x) = f_i(x - (i - 1)(b - a)),$$

když

$$(i - 1)\, b - (i - 2)\, a \leqq x < ib - (i - 1)\, a;$$

$$K(x, s) = K_{ik}(x - (i - 1)(b - a), s - (k - 1)(b - a)),$$

když

$$\begin{cases} (i - 1)\, b - (i - 2)\, a \leqq x < ib - (i - 1)\, a, \\ (k - 1)\, b - (k - 2)\, a \leqq s < kb - (k - 1)\, a. \end{cases}$$

Při takové definici se soustava (1) převede na jedinou rovnici

$$\Phi(x) - \lambda \int_a^{nb-(n-1)a} K(x, s)\, \Phi(s)\, \mathrm{d}s = F(x). \tag{3}$$

§ 7. Užití přibližného integrování. Nahrazení daného jádra degenerovaným nám umožňuje najít řešení ve tvaru vzorce vhodného pro celý interval $a \leqq x \leqq b$ a pro libovolné hodnoty parametru λ. Vážným nedostatkem tohoto způsobu se jeví nutnost výpočtu kvadratur, někdy značně obtížných a četných. Stejný nedostatek má i methoda postupných aproximací. Vyložíme nyní methodu přibližného řešení integrálních rovnic, jež nevyžaduje výpočtu kvadratur.

Nechť v rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{1}$$

jsou jádro $K(x, s)$ i pravá strana $f(x)$ spojité pro $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq s \leqq b$. Potom je $\varphi(x)$ také spojitá. Integrál

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds$$

nahradíme konečným součtem podle některého ze vzorců pro přibližný výpočet integrálů, na příklad podle vzorce vztaženého na dělení obdélníkové

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds \approx h \sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\, \varphi(x_k),$$

kde

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh.$$

V přibližné rovnici

$$\varphi(x) - \lambda h \sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\, \varphi(x_k) = f(x)$$

dosadíme za x hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Dostaneme tak soustavu lineárních algebraických rovnic s neznámými $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_k)$:

$$\varphi(x_i) - \lambda h \sum_{k=1}^{n} K(x_i, x_k)\, \varphi(x_k) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Řešením této soustavy dostaneme přibližné hodnoty neznámé funkce $\varphi(x)$ v bodech x_1, x , ..., x_k. Užijeme-li kterékoliv z interpolačních method, dostaneme přibližné vyjádření $\varphi(x)$ v celém intervalu. Nejjednodušeji se ovšem přibližné vyjádření dostane přímo z integrální rovnice: nahradíme-li v ní integrál konečným součtem, dostaneme přibližné vyjádření

$$\varphi(x) \approx f(x) + \lambda h \sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\, \varphi(x_k).$$

Místo obdélníkové methody je ovšem možno užít i jiných vzorců pro přibližný výpočet integrálu. Mnohem přesnější výsledky dostaneme, užijeme-li vzorce Simpsonova nebo ještě lépe Gaussova.

Když $n \to \infty$, výraz $\varphi(x)$ nalezený naznačeným způsobem má za limitu řešení integrální rovnice (1) za předpokladu, že řešení existuje a je jediné. Důkaz je možno najít na příklad v knize L. V. Kantoroviče a V. I. Krylova [42].

Řešme uvedeným způsobem rovnici (7), § 5 pro elipsu. Aby bylo možno všechny výpočty provést až do konce, udejme číselné hodnoty veličin a a b a zvolme určitou funkci $f(t)$. Nechť na př.

$$a = 5,\ b = 3,\ f(t) = x^2 + y^2 = 25 \cos^2 t + 9 \sin^2 t.$$

Naše rovnice přibližně zní

$$\mu(t) + 0{,}10 \int_0^{2\pi} \mu(\tau) \frac{\mathrm{d}\tau}{1 - 0{,}64 \cos^2 \dfrac{t+\tau}{2}} = 25\cos^2 t + 9\sin^2 t$$

neboli, užijeme-li periodičnosti funkce $\mu(t)$,

$$\mu(t) + \int_{-\pi}^{+\pi} \mu(\tau) \frac{\mathrm{d}\tau}{6{,}8 - 3{,}2 \cos(t+\tau)} = 25 - 16 \sin^2 t. \tag{3}$$

Pravá strana nabývá stejných hodnot v bodech symetricky položených vzhledem k osám souřadnic. Není obtížné zjistit pomocí vzorce (13), § 5, že tuto vlastnost má také $\mu(t)$, t. j. že

$$\mu(\pi - t) = \mu(-t) = \mu(t). \tag{4}$$

Zřejmě také má $\mu(t)$ periodu 2π. Stačí tedy určit $\mu(t)$ v intervalu $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\pi$.

Vezměme $n = 12$, takže $h = \frac{1}{6}\pi$. Označme pro stručnost

$$\mu(0) = y_1,\ \mu(\tfrac{1}{6}\pi) = y_2,\ \mu(\tfrac{1}{3}\pi) = y_3,\ \mu(\tfrac{1}{2}\pi) = y_4.$$

Soustava (2) v našem případě zní:

$$\begin{aligned}1{,}19y_1 + 0{,}35y_2 + 0{,}31y_3 + 0{,}15y_4 &= 25,\\ 0{,}18y_1 + 1{,}34y_2 + 0{,}32y_3 + 0{,}16y_4 &= 21,\\ 0{,}16y_1 + 0{,}32y_2 + 1{,}34y_3 + 0{,}18y_4 &= 13,\\ 0{,}15y_1 + 0{,}31y_2 + 0{,}35y_3 + 1{,}19y_4 &= 9.\end{aligned} \tag{5}$$

Řešení je

$$y_1 = 16{,}04;\ y_2 = 12{,}27;\ y_3 = 4{,}73;\ y_4 = 0{,}94.$$

V našem případě je nejlépe interpolovat pomocí Fourierova rozvoje, neboť funkce $\mu(t)$ je periodická. Protože $\mu(t)$ splňuje relace (4), má její Fourierův rozvoj tvar

$$\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kt.$$

Ponechme v této řadě pouze prvé čtyři členy. Známe-li čtyři hodnoty funkce $\mu(t)$, můžeme vypočítat čtyři koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3. Obvyklým způsobem najdeme

$$a_0 = 8{,}50;\ a_1 = 7{,}54;\ a_2 = 0;\ a_3 = 0;$$

$$\mu(t) \approx 8{,}50 + 7{,}54 \cos 2t. \tag{6}$$

Porovnejme (6) s přesným řešením nalezeným v § 5, vzorce (13) až (15). V našem případě

$$f(t) = 25 - 16 \sin^2 t = 17 + 8 \cos 2t,$$

takže $F_0 = 17$, $F_2 = 8$ a všechny ostatní Fourierovy koeficienty jsou rovny nule. Podle vzorců (14), § 5

$$A_0 = 8{,}50;\ A_2 = 7{,}53.$$

Ostatní koeficienty A_k a všechny B_k jsou rovny nule. Tudíž

$$\mu(t) = 8{,}50 + 7{,}53 \cos 2t.$$

Přibližné řešení (6), jak vidíme, je prakticky shodné s přesným; maximální relativní chybu dostaneme pro $t = \frac{1}{2}\pi$ a ta činí přibližně 1%. Pro $t = 0$ je relativní chyba menší než 0,07%.

§ 8. Fredholmovy věty. Už jsme viděli, že integrální rovnice není obecně řešitelná v uzavřené formě. Obyčejně je při řešení integrálních rovnic třeba použít přibližných method. Při tom, jak bylo poznamenáno v §§ 5 a 7, můžeme přibližných method s jistotou užít jen tehdy, když byla řešitelnost rovnice dokázána již dříve, při čemž máme na mysli řešitelnost při libovolné pravé straně. Proto nabývá velkého významu rozbor rovnice, jenž předchází jejímu vlastnímu řešení. Tento rozbor lze vždy provést pomocí obecných vět o integrálních rovnicích, jež byly dokázány Fredholmem. Takové věty jsou čtyři.

Budeme užívat následujícího názvosloví. Hodnoty λ, pro něž existuje resolventa Fredholmovy rovnice, budeme nazývat *regulární* a hodnoty λ, pro něž resolventa neexistuje, nazveme *charakteristické.* Převrácené hodnoty charakteristických čísel se nazývají *vlastními hodnotami rovnice.*

Je zřejmé, že homogenní rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = 0 \tag{1}$$

má pro regulární λ pouze triviální řešení $\varphi(x) = 0$.

Předpokládejme, že homogenní rovnice (1) má netriviální řešení; podle věty (1) je to možné jen tehdy, když hodnota λ je charakteristická. Jestliže $\varphi_1(x)$ je řešením rovnice (1), pak $c\, \varphi_1(x)$, kde c je libovolná konstanta, je také řešením; jestliže $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou dvě taková řešení, je jejich součet $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ také řešení. Tudíž když $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ vyhovují homogenní rovnici (1), pak jejich libovolná lineární kombinace

$$c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \ldots + c_k \varphi_k(x)$$

jí vyhovuje také. Jestliže má tedy homogenní integrální rovnice alespoň jedno netriviální řešení (t. j. takové, jež není identicky rovno nule), má jich nekonečně mnoho. Netriviální řešení homogenní integrální rovnice se nazývají *vlastními* nebo *charakteristickými* funkcemi jádra $K(x, s)$ (nebo rovnice), odpovídajícími danému charakteristickému číslu.

Vyslovíme nejprve všechny Fredholmovy věty, potom uvedeme některá dobře známá tvrzení lineární algebry a jejich pomocí dokážeme Fredholmovy věty.

Věta 1. *V libovolné omezené části komplexní roviny λ existuje pouze konečná množina charakteristických čísel Fredholmovy integrální rovnice*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = f(x). \tag{2}$$

Věta 2. *Ke každému charakteristickému číslu patří alespoň jedna charakteristická funkce. Počet lineárně nezávislých charakteristických funkcí, jež příslušejí danému charakteristickému číslu, je konečný.*

Dříve než vyslovíme dvě zbývající Fredholmovy věty, zavedeme nový pojem, jenž hraje důležitou úlohu v theorii integrálních rovnic. Jádro $\overline{K(s, x)}$, jež dostaneme z daného jádra $K(x, s)$ výměnou proměnných a přechodem k funkci komplexně sdružené, nazývá se *konjugované* s daným jádrem a rovnice

$$\psi(x) - \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, ds = g(x) \tag{3}$$

se nazývá konjugovanou s rovnicí (1) a také s ní příslušnou nehomogenní rovnicí. Konjugovaná rovnice se dostane z dané záměnou jádra za konjugované a záměnou parametru za komplexně sdružený; pravá strana $g(x)$ je úplně libovolná.[1]

Poznamenejme, že konjugovanost je reflexivní, takže rovnice (1) je konjugovaná s (3).

Jestliže jádro $K(x, s)$ je reálné, dostane se konjugované jádro prostou výměnou proměnných.

Věta 3. *Jestliže λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$, pak $\overline{\lambda_0}$ je charakteristické číslo konjugovaného jádra $\overline{K(s, x)}$. Počet lineárně nezávislých charakteristických funkcí rovnice*

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0 \tag{4}$$

a rovnice s ní konjugované

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, ds = 0 \tag{5}$$

je tentýž.

---

[1] V učebnicích integrálních rovnic se konjugovaná rovnice obyčejně píše ve tvaru

$$\omega(x) - \lambda \int_a^b K(s, x)\, \omega(s) ds = h(x);$$

tuto formu konjugované rovnice dostaneme tím, že položíme $\omega(x) = \overline{\psi(x)}$, $h(x) = \overline{g(x)}$ a nahradíme všechny členy rovnice (3) komplexně sdruženými.

V dalším hraje důležitou úlohu pojem skalárního součinu. *Skalárním součinem* (φ, ψ) dvou funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ se nazývá integrál

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} \, dx.$$

Uveďme několik jednoduchých vlastností skalárního součinu, jež vyplývají bezprostředně z jeho definice.

a) Jestliže $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou součtem několika sčítanců, provede se skalární násobení podle pravidla o násobení mnohočlenů. Tak na př.:

$$(\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2) = (\varphi_1, \psi_1) + (\varphi_1, \psi_2) + (\varphi_2, \psi_1) + (\varphi_2, \psi_2).$$

b) Při záměně činitelů se součin stane komplexně sdruženým:

$$(\psi, \varphi) = \overline{(\varphi, \psi)}.$$

c) Konstantní koeficient u prvého činitele lze vytknout před skalární součin:

$$(\lambda\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi).$$

d) Konstantní koeficient u druhého činitele lze vytknout před skalární součin, když jej před tím nahradíme komplexně sdruženým:

$$(\varphi, \lambda\psi) = \overline{\lambda}(\varphi, \psi).$$

e) Skalární součin funkce se sebou samou je veličina nezáporná:

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b |\varphi^2(x)| \, dx \geqq 0;$$

rovná se nule, když a jen když $\varphi \equiv 0$.

Dvě funkce φ a ψ se nazývají *orthogonální* v intervalu $\langle a, b \rangle$, když

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\psi(x)} \, dx = 0.$$

Jestliže jsou tyto funkce reálné, je podmínka orthogonality jednodušší a nabývá tvaru

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) \, dx = 0.$$

Veličina $\sqrt{(\varphi, \varphi)}$ se nazývá *normou* $\varphi(x)$ a značí se $\|\varphi\|$.

Funkce, jejichž norma se rovná jedné, se nazývají *normované.*

Uveďme některé důležité vlastnosti normy. Zřejmě norma libovolné funkce je nezáporná; rovnost normy nule je ekvivalentní s indentickým vymizením příslušné funkce. Dále je zřejmé, že $\|a\varphi\| = |a| \cdot \|\varphi\|$, jestliže a je konstanta. Užijeme-li na integrál

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x$$

Buňakovského nerovnosti, dostaneme

$$|(\varphi, \psi)|^2 \leqq \left(\int_a^b |\varphi(x)| \cdot |\psi(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqq \int_a^b |\varphi^2(x)|\,\mathrm{d}x \int_a^b |\psi^2(x)|\,\mathrm{d}x$$

a odtud

$$|(\varphi, \psi)| \leqq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|.$$

Poslední nerovnost budeme také nazývat nerovností Buňakovského.

Uvažujme nyní veličinu

$$\|\varphi + \psi\| = (\varphi + \psi, \varphi + \psi) = (\varphi, \varphi) + (\varphi, \psi) + (\psi, \varphi) + (\psi, \psi).$$

Aplikujeme-li nerovnost Buňakovského na dva střední členy, dostaneme

$$\|\varphi + \psi\|^2 \leqq \|\varphi\|^2 + 2\|\varphi\| \cdot \|\psi\| + \|\psi\|^2;$$

odtud plyne t. zv. *trojúhelníková nerovnost*

$$\|\varphi + \psi\| \leqq \|\varphi\| + \|\psi\|.$$

Vlastností normy zde vytčené široce využijeme v kap. II.

V dalším budeme užívat označení

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Integrál, jenž se vyskytuje v konjugované rovnici, budeme označovat $K^*\psi$:

$$K^*\psi = \int_a^b \overline{K(s, x)}\,\psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Výraz $K\varphi$ budeme nazývat *Fredholmovým operátorem* a výraz $K^*\psi$ operátorem *konjugovaným* s $K\varphi$. Je zřejmé, že $K\varphi$ je operátor konjugovaný s $K^*\psi$. Konjugované operátory jsou spolu vázány velmi důležitým vztahem

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K^*\psi). \tag{6}$$

Skutečně

$$(K\varphi, \psi) = \int_a^b \{\overline{\psi(x)} \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds\}\, dx = \int_a^b \varphi(s)\, \{\int_a^b K(x, s)\, \overline{\psi(x)}\, dx\}\, ds$$

čili, když nahradíme x za s a naopak,

$$(K\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \{\int_a^b K(s, x)\, \overline{\psi(s)}\, ds\}\, dx.$$

Avšak

$$\int_a^b K(s, x)\, \overline{\psi(s)}\, ds = \overline{\int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, ds} = \overline{K^*\psi},$$

a tedy

$$(K\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\, \overline{K^*\psi}\, dx = (\varphi, K^*\psi).$$

Jestliže $K\varphi$ a $L\varphi$ jsou dva operátory tvaru

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds, \quad L\varphi = \int_a^b L(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

pak, jak je lehce vidět, $K(L\varphi)$ je operátor téhož tvaru, totiž

$$K(L\varphi) = \int_a^b M(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

kde

$$M(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, L(t, s)\, dt.$$

Budeme psát $KL\varphi$ místo $K(L\varphi)$. Poznamenejme, že obecně $KL\varphi \neq LK\varphi$. Dále budeme značit $K^2\varphi = KK\varphi$, $K^3 = KK^2\varphi$ atd. Zřejmě

$$K^n\varphi = \int_a^b K_n(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

kde $K_n(x, s)$ je n-té iterované jádro příslušející jádru $K(x, s)$.

Není obtížné nahlédnout, že

$$(KL)^*\, \varphi = L^*K^*\varphi.$$

Skutečně podle vzorce (6)

$$(KL\psi, \varphi) = (\psi, (KL)^*\, \varphi).$$

Na druhé straně, podle téhož vzorce (6),

$$(KL\psi, \varphi) = (L\psi, K^*\varphi) = (\psi, L^*K^*\varphi).$$

Porovnáním obou výsledků dostaneme

$$(\psi, (KL)^* \varphi - L^*K^*\varphi) = 0.$$

Funkce $\omega(x) = (KL)^* \varphi - L^*K^*\varphi$, která je orthogonální k libovolné funkci ψ, je orthogonální speciálně k sobě samé. Tudíž

$$0 = (\omega, \omega) = \int_a^b |\omega^2(x)| \, dx,$$

odkud $\omega(x) \equiv 0$, a tedy $(KL)^* \varphi = L^*K^*\varphi$. Z dokázané rovnice mezi jiným plyne, že $(K^n)^* = (K^*)^n$, t. j. jádro konjugované s n-tým iterovaným je n-tým iterovaným jádrem pro konjugované.

Pomocí pojmu orthogonality můžeme formulovat čtvrtou Fredholmovu větu.

Věta 4. *Nechť λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$. Aby nehomogenní rovnice*

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \varphi(s) \, ds = f(x) \tag{7}$$

měla řešení, je nutné a stačí, aby její pravá strana $f(x)$ byla orthogonální ke všem charakteristickým funkcím konjugované homogenní rovnice

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K(s, x)} \psi(s) \, ds = 0.$$

Uveďme nyní bez důkazu některé věty z theorie lineárních algebraických rovnic. Podrobný výklad těchto otázek čtenář najde na př. v knize V. I. Smirnova, Kurs vyšší matematiky, sv. III.

Každou soustavu n komplexních čísel, napsaných v určitém pořádku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, budeme nazývat *vektor* a budeme ji označovat písmenem se šipkou nahoře. Definujme pro vektory sčítání, násobení číslem a skalární součin vzorci

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda\vec{x} &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \\ (\vec{x}, \vec{y}) &= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}. \end{aligned}$$

Jestliže $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, pravíme, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou orthogonální.

Vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ nazýváme nulovým a značíme obvyklým symbolem 0. Vektory $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}$ nazýváme lineárně nezávislé, jestliže rovnost

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \vec{x}^{(j)} = 0$$

je splněna pouze tehdy, když všechna čísla c_j jsou rovna nule. V opačném případě se vektory nazývají lineárně závislé.

Soustavu lineárních rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_j, \; j = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

je možno uvažovat jako jedinou rovnici pro neznámý vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, je-li dán vektor $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Soustava

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{kj} y_k = g_j, \; j = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

se nazývá konjugovanou k soustavě (8). Determinanty dvou konjugovaných soustav mají hodnoty komplexně sdružené.

Platí následující věty:

a) Jestliže determinant soustavy je různý od nuly, potom jak soustava daná, tak i soustava k ní konjugovaná jsou řešitelné, a to jednoznačně pro libovolné pravé strany soustavy. Speciálně homogenní soustava má pouze nulové řešení.

b) Jestliže determinant soustavy je roven nule, má homogenní soustava řešení různá od nulového.[1] Počet lineárně nezávislých řešení dvou homogenních konjugovaných soustav je tentýž; leží mezi jednotkou a n. Jestliže $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(r)}$ jsou různá lineárně nezávislá řešení homogenní soustavy, potom její obecné řešení je

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{r} c_j \vec{x}^{(j)},$$

kde c_j jsou libovolné konstanty.

---

[1] Taková řešení soustavy budeme nazývat *netriviální* na rozdíl od triviálního — nulového.

c) Jestliže determinant soustavy (8) je roven nule, je tato řešitelná, když a jen když je vektor $\vec{b}$ orthogonální ke všem řešením homogenní konjugované soustavy. Obecné řešení soustavy (8) má tvar

$$\vec{x} = \vec{x}^{(0)} + \sum_{j=1}^{r} c_j \vec{x}^{(j)},$$

kde c_j a $\vec{x}^{(j)}$ mají tentýž význam jako ve větě b) a $\vec{x}^{(0)}$ je libovolné partikulární řešení soustavy (8).

Přistupme k důkazu Fredholmových vět. Jak bylo dokázáno v § 5, Fredholmova rovnice obecného tvaru vede na rovnici s ní ekvivalentní, avšak s degenerovaným jádrem, která opět vede na lineární algebraickou soustavu. Nechť λ leží v kruhu $|\lambda| \leqq R$. Jestliže ve shodě s § 5 provedeme rozložení jádra tak, aby bylo $B' < 1 : (R + 1)$, budou koeficienty a pravé strany ve výše uvedené soustavě holomorfními funkcemi λ v témže kruhu $|\lambda| \leqq R$. Dále determinant soustavy není roven identicky nule, neboť nabývá hodnoty jedna pro $\lambda = 0$. Potom však determinant, protože je holomorfní funkcí λ vkruhu $|\lambda| \leqq R$, může mít v tomto kruhu pouze konečný počet nulových bodů. V důsledku věty a) budou všechny zbývající hodnoty λ v uvedeném kruhu regulární. Tím je prvá věta Fredholmova dokázána.

Poznámka 1. Z prvé Fredholmovy věty plyne důsledek, který je s ní ekvivalentní:

Množina charakteristických čísel Fredholmovy integrální rovnice je buď konečná, nebo spočetná; v posledním případě rostou charakteristická čísla do nekonečna spolu se svým indexem.

Poznámka 2. Jestliže je jádro degenerované, je shora uvedený determinant polynom v λ. Odtud plyne, že degenerované jádro má konečný počet charakteristických čísel.

Druhá věta Fredholmova plyne přímo z věty b). Skutečně, nechť $\lambda = \lambda_0$ je charakteristické číslo. Potom determinant soustavy (5), § 4 je roven nule a příslušná homogenní soustava má určitý počet r, $1 \leqq r \leqq n$, lineárně nezávislých řešení $\vec{c}^{(j)} = (c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \ldots, c_n^{(j)})$. Podle vzorce (4), § 4 přísluší každému z nich řešení homogenní integrální rovnice

$$\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(j)} a_i(x).$$

Tato řešení jsou lineárně nezávislá: skutečně, nechť $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \varphi_j(x) = 0$. Dosadíme-li sem hodnoty $\varphi_j(x)$ a užijeme-li lineární nezávislosti funkcí $a_i(x)$, najdeme, že

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j c_i^{(j)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

čili, což je totéž,

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \vec{c}^{(j)} = 0.$$

Poněvadž vektory $\vec{c}^{(j)}$ jsou lineárně nezávislé, je $\alpha_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, a tedy $\varphi_j(x)$ jsou také lineárně nezávislé. Jiných řešení homogenní Fredholmova rovnice zřejmě nemá.

Číslo r se nazývá *hodnost* charakteristického čísla.

Třetí Fredholmova věta plyne jednoduše z věty b) v tom případě, když jádro rovnice je degenerované. Stačí si jen všimnout, že se konjugované integrální rovnice v tomto případě převádějí podle § 4 na konjugované lineární soustavy, které v důsledku věty b) mají stejný počet lineárně nezávislých řešení.

Tuto úvahu nelze provést přímo pro Fredholmovy rovnice s libovolným jádrem, protože, převedeme-li podle § 5 dvě konjugované rovnice na rovnice s degenerovanými jádry, přesvědčíme se, že tyto poslední konjugované nejsou. Abychom se vyhnuli této překážce, budeme postupovat takto: Na rovnici (4) užijeme postupu z § 5 a ten nás přivede k ekvivalentní rovnici

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K''(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0. \tag{10}$$

Rovnici (5) konjugovanou se (4) napíšeme ve tvaru

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K'(s, x)}\, \psi(s)\, ds = \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{P(s, x)}\, \psi(s)\, ds \tag{11}$$

a položíme

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K'(s, x)}\, \psi(s)\, ds = \omega(x). \tag{12}$$

Uvažujíce (12) jako integrální rovnici s neznámou $\psi(x)$, rozřešíme ji methodou postupných aproximací. Potom dostaneme

$$\psi(x) = \omega(x) + \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{\Gamma'(s, x; \lambda_0)}\, \omega(s)\, ds. \tag{13}$$

Dosadíme výrazy (12) a (13) do rovnice (11). Tím dostaneme pro $\omega(x)$ integrální rovnici s degenerovaným jádrem

$$\omega(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K''(s, x)}\, \omega(s)\, ds = 0, \tag{14}$$

konjugovanou s (10). Podle shora dokázaného má právě tolik řešení jako rovnice (10) nebo, což je totéž, jako rovnice (4). Rovnice (12) a (13) definují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi řešeními rovnic (5) a (14), při čemž lineárně nezávislým řešením odpovídají lineárně nezávislá. Odtud plyne, že rovnice (5) a (14) a tedy i konjugované homogenní rovnice (4) a (5) mají stejný počet lineárně nezávislých řešení.

Přejděme ke čtvrté větě Fredholmově. Jednoduše se dokáže, že podmínka věty je nutná. Nechť λ_0 je charakteristická hodnota a $\psi(x)$ je libovolné řešení rovnice (5). Předpokládejme, že nehomogenní rovnice

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x)$$

má řešení. Utvořme skalární součin funkcí $f(x)$ a $\psi(x)$:

$$(f, \psi) = (\varphi - \lambda_0 K\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) - \lambda_0 (K\varphi, \psi),$$

což je podle vzorce (6) možno napsat ve tvaru

$$(f, \psi) = (\varphi, \psi) - \lambda_0 (\varphi, K^*\psi).$$

Oba skalární součiny napravo sloučíme v jeden; číselný koeficient připojíme ke druhému činiteli ve skalárním součinu, při čemž je nutno λ_0 nahradit $\overline{\lambda_0}$. Nyní

$$(f, \psi) = (\varphi, \psi - \overline{\lambda_0} K^*\psi).$$

Ve skalárním součinu napravo je druhý činitel roven nule v důsledku rovnice (5). Avšak potom $(f, \psi) = 0$.

To, že podmínka čtvrté věty je postačující, dokážeme nejprve pro degenerované rovnice. Rovnici (5) můžeme podle § 4 převést na lineární soustavu

$$\gamma_j - \overline{\lambda_0} \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{kj} \gamma_k = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

kde

$$\gamma_j = \int_a^b \overline{a_j(s)}\, \psi(s)\, ds.$$

Přitom, jak je zřejmé,

$$\psi(x) = \overline{\lambda_0} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \overline{b_k(x)}.$$

Nechť hodnost charakteristického čísla λ_0 je rovna r. Soustava (15) má právě r lineárně nezávislé řešení:

$$\vec{\gamma}^{(j)} = (\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \ldots, \gamma_n^{(j)}), \; j = 1, 2, \ldots, r,$$

kterým přísluší řešení rovnice (5)

$$\psi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(j)} \overline{b_k(x)}.$$

Podle věty c) soustava (5), § 4 a s ní i daná integrální rovnice je řešitelná, když

$$(\vec{f}, \vec{\gamma}^{(j)}) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, r, \tag{16}$$

kde

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Dále, podle definice f_k,

$$(\vec{f}, \vec{\gamma}^{(j)}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \overline{\gamma_k^{(j)}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma_k^{(j)}} \int_a^b f(x)\, b_k(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, \overline{\psi_j(x)}\, dx = (f, \psi_j)$$

a podmínky (16) řešitelnosti integrální rovnice se převádějí na podmínky čtvrté Fredholmovy věty.

V obecném případě převedeme danou rovnici na rovnici s ní ekvivalentní (6), § 5, k jejíž řešitelnosti podle již dokázaného stačí, aby

$$(F, \omega) = 0, \tag{17}$$

kde $\omega(x)$ je libovolné řešení homogenní rovnice (14), konjugované s (6), § 5. Avšak $F(x) = f(x) + \lambda_0 \Gamma' f$, kde jsme označili

$$\Gamma' f = \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda_0)\, f(s)\, ds,$$

a odtud

$$(F, \omega) = (f + \lambda_0 \Gamma' f, \omega) = (f, \omega) + \lambda_0 (\Gamma' f, \omega).$$

Avšak podle vzorce (6) $(\Gamma' f, \omega) = (f, \Gamma'^* \omega)$, kde

$$\Gamma'^* \omega = \int_a^b \overline{\Gamma'(s, x; \lambda_0)}\, \omega(s)\, ds.$$

Uvažujeme-li stejně jako v důkaze třetí Fredholmovy věty, najdeme, že

$$(F, \omega) = (f, \omega + \overline{\lambda_0} \Gamma'^* \omega),$$

neboli podle vzorce (13)

$$(F, \omega) = (f, \psi),$$

kde ψ je řešení homogenní rovnice (5), konjugované s rovnicí danou; podmínka (17), která stačí pro řešitelnost dané rovnice, přejde v podmínku

$$(f, \psi) = 0,$$

což je podmínka čtvrté Fredholmovy věty.

Jestliže λ_0 je charakteristické číslo a rovnice

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{18}$$

je řešitelná, pak má nekonečně mnoho řešení. Nechť $\varphi_0(x)$ je řešení rovnice (18). Položme $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \Phi(x)$. Dosadíme-li toto do (18), nalezneme, že $\Phi(x)$ vyhovuje homogenní rovnici

$$\Phi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \Phi(s)\, ds = 0.$$

Podle věty 2 má poslední rovnice netriviální řešení. Nechť $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ jsou lineárně nezávislé charakteristické funkce této rovnice. Potom její obecné řešení bude

$$\Phi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \ldots + c_k \varphi_k(x)$$

a obecné řešení rovnice (18) bude

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \ldots + c_k \varphi_k(x). \tag{19}$$

Z Fredholmových vět plyne t. zv. Fredholmova alternativa:

Buď je nehomogenní rovnice řešitelná, ať je její pravá strana jakákoliv, nebo příslušná homogenní rovnice má netriviální řešení.

Právě Fredholmovy alternativy se používá nejčastěji při rozboru integrálních rovnic.

§ 9. Fredholmova resolventa.[1] V § 2 jsme sestrojili analytický výraz pro resolventu, vhodný pouze pro malá λ:

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s). \tag{1}$$

Konečným cílem tohoto paragrafu je analytické vyjádření resolventy, platné pro všechny regulární hodnoty parametru. Budeme nyní předpokládat, že jádro vyhovuje mimo nerovnost (1), § 2 ještě nerovnosti

$$\int_a^b |K^2(x, s)|\, \mathrm{d}x < E, \quad E = \text{konst}. \tag{2}$$

Určíme předběžně některé vlastnosti resolventy, vycházejíce z řady (1).

Najdeme odhad pro iterovaná jádra. Podle vzorce (8), § 2

$$K_m(x, s) = \int_a^b K_{m-1}(x, t)\, K(t, s)\, \mathrm{d}t.$$

Užijeme nerovnosti Buňakovského na poslední integrál:

$$|K_m^2(x, s)| \leqq \int_a^b |K_{m-1}^2(x, t)|\, \mathrm{d}t \int_a^b |K^2(t, s)|\, \mathrm{d}t,$$

odkud podle nerovnosti (11), § 2 a nerovnosti (2) tohoto paragrafu

$$|K_m(x, t)| < \sqrt{C_1 E}\, B^{m-1}. \tag{3}$$

Z odhadu (3) plyne, že *řada (1) konverguje absolutně a stejnoměrně pro x a s současně v kruhu* $|\lambda| < 1 : B$. V řadě (1) nahradíme iterovaná jádra jejich výrazy ze vzorce (8), § 2. Vyměníme-li pořádek sčítání a integrování, což je dovoleno vzhledem k stejnoměrné konvergenci řady, zjistíme, že resolventa vyhovuje integrální rovnici[2]

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \Gamma(t, s; \lambda)\, \mathrm{d}t. \tag{4}$$

---

[1] Tento paragraf může být vynechán bez újmy pro pochopení dalšího výkladu.

[2] Kdybychom vyšli ze vzorce (8_1), § 2, přišli bychom touž cestou k rovnici

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(t, s)\, \Gamma(x, t; \lambda)\, \mathrm{d}t.$$

Vyšetřme ještě integrál

$$\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\, \Gamma(t, s; \lambda)\, dt = \int_a^b \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(t, s)\, dt.$$

Absolutní konvergence řady (1) dovoluje vynásobit v integrandu obě řady člen za členem a stejnoměrná konvergence této řady dovoluje ji integrovat člen za členem. Tudíž

$$\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\, \Gamma(t, s; \lambda)\, dt = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2} K_{m+n}(x, s).$$

Položme $m + n = p$ a zaměňme pořádek sčítání; řada na pravé straně nabude takového tvaru:

$$\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{p-1} \lambda^{p-2} K_p(x, s) = \sum_{p=2}^{\infty} (p - 1)\, \lambda^{p-2} K_p(x, s) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Gamma(x, s; \lambda).$$

Tak jsme našli, že resolventa vyhovuje integro-diferenciální nelineární rovnici

$$\frac{\partial \Gamma(x, s; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\, \Gamma(t, s; \lambda)\, dt. \tag{5}$$

Učiňme nyní tuto poznámku: Pro $x = s$ nemusí být jádro integrovatelné v intervalu $a \leqq x \leqq b$. V takovém případě změníme hodnoty jádra pro $x = s$ libovolným způsobem tak, aby funkce $K(x, x)$ byla třeba spojitou v intervalu $a \leqq x \leqq b$. Můžeme na př. předpokládat, že $K(x, x) \equiv 0$. Taková změna jádra nezmění ani v jednom bodě hodnoty Fredholmova operátoru

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds$$

v třídě funkcí, jež uvažujeme. Nyní můžeme předpokládat, že integrály

$$A_m = \int_a^b K_m(x, x)\, dx$$

existují pro všechna m. Integrál A_m nazýváme m-tou *stopou* jádra $K(x, s)$. Také se nazývá stopou m-tého iterovaného jádra. Klademe-li v (1) $s = x$ a integrujeme-li, dostaneme v dalším užitečný vzorec

$$\int_a^b \Gamma(x, x; \lambda)\, dx = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \lambda^{m-1}. \tag{6}$$

Vyšetřme nyní strukturu řešení integrální rovnice pro libovolné regulární λ. Zvolme libovolné kladné číslo R a uvažujme kruh $|\lambda| \leqq R$. Jádro $K(x, s)$ rozložme na součet $K(x, s) = P(x, s) + K'(x, s)$, kde $P(x, s)$ je trigonometrický polynom a

$$\int_a^b \int_a^b |K'(x, s)|^2 \, dx \leqq \frac{1}{(R+1)^2}.$$

Postupujeme-li dál jako v § 5, převedeme danou integrální rovnici na rovnici (6), § 5, jejíž jádro je degenerované. Poslední rovnice se opět převede podle § 4 na lineární algebraickou soustavu. Když tuto řešíme, snadno najdeme, že v kruhu $|\lambda| \leqq R$ je možno napsat řešení dané integrální rovnice ve tvaru

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda) f(s) \, ds + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(x); \tag{7}$$

c_k jsou řešení výše zmíněné lineární soustavy; ta je totožná se soustavou (5), § 4, v níž je pouze třeba položit

$$f_k = \int_a^b F(s) b_k(s) \, ds = \int_a^b [f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma'(s, t; \lambda) f(t) \, dt] b_k(s) \, ds =$$
$$= \int_a^b f(s) \tilde{b}_k(s) \, ds,$$

kde jsme pro stručnost položili

$$\tilde{b}_k(s) = b_k + \lambda \int_a^b \Gamma'(t, s; \lambda) b_k(t) \, dt.$$

Poněvadž hodnota λ je regulární, determinant soustavy (5), § 4, jejž označíme $D_R(\lambda)$, je různý od nuly a c_k jsou určeny podle Cramerova vzorce. Determinanty, jež stojí v čitatelích uvedeného vzorce, rozložíme podle prvků f_m, což vede na vzorce:

$$c_k = \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{m=1}^n \Delta_{mk}(\lambda) f_m;$$

Δ_{mk} značí algebraický doplněk prvku, jenž stojí v m-té řádce a k-tém sloupci. Dosadíme-li hodnoty c_k a f_m do (7), dostaneme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) f(s) \, ds, \tag{8}$$

kde jsme položili

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \Gamma'(x, s; \lambda) + \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{k,m=1}^{n} \Delta_{m,k}(\lambda)\, a_k(x)\, \tilde{b}_m(s). \tag{9}$$

Vzpomeneme-li si na definici resolventy danou v § 2, můžeme vyvodit: *Fredholmova rovnice má resolventu pro každé regulární λ. V kruhu $|\lambda| \leqq R$ je resolventa definována vzorcem* (9).

Uveďme jednoduché vlastnosti resolventy:

1. *Resolventa je meromorfní v celé rovině λ.* To přímo plyne z toho, že resolventa může mít v kruhu s libovolným poloměrem R jen konečný počet pólů. Těmito póly mohou být jen charakteristická čísla — nulové body determinantu $D_R(\lambda)$, jež v absolutní hodnotě nepřevyšují R.

2. *Pro malá λ je resolventa definována řadou* (1). To plyne z jednoznačnosti resolventy, dokázané v § 2.

3. Z principu analytického pokračování plyne, že *v celé rovině λ vyhovuje resolventa rovnicím* (4) *a* (5).

4. *Každé charakteristické číslo je pól resolventy.*

Předpokládejme opak. Nechť pro charakteristické číslo λ_0 je resolventa holomorfní. Nechť $\psi_0(x)$ je charakteristická funkce konjugované rovnice

$$\psi(x) - \overline{\lambda_0} \int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, ds = 0.$$

V důsledku čtvrté Fredholmovy věty rovnice

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \psi_0(x) \tag{10}$$

nemá řešení. Nechť nyní λ je regulární bod, blízký k λ_0. Rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s) = \psi_0(x) \tag{11}$$

má řešení dané vzorcem (8), v kterém je třeba nahradit $f(x)$ funkcí $\psi_0(x)$. Dosadíme-li toto řešení do (11), dostaneme identitu

$$\psi_0(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\, \psi_0(s)\, ds - \lambda \int_a^b K(x, s) \Big\{ \psi_0(s) + \\ + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda)\, \psi_0(t)\, dt \Big\}\, ds = \psi_0(x).$$

Poněvadž resolventa je holomorfní pro $\lambda = \lambda_0$, je možno v poslední rovnici provést limitní přechod pro $\lambda \to \lambda_0$ za integračním znamením. Když jej provedeme, dostaneme novou rovnici

$$\psi_0(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda_0)\, \psi_0(s)\, ds - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \left\{ \psi_0(s) + \right.$$
$$\left. + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda_0)\, \psi_0(t)\, dt \right\} ds = \psi_0(x),$$

která ukazuje, že rovnice (10) má řešení, rovné

$$\psi_0(x) + \lambda_0 \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda_0)\, \psi_0(s)\, ds.$$

Tím dostáváme spor, jenž dokazuje naše tvrzení.

Protože je resolventa meromorfní funkcí λ, může být vyjádřena jako podíl dvou celistvých funkcí. Sestrojme je.

Položme v (9) $x = s$ a zintegrujme nalezenou rovnici:

$$\int_a^b \Gamma(s, s; \lambda)\, ds = \int_a^b \Gamma'(s, s; \lambda)\, ds + \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk}(\lambda) \int_a^b a_k(s)\, \tilde{b}_m(s)\, ds. \quad (12)$$

Dokážeme, že součet na pravé straně poslední rovnice je roven $-D'_R(\lambda)$. Derivujeme-li $D_R(\lambda)$ (vzorec (6), § 4), máme

$$D'_R(\lambda) = -\sum_{k, m=1}^{n} a_{mk} \Delta_{mk} - \lambda \sum_{k, m=1}^{n} \frac{da_{mk}}{d\lambda} \Delta_{mk}.$$

Dále podle definice $\tilde{b}_i(s)$ máme

$$\sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk} \int_a^b \tilde{b}(s)\, a_k(s)\, ds = \sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk} \int_a^b b_m(s)\, a_k(s)\, ds +$$
$$+ \lambda \sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk} \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, dt\, ds =$$
$$= \sum_{k, m=1}^{n} a_{mk} \Delta_{mk} + \lambda \sum_{k, m=1}^{n} \Delta_{mk} \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, dt\, ds$$

a stačí dokázat, že

$$\int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, dt = \frac{da_{mk}}{d\lambda}. \quad (13)$$

Připomeňme (viz § 5), že b_m nezávisí na λ a

$$a_k(x) = \alpha_k(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, \tau; \lambda)\, \alpha_k(\tau)\, \mathrm{d}\tau; \; \alpha_k(\tau) = \cos \frac{k\pi\tau}{b-a}.$$

Odtud

$$a_{mk} = \int_a^b b_m(s)\, \alpha_k(s)\, \mathrm{d}s + \lambda \int_a^b \int_a^b b_m(s)\, \alpha_k(t)\, \Gamma'(s, t; \lambda)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s; \tag{14}$$

$$\int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \lambda \int_a^b \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(\tau)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, \Gamma'(s, \tau; \lambda)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau. \tag{15}$$

Trojný integrál napišme ve tvaru

$$\int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(\tau)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau \int_a^b \Gamma'(t, s; \lambda)\, \Gamma'(s, \tau; \lambda)\, \mathrm{d}s.$$

V důsledku integrodiferenciální rovnice (5) pro resolventu je vnitřní integrál roven $\frac{\partial}{\partial \lambda} \Gamma'(t, \tau; \lambda)$ a rovnice (15) přejde v rovnici následující:

$$\int_a^b \int_a^b b_m(t)\, a_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s = \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(s)\, \Gamma'(t, s; \lambda)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s +$$

$$+ \lambda \int_a^b \int_a^b b_m(t)\, \alpha_k(\tau) \frac{\partial \Gamma(t, \tau; \lambda)}{\partial \lambda}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

Porovnáme-li to s (14), přesvědčíme se o správnosti (13).

Máme nyní

$$\int_a^b \Gamma(s, s; \lambda)\, \mathrm{d}s = \int_a^b \Gamma'(s, s; \lambda)\, \mathrm{d}s - \frac{D'_R(\lambda)}{D_R(\lambda)}. \tag{17}$$

Prvý člen napravo v (17) je holomorfní v kruhu $|\lambda| \leq R$. Nechť λ' je m'-násobný kořen determinantu $D_R(\lambda)$, ležící v témže kruhu. Vzorec (17) ukazuje, že λ' je jednoduchý pól funkce

$$\delta(\lambda) = \int_a^b \Gamma(s, s; \lambda)\, \mathrm{d}s$$

s residuem rovným $-m'$. Odtud plyne, že násobnost zůstane nezměněna při změně R, i když se determinant $D_R(\lambda)$ při tom mění. Dále, jak je patrno ze (17), má meromorfní funkce $\delta(\lambda)$ pouze jednoduché póly, identické s charakteristickými čísly jádra $K(x, s)$ a s residui, jež se rovnají celým záporným číslům. Odtud plyne, že funkce

$$D(\lambda) = e^{-\int\limits_0^\lambda \delta(\lambda)\,d\lambda} \tag{18}$$

je celistvá funkce, jejíž nulové body v kruhu $|\lambda| \leqq R$ (kde R je libovolné kladné číslo) se shodují s nulovými body $D_R(\lambda)$ a mají touž násobnost. Avšak potom, jak je patrno z (9), součin

$$D(x, s; \lambda) = D(\lambda)\,\Gamma(x, s; \lambda) \tag{19}$$

je holomorfní v kruhu $|\lambda| \leqq R$; protože R je libovolné, je $D(x, s; \lambda)$ celistvá funkce λ. Tím jsme dostali vyjádření resolventy ve tvaru podílu dvou celistvých funkcí:

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{20}$$

při čemž póly resolventy jsou totožny s nulovými body jmenovatele.

Jestliže $|\lambda| < 1 : B$, pak

$$\delta(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1},$$

kde A_n jsou výše definované stopy jádra $K(x, s)$. Odtud

$$D(\lambda) = e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \lambda^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \lambda^n \right)^k. \tag{21}$$

Srovnáme-li poslední řadu podle mocnin λ, dostaneme řadu konvergující v celé rovině. To je zřejmé, neboť funkce $D(\lambda)$ je celistvá.

Věta. *Čitatel a jmenovatel resolventy je dán Fredholmovými řadami, konvergujícími v celé rovině*

$$D(x, s; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, s)\,\lambda^n, \tag{22}$$

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \lambda^n, \tag{23}$$

kde

$$B_0(x, s) = K(x, s),$$

$$B_n(x, s) = \int_a^b \ldots \int_a^b \Delta_n(x, s)\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n$$

$$
a \qquad \Delta_n(x, s) = \begin{vmatrix} K(x, s), & K(x, t_1), & K(x, t_2), & \ldots, & K(x, t_n) \\ K(t_1, s), & K(t_1, t_1), & K(t_1, t_2), & \ldots, & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, s), & K(t_2, t_1), & K(t_2, t_2), & \ldots, & K(t_2, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n, s), & K(t_n, t_1), & K(t_n, t_2), & \ldots, & K(t_n, t_n) \end{vmatrix}, \tag{24}
$$

$$
c_0 = 1,
$$

$$
c_n = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1), & K(t_1, t_2), & \ldots, & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1), & K(t_2, t_2), & \ldots, & K(t_2, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n, t_1), & K(t_n, t_2), & \ldots, & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} \mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n. \tag{25}
$$

Dokážeme nejdříve, že $B_n(x, s)$ a c_n splňují vztahy

$$
c_{n+1} = \int_a^b B_n(s, s)\, \mathrm{d}s, \tag{26}
$$

$$
B_n(x, s) = c_n K(x, s) - n \int_a^b K(x, t)\, B_{n-1}(t, s)\, \mathrm{d}t. \tag{27}
$$

Rovnice (26) je zřejmá. Abychom dokázali rovnici (27), rozviňme determinant (24) podle prvků prvé řádky:

$$
B_n(x, s) = K(x, s)\, c_n + \sum_{\alpha=1}^{n} \int_a^b \ldots \int_a^b (-1)^\alpha K(x, t_\alpha)\, \Delta_\alpha(s)\, \mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n,
$$

kde

$$
\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} K(t_1, s), & K(t_1, t_1), & \ldots, & K(t_1, t_{\alpha-1}), & K(t_1, t_{\alpha+1}), & \ldots, & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, s), & K(t_2, t_1), & \ldots, & K(t_2, t_{\alpha-1}), & K(t_2, t_{\alpha+1}), & \ldots, & K(t_2, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n, s), & K(t_n, t_1), & \ldots, & K(t_n, t_{\alpha-1}), & K(t_n, t_{\alpha+1}), & \ldots, & K(t_n, t_n) \end{vmatrix}.
$$

Ve sčítanci s indexem α posuneme α-tou řádku na prvé místo, čímž se determinant vynásobí $(-1)^{\alpha-1}$, a provedeme změnu označení integračních proměnných podle schematu

$$
\begin{matrix} t_\alpha, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_{\alpha-1}, & t_{\alpha+1}, & \ldots, & t_n \\ t, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_{\alpha-1}, & t_\alpha, & \ldots, & t_{n-1} \end{matrix}
$$

tak, že horní symbol nahradíme dolním. Po této záměně budou integrály v součtu stejné a dostaneme (viz (24_1))

$$B_n(x, s) = c_n K(x, s) - n \int_a^b K(x, t)\, dt \int_a^b \dots \int_a^b \Delta_{n-1}(t, s)\, dt_1\, dt_2 \dots dt_n =$$
$$= c_n K(x, s) - n \int_a^b K(x, t)\, B_{n-1}(t, s)\, dt.$$

Vztahy (26) a (27) nám umožňují najít rekurentní vztah mezi koeficienty c_n. Položme v (27) $x = s$ a zintegrujme v mezích od a do b. Potom dostaneme

$$c_{n+1} = c_n A_1 - n \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, B_{n-1}(t, s)\, ds\, dt.$$

Dosadíme-li do této rovnosti za B_{n-1} podle vzorce (27), lehce jej upravíme na tvar

$$c_{n+1} = c_n A_1 - n c_{n-1} A_2 + n(n-1) \int_a^b \int_a^b K_2(s, t)\, B_{n-2}(t, s)\, ds\, dt.$$

Opakujeme-li tento postup, nalezneme hledanou závislost

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, n!\, A_{n-k+1}}{k!}\, c_k. \tag{28}$$

Nyní už není těžké najít rozvoj $D(\lambda)$ v mocninnou řadu. Nechť

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n \lambda^n; \quad \gamma_n = (-1)^n D^{(n)}(0).$$

Z (18) plyne

$$D'(\lambda) = -\delta(\lambda)\, D(\lambda).$$

Derivujeme-li n-krát tuto relaci podle Leibnitzova vzorce, najdeme:

$$D^{(n+1)}(0) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, \delta^{(n-k)}(0)\, D^{(k)}(0)$$

neboli

$$\gamma_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, n!\, A_{n-k+1}}{k!}\, \gamma_k.$$

Veličiny γ_{n+1} a c_{n+1} vyhovují jednomu a témuž rekurentnímu vztahu. Dále $\gamma_0 = c_0 = 1$. Odtud plyne, že $\gamma_n = c_n$ pro libovolné n. Celistvá funkce $D(\lambda)$ je tudíž dána řadou (23), která proto konverguje pro všechna konečná λ.

Obraťme se k funkci $D(x, s; \lambda)$. Dosadíme-li

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}$$

do integrální rovnice pro resolventu, nalezneme, že $D(x, s; \lambda)$ vyhovuje rovnici

$$D(x, s; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, D(t, s; \lambda)\, \mathrm{d}t = K(x, s)\, D(\lambda). \tag{29}$$

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru nekonečné mocninné řady pro proměnnou λ:

$$D(x, s; \lambda) = \sum_{n=}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n(x, s)}{n!} \lambda^n.$$

Dosadíme-li tuto řadu do (29) a porovnáme-li koeficienty u stejných mocnin λ, dostaneme rekurentní vztah pro $\beta_n(x, s)$:

$$\beta_0(x, s) = K(x, s),$$

$$\beta_n(x, s) = c_n\, K(x, s) - n \int_a^b K(x, t)\, \beta_{n-1}(t, s)\, \mathrm{d}t.$$

Porovnáme-li to s (27), přesvědčíme se o tom, že $\beta_n(x, s) = B_n(x, s)$, čímž je dokázán vzorec (22). Řada (22) konverguje v celé rovině — to plyne přímo z toho, že $D(x, s; \lambda)$ je celistvá funkce.

Poznámka. Koeficienty $B_n(x, s)$ i c_n je možno určit z rekurentních vzorců (26) a (27), čímž obejdeme výpočet a integrování determinantů z (24) a (25).

Řady (22) a (23) po prvé nalezl Fredholm, jenž také dokázal jejich konvergenci pro všechna konečná λ za předpokladu, že jádro je omezené. Fredholmův důkaz spočívá na pozoruhodné Hadamardově větě pro odhad hodnoty determinantů.[1] Carleman [15a] dokázal, že řady (22) a (23) jsou celistvými funkcemi λ za toho jediného předpokladu, že integrál

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s$$

je konečný. Jiný důkaz Carlemanovy věty je uveden v našem článku [27n]. Úvah tohoto článku jsme vhodně užili i v této knize pro případ méně obecný, kdy jádro vyhovuje nerovnostem (1) a (1_1), § 2. Konečně I. A. Ickovič [41] ve svém článku dokázal konvergence řad (22) a (23)

---

[1] Hadamardova věta a Fredholmův důkaz se zpravidla uvádějí v učebnicích integrálních rovnic. Viz na př. [2], [5] a [7].

pro všechna konečná λ za ještě obecnějších podmínek než Carleman.

Funkce $D(\lambda)$ se obyčejně nazývá Fredholmovým determinantem a $D(x, s; \lambda)$ prvým Fredholmovým minorem. Fredholm zavedl pojem minorů libovolného řádu. Jsou to řady svou strukturou obdobné řadám (22) a (23). My je však nepotřebujeme, a proto je v této knize nebudeme zavádět.

Příklad. Najděme resolventu jádra

$$K(x, s) = x + s.$$

Máme $c_0 = 1$, $B_0(x, s) = x + s$. Dále

$$c_1 = \int_0^1 2s \, ds = 1,$$

$$B_1(x, s) = x + s - \int_0^1 (x + t)(t + s) \, dt = \tfrac{1}{2}(x + s) - xs - \tfrac{1}{3},$$

$$c_2 = \int_0^1 (s - s^2 - \tfrac{1}{3}) \, ds = -\tfrac{1}{6},$$

$$B_2(x, s) = -\tfrac{1}{6}(x + s) - 2\int_0^1 (x + t)[\tfrac{1}{2}(t + s) - ts - \tfrac{1}{3}] \, dt = 0.$$

Když $B_2(x, s) \equiv 0$, pak, jak je vidět ze vzorců (26) a (27), všechny koeficienty $c_3, c_4, \ldots; B_3, B_4, \ldots$ se rovnají nule a dostaneme

$$D(x, s; \lambda) = x + s - [\tfrac{1}{2}(x + s) - xs - \tfrac{1}{3}]\,\lambda,$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda - \tfrac{1}{12}\lambda^2,$$

$$\Gamma(x, s; \lambda) = \frac{x + s - [\tfrac{1}{2}(x + s) - xs - \tfrac{1}{3}]\,\lambda}{1 - \lambda - \tfrac{1}{12}\lambda^2}.$$

Poznámka ke konvergenci postupných aproximací. Methoda postupných aproximací dává řešení ve tvaru mocninné řady pro proměnnou λ. Tato řada zřejmě konverguje uvnitř nějakého kruhu $|\lambda| \leqq R$, jestliže v tomto kruhu konverguje mocninná řada, kterou je dána resolventa. Avšak z obecných vět theorie funkcí komplexní proměnné je známo, že tato řada konverguje uvnitř kruhu $|\lambda| < |\lambda_1|$, kde λ_1 je charakteristické číslo s nejmenší absolutní hodnotou. Odtud plyne, že postupné aproximace konvergují v témže kruhu. Z toho vyplývá:

Jestliže v nějakém kruhu $|\lambda| \leqq R$ neleží žádné charakteristické číslo, postupné aproximace v tomto kruhu konvergují.

§ 10. Rovnice se slabou singularitou. Připomeňme, že rovnicemi se slabou singularitou nazýváme rovnice, jejichž jádro má tvar

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x - s|^\alpha},$$

kde $0 < \alpha < 1$ a $H(x, s)$ je omezená funkce, nebo jestliže integračním oborem je omezená oblast Ω n-dimensionálního prostoru, pak

$$K(M, M_1) = \frac{H(M, M_1)}{r^\alpha}, \quad 0 < \alpha < n, \tag{1}$$

kde M a M_1 jsou body oblasti Ω a r je vzdálenost těchto bodů. Theorie rovnic se slabou singularitou je téměř shodná s theorií Fredholmových rovnic. Zvláště, jak ukážeme, zůstávají v platnosti Fredholmovy věty a s nimi i Fredholmova alternativa. Budeme zde uvažovat obecný případ n-dimensionální oblasti Ω, neboť právě tento případ je nejdůležitější pro aplikace, a dimense prostoru hraje jistou úlohu při formulaci a důkazu hlavní věty theorie rovnic se slabou singularitou. Tato věta zní takto:

Věta 1. *Nechť*

$$|K(M, M_1)| < \frac{A_1}{r^\alpha}; \quad |L(M, M_1)| < \frac{A_2}{r^\beta},$$

kde A_1 a A_2 jsou konstanty a $0 \leqq \alpha < n$; $0 \leqq \beta < n$. Potom pro jádro

$$N(M, M_1) = \int_\Omega K(M, M_2)\, L(M_2, M_1)\, \mathrm{d}M_2$$

platí odhad

$$|N(M, M_1)| < \begin{cases} C, \alpha + \beta < n, \\ C|\lg r|, \quad \alpha + \beta = n, \\ \dfrac{C}{r^{\alpha+\beta-n}}, \quad \alpha + \beta > n, \end{cases} \tag{2}$$

kde C je nějaká konstanta.

Označme r_0 vzdálenost MM_2, r_1 vzdálenost M_1M_2 a h veličinu, jež není menší než průměr oblasti Ω. Máme

$$|N(M, M_1)| \leqq A_1 A_2 \int_\Omega \frac{\mathrm{d}M_2}{r_0^\alpha r_1^\beta} < A_1 A_2 \int_{r_0 \leqq h} \frac{\mathrm{d}M_2}{r_0^\alpha r_1^\beta}. \tag{3}$$

Jestliže $\alpha + \beta < n$, integrál v (3) stejnoměrně konverguje a je proto omezený; odhad (2) je v tom případě dokázán. Nechť nyní $\alpha + \beta \geqq n$. Položme počátek souřadnic do M a veďme osu x_1 bodem M_1 tak, aby směr od M k M_1 byl kladný. Souřadnice bodů M a M_1 budou $(0, 0, \ldots, 0)$ a $(r, 0, \ldots, 0)$. Souřadnice bodu M_2 označíme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Potom

$$r_0^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad r_1^2 = (x_1 - r)^2 + \sum_{k=2}^{n} x_k^2.$$

V integrálu (3) provedeme substituci $x_k = r\xi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Odhad (3) přejde v

$$|N(M, M_1)| < \frac{A_1 A_2}{r^{\alpha+\beta-n}} \int\limits_{\varrho \leqq \frac{h}{r}} \frac{d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n}{\varrho^\alpha [(\xi_1 - 1)^2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \xi_k^2]^{\frac{\beta}{2}}}. \tag{4}$$

Zde jsme označili $\varrho = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2}$. Odhadněme integrál v (4). Máme

$$d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n = \varrho^{n-1}\, d\varrho\, dS,$$

kde dS je plošný element nadkoule jednotkového poloměru v prostoru se souřadnicemi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Dále

$$(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{k=2}^{n} \xi_k^2 = \varrho^2 - 2\xi_1 + 1 \geqq (\varrho - 1)^2.$$

Není obtížné nahlédnout, že pro $\varrho > 2$, $(\varrho - 1)^2 > \frac{1}{4}\varrho^2$, a tudíž

$$(\xi_1 - 1)^2 + \sum_{k=2}^{n} \xi_k^2 > \tfrac{1}{4}\varrho^2.$$

Nyní

$$|N(M, M_1)| < \frac{A_1 A_2}{r^{\alpha+\beta-n}} \left\{ \int\limits_{\varrho \leqq 2} \frac{\varrho^{n-1-\alpha}\, d\varrho\, dS}{[(\xi_1 - 1)^2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \xi_k^2]^{\frac{\beta}{2}}} + 2^\beta \int\limits_{2 < \varrho \leqq \frac{h}{r}} \varrho^{n-1-\alpha-\beta}\, d\varrho\, dS \right\}. \tag{5}$$

Prvý integrál v závorce je konstanta a je pro $\alpha + \beta > n$ menší než

$$2^\beta S \int\limits_2^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^{\alpha+\beta+1-n}} = \frac{2^{n-\alpha} S}{\alpha + \beta - n},$$

kde S je plošný obsah nadkoule jednotkového poloměru. Výraz v závorce (5) je tedy menší než nějaká konstanta a odhad (2) je proveden pro $\alpha + \beta > n$. Konečně jestliže $\alpha + \beta = n$, druhý integrál (5) se rovná

$$2^{\beta} S \int_{2}^{\frac{h}{r}} \frac{d\varrho}{\varrho} = 2^{\beta} S \lg \frac{h}{2r};$$

odtud plyne odhad (2) i pro tento případ.[1]

Důsledek. *Jestliže jádro má slabou singularitu, všechna jeho iterovaná jádra, od některého počínaje, jsou omezená.*

Jestliže jádro vyhovuje nerovnosti (1), pak pro jeho n-té iterované jádro, jak vyplývá z věty (1), platí odhad

$$|K_m(M, M_1)| < \begin{cases} \dfrac{C_m}{r^{m\alpha-(m-1)n}}, & m\alpha - (m-1)\,n > 0, \\ C_m, & m\alpha - (m-1)\,n \lessdot 0, \end{cases}$$

kde C_m je nějaká konstanta. Tudíž $K_m(M, M_1)$ je omezená, jestliže

$$m > \frac{n}{n-\alpha}. \tag{6}$$

V dalším budeme m považovat za číslo, jež splňuje nerovnost (6), takže jádro $K_m(M, M_1)$ je omezené.

Zaveďme následující označení. Libovolnou funkci $\varphi(M)$ budeme také označovat $E\varphi$, takže

$$E\varphi = \varphi(M).$$

V souhlase s tím budeme na př. psát:

$$\varphi(M) - \lambda \int_{\Omega} K(M, M_1)\,\varphi(M_1)\,dM_1 = (E - \lambda K)\,\varphi.$$

Polynomy s mocninami operátoru K lze násobit jako obyčejné polynomy, jestliže přitom uvažujeme E jako jednotku; tak na př.

$$(E - \lambda K)(E + \lambda K)\,\varphi = (E - \lambda^2 K^2)\,\varphi = \varphi(M) - \\ - \lambda^2 \int_{\Omega} K_2(M, M_1)\,\varphi(M_1)\,dM_1.$$

[1] Srovnej s S. L. Sobolev, Uravněnija metematičeskoj fiziki, Gostěchizdat, 1947, str. 233—237.

Uvažujme nyní rovnici

$$\varphi(M) - \lambda \int_{\Omega} K(M, M_1)\, \varphi(M_1)\, \mathrm{d}M_1 = f(M), \tag{7}$$

kde $K(M, M_1)$ má tvar (1). Nechť m je libovolné číslo, vyhovující nerovnosti (6). Rovnici (7) napišme ve tvaru

$$(E - \lambda K)\, \varphi = f(M)$$

a aplikujme na obě strany operátor

$$(E - \varepsilon\lambda K)(E - \varepsilon^2\lambda K) \dots (E - \varepsilon^{m-1}\lambda K) = E + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \\ + \dots + \lambda^{m-1} K^{m-1},$$

kde $\varepsilon = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{m}}$. Potom dostaneme rovnici Fredholmova typu s omezeným jádrem

$$(E - \lambda^m K^m)\, \varphi = (E + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \dots + \lambda^{m-1} K^{m-1})\, f$$

nebo podrobněji

$$\varphi(M) - \lambda^m \int_{\Omega} K_m(M, M_1)\, \varphi(M_1)\, \mathrm{d}M_1 = f(M) + \\ + \lambda \int_{\Omega} K(M, M_1)\, f(M_1)\, \mathrm{d}M_1 + \lambda^2 \int_{\Omega} K_2(M, M_1)\, f(M_1)\, \mathrm{d}M_1 + \\ + \dots + \lambda^{m-1} \int_{\Omega} K_{m-1}(M, M_1)\, f(M_1)\, \mathrm{d}M_1. \tag{8}$$

Je zřejmé, že každé řešení rovnice (7) vyhovuje také rovnici (8). Tato okolnost hraje důležitou úlohu ve všem dalším. Opačné tvrzení je obecně nesprávné — rovnice (8) může mít řešení, jež nevyhovuje rovnici (7).

Přistupme k důkazu Fredholmových vět pro rovnici (7).

Pozměníme nyní poněkud definici charakteristického čísla: číslo λ_0 budeme nazývat charakteristickým číslem jádra $K(M, M_1)$, jestliže homogenní rovnice

$$(E - \lambda_0 K)\, \varphi = 0$$

má netriviální řešení. Poznamenejme, že se tato definice hodí i pro Fredholmovy rovnice. To plyne z 2. Fredholmovy věty.

1°. Uvažujme kruh $|\lambda| \leqq R$, kde R je libovolné číslo > 0; nechť λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(M, M_1)$, které leží v tomto kruhu. Označme $\varphi_0(M)$ příslušnou charakteristickou funkci, takže

$$\varphi_0(M) - \lambda_0 \int_{\Omega} K(M, M_1)\, \varphi_0(M_1)\, \mathrm{d}M_1 = 0. \tag{9}$$

V důsledku shora řečeného vyhovuje $\varphi_0(M)$ také identitě

$$\varphi_0(M) - \lambda_0^m \int_\Omega K_m(M, M_1)\, \varphi_0(M_1)\, dM_1 = 0. \tag{10}$$

Odtud je vidět, že λ_0^m je charakteristické číslo jádra $K_m(M, M_1)$. Toto má v kruhu poloměru R pouze konečný počet charakteristických čísel. Potom však i jádro $K(M, M_1)$ jich má v kruhu $|\lambda| \leqq R$ pouze konečný počet. Tím je pro jádro $K(M, M_1)$ dokázána první Fredholmova věta.

2°. Nechť rovnice (9) a (10) mají r resp. r' lineárně nezávislých charakteristických funkcí. Poněvadž každé řešení rovnice (9) vyhovuje také rovnici (10), platí $r \leqq r'$. Avšak číslo r' je konečné. Tedy také r je konečné; druhá věta Fredholmova je tudíž správná i pro jádra se slabou singularitou.

3°. Označme ještě r^* počet lineárně nezávislých řešení rovnice, konjugované s (9)

$$(E - \overline{\lambda}_0 K^*)\, \psi = 0. \tag{11}$$

Zvolme m tak, aby ani jedno z čísel

$$\varepsilon\lambda_0,\ \varepsilon^2\lambda_0,\ \ldots,\ \varepsilon^{m-1}\lambda_0$$

nebylo charakteristické číslo jádra $K(M, M_1)$. Vybrat takové číslo m je vždy možné, neboť v opačném případě by jádro $K(M, M_1)$ mělo nekonečně mnoho charakteristických hodnot na kružnici $|\lambda| = |\lambda_0|$, což odporuje první Fredholmově větě. Při této volbě m jsou rovnice (9) a (10) ekvivalentní. Abychom to dokázali, přepíšeme (10) ve tvaru

$$(E - \varepsilon\lambda_0 K) \prod_{\alpha=2}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, \varphi_0 = 0.$$

Označme

$$\prod_{\alpha=2}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, \varphi_0 = \varphi_1(M).$$

Potom

$$(E - \varepsilon\lambda_0 K)\, \varphi_1 = 0,$$

a poněvadž $\varepsilon\lambda_0$ není charakteristické číslo, $\varphi_1(M) = 0$, čili

$$\prod_{\alpha=2}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, \varphi_0 = 0.$$

Položíme-li nyní $\prod_{\alpha=3}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\, \varphi_1 = \varphi_2(M)$, dokážeme úplně stejně, že

$\varphi_2(M) = 0$. Pokračujeme-li v tomto postupu, najdeme nakonec, že

$$(E - \varepsilon^m \lambda_0 K)\,\varphi_0 = (E - \lambda_0 K)\,\varphi_0 = 0,$$

což je identické s (9).

Jestliže rovnice (9) a (10) jsou ekvivalentní, počet lineárně nezávislých řešení poslední rovnice je r. Stejný počet řešení podle 3. Fredholmovy věty má s ní konjugovaná rovnice

$$(E - \bar{\lambda}_0^m K^{*m})\,\omega = 0. \tag{12}$$

Avšak tato poslední rovnice, kterou lze napsat ve tvaru

$$(E - \bar{\varepsilon}\bar{\lambda}_0 K^*)(E - \bar{\varepsilon}^2\bar{\lambda}_0 K^*) \dots (E - \bar{\varepsilon}^{m-1}\bar{\lambda}_0 K^*)(E - \bar{\lambda}_0 K^*)\,\omega = 0,$$

má alespoň r^* řešení. Odtud $r^* \leqq r$.

Úplně obdobně dokážeme, že $r^* \geqq r$. Tedy $r^* = r$, a to je 3. Fredholmova věta.

4°. Přejděme ke 4. Fredholmově větě. Nutnost podmínky věty se dokazuje stejně jako v § 8; zde dokážeme, že podmínka je postačující. Zvolme m jako dříve tak, aby čísla $\varepsilon\lambda_0, \varepsilon^2\lambda_0, \dots, \varepsilon^{m-1}\lambda_0$ nebyla charakteristická čísla jádra $K(M, M_1)$. Potom rovnice (7) a (8) jsou ekvivalentní — to se dokáže stejně jako pro rovnice (9) a (10); je třeba jen položit

$$\varphi_k(M) = \prod_{\alpha=k+1}^{m} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)[(E - \lambda_0 K)\,\varphi - f],$$

a vyjasnit podmínky řešitelnosti rovnice (8). Podle 4. Fredholmovy věty je rovnice (8) řešitelná, když

$$\Big(\prod_{\alpha=1}^{m-1} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\,f, \omega\Big) = 0, \tag{13}$$

kde ω je libovolné řešení rovnice (12). Podmínku (13) upravíme takto: Položíme $\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\,f = f_1$ a potom

$$0 = ((E - \varepsilon\lambda_0 K)\,f_1, \omega) = (f_1, \omega) - \varepsilon\lambda_0 (K f_1, \omega)$$

neboli podle vzorce (6), § 8

$$0 = (f_1, \omega) - \varepsilon\lambda_0 (f_1, K^*\omega) = (f_1, (E - \bar{\varepsilon}\bar{\lambda}_0 K^*)\,\omega) =$$

$$= \Big(\prod_{\alpha=2}^{m-1} (E - \varepsilon^\alpha \lambda_0 K)\,f,\ (E - \overline{\varepsilon\lambda_0} K^*)\,\omega\Big).$$

Položíme nyní $\prod_{\alpha=3}^{m-1}(E - \varepsilon^{\alpha}\lambda_0 K) f = f_2$ atd. Pokračujeme-li takto, převedeme rovnici (13) na tvar

$$(f, \prod_{\alpha=1}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*) \omega) = 0. \tag{14}$$

Napíšeme nyní rovnici (12) v tomto tvaru:

$$\prod_{\alpha=0}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*) \omega = (E - \bar{\lambda}_0 K^*) \prod_{\alpha=1}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*) \omega = 0.$$

Z toho je vidět, že druhý činitel ve skalárním součinu (14) je řešením rovnice (11), konjugované se (7). Tedy k tomu, aby rovnice (8) a s ní i ekvivalentní rovnice (7) měla řešení, stačí, aby $f(M)$ byla orthogonální k jistým řešením rovnice (11), totiž k těm, jež mají tvar $\prod_{\alpha=1}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*)\omega$, kde $\omega(M)$ je řešení rovnice (12). Tím spíše stačí, když $f(M)$ je orthogonální ke všem řešením rovnice (11).

Tím je dokončen důkaz 4. Fredholmovy věty pro rovnice se slabou singularitou.

Poznámka 1. Není obtížné dokázat, že *každé* řešení rovnice (11) má tvar

$$\psi(M) = \prod_{\alpha=1}^{m-1}(E - \bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*) \omega,$$

kde $\omega(M)$ vyhovuje rovnici (12).

Poznámka 2. Při důkaze Fredholmových vět pro jádro se slabou singularitou jsme použili pouze toho, že jeho iterovaná jádra, od nějakého počínaje, jsou omezená. Vyjádření jádra ve tvaru (1) nehrálo žádnou úlohu. Tím jsou Fredholmovy věty dokázány také pro libovolnou integrální rovnici, jestliže její iterovaná jádra jsou omezená od jistého počínaje.

Jestliže λ není charakteristické číslo rovnice (7), nazveme λ regulárním. Dokážeme, že rovnice (7) má řešení, a to jediné, jestliže λ je regulární. V tom případě má skutečně homogenní rovnice

$$\psi(M) - \bar{\lambda} \int_{\Omega} \overline{K(M_1, M)}\, \psi(M_1)\, \mathrm{d}M_1 = 0 \tag{15}$$

pouze triviální (nulové) řešení; podmínka 4. Fredholmovy věty je automaticky splněna pro libovolnou funkci $f(M)$, což zabezpečuje řešitelnost rovnice (7). Jednoznačnost řešení plyne z toho, že rovnice (15) nemá netriviální řešení.

KAPITOLA 2

SOUMĚRNÉ ROVNICE (HILBERT-SCHMIDTOVA THEORIE)

§ 11. Souměrná jádra. Jádro nazýváme *souměrným*, jestliže je identické s jádrem k němu konjugovaným. Takové jádro je charakterisováno identitou

$$K(x, s) = \overline{K(s, x)}. \tag{1}$$

Jestliže jádro je reálné, potom jeho souměrnost je definována vztahem

$$K(x, s) = K(s, x). \tag{2}$$

Integrální rovnici se souměrným jádrem nazýváme *souměrnou*.

Jestliže jádro je souměrné, můžeme se lehce přesvědčit o tom, že všechna jeho iterovaná jádra jsou také souměrná. Tak na příklad

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \overline{K(s, t)}\; \overline{K(t, x)}\, \mathrm{d}t = \overline{K_2(s, x)},$$

$$K_3(x, s) = \int_a^b K_2(x, t)\, K(t, s)\, \mathrm{d}t = \int_a^b \overline{K(s, t)}\; \overline{K_2(t, x)}\, \mathrm{d}t = \overline{K_3(s, x)}$$

atd.

Příklady. Jádra $x + s$, $\lg|x - s|$, $i(x - s)$ jsou souměrná. Jádro $i(x + s)$ je nesouměrné, neboť v tomto případě

$$\overline{K(s, x)} = -K(x, s).$$

Základní vlastnost souměrných jader, která v podstatě určuje celou theorii souměrných integrálních rovnic, spočívá ve vztahu

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K\psi), \tag{3}$$

v nějž přejde identita (6), § 8 v případě souměrného jádra.

Posloupnost funkcí

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{4}$$

se nazývá *orthogonální*, jestliže jsou tyto funkce navzájem po dvou orthogonální. Budeme nazývat posloupnost *orthonormovanou soustavou*, jestliže je orthogonální a norma každé funkce je rovna jedné. Jestliže posloupnost (4) je orthonormovaná, pak

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Každou orthogonální soustavu lze lehce převést na orthonormovanou; stačí každou funkci dělit její normou.

Vyjdeme-li z libovolné orthonormované soustavy, lze vybudovat theorii „Fourierových řad", analogickou theorii trigonometrických řad. Naznačíme stručně tuto theorii.

Pro každou funkci $f(x)$[1] si můžeme položit tuto úlohu: Jest určit koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tak, aby kvadratická chyba přibližné relace

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

byla co nejmenší. Kvadratická chyba je podle definice rovna

$$\delta_n = \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)|^2 \, dx.$$

Označme

$$a_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} \, dx.$$

Čísla a_k se nazývají *Fourierovými koeficienty* funkce $f(x)$ vzhledem k orthonormované soustavě (4). Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\delta_n = \int_a^b |f^2(x)| \, dx + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

[1] O $f(x)$ pouze předpokládáme, že ona sama i její čtverec jsou absolutně integrovatelné.

Odtud je patrno, že δ_k bude nejmenší, když $\alpha_k = a_k$, t. j. když za koeficienty α_n zvolíme Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$. Nejmenší hodnota δ_n je rovna

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2. \tag{5}$$

Poněvadž tato hodnota je nezáporná, platí

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqq \|f\|^2.$$

Levá strana poslední nerovnosti je n-tý částečný součet řady s kladnými členy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

a naše nerovnost ukazuje, že částečné součty této řady jsou omezené. Odtud plyne, že uvedená řada konverguje, při čemž platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqq \|f\|^2, \tag{6}$$

jež se nazývá *Besselovou nerovností.*

Necháme-li v přibližné rovnosti (3) n růst nade všechny meze, dojdeme k Fourierově řadě funkce $f(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi_k(x). \tag{7}$$

Pravíme, že funkce $f(x)$ se dá rozvinout ve Fourierovu řadu podle funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, jestliže řada (7) příslušející této funkci konverguje a její součet je roven $f(x)$. Jestliže $f(x)$ se dá rozvinout ve stejnoměrně konvergentní řadu Fourierovu (7), potom platí t. zv. *Parsevalova identita*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|^2. \tag{8}$$

Pro dostatečně velké n skutečně

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\, \varphi_k(x) - f(x)\right|^2 < \varepsilon,$$

kde ε je libovolná kladná konstanta. Avšak potom

$$\delta_n^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 < \varepsilon(b - a).$$

Necháme-li $\varepsilon \to 0$ a tudíž $n \to \infty$, dostaneme Parsevalovu identitu.

Pokud se týče řady (7), vznikají dvě základní otázky: Za jakých podmínek tato řada konverguje, a jestliže konverguje, zda její součet je roven $f(x)$? Prvá otázka klade v obecném případě značné potíže při řešení, avšak v prakticky důležitých případech se často podaří nalézt jednoduché dostatečné podmínky stejnoměrné konvergence Fourierovy řady.

Přejděme ke druhé otázce. Orthogonální soustavu budeme nazývat *neúplnou*, jestliže existuje funkce, jež se nerovná identicky nule a jež je orthogonální ke všem funkcím soustavy. V opačném případě se soustava nazývá *úplnou*. Tak na př. soustava

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots,$$

jež je orthogonální v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$, je neúplná, neboť funkce $\varphi(x) \equiv 1$ je orthogonální ke všem funkcím uvedené soustavy. V theorii trigonometrických řad se dokazuje, že soustava funkcí

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots,$$

orthogonálních v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$, je úplná.

Jestliže soustava (1) *je úplná a řada* (7) *konverguje stejnoměrně, pak její součet je roven* $f(x)$. Proveďme důkaz této jednoduché a důležité věty. Položme

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) - f(x).$$

Funkce $\omega(x)$ je orthogonální ke všem funkcím $\varphi_k(x)$. Víme, že řada (7) konverguje stejnoměrně a je tedy možno ji integrovat člen po členu. Odtud také plyne, že skalární součiny (ω, φ_k) jsou rovny nule:

$$(\omega, \varphi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi_n, \varphi_k) - (f, \varphi_k) = a_k - a_k = 0.$$

Poněvadž však soustava (1) je úplná, je $\omega(x) \equiv 0$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x).$$

Je možno dokázat, že když je soustava (1) úplná, přejde Besselova nerovnost pro libovolnou funkci $f(x)$ v Parsevalovu identitu.

V aplikacích se setkáváme také s Fourierovými řadami poněkud obecnějšího charakteru. Nechť $r(x)$ je nějaká nezáporná funkce. Pravíme, že funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou orthogonální s vahou $r(x)$, když

$$\int_a^b r(x)\,\varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{9}$$

Soustavu (1) budeme nazývat *orthonormovanou s vahou* $r(x)$, jestliže platí vztahy

$$\int_a^b r(x)\,\varphi_i(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \tag{10}$$

Úplně tak jako shora dojdeme k pojmu Fourierovy řady funkce $f(x)$ podle soustavy funkcí orthonormovaných s nějakou vahou. Fourierovy koeficienty jsou definovány vzorcem

$$a_k = \int_a^b r(x)\,f(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\,\mathrm{d}x; \tag{11}$$

Besselova nerovnost a Parsevalova identita se napíší ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqq \int_a^b r(x)\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

resp.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \int_a^b r(x)\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

Pojem úplnosti a z něho vyplývající důsledky se přenášejí beze změny i na tento případ.

Uveďme několik příkladů orthogonálních soustav.

a) Soustava $\varphi_k(x) = \mathrm{e}^{ikx}$, kde k probíhá všechna celá čísla z intervalu $(-\infty, \infty)$, je orthogonální v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Není normovaná, neboť

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_k(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi.$$

Zřejmě soustava funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{ikx}, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

je orthonormovaná v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

b) Funkce

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots$$

tvoří orthogonální soustavu v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. V tomtéž intervalu tvoří orthogonální soustavu i funkce $\sin kx$, $k = 1, 2, \dots$

c) Legendrovy polynomy

$$P_0(x) = 1, \; P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}, \; n = 1, 2, \dots$$

jsou orthogonální v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Splňují relace

$$\int_{-1}^{+1} P_i(x) \, P_k(x) \, dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \dfrac{2}{2k+1}, & i = k. \end{cases}$$

d) Čebyševovy polynomy

$$T_k(x) = \frac{1}{2^{k-1}} \cos(k \arccos x), \; k = 0, 1, 2, \dots$$

jsou orthogonální s vahou

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Je možno je normovat vynásobením $T_k(x)$ veličinou $\sqrt{\dfrac{2^{2k-1}}{\pi}}$.

e) Nechť $J_n(x)$ značí Besselovu funkci prvého druhu n-tého řádu a nechť $\alpha_{k,n}$ jsou její kladné nulové body. Budeme předpokládat, že $n > -1$. Soustava funkcí

$$J_n(\alpha_{k,n} x), \; k = 1, 2, \dots$$

je orthogonální s vahou $r(x) = x$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Tyto funkce vyhovují relacím

$$\int_0^1 x \, J_n(\alpha_{i,n} x) \, J_n(\alpha_{k,n} x) \, dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ J_{n+1}^2(\alpha_{k,n}), & i = k. \end{cases}$$

Soustavy a) až e) jsou úplné.

Uvedené soustavy hrají důležitou úlohu v mnohých praktických otázkách. Počet příkladů takových soustav je možno značně rozšířit.

V theorii řad rozvinutých podle orthogonálních funkcí má velký význam t. zv. orthogonalisace, jež umožňuje libovolnou posloupnost lineárně nezávislých funkcí převést na orthonormovanou. Nechť $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ je posloupnost (konečná nebo spočetná) takových funkcí, že $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, kde m je libovolný index, jsou navzájem lineárně nezávislé. Utvořme takovou orthonormovanou posloupnost $\omega_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, aby $\omega_m(x)$ byla lineárně vyjádřena pomocí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ a naopak, aby $\varphi_m(x)$ byla lineárně vyjádřena pomocí $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_m(x)$.

Funkce $\varphi_1(x)$ není identicky rovna nule, protože nula je lineárně závislá na každé soustavě funkcí. V tom případě je její norma kladná. Položme

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x); \; \omega_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|};$$

potom je funkce $\omega_1(x)$ normovaná. Předpokládejme nyní, že hledané orthonormované funkce $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$ jsou už sestrojeny. Položme

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \, \omega_k(x)$$

a zvolme koeficienty a_k tak, aby $\psi_n(x)$ byla orthogonální k $\omega_1(x)$, $\omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$:

$$(\varphi_n, \omega_j) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k(\omega_k, \omega_j) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Avšak

$$(\omega_k, \omega_j) = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j, \end{cases}$$

a z poslední rovnice nalezneme $a_j = (\varphi_n, \omega_j)$.

Funkce $\psi_n(x)$ není identicky rovna nule, neboť by se funkce $\varphi_n(x)$ dala v opačném případě vyjádřit lineárně pomocí $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$, a tudíž i pomocí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$. Nyní stačí položit

$$\omega_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}.$$

Jak vyplývá z konstrukce, je posloupnost $\omega_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ orthonormovaná a $\omega_n(x)$ je lineárně vyjádřena pomocí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Opačně $\varphi_n(x)$ je lineárně vyjádřena pomocí $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)$:

$$\varphi_n(x) = \|\psi_n\| \, \omega_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, \omega_k) \, \omega_k(x).$$

§ 12. Základní věty o souměrných rovnicích. Věta 1. *Jestliže jádro $K(x, s)$ je souměrné a není identicky rovno nule, pak má alespoň jedno charakteristické číslo.*

Existuje několik důkazů této velmi důležité věty; každý z nich je podkladem pro nějaký způsob přibližného výpočtu charakteristických čísel. Tyto způsoby jsou podrobně probírány v následujících odstavcích. Je třeba poznamenat, že pro nesouměrná jádra není první věta správná: existují nesouměrné rovnice, jež nemají charakteristická čísla. Takové jsou na př. rovnice Volterrovy.

Věta 1 je důsledkem věty 3, níže uvedené v tomto paragrafu, jejíž důkaz bude proveden na konci kapitoly v § 20.

Věta 2. *Všechna charakteristická čísla souměrného jádra jsou reálná.*

Nechť λ_0 je charakteristické číslo a $\varphi_0(x)$ jemu příslušející charakteristická funkce jádra $K(x, s)$. Podle definice vyhovují rovnici

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) \, ds = 0 \tag{1}$$

čili, jestliže užijeme označení, které jsme zavedli v § 8,

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 K\varphi_0 = 0.$$

Násobme tuto identitu výrazem $\overline{\varphi_0(x)}$ a integrujme vzhledem k x v mezích od a do b. Potom dostaneme

$$\|\varphi_0(x)\|^2 - \lambda_0(K\varphi_0, \varphi_0) = 0,$$

odkud

$$\lambda_0 = \frac{\|\varphi_0(x)\|^2}{(K\varphi_0, \varphi_0)}. \tag{2}$$

Čitatel ve (2) je kladný; dále podle základní vlastnosti souměrného jádra (vzorec (3), § 11)

$$(K\varphi_0, \varphi_0) = (\varphi_0, K\varphi_0).$$

Avšak výměna činitelů ve skalárním součinu je ekvivalentní s jeho nahrazením komplexně konjugovanou hodnotou:

$$(\varphi_0, K\varphi_0) = \overline{(K\varphi_0, \varphi_0)}.$$

Tudíž

$$(K\varphi_0, \varphi_0) = \overline{(K\varphi_0, \varphi_0)}. \tag{3}$$

Číslo $(K\varphi_0, \varphi_0)$, jež se rovná číslu k němu konjugovanému, je reálné. Nyní ze (2) plyne, že hodnota λ_0 je také reálná.

V ě t a 3. *Převrácená absolutní hodnota nejmenšího charakteristického čísla souměrného jádra se rovná maximu veličiny*

$$|(K\varphi, \varphi)| = |\int_a^b\int_a^b K(x, s)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(s)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s| \tag{4}$$

s vedlejší podmínkou

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b |\varphi^2(x)|\, \mathrm{d}x = 1. \tag{5}$$

Uvedeného maxima nabude, je-li $\varphi(x)$ charakteristická funkce jádra, jež přísluší nejmenšímu charakteristickému číslu.

Důkaz této věty není elementární a je třeba zavést k němu několik nových pojmů; tomuto důkazu bude věnován § 20 této kapitoly.

V ě t a 4. *Charakteristické funkce souměrného jádra, jež příslušejí různým charakteristickým číslům, jsou navzájem orthogonální.*

Nechť λ_1 a λ_2 jsou různá charakteristická čísla souměrného jádra $K(x, s)$ a $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ jsou jim příslušející charakteristické funkce. Potom

$$\varphi_1(x) - \lambda_1 K\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2(x) - \lambda_2 K\varphi_2 = 0.$$

Vynásobme skalárně první rovnici výrazem $\lambda_2 \varphi_2(x)$ a druhou $\lambda_1 \varphi_1(x)$. Číselné koeficienty vytkneme před skalární součin a přihlédneme k tomu, že podle věty 2 jsou reálné:

$$\lambda_2(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1\lambda_2(K\varphi_1, \varphi_2) = 0; \tag{6}$$

$$\lambda_1(\varphi_2, \varphi_1) - \lambda_1\lambda_2(K\varphi_2, \varphi_1) = 0. \tag{7}$$

V (7) vyměníme činitele ve skalárním součinu a nahradíme všechny členy sdruženými. Potom dostaneme

$$\lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1\lambda_2(\varphi_1, K\varphi_2) = 0$$

čili, podle vzorce (3), § 11,

$$\lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda_1\lambda_2(K\varphi_1, \varphi_2) = 0. \tag{8}$$

Odečtěme (6) od (8):

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Avšak $\lambda_2 \neq \lambda_1$, tudíž je nutně $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, čímž je věta dokázána.

V souvislosti s větou 4 učiňme tuto poznámku. Nechť některému charakteristickému číslu odpovídá n lineárně nezávislých charakteristických funkcí. Jejich libovolná lineární kombinace je také charakteristickou funkcí. Pomocí orthogonalisace je možno z daných n lineárně nezávislých funkcí sestrojit n lineárních kombinací, jež budou normované a po dvou orthogonální, při čemž dané funkce budou opět lineárními kombinacemi sestrojených. Avšak v takovém případě je možno učinit všechny charakteristické funkce souměrného jádra po dvou orthogonálními. Opravdu, jestliže charakteristické funkce příslušejí témuž charakteristickému číslu, budou orthogonálními v důsledku orthogonalisace; jestliže příslušejí různým charakteristickým číslům, pak jsou orthogonální v důsledku věty 4. Tak dojdeme k větě:

Věta 5. *Posloupnost charakteristických funkcí souměrného jádra je možno učinit orthonormovanou.*

V dalším budeme vždy předpokládat v souhlase s větou 5, že posloupnost charakteristických funkcí souměrného jádra je orthonormovaná. Umluvíme se ještě, že při psaní posloupnosti charakteristických čísel budeme opakovat každé z nich tolikrát, kolik mu přísluší charakteristických, lineárně nezávislých funkcí. Potom můžeme předpokládat, že každému charakteristickému číslu odpovídá pouze jedna charakteristická funkce; přitom se mezi charakteristickými čísly mohou vyskytovat čísla stejná. Umluvíme se také, že budeme číslovat charakteristická čísla podle vzrůstajících absolutních hodnot. Tudíž, jestliže λ_m a λ_n jsou dvě charakteristická čísla a $m < n$, pak $|\lambda_m| \leqq |\lambda_n|$.

§ 13. Věta Hilbert-Schmidtova. Lemma 1. *Množina charakteristických čísel druhého iterovaného jádra je totožná s množinou čtverců charakteristických čísel daného jádra.*

Nepředpokládáme zde, že jádro je souměrné.

a) Nechť λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$ a $\varphi_0(x)$ je příslušná charakteristická funkce. Potom $(E - \lambda_0 K)\, \varphi_0 = 0$. Aplikujeme-li na obě strany poslední relace operátor $E + \lambda_0 K$, dostaneme

$$(E - \lambda_0^2 K^2)\, \varphi_0 = 0$$

čili podrobněji

$$\varphi_0(x) - \lambda_0^2 \int_a^b K_2(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0,$$

odkud plyne, že λ_0^2 je charakteristické číslo jádra $K_2(x, s)$.

b) Nechť μ_0 je charakteristické číslo jádra $K_2(x, s)$ a $\varphi_0(x)$ je příslušná charakteristická funkce, takže $(E - \mu_0 K_2)\,\varphi_0 = 0$ čili, když položíme $\mu_0 = \lambda_0^2$,

$$(E - \lambda_0 K)(E + \lambda_0 K)\,\varphi_0 = 0. \tag{1}$$

Může se stát, že λ_0 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$; potom lemma 1 je správné. Předpokládejme nyní, že tomu tak není. Označme $(E + \lambda_0 K)\,\varphi_0 = \varphi_1(x)$. V důsledku rovnice (1) $(E - \lambda_0 K)\,\varphi_1 = 0$; protože λ_0 není charakteristické číslo jádra $K(x, s)$, pak $\varphi_1(x) = 0$ čili $(E + \lambda_0 K)\,\varphi_0 = 0$. Poslední relace ukazuje, že $-\lambda_0$ je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$. Tím je lemma dokázáno.

Poznámka. Lze dokázat i obecnější tvrzení: Množina charakteristických čísel jádra $K_n(x, s)$ je identická s množinou n-tých mocnin charakteristických čísel jádra $K(x, s)$.

Lemma 2. *Nechť jádro $K(x, s)$ je souměrné a vyhovuje nerovnosti* (1), § 2,

$$\int_a^b |K^2(x, s)|\, ds < C_1, \quad C_1 = \text{konst.}$$

Dále nechť $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ je posloupnost všech charakteristických funkcí jádra $K(x, s)$ a λ_n jsou jim příslušející charakteristická čísla. Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n^2(x)|}{\lambda_n^2} \tag{2}$$

konverguje a její součet není větší než konstanta C_1.

Zvolme pevně hodnotu proměnné x a uvažujme jádro $K(x, s)$ jako funkci proměnné s. Najděme Fourierovy koeficienty této funkce vzhledem k orthonormované posloupnosti $\overline{\varphi_n(s)}$, $n = 1, 2, \ldots$ Označme tyto koeficienty a_n; potom

$$a_n = \int_a^b K(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds = \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}.$$

Podle Besselovy nerovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n^2(x)|}{\lambda_n^2} \leqq \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds \leqq C_1,$$

čímž je lemma dokázáno.

Lemma 3. *Jestliže $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$ je množina všech charakteristických čísel jádra $K(x, s)$ a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \ldots$ jsou jim příslušející charakteristické funkce, pak souměrné jádro*

$$K^{(n)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_m(x)\,\overline{\varphi_m(s)}}{\lambda_m} \tag{3}$$

má charakteristická čísla $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$, jimž příslušejí charakteristické funkce $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \ldots$ Jiná charakteristická čísla a charakteristické funkce jádro $K^{(n)}(x, s)$ nemá.

Rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K^{(n)}(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0$$

je možno napsat ve tvaru

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + \lambda \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} (\varphi, \varphi_m) = 0. \tag{4}$$

Dosaďme do levé strany rovnice (4) $\lambda = \lambda_j$ a $\varphi(x) = \varphi_j(x)$, kde $j > n$. Poněvadž funkce $\varphi_k(x)$ jsou orthogonální, je pro $j > m$ $(\varphi_j, \varphi_m) = 0$; po dosazení dostaneme

$$\varphi_j(x) - \lambda_j \int_a^b K(x, s)\, \varphi_j(s)\, ds,$$

což je očividně rovné nule. Tudíž λ_j a $\varphi_j(x)$, $j > n$, jsou charakteristická čísla a charakteristické funkce jádra $K(x, s)$.

Nechť nyní λ_0 je charakteristické číslo a $\varphi_0(x)$ charakteristická funkce jádra $K^{(n)}(x, s)$, takže

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 K\varphi_0 + \lambda_0 \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} (\varphi_0, \varphi_m) = 0. \tag{5}$$

Vynásobme tuto rovnici skalárně $\varphi_j(x)$, avšak tentokrát pro $j \leqq n$. Vzhledem k orthogonálnosti a normovanosti funkcí $\varphi_m(x)$ dostaneme

$$(\varphi_0, \varphi_j) - \lambda_0 (K\varphi_0, \varphi_j) + \frac{\lambda_0}{\lambda_j} (\varphi_0, \varphi_j) = 0. \tag{6}$$

Podle vzorce (3), § 11 $(K\varphi_0, \varphi_j) = (\varphi_0, K\varphi_j)$. Dosaďme toto do (6) a slučme poslední dva členy. Potom

$$(\varphi_0, \varphi_j) + \frac{\lambda_0}{\lambda_j} (\varphi_0, \varphi_j - \lambda_j K\varphi_j) = (\varphi_0, \varphi_j) = 0.$$

Avšak pak v rovnici (5) vymizí součet a dostaneme

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\, \varphi_0(s)\, \mathrm{d}s = 0.$$

Z toho plyne, že λ_0 je charakteristické číslo a $\varphi_0(x)$ charakteristická funkce jádra $K(x, s)$. Přitom $\varphi_0(x) \neq \varphi_j(x)$, $j \leq n$, neboť tyto funkce jsou orthogonální. Avšak potom $\varphi_0(x)$ a λ_0 jsou nutně obsaženy v posloupnostech $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \ldots$ a $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$

Poznámka. Předpokládejme, že $K(x, s)$ má pouze konečný počet charakteristických čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Potom jádro $K^{(n)}(x, s)$ nemá charakteristická čísla. Podle věty (1), § 12 $K^{(n)}(x, s) \equiv 0$. Odtud plyne, že

$$K(x, s) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\varphi_m(x)\, \overline{\varphi_m(s)}}{\lambda_m},$$

a tudíž jádro $K(x, s)$ je degenerované.

V § 4 jsme dokázali, že každé degenerované jádro má pouze konečný počet charakteristických čísel. Srovnáme-li tyto dva výsledky, dojdeme k závěru, že *souměrné jádro má konečný počet charakteristických čísel tehdy a jen tehdy, když je toto jádro degenerované.*

Věta Hilbert-Schmidtova. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ jsou charakteristická čísla souměrného jádra $K(x, s)$ a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ jsou příslušející charakteristické funkce. Nechť $h(x)$ je funkce, jejíž čtverec je absolutně integrovatelný v intervalu $\langle a, b\rangle$. Jestliže integrál*

$$\int_a^b |K^2(x, s)|\, \mathrm{d}s$$

je omezený, potom funkci

$$f(x) = Kh = \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, \mathrm{d}s \tag{7}$$

lze rozvinout v absolutně a stejnoměrně konvergentní Fourierovu řadu podle orthonormované soustavy funkcí $\varphi_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, \varphi_n(x), \quad f_n = (f, \varphi_n).$$

Fourierovy koeficienty f_n funkce $f(x)$ jsou vázány s Fourierovými koeficienty h_n funkce $h(x)$ relacemi

$$f_n = \frac{h_n}{\lambda_n}, \quad h_n = (h, \varphi_n),$$

takže

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x). \tag{8}$$

Všimněme si toho podstatného faktu, že nepředpokládáme ani konvergenci Fourierovy řady funkce $h(x)$, ani úplnost orthonormované soustavy charakteristických funkcí.

1°. Najděme Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$ vzhledem k orthonormované soustavě $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n = (f, \varphi_n) = (Kh, \varphi_n) = (h, K\varphi_n).$$

Avšak $\varphi_n - \lambda_n K\varphi_n = 0$. Odtud $K\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x)$ a

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} (h, \varphi_n) = \frac{h_n}{\lambda_n}.$$

Uvažujme Fourierovu řadu funkce $f(x)$. Tato řada má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x). \tag{9}$$

Odhadněme její zbytek. Podle Cauchyho nerovnosti

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|^2 \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p} h_k^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p} h_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}.$$

Podle lemmatu 2 je druhý součet omezený a prvý součet může být v důsledku konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ učiněn libovolně malým. Odtud plyne, že řada (9) konverguje absolutně a stejnoměrně. Součet této řady označme $\omega(x)$ a její n-tý částečný součet $\omega_n(x)$.

2°. Odhadněme veličinu $\|f(x) - \omega_n(x)\|^2$. Máme

$$f(x) - \omega_n(x) = Kh - \sum_{m=1}^{n} \frac{h_m}{\lambda_m} \varphi_m(x) = Kh - \sum_{m=1}^{n} \frac{(h, \varphi_m)}{\lambda_m} \varphi_m(x) = K^{(n)}h,$$

kde v souhlase s naším označením

$$K^{(n)}h = \int_a^b K^{(n)}(x, s)\, h(s)\, ds.$$

Dále
$$\|f(x) - \omega_n(x)\|^2 = \|K^{(n)}h\|^2 = (K^{(n)}h, K^{(n)}h).$$
Aplikujeme-li na skalární součin vzorec (3), § 11, dostaneme
$$\|f(x) - \omega_n(x)\|^2 = (h, (K^{(n)})^2 h).$$
$(K^{(n)})^2$ je Fredholmův operátor, jehož jádro je druhým iterovaným jádrem vzhledem k $K^{(n)}(x, s)$. Označme toto iterované jádro $K_2^{(n)}(x, s)$, jak je zvykem a pišme $K_2^{(n)}h$ místo $(K^{(n)})^2 h$. Potom
$$\|f(x) - \omega_n(x)\|^2 = (h, K_2^{(n)}h).$$
Podle lemmat 3 a 1 je nejmenší charakteristické číslo jádra $K_2^{(n)}(x, s)$ rovno λ_{n+1}^2 a podle věty 3, § 12
$$\frac{1}{\lambda_{n+1}^2} = \max \frac{(\varphi, K_2^{(n)}\varphi)}{(\varphi, \varphi)}^{1}.$$
Potom pro libovolnou funkci $h(x)$
$$\frac{(h, K_2^{(n)}h)}{(h, h)} \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2},$$
čili $(h, K_2^{(n)}h) \leqq \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} (h, h)$. Avšak $\lambda_{n+1} \to \infty$. Odtud
$$\|f(x) - \omega_n(x)\|^2 = (h, K_2^{(n)}h) \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$
3°. Dokažme nyní, že $f(x) \equiv \omega(x)$. Odhadněme proto nejdříve veličinu $\|f - \omega\|$. Podle trojúhelníkové nerovnosti
$$\|f - \omega\| \leqq \|f - \omega_n\| + \|\omega_n - \omega\|.$$
Podle dokázaného, konverguje prvý sčítanec napravo k nule pro $n \to \infty$. Stejně tak konverguje k nule i druhý sčítanec. Skutečně řada (8) konverguje stejnoměrně; proto pro dostatečně velká n bude $\|\omega_n(x) - \omega(x)\| < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo.

Odtud
$$\|\omega_n - \omega\|^2 = \int_a^b |\omega_n(x) - \omega(x)|^2 \, dx < \varepsilon^2(b - a),$$
což může být učiněno libovolně malým. Tudíž $\|f - \omega\| \to 0$ pro $n \to \infty$, avšak $\|f - \omega\|$ nezávisí na n, tedy $\|f - \omega\| = 0$ a tedy také $f(x) \equiv \omega(x)$.

---

[1] Vynecháváme zde znak absolutní hodnoty, neboť
$$(\varphi, K_2^{(n)}\varphi) = (\varphi, (K^{(n)})^2 \varphi) = (K^{(n)}\varphi, K^{(n)}\varphi) = \|K^{(n)}\varphi\|^2 \geqq 0.$$

§ 14. Určení prvého charakteristického čísla Ritzovou methodou.

Věta 3, § 12 převádí úlohu určit nejmenší charakteristické číslo souměrného jádra na úlohu určit maximum veličiny

$$|(K\varphi, \varphi)| = |\int_a^b \int_a^b K(x, s)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(s)}\, dx\, ds| \tag{1}$$

s vedlejší podmínkou

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b |\varphi^2(x)|\, dx = 1. \tag{2}$$

Tato věta nám umožňuje užít přímých method variačního počtu k nalezení nejmenšího charakteristického čísla. Speciálně je možno užít methody Ritzovy. Zvolme libovolnou posloupnost funkcí

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots, \tag{3}$$

kterou budeme považovat za úplnou, při čemž pojmu „úplná posloupnost" dáváme takový význam: pro libovolnou funkci $f(x)$ je vždy možno zvolit číslo n a koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tak, aby

$$\|f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(x)\| < \varepsilon,$$

kde ε je libovolné kladné číslo. Jinými slovy, posloupnost (3) nazýváme úplnou, jestliže je možno zvolit koeficienty α_k a číslo n tak, aby střední kvadratická chyba relace

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(x)$$

byla libovolně malá. Zejména jako posloupnost (3) můžeme zvolit libovolnou úplnou orthonormovanou posloupnost. Položme v (1)

$$\varphi(x) = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x) + \ldots + a_n \psi_n(x),$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou libovolné koeficienty vyhovující podmínce, že $(\varphi, \varphi) = 1$. Tato podmínka nabývá tvaru

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_i \bar{a}_k (\psi_i, \psi_k) = 1 \tag{4}$$

a výraz (1) přejde v

$$|(K\varphi, \varphi)| = |\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i \bar{a}_k|, \tag{5}$$

kde

$$A_{ik} = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, \psi_i(x)\, \overline{\psi_k(s)}\, dx\, ds.$$

V důsledku souměrnosti jádra $A_{ik} = \overline{A}_{ki}$.

Budeme hledat maximum výrazu (5) při podmínce (4). Máme tedy nalézt maximum funkce několika proměnných. Jestliže tuto úlohu rozřešíme a vypočteme maximum veličiny (5), najdeme tím současně přibližnou absolutní hodnotu nejmenšího charakteristického čísla. Dokažme, že tímto způsobem dostaneme přibližnou hodnotu, která je větší než hodnota přesná a která k přesné hodnotě konverguje pro $n \to \infty$.

Označme $\dfrac{1}{\lambda_1^{(n)}}$ maximum veličiny (5) a $\varphi^{(n)}(x)$ funkci, jež toto maximum realisuje. Potom

$$\frac{1}{\lambda_1^{(n)}} = |(K\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)}| \leqq \max|(K\varphi, \varphi)| = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

kde λ_1 je co do absolutní hodnoty nejmenší charakteristické číslo daného jádra. Odtud $\lambda_1^{(n)} \geqq |\lambda_1|$.

Zbývá dokázat, že $\lambda_1^{(n)} \to |\lambda_1|$. Protože soustava (3) je úplná, můžeme najít funkci tvaru

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(x), \quad \alpha_k = \text{konst.}$$

takovou, že $\|\varphi_1 - \omega\| < \frac{1}{4}\varepsilon$, kde $\varphi_1(x)$ je charakteristická funkce jádra $K(x, s)$ příslušející charakteristickému číslu λ_1 a ε je libovolné kladné číslo. Položme dále

$$\omega_1(x) = \frac{\omega(x)}{\|\omega\|}.$$

Potom $\omega_1(x)$ vyhovuje podmínce (2). Odhadněme veličinu $\|\varphi_1 - \omega_1\|$. Podle trojúhelníkové nerovnosti máme $\|\varphi_1\| - \|\omega\| \leqq \|\varphi_1 - \omega\| \leqq \frac{1}{4}\varepsilon$, odkud $\|\omega\| > 1 - \frac{1}{4}\varepsilon$. Označme ještě $\|\omega\| = \sigma$. Nyní

$$\|\varphi_1 - \omega_1\| = \frac{\|\sigma\varphi_1 - \omega\|}{\sigma} < \frac{\|\sigma\varphi_1 - \omega\|}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon}.$$

Při dostatečně malém ε, $1 - \frac{1}{4}\varepsilon > \frac{1}{2}$ a tudíž

$$\|\varphi_1 - \omega_1\| < 2\|\sigma\varphi_1 - \omega\| = 2\|\varphi_1 - \omega - (1 - \sigma)\,\varphi_1\| \leqq$$
$$\leqq 2\|\varphi_1 - \omega\| + 2|1 - \sigma| < \varepsilon.$$

Nyní odhadněme rozdíl

$$A = |(K\varphi_1, \varphi_1)| - |(K\omega_1, \omega_1)|.$$

Funkce $\omega_1(x)$ vyhovuje podmínce (2). Odtud a z věty 3, § 12 vyplývá, že $A > 0$. Dále je zřejmě

$$A \leqq |(K\varphi_1, \varphi_1) - (K\omega_1, \omega_1)|.$$

Uvažujme veličinu

$$(K(\varphi_1 + \omega_1), \varphi_1 - \omega_1) = (K\varphi_1 + K\omega_1, \varphi_1 - \omega_1) =$$
$$(K\varphi_1, \varphi_1) + (K\omega_1, \varphi_1) - (K\varphi_1, \omega_1) - (K\omega_1, \omega_1).$$

Podle vzorce (3), § 11 se druhý a třetí člen na pravé straně vzájemně ruší, takže dostaneme

$$A \leqq |(K(\varphi_1 + \omega_1), \varphi_1 - \omega_1)|.$$

Užijme nerovnosti Buňakovského:

$$A^2 \leqq \|K(\varphi_1 + \omega_1)\|^2 \cdot \|\varphi_1 - \omega_1\|^2 < \varepsilon^2 \|K(\varphi_1 + \omega_1)\|^2.$$

Dále

$$\|\varphi_1 + \omega_1\| \leqq \|\varphi_1\| + \|\omega_1\| = 2$$

a

$$\|K(\varphi_1 + \omega_1)\|^2 = \int_a^b \left|\int_a^b K(x, s)[\varphi_1(s) + \omega_1(s)]\, \mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}x.$$

Opět podle nerovnosti Buňakovského

$$\left|\int_a^b K(x, s)[\varphi_1(s) + \omega_1(s)]\, \mathrm{d}s\right|^2 \leqq \int_a^b |K^2(x, s)|\, \mathrm{d}s \int_a^b |\varphi_1(s) + \omega_1(s)|^2\, \mathrm{d}s \leqq$$
$$\leqq 4 \int_a^b |K^2(x, s)|\, \mathrm{d}s.$$

Integrujeme-li tuto nerovnost, dostaneme

$$\|K(\varphi_1 + \omega_1)\|^2 \leqq 4B^2$$

a konečně

$$A < 2B\varepsilon.$$

Podle definice funkce $\varphi^{(n)}$

$$|(K\varphi_1, \varphi_1)| \geqq |(K\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})| \geqq |(K\omega_1, \omega_1)|.$$

Odtud

$$\frac{1}{|\lambda_1|} - \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} = |(K\varphi_1, \varphi_1)| - |(K\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})| \leqq A.$$

Avšak A může být učiněno libovolně malým. Odtud plyne, že $\frac{1}{\lambda_1^{(n)}} \to$ $\to \frac{1}{|\lambda_1|}$ a tedy $\lambda_1^{(n)} \to |\lambda_1|$.

Připomeňme několik případů, kdy může být úloha zjednodušena.

a) Jestliže je jádro $K(x, s)$ reálné a funkce $\psi_i(x)$ jsou zvoleny také reálně, potom se můžeme omezit na uvažování pouze reálných koeficientů a_k. Místo (4) a (5) dostaneme výrazy

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_i a_k (\psi_i, \psi_k) = 1, \tag{4_1}$$

$$|(K\varphi, \varphi)| = |\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i a_k|, \tag{5_1}$$

při čemž

$$A_{ik} = \int_a^b \int_a^b K(x, s)\, \psi_i(x)\, \psi_k(s)\, dx\, ds.$$

Případ reálného jádra je nejdůležitější pro aplikace, jež nás zajímají. Na tento případ se zde omezíme.

b) Jestliže posloupnost (3) je orthonormovaná, nabývá vztah (4_1) jednoduššího tvaru:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

c) Úloha se obzvláště zjednoduší, jestliže je známo, že výraz $(K\varphi, \varphi)$ nabývá pouze kladných hodnot.[1] V tomto případě je třeba určit maximum kvadratické formy

$$(K\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i a_k \tag{5_2}$$

při podmínce (4_1). Vzorec (2), § 12 ukazuje, že v uvažovaném případě jsou charakteristická čísla kladná, a maximum formy (5_2) ihned dává hledanou přibližnou hodnotu charakteristického čísla.

Pomocí Lagrangeovy methody neurčitých koeficientů se maximum formy (5_2) nalezne takto: Označme

$$F = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i a_k, \quad \Phi = F - \sigma \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \tag{6}$$

[1] Jádra, jež mají tuto vlastnost, se nazývají *kladně definitní.*

kde σ je neurčitý koeficient. Extrémní hodnoty proměnných a_i jsou určeny rovnicemi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial a_i} - 2\sigma a_i = 0$$

nebo v explicitním tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k - \sigma a_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Soustava (7) je lineární, homogenní. Koeficienty a_i nejsou současně rovny nule, neboť $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, a proto se determinant soustavy (7) musí rovnat nule; tím dostaneme pro neznámou σ rovnici

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \sigma, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22} - \sigma, & \ldots, & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Násobíme-li (7) výrazem a_i, sečteme-li pro všechna i a užijeme-li toho, že $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, najdeme, že $\sigma = F$. Přitom F zde zřejmě označuje extrémní hodnotu kvadratické formy F. Je také zřejmé, že se maximální hodnota F rovná největšímu z kořenů rovnice (8).

Řešení rovnice (8) se značně zjednoduší, jestliže užijeme methody akademika A. N. Krylova k výpočtu determinantu na levé straně.[1]

Současně s charakteristickým číslem bývá důležité určit i příslušnou charakteristickou funkci. Tato úloha je podstatně složitější než úloha určit charakteristická čísla. Jednoduše se však řeší, jestliže už předem víme, že nalezenému charakteristickému číslu přísluší pouze jedna charakteristická funkce. V tomto případě stačí nalézt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ze soustavy (7); výraz

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x)$$

se přibližně rovná hledané charakteristické funkci.

[1] Podrobněji o této methodě viz v článku A. N. Krylova „O čislennom rešenii uravněnija, kotorym opreděljajutsja častoty malych kolebanij matěrialnoj sistěmy". Izvěstija AN SSSR, Otděl matěmatičeskich i jestěstvěnnych nauk, 1931, No. 4.

Uvažujme jako příklad rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0,$$

kde

$$K(x, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varkappa} x(\varkappa - s), & x \leqq s \\ \dfrac{1}{\varkappa} s(\varkappa - x), & x \geqq s \end{cases} \quad (\varkappa > 1). \tag{9}$$

K této rovnici dospějeme při řešení jedné z úloh theorie vedení tepla. Lze dokázat, že jádro (9) je kladné. Za posloupnost (3) vezmeme posloupnost orthonormovanou v intervalu $\langle 0, 1\rangle$

$$\psi_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Nalezněme přibližné hodnoty nejmenšího charakteristického čísla; při tom budeme klást $n = 2, 3, 4$. Zvolme pro určitost $\varkappa = 2$. Pro koeficienty A_{ik} lehce dostaneme:

$$A_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}}{ik\pi^2}, \quad i \neq k; \quad A_{ii} = \frac{2}{i^2\pi^2}.$$

Vezmeme-li $n = 2$, budeme řešit úlohu nalézt maximum kvadratické formy

$$F = \frac{1}{\pi^2}(2a_1^2 - a_1a_2 + \tfrac{1}{2}a_2^2)$$

při podmínce $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Rovnice (8) nabývá v našem případě tvaru ($\tau = \sigma\pi^2$)

$$\begin{vmatrix} 2 - \tau, & -1 \\ -1, & 2 - 4\tau \end{vmatrix} = 0$$

čili $4\tau^2 - 10\tau + 3 = 0$. Větší kořen této rovnice je $\tau \approx 2{,}15$. Odtud

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi^2}{2{,}15} \approx 4{,}59.$$

Vezmeme-li $n = 3$, dostaneme pro $\tau = \sigma\pi^2$ rovnici

$$\begin{vmatrix} 2 - \tau, & -1, & 1 \\ -1, & 2 - 4\tau, & -1 \\ 1, & -1, & 2 - 9\tau \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$18\tau^3 - 49\tau^2 + 21\tau - 2 = 0;$$

její největší kořen se rovná 2,22. To dává pro λ_1 hodnotu $\lambda_1 \approx 4{,}47$.

Vezmeme-li $n = 4$, přijdeme k rovnici

$$\begin{vmatrix} 2-\tau, & -1, & 1, & -1 \\ -1, & 2-4\tau, & -1, & 1 \\ 1, & -1, & 2-9\tau, & -1 \\ -1, & 1, & -1, & 2-16\tau \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$576\tau^4 - 1640\tau^3 + 819\tau^2 - 120\tau + 5 = 0.$$

Její největší kořen se rovná 2,258, což dává $\lambda_1 \approx 4{,}371$. Přesnější hodnota λ_1, kterou dostaneme jiným způsobem, se rovná 4,115.

Objasněme stručně, jak jsme dostali tuto hodnotu λ_1. Homogenní rovnice s jádrem (9) má tvar

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\varkappa}\int_0^x s(\varkappa - x)\,\varphi(s)\,ds - \frac{\lambda}{\varkappa}\int_x^1 x(\varkappa - s)\,\varphi(s)\,ds = 0. \tag{10}$$

Derivujeme-li ji, dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(x) + \frac{\lambda}{\varkappa}\int_0^x s\,\varphi(s)\,ds - \frac{\lambda}{\varkappa}\int_x^1 (\varkappa - s)\,\varphi(s)\,ds = 0, \\ \varphi''(x) + \lambda\,\varphi(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Odtud $\varphi(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$, $\mu = \sqrt{\lambda}$. Z (10) a (11) plyne, že $\varphi(0) = 0$, $(\varkappa - 1)\,\varphi'(1) + \varphi(1) = 0$. První z těchto relací dává $A = 0$; druhá, jež má pro $\varkappa = 2$ poněkud jednodušší tvar $\varphi'(1) + \varphi(1) = 0$, dává rovnici pro určení μ:

$$\mu + \operatorname{tg}\mu = 0.$$

Kořeny této rovnice dostaneme, sestrojíme-li v rovině (μ, y) průsečíky křivek $y = -\mu$, $y = \operatorname{tg}\mu$. Není obtížné nahlédnout, že nejmenší kladný kořen leží v mezích $\frac{1}{2}\pi < \mu < \pi$. Položme $\mu = \pi - \nu$ a takto nalezenou rovnici

$$\operatorname{tg}\nu = \pi - \nu$$

budeme řešit iterační methodou, kladouce $\nu_0 = 1$. Opakujeme-li proces tak dlouho, dokud nedostaneme řešení na 4 desetinná místa přesně, nalezneme $\nu = 1{,}1128$, odkud $\mu = 2{,}0288$ a $\lambda = \mu^2 = 4{,}115$.

§ 15. Určení prvého charakteristického čísla pomocí stop jádra. Ve vzorci Hilbert-Schmidtově (8), § 13 položme $h(s) = K(s, t)$. Dostaneme

$$K_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(t)}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

kde $\omega_n(t)$ jsou Fourierovy koeficienty jádra $K(x, t)$ vzhledem k soustavě jeho charakteristických funkcí $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ Není obtížné vypočítat tyto koeficienty. Podle vzorců pro Fourierovy koeficienty

$$\omega_n(t) = \int_a^b K(x, t)\, \overline{\varphi_n(x)}\, \mathrm{d}x$$

čili, jelikož jádro je souměrné,

$$\omega_n(t) = \int_a^b \overline{K(t, x)}\, \overline{\varphi_n(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Avšak $\varphi_n(x)$ vyhovuje rovnici

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t)\, \mathrm{d}t.$$

Změníme-li označení t za x a naopak, najdeme

$$\int_a^b K(t, x)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(t)$$

a konečně

$$\omega_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \overline{\varphi(t)}.$$

Nyní

$$K_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^2}. \tag{1}$$

Podobně najdeme

$$K_3(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^3}$$

a obecně

$$K_m(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^m}. \tag{2}$$

Abychom dostali na př. vzorec pro $K_3(x, t)$, můžeme opět užít vzorce Hilbert-Schmidtova, položíme-li v něm $h(s) = K_2(s, t)$. Při tom je třeba si uvědomit, že podle vzorce (1) je n-tý Fourierův koeficient jádra $K_2(x, t)$ roven $\frac{1}{\lambda_n^2} \overline{\varphi_n(t)}$.

Řada (2) konverguje stejnoměrně vzhledem k oběma proměnným x, t současně, jestliže $m \geqq 3$ a je splněna podmínka, kterou obyčejně předpokládáme:

$$\int_a^b |K^2(x, t)| \, dt < C_1, \; C_1 = \text{konst.}$$

Abychom to dokázali, uvažujme zbytek řady (2)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k^m} \right| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|} \sum_{k=n+1}^{n+p} \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \left| \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \left| \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right|.$$

Užijeme-li Cauchyho nerovnosti a lemmatu 2, § 13, dostaneme

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k^m} \right| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^2(s)|}{\lambda_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{C_1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}.$$

Poslední zlomek konverguje k nule, neboť $\lambda_n \to \infty$; odtud plyne stejnoměrná a absolutní konvergence řady (2). Řada (1) konverguje stejnoměrně vzhledem ke každé z proměnných x a t, zvolíme-li pevně hodnotu druhé proměnné. To plyne z věty Hilbert-Schmidtovy.

Řada (2) se nazývá *bilineární řada* jádra $K_m(x, t)$.[1] Připomeňme, že integrál

$$A_m = \int_a^b K_m(x, x) \, dx$$

jsme nazvali m-tou stopou jádra $K(x, s)$. Jestliže je jádro souměrné, jsou jeho stopy v jednoduchém vztahu k charakteristickým číslům, totiž

$$A_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}, \; m \geqq 2. \tag{3}$$

---

[1] Můžeme sestrojit bilineární řadu i pro jádro $K(x, s)$. Má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n}. \tag{*}$$

Řada (*), obecně řečeno, diverguje. Můžeme však dokázat, že konverguje v průměru ke $K(x, s)$. Jestliže řada (*) konverguje stejnoměrně vzhledem k x i s, pak její součet je roven jádru $K(x, s)$.

Vzorec (3) lehce dostaneme, položíme-li ve vzorci (2) $t = x$ a zintegrujeme-li jej v mezích od a do b. Při tom je nutno si uvědomit, že charakteristické funkce jsou normovány, takže

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 \, dx = 1.$$

Při odvození vztahu (3) je třeba integrovat člen po členu řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^m}$$

Pro $m > 2$ je tento postup oprávněný vzhledem k stejnoměrné konvergenci řady (2) a pro $m = 2$ vzhledem k Lebesgueově větě o integrování řad s kladnými členy člen po členu.

Stopy se sudými indexy jsou všechny kladné, protože

$$A_{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2m}}, \tag{4}$$

a charakteristická čísla λ_n jsou reálná.

Poznamenejme ještě, že

$$A_{2m} = \int_a^b \int_a^b |K_m(x, t)|^2 \, dx \, dt. \tag{5}$$

Skutečně podle vzorce (8), § 2

$$K_{2m}(x, s) = \int_a^b K_m(x, t) \, K_m(t, s) \, dt$$

čili v důsledku souměrnosti jádra

$$K_{2m}(x, s) = \int_a^b K_m(x, t) \, \overline{K_m(s, t)} \, dt.$$

Odtud

$$K_{2m}(x, x) = \int_a^b |K_m(x, t)|^2 \, dt.$$

Integrujeme-li poslední rovnici vzhledem k proměnné x, dostaneme vzorec (5).

Ukažme, jak lze určit nejmenší charakteristické číslo, jestliže známe stopy jádra. Nechť číslu λ_1 přísluší p lineárně nezávislých charakteristických funkcí a číslu $-\lambda_1$, jestliže je také charakteristické, přísluší q lineárně nezávislých charakteristických funkcí, takže se člen, v němž se vyskytuje λ_1^{2m}, objevuje v řadě (4) $r = (p + q)$-krát. Přepišme (4) ve tvaru

$$A_{2m} = \frac{r}{\lambda_1^{2m}}(1 + \varepsilon_m), \tag{6}$$

kde jsme jako ε_m označili veličinu

$$\varepsilon_m = \frac{1}{r} \sum_{n=r+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{2m}.$$

Užijeme-li toho, že $|\lambda_n| > |\lambda_1|$ pro $n > r$, můžeme lehce dokázat, že $\varepsilon_m \to 0$ pro $m \to \infty$.

Skutečně nechť se sčítanec $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}$ vyskytuje v ε_m r'-krát. Potom

$$\varepsilon_m = \frac{1}{r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}\left[r' + \sum_{k=r+r'+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_n}\right)^{2m}\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}\left[r' + \sum_{k=r+r'+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_n}\right)^{2}\right]$$

a je zřejmo, že poslední výraz konverguje k nule pro $m \to \infty$. Nyní ze (6) plyne

$$\lambda_1^2 = \lim_{m\to\infty} \frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}; \quad \lambda_1^2 = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\frac{1}{A_{2m}}}. \tag{7}$$

Z (6) dostaneme také přibližné vzorce, jež jsou vhodné při dostatečně velkém m:

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}; \quad |\lambda_1| \approx \sqrt[2m]{\frac{r}{A_{2m}}}. \tag{7$_1$}$$

Z (3) můžeme dostat vzorec, jenž dává λ_1 i se znaménkem

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2m+1]{A_{2m+1}}}, \tag{8}$$

a příslušný přibližný vzorec

$$\lambda_1 \approx \sqrt[2m+1]{\frac{p}{A_{2m+1}}}. \tag{8$_1$}$$

Oba jsou správné vždy, když $q = 0$.

Užití vzorce (8_1) je možno doporučit pouze tenkrát, když se nepodaří určit znaménko λ_1 jiným způsobem.

Ze vzorce (6) plyne

$$|\lambda_1| = \sqrt[2m]{\frac{r(1+\varepsilon_m)}{A_{2m}}} > \sqrt[2m]{\frac{r}{A_{2m}}}.$$

Tudíž druhý ze vzorců (7_1) dává hodnotu $|\lambda_1|$ menší než je hodnota přesná. Prvý vzorec (7_1) dává hodnotu $|\lambda_1|$ větší, než je hodnota přesná. Skutečně je zřejmé, že $\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1}$, a proto

$$\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}} = \lambda_1^2 \frac{1+\varepsilon_m}{1+\varepsilon_{m+1}} > \lambda_1^2.$$

Jako příklad vezměme jádro uvažované již v předcházejícím paragrafu,

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-s), & x \leqq s, \\ \frac{1}{2}s(2-x), & x \geqq s. \end{cases}$$

Vypočtěme jeho druhé iterované jádro. To nám dovolí určit stopy A_2 a A_4. Protože $K(x, s)$ je souměrné, stačí nalézt $K_2(x, s)$ pouze pro $s < x$. Máme

$$K_2(x, s) = \int_0^1 K(x, t)\, K(t, s)\, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{4} \int_0^s (2-x)(2-s)\, t^2\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \int_s^x t(2-t)\, s(2-x)\, \mathrm{d}t + \tfrac{1}{4} \int_x^1 xs(2-t)^2\, \mathrm{d}t =$$

$$= \tfrac{1}{12}[-s^3(2-x) + s(x^3 - 6x^2 + 7x)] \quad (s < x).$$

Hodnoty $K_2(x, s)$ pro $x < s$ dostaneme, zaměníme-li v posledním výraze proměnné x a s:

$$K_2(x, s) = \tfrac{1}{12}[-x^3(2-s) + x(s^3 - 6s^2 + 7s)] \quad (x < s).$$

To plyne ze souměrnosti jádra $K_2(x, s)$.

Vypočtěme stopy A_2 a A_4. Podle vzorce (5)

$$A_2 = \int_0^1\int_0^1 K^2(x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s.$$

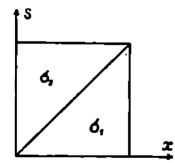
Absolutní hodnotu zde nemusíme psát, neboť jádro $K(x, s)$ je reálné. Poslední vzorec poněkud upravíme. Je možno jej napsat ve tvaru

$$A_2 = \iint_\sigma K^2(x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s,$$

kde σ je čtverec $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$ (obr. 2). Vedeme-li úhlopříčku $x = s$, rozdělíme σ na dva trojúhelníky σ_1 a σ_2, takže

$$A_2 = \iint_{\sigma_1} K^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \iint_{\sigma_2} K^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.$$

V důsledku souměrnosti $K(x, s)$ jsou integrály nad σ_1 a σ_2 shodné; proto



Obr. 2.

$$A_2 = 2 \iint_{\sigma_1} K^2(x, s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = 2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x K^2(x, s)\,\mathrm{d}s.$$

Obecně

$$A_{2m} = 2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x K_m^2(x, s)\,\mathrm{d}s.$$

V našem příkladě

$$A_2 = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x s^2(2 - x)^2\,\mathrm{d}s = \tfrac{11}{180}.$$

Úplně obdobně

$$A_4 = \tfrac{1}{72} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x [- s^3(2 - x) + s(x^3 - 6x^2 + 7x)]^2\,\mathrm{d}s = \tfrac{113}{32400}.$$

Ve druhém ze vzorců (7_1) položme $m = 2$. Potom[1]

$$|\lambda_1| \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}}$$

čili, neboť $\lambda_1 > 0$ (viz § 14),

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}} = 4{,}115.$$

To nám dává přibližnou hodnotu λ_1 menší, než je hodnota přesná, avšak velmi blízkou k přesné hodnotě. Vidíme, že vzorec (7_1) dává přesnější výsledek než methoda Ritzova. Dobrý výsledek také dostaneme, jestliže užijeme prvý ze vzorců (7_1). Speciálně položíme-li v něm $m = 1$, dostaneme hodnotu λ_1 větší než je hodnota přesná,

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_2}{A_4}} = 4{,}186.$$

[1] Můžeme dokázat, že v našem příkladě $r = 1$.

§ 16. Kelloggova methoda. Způsob určení charakteristického čísla souměrného jádra navržený Kelloggem je elegantní a výhodný, i když nevede vždy k cíli. Kelloggova methoda spočívá v tom, že vezmeme libovolnou funkci $\omega(x)$ a vycházejíce z ní sestrojíme posloupnost

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \int_a^b K(x, s)\, \omega(s)\, ds, \\ \omega_2(x) &= \int_a^b K(x, s)\, \omega_1(s)\, ds, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_n(x) &= \int_a^b K(x, s)\, \omega_{n-1}(s)\, ds, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1}$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}} = \mu \tag{2}$$

obecně existuje a rovná se absolutní hodnotě jednoho z charakteristických čísel jádra $K(x, s)$. Dále existuje limitní funkce

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|}, \tag{3}$$

která je za určitých podmínek charakteristickou funkcí jádra $K(x, s)$, příslušnou charakteristickému číslu $+\mu$ nebo $-\mu$. Připomeňme, že normou libovolné funkce $f(x)$ nazýváme veličinu

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f^2(x)|\, dx}.$$

Objasněme, za jakých podmínek dává Kelloggova methoda kladný výsledek. Nechť $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ jsou charakteristické funkce jádra $K(x, s)$ a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ jsou jim příslušející charakteristická čísla. Může se stát, že $\omega(x)$ je orthogonální ke všem funkcím $\varphi_i(x)$. V tom případě, jak ukazuje Hilbert-Schmidtův vzorec

$$\omega_1(x) = \int_a^b K(x, s)\, \omega(s)\, ds = 0$$

a všechny členy posloupnosti (1) jsou rovny nule. V tomto případě nevede Kelloggova methoda k cíli. Nechť nyní není $\omega(x)$ orthogonální ke všem funkcím $\varphi_i(x)$. Označme $\varphi_r(x)$ prvou z charakteristických funkcí, ke které $\omega(x)$ není orthogonální. Hilbert-Schmidtův vzorec nyní dává

$$\omega_1(x) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k(x), \quad a_r \neq 0,$$

kde $a_k = (\omega, \varphi_k)$ jsou Fourierovy koeficienty funkce $\omega(x)$ vzhledem k orthonormované soustavě $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ Užijeme-li znovu téhož Hilbert-Schmidtova vzorce, dostaneme:

$$\omega_n(x) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^n} \varphi_k(x). \tag{4}$$

Z (4) plyne, že

$$\|\omega_n\| = \sqrt{\sum_{k=r}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{\lambda_k^{2n}}}. \tag{5}$$

Dokažme to. Vzorec (4) ukazuje, že Fourierovy koeficienty funkce $\omega_n(x)$ vzhledem k funkcím $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ jsou rovny $\frac{a_k}{\lambda_k^n}$. Vynásobme nyní (4) výrazem $\overline{\omega_n(x)}$ a zintegrujme. Uvědomíme-li si definici normy, dostaneme:

$$\|\omega_n\|^2 = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^n} (\varphi_k, \omega_n).$$

Avšak $(\varphi_k, \omega_n) = \overline{(\omega_n, \varphi_k)}$ a skalární součin (ω_n, φ_k) je k-tý Fourierův koeficient $\omega_n(x)$, jenž je roven $\frac{a_k}{\lambda_k^n}$. Dosadíme-li toto do poslední rovnice, dostaneme vzorec (5).

Může se stát, že číslu λ_r nepřísluší jedna, nýbrž několik charakteristických funkcí. Dále se může ukázat, že $-\lambda_r$ je taktéž charakteristické číslo. V takovém případě bude v řadě (5) několik členů se jmenovatelem λ_r^{2n}. Nechť jsou to členy s indexy $r, r+1, \ldots, r'$. Označme

$$A^2 = |a_r|^2 + |a_{r+1}|^2 + \ldots + |a_{r'}|^2.$$

Veličina A je různá od nuly, protože $a_r \neq 0$. Přepišme nyní vzorec (5) ve tvaru

$$\|\omega_n\| = \frac{A}{|\lambda_r|^n} \sqrt{1 + \alpha_n},$$

kde

$$\alpha_n = \frac{1}{A} \sum_{k=r'+1}^{\infty} |a_k|^2 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_k}\right)^{2n}.$$

Není obtížné dokázat, že $\alpha_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Najdeme-li n-tou odmocninu $\|\omega_n\|$ a přejdeme-li k limitě, dostaneme po jednoduché úpravě

$$\frac{1}{|\lambda_r|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\omega_n\|}.$$

Zkoumejme nyní podíl

$$\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} = \frac{\lambda_r^{2n}}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k\, \varphi_k(x)}{\lambda_k^{2n}}.$$

Osamostatníme-li v součtu členy, obsahující λ_r^{2n} ve jmenovateli, dostaneme

$$\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} = \sum_{k=r}^{r'} \frac{a_k\, \varphi_k(x)}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}} + \frac{1}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}} \sum_{k=r'+1}^{\infty} a_k \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_k}\right)^{2n} \varphi_k(x).$$

Lehce se ukáže, že pro $n \to \infty$ konverguje druhý součet k nule. Přejdeme-li k limitě, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} = \sum_{k=r}^{r'} \frac{a_k}{A} \varphi_k(x). \tag{6}$$

Předpokládejme nyní, že ze dvou čísel λ_r a $-\lambda_r$ je pouze jedno charakteristické. Potom je součet v (6) lineární kombinace charakteristických funkcí, příslušejících k číslu λ_r (nebo $-\lambda_r$), a tudíž je sama charakteristickou funkcí příslušející k témuž číslu. Při tom se uvedený součet nerovná identicky nule, protože funkce $\varphi_r(x), \varphi_{r+1}(x), \ldots, \varphi_{r'}(x)$ jsou lineárně nezávislé a $a_r \neq 0$.

Jestliže $\omega(x)$ není orthogonální k $\varphi_1(x)$, určíme podle Kelloggovy methody nejmenší charakteristické číslo i jemu příslušející charakteristickou funkci.

Jestliže dobře zvolíme výchozí funkci $\omega(x)$, můžeme dosáhnout poměrné jednoduchosti výpočtu. V tom je největší výhoda Kelloggovy methody. Její podstatný nedostatek spočívá v tom, že nám není předem známo, zda nebude $\omega(x)$ orthogonální k některým charakteristickým funkcím, a zůstane nerozhodnuto, které z charakteristických funkcí se nám podařilo určit.

Poznamenejme, že absolutní hodnotu charakteristického čísla můžeme také určit ze vzorce

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\omega_n\|}{\|\omega_{n+1}\|}. \tag{2_1}$$

Jestliže místo (2) a (2_1) vezmeme příslušné přibližné vzorce

$$\mu \approx \sqrt[n]{\frac{1}{\|\omega_n\|}}, \tag{7}$$

$$\mu \approx \frac{\|\omega_n\|}{\|\omega_{n+1}\|}, \tag{7_1}$$

pak vzorec (7_1) dává hodnotu μ větší, než je hodnota přesná. O vzorci (7) nemůžeme v tomto smyslu nic říci.

Abychom ozřejmili Kelloggovu methodu, vezměme totéž jádro, které jsme už uvažovali v předešlých paragrafech:

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2 - s) & (x \leqq s), \\ \frac{1}{2}s(2 - x) & (s \leqq x). \end{cases} \tag{8}$$

Už jsme ukázali, že charakteristická čísla tohoto jádra jsou kladná. Dále je možno dokázat, že každému charakteristickému číslu přísluší pouze jedna charakteristická funkce. Kelloggova methoda nám umožňuje tuto funkci určit.

Položme $\omega(x) = x$. Abychom vypočetli $\omega_n(x)$, budeme muset znát hodnoty integrálů

$$\int_0^1 K(x, s)\, s^n\, ds.$$

Jednoduchý výpočet dává

$$\int_0^1 K(x, s)\, s^n\, ds = \frac{(n + 3)x}{2(n + 1)(n + 2)} - \frac{x^{n+2}}{(n + 1)(n + 2)}. \tag{9}$$

Nyní

$$\omega_1(x) = \int_0^1 K(x, s)\, s\, ds = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{6}x^3; \quad \|\omega_1\| = 0{,}1371;$$

$$\omega_2(x) = \int_0^1 K(x, s)\, \omega_1(s)\, ds = \frac{31x}{360} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{120}; \quad \|\omega_2\| = 0{,}03328;$$

$$\omega_3(x) = \int_0^1 K(x, s)\, \omega_2(s)\, ds = \frac{1}{360}\left(\frac{160x}{21} - \frac{31x^3}{6} + x^5 - \frac{x^7}{14}\right);$$

$$\|\omega_3\| = 0{,}0080083.$$

Ve vzorci (7) položme $n = 3$. Potom dostaneme $\mu \approx 4{,}998$. Protože charakteristická čísla jádra $K(x, s)$ jsou kladná, je $\lambda_1 = \mu \approx 4{,}998$. Vzorec (7_1) dává $\lambda_1 \approx 4{,}156$.

Už jsme uvedli, že každému charakteristickému číslu jádra (8) přísluší pouze jedna charakteristická funkce. V takovém případě můžeme v souhlase se vzorcem (6) položit

$$\varphi_1(x) \approx M \frac{\omega_3(x)}{\|\omega_3(x)\|}, \quad M = \frac{A}{a_1}.$$

Veličina M je určena požadavkem, aby $\varphi_1(x)$ byla normovaná. Potom můžeme zřejmě položit $M = 1$ a

$$\varphi_1(x) = 2{,}643x - 1{,}724x^3 + 0{,}347x^5 - 0{,}025x^7. \tag{10}$$

§ 17. Určení dalších charakteristických čísel. Jestliže charakteristická čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a jim příslušející charakteristické funkce $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ jsou známy, můžeme určit další charakteristické číslo λ_{n+1} a jemu příslušející charakteristickou funkci $\varphi_{n+1}(x)$. Způsoby, jak určit λ_{n+1} a $\varphi_{n+1}(x)$, mohou být založeny na dvou větách:

Věta 1. *Absolutní hodnota charakteristického čísla λ_{n+1} jádra $K(x, s)$ je převrácená hodnota maxima integrálu*

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left|\int_a^b\int_a^b K(x, s)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi(s)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s\right| \tag{1}$$

s vedlejšími podmínkami

$$(\varphi, \varphi) = 1, \ (\varphi, \varphi_1) = 0, \ (\varphi, \varphi_2) = 0, \ldots, \ (\varphi, \varphi_n) = 0. \tag{2}$$

Věta 2. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ je posloupnost všech charakteristických čísel jádra $K(x, s)$ a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ jsou jim příslušející orthonormované charakteristické funkce. Potom je λ_{n+1} co do absolutní hodnoty nejmenší charakteristické číslo jádra*

$$K^{(n)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\, \overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k} \tag{3}$$

a $\varphi_{n+1}(x)$ je charakteristická funkce jádra $K^{(n)}(x, s)$, příslušející charakteristickému číslu λ_{n+1}.

Věta 2 plyne z lemmatu 3, § 13. Větu 1 můžeme odvodit ze vzorce Hilbert-Schmidtova. Dokažme ji.

Jestliže $\varphi(x)$ je orthogonální k $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, pak podle vzorce Hilbert-Schmidtova ((8), § 13),

$$K\varphi = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_m)}{\lambda_m} \varphi_m(x).$$

Vynásobme skalárně obě strany této rovnice funkcí $\varphi(x)$. Dokažme, že řadu na pravé straně můžeme integrovat člen po členu. Skutečně, položme

$$R_p(x) = \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_m)}{\lambda_m} \varphi_m(x).$$

Potom

$$(K\varphi, \varphi) = \sum_{m=n+1}^{p} \frac{|(\varphi, \varphi_m)|^2}{\lambda_m} + (R_p, \varphi). \qquad (*)$$

Dále podle nerovnosti Buňakovského

$$|(R_p, \varphi)| \leqq \|R_p\| \cdot \|\varphi\|.$$

Funkce $\varphi_m(x)$ jsou orthonormovány; proto v důsledku Parsevalovy rovnice

$$\|R_p(x)\|^2 = \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{|(\varphi, \varphi_m)|^2}{\lambda_m^2} \leqq \frac{1}{\lambda_{p+1}^2} \sum_{m=p+1}^{\infty} |\varphi, \varphi_m)|^2 \leqq \frac{\|\varphi\|^2}{\lambda_{p+1}^2} \to 0 \text{ pro } p \to \infty.$$

Avšak potom také $(R_p, \varphi) \to 0$; necháme-li p v (*) růst nade všechny meze, dostaneme

$$(K\varphi, \varphi) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|(\varphi, \varphi_m)|^2}{\lambda_m}.$$

Nahraďme všechna λ_m nejmenším. Potom

$$|(K\varphi, \varphi)| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} \sum_{m=n+1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_m)|^2$$

čili, jestliže užijeme Besselovy nerovnosti,

$$|(K\varphi, \varphi)| \leqq \frac{\|\varphi\|^2}{|\lambda_{n+1}|}.$$

Konečně podle podmínky věty 2 $\|\varphi\| = 1$ a

$$|(K\varphi, \varphi)| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n+1}|}.$$

K dokončení důkazu věty 1 zbývá si pouze všimnout, že v poslední relaci skutečně platí vztah rovnosti: k tomu stačí položit $\varphi(x) = \varphi_{n+1}(x)$.

Užití těchto vět v praxi je obtížné, protože se vždy nepodaří určit charakteristické funkce dostatečně přesně. Ukažme postup, jehož pomocí můžeme určit charakteristická čísla počínaje druhým, aniž užijeme charakteristických funkcí. Pro určitost předpokládejme, že známe λ_1 a chceme najít λ_2. Utvořme rozdíl

$$B_{2m} = A_{2m}^2 - A_{4m} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2m}}\right)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{4m}} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{1 \leq k < n} \frac{1}{\lambda_k^{2m}\lambda_n^{2m}}. \tag{4}$$

Předpokládejme pro jednoduchost, že charakteristická čísla λ_1 a λ_2 jsou jednoduchá a že $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ nejsou charakteristickými čísly. Pro dostatečně velká m bude mít v součtu (4) rozhodující význam sčítanec $\frac{1}{\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}}$; ostatní sčítanci budou vzhledem k němu mizivě malí. Potom ze (4) dostaneme přibližný vztah

$$\frac{1}{\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}} \approx \frac{B_{2m}}{2} \tag{5}$$

a odtud

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}}. \tag{6}$$

Jestliže známe λ_1 přesně, dává vzorec (6) přibližnou hodnotu λ_2, jež je menší než hodnota přesná.

Vyjdeme-li ze vzorce (4), dostaneme snadno také vzorec, který dává hodnotu $|\lambda_2|$ větší, než je hodnota přesná:

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}. \tag{7}$$

Přibližným vzorcům (6) a (7) odpovídají přesné limitní vzorce

$$|\lambda_2| = \frac{1}{|\lambda_1|} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2m]{B_{2m}}} = \frac{1}{|\lambda_1|} \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}. \tag{8}$$

Jako příklad vypočítáme druhé charakteristické číslo jádra, jež jsme již několikráte uvažovali:

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2 - s) & (x \leqq s), \\ \frac{1}{2}s(2 - x) & (s \leqq x). \end{cases}$$

V tomto případě

$$B_2 = A_2^2 - A_4 = \tfrac{1}{4050}.$$

Vezměme $\lambda_1 = 4{,}115$ (viz § 14). Potom, položíme-li ve vzorci (6) $m = 1$, dostaneme

$$\lambda_2 = \frac{1}{4{,}115} \sqrt{8100} = 21{,}87.$$

Přesnější hodnota je $\lambda_2 = 24{,}14$.

Jako druhý příklad vypočítáme prvé dva kořeny Besselovy funkce nultého řádu $J_0(x)$. Čtverce těchto kořenů jsou charakteristickými čísly souměrného jádra

$$L(x, s) = \begin{cases} -\sqrt{xs}\,\lg s & (x \leqq s), \\ -\sqrt{xs}\,\lg x & (x \geqq s) \end{cases}$$

(integrační meze jsou $a = 0$, $b = 1$).

Vypočtěme nejdříve druhé itegrované jádro $L_2(x, s)$. Nechť $x < s$. Potom

$$L_2(x, s) = \int_0^s L(x, t)\, L(t, s)\, \mathrm{d}t + \int_s^x L(x, t)\, L(t, s)\, \mathrm{d}t + \int_x^1 L(x, t)\, L(t, s)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{xs}\{\int_0^s t \lg x \lg s\, \mathrm{d}t + \int_s^x t \lg x \lg t\, \mathrm{d}t + \int_x^1 t \lg^2 t\, \mathrm{d}t\} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{xs}[(x^2 + s^2) \lg x + 1 - x^2].$$

Jednoduché výpočty nyní dají:

$$A_2 = \tfrac{1}{32},\; A_4 = \tfrac{11}{12288},\; B_2 = \tfrac{1}{12288}.$$

Položíme-li přibližně

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}},\quad \lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{B_2}},$$

budeme mít:

$$\lambda_1 = 5{,}7813,\; \lambda_2 = 27{,}117.$$

Odmocněním najdeme prvé dva kořeny Besselovy funkce, a to menší než hodnoty přesné:

$$\alpha_1 \approx 2{,}4044,\; \alpha_2 \approx 5{,}2702.$$

Přesnější hodnoty těchto kořenů, jež nalezneme v tabulkách, jsou:[1]

$$\alpha_1 = 2{,}4048,\; \alpha_2 = 5{,}5200.$$

---

[1] P. O. Kuzmin: Besselevy funkcii. GTTI, 1933.

Vzorce analogické (8) můžeme dostat, vyjdeme-li z těchže úvah i pro charakteristická čísla s vyššími indexy. Tak na př. pro λ_3 nalezneme bez obtíží přibližný vzorec

$$|\lambda_3| \approx \frac{1}{|\lambda_1^2 \lambda_2|} \sqrt[2m]{\frac{8}{B_{2m}^2 - 2B_{4m}}}. \tag{9}$$

Tento vzorec je správný za těchže předpokladů jako vzorec (8).

§ 18. Jádra, která lze převést na souměrná. Jestliže má jádro $K(x, s)$ tvar

$$K(x, s) = r(s)\, L(x, s), \tag{1}$$

kde $r(s) \geqq 0$ a $L(x, s)$ je souměrné, takže $L(x, s) = \overline{L(s, x)}$, pak se rovnice

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{2}$$

lehce převede na rovnici se souměrným jádrem. Vynásobme obě strany rovnice výrazem $\sqrt{r(x)}$ a zaveďme novou neznámou funkci $\psi(x) = \sqrt{r(x)}\, \varphi(x)$. Pro tuto funkci dostaneme integrální rovnici

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \sqrt{r(x)\, r(s)}\, L(x, s)\, \psi(s)\, ds = \sqrt{r(x)}\, f(x), \tag{3}$$

jejíž jádro je souměrné.

Jádra typu (1) se často vyskytují v aplikacích.

§ 19. Řešení souměrných integrálních rovnic. Souměrná integrální rovnice je zvláštní případ rovnice Fredholmovy. Řešení souměrných rovnic může být založeno na obecné theorii. Zde však je otázka položena jinak: Jestliže si klademe úlohu řešit souměrnou integrální rovnici, předpokládáme, že známe všechna charakteristická čísla i charakteristické funkce jádra. Za těchto předpokladů se rovnice řeší neobyčejně jednoduše.

Uvažujme rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \tag{1}$$

jejíž jádro je souměrné. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ jsou její charakteristická čísla a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ příslušející charakteristické funkce.

Označme a_n Fourierovy koeficienty neznámé funkce $\varphi(x)$ vzhledem k orthonormované soustavě $\varphi_n(x)$:

$$a_n = (\varphi, \varphi_n) = \int_a^b \varphi(x) \overline{\varphi_n(x)} \, dx. \tag{2}$$

Podle věty Hilbert-Schmidtovy

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) \, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Z rovnice (1) nyní plyne, že

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} \varphi_n(x); \tag{3}$$

zbývá pouze určit koeficienty a_n. Proto vynásobme obě strany rovnice (3) výrazem $\overline{\varphi_m(x)}$ a integrujme v mezích od a do b. Poněvadž posloupnost $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ je orthonormovaná, zbude po integraci v řadě (3) jediný člen, jehož index $n = m$. Podle definice koeficientů a_n dostaneme:

$$a_m = f_m + \frac{\lambda}{\lambda_m} a_m; \quad f_m = (f, \overline{\varphi}_m). \tag{4}$$

Jestliže λ není charakteristické číslo, potom ze (4) okamžitě nalezneme hodnotu a_m:

$$a_m = \frac{\lambda_m f_m}{\lambda_m - \lambda}. \tag{5}$$

Jestliže ji dosadíme do (3), dostaneme řešení ve tvaru

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x). \tag{6}$$

Lze dokázat, že řada v (6) konverguje absolutně a stejnoměrně.

Nechť je nyní λ charakteristické číslo. Potom se vyskytuje v posloupnosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, a to třeba i několikrát. Nechť $\lambda = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r'}$. Pro indexy m, různé od $r, r + 1, \ldots, r'$, jsou koeficienty a_m definovány touž formulí (5). Jestliže se m rovná jednomu z těchto čísel, potom rovnice (4) nabývá tvaru $f_m = 0$, $m = r, r + 1, \ldots, r'$. Tudíž, jestliže λ je charakteristické číslo, je rovnice řešitelná tehdy a jen tehdy, když je pravá strana orthogonální k charakteristickým funkcím příslušejícím tomuto číslu. Jestliže je tato podmínka splněna, je řešení dáno týmž vzorcem (6); koeficienty, jež mají neurčitý tvar $\frac{0}{0}$, lze nahradit libovolnými čísly.

§ 20. Věta o existenci charakteristického čísla. Cílem tohoto paragrafu je důkaz věty (3), § 12. Odložili jsme jej až na konec kapitoly, neboť není vůbec elementární a vyžaduje zavedení řady nových pojmů. Poznamenejme, že samotný fakt existence charakteristického čísla pro spojité souměrné jádro může být dokázán pomocí dosti elementárních prostředků. Příslušné důkazy lze najít v kursech integrálních rovnic, jež jsou uvedeny v seznamu literatury na konci knihy.

Podstatnou úlohu ve všech úvahách tohoto paragrafu hraje pojem *konvergence v průměru*. Říkáme, že posloupnost $\varphi_n(x)$ *konverguje v průměru* k $\varphi(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže

$$\|\varphi_n - \varphi\| = \{\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 \, dx\}^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Posloupnost nemůže konvergovat v průměru ke dvěma různým funkcím: jestliže $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$ a $\|\varphi_n - \psi\| \to 0$, potom podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\|\varphi - \psi\| = \|\varphi - \varphi_n - (\psi - \varphi_n)\| \leqq \|\varphi - \varphi_n\| + \|\psi - \varphi_n\| \to 0.$$

Odtud $$\|\varphi - \psi\| = 0 \text{ a } \varphi \equiv \psi.$$

Platí věta, jež je analogická Cauchy-Bolzanovu konvergenčnímu kriteriu:

Nutná a postačující podmínka k tomu, aby posloupnost funkcí $\varphi_n(x)$ s integrovatelnými čtverci konvergovala v průměru k nějaké funkci $\varphi(x)$ s integrovatelným čtvercem, je

$$\lim_{m, n \to \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0.$$

Tato věta je známa pod názvem *věta Fischer-Rieszova*. Její důkaz je možno najít na př. v [7].

Kdykoliv budeme v tomto paragrafu mluvit o konvergenci posloupnosti funkcí, budeme mít na mysli konvergenci v průměru.

Budeme říkat, že řada

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

konverguje v průměru v intervalu $\langle a, b\rangle$ a má součet rovný $v(x)$, jestliže posloupnost částečných součtů této řady konverguje v průměru k $v(x)$ v témže intervalu.

Věta 1. *Nechť řada (1) konverguje v průměru a nechť $f(x)$ je libovolná funkce s integrovatelným čtvercem. Potom řada (1), jestliže vynásobíme její členy funkcí $f(x)$, může být integrována člen po členu.*

Máme dokázat rovnici

$$\int_a^b v(x)\, f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\, f(x)\, dx. \tag{2}$$

Označme n-tý částečný součet řady (1) $v_n(x)$. Potom $\|v - v_n\| \to 0$, když $n \to \infty$. Odtud plyne, že

$$|(v - v_n, \bar{f})| \leqq \|v - v_n\| \cdot \|f\| \to 0$$

pro $n \to \infty$, a tedy

$$(v, \bar{f}) = \lim_{n\to\infty}(v_n, \bar{f}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(u_n, \bar{f}) = \sum_{k=1}^{\infty}(u_n, \bar{f}),$$

což je identické se vztahem (2), neboť

$$(v, \bar{f}) = \int_a^b v(x)\, f(x)\, dx, \quad (u_n, \bar{f}) = \int_a^b u_n(x)\, f(x)\, dx$$

podle definice skalárního součinu.

Množinu funkcí budeme nazývat *omezenou*, jestliže normy těchto funkcí tvoří omezenou množinu; množinu funkcí nazýváme *kompaktní*, jestliže z její libovolné nekonečné podmnožiny můžeme vybrat konvergentní posloupnost. Libovolná orthonormovaná posloupnost je příkladem množiny omezené, nikoliv však kompaktní. Poslední tvrzení plyne z toho, že když jsou $\varphi_n(x)$ a $\varphi_m(x)$ orthogonální a normované, pak

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = (\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_n) + (\varphi_m, \varphi_m) - \\ - (\varphi_n, \varphi_m) - (\varphi_m, \varphi_n) = 2$$

a podmínka Riesz-Fischerovy věty není splněna.

Věta 2. *Fredholmův operátor*

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

jehož jádro vyhovuje podmínce

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds = B^2 < \infty,$$

převádí libovolnou omezenou množinu funkcí v kompaktní množinu.

Jinak řečeno, jestliže je dána libovolná omezená množina funkcí Φ ($\|\varphi\| < M$, $M =$ konst., jestliže $\varphi \in \Phi$), pak je z ní možno vybrat takovou posloupnost $\{\varphi_n(x)\}$, že

$$\|K\varphi_n - K\varphi_m\| = \|K(\varphi_n - \varphi_m)\| \to 0, \text{ pro } n, m \to \infty.$$

Napišme Fourierovu řadu odpovídající jádru $K(x, s)$:

$$K(x, s) \sim \sum_{i,k=0}^{\infty} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a},$$

a položme

$$\sum_{i,k=0}^{j} A_{ik} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \cos \frac{k\pi s}{b-a} = P_j(x, s),$$

$$K(x, s) - P_j(x, s) = K_j'(x, s).$$

V důsledku Parsevalovy identity

$$\lim_{j\to\infty} \int_a^b \int_a^b |K_j'(x, s)|^2 \, dx \, ds = 0. \tag{3}$$

Položme dále

$$K\varphi = P_j\varphi + K_j'\varphi,$$

kde $P_j\varphi$ a $K_j'\varphi$ jsou Fredholmovy operátory, jejichž jádra jsou $P_j(x, s)$ a $K'(x, s)$. Nechť $\varphi(x)$ je funkce z dané množiny. Utvořme její Fourierovu řadu:

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)} \cos \frac{k\pi x}{b-a}.$$

Potom podle věty (1)

$$P_j\varphi = \sum_{i=0}^{j} \cos \frac{i\pi x}{b-a} \sum_{k=0}^{j} \frac{A_{ik}a^{(k)}(b-a)}{2}. \tag{4}$$

Množina všech koeficientů a_k je omezená, neboť

$$|a_k| = \frac{2}{b-a} \left[\int_a^b \varphi(x) \cos \frac{k\pi x}{b-a} \, dx \right] \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{2}{b-a}} \left[\int_a^b |\varphi^2(x)| \, dx \right]^{\frac{1}{2}} < M \sqrt{\frac{2}{b-a}}.$$

Podle známé Weierstrassovy věty o existenci hromadného bodu omezené množiny čísel je možno z dané množiny Φ vybrat takovou posloupnost $\{\varphi_n\}$, že existují limity

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, j,$$

kde $a_n^{(k)}$ je k-tý Fourierův koeficient funkce $\varphi_n(x)$. Vzorec (4) potom ukazuje, že $P_j\varphi_n$ konverguje pro $n \to \infty$ k nějaké limitě.

Vyberme z množiny Φ posloupnost $\{\varphi_{1n}\}$ tak, aby existovala limita (ve smyslu konvergence v průměru) $\lim\limits_{n\to\infty} P_1\varphi_{1n}$. Dále vyberme z posloupnosti $\{\varphi_{1n}\}$ částečnou posloupnost $\{\varphi_{2n}\}$ tak, aby existovala limita $\lim\limits_{n\to\infty} P_2\varphi_{2n}$. Poznamenejme, že posloupnost $\{P_1\varphi_{2n}\}$, jež tvoří část posloupnosti $\{P_1\varphi_{1n}\}$, také konverguje. Z posloupnosti $\{\varphi_{2n}\}$ vyberme částečnou posloupnost $\{\varphi_{3n}\}$ tak, aby existovala limita $\lim\limits_{n\to\infty} P_3\varphi_{3n}$ atd. Pokračujeme-li v tomto postupu neomezeně dále, dostaneme nekonečnou množinu posloupností

$$\begin{array}{l} \varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{1n}, \ldots \\ \varphi_{21}, \varphi_{22}, \ldots, \varphi_{2n}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \ldots, \varphi_{nn}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{5}$$

Každá z nich je obsažena v předcházející, při čemž posloupnost $P_j\varphi_{kn}$, $n = 1, 2, \ldots$ konverguje pro $j \leqq k$. Uvažujme diagonální posloupnost

$$\varphi_{11}, \varphi_{22}, \ldots, \varphi_{nn}, \ldots$$

Všechny její prvky až na konečný počet příslušejí libovolné z posloupností (5). Odtud plyne existence limity

$$\lim_{n\to\infty} P_j\varphi_{nn} \tag{6}$$

pro libovolné j. Dokažme nyní, že posloupnost $\{K\varphi_{nn}\}$ konverguje. Podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned} \|K\varphi_{nn} - K\varphi_{mm}\| \leqq \|K\varphi_{nn} - P_j\varphi_{nn}\| + \|P_j\varphi_{nn} - P_j\varphi_{mm}\| + \\ + \|K\varphi_{mm} - P_j\varphi_{mm}\|. \end{aligned} \tag{7}$$

Máme

$$K\varphi_{nn} - P_j\varphi_{nn} = K_j'\varphi_{nn} = \int_a^b K_j'(x, s)\, \varphi_{nn}(s)\, ds.$$

Odtud, v důsledku nerovnosti Buňakovského

$$\|K\varphi_{nn} - P_j\varphi_{nn}\|^2 \leqq \|\varphi_{nn}\|^2 \int_a^b\int_a^b |K_j'(x, s)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s <$$

$$< M^2 \int_a^b\int_a^b |K_j'(x, s)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s$$

a úplně obdobně

$$\|K\varphi_{mm} - P_j\varphi_{mm}\|^2 < M^2 \int_a^b\int_a^b |K_j'(x, s)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s.$$

V důsledku relace (3) můžeme zvolit j tak velké, aby jak první, tak třetí sčítanec v (7) byl menší než $\frac{1}{3}\varepsilon$, kde ε je libovolné kladné číslo. Zvolíme-li pevně takové j a užijeme-li existence limity (6), můžeme zvolit n_0 tak velké, aby pro $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$ bylo $\|P_j\varphi_{nn} - P_j\varphi_{mm}\| < < \frac{1}{3}\varepsilon$. Nyní $\|K\varphi_{nn} - K\varphi_{mm}\| < \varepsilon$, jestliže $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$, a z věty Riesz-Fischerovy plyne existence limity

$$\lim_{n\to\infty} K\varphi_{nn}.$$

Zabývejme se nyní důkazem věty 3, § 12. Uvažujme množinu funkcí $\varphi(x)$ s normou rovnou jedné. Označme μ supremum veličiny $|(K\varphi, \varphi)|$. Podle definice suprema existuje posloupnost funkcí $\psi_n(x)$, jejichž normy jsou rovny jedné a jež vyhovují relaci

$$\lim_{n\to\infty} |(K\psi_n, \psi_n)| = \mu. \tag{8}$$

Předpokládáme, že jádro $K(x, s)$ je souměrné. V takovém případě je skalární součin $(K\psi_n, \psi_n)$ reálný a mohou nastat pouze tři případy:

a) $\lim (K\psi_n, \psi_n) = \mu$,

b) $\lim (K\psi_n, \psi_n) = -\mu$,

c) posloupnost $\psi_n(x)$ je možno rozdělit na dvě — nazveme je $\psi_n'(x)$ a $\psi_n''(x)$ — tak, že

$$\lim_{n\to\infty} (K\psi_n', \psi_n') = \mu, \quad \lim_{n\to\infty} (K\psi_n'', \psi_n'') = -\mu.$$

Budeme uvažovat pouze případ a). Případ b) se převede na případ a) záměnou λ na $-\lambda$ a $K(x, s)$ na $-K(x, s)$ v integrální rovnici; v případě c) stačí uvažovat posloupnost $\psi_n'(x)$.

Podle věty 2 je možno z posloupnosti $\{\psi_n(x)\}$ vybrat takovou částečnou posloupnost, kterou podle předcházejícího označíme $\{\psi_n(x)\}$ tak, aby existovala limita

$$\omega(x) = \lim_{n\to\infty} K\psi_n.$$

Dále nechť je $\eta_n(x)$ libovolná funkce, jejíž čtverec je integrovatelný v intervalu $\langle a, b\rangle$, a t je libovolné reálné číslo. Norma funkce

$$\frac{\psi_n(x) + t\,\eta_n(x)}{\|\psi_n + t\eta_n\|}$$

je zřejmě rovna jedné. Podle definice čísla μ

$$\left(K\frac{\psi_n + t\eta_n}{\|\psi_n + t\eta_n\|}, \frac{\psi_n + t\eta_n}{\|\psi_n + t\eta_n\|}\right) \leqq \mu.$$

Odtud lehce dostaneme

$$(K(\psi_n + t\eta_n), \psi_n + t\eta_n) \leqq \mu(\psi_n + t\eta_n, \psi_n + t\eta_n).$$

Odstraníme-li závorky a uvědomíme-li si, že $(\psi_n, \psi_n) = \|\psi_n\|^2 = 1$, dostaneme

$$(K\psi_n, \psi_n) - \mu + 2t\,\mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n, \eta_n) + t^2[(K\eta_n, \eta_n) - \mu\|\eta_n\|^2] \leqq 0.$$

Levá strana poslední nerovnosti je kvadratický trojčlen vzhledem k t, jenž nemění znaménka. V takovém případě je jeho diskriminant nekladný

$$|\mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n), \eta_n)| \leqq \sqrt{\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n)}\,\sqrt{\mu - (K\psi_n, \psi_n)}. \tag{9}$$

Nechť je nyní η_n taková, že

$$\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n) < C, \tag{10}$$

kde C je konstanta nezávisející na n. Potom z (8) a (9) plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n, \eta_n) = 0. \tag{11}$$

Položme nyní

$$\eta_n(x) = K\psi_n - \mu\psi_n = -\mu\,\psi_n(x) + \int_a^b K(x, s)\,\psi_n(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dokažme, že nerovnost (10) je při tom splněna. Protože $\|\psi_n\| = 1$, podle trojúhelníkové nerovnosti skutečně platí

$$\|\eta_n\| \leqq \mu + \left\|\int_a^b K(x, s)\,\psi_n(s)\,\mathrm{d}s\right\|.$$

Dále

$$\left|\int_a^b K(x, s)\, \psi_n(s)\, ds\right|^2 \leqq \int_a^b |\psi_n^2(s)|\, ds \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds = \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds.$$

Integrujeme-li vzhledem k proměnné x a odmocníme-li, dostaneme

$$\left\|\int_a^b K(x, s)\, \psi_n(s)\, ds\right\| \leqq B. \tag{12}$$

Tudíž $\|\eta_n\| \leqq \mu + B$. Nyní

$$\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n) \leqq \mu(\mu + B)^2 + (\mu + B)\, \|K\eta_n\|.$$

Dále

$$|K\eta_n|^2 = \left|\int_a^b K(x, s)\, \eta_n(s)\, ds\right|^2 \leqq \int_a^b |\eta_n(s)|^2 ds \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds \leqq$$

$$\leqq (\mu + B)^2 \int_a^b |K^2(x, s)|\, ds;$$

odtud tak jako shora najdeme

$$\|K\eta_n\| \leqq B(\mu + B) \tag{13}$$

a konečně

$$\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n) \leqq (\mu + B)^3.$$

Nyní vztah (11) nabývá tvaru

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n, K\psi_n - \mu\psi_n) = 0.$$

Avšak poslední skalární součin je kladný a rovný $\|K\psi_n - \mu\psi_n\|^2$. Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \|K\psi_n - \mu\psi_n\| = 0$$

čili

$$\lim_{n\to\infty}(K\psi_n - \mu\psi_n) = 0, \tag{14}$$

odkud

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu} K\psi_n = \frac{1}{\mu}\, \omega(x).$$

Označme $\frac{1}{\mu}\, \omega(x) = \varphi_1(x)$. Potom $\psi_n(x) \to \varphi_1(x)$. Zřejmě $\|\varphi_1\| = 1$. Opakujeme-li ty úvahy, jichž jsme užili při odvozování nerovností (12) a (13), lehce nalezneme, že $K\psi_n \to K\varphi_1$. Provedeme-li limitní přechod ve (14) a položíme-li $\frac{1}{\mu} = \lambda_1$, dostaneme

$$\varphi_1(x) - \lambda_1 K\varphi_1 = 0. \tag{15}$$

Funkce $\varphi_1(x)$ není identicky rovna nule, neboť její norma je rovna jedné. Avšak potom z (15) plyne, že λ_1 je charakteristické číslo jádra $K(x, s)$. Tím je věta 3, § 12, a tedy také věta 1, § 12 dokázána.

KAPITOLA 3

SINGULÁRNÍ INTEGRÁLNÍ ROVNICE

§ 21. Hlavní hodnota integrálu. Obvyklá definice, jež definuje integrál jako limitu integrálních součtů, je vhodná pouze pro omezené funkce. Jestliže integrovaná funkce je neomezená, zavádíme pojem „nevlastního integrálu". Připomeňme ho.

Nechť funkce $f(x)$ definovaná v intervalu $a \leqq x \leqq b$ není omezená v okolí bodu c tohoto intervalu, avšak je integrovatelná na každém z intervalů $a \leqq x \leqq c - \varepsilon'$ i $c + \varepsilon'' \leqq x \leqq b$ pro libovolně malá kladná čísla ε' a ε''. Utvořme součet

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Jestliže má tento součet limitu, když ε' a ε'' konvergují k nule nezávisle na sobě, nazýváme uvedenou limitu nevlastním integrálem funkce $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon'\to 0\\ \varepsilon''\to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]. \tag{2}$$

Může se stát, že součet (1) nemá limitu, když ε' a ε'' konvergují k nule nezávisle na sobě, avšak limita existuje, jestliže ε' a ε'' jsou při svém přibližování k nule vázány nějakým vztahem. Uvažujme na př. funkci $f(x) = \frac{1}{x - c}$, $a < c < b$. Máme:

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon'} \frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\varepsilon''}^{b} \frac{dx}{x-c} = \lg \frac{b-c}{c-a} + \lg \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}\right|. \tag{3}$$

Když ε' a ε'' konvergují k nule, veličina (3) nekonverguje k limitě, neboť podíl $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ se při tom může libovolně měnit. Avšak, jestliže podrobíme ε' a ε'' na př. podmínce $\varepsilon' = k\varepsilon''$, kde k je kladná konstanta, bude mít součet (3) limitu rovnou

$$\lg \frac{b-c}{c-a} + \lg k.$$

Speciálně, jestliže položíme $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$, dostaneme

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-c} \right] = \lg \frac{b-c}{c-a}. \tag{4}$$

Zaveďme nyní následující definici.

Nechť je funkce $f(x)$ definována v intervalu $a \leqq x \leqq b$ a nechť je integrovatelná na každém z intervalů $a \leqq x \leqq c - \varepsilon$ a $c + \varepsilon \leqq x \leqq b$ pro libovolně malé kladné číslo ε. *Hlavní hodnotou integrálu* funkce $f(x)$ v intervalu $a \leqq x \leqq b$ nazveme limitu (jestliže existuje)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx \right]. \tag{5}$$

Pojem hlavní hodnoty i samotný název byly zavedeny Cauchym. Místo „hlavní hodnota integrálu" budeme často říkat „singulární integrál".[1]

Hlavní hodnotu integrálu budeme značit obvyklým symbolem

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Také se užívá symbolů

$$\text{V. P.} \int\limits_a^b f(x)\, dx; \quad \int\limits_a^{'b} f(x)\, dx; \quad \int\limits_a^{*b} f(x)\, dx;$$

nejsou však obzvlášť nutné.

[1] Rusky buď „сингулярный интеграл" nebo „особый интеграл" (u Privalova). Pozn. překladatele.

Poznamenejme, že hlavní hodnota integrálu splývá s obvyklým (vlastním nebo nevlastním) integrálem, jestliže tento existuje.

Uveďme nyní širokou a pro aplikace velmi důležitou třídu integrálů, pro něž hlavní hodnota existuje.

Především z relace (4) plyne, že existuje singulární integrál

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t-x} = \lg \frac{b-x}{x-a}, \quad a < x < b. \tag{6}$$

Nechť funkce $f(x)$ splňuje tak zvanou podmínku Lipschitzovu s exponentem α. Tato podmínka zní takto: existují konstanty K a α, $0 < \alpha \leqq 1$ takové, že pro všechny dvojice bodů x', x'', ležící v intervalu $a \leqq x \leqq b$, je splněna nerovnost

$$|f(x') - f(x'')| < K|x' - x''|^\alpha. \tag{7}$$

Třídu funkcí, splňující Lipschitzovu podmínku s exponentem α, budeme značit symbolem $\mathrm{Lip}\alpha$; okolnost, že funkce $f(x)$ přísluší třídě $\mathrm{Lip}\alpha$, označíme takto:

$$f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha.$$

Jestliže $f(x)$ má v intervalu $a \leqq x \leqq b$ omezenou derivaci, pak $f(x) \in \mathrm{Lip}1$. To plyne bezprostředně z věty o střední hodnotě.

Věta 1. *Jestliže $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$, pak singulární integrál*

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x}\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

existuje pro všechna x v intervalu $a < x < b$.

Důkaz je velmi jednoduchý. Napišme integrál (8) ve tvaru

$$\int_a^b \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\,\mathrm{d}t + f(x)\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t-x}.$$

V prvém integrálu platí pro integrand odhad

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| < K|t-x|^{\alpha-1}.$$

Tento integrál existuje jako nevlastní pro $\alpha < 1$ a jako vlastní pro $\alpha = 1$. Druhý integrál existuje v důsledku vzorce (6).

Pojem hlavní hodnoty se dá lehce rozšířit i na křivkové integrály. V důsledku častého užití v aplikacích budeme formulovat tento pojem pro integrály funkcí komplexní proměnné. Nechť L je hladká křivka (uzavřená nebo neuzavřená) se spojitou křivostí a c je komplexní souřadnice nějakého bodu na L. Oddělme bod c kruhem s poloměrem ε a se středem v tomto bodě. Zbývající část křivky označme L_ε. Předpokládejme, že funkce $f(z)$ je integrovatelná na L_ε pro libovolně malé kladné číslo ε. Hlavní hodnotou integrálu nebo singulárním integrálem funkce $f(z)$ na křivce L nazveme limitu (jestliže existuje)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{L_\varepsilon} f(z) \, \mathrm{d}z$$

a označíme ji symbolem

$$\int_L f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Budeme říkat, že funkce $f(z)$ splňuje na křivce L Lipschitzovu podmínku s exponentem α a budeme to značit $f(z) \in \mathrm{Lip}\alpha$, jestliže pro libovolné body z', z'' křivky L bude splněna nerovnost

$$|f(z') - f(z'')| < K|z' - z''|^\alpha, \tag{9}$$

kde K a α jsou nějaké kladné konstanty a $0 < \alpha \leqq 1$. Platí věta obdobná větě 1:

Věta 2. *Jestliže $f(z) \in \mathrm{Lip}\alpha$, pak singulární integrál*

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \tag{10}$$

existuje pro všechny body z na křivce L, až snad na její body koncové.

Probíhá-li x interval $a < x < b$, je integrál (8) funkcí proměnné x. Označme

$$f_1(x) = \int_a^b \frac{f(t)}{t - x} \, \mathrm{d}t.$$

O funkci $f_1(x)$ platí následující věta.[1]

[1] Viz na př. I. I. Privalov, Vvěděnije v těoriju funkcij kompleksnogo pěremennogo, izd. 8, Gostěchizdat, 1948.

Věta 3 (I. I. Privalova). *Jestliže* $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$, $\alpha < 1$, *pak v každém uzavřeném intervalu* $a_1 \leqq x \leqq b_1$, *kde* $a_1 > a$ *a* $b_1 < b$, *platí* $f_1(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$; *jestliže* $f(x) \in \mathrm{Lip}1$, *pak v témže intervalu* $a_1 \leqq x \leqq b_1$ *platí* $f_1(x) \in \mathrm{Lip}\beta$, *kde* β *je libovolné kladné číslo menší než jedna.*

Obdobná věta platí i pro integrály (10). Při tom, jestliže je křivka uzavřena,

$$f_1(z) = \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

přísluší třídě $\mathrm{Lip}\alpha$ resp. $\mathrm{Lip}\beta$ na celé křivce L.

Jako důsledek shora uvedených vět dostaneme větu, kterou budeme formulovat, abychom se neopakovali, pouze pro integrál (8), i když platí i pro integrál (10).

Věta 4. *Nechť* $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$ *v intervalu* $a \leqq x \leqq b$. *Nechť*

$$f_1(x) = \int_a^b \frac{f(t)}{t - x} \mathrm{d}t,$$

$$f_2(x) = \int_a^b \frac{f_1(t)}{t - x} \mathrm{d}t,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n(x) = \int_a^b \frac{f_{n-1}(t)}{t - x} \mathrm{d}t,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Singulární integrály $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, *existují pro* $a < x < b$; *v každém uzavřeném intervalu* $a_1 \leqq x \leqq b_1$, *kde* $a_1 > a$ *a* $b_1 < b$, *máme* $f_n(x) \in \mathrm{Lip}\alpha$ *pro* $\alpha < 1$ *a* $f_n(x) \in \mathrm{Lip}\beta$, *kde* β *je libovolné číslo menší než jedna, jestliže* $\alpha = 1$.

§ 22. Jádro Cauchyho a Hilbertovo. Důležitá úloha, kterou v řadě aplikací hraje pojem singulárního integrálu, je důsledkem následující věty theorie funkcí komplexní proměnné.

Věta. *Nechť* L *je hladká křivka a nechť* $\varphi(\zeta)$ *je funkce bodu na této křivce, jež vyhovuje Lipschitzově podmínce s exponentem* α, $0 < \alpha \leqq 1$.

Jestliže bod z konverguje z vnitřku resp. z vnějšku křivky L k bodu t této křivky, pak integrál Cauchyho typu

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{1}$$

konverguje k limitě

$$F_i(t) = \tfrac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \tag{2}$$

resp.

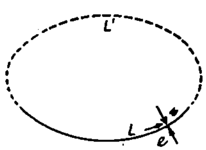
$$F_e(t) = -\tfrac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \tag{3}$$

kde integrály ve vzorcích (2) *a* (3) *jsou singulární.*

Tato věta dává podnět k několika poznámkám.

Především se předpokládá, že křivka L probíhá v kladném směru, takže jí omezená oblast leží po její levé straně. Index i (vzorec (2)) značí, že $z \to t$ z vnitřku oblasti, a index e (vzorec (3)) značí, že $z \to t$ z vnějšku. Dále, když hovoříme o konvergenci bodu z k t, budeme předpokládat, že se křivka, kterou probíhá bod z, nedotýká křivky L; v opačném případě může být tvrzení věty nesprávné. Konečně může křivka L sestávat z několika oddělených křivek.

Důkaz této věty neprovedeme, protože jej lze najít v kterékoli učebnici theorie funkcí komplexní proměnné.



Obr. 3.

Zvláště je třeba se zmínit o případu neuzavřené křivky.

Jestliže L je jednoduchý oblouk (obr. 3), ztrácí pojem „z vnitřku oblasti“ a „z vnějšku oblasti“ smysl, avšak vzorce (2) a (3) zůstávají v platnosti. Směry i a e jsou definovány takto: Doplňme L obloukem L' na uzavřenou křivku, jež je orientována proti směru hodinových ručiček, a nechť D je oblast jí omezená. Pod i a e ve vzorcích (2) a (3) je potom třeba chápat směry z vnitřku resp. z vnějšku oblasti D.

Výraz
$$\frac{d\zeta}{\zeta - t}, \tag{4}$$

kde ζ a t jsou body křivky L, budeme nazývat *Cauchyho jádrem.*

Důležitou úlohu hraje také t. zv. *Hilbertovo jádro*:

$$\operatorname{cotg}\frac{\sigma - s}{2}\,\mathrm{d}\sigma, \tag{5}$$

kde s a σ jsou reálné proměnné, jež probíhají interval $\langle 0, 2\pi\rangle$. Hilbertovo jádro také souvisí s theorií analytických funkcí. Objasněme tuto souvislost.

Vyjděme z Poissonova integrálu

$$U(r, s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\sigma - s)}\,\mathrm{d}\sigma,$$

jenž vyjadřuje hodnoty harmonické funkce $U(r, s)$ uvnitř kruhu $r < 1$ pomocí jejích hodnot $u(\sigma) = U(1, \sigma)$ na obvodu tohoto kruhu. Položme $re^{is} = z$, $e^{i\sigma} = \zeta$. Potom, jak se lehce přesvědčíme (γ je kružnice $|\sigma| = 1$),

$$U(r, s) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u(\sigma)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right\}.$$

Označme $V(r, s)$ harmonickou funkci, konjugovanou s $U(r, s)$. Funkce $V(r, s)$ je až na aditivní konstantu určena. Tuto konstantu zvolme tak, aby se $V(r, s)$ rovnala nule ve středu kruhu. Potom

$$U(r, s) + i\,V(r, s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u(\sigma)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Nechť nyní $r \to 1$, takže z konverguje k bodu kružnice γ, zůstávajíc uvnitř kruhu. Užijeme-li vzorce (2), dostaneme po několika elementárních úpravách

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{cotg}\frac{\sigma - s}{2}\,\mathrm{d}\sigma, \tag{6}$$

kde $v(s) = V(1, s)$ je limitní hodnota harmonické funkce $V(r, s)$ na kružnici γ.

Vzorec (6) tedy váže limitní hodnoty konjugovaných funkcí, harmonických uvnitř kruhu, při čemž konjugovaná funkce $V(r, s)$ je podrobena podmínce

$$V(r, s)|_{r=0} = 0. \tag{7}$$

Jádro Hilbertovo a Cauchyho jsou v dosti jednoduchém vztahu. Nechť L je jednoduchá uzavřená hladká křivka se spojitou křivostí. Nechť její parametrické rovnice jsou

$$x = x(s),\ y = y(s).$$

O parametru s budeme předpokládat, že probíhá interval $\langle 0,2\pi \rangle$. Označme $t = x + iy$ a $t(s) = x(s) + i\,y(s)$. Rovnici křivky L lze napsat ve tvaru $t = t(s)$. Nechť ζ je bod na L příslušející hodnotě parametru σ, takže $\zeta = t(\sigma)$. Potom není obtížné dokázat vzorec

$$\frac{d\zeta}{\zeta - t} = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\sigma - s}{2}\, d\sigma + P(s, \sigma)\, d\sigma, \tag{8}$$

kde $P(s, \sigma)$ je spojitá funkce obou argumentů, splňující Lipschitzovu podmínku s nějakým kladným exponentem.

§ 23. Vzorce pro skládání singulárních integrálů. Nechť

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta, \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta, \end{aligned} \tag{1}$$

kde L je uzavřená křivka, ať už jednoduše nebo mnohonásobně souvislá. Určeme, jak lze přímo vyjádřit $\varphi_2(t)$ pomocí $\varphi(t)$. Uvažujme integrály Cauchyho typu:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Podle vzorce (2), § 22

$$f_i(t) = \tfrac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta,\quad f_{1i}(t) = \tfrac{1}{2}\varphi_1(t) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta.$$

Odtud, užijeme-li definice $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$, dostaneme:

$$\varphi_1(t) = f_i(t) - \tfrac{1}{2}\varphi(t),\quad \varphi_2(t) = f_{1i}(t) - \tfrac{1}{2}\varphi_1(t). \tag{2}$$

Dosaďme hodnotu $\varphi_1(t)$ z (2) do $f_1(z)$:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_i(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3}$$

Prvý integrál ve (3) je Cauchyho integrál, neboť jeho hustota[1]) $f_i(\zeta)$ je limitní hodnota funkce $f(z)$ regulární uvnitř L. Uvedený integrál se tedy rovná $f(z)$. Druhý integrál ve (3) se zřejmě rovná $\frac{1}{2}f(z)$. Tudíž $f_1(z) = \frac{1}{2}f(z)$ a $f_{1i}(t) = \frac{1}{2}f_i(t)$. Nyní ze (2) plyne

$$\varphi_2(t) = \tfrac{1}{2}f_i(t) - \tfrac{1}{2}[f_i(t) - \tfrac{1}{2}\varphi(t)] = \tfrac{1}{4}\varphi(t).$$

Tím jsme dostali Poincaré-Bertrandův vzorec pro skládání singulárních integrálů:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \tau}\,d\zeta = \tfrac{1}{4}\varphi(t). \tag{4}$$

Poznamenejme, že v dvojnásobném singulárním integrálu nelze zaměnit pořádek integrování; jestliže zaměníme pořádek integrování ve (4), dostaneme integrál

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L \varphi(\zeta)\,d\zeta \int_L \frac{d\tau}{(\zeta - \tau)(\tau - t)},$$

jenž se rovná nule.

Jestliže $\zeta \neq t$, pak opravdu

$$\int_L \frac{d\tau}{(\zeta - \tau)(\tau - t)} = \frac{1}{\zeta - t}\left\{\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{d\tau}{\tau - \zeta}\right\}.$$

Ve vzorci (1), § 22 položme $\varphi(\zeta) \equiv 1$. Potom $F(z) = 1$, jestliže z leží uvnitř L; vzorec (2), § 22, v němž nahradíme τ za ζ, nyní dá

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2}.$$

Úplně obdobně

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2},$$

a tedy

$$\int_L \frac{d\tau}{(\zeta - \tau)(\tau - t)} = 0, \quad \zeta \neq t.$$

---

[1] Hustotou integrálu typu Cauchyho $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ se nazývá funkce $\mu(\zeta)$.

Odvoďme vzorec pro skládání integrálů s Hilbertovým jádrem. Nechť

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(s-\sigma)\,d\sigma,\\ \varphi_2(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(s-\sigma)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{5}$$

Označme $U(r, s)$, $U_1(r, s)$, $U_2(r, s)$ funkce harmonické uvnitř kruhu $r < 1$, jejichž hodnoty na kružnici $r = 1$ jsou resp. $\varphi(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$. Potom $U_1(r, s)$ je funkce konjugovaná s $U(r, s)$ a $U_2(r, s)$ je konjugovaná s $U_1(r, s)$.

Z rovnic Cauchy-Riemannových není obtížné nahlédnout, že

$$U_2(r, s) = -U(r, s) + C, \quad C = \text{konst.}$$

V souhlase s tím, co bylo řečeno v § 22, je konstanta C určena podmínkou $U_2(r, s)|_{r=0} = 0$. Odtud

$$C = U(r, s)|_{r=0}.$$

Avšak hodnota harmonické funkce ve středu kruhu se rovná aritmetickému průměru jejích hodnot na kružnici. Odtud

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(1, \sigma)\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Nyní

$$U_2(r, s) = -U(r, s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Položme v této rovnici $r = 1$. Protože $U(1, s) = \varphi(s)$, $U_2(1, s) = \varphi_2(s)$, dostaneme konečně

$$\varphi_2(s) = -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Nahradíme-li $\varphi_2(s)$ a potom $\varphi_1(s)$ jejich výrazy ve tvaru singulárních integrálů, dostaneme Hilbertův vzorec:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\vartheta - s)\,d\vartheta\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - \vartheta)\,d\sigma =$$

$$= -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\,d\sigma. \tag{6}$$

Jednoduše se skládají dva integrály, z nichž jeden je singulární a druhý obyčejný. Nechť $H(s, \sigma)$ je funkce, vyhovující Lipschitzově podmínce. Potom ve dvojnásobném integrálu

$$F(s) = \int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\vartheta - s)\,d\vartheta\int_0^{2\pi}H(\vartheta, \sigma)\,d\sigma$$

lze zaměnit pořádek integrování a $F(s)$ splňuje Lipschitzovu podmínku. Obdobná věta platí i pro integrály s Cauchyho jádrem. Podrobnější důkaz tohoto tvrzení lze najít v [28f].

§ 24. Singulární integrální rovnice s Hilbertovým jádrem.

Budeme uvažovat rovnici tvaru

$$a\,\varphi(s) + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,d\sigma + \int_0^{2\pi}K(s, \sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma = f(s), \tag{1}$$

kde a a b jsou obecně komplexní konstanty.

O jádru $K(s, \sigma)$ budeme předpokládat, že splňuje Lipschitzovu podmínku. Totéž budeme předpokládat o pravé straně.

Předpokládejme nejdříve, že $K(s, \sigma) \equiv 0$, takže uvažujeme rovnici

$$L\varphi = a\,\varphi(s) + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,d\sigma = f(s). \tag{2}$$

Řeší se takto:

Položme

$$M\omega = a\,\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,d\sigma, \tag{3}$$

kde $\omega(\sigma)$ je libovolná funkce. Na obě strany naší rovnice aplikujme operátor (3). Dostaneme novou rovnici

$$ML\varphi = F(s),\ F(s) = Mf,$$

kterou, užijeme-li Hilbertova vzorce, lehce uvedeme na tvar

$$(a^2 + b^2)\,\varphi(s) - \frac{b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = F(s). \tag{4}$$

Jestliže $a^2 + b^2 \neq 0$, pak je to Fredholmova rovnice s velmi jednoduchým degenerovaným jádrem.

Dokažme, že je ekvivalentní rovnici (2), jestliže jen $a \neq 0$. Napišme proto rovnici (4) ve tvaru $ML\varphi - Mf = 0$ čili $M(L\varphi - f) = 0$. Označíme-li $L\varphi - f = \omega$, dojdeme k rovnici $M\omega = 0$ čili podrobněji

$$a\,\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

Aplikujme na obě strany této rovnice operátor

$$a\,\psi(s) + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(s)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,\mathrm{d}s.$$

Potom dostaneme rovnici, jíž nutně vyhovuje $\omega(s)$:

$$a\left[a\,\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\sigma)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,\mathrm{d}\sigma\right] +$$

$$+ \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,\mathrm{d}\sigma\left[a\,\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\vartheta)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\vartheta - \sigma)\,\mathrm{d}\vartheta\right] = 0.$$

Odstraňme závorky a dvojnásobný integrál nahraďme podle Hilbertova vzorce. Potom dostaneme

$$(a^2 + b^2)\,\omega(s) - \frac{b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = 0. \tag{*}$$

Odtud plyne, že $\omega(s) = \text{konst.}$ Dosadíme-li do (*) $\omega(s) = \omega(\sigma) = C$, najdeme, že $a^2C = 0$ čili $C = 0$. Nyní $\omega(s) = 0$ čili $L\varphi - f = 0$, t. j. z rovnice (4) jako důsledek plyne rovnice (2). Na druhé straně je zřejmé, že rovnice (4) je důsledkem rovnice (2); tím je jejich ekvivalence dokázána. Řešíme-li rovnici (4) methodou § 4, dostaneme hledané řešení

$$\varphi(s) = \frac{a}{a^2 + b^2} f(s) - \frac{b}{2\pi(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\, d\sigma +$$

$$+ \frac{b^2}{2\pi a(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} f(\sigma)\, d\sigma. \tag{5}$$

Jestliže $a^2 + b^2 = 0$, lze dokázat, že rovnice (2) je v obecném případě neřešitelná.

Zvlášť je třeba pojednat o případu $a = 0$. Položíme-li $b = 1$, což není zřejmě na újmu obecnosti, dostaneme rovnici prvého druhu

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\, d\sigma = f(s). \tag{6}$$

Vzorce (5) se v tomto případě nedá užít, avšak rovnice (6) se lehce řeší přímo. Proveďme záměnu písmen σ a s na ϑ a σ, násobme obě strany rovnice výrazem

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\, d\sigma$$

a integrujme v mezích $\langle 0, 2\pi \rangle$. Užijeme-li Hilbertova vzorce, dostaneme

$$\varphi(s) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s)\, ds = F(s), \quad F(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\, d\sigma. \tag{7}$$

Tato rovnice se lehce řeší. Položme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s)\, ds = C.$$

Potom

$$\varphi(s) - C = F(s).$$

Integrujeme-li tuto rovnici v mezích $\langle 0, 2\pi \rangle$, dojdeme k rovnici

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(s)\, \mathrm{d}s. \tag{8}$$

Není obtížné se přesvědčit, že je splněna vždy, ať je funkce $f(s)$ jakákoliv. Konstanta C zůstává libovolnou a tak dostaneme

$$\varphi(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\, \mathrm{d}\sigma + C. \tag{9}$$

Dosadíme-li toto do (6), přesvědčíme se, že výraz (9) vyhovuje rovnici tehdy a jen tehdy, když

$$\int_0^{2\pi} f(s)\, \mathrm{d}s = 0. \tag{10}$$

Podmínka (10) je tedy nutná a postačující k tomu, aby rovnice (6) měla řešení.

V případě obecnější rovnice (1) dostaneme, jestliže aplikujeme na obě její strany operátor (3), integrální Fredholmovu rovnici obecného tvaru. Úloha se tím převádí na její řešení. Lze dokázat, že uvedená Fredholmova rovnice a rovnice (1) jsou ekvivalentní.

Na závěr řekněme několik slov o singulární rovnici obecnějšího tvaru:

$$a(s)\, \varphi(s) + \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\, \mathrm{d}\sigma + \int_0^{2\pi} K(s, \sigma)\, \varphi(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = f(s) \tag{11}$$

s proměnnými koeficienty a a b. Jestliže $a(s)$ a $b(s)$ vyhovují Lipschitzově podmínce, potom, aplikujeme-li na obě strany rovnice (11) operátor

$$M\omega = a(s)\, \omega(s) - \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\, \mathrm{d}\sigma,$$

dostaneme integrální rovnici Fredholmova typu. Tato však nemusí být ekvivalentní rovnici (11).

§ 25. Singulární integrální rovnice s jádrem Cauchyho.

Singulární rovnice

$$a\,\varphi(t) + \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta = f(t), \tag{1}$$

kde a a b jsou konstanty a L je uzavřená křivka,[1] se také řeší velmi jednoduše. Na obě strany rovnice (1) aplikujme operátor

$$M\omega = a\,\omega(t) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{2}$$

Užijeme-li Poincaré-Bertrandova vzorce, lehce najdeme

$$(a^2 - b^2)\,\varphi(t) = a\,f(t) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Jestliže $a^2 - b^2 \neq 0$, dostaneme:

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2}f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{3}$$

Dosazením do (1) se přesvědčíme, že funkce (3) skutečně vyhovuje naší rovnici. Případ $a = 0$ není tentokráte výjimečný.

V případě rovnice obecnějšího tvaru,

$$a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta + \int_L K(t, \zeta)\,\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = f(t), \quad a^2(t) - b^2(t) \neq 0, \tag{4}$$

vede užití téhož operátoru

$$M\omega = a(t)\,\omega(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta$$

na rovnici Fredholmovu. Jestliže a a b jsou konstanty, je získaná Fredholmova rovnice ekvivalentní rovnici (4). V obecném případě tato otázka vyžaduje dodatečného vyšetřování.

---

[1] Nezáleží na tom, zda je jednoduše nebo mnohonásobně souvislá.

§ 26. Případ neuzavřené souvislé křivky. Jestliže křivka L není uzavřená, vzorec Poincaré-Bertrandův neplatí a methody řešení singulárních rovnic vyložené v § 25 nelze užít. Užijeme zde jiné methody, založené na převedení singulární rovnice na tak zvanou úlohu Riemannovu.[1] Poznamenejme, že této methody lze také užít, jestliže křivka L je uzavřená.

Nechť L je jednoduchý hladký oblouk se spojitou křivostí. Uvažujme rovnici

$$a\varphi(t) + \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta = f(t). \tag{1}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že a a b jsou konstanty a $a^2 - b^2 \neq 0$.

Jako novou proměnnou zavedeme integrál Cauchyho typu s hustotou $\varphi(\zeta)$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{2}$$

Ze vzorců (2) a (3), § 22 plyne:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= F_i(t) - F_e(t),\\ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta &= F_i(t) + F_e(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Dosadíme-li toto do (1), dostaneme rovnici:

$$(a + b)\, F_i(t) - (a - b)\, F_e(t) = f(t). \tag{4}$$

Tak jsme došli k Riemannově úloze: určit funkci $F(z)$, jestliže je dána lineární relace mezi jejími limitními hodnotami z vnitřku a z vnějšku křivky.

Položme

$$F(z) = \Phi(z)\,\omega(z) \tag{5}$$

a zvolme $\omega(z)$ tak, aby

$$(a + b)\,\omega_i(z) = (a - b)\,\omega_e(z). \tag{6}$$

Funkce $\omega(z)$ je tedy řešením homogenní Riemannovy úlohy.

[1] Podle terminologie N. I. Muschvelišviliho [28f] na úlohu Hilbertovu.

Uvažujme funkci
$$\omega(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m, \tag{7}$$
kde α a β jsou počátek a konec oblouku L, m je libovolná konstanta. Každá větev této funkce je regulární v rovině, rozdělené řezem podél L. Zvolme její libovolnou větev, na př. tu, jež se rovná jedné pro $z = \infty$. Při oběhu proti ručičkám hodinovým okolo bodu α se funkce $\omega(z)$ násobí činitelem $e^{2\pi i m}$. Tudíž
$$\omega_e(z) = e^{2\pi i m}\, \omega_i(z).$$
Určeme nyní číslo m z podmínky
$$e^{2\pi i m} = \frac{a+b}{a-b}. \tag{8}$$
Potom funkce (7) vyhovuje rovnici (6). Rovnice (8) určuje číslo
$$m = \frac{1}{2\pi i} \lg \frac{a+b}{a-b} \tag{9}$$
až na libovolnou celistvou aditivní konstantu. Zvolme tuto konstantu tak, aby platilo
$$0 \leqq \mathrm{Re}(m) < 1.$$
K tomu stačí vzít hodnotu $\arg \dfrac{a+b}{a-b}$ mezi 0 a 2π. Při této volbě čísla m jsou obě funkce $\omega(z)$ a $\dfrac{1}{\omega(z)}$ absolutně integrovatelné podél L.

Dosadíme-li nyní nalezenou hodnotu $\omega(z)$ do (5) a dále do (4), dostaneme:
$$\Phi_i(t) - \Phi_e(t) = \frac{f(t)}{a+b}\left(\frac{t-\beta}{t-\alpha}\right)^m. \tag{10}$$
Tato jednodušší Riemannova úloha se řeší velmi lehce. Vzorce (3) právě ukazují, že jako $\Phi(z)$ lze zvolit integrál Cauchyho typu
$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(a+b)} \int_L \left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{11}$$
Nyní
$$F(z) = \frac{1}{2\pi i(a+b)} \left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m \int_L \left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{12}$$

Řešení integrální rovnice (1) lze najít pomocí prvého ze vzorců (3):

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\pi i} \left(\frac{t - \alpha}{t - \beta}\right)^m \int_L \left(\frac{\zeta - \beta}{\zeta - \alpha}\right)^m f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - t}. \quad (13)$$

Řešení (13) není obecně jediné. Abychom se o tomto přesvědčili, uvažujme homogenní rovnici

$$a\,\varphi_0(t) + \frac{b}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = 0. \quad (14)$$

Užijme téhož postupu a položme

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (15)$$

$$F_0(z) = \left(\frac{z - \alpha}{z - \beta}\right)^m \Phi_0(z). \quad (16)$$

Všimněme si, že se $F_0(z)$ a tedy i $\Phi_0(z)$ rovná nule pro $z = \infty$. Místo k (10) dojdeme nyní k rovnici

$$\Phi_{0i}(t) - \Phi_{0e}(t) = 0. \quad (17)$$

Funkce $\Phi_0(z)$ nabývá tedy na oblouku L stejné limitní hodnoty z různých jeho stran. Z toho lehce usoudíme, že $\Phi_0(z)$ je regulární v celé rovině, až snad na body α a β. Požadujme, aby součin

$$\varphi_0(t) \lg \frac{t - \alpha}{t - \beta}$$

byl absolutně integrovatelný podél L.

Nechť z_1 a z_2 jsou dva libovolné body roviny z, ležící vně L. Integrujeme-li (15) po cestě, která spojuje z_1 a z_2 a která nemá společné body s L, budeme mít

$$\int_{z_1}^{z_2} F_0(z)\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_0(\zeta) \lg \frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2} d\zeta.$$

Necháme-li $z_1 \to \alpha$, $z_2 \to \beta$, najdeme, že $F_0(z)$ je integrovatelná po libovolné cestě, která spojuje α a β a nemá jiné společné body s křivkou L. Odtud plyne, že neurčitý integrál

$$\int F_0(z)\, dz$$

je omezený v bodech α a β. To by nebylo možné, kdyby α a β byly podstatně singulárními body funkce $\Phi_0(z)$. Avšak potom mohou být pouze jejími póly. Předpokládejme, že reálná část m je různá od nuly; potom $0 < \mathrm{Re}(m) < 1$. Poněvadž integrál $\int_\alpha^\beta F_0(z)\,dz$ má konečnou hodnotu, snadno najdeme podle vzorce (16), že β je regulární bod a α je pól prvého řádu nebo regulární bod funkce $\Phi_0(z)$. Konečně $\Phi_0(\infty) = 0$. Z toho všeho plyne, že

$$\Phi_0(z) = \frac{c'}{z - \alpha}, \quad c' = \text{konst.} \tag{18}$$

Nyní

$$F_0(z) = \frac{c'}{(z - \alpha)^{1-m}(z - \beta)^m}$$

a podle prvého ze vzorců (3) nalezneme řešení homogenní singulární rovnice (14):

$$\varphi_0(t) = \frac{c}{(t - \alpha)^{1-m}(t - \beta)^m}, \quad c = c'(1 - e^{2\pi i m}). \tag{19}$$

Obecné řešení rovnice (1) je dáno vzorcem

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\pi i}\left(\frac{t-\alpha}{t-\beta}\right)^m \int_L \left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - t} +$$
$$+ \frac{c}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}, \tag{20}$$

kde c je libovolná konstanta. Tuto konstantu lze zvolit tak, aby $\varphi(t)$ byla omezená na jednom či druhém konci oblouku L.

Místo (13) lze najít druhý výraz, v němž α a β vystupují souměrněji. Položme

$$\Psi(z) = (z - \alpha)^{1-m}(z - \beta)^m F(z). \tag{21}$$

Dosadíme-li toto do (4), dostaneme:

$$\Psi_i(t) - \Psi_e(t) = \frac{1}{a + b} f(t)(t - \alpha)^{1-m}(t - \beta)^m.$$

Odtud

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i(a + b)} \int_L \frac{(\zeta - \alpha)^{1-m}(\zeta - \beta)^m f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Nyní již není obtížné určit $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i (t-\alpha)^{1-m} (t-\beta)^m} \cdot$$
$$\cdot \int_L \frac{(\zeta - \alpha)^{1-m} (\zeta - \beta)^m f(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta. \tag{22}$$

Toto je partikulární řešení. Obecné řešení pak lze napsat ve tvaru

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i (t-\alpha)^{1-m} (t-\beta)^m} \cdot$$
$$\cdot \int_L \frac{(\zeta - \alpha)^{1-m} (\zeta - \beta)^m f(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta + \frac{c}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}. \tag{23}$$

Hodnoty konstanty c v (20) a (23) jsou různé.

Uvažujme speciálně rovnici prvého druhu:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta = f(t). \tag{24}$$

Zde $a = 0$, $b = 1$. Dále

$$m = \frac{1}{2\pi i} \lg(-1) = \tfrac{1}{2}$$

a vzorec (20) v tomto případě dává

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}} \int_L \sqrt{\frac{\zeta - \beta}{\zeta - \alpha}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta + \frac{c}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}. \tag{25}$$

Položíme-li $a = 0$ ve (23), dostaneme řešení v druhém tvaru:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i \sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}} \int_L \frac{\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\, f(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta + \frac{c}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}. \tag{26}$$

Jestliže $\operatorname{Re}(m) = 0$, pak ze vzorce (16) a z toho, že integrál $\int_\alpha^\beta F_0(z)\,\mathrm{d}z$ je konečný, plyne, že α a β jsou regulární body funkce $\Phi_0(z)$. Avšak potom podle Liouvillovy věty $\Phi_0(z) = \text{konst.}$, a protože $\Phi_0(\infty) = 0$, $\Phi_0(z) \equiv 0$. Rovnice (1) má v tom případě jediné řešení, určené vzorcem (13); vzorec (22) nedává řešení pro $\operatorname{Re}(m) = 0$.

§ 27. Případ neuzavřené nesouvislé křivky. Nechť se nyní křivka L skládá z n jednoduchých oblouků $L_1, L_2, \ldots, L_n$, jež nemají po dvou společné body. Rovnice

$$a\,\varphi(t) + \frac{b}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta = f(t) \tag{1}$$

s konstantními koeficienty a a b se řeší týmž způsobem jako v § 26. Položíme-li

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

dostaneme jako dříve

$$(a + b)\,F_i(t) - (a - b)\,F_e(t) = f(t). \tag{2}$$

Označme α_k a β_k počáteční a koncový bod oblouku L_k. Položme

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z - \alpha_k}{z - \beta_k}\right)^m \Phi(z), \tag{3}$$

kde exponent m je definován vzorcem (9), § 26. Dosadíme-li toto do (2), dostaneme

$$\Phi_i(t) - \Phi_e(t) = \frac{1}{a + b}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t - \beta_k}{t - \alpha_k}\right)^m f(t),$$

odkud plyne, že lze zvolit

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(a + b)}\int\limits_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m f(\zeta)\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{4}$$

a tím dostaneme partikulární řešení rovnice (1):

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2}f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k}\right)^m \int\limits_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{5}$$

Z těchže úvah jako v předcházejícím paragrafu najdeme, že v případě homogenní rovnice je příslušná funkce $\Phi_0(z)$ rovna

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z - \alpha_k}$$

čili, jestliže tyto zlomky převedeme na společného jmenovatele,

$$\Phi_0(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)}, \tag{6}$$

kde $P_{n-1}(z)$ je libovolný polynom stupně $n - 1$. Nyní lehce najdeme, že řešení homogenní integrální rovnice

$$a\,\varphi_0(t) + \frac{b}{\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta = 0 \tag{7}$$

se rovná

$$\varphi_0(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\prod\limits_{k=1}^{n} [(t - \alpha_k)^{1-m}\,(t - \beta_k)^m]}, \tag{7}$$

kde $Q_{n-1}(t)$ je libovolný polynom stupně $n - 1$. Obecné řešení rovnice (1) má tvar

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{(a^2 - b^2)\,\pi i} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k}\right)^m .$$

$$\cdot \int\limits_L \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m f(\zeta) \cdot \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t} + \frac{Q_{n-1}(t)}{\prod\limits_{k=1}^{n} [(t - \alpha_k)^{1-m}(t - \beta_k)^m]}. \tag{8}$$

Polynom $Q_{n-1}(t)$ lze zvolit tak, aby $\varphi(t)$ byla omezená v daných n koncových bodech oblouků $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

§ 28. Soustavy singulárních integrálních rovnic. Soustava singulárních rovnic s Hilbertovým jádrem má tvar

$$L_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ a_{kj}\,\varphi_j(s) + \frac{b_{kj}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_j(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\,\mathrm{d}\sigma + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{2\pi} K_{kj}(s, \sigma)\,\varphi_j(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \right\} = f_k(s),\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

kde jádra $K_{kj}(s, \sigma)$ splňují Lipschitzovu podmínku vzhledem k oběma proměnným.

Tuto soustavu lze lehce převést na Fredholmovu. Stačí ji nahradit soustavou

$$M_k(L_1, L_2, \ldots, L_n) = M_k(f_1, f_2, \ldots, f_n), \tag{2}$$

kde

$$M_k(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum_{j=1}^{n} \left\{a_{kj}\, \omega_j(s) - \frac{b_{kj}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_j(\sigma) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\sigma - s)\, d\sigma.\right\} \tag{3}$$

Není obtížné se přesvědčit o tom, že soustava (2) má tvar

$$\sum_{m=1}^{n} \{A_{km}\, \varphi_m(s) + \int_0^{2\pi} K^*_{km}(s, \sigma)\, \varphi_m(\sigma)\, d\sigma\} = M_k(f_1, f_2, \ldots, f_n), \tag{4}$$

kde

$$A_{km} = \sum_{j=1}^{n} (a_{kj}a_{jm} + b_{kj}b_{jm}) \tag{5}$$

a $K^*_{km}(s, \sigma)$ jsou nějaká nová jádra, jež také splňují Lipschitzovu podmínku. Otázka, jsou-li soustavy (1) a (4) ekvivalentní, je dosti obtížná. Některé návody na její řešení lze najít ve článku N. I. Muschelišviliho [28e].

To, co bylo řečeno, se beze změny přenáší na soustavu singulárních rovnic s jádry Cauchyho, jestliže se integrály vyskytující se v soustavě berou podél uzavřené křivky.

ČÁST II

UŽITÍ INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

KAPITOLA 1

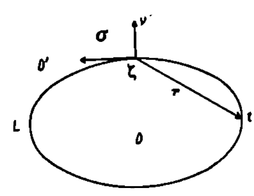
DIRICHLETŮV PROBLÉM A JEHO UŽITÍ

Dirichletův problém má v matematice co do četnosti a různorodosti aplikací mimořádné místo. Na něj se bezprostředně převádí základní úloha hydrodynamiky — úloha o obtékání, dále problémy torse a ohybu v theorii pružnosti. S ním jsou také těsně svázány základní úlohy statické theorie pružnosti jak v rovině, tak v prostoru. S týmž problémem mají styčné body i úlohy z theorie šíření vln v pružném prostředí. Tento výčet by bylo lehce možno rozšířit.

V této kapitole vyložíme methody řešení Dirichletova problému, jež jsou spojeny s theorií integrálních rovnic, a některé jeho aplikace. Budeme se zde především zabývat rovinným problémem, jenž má pro nás zvláštní význam jak pro hojnost aplikací, tak pro větší rozpracovanost a efektivnost method řešení.

Připomeňme, že Dirichletův problém spočívá v určení funkce, harmonické uvnitř oblasti, jestliže jsou známy hodnoty této funkce na hranici oblasti.

§ 29. Dirichletův problém pro jednoduše souvislou rovinnou oblast. Uvažujme nejdříve případ konečné oblasti (obr. 4). Označme oblast písmenem D, její hranici písmenem L. O křivce L budeme předpokládat, že je hladká a má spojitou křivost. Hledanou harmonickou funkci



Obr. 4.

označme $U(x, y)$, její hodnoty dané na L označme $u(t)$, kde t je komplexní souřadnice bodu na hranici. Harmonická funkce $U(x, y)$ v jednoduše souvislé oblasti může být považována za reálnou část nějaké analytické funkce $\varphi(z)$, regulární v této oblasti;[1] naši úlohu rozřešíme, jestliže nalezneme funkci $\varphi(z)$. Tuto poslední budeme hledat ve tvaru integrálu typu Cauchyho

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \tag{1}$$

jehož hustotu $\mu(\zeta)$ budeme považovat za reálnou. Tím se úloha převádí na určení $\mu(\zeta)$.

Nechme bod z ve vzorci (1) konvergovat z vnitřku oblasti k nějakému bodu t na hranici. Užijeme-li vzorce (2), § 22, dostaneme:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t} \, d\zeta. \tag{2}$$

Určeme ve (2) reálnou část. Všimneme-li si, že $\mathrm{Re}\{\varphi(t)\} = u(t)$, najdeme

$$\mu(t) + \left[\frac{1}{\pi} \mathrm{Im} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t} \, d\zeta = 2u(t)\right]$$

čili, protože funkce $\mu(\zeta)$ je reálná,

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \, \mathrm{Im} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - t}\right) = 2u(t).$$

Vypočtěme jádro integrálu. Nechť $\zeta - t = re^{i\vartheta}$. Potom

$$\mathrm{Im} \left(\frac{d\zeta}{\zeta - t}\right) = \mathrm{Im}(d \lg(\zeta - t)) = d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} d\sigma,$$

kde $d\sigma$ je element oblouku hranice. V důsledku Cauchy-Riemannových rovnic

[1] Zde i dále budeme funkci komplexní proměnné nazývat *analytickou* v oblasti, jestliže tato funkce je holomorfní v každém bodě oblasti, až snad na konečný počet bodů nebo čar. Budeme nazývat analytickou funkci *regulární* v oblasti, jestliže tato funkce je jednoznačná a nemá uvnitř oblasti singulární body. Námi užívaná terminologie není obecně přijata.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \lg r}{\partial \nu} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \nu}\,^{1}.$$

Zvolme směr radius-vektoru r od ζ k t. Potom, jak lze snadno vidět $\frac{\partial r}{\partial \nu} = -\cos(r, \nu)$, a tedy definitivně

$$\operatorname{Im}\left(\frac{d\zeta}{\zeta - t}\right) = -\frac{\cos(r, \nu)}{r}\,d\sigma.$$

Jestliže $r \to 0$, pak i $\cos(\nu, r) \to 0$; bez obtíží lze dokázat, že při našem předpokladu spojitosti křivosti křivky L je jádro $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$ spojité. Tím docházíme k integrální rovnici Fredholmova typu s neznámou $\mu(t)$:

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r}\,d\sigma = 2u(t). \tag{3}$$

Ve speciálním případě, kdy hranice L je elipsa, jsme tuto rovnici studovali v §§ 5 a 7. Dokážeme, že rovnice (3) je řešitelná a má jediné řešení pro libovolnou pravou stranu. Jinými slovy dokážeme, že $\lambda = \frac{1}{\pi}$ není charakteristické číslo jádra $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$. Podle Fredholmovy alternativy (§ 8) stačí dokázat, že příslušná homogenní rovnice má pouze triviální řešení.

Nechť $u(t) \equiv 0$. Rovnice (3) se stane homogenní. Nechť $\mu_0(t)$ je její libovolné řešení, takže

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi}\int_L \mu_0(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r}\,d\sigma = 0. \tag{4}$$

Položme (z je bod uvnitř D)

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{5}$$

Podmínka $u(t) \equiv 0$ ukazuje, že $\operatorname{Re}\{\varphi_0(t)\} = 0$, jestliže t je bod na L. Podle věty o jednoznačnosti Dirichletova problému $\operatorname{Re}\{\varphi_0(z)\} \equiv 0$ v celé oblasti D. Nyní z Cauchy-Riemannových rovnic plyne, že $\varphi_0(z)$ je ryze imaginární konstanta, $\varphi_0(z) = ia$. Rovnici (5) lze převést na tvar

[1] ν je vnější normála k L.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_0(\zeta) - ia}{\zeta - z}\, d\zeta \equiv 0,$$

při čemž tato identita platí pro každý bod z uvnitř D. Avšak potom, podle známé věty o Cauchyho integrálech, $\mu_0(\zeta) - ia$ je limitní hodnota na L nějaké funkce $\psi(z)$, regulární vně L a rovné nule v nekonečnu. Imaginární část této funkce se rovná na L konstantě a, avšak potom $\psi(z) = \text{konst.}$ Protože se rovná nule pro $z = \infty$, $\psi(z) \equiv 0$. Funkce $\mu_0(t)$ je hodnota $\operatorname{Re}\{\psi(x)\}$ na hranici, a proto $\mu_0(t) \equiv 0$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Protože $\frac{1}{\pi}$ není charakteristické číslo rovnice (3), lze na tuto rovnici užít přibližných method řešení, vyložených v §§ 5 a 7.

Řešme nyní Dirichletův problém pro oblast D', vnější vzhledem k L. Tentokráte nelze hledat $\varphi(z)$ ve tvaru integrálu typu Cauchyho, protože se takový integrál rovná nule pro $z = \infty$, zatím co $\varphi(z)$ je pouze omezená v nekonečnu. Budeme proto hledat $\varphi(z)$ ve tvaru součtu integrálu typu Cauchyho a nějaké konstanty; položíme

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \mu(\zeta)\, d\sigma. \tag{6}$$

Hustotu $\mu(\zeta)$ budeme podle předcházejícího považovat za reálnou. Necháme-li z konvergovat k bodu t na hranici, dostaneme v souhlase se vzorcem (3), § 22:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}\mu(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \mu(\zeta)\, d\sigma.$$

Opakujeme-li předcházející úvahy, dojdeme k integrální rovnici

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r}\, d\sigma - \frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu(\zeta)\, d\sigma = -2u(t). \tag{7}$$

Dokažme, že rovnice (7) je řešitelná. Nechť jako výše $u(t) \equiv 0$, $\mu_0(\zeta)$ nechť je řešení homogenní rovnice

$$\mu_0(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu_0(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r}\, d\sigma - \frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu_0(\zeta)\, d\sigma = 0 \tag{8}$$

a
$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int_L \mu_0(\zeta)\,d\sigma;\quad z \in D'. \tag{9}$$

Z rovnice (8) plyne, že $\mathrm{Re}\{\varphi_0(t)\} = 0$, $t \in L$. Avšak potom, stejně jako výše $\varphi_0(z) = ia$. Dosadíme-li toto do (9) a necháme-li $z \to \infty$, dostaneme

$$ia = \frac{1}{2\pi}\int_L \mu_0(\zeta)\,d\sigma.$$

Protože funkce $\mu_0(\zeta)$ je reálná, je

$$a = 0,\quad \int_L \mu_0(\zeta)\,d\sigma = 0. \tag{10}$$

Nyní zřejmě

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \equiv 0,\quad z \in D'.$$

V důsledku známých vlastností integrálu typu Cauchyho odtud plyne, že $\mu_0(\zeta)$ je limitní hodnota na L nějaké funkce $\psi_1(z)$, regulární v D. Při tom $\mathrm{Im}(\psi_1(z)) \equiv 0$, protože $\mu_0(\zeta)$ je reálná. Odtud $\psi_1(z) = C =$ $=$ konst. a tudíž $\mu_0(\zeta) = C$. Dosadíme-li toto do (10), přesvědčíme se, že $C = 0$ a konečně $\mu_0(\zeta) \equiv 0$.

V souhlase s Fredholmovou alternativou můžeme nyní tvrdit, že rovnice (7) má řešení, a to jediné, ať je funkce $u(t)$ jakákoliv. Řešíme-li tuto rovnici a dosadíme-li řešení do (6), dostaneme řešení Dirichletova problému pro oblast D'.

§ 30. Příklad: Konformní zobrazení vnitřku elipsy na kruh. Jak je známo, Dirichletův problém se dá jednoduše řešit, jestliže je známo konformní zobrazení oblasti na kruh. Naopak jestliže je pro nějakou jednoduše souvislou oblast známo řešení Dirichletova problému, lze najít funkci, konformně zobrazující oblast na kruh. Dokažme to.

Nechť $w = \omega(z)$ je funkce realisující konformní zobrazení oblasti D na kruh $|w| < 1$. Nechť dále $z = a$ je bod oblasti D, jenž je zobrazen na střed kruhu $w = 0$. Potom

$$\omega(z) = (z - a)\,\psi(z), \tag{1}$$

kde $\psi(z)$ je regulární a různá od nuly v D. V tom případě funkce

$$\varphi(z) = \lg \psi(z)$$

je také regulární v D. Najděme podmínky, určující funkci $\varphi(x)$.

Jestliže z splyne s bodem t hranice, pak

$$|w| = |t - a| \, . \, |\psi(t)| = 1.$$

Odtud

$$\operatorname{Re}\{\varphi(t)\} = \lg|\psi(t)| = -\lg|t - a|. \qquad (2)$$

Abychom tedy určili $\varphi(t)$, je třeba řešit Dirichletův problém pro $u(t) = -\lg|t - a|$. Najdeme-li $\varphi(t)$, pak již lehce určíme $\omega(z)$.

Jako příklad najdeme funkci, která konformně zobrazuje vnitřek elipsy

$$x = a \cos\vartheta, \; y = b \sin\vartheta$$

na kruh $|w| < 1$.

Tuto úlohu lze řešit pomocí eliptických funkcí. Podáme však zde jiné řešení užitím integrálních rovnic.

Žádejme, aby střed elipsy přešel v střed kruhu. Pro funkci $\varphi(t)$ dostaneme podmínku na hranici

$$\operatorname{Re}\{\varphi(t)\} = -\lg|t|.$$

Položíme-li

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta,$$

dojdeme k integrální rovnici (§ 5, vzorce (14) až (15))

$$\mu(t) + \frac{b}{2\pi a} \int\limits_0^{2\pi} \mu(\zeta) \frac{d\tau}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\vartheta + \tau)} = -2 \lg|t|, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \qquad (3)$$

Najděme Fourierův rozvoj funkce $2 \lg|t|$. Máme:

$$2 \lg|t| = \lg(a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta).$$

Bez obtíží si ověříme identitu

$$\lg(a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta) = 2 \lg \frac{a + b}{2} + 2 \operatorname{Re} \lg\left(1 + \frac{a - b}{a + b} \sigma^2\right),$$

kde $\sigma = e^{i\vartheta}$. Rozvineme-li v nekonečnou řadu logaritmus na pravé straně rovnice a oddělíme-li reálnou část, nalezneme hledaný rozvoj:

$$\lg(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta) = 2\lg\frac{a+b}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^k\cos 2k\vartheta. \quad (4)$$

Podle vzorců (14), § 5 nalezneme Fourierovy koeficienty funkce $\mu(t)$:

$$A_0 = -\lg\frac{a+b}{2},\quad A_{2k} = -\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}};$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Ostatní koeficienty se rovnají nule. Nyní

$$\mu(\zeta) = -\lg\frac{a+b}{2} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}\cos 2k\vartheta \quad (5)$$

a

$$\varphi(z) = -\lg\frac{a+b}{2} -$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\cos 2k\vartheta}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad (6)$$

při čemž $\zeta = a\cos\vartheta + ib\sin\vartheta$. Vypočtěme integrály v (6):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\cos 2k\vartheta}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2k\vartheta(-a\sin\vartheta + ib\cos\vartheta)}{a\cos\vartheta + ib\sin\vartheta - z}\,d\vartheta.$$

Položíme-li $e^{i\vartheta} = \sigma$, převedeme tento integrál na integrál

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{(\sigma^{2k}+\sigma^{-2k})[(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)]}{(a+b)\,\sigma^2 - 2\sigma z + (a-b)}\,\frac{d\sigma}{\sigma} = \tfrac{1}{2}(I_1 + I_2),$$

kde I_1 a I_2 jsme označili integrály

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\sigma^{2k-1}[(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)]}{(a+b)\,\sigma^2 - 2\sigma z + (a-b)}\,d\sigma,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\sigma^{-2k-1}[(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)]}{(a+b)\,\sigma^2 - 2\sigma z + (a-b)}\,d\sigma.$$

Integrand v I_1 má jednoduché póly v bodech

$$\sigma_1 = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b},\quad \sigma_2 = \frac{z - \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b}.$$

Residua v těchto bodech se rovnají

$$\left(\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right)^{2k}, \quad \left(\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right)^{2k}. \tag{7}$$

Dokažme, že oba póly σ_1 a σ_2 leží uvnitř kruhu $|\sigma| < 1$.

Součin $\sigma_1\sigma_2$ se rovná $\dfrac{a-b}{a+b}$, a tudíž je menší než jedna. Jedno z čísel σ_1, σ_2 je tedy v absolutní hodnotě nutně menší než jedna. Jestliže by absolutní velikost druhého byla větší než jedna, pak by se integrál I_1 rovnal jednomu z residuí (7) a nebyl by regulární uvnitř elipsy, což zřejmě není možné.[1] Z již dokázaného plyne, že

$$I_1 = \frac{(z+\sqrt{z^2-c^2})^{2k} + (z-\sqrt{z^2-c^2})^{2k}}{(a+b)^{2k}}.$$

---

[1] Proveďme přímý důkaz našeho tvrzení. Označme

$$\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{c} = \chi,$$

odkud $z = \dfrac{c}{2}\left(\chi + \dfrac{1}{\chi}\right)$. Toto zobrazení transformuje rovinu z rozdělenou řezem podél úsečky $\langle -c, c\rangle$ buď na vnitřek, nebo na vnějšek kružnice $|\chi| = 1$, což závisí na volbě znaménka před odmocninou. Nechť na příklad při volbě znaménka minus před odmocninou dostaneme $|\chi| < 1$. Potom tím spíše

$$\left|\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right| < 1.$$

Uvažujme nyní kružnici $|\chi| = \dfrac{a+b}{c}$. Jestliže provedeme zobrazení

$$\chi = \frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c},$$

přejde tato kružnice v danou elipsu

$$x = a\cos\vartheta, \; y = b\sin\vartheta.$$

Vnitřním bodům elipsy při tom odpovídají body roviny χ, pro něž $1 \leqq |\chi| < \dfrac{a+b}{c}$. Tudíž uvnitř elipsy

$$\left|\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c}\right| < \frac{a+b}{c}$$

čili

$$\left|\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right| < 1.$$

Abychom vypočetli I_2, položme $\sigma = \frac{1}{\tau}$. Potom

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\tau^{2k-1}[a + b - (a - b)\,\tau^2]}{(a - b)\,\tau^2 - 2z\tau + (a + b)}\, d\tau.$$

Uvažujeme-li obdobně jako v předcházejícím, najdeme, že oba póly integrandu leží vně jednotkové kružnice, a tedy $I_2 = 0$. Tak dostaneme

$$\frac{1}{4\pi i} \int\limits_L \frac{\cos 2k\vartheta}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2} \frac{(z + \sqrt{z^2 - c^2})^{2k} + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^{2k}}{(a + b)^{2k}}. \tag{8}$$

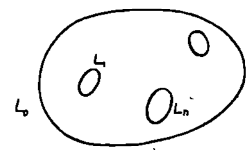
Čitatel na pravé straně je zřejmě polynom stupně $2k$. Označme jej pro stručnost $F_{2k}(z)$. Potom

$$\varphi(z) = -\lg \frac{a + b}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{(a + b)^{2k}} \frac{c^{2k}}{(a + b)^{2k} + (a - b)^{2k}} F_{2k}(z) \tag{9}$$

a hledané zobrazení se rovná

$$\omega(z) = \frac{2z}{a + b} e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{1}{(a+b)^{2k}} \frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k} + (a-b)^{2k}} F_{2k}(z)}. \tag{10}$$

§ 31. Dirichletův problém pro mnohonásobně souvislé oblasti. Nechť D je omezená $(n + 1)$-násobně souvislá oblast. Její hranice L se skládá z $n + 1$ uzavřených křivek, jež označíme L_0, $L_1, \ldots, L_n$, při čemž index nula připíšeme křivce, omezující oblast z vnějšku (obr. 5).



Obr. 5.

Dříve než přistoupíme k řešení našeho problému, učiňme jednu poznámku. Jestliže funkce $U(x, y)$ je jednoznačná a harmonická v mnohonásobně souvislé oblasti, bude funkce $V(x, y)$ s ní konjugovaná obecně mnohoznačná. Objasněme charakter její mnohoznačnosti. Nechť ν je směr vnější normály k L. Označme

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{\partial U}{\partial \nu}\, d\sigma, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

V důsledku Cauchy-Riemannových rovnic $\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$ a

$$-\int_{L_k} \frac{\partial V}{\partial \sigma} \mathrm{d}\sigma = 2\pi A_k.$$

Avšak poslední integrál se rovná přírůstku $V(x, y)$ při oběhu kolem křivky L_k proti hodinovým ručičkám. Jestliže tedy je harmonická funkce jednoznačná v D, vzroste funkce s ní konjugovaná o konstantu $2\pi A_k$ při oběhu kolem křivky L_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Při tomtéž oběhu vzroste analytická funkce $\varphi(z) = U(x, y) + i\, V(x, y)$ o $2\pi i A_k$. Tentýž přírůstek získá funkce $A_k \lg(z - z_k)$, kde z_k je libovolný bod uvnitř D. Odtud plyne, že $\varphi(z)$ lze napsat ve tvaru

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k \lg(z - z_k) + \varphi^*(z), \tag{2}$$

kde $\varphi^*(z)$ je jednoznačná funkce regulární v D.

Dirichletův problém lze řešit takto: Nechť $u(t)$ je daná hodnota funkce $U(x, y)$ na L. Potom z (2) plyne

$$\mathrm{Re}\{\varphi^*(t)\} = u(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{3}$$

Jednoznačnou funkci $\varphi^*(z)$ budeme hledat ve tvaru integrálu typu Cauchyho:

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \tag{4}$$

s reálnou hustotou $\mu(\zeta)$. Činíme-li tytéž úsudky jako v předcházejícím paragrafu, dojdeme k integrální rovnici

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mathrm{d}\sigma = 2u(t) - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{5}$$

Lze dokázat, že $\frac{1}{\pi}$ je charakteristické číslo jádra $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$ a že mu přísluší n lineárně nezávislých charakteristických funkcí. Koeficienty A_k určíme z podmínky, že pravá strana (5) je orthogonální k charakteristickým funkcím konjugované rovnice. Potom je rovnice (5) řešitelná. Řešíme-li ji, nalezneme podle vzorců (4) a (2) řešení Dirichletova problému.

Vyložená methoda je v praxi málo vhodná, neboť vyžaduje výpočet charakteristických funkcí konjugované rovnice. Uvedeme proto jinou methodu, oproštěnou od uvedeného nedostatku.

Označme $a(t, \zeta)$ funkci, která se rovná jedné, jestliže body t a ζ leží na téže vnitřní křivce L_k, a která se rovná nule ve všech ostatních případech. Rovnici (5) nahradíme touto:

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + a(t, \zeta) \right) \mu(\zeta) \, d\sigma = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{6}$$

Napíšeme-li tuto rovnici podrobněji, má tento tvar:

Jestliže t leží na L_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, pak

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\zeta) \, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta) d\sigma = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|, \tag{7_1}$$

jestliže t leží na L_0, pak

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\zeta) \, d\sigma = 2u(t) - 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{7_2}$$

Dokažme, že rovnice má řešení, a to jediné, ať je pravá strana jakákoliv. K tomu stačí se přesvědčit o tom, že homogenní rovnice

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + a(t, \zeta) \right) \mu_0(\zeta) \, d\sigma = 0 \tag{7}$$

má pouze triviální řešení $\mu_0(t) \equiv 0$.

Nechť $\mu_0(t)$ je libovolné řešení rovnice (7). V rovnici (7) převeďme napravo integrál s jádrem $a(t, \zeta)$. Potom lze tuto rovnici napsat ve tvaru:

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu_0(\zeta) \, d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \mu_0(\zeta) \, d\sigma, \quad t \in L_k, \ k > 0,$$

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu_0(\zeta) \, d\sigma = 0, \qquad t \in L_0.$$

Zaveďme označení

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k}\mu_0(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n;$$

položme ještě $b_0 = 0$. Rovnici, jíž vyhovuje $\mu_0(t)$, lze napsat v následujícím tvaru:

$$\mu_0(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\cos(\nu, r)}{r}\mu_0(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = 2b_k,\ t \in L_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad (8)$$

Uvažujme integrál typu Cauchyho:

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,\ z \in D.$$

Užijeme-li rovnice (8) a opakujeme-li úvahy § 29, nalezneme, že $\varphi_0(z)$ vyhovuje na křivkách L_k vztahům

$$\mathrm{Re}\{\varphi_0(\zeta)\} = b_k,\ \zeta \in L_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

V důsledku Cauchy-Riemannových rovnic

$$\frac{\partial \mathrm{Im}\{\varphi_0(\zeta)\}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \mathrm{Re}\{\varphi_0(\zeta)\}}{\partial \sigma} = 0,\ \zeta \in L,$$

neboť veličiny b_k jsou konstantní. Funkce $\varphi_0(z)$ je regulární v D a její imaginární část je harmonická v D. Normální derivace imaginární části se rovná nule na L; podle věty o jednoznačnosti řešení Neumannova problému $\varphi_0(z) \equiv$ konst. Při tom $\mathrm{Re}\{\varphi_0(z)\} \equiv 0$, neboť tato funkce se rovná nule na L_0. Tudíž $b_k = 0$ a $\varphi_0(z) = ia$, kde a je reálná konstanta. To dává

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu_0(\zeta) - ia}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \equiv 0,\ z \in D.$$

Odtud plyne, že na každé z křivek L_k je funkce $\mu_0(\zeta) - ia$ limitní hodnota funkce, rovné nule v nekonečnu a regulární v každé oblasti komplementární k D, omezené křivkou L_k. Imaginární část této funkce je konstanta rovná a; avšak potom je i její reálná část konstanta:

$$\mu_0(\zeta) = c_k = \text{konst.},\ \zeta \in L_k.$$

Při tom $c_0 = 0$, neboť pro $z = \infty$ se $\mu_0(\zeta) - ia$ rovná nule. Dále

$$0 = b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \mu_0(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{c_k}{2\pi} \int_{L_k} \mathrm{d}\sigma.$$

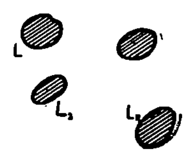
Odtud $c_k = 0$ a tudíž $\mu_0(\zeta) \equiv 0$. Nyní z Fredholmovy alternativy plyne, že rovnice (6) má řešení, a to jediné, ať je pravá strana jakákoliv. Řešíme-li rovnici (6), podrobíme koeficienty A_k požadavku, aby

$$\int_{L_k} \mu(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = 0,\quad k = 1, 2, \ldots, n.^1$$

Potom rovnice (6) a (5) jsou si rovny a podle vzorců (4) a (2) nalezneme řešení naší úlohy.

Přejděme k případu neomezené oblasti. Nechť oblast D je vnějšek n křivek $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (obr. 6). Vzorec (2) zůstává v platnosti, pouze koeficienty A_k jsou tentokráte podrobeny podmínce

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0. \tag{9}$$



Obr. 6.

Kdyby rovnice (9) neplatila, rostla by harmonická funkce $\mathrm{Re}\{\varphi(z)\}$ v nekonečnu jako $\lg|z| \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, což odporuje definici harmonické funkce. Jako v § 29 nemůže být $\varphi^*(z)$ napsána ve tvaru pouhého integrálu typu Cauchyho, a proto položíme

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_L \mu(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{10}$$

To vede na rovnici

$$\mu(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r}\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = -2u(t) + 2\sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{11}$$

Tato rovnice má $n - 1$ charakteristických funkcí. Podmínky orthogonality pravé strany (11) k charakteristickým funkcím konjugované

---

[1] Rovnice $\int_{L_k} \mu(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = 0$ představují soustavu lineárních nehomogenních algebraických rovnic pro koeficienty A_k. Tato soustava má vždy řešení, neboť v opačném případě by měl homogenní Dirichletův problém, jak se lehce přesvědčíme, netriviální řešení.

rovnice tvoří spolu s rovnicí (9) soustavu n rovnic, kterou jsou určeny koeficienty A_k.

Abychom nemuseli počítat charakteristické funkce konjugovaného jádra, budeme postupovat jako v případě omezené oblasti. Označme $b(t, \zeta)$ funkci, jež se rovná jedné, jestliže t a ζ leží na téže křivce L_k, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, a nule v ostatních případech. Rovnici (11) nahradíme touto rovnicí:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + b(t, \zeta) \right) d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma =$$

$$= -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k| \tag{12}$$

nebo podrobněji: Jestliže t leží na L_k, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, pak

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta)\, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma =$$

$$= -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|; \tag{13_1}$$

jestliže t leží na L_n, pak

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma =$$

$$= -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|t - z_k|. \tag{13_2}$$

Právě tak jako shora lze dokázat, že rovnice (12) má řešení pro libovolnou pravou stranu. Řešíme-li ji, žádáme, aby

$$\int_{L_k} \mu(\zeta)\, d\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{14}$$

Rovnice (9) a (14) tvoří soustavu n lineárních rovnic, z nichž určíme koeficienty A_k. Jestliže jsou splněny podmínky (14), pak rovnice (11) a (12) splynou; takto určená funkce $\mu(\zeta)$ umožní řešení Dirichletova problému.

§ 32. Modifikovaný Dirichletův problém a Neumannův problém. Modifikovaným Dirichletovým problémem budeme nazývat úlohu určit analytickou funkci, regulární v mnohonásobně souvislé oblasti, jestliže na každé z křivek tvořících hranici je dána reálná část této funkce až na aditivní konstantu.

Hledaná analytická funkce $\varphi(z)$ musí tedy na hranici vyhovovat této podmínce: Jestliže t leží na křivce L_k, pak

$$\mathrm{Re}\{\varphi(t)\} = f(t) + b_k, \tag{1}$$

kde $f(t)$ je daná funkce a b_k jsou nějaké konstanty. Ty musí být určeny z podmínky, že $\varphi(z)$ je jednoznačná v oblasti. Jednu z konstant b_k lze zvolit libovolně. Ostatní jsou pak určeny jednoznačně. Dokažme to sporem. Zvolme na př. pevně b_0 a nechť $\varphi_1(z)$ a $\varphi_2(z)$ jsou dvě funkce regulární v oblasti D, vyhovující rovnicím

$$\begin{matrix} \mathrm{Re}\{\varphi_1(t)\} = f(t) + b_k', \\ \mathrm{Re}\{\varphi_2(t)\} = f(t) + b_k'', \end{matrix} \quad b_0' = b_0'', \quad t \in L_k.$$

Potom rozdíl $\omega(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$ je také regulární v D a jeho reálná část se rovná konstantě $b_k' - b_k''$ na každé z křivek L_k. V takovém případě

$$\frac{\partial \mathrm{Im}\{\omega(t)\}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \mathrm{Re}\{\omega(t)\}}{\partial \sigma} = 0.$$

Protože $\omega(z)$ je regulární v D, je $\mathrm{Im}\{\omega(z)\}$ harmonická v D. Podle věty o jednoznačnosti řešení Neumannova problému $\mathrm{Im}\{\omega(z)\} =$ $=$ konst. Potom z Cauchy-Riemannových rovnic plyne, že $\mathrm{Re}\{\omega(z)\} =$ $=$ konst. Avšak na L_0 $\mathrm{Re}\{\omega(z)\} = 0$, neboť $b_0' = b_0''$, a proto $\mathrm{Re}\{\omega(z)\} =$ $= 0$, a tedy $b_k' = b_k''$. Z toho mezi jiným plyne, že řešení modifikovaného Dirichletova problému je určeno až na čistě imaginární aditivní konstantu.

Výsledky předcházejícího paragrafu dovolují jednoduše řešit modifikovaný Dirichletův problém. V případě omezené oblasti (obr. 5) napišme integrální rovnici

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + a(t, \zeta) \right) \mu(\zeta)\, \mathrm{d}\sigma = 2f(t). \tag{2}$$

V souhlase s tím, co bylo řečeno v předcházejícím paragrafu, má tato rovnice jediné řešení. Řešme ji. Označme nyní

$$b_0 = 0, \; b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta)\, \mathrm{d}\sigma; \; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Potom, jestliže t leží na L_k,

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\cos(\nu, r)}{r} \mu(\zeta)\, d\sigma = 2[f(t) + b_k]. \tag{4}$$

Položme nyní

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{5}$$

Levá strana v (4) se rovná $2\mathrm{Re}\{\varphi(t)\}$ (viz § 29) a z (4) plyne, že jednoznačná funkce $\varphi(z)$, regulární v D, vyhovuje podmínce (1) a je tudíž řešením modifikovaného Dirichletova problému.

Jestliže je oblast neomezená, pak řešení problému dostaneme, jestliže řešíme integrální rovnici

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + b(t, \zeta)\right) \mu(\zeta)\, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma = -2f(t). \tag{6}$$

Zde položíme

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \mu(\zeta)\, d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_L \mu(\zeta)\, d\sigma \tag{7}$$

a potom integrál (5) dává řešení modifikovaného Dirichletova problému pro nekonečnou oblast.

Na modifikovaný Dirichletův problém lze převést řadu úloh: problém konformního zobrazení mnohonásobně souvislých oblastí, problém kroucení dutých tyčí, problém obtékání a mnohé jiné. Na tentýž problém se převede t. zv. Neumannův problém.

Neumannův problém zní takto: Určit funkci harmonickou v oblasti, jestliže jsou na hranici známy hodnoty její normální derivace.

Podmínka nutná a postačující, aby Neumannův problém měl řešení, je

$$\int_L F(\zeta)\, d\sigma = 0,$$

kde $F(\zeta)$ je daná hodnota normální derivace hledané funkce. Důkaz tohoto dobře známého tvrzení se uvádí v učebnicích matematické fysiky.

Nechť $U(x, y)$ je hledaná funkce a $F(\zeta)$ je daná hodnota její normální derivace na hranici. Nechť dále $V(x, y)$ je funkce konjugovaná s $U(x, y)$ a $\varphi(z) = U + iV$.

Jak už jsme ukázali v předešlém paragrafu,

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k \lg(z - z_k) + \varphi^*(z), \tag{8}$$

kde $\varphi^*(z)$ je jednoznačná funkce. V tomto případě jsou koeficienty A_k známy:

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_k} F(\zeta) \, d\sigma$$

a úloha se tím převádí na určení jednoznačné funkce $\varphi^*(z)$.

Bez obtíží lze určit krajové podmínky pro $\varphi^*(z)$. Nechť

$$\varphi^*(z) = U^* + iV^*.$$

Na hranici L známe normální derivaci funkce U^*:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \nu} = F(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial \lg |t - z_k|}{\partial \nu} = F^*(t). \tag{9}$$

Na křivce L_k zvolme libovolný bod t_k. Potom na této křivce máme

$$V^* = \int_{t_k}^{t} F^*(\zeta) \, d\sigma + b_k, \tag{10}$$

kde b_k je dosud neurčená konstanta. Funkce $-i\,\varphi^*(z) = V^* - iU^*$ je řešením modifikovaného Dirichletova problému s krajovou podmínkou (10). Řešíme-li tento problém, řešíme tím současně i problém Neumannův.

§ 33. Kroucení plných a dutých tyčí. V theorii kroucení tyčí se předpokládá, že od nuly různé jsou pouze složky napětí τ_{xz} a τ_{yz}.[1] Tyto vyhovují podmínce rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

[1] Předpokládáme, že osa z je rovnoběžná s povrchovými přímkami tyče.

Označme u_x, u_y, u_z složky elastických posunutí podél os x, y, z. Z Hookova zákona lze odvodit, že

$$u_x = -\vartheta yz + \alpha, \quad u_y = \vartheta xz + \beta, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Zde jsou ϑ, α a β konstanty. Veličina ϑ je úměrná zkroucení tyče. Dále z rovnic vyjadřujících Hookův zákon dostaneme

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \vartheta y\right), \\ \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \vartheta x\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Derivujeme-li prvou rovnici podle y a druhou podle x a odečteme-li je, dostaneme:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2\mu\vartheta. \tag{4}$$

Rovnici (1) lze vyhovět, položíme-li

$$\tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vartheta y\right), \quad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vartheta x\right). \tag{5}$$

Dosadíme-li toto do (4), dostaneme, že $\Delta\varphi = 0$. Funkce $\varphi(x, y)$ bude tedy harmonickou v oblasti D, kterou dostaneme, protneme-li tyč rovinou (x, y).

Najděme krajové podmínky pro funkci $\varphi(x, y)$. Na povrchu pláště a tedy i na hranici oblasti D je splněna rovnice

$$\tau_{xz}\cos(\nu, x) + \tau_{yz}\cos(\nu, y) = 0, \tag{6}$$

kde ν je vnější normála k plášti. Rovnice (6) vyjadřuje, že povrch pláště tyče není podroben vnějším silám. Dosadíme-li do ní výraz (5), uvedeme ji na tvar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\nu, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\nu, x) = -\vartheta[x\cos(\nu, y) - y\cos(\nu, x)].$$

Dále

$$\cos(\nu, x) = -\cos(\sigma, y) = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma},$$

$$\cos(\nu, y) = \cos(\sigma, x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Odtud plyne, že
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = -\tfrac{1}{2}\vartheta\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial\sigma}.$$

Integrujeme-li podél oblouku σ, dostaneme konečně, že na hranici L oblasti D
$$\varphi = -\tfrac{1}{2}\vartheta(x^2+y^2) + c,\ c = \text{konst.} \tag{7}$$

Jestliže je tyč plná, je oblast D jednoduše souvislá. Konstantu c lze zvolit libovolně a funkce $\varphi(x, y)$ se určí jako řešení Dirichletova problému s krajovou podmínkou (7). Jestliže je tyč dutá, je oblast D mnohonásobně souvislá a konstanta c může mít různé hodnoty na různých křivkách, tvořících hranici.

Dokažme nyní, že v případě duté tyče je funkce $\psi(x, y)$, konjugovaná s $\varphi(x, y)$, jednoznačná v D. Podle Cauchy-Riemannových rovnic
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Dosadíme-li toto do (5), dostaneme:
$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \vartheta y\right),\quad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + \vartheta x\right).$$

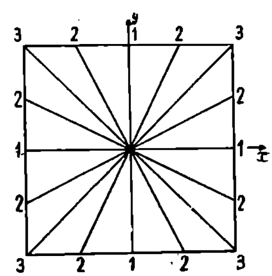
Porovnáme-li to se vzorci (3), vidíme, že $\psi = u_z + A$, kde A je konstanta. Avšak u_z jako posunutí bodu tyče je nutně jednoznačné. Odtud plyne, že $\psi(x, y)$ je také jednoznačná.

Nyní je jasné, že $\varphi(x, y)$ je řešení modifikovaného Dirichletova problému s krajovou podmínkou (7).

Poznamenejme, že poněkud pohodlněji než $\varphi(x, y)$ lze určit funkci $U(x, y) = -\dfrac{2}{\vartheta}\varphi(x, y)$, která vyhovuje krajové podmínce
$$U = x^2 + y^2 + c'. \tag{8}$$

§ 34. Kroucení tyče čtvercového průřezu.

Uvažujme problém kroucení tyče, jejíž průřez s rovinou kolmou na osu je čtverec. Souřadnicové osy zvolíme tak, jak je ukázáno na obr. 7. Pro jednoduchost výpočtu předpoklá-



Obr. 7.

dejme, že se strana čtverce rovná dvěma. Konstantu c' ve vzorci (8), § 33 položme rovnou nule. Funkce $U(x, y)$ vyhovuje krajové podmínce

$$U(x, y) = x^2 + y^2.$$

Položíme-li jako obvykle $U(x, y) = \mathrm{Re}\{\Phi(z)\}$ a

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta,$$

dostaneme integrální rovnici

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int\limits_L \mu(\zeta) \frac{\cos(\nu, r)}{r} \, d\sigma = 2(x^2 + y^2), \tag{1}$$

kde $t = x + iy$ je bod na hranici čtverce.

Ve vrcholech čtverce je jádro $\dfrac{\cos(\nu, r)}{r}$ nekonečně velké, takže rovnice (1) přestává být Fredholmovou. Je však dokázáno (viz [32]), že Fredholmova alternativa zde platí. Příslušná homogenní rovnice má pouze triviální řešení. Odtud plyne, že rovnice (1) je řešitelná.

Napišme naši rovnici v jiném tvaru, příhodnějším pro numerické výpočty. Je totiž (§ 29)

$$-\frac{\cos(\nu, r)}{r} \, d\sigma = d\vartheta, \tag{2}$$

kde ϑ je úhel sevřený vektorem směřujícím od ζ k t a osou x; rovnice (1) nabývá tvaru

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_L \mu(\zeta) \, d\vartheta = 2(x^2 + y^2). \tag{3}$$

Rovnici (3) budeme řešit methodou § 7, užívajíce k výpočtu integrálu formule vztahující se k obdélníkovému dělení.

Zvolme na hranici čtverce 16 bodů, označených na obr. 7 číslicemi 1, 2, 3. To jsou body, jejichž jedna souřadnice je rovna ± 1 a druhá se rovná jednomu z čísel 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Poznamenejme, že se hodnoty $\mu(t)$ v bodech souměrně položených vzhledem k osám x, y a vzhledem k přímkám $y = \pm x$ v důsledku souměrnosti krajových podmínek sobě rovnají.[1] Tudíž v bodech označených touž číslicí se hodnoty $\mu(t)$ shodují, takže budou pouze tři různé hodnoty $\mu(t)$, příslušející hodnotám $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + \frac{1}{2}i$, $t_3 = 1 + i$. Označme

$$\mu(1) = \mu_1,\ \mu(1 + \tfrac{1}{2}i) = \mu_2,\ \mu(1 + i) = \mu_3. \tag{4}$$

Nahradíme-li integrál v (3) podle obdélníkové formule, dostaneme:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{16} \mu(t_k)\, \Delta\vartheta_k(t) = 2|t|^2. \tag{5}$$

Zde t_k označují námi zvolené body a $\Delta\vartheta_k(t)$ úhel, sevřený úsečkami, které spojují body t_k a t_{k+1} s bodem t. Položíme-li v (5) $t = t_1, t_2, t_3$, dostaneme soustavu tří rovnic s třemi neznámými μ_1, μ_2, μ_3:

$$\begin{aligned} 1{,}2432\mu_1 + 0{,}5000\mu_2 + 0{,}2658\mu_3 &= 2{,}000,\\ 0{,}1992\mu_1 + 1{,}4273\mu_2 + 0{,}3734\mu_3 &= 2{,}500,\\ 0{,}1269\mu_1 + 0{,}2508\mu_2 + 1{,}1239\mu_3 &= 4{,}000. \end{aligned} \tag{6}$$

Veličiny $\Delta\vartheta_k(t_i)$ se lehce určí z obrázku; při sestavování rovnic (6) bylo přihlédnuto k tomu, že v bodech označených na obrázku stejnými číslicemi má $\mu(t)$ stejné hodnoty.

---

[1] Proveďme důkaz tohoto tvrzení. Funkce $U(y, x)$ je harmonická a vyhovuje téže krajové podmínce (8), § 33 jako funkce $U(x, y)$. Avšak potom $U(y, x) \equiv U(x, y)$. Dále

$$U(y, x) = \mathrm{Re}\{\Phi(y + ix)\} = \mathrm{Re}\{\Phi(i\bar{z})\} = \mathrm{Re}\{\overline{\Phi(i\bar{z})}\}.$$

Odtud plyne, že $\Phi(z) = \overline{\Phi(i\bar{z})}$ čili

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\bar{\zeta} + iz}\, d\bar{\zeta}.$$

Ve druhém integrálu nahraďme ζ výrazem $i\bar{\zeta}'$. V rovině ζ' dostaneme tutéž hranici L, avšak orientovanou opačným směrem. Jestliže změníme směr orientace a znaménko integrálu, dostaneme (čárku u ζ' vynecháváme):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(i\bar{\zeta})}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Avšak vyjádření analytické funkce ve tvaru integrálu typu Cauchyho s reálnou hustotou je jednoznačné. Odtud plyne, že $\mu(\zeta) = \mu(i\bar{\zeta})$, t. j. funkce $\mu(\zeta)$ nabývá stejných hodnot v bodech souměrně položených vzhledem k ose úhlu prvního souřadnicového kvadrantu. Podobně dokážeme souměrnost $\mu(\zeta)$ i v ostatních případech.

Řešíme-li soustavu (6), dostaneme:

$$\mu_1 = 0{,}60,\ \mu_2 = 0{,}80,\ \mu_3 = 3{,}32. \tag{7}$$

Interpolujme funkci μ na každé ze stran čtverce. Tato funkce je souměrná a lze ji interpolovat polynomem tvaru $ax^4 + bx^2 + c$ na stranách čtverce rovnoběžných s osou x. Na dvou ostatních stranách zřejmě dostaneme interpolační polynom $ay^4 + by^2 + c$ s týmiž koeficienty. Vypočteme-li koeficienty, najdeme: $a = 2{,}56$, $b = 0{,}16$, $c = 0{,}60$, a tedy

$$\left.\begin{aligned} \mu(x \pm i) &= 2{,}56x^4 + 0{,}16x^2 + 0{,}60, \\ \mu(\pm 1 + iy) &= 2{,}56y^4 + 0{,}16y^2 + 0{,}60. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Známe-li $\mu(t)$, není obtížné vypočítat $\Phi(z)$ a potom i napětí τ_{xz} a τ_{yz}.

§ 35. Problém obtékání. Rovinný problém obtékání spočívá v určení rychlostního pole pro paralelní proudění v rovině, jež na své dráze naráží na několik tuhých těles, které se buď nepohybují nebo se pohybují daným způsobem. Rychlost proudění v nekonečnu považujeme za danou.

Jestliže máme co činit s potenciálním prouděním ideální nestlačitelné kapaliny, převádí se úloha na určení komplexního potenciálu

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y), \tag{1}$$

kde φ je potenciální funkce (rychlostí) a ψ je proudová funkce, z daných krajových podmínek. Položme osu x rovnoběžně s rychlostí proudění v nekonečnu; velikost této rychlosti označme U. Potom krajové podmínky nabývají tvaru:

a) v nekonečnu

$$\lim_{z\to\infty}[\varphi(x, y) - Uy] = C, \tag{2}$$

b) na hranici obtékaného tělesa

$$\psi = U_0y - V_0x - \tfrac{1}{2}\Omega(x^2 + y^2) + C', \tag{3}$$

kde U_0 a V_0 jsou průměty rychlosti postupného pohybu obtékaného tělesa na osy x a y, Ω je úhlová rychlost jeho otáčení. Veličiny C a C' jsou konstanty. Jestliže je obtékaných těles několik, může konstanta C' na hranici každého z nich nabýt jiné hodnoty.

Proudová funkce $\psi(x, y)$ je jednoznačná, jak je patrno ze vzorce (3); pokud se týče potenciálu $\varphi(x, y)$, ten je jednoznačný, jestliže oblast proudění je jednoduše souvislá, jinak řečeno, jestliže proudění obtéká pouze jedno těleso. V případě několika obtékaných těles potenciální funkce bude obecně řečeno mnohoznačná. Veličina

$$\Gamma_L = \int_L u_x \, dx + u_y \, dy = \int_L d\varphi, \tag{4}$$

kde u_x a u_y jsou složky rychlostí proudění, se nazývá cirkulací podél křivky L.[1] Jestliže cirkulace podél hranic $L_1, L_2, \ldots, L_n$ se rovnají $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, pak

$$w = Uz + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \lg(z - z_k) + w^*(z), \tag{5}$$

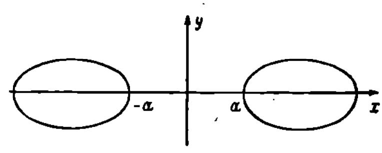
kde $w^*(z)$ je funkce regulární a jednoznačná v oblasti proudění. Na hranicích obtékaných těles $w^*(z)$ vyhovuje podmínce:

na L_k
$$\operatorname{Im}\{w^*(z)\} = (U_{0k} - U)\, y - V_{0k} x - \frac{\Omega_k}{2} (x^2 + y^2) - \\ - \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \lg|z - z_k| + C_k. \tag{6}$$

Ve vzorcích (5) a (6) z_k značí bod libovolně zvolený uvnitř L_k. U_{0k}, V_{0k}, Ω_k a C_k značí hodnoty veličin U_0, V_0, Ω, C na hranici L_k. Nyní lze funkci $\frac{1}{i} w^*(z)$ určit jako řešení modifikovaného Dirichletova problému s krajovou podmínkou (6). Jestliže tento problém rozřešíme methodou § 32, pak již lehce najdeme rychlostní pole proudění.

§ 36. Obtékání dvou eliptických válců.

§ 36. Obtékání dvou eliptických válců. Jako příklad budeme uvažovat problém obtékání dvou stejných elips s poloosami a a b, položených jako na obr. 8. Pro jednoduchost výpočtu budeme předpokládat, že



Obr. 8.

[1] Viz na př. N. E. Kočin, I. A. Kibel' a N. V. Rozė, Těoretičeskaja gidromechanika, č. II, Gostechizdat 1948, nebo L. I. Sedov, Priloženija těorii funkcij kompleksnogo peremennogo k někotorym zadačam ploskoj gidrodinamiky, Uspěchi matěmatičeskich nauk, vyp. VI, 1939.

proudění je necirkulární a elipsy se nepohybují. Předpokládejme také, že rychlost proudění v nekonečnu se rovná U a má směr osy x. Vzorec (5), § 35 nabývá tvaru:

$$w(z) = Uz + w^*(z). \tag{1}$$

Krajové podmínky pro funkci $\omega(z) = \frac{1}{i} w^*(z)$ jsou:

$$\text{na } L_k \qquad \operatorname{Re}\{\omega(z)\} = -Uy - C_k, \quad k = 1, 2. \tag{2}$$

Položme

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \tag{3}$$

V souhlase s § 32 dostaneme pro $\mu(\zeta)$ následující integrální rovnici:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \left(\frac{\cos(\nu, r)}{r} + b(t, \zeta) \right) d\sigma = 2Uy, \tag{4}$$

při čemž funkci $b(t, \zeta)$ určíme takto:

$$b(t, \zeta) \, d\sigma = \tfrac{1}{2} d\tau, \tag{5_1}$$

kde τ je parametr určující polohu bodu na elipse, jestliže t a ζ leží na téže elipse, a

$$b(t, \zeta) \, d\sigma = 0 \tag{5_2}$$

v opačném případě.[1]

Vypočtěme jádro $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$. Zaveďme parametrické vyjádření elipsy L_1:

$$x = \alpha + a + a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

a elipsy L_2:

$$x = -\alpha - a + a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Jestliže body t a ζ leží na téže elipse, pak obdobnými výpočty jako v § 5 nalezneme:

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma = -\frac{b}{2a} \frac{d\tau}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{t + \tau}{2}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

---

[1] Integrální rovnice (4) a funkce $b(t, \zeta)$ jsou zde dány poněkud jinak než v §§ 31 a 32. To jsme učinili, abychom trochu zjednodušili výpočty podstatné to však není.

Jestliže t leží na L_1, a ζ na L_2, pak

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r}\,d\sigma =$$

$$= \frac{b\left[(\alpha + a)\cos\tau - a\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right]d\tau}{2\left[(\alpha+a)^2 + a(\alpha+a)(\cos t - \cos\tau) + a^2\sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)\right]}.$$

Konečně, jestliže t leží na L_2 a ζ leží na L_1, pak

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r}\,d\sigma =$$

$$= \frac{-b\left[(\alpha + a)\cos\tau + a\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right]d\tau}{2\left[(\alpha+a)^2 - a(\alpha+a)(\cos t - \cos\tau) + a^2\sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)\right]}.$$

Označme $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$ hodnoty $\mu(t)$ na křivkách L_1 a L_2. Rovnici (4) lze napsat jako soustavu s neznámými $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$:

$$\mu_1(t) - \frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu_1(\tau)\,d\tau}{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}} +$$

$$+ \frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\gamma\cos\tau - \sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)\mu_2(\tau)\,d\tau}{\gamma^2 + \gamma(\cos t - \cos\tau) + \sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\,d\tau = 2bU\sin t, \tag{6_1}$$

$$\mu_2(t) - \frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\gamma\cos\tau + \sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)\mu_1(\tau)\,d\tau}{\gamma^2 - \gamma(\cos t - \cos\tau) + \sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)} -$$

$$- \frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu_2(\tau)\,d\tau}{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\,d\tau = 2bU\sin t. \tag{6_2}$$

Označili jsme zde pro stručnost

$$\gamma = \frac{\alpha + a}{a}.$$

Zřejmě

$$\gamma > 1.$$

Rozvineme-li jádra ve Fourierovy řady a ponecháme-li pouze konečný počet jejich členů, převedeme soustavu (6) na degenerovanou, kterou lze lehce řešit.

Vyšetřeme nyní podrobněji případ, když γ je dostatečně veliké, takže vzdálenost mezi elipsami je veliká ve srovnání s jejich rozměry. V tom případě můžeme přibližně položit, jestliže ponecháme členy, jež obsahují $\frac{1}{\gamma}$ a $\frac{1}{\gamma^2}$:

$$\frac{\gamma \cos\tau - \sin^2\frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2 + \gamma(\cos t - \cos\tau) + \sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\tau}{\gamma} + \frac{\cos 2\tau}{2\gamma^2} - \frac{\cos(t+\tau)}{2\gamma^2},$$

$$\frac{\gamma \cos\tau + \sin^2\frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2 - \gamma(\cos t - \cos\tau) + \sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\tau}{\gamma} - \frac{\cos 2\tau}{2\gamma^2} + \frac{\cos(t+\tau)}{2\gamma^2}.$$

Dále, jak už jsme nalezli v § 5,

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}} = \frac{a}{b}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(\cos kt \cos k\tau - \sin kt \sin k\tau)\right].$$

Nyní lze soustavu (6) napsat ve tvaru

$$\mu_1(t) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\left[\cos kt\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos k\tau\,\mathrm{d}\tau - \sin kt\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\sin k\tau\,\mathrm{d}\tau\right] +$$

$$+\frac{b}{2a\gamma\pi}\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos\tau\,\mathrm{d}\tau + \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos 2\tau\,\mathrm{d}\tau -$$

$$-\frac{b}{4a\gamma^2\pi}\cos t\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos\tau\,\mathrm{d}\tau + \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\sin\tau\,\mathrm{d}\tau = 2bU\sin t, \tag{7}$$

$$\mu_2(t) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\left[\cos kt\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos k\tau\,\mathrm{d}\tau - \sin kt\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\sin k\tau\,\mathrm{d}\tau\right] -$$

$$-\frac{b}{2a\gamma\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos\tau\,\mathrm{d}\tau + \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos 2\tau\,\mathrm{d}\tau -$$

$$-\frac{b}{4a\gamma^2\pi}\cos t\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos\tau\,\mathrm{d}\tau + \frac{b}{4a\gamma^2\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\sin\tau\,\mathrm{d}\tau = 2bU\sin t.$$

Rozviňme $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$ ve Fourierovy řady:

$$\mu_1(t) = A_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(1)}\cos kt + B_k^{(1)}\sin kt),$$

$$\mu_2(t) = A_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(2)}\cos kt + B_k^{(2)}\sin kt).$$

Potom

$$A_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(1)}\cos kt + B_k^{(1)}\sin kt) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(A_k^{(1)}\cos kt -$$

$$-B_k^{(1)}\sin kt) + \frac{bA_1^{(2)}}{2a\gamma} + \frac{bA_2^{(2)}}{4a\gamma^2} - \frac{bA_1^{(2)}}{4a\gamma^2}\cos t + \frac{bB_1^{(2)}}{4a\gamma^2}\sin t = 2bU\sin t, \tag{8}$$

$$A_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(2)}\cos kt + B_k^{(2)}\sin kt) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(A_k^{(2)}\cos kt -$$

$$-B_k^{(2)}\sin kt) - \frac{bA_1^{(1)}}{2a\gamma} + \frac{bA_2^{(1)}}{4a\gamma^2} - \frac{bA_1^{(1)}}{4a\gamma^2}\cos t + \frac{bB_1^{(1)}}{4a\gamma^2}\sin t = 2bU\sin t.$$

Porovnáme-li Fourierovy koeficienty napravo a nalevo v (8), zjistíme, že od nuly různé jsou pouze koeficienty $B_1^{(1)}$ a $B_1^{(2)}$, jež jsou určeny rovnicemi

$$\left(1 + \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) B_1^{(1)} - \frac{b}{4a\gamma^2} B_1^{(2)} = 2bU,$$

$$-\frac{b}{4a\gamma^2} B_1^{(1)} + \left(1 + \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) B_1^{(2)} = 2bU.$$

Odtud

$$B_1^{(1)} = B_1^{(2)} = \frac{8ab(a+b)\,\gamma^2 U}{8a^2\gamma^2 + b(a+b)}$$

a tedy

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = \frac{8ab(a+b)\,\gamma^2 U}{8a^2\gamma^2 + b(a+b)} \sin t. \tag{9}$$

Nyní

$$\frac{1}{i} w^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\mu_1(\tau)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\mu_2(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

čili

$$\frac{1}{i} w^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{8ab(a+b)\,\gamma^2 U}{8a^2\gamma^2 + b(a+b)} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\sin\tau(-a\sin\tau + ib\cos\tau)\,\mathrm{d}\tau}{a + \alpha + a\cos\tau + ib\sin\tau - z} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{\sin\tau(-a\sin\tau + ib\cos\tau)\,\mathrm{d}\tau}{-(a+\alpha) + a\cos\tau + ib\sin\tau - z} \right\}. \tag{10}$$

Vypočtěme integrály v (10). Označme v prvém integrálu $z - (a + \alpha) = z'$, a ve druhém $z + a + \alpha = z'$; tak dojdeme k integrálu

$$I(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\tau(-a\sin\tau + ib\cos\tau)}{a\cos\tau + ib\sin\tau - z'} \mathrm{d}\tau.$$

Položme $e^{i\tau} = \sigma$. Potom

$$I(z') = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \frac{(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)}{(a+b)\,\sigma^2 - 2z'\sigma + a - b} \mathrm{d}\sigma - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \frac{(a+b)\,\sigma^2 - (a-b)}{(a+b)\,\sigma^2 - 2z'\sigma + a - b} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2} \right\} = I_1 - I_2.$$

Kořeny jmenovatele integrandu v I_1 jsou

$$\sigma_1 = \frac{z' + \sqrt{z'^2 - c^2}}{a + b}, \quad \sigma_2 = \frac{z' - \sqrt{z'^2 - c^2}}{a + b}.$$

Zvolme tu hodnotu kořene, jež je kladná pro nekonečně velká kladná z'. Potom, jestliže opakujeme úvahy § 30 (viz pozn. pod čarou na str. 142), nalezneme, že uvnitř kruhu $|\sigma| < 1$ leží pouze kořen σ_2. Potom už bez obtíží zjistíme, že

$$I_1 = \frac{z' - \sqrt{z'^2 - c^2}}{2i(a + b)}.$$

Úplně obdobně nalezneme

$$I_2 = -\frac{z' - \sqrt{z'^2 - c^2}}{2i(a - b)}$$

a tedy

$$I(z') = \frac{a}{i(a^2 - b^2)}(z' - \sqrt{z'^2 - c^2}).$$

Nakonec dostaneme

$$\frac{1}{i} w^*(z) = \frac{8a^2b\gamma^2U}{i(a - b)[8a^2\gamma^2 + b(a + b)]}(2z - \sqrt{(z - a - \alpha)^2 - c^2} - \\ - \sqrt{(z + a + \alpha)^2 - c^2}) \qquad (11)$$

a

$$w(z) = Uz + \frac{8a^2b\gamma^2U}{(a - b)[8a^2\gamma^2 + b(a + b)]}(2z - \sqrt{(z - a - \alpha)^2 - c^2} - \\ - \sqrt{(z + a + \alpha)^2 - c^2}). \qquad (12)$$

Jestliže ve vzorci (12) považujeme veličinu $z' = z - a - \alpha$ za pevně zvolenou a necháme-li α konvergovat k nekonečnu, dostaneme známý výraz pro komplexní potenciál, příslušející obtékání jednoho eliptického válce:

$$w(z') = Uz' + \frac{bU}{a - b}(z' - \sqrt{z'^2 - c^2}).$$

Pro velká α jsou změny rychlosti v blízkosti prvého válce způsobené přítomností druhého válce řádu γ^{-2}.

§ 37. Konformní zobrazení mnohonásobně souvislých oblastí. a) Konformní zobrazení dvojnásobně souvislé oblasti na mezikruží.

Uvažujme v rovině komplexní proměnné z oblast D omezenou z vnějšku křivkou L_0 a z vnitřku křivkou L_1. Položme si tuto úlohu: zobrazit oblast D na mezikruží $R < |w| < 1$ tak, aby křivka L_0 se zobrazila na kružnici $|w| = 1$ a křivka L_1 na kružnici $|w| = R$. Budeme předpokládat, že křivky L_0 a L_1 jsou hladké se spojitou křivostí.

Počátek souřadnic v rovině z položme dovnitř L_1. Hranici oblasti D označme L. Je zřejmé, že L se skládá z křivky L_0 orientované proti ručičkám hodinovým a z křivky L_1 orientované ve směru ručiček hodinových.

Zobrazující funkce $w = \omega(z)$ se na D nerovná ani nule, ani nekonečnu, a proto funkce $\lg \omega(z) = \lg w$ nemá v D singulárních bodů. Jdeme-li po křivce L_0 v kladném směru, $\arg w$ vzroste o 2π, neboť přitom w opisuje, také v kladném směru, kružnici $|w| = 1$. Odtud plyne, že při oběhnutí křivky L_0 v kladném směru $\lg \omega(z)$ vzroste o $2\pi i$, a funkce

$$\varphi(z) = \lg \frac{\omega(z)}{z}$$

je regulární v D. Není obtížné určit krajové podmínky, jež splňuje $\varphi(z)$. Jestliže $t \in L_0$, pak $|\omega(t)| = 1$, jestliže $t \in L_1$, pak $|\omega(t)| = R$. Odtud

$$\operatorname{Re}\{\varphi(t)\} = \begin{cases} -\lg|t|, & t \in L_0, \\ -\lg|t| + \lg R, & t \in L_1. \end{cases} \tag{1}$$

Jestliže necháme R libovolné a sestrojíme harmonickou funkci, vyhovující podmínce (1), pak funkce s ní konjugovaná bude v D obecně mnohoznačná. Proto musíme R podrobit podmínce, že analytická funkce $\varphi(z)$, jež má být určena podmínkou (1), je regulární v D. Tudíž, $\varphi(z)$ je řešením modifikovaného Dirichletova problému; k určení $\varphi(z)$ lze užít methody § 32.

Řešíme-li modifikovaný Dirichletův problém s podmínkou (1), dojdeme k nějaké zcela určité hodnotě R. Předpokládejme, že tato hodnota je menší než jedna; dokažme, že potom funkce $w = \omega(z) = ze^{\varphi(z)}$ realisuje konformní zobrazení oblasti D na mezikruží $R < |w| < 1$. Protože funkce $ze^{\varphi(z)}$ je regulární v D, stačí dokázat, že L_0 a L_1 se vzájemně jednoznačně zobrazují na příslušné kružnice.

Jestliže $z \in L_0$, pak $\operatorname{Re}\{\varphi(z)\} = -\lg|z|$ a tedy $|w| = 1$. Dále, $\arg w =$

$= \arg z + \operatorname{Im}\{\varphi(z)\}$. Když z probíhá uzavřenou křivku L_0, funkce $\operatorname{Im}\{\varphi(z)\}$, jež je harmonická v D, nabude po oběhnutí původní hodnoty, avšak $\arg z$ vzroste o 2π. Avšak potom i $\arg w$ vzroste o 2π a bod w proběhne uzavřenou kružnici $|w| = 1$. Zbývá dokázat, že body této kružnice vzájemně jednoznačně odpovídají bodům křivky L_0. Stačí dokázat, že pro $|w| = 1$ je $\arg w$ rostoucí funkce σ, kde σ je délka oblouku křivky L_0.

Funkce $\lg\omega(z)$, harmonická v D, se rovná nule na L_0 a $\lg R < 0$ na L_1. Podle věty o maximu a minimu harmonické funkce, $\lg|\omega(z)| < 0$ uvnitř D. Avšak potom na L_0 $\frac{\partial \lg|\omega(z)|}{\partial \nu} \geqq 0$ (ν je vnější normála k L_0). Dále, z Cauchy-Riemannových rovnic plyne, že na L_0

$$\frac{\partial \arg\omega(z)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \lg|\omega(z)|}{\partial \nu} \geqq 0, \tag{2}$$

takže $\arg w$ je neklesající funkce σ. Nechť nyní bodům z_1 a z_2 příslušejí oblouky σ_1 a σ_2, při čemž $\sigma_1 < \sigma_2$ a předpokládejme, že $\arg\omega(z_1) = \arg\omega(z_2)$. Potom

$$0 = \arg\omega(z_2) - \arg\omega(z_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial \arg\omega(z)}{\partial \sigma}\, d\sigma.$$

V důsledku nerovnosti (2) bude na oblouku $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ křivky L_0 $\frac{\partial \arg\omega(z)}{\partial \sigma} \equiv 0$ a $\arg\omega(z) \equiv \alpha = \text{konst}$. Avšak potom na tomto oblouku $\lg\omega(z) = \lg|\omega(z)| + i \arg\omega(z) = i\alpha$. Analytická funkce $\lg\omega(z)$, rovnající se konstantě na nějakém oblouku, se potom rovná této konstantě identicky. Odtud

$$\varphi(z) = \lg\omega(z) - \lg|z| = i\alpha - \lg|z|$$

a $\varphi(z)$ není regulární v D, což je spor, jak je patrno ze sestrojení této funkce. Je tedy nutně $\arg\omega(z_1) < \arg\omega(z_2)$, čímž je dokázána vzájemná jednoznačnost zobrazení křivky L_0 na kružnici $|w| = 1$.

Obdobně se dokáže, že L_1 se vzájemně jednoznačně zobrazí na kružnici $|w| = R$.[1]

---

[1] Nyní lze dokázat, že znak rovnosti ve (2) je vyloučen. Skutečně, nechť v bodu $z_0 \epsilon L_0$ $\frac{\partial \lg|\omega(z)|}{\partial \sigma} = 0$. Při tom zřejmě $\left.\frac{\partial \lg|\omega(z)|}{\partial \sigma}\right|_{z=z_0} = 0$; odtud lze lehce usoudit, že $\omega'(z) = 0$, což je nemožné, neboť křivka L_0 je hladká.

Dokažme nyní, že veličina R, určená z řešení modifikovaného Dirichletova problému, je skutečně menší jedné. Předpokládejme opak. Podle předcházejícího dokážeme, že L_0 se vzájemně jednoznačně zobrazuje pomocí funkce $w = \omega(z)$ na kružnici $|w| = 1$, avšak tentokráte $\lg R > 0$, a uvnitř D $\lg|\omega(z)| > 0$. Opakujeme-li předcházející úvahy, zjistíme, že

$$\frac{\partial \arg\omega(z)}{\partial\sigma} \leqq 0, \quad z \in L_0,$$

takže kružnice $|w| = 1$ je probíhána ve směru hodinových ručiček, když L_0 je probíhána proti ručičkám hodinovým. To je ve sporu s tím, že při takovém oběhu $\arg w = \arg z + \operatorname{Im}\{\varphi(z)\}$ vzroste o 2π.

Ze všeho, co bylo shora řečeno, plyne, že existuje jedna a jen jedna hodnota R, pro niž je možné zobrazení dané dvojnásobně souvislé oblasti, ohraničené dvěma nedegenerovanými křivkami, na mezikruží $R < |w| < 1$.

b) Konformní zobrazení mnohonásobně souvislé oblasti na rovinu, jež je rozdělena přímými řezy.

Vyskytuje se úloha konformně zobrazit $(n + 1)$-násobně souvislou omezenou oblast D, omezenou hladkými uzavřenými křivkami $L_0, L_1, \ldots, L_n$ se spojitou křivostí, na oblast D_1, jež vznikne z roviny odstraněním řezů rovnoběžných s imaginární osou. Nechť oblast D leží v rovině z, oblast D_1 v rovině w. Počátek souřadnic $z = 0$ položme dovnitř D a předpokládejme, že se nezobrazuje na bod $w = \infty$. Zobrazující funkci budeme hledat ve tvaru

$$w = \frac{1}{z} + \varphi(z), \tag{3}$$

kde $\varphi(z)$ je regulární v D. Zvolíme-li vhodným způsobem počátek souřadnic v rovině w, dosáhneme toho, že úsečka, na níž se zobrazuje křivka L_0, bude ležet na imaginární ose. Označme b_k abscissu úsečky, na níž se zobrazuje křivka L_k. Potom $\varphi(z)$ splňuje následující krajovou podmínku:

$$t \in L_k, \ \operatorname{Re}\{\varphi(t)\} = -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{t}\right) + b_k, \ b_0 = 0. \tag{4}$$

$\varphi(z)$ je tedy řešením modifikovaného Dirichletova problému. Řešíme-li tento problém, určíme funkci $\varphi(t)$, z níž jednoznačným způsobem určime abscissu b_k. Úplně obdobně jednoznačně určíme ordináty koncových bodů úseček, tvořících hranici D_1, jestliže libovolně zvolíme čistě imaginární aditivní konstantu, jež se vyskytuje v řešení modifikovaného Dirichletova problému.

Zbývá dokázat, že funkce (3) je jednolistá.[1] Především je jednolistou v blízkosti bodu $z = 0$, neboť potom lze jednoznačně rozřešit rovnici (3) vzhledem k z. Nechť nyní z_0 je jeden z bodů, v nichž $\omega(z)$ je jednolistou, a nechť $\omega(z_0) = w_0$. Vyšetřme integrál

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\omega'(z)\,dz}{\omega(z) - w},$$

kde L je hranice oblasti D a w je libovolný bod oblasti D_1.

Integrál $I(w)$, jenž se rovná rozdílu mezi počtem těch nulových bodů a pólů funkce $\omega(z) - w$, které leží uvnitř D, je celé číslo. Pokud w probíhá vnitřek D_1, $I(w)$ je spojitou funkcí w. $I(w)$, rovnající se celému číslu, je tedy konstantní. Avšak $I(w_0) = 0$, neboť $\omega(z) - w_0$ má uvnitř D jediný pól $z = 0$ a jediný nulový bod $z = z_0$. Odtud plyne, že $I(w) \equiv 0$, jestliže $w \in D_1$. Uvnitř D funkce $\omega(z) - w$ má pouze jeden jednoduchý pól $z = 0$, a protože $I(w) = 0$, má $\omega(z) - w$ právě jeden nulový bod v oblasti D, jestliže w leží v oblasti D_1.

Obdobně můžeme uvažovat některé jiné typy konformního zobrazení mnohonásobně souvislých oblastí. Tak lze na modifikovaný Dirichletův problém lehce převést úlohu konformního zobrazení mnohonásobně souvislé oblasti na rovinu, rozdělené řezy podél oblouků soustředných kružnic nebo podél úseček přímek, procházejících jedním a týmž bodem.

§ 38. Dirichletův a Neumannův problém v prostoru. Omezme se pro jednoduchost na oblast, omezenou či neomezenou, jejíž hranice je uzavřená hladká plocha S, vyhovující t. zv. *Ljapunovovým podmínkám:*

1. úhel ϑ, sevřený normálami ve dvou bodech M a M_1 plochy S, vyhovuje nerovnosti

[1] Níže provedený důkaz je vzat ze článku M. V. Keldyše „Konformnyje otobraženija mnogosvjaznych oblastěj na kanoničeskije oblasti", Uspěchi mat. nauk, vyp. VI, 1939.

$$\vartheta < Ar^{\alpha}, \; 0 < \alpha \leqq 1$$

kde A a α jsou konstanty a r je vzdálenost mezi M a M_1;

2. existuje konstanta $\delta > 0$ taková, že každá přímka rovnoběžná s normálou k S v bodě M neprotíná víc než jednou tu část plochy S, která leží uvnitř koule poloměru δ a se středem v M.

Integrály

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{dS_1}{r}, \tag{1}$$

$$W(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} dS_1, \tag{2}$$

se nazývají, jak je známo, potenciál vrstvy, resp. dvojvrstvy; $\varrho(M)$ a $\sigma(M)$ se nazývají hustoty příslušných potenciálů. Ve vzorcích (1) a (2) r je vzdálenost mezi M a M_1, kde M_1 je bod plochy S, a M je bod uvnitř nebo vně S, ν_1 je vnější normála k S v bodě M_1; dS_1 je element plochy S.

Platí následující tvrzení[1] (hustoty $\varrho(M_1)$ a $\sigma(M_1)$ považujeme za spojité):

1. Potenciál vrstvy i dvojvrstvy jsou funkce harmonické jak uvnitř, tak i vně S.

2. Potenciál jednoduché vrstvy je spojitý v celém prostoru.

3. Jestliže ν značí vnější normálu k S v bodě M a indexy i a e označují hodnoty potenciálu uvnitř, resp. vně plochy S, pak hodnoty normální derivace potenciálu vrstvy na ploše S jsou určeny následujícími vzorci:

$$\frac{\partial V_i(M)}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} \varrho(M) + \frac{1}{4\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} dS_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_e(M)}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \varrho(M) + \frac{1}{4\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(r, \nu)}{r^2} dS_1. \tag{4}$$

---

[1] Viz na př. [12].

4. Limitní hodnoty potenciálu dvojvrstvy na ploše S jsou dány vzorci

$$W_i(M) = \frac{1}{2}\,\sigma(M) + \frac{1}{4\pi}\int_S \sigma(M_1)\,\frac{\cos(r,\,\nu_1)}{r^2}\,\mathrm{d}S_1, \tag{5}$$

$$W_e(M) = -\frac{1}{2}\,\sigma(M) + \frac{1}{4\pi}\int_S \sigma(M_1)\,\frac{\cos(r,\,\nu_1)}{r^2}\,\mathrm{d}S_1. \tag{6}$$

Ve vzorcích (3) a (6) je r orientováno od M_1 k M.

5. Normální derivace potenciálu dvojvrstvy nabývá na S stejných limitních hodnot jak z vnějšku, tak z vnitřku S.

Lze také dokázat (viz [12]), že když M a M_1 leží na ploše S, pak (C = konst.)

$$\left|\frac{\cos(\nu,\,r)}{r^2}\right| < \frac{C}{r^{2-\alpha}}; \quad \left|\frac{\cos(\nu_1,\,r)}{r^2}\right| < \frac{C}{r^{2-\alpha}}; \tag{7}$$

α je konstanta, jež se vyskytuje v Ljapunovových podmínkách.

Uvažujme Dirichletův problém pro oblast D, ležící uvnitř S. Danou hodnotu neznámé harmonické funkce W na S označme $f(M)$. Funkci W budeme hledat ve tvaru potenciálu dvojvrstvy s neznámou hustotou $\sigma(M)$. Užijeme-li vzorce (5), lehce pro tuto neznámou dostaneme integrální rovnici

$$\sigma(M) + \frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(M_1)\,\frac{\cos(r,\,\nu_1)}{r^2}\,\mathrm{d}S_1 = 2f(M). \tag{8}$$

Druhá z nerovností (7) ukazuje, že jádro rovnice (8) má slabou singularitu. Podle toho, co jsme dokázali v § 10, lze na tuto rovnici užít Fredholmovy theorie. Dokažme, že rovnice (8) je řešitelná. Ve shodě s Fredholmovou alternativou uvažujme homogenní rovnici

$$\sigma_0(M) + \frac{1}{2\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\,\frac{\cos(r,\,\nu_1)}{r^2}\,\mathrm{d}S_1 = 0. \tag{9}$$

Z této rovnice a ze vzorce (5) plyne, že potenciál dvojvrstvy

$$W_0(M) = \frac{1}{4\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\,\frac{\partial\,\frac{1}{r}}{\partial\nu_1}\,\mathrm{d}S_1,$$

kde $\sigma_0(M)$ je řešení rovnice (9), má na S limitní hodnoty z vnitřku rovné nule. Podle věty o jednoznačnosti řešení Dirichletova problému, $W_0(M) \equiv 0$ uvnitř D. Avšak potom $\frac{\partial W_{0i}}{\partial \nu} = 0$. Dále, v důsledku vlastnosti 5,

$$\frac{\partial W_{0e}}{\partial \nu} = \frac{\partial W_{0i}}{\partial \nu} = 0.$$

Podle věty o jednoznačnosti řešení Neumannova problému, $W_{0e}(M) =$ $=$ konst, a poněvadž v nekonečnu zřejmě $W_{0e} = 0$, je $W_{0e}(M) \equiv 0$. Nyní, odečteme-li rovnice (5) a (6), najdeme

$$\sigma_0(M) = W_{0i}(M) - W_{0e}(M) \equiv 0.$$

Tudíž homogenní rovnice (9) má pouze triviální řešení a rovnice (8) je řešitelná. Řešíme-li ji a dosadíme-li řešení do (2), dostaneme řešení našeho Dirichletova problému.

Když uvažujeme Dirichletův problém pro oblast D', ležící vně S, a hledáme-li řešení jako dříve ve tvaru potenciálu dvojvrstvy, pak užívajíce vzorce (6) dojdeme k integrální rovnici

$$\sigma(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \mathrm{d}S_1 = -2f(M). \tag{10}$$

Tato rovnice je obecně neřešitelná. Skutečně, uvažujeme-li homogenní rovnici

$$\sigma_0(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma_0(M_1) \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \mathrm{d}S_1 = 0 \tag{11}$$

a opakujeme-li předcházející úvahy, nalezneme, že nutně $\sigma_0(M) =$ $=$ konst. Tato hodnota $\sigma_0(M)$ vyhovuje rovnici (11), což přímo plyne ze známého Gaussova vzorce

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \mathrm{d}S_1 \equiv 1, \quad M \in S.$$

Nehomogenní rovnice (11) je tedy neřešitelná, neboť příslušná homogenní rovnice má netriviální řešení.

Mohli jsme předem předvídat, že rovnice (10) bude neřešitelná. Skutečně, potenciál dvojvrstvy klesá do nekonečna řádově jako R^{-2}, kde R je vzdálenost počátku souřadnic od bodu M, zatím co libovolná harmonická funkce v D' klesá do nekonečna jako R^{-1}.

Řešení Dirichletova problému pro oblast D' budeme hledat ve tvaru

$$W(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \, dS_1 - \frac{1}{2R} \int_S \sigma(M_1) \, dS_1. \tag{12}$$

Počátek souřadnic umístíme uvnitř S. Výraz (12) vede na integrální rovnici pro neznámou $\sigma(M)$:

$$\sigma(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \, dS_1 + \frac{1}{R} \int_S \sigma(M_1) \, dS_1 = -2f(M). \tag{13}$$

Uvažujme homogenní rovnici

$$\sigma_0(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma_0(M_1) \frac{\cos(r, \nu_1)}{r^2} \, dS_1 + \frac{1}{R} \int_S \sigma_0(M_1) \, dS_1 = 0. \tag{14}$$

Ukazuje, že harmonické funkce v D',

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma_0(M_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \, dS_1$$

a

$$\frac{1}{2R} \int_S \sigma_0(M_1) \, dS_1$$

jsou totožné na S. Potom se sobě rovnají identicky.

Odtud

$$\int_S \sigma_0(M_1) \, dS_1 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma_0(M_1) \, R \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \, dS_1.$$

Necháme-li $R \to \infty$ a všimneme-li si, že přitom $R \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \to 0$, dostaneme

$$\int_S \sigma_0(M_1) \, dS_1 = 0. \tag{15}$$

Nyní se rovnice (14) shoduje s (11). Odtud plyne, že $\sigma_0(M) \equiv$ $\equiv$ konst. Dosadíme-li toto do (15), najdeme, že $\sigma_0(M) = 0$. Tím je dokázána řešitelnost rovnice (13).

Obraťme se k Neumannovu problému. Danou hodnotu normální derivace hledané harmonické funkce na S označme $\psi(M)$; řešení budeme hledat ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy (1). Neumannův problém pro oblast D vede na integrální rovnici

$$\varrho(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(\nu, r)}{r^2} \, dS_1 = -2\psi(M) \tag{16}$$

a pro oblast D' na rovnici

$$\varrho(M) + \frac{1}{2\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(\nu, r)}{r^2} \, dS_1 = 2\psi(M). \tag{17}$$

Rovnice (17) je konjugovaná s (8) a stejně jako ona je vždy řešitelná. V trojrozměrném prostoru je tedy „vnější" Neumannův problém vždy řešitelný.

Rovnice (16) je konjugovaná s (10). Aby rovnice (16) byla řešitelná, je nutné a stačí, aby pravá strana byla orthogonální k řešením rovnice (11). Jediným řešením této rovnice, jak jsme viděli, je konstanta. Proto podmínka řešitelnosti rovnice (16) zní takto:

$$\int_S \psi(M_1) \, dS_1 = 0. \tag{18}$$

Z theorie harmonických funkcí je známo, že podmínka (18) je nutná k tomu, aby „vnitřní" Neumannův problém měl řešení. Předcházejícími úvahami jsme dokázali, že tato podmínka je také postačující.

Na závěr uvažujme rovnici s proměnným parametrem λ:

$$\varrho(M) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{\cos(\nu, r)}{r^2} \, dS_1 = 0. \tag{19}$$

Již jsme viděli, že $\lambda = -1$ je regulární a $\lambda = +1$ charakteristické číslo této rovnice. Dokažme, že všechna charakteristická čísla rovnice (19) leží na polopřímkách $\lambda \geqq 1$ a $\lambda < -1$. Uvažujme potenciál jednoduché vrstvy

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \varrho(M_1) \frac{dS_1}{r},$$

kde $\varrho(M)$ je netriviální řešení rovnice (19). Vzorce (3) a (4) nám umožňují přepsat rovnici (19) ve tvaru

$$\frac{\partial V_i}{\partial \nu} - \frac{\partial V_e}{\partial \nu} + \lambda \left(\frac{\partial V_i}{\partial \nu} + \frac{\partial V_e}{\partial \nu} \right) = 0$$

čili

$$(1 + \lambda) \frac{\partial V_i}{\partial \nu} = (1 - \lambda) \frac{\partial V_e}{\partial \nu}. \tag{20}$$

Připomeňme, že podle vlastnosti 2 $V_i = V_e$. Připouštíme-li, že λ, $\varrho(M)$ a $V(M)$ jsou komplexní, násobme (20) $\overline{V}_i = \overline{V}_e$ a integrujme po S. Položme ještě $V = V_1 + iV_2$. Potom dostaneme

$$(1 + \lambda) \left\{ \int_S \left(V_{1i} \frac{\partial V_{1i}}{\partial \nu} + V_{2i} \frac{\partial V_{2i}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S + \int_S \left(V_{1i} \frac{\partial V_{2i}}{\partial \nu} - V_{2i} \frac{\partial V_{1i}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S \right\} =$$

$$= (1 - \lambda) \left\{ \int_S \left(V_{1e} \frac{\partial V_{1e}}{\partial \nu} + V_{2e} \frac{\partial V_{2e}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S + \int_S \left(V_{1e} \frac{\partial V_{2e}}{\partial \nu} - V_{2e} \frac{\partial V_{1e}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S \right\}.$$

Druhé integrály nalevo i napravo jsou rovny nule, neboť funkce V_{1i}, V_{2i} jsou harmonické uvnitř S a funkce V_{1e}, V_{2e} jsou harmonické vně S; tak docházíme k jednodušší rovnici

$$(1 + \lambda) \int_S \left(V_{1i} \frac{\partial V_{1i}}{\partial \nu} + V_{2i} \frac{\partial V_{2i}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S =$$

$$= (1 - \lambda) \int_S \left(V_{1e} \frac{\partial V_{1e}}{\partial \nu} + V_{2e} \frac{\partial V_{2e}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S. \tag{21}$$

Připomeňme známý vzorec z theorie potenciálu: Jestliže je oblast B omezená (není podstatné, zda z vnitřku či z vnějšku) plochou Σ, je-li $V(M)$ harmonická funkce v B a je-li n normála k Σ, vnější vzhledem k oblasti B, pak

$$\int_\Sigma V \frac{\partial V}{\partial n} \mathrm{d}S = \int_B \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Odtud speciálně plyne, že

$$\int_\Sigma V \frac{\partial V}{\partial n} \mathrm{d}S \geqq 0;$$

znak rovnosti platí pouze tenkrát, když $V = \text{konst}$, což je opět možné pro $V \neq 0$ pouze tehdy, když B leží uvnitř Σ.

Normála ν byla zvolena tak, aby byla vnější vzhledem k S. V takovém případě bude vnější vzhledem k D a vnitřní vzhledem k D'; odtud plyne, že integrál nalevo v (21) je nezáporný a integrál napravo nekladný.

Jsou možné tyto případy:

a) Integrál napravo v (21) se rovná nule. Potom $V_e \equiv 0$; protože $V_i = V_e$ na S, je $V_i \equiv 0$ a $\varrho(M) = \frac{\partial V_e}{\partial \nu} - \frac{\partial V_i}{\partial \nu} \equiv 0$. Tento případ nevede k charakteristickému číslu λ.

b) Integrál nalevo je roven nule a integrál napravo je různý od nuly. Pak dostaneme známé charakteristické číslo $\lambda = 1$.

c) Integrál nalevo je kladný a integrál napravo záporný. K tomu je nutné buď $1 - \lambda < 0$, $1 + \lambda > 0$, nebo $1 - \lambda > 0$, $1 + \lambda < 0$, t. j. buď $\lambda > 1$, nebo $\lambda < -1$.

KAPITOLA 2

BIHARMONICKÁ ROVNICE (UŽITÍ GREENOVY FUNKCE)

§ 39. Problémy, vedoucí na biharmonickou rovnici. a) Rovinný problém theorie pružnosti. O rovinné deformaci mluvíme, jestliže se elastická posunutí dějí pouze v rovinách rovnoběžných s rovinou (x, y) a složky posunutí nezávisí na z. Označíme-li u_x, u_y složky posunutí, σ_x, τ_{xy}, σ_y složky napětí, můžeme napsat soustavu diferenciálních rovnic rovinného problému theorie pružnosti:[1]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

[1] Rovnice (1) odpovídají případu, kdy na těleso nepůsobí žádné objemové síly. Viz [28a].

$$\sigma_x = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad \sigma_y = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}. \tag{2}$$

Zde jsou λ a μ Laméovy konstanty a

$$\vartheta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}. \tag{3}$$

Počet neznámých funkcí v soustavě (1) — (2) lze snížit na jednu. Rovnicím (1) lze totiž vyhovět, položíme-li

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Funkce $W(x, y)$ se nazývá funkcí napětí čili Airyho funkcí. Dosadíme-li výrazy (4) do (2) a vyloučíme-li u_x a u_y, zjistíme, že Airyho funkce vyhovuje biharmonické rovnici

$$\Delta^2 W = \Delta(\Delta W) = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0. \tag{5}$$

Řešení rovinného problému theorie pružnosti lze tedy převést na integrování biharmonické rovnice za příslušných krajových podmínek.

Objasněme, jaké jsou to podmínky. Nejjednodušeji se formulují, jestliže jsou na hranici pružné oblasti dána posunutí jejích bodů. V tomto případě, označíme-li hranici pružné oblasti L, máme na L

$$u_x = g_1(t), \quad u_y = g_2(t), \tag{6}$$

kde t je parametr, určující polohu bodu na L, a $g_1(t)$ a $g_2(t)$ jsou dané funkce.

Nechť jsou nyní dány vnější síly, působící na hranici L. Označíme-li jejich složky X_ν a Y_ν, dostaneme na základě známých vzorců mechaniky deformovatelných těles

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y) &= X_\nu, \\ \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y) &= Y_\nu. \end{aligned} \tag{7}$$

Zde je ν vnější normála k hranici L. Poznamenejme, že

$$\cos(\nu, x) = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \cos(\nu, y) = -\frac{\partial x}{\partial s},$$

kde s je délka oblouku hranice.

Dosadíme-li do (7) napětí vyjádřená pomocí Airyho funkce, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) = X_\nu, \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = -Y_\nu,$$

odkud

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= -\int Y_\nu \, ds + C_1 = f_1(s) + C_1, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \int X_\nu \, ds + C_2 = f_2(s) + C_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Rovnice (8) vyjadřují krajové podmínky naší úlohy pro případ, že jsou dány vnější síly působící na hranici. Jestliže je hranice L jednoduše souvislá, lze zvolit konstanty C_1 a C_2 pevně podle libovůle; jestliže hranice L je mnohonásobně souvislá, pak C_1 a C_2 mohou mít různé hodnoty na různých křivkách, tvořících L. V tom případě musí být určeny z požadavku jednoznačnosti posunutí. V tomto smyslu je rovinná úloha theorie pružnosti obdobná modifikovanému Dirichletovu problému.

Uvedené typy krajových podmínek nejsou jediné. Níže ukážeme na příslušných místech některé jiné typy krajových podmínek.

Problémy, jež odpovídají podmínkám (6) a (8), budeme nazývat prvním, resp. druhým biharmonickým problémem.[1]

b) Ustálený rovinný pohyb viskosní nestlačitelné kapaliny. Rovnice Navier-Stokesovy[2] nabývají v tomto případě tvaru

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \, \Delta v_x - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \nu \, \Delta v_y - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Zde v_x a v_y jsou složky rychlosti, p je tlak, ϱ je hustota kapaliny, ν je koeficient viskosity. Rovnice (9) jsou napsány za předpokladu, že nepůsobí žádné objemové síly.

---

[1] V knize N. I. Muschelišviliho [28a] se prvým biharmonickým problémem nazývá krajový problém theorie pružnosti s podmínkami (8).

[2] Viz N. E. Kočin, I. A. Kibel', N. V. Roze, Těoretičeskaja gidromechanika, č. II, Gostěchizdat, 1948.

Třetí z rovnic (9) ukazuje, že existuje funkce $\Phi(x, y)$, nazývaná proudovou funkcí, taková, že

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{10}$$

Dosadíme-li toto do prvých dvou rovnic a vyloučíme-li p, nalezneme rovnici, jíž vyhovuje proudová funkce:

$$\Delta^2 \Phi = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial y}\right). \tag{11}$$

Jestliže v rovnici (9) zanedbáme inerciální členy, je pravá strana v (11) identicky rovna nule; dostaneme, že Φ vyhovuje biharmonické rovnici.

V theorii viskosní kapaliny se předpokládá, že viskosní kapalina, stýkající se s tuhým tělesem, k němu přilne, takže se rychlosti tuhého tělesa a s ním se stýkajících částic kapaliny sobě rovnají. Odtud lze lehce odvodit krajové podmínky při problému obtékání. Jestliže viskosní kapalina obtéká jedno nebo několik těles, o nichž budeme pro jednoduchost předpokládat, že se nepohybují, pak na hranici těchto těles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

Jestliže osu x orientujeme rovnoběžně s rychlostí proudění v nekonečnu a velikost této rychlosti označíme U, má podmínka v nekonečnu tvar

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} [\Phi(x, y) - Uy] = C, \quad C = \text{konst.} \tag{13}$$

Níže uvidíme, že úloha o obtékání neomezeného proudu viskosní kapaliny okolo tuhého tělesa je neřešitelná, jestliže zanedbáme inerciální členy. V tom spočívá t. zv. Stokesovo paradoxon.

Na biharmonickou rovnici vede také mnoho jiných úloh matematické fysiky. Tak na př. na rovnici tvaru $\Delta^2 W = p(x, y)$ se převádí úloha o ohybu plastické hmoty vlivem zatížení, které je normální k jejímu povrchu. Na rovnice téhož typu se převádějí také některé úlohy oceanologie.[1]

---

[1] Viz V. V. Štokman, Uravněnija polja polnych potokov, vozbuždajemych větrom v něodnorodnom polje. Doklad AN SSSR, 1946, t. IV, č. 5.

§ 40. Komplexní vyjádření biharmonické funkce. Každá biharmonická funkce $W(x, y)$ (t. j. integrál biharmonické rovnice) může být vyjádřena pomocí dvou analytických funkcí komplexní proměnné $z = x + iy$. To lze učinit takto: Funkce $P(x, y) = \Delta W$ je harmonická, neboť $\Delta P = \Delta^2 W = 0$. Nechť $Q(x, y)$ je funkce konjugovaná s $P(x, y)$. Označme $P + iQ = 4\varphi'(z)$. Funkce

$$\varphi(z) = p(x, y) + iq(x, y) = \tfrac{1}{4} \int (P + iQ) \, dz$$

je analytická funkce z. Výpočtem se lehce přesvědčíme, že $\Delta(W - px - qy) = 0$, t. j. že funkce $p_1(x, y) = W - px - qy$ je harmonická. Položíme-li $p_1(x, y) = \operatorname{Re}\{\chi(z)\}$ a všimneme-li si, že $px + qy = \operatorname{Re}\{\bar{z}\, \varphi(z)\}$, dojdeme ke Goursatově formuli, jež dává hledané vyjádření biharmonické funkce pomocí analytických funkcí komplexní proměnné $\varphi(z)$ a $\chi(z)$:

$$W(x, y) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\, \varphi(z) + \chi(z)\}. \tag{1}$$

Funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z) = \chi'(z)$ budeme nazývat Goursatovými funkcemi.

Je-li dána funkce $W(x, y)$, nejsou Goursatovy funkce určeny úplně jednoznačně. $\varphi'(z)$ je totiž určena až na ryze imaginární aditivní konstantu a $\varphi(z)$ je tedy určena až na aditivní člen tvaru $i\alpha z + \beta$, kde α je reálná a β je komplexní konstanta. Funkce $\psi(z)$ není také úplně určena, avšak to je pro další méně podstatné.

Z Goursatových vzorců lehce dostaneme dvě důležité formule, jež v definitivním tvaru vyslovil N. I. Muscheləšvili. Prvá z nich dává vyjádření derivací biharmonické funkce pomocí Goursatových funkcí:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i \frac{\partial W}{\partial y} = \varphi(z) + z\, \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{2}$$

kde

$$\psi(z) = \chi'(z). \tag{3}$$

Druhý vzorec se vztahuje k rovinnému problému theorie pružnosti; vyjadřuje posunutí pomocí Goursatových funkcí a má tvar

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\, \varphi(z) - z\, \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \tag{4}$$

Zde jsme označili

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$

Poznamenejme, že $\varkappa > 1$. Vzorce (2) a (4) snadno dostaneme z Goursatova vzorce a z rovnic (2) a (4), § 39.

Uveďme ještě dva vzorce G. V. Kolosova, jež váží napětí s Goursatovými funkcemi:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\}, \tag{5}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)]. \tag{6}$$

Vzorce (2) a (4) nám dovolují převést základní problémy theorie pružnosti v rovině na krajové úlohy theorie analytických funkcí. Prvý problém se převádí na sestrojení analytických funkcí $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, jež na hranici oblasti vyhovují rovnici

$$\varkappa\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(g_1 + ig_2). \tag{7}$$

V druhém problému je třeba sestrojit analytické funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, jež na hranici vyhovují krajové podmínce

$$\text{na } L_k \qquad \varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 + b_k,\ b_k = \text{konst.} \tag{8}$$

Zde

$$f_1 + if_2 = i\int_{s_0}^{s}(X_\nu + iY_\nu)\,\mathrm{d}s, \tag{9}$$

kde X_ν a Y_ν jsou složky vnějších sil působících na hranici ve směru os x a y. Konstanty b_k je nutno zvolit tak, aby posunutí byla jednoznačná.

Na tutéž krajovou úlohu, avšak bez libovůle při určení pravé strany,[1] se v hydrodynamice převádí úloha obtékání viskosní kapalinou.

Je užitečné poznamenat, že rovnici (8) lze uvažovat jako speciální případ rovnice (7) pro $\varkappa = -1$.

Jindy bývá užitečné předběžně konformně zobrazit oblast, jež je vyplněna pružným prostředím nebo viskosní kapalinou, na nějakou jinou oblast. Vzorce (7) a (8) se potom poněkud mění. Nechť $z = \omega(\sigma)$ je funkce realisující zobrazení. Označme

$$\varphi(z) = \varphi(\omega(\sigma)) = \Phi(\sigma);\ \psi(z) = \psi(\omega(\sigma)) = \Psi(\sigma).$$

---

[1] A tedy bez dodatečných požadavků takového typu, jako je jednoznačnost posunutí.

Potom rovnice (7) a (8) jsou nahrazeny rovnicemi:

$$\varkappa\, \Phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\Phi'(\sigma)} - \overline{\Psi(\sigma)} = 2\mu(g_1 + ig_2) \tag{10}$$

a

$$\Phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)} = f_1 + if_2 + b_k. \tag{11}$$

Vyšetřme nyní analytický charakter Goursatových funkcí. Jestliže oblast vyplněná pružným prostředím je omezená, jednoduše souvislá a nepůsobí na ni ani bodové síly nebo momenty, pak $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou prostě regulární v oblasti. Právě tak $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou regulární v jednoduše souvislé omezené oblasti, vyplněné viskosní kapalinou, jestliže v oblasti nejsou ani prameny, ani propady.

Zabývejme se nyní případem mnohonásobně souvislé oblasti. Její hranici označme jako obvykle L, vnitřní křivky, z nichž se skládá, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ a křivku omezující oblast z vnějšku (jestliže je oblast omezená) L_0. Vlastní oblast označme písmenem D.

Uvažme ta omezení, jež musí nutně splňovat Goursatovy funkce při rovinném problému theorie pružnosti. Ze vzorce (4), § 39 je patrno, že

$$P(x, y) = \Delta W = \sigma_x + \sigma_y.$$

Napětí je jednoznačná funkce stejně jako posunutí. Odtud plyne, že $P(x, y)$ je jednoznačná. Při tom $Q(x, y)$ vzroste o konstantu při oběhu kolem každé z vnitřních křivek $L_1, L_2, \ldots, L_n$ proti hodinovým ručičkám. Označme onen přírůstek $8\pi A_k$. Potom při uvedeném oběhu funkce $\varphi'(z)$ vzroste o $2\pi i A_k$. Jestliže z_k je bod uvnitř křivky L_k, pak při tomtéž oběhu funkce $A_k \lg(z - z_k)$ vzroste také o $2\pi i A_k$. Odtud plyne, že

$$\varphi'(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k \lg(z - z_k) + f(z), \tag{12}$$

kde $f(x)$ je funkce regulární v D a A_k je reálná konstanta. Není obtížné nahlédnout, že neurčitý integrál

$$\int f(z)\, dz$$

může také obsahovat logaritmické sčítance. Integrujeme-li tedy rovnici (12), dostaneme

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k z \lg(z - z_k) + \sum_{k=1}^{n} B_k \lg(z - z_k) + \varphi^*(z). \tag{13}$$

V tomto vzorci je $\varphi^*(z)$ jednoznačná funkce, regulární v D; B_k je komplexní konstanta a A_k jsou, jak již jsme viděli výše, reálné konstanty.

Obraťme se k funkci $\psi(z)$. Vzorec (12) ukazuje, že $\varphi''(z)$ je jednoznačná. Nyní ze (6) plyne, že $\psi'(z)$ je také jednoznačná a její neurčitý integrál obsahuje logaritmické členy:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} C_k \lg(z - z_k) + \psi^*(z), \tag{14}$$

kde $\psi^*(z)$ je funkce regulární v D.

Při odvozování vzorců (13) a (14) jsme užili pouze jednoznačnosti napětí. Objasněme, jaká omezení klade na koeficienty A_k, B_k, C_k požadavek jednoznačnosti posunutí. Vzorec (4) ukazuje, že při oběhu křivky L_k vzroste součet $2\mu(u_x + iu_y)$ o

$$2\pi i[(\varkappa + 1) A_k z + \varkappa B_k + \overline{C}_k].$$

Tato veličina se rovná nule, neboť posunutí jsou jednoznačná. Odtud plyne, že

$$A_k = 0, \; C_k = -\varkappa \overline{B}_k, \tag{15}$$

a tak konečně dostaneme následující výrazy pro Goursatovy funkce při rovinném problému theorie pružnosti:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{n} B_k \lg(z - z_k) + \varphi^*(z), \\ \psi(z) &= -\varkappa \sum_{k=1}^{n} \overline{B}_k \lg(z - z_k) + \psi^*(z). \end{aligned} \tag{16}$$

Koeficienty B_k mají jednoduchý fysikální smysl:

$$B_k = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1 + \varkappa)}, \tag{17}$$

kde X_k a Y_k jsou složky hlavního vektoru vnějších sil působících na křivce L_k. Při druhém základním problému jsou tyto koeficienty známy v důsledku krajových podmínek, při prvém však zůstávají neznámými.

Poněkud jiný charakter má mnohoznačnost Goursatových funkcí v hydrodynamice viskosní kapaliny. Zde je třeba požadovat jednoznačnost rychlostí, t. j. jednoznačnost derivací biharmonické funkce. Vzorec (13) platí dále. Ze vzorce (4) je patrno, že při oběhu křivky L_k proti hodinovým ručičkám vzroste $\psi(z)$ o $2\pi i B_k$, a tedy

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} B_k \lg(z - z_k) + \psi^*(z), \tag{18}$$

kde $\psi^*(z)$ je regulární v D.

Formulujme ještě další problém, který budeme nazývat třetím biharmonickým problémem: Jest určit biharmonickou funkci, jsou-li na hranici oblasti dány prvé derivace, za předpokladu, že tyto derivace, jakož i prvé derivace Goursatových funkcí jsou jednoznačné v uvažované oblasti.

Při třetím problému tedy předpokládáme, že $\varphi(z)$ může být vyjádřena vzorcem (16) a $\psi(z)$ vzorcem (18). Poznamenejme, že pro jednoduše souvislou oblast je druhý a třetí problém totožný.

Lze dokázat, že každá ze tří formulovaných úloh má jediné řešení (viz [27d]).

Shora uvedené Stokesovo paradoxon je bezprostředním důsledkem jednoznačnosti řešení třetího problému. Skutečně, jestliže kapalina obtéká pouze jedno těleso, je oblast vyplněná tekutinou jednoduše souvislá, Goursatovy funkce jsou jednoznačné a problém obtékání splývá s třetím problémem, jejž je nutno řešit při těchto podmínkách: prvé derivace hledané funkce se rovnají nule na hranici a jsou omezené v nekonečnu.[1] Z věty o jednoznačnosti plyne, že hledaná biharmonická funkce je identicky rovna konstantě. Avšak potom jsou její derivace, t. j. rychlosti, identicky rovny nule. Tak dostaneme, že viskosní kapalina obtékající tuhé těleso je v klidu.

Jestliže viskosní kapalina obtéká několik tuhých těles, dostaneme řešení, užijeme-li libovolnosti koeficientů A_k. V tom případě má problém obtékání jednoznačné řešení pouze tehdy, když je oblast dvojnásobně souvislá; jestliže je oblast více než dvojnásobně souvislá, pak je řešení nekonečně mnoho.

---

[1] To plyne z toho, že v nekonečnu $v_x = U$, $v_y = 0$.

§ 41. Greenova funkce a Schwarzovo jádro. Nechť D je omezená oblast roviny $z = x + iy$, jednoduše nebo mnohonásobně souvislá, a nechť z a $\zeta = \xi + i\eta$ jsou libovolné body oblasti D. Označme r vzdálenost mezi těmito body: $r = |z - \zeta|$. Jak je známo, Greenovou funkcí oblasti D nazýváme funkci $G(x, y; \xi, \eta)$ dvou bodů této oblasti, jež má tyto vlastnosti:

a)
$$G(x, y; \xi, \eta) = g(x, y; \xi, \eta) - \lg r, \tag{1}$$

kde $g(x, y; \xi, \eta)$ je harmonická funkce v D proměnných ξ a η pro daná x a y;

b) Jestliže bod $\zeta = \xi + i\eta$ leží na hranici oblasti D, pak

$$G(x, y; \xi, \eta) = 0. \tag{2}$$

Funkci $g(x, y; \xi, \eta)$ lze sestrojit, jestliže řešíme Dirichletův problém při krajové podmínce: na hranici L oblasti D $g = \lg r$.

Z vlastností a) a b) plyne souměrnost Greenovy funkce:

$$G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y). \tag{3}$$

Pomocí Greenovy funkce se řeší Dirichletův problém v uzavřené formě: Jestliže $U(x, y)$ je harmonická funkce v D, rovnající se $u(\zeta)$ v bodě ζ hranice, pak

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L u(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma, \quad \mathrm{d}\sigma = |\mathrm{d}\zeta|, \tag{4}$$

kde ν tentokrát označuje vnitřní normálu k L v bodě ζ.

Ze souměrnosti Greenovy funkce plyne, že je nejen harmonickou funkcí ξ a η, nýbrž také x a y v celé oblasti D, mimo bod (ξ, η). Zaveďme pro další důležitý pojem komplexní Greenovy funkce. Budeme uvažovat $G(x, y; \xi, \eta)$ jako funkci komplexních proměnných z a ζ a ve shodě s tím ji budeme značit $G(z, \zeta)$. Sestrojme funkci $H(z, \zeta)$, konjugovanou s $G(z, \zeta)$ vzhledem k proměnným x a y. Lze na př. položit

$$H(z, \zeta) = \int_a^z -\frac{\partial G}{\partial y} \mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial x} \mathrm{d}y, \tag{5}$$

kde a je libovolný, avšak pevně zvolený bod uvnitř oblasti D. Funkce

$H(z, \zeta)$ je reálná mnohoznačná funkce svých argumentů. Na jedné z jejích větví platí identita

$$H(a, \zeta) \equiv 0. \tag{6}$$

Komplexní Greenovou funkcí nazýváme funkci

$$M(z, \zeta) = G(z, \zeta) + i\,H(z, \zeta). \tag{7}$$

$M(z, \zeta)$ je analytická, nikoliv však regulární funkce proměnné z v D a neanalytická funkce proměnné ζ.

Komplexní Greenova funkce je mnohoznačná, neboť obsahuje člen $-\lg(\zeta - z)$. Mimoto, jestliže je oblast D mnohonásobně souvislá, mění tato funkce své hodnoty při oběhu kolem libovolné vnitřní hranice oblasti v rovině z. Označme jako dříve L_0 vnější a $L_1, L_2, \ldots, L_n$ vnitřní hranice oblasti D. Při oběhu kolem L_k proti hodinovým ručičkám vzroste funkce $H(z, \zeta)$ o nějaký přírůstek, který bude obecně funkcí ζ. Označme jej $2\pi\, b_k(\zeta)$:

$$b_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} -\frac{\partial G}{\partial y} \mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial x} \mathrm{d}y.$$

Zde je $\zeta = \xi + i\eta$ vnitřní bod oblasti D a $z = x + iy$ bod na křivce L_k. Označme n směr vnitřní normály k L_k v bodě z a položme $|\mathrm{d}z| = \mathrm{d}s$. Zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos(s, x) = -\cos(n, y),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \cos(s, y) = \cos(n, x).$$

Odtud plyne, že

$$b_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{\partial G}{\partial n} \mathrm{d}s. \tag{8}$$

Při oběhu kolem L_k proti hodinovým ručičkám vzroste komplexní Greenova funkce o $2\pi i\, b_k(\zeta)$. O totéž při témž oběhu vzroste funkce $b_k(\zeta) \lg(z - z_k)$, kde z_k je libovolný, pevně zvolený bod uvnitř L_k. Komplexní Greenova funkce může být tudíž vyjádřena takto:

$$M(z; \zeta) = M_0(z; \zeta) + \sum_{k=1}^{n} b_k(\zeta) \lg(z - z_k) - \lg(\zeta - z), \tag{9}$$

kde $M_0(z; \zeta)$ je regulární funkce proměnné z v D. Poznamenejme, že $M_0(z; \zeta)$ jako funkce proměnné ζ je jednoznačná.

Dokažme, že $b_k(\zeta)$ je harmonická funkce ξ a η v D, rovna jedné na L_k a nule na L_j, $j = 0, 1, \ldots, k - 1, k + 1, \ldots, n$.

V (8) proveďme substituci z v ζ a ζ v z. Ve shodě s tímto změňme n v ν a ds v dσ. Potom dostaneme

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{\partial G}{\partial \nu} \, d\sigma.$$

Uvažujme funkci $\delta_k(\zeta)$ bodu ζ na hranici L, kladouce

$$\delta_k(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \zeta \text{ leží na } L_j, \\ 0, & \text{jestliže } \zeta \text{ leží na } L_j, \ j \neq k. \end{cases} \tag{10}$$

Potom lze napsat $b_k(z)$ ve tvaru

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L} \delta_k(\zeta) \frac{\partial G}{\partial \nu} \, d\sigma. \tag{11}$$

Porovnáme-li toto se (4), přesvědčíme se o správnosti našeho tvrzení.

Nechť nyní ve vzorci (9) značí z vnitřní bod oblasti D, ζ bod na hranici L a ν vnitřní normálu k L v bodě ζ. Položme

$$\frac{\partial b_k(\zeta)}{\partial \nu} = a_k(\zeta) \tag{12}$$

a

$$\frac{\partial M(z; \zeta)}{\partial \nu} = T(z; \zeta). \tag{13}$$

Derivujeme-li (9) podle ν, dostaneme:

$$T(z; \zeta) = \frac{\partial M_0(z; \zeta)}{\partial \nu} + \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta) \lg(z - z_k) - \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}. \tag{14}$$

Funkci $T(z; \zeta)$ budeme nazývat Schwarzovým jádrem oblasti D. Určeme jeho nejdůležitější vlastnosti.

Schwarzovo jádro je v D analytická funkce proměnné z a je mnohoznačná, jestliže je oblast D mnohonásobně souvislá. Při oběhu okolo L_k proti hodinovým ručičkám vzroste o $2\pi i a_k(\zeta)$. Dále $T(z; \zeta)$ je jednoznačná a neanalytická funkce ζ. Reálná část Schwarzova jádra je normální derivace Greenovy funkce. Jedna z větví její imaginární části je identicky rovna nule pro $z = a$:

$$\operatorname{Im}\{T(a;\zeta)\} \equiv 0. \tag{15}$$

Nechť $f(\zeta)$ je spojitá reálná funkce bodu na hranici L. Uvažujme integrál

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L f(\zeta)\,T(z;\zeta)\,d\sigma; \tag{16}$$

$\Phi(z)$ je analytická funkce z. Ze vzorce (4) je patrno, že její reálná část je jednoznačná v D a na hranici se rovná $f(\zeta)$. Vzorec (15) dále ukazuje, že jedna z větví imaginární části $\Phi(z)$ je rovna nule pro $z = a$. Vzorec (16) tedy určuje analytickou funkci z hodnot její reálné části na hranici za předpokladu, že tato reálná část je jednoznačná.

Nechť $F(z) = u(z) + i\,v(z)$ je analytická funkce, jež nemá uvnitř D singulární body. Předpokládejme ještě, že její reálná část $u(z)$ je jednoznačná v D a spojitá uvnitř i na hranici D. Jak jsme již viděli, integrál

$$\frac{1}{2\pi}\int_L u(\zeta)\,T(z;\zeta)\,d\sigma$$

je analytická funkce z, jejíž reálná část se rovná $u(z)$. Taková funkce se může lišit od $F(z)$ pouze o imaginární aditivní konstantu. Jedna z větví imaginární části posledního integrálu se rovná nule pro $z = a$. Odtud lze lehce nahlédnout, že

$$\frac{1}{2\pi}\int_L u(\zeta)\,T(z;\zeta)\,d\sigma = F(z) - i\,v(a). \tag{17}$$

V tomto vzorci je $v(a)$ hodnota v bodě a jedné z větví funkce $v(z)$.

Jestliže funkce $u(z)$ harmonická v D je jednoznačná, pak funkce $v(z)$ s ní konjugovaná bude obecně mnohoznačná. Vzorec (17) umožňuje vypočítat z hodnot $u(z)$ na hranici veličinu, o niž vzroste $v(z)$ při oběhu podél křivky L proti hodinovým ručičkám. Tento přírůstek je zřejmě roven

$$\int_L u(\zeta)\,a_k(\zeta)\,d\sigma. \tag{18}$$

Jestliže imaginární část $v(z)$ je jednoznačná a spojitá v celé oblasti i s hranicí, platí vzorec analogický vzorci (17):

$$\frac{1}{2\pi}\int_L v(\zeta)\, T(z, \zeta)\, d\sigma = \frac{1}{i} F(z) - \frac{1}{i} u(a). \tag{17_1}$$

Přitom je přírůstek reálné části $F(z)$ při oběhu kolem křivky L_k proti hodinovým ručičkám roven integrálu

$$-\int_L v(\zeta)\, a_k(\zeta)\, d\sigma. \tag{19}$$

Jestliže $F(z)$ je jednoznačná, rovnají se integrály (18) a (19) nule. Odtud lehce dostaneme vzorce, jež platí pro libovolnou analytickou funkci regulární v D a spojitou uvnitř i na hranici D:

$$\int_L F(\zeta)\, a_k(\zeta)\, d\sigma = 0, \tag{20}$$

$$\int_L \overline{F(\zeta)}\, a_k(\zeta)\, d\sigma = 0. \tag{21}$$

Pro jednoznačnou funkci $F(z)$, regulární v D, platí současně vzorce (17) i (17_1). Vynásobíme-li (17_1) i a přičteme-li a odečteme-li výsledek od (17), dostaneme dva vzorce důležité pro vše další:

$$\frac{1}{4\pi}\int_L F(\zeta)\, T(z; \zeta)\, d\sigma = F(z) - \frac{1}{2} F(a), \tag{22}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_L F(\zeta)\, T(z; \zeta)\, d\sigma = \frac{1}{2}\, \overline{F(a)}. \tag{23}$$

Zdůrazněme, že vzorce (22) a (23) platí pouze tehdy, je-li funkce $F(z)$ regulární a tedy jednoznačná v D.

Uveďme speciální případ vzorce (22), jenž se dostane pro $F(z) \equiv 1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L T(z; \zeta)\, d\sigma \equiv 1. \tag{24}$$

Komplexní Greenova funkce má vlastnost, kterou nazveme invariancí vzhledem ke konformnímu zobrazení. Spočívá v tomto:

Nechť funkce $t = \varepsilon(z)$ konformně zobrazuje oblast D roviny z na oblast D' roviny t a nechť $M'(t; \tau)$ je komplexní Greenova funkce oblasti D'. Potom je komplexní Greenova funkce oblasti D dána vzorcem

$$M(z;\,\zeta) = M'(\varepsilon(z);\,\varepsilon(\zeta)). \tag{25}$$

Důkaz vzorce (25) se dostane jednoduše z definice Greenovy funkce.

Diferencujeme-li obě strany poslední rovnice ve směru normály, nalezneme vztah mezi Schwarzovými jádry oblastí D a D':

$$T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = T'(\varepsilon(z);\,\varepsilon(\zeta))\,\mathrm{d}\sigma', \quad \mathrm{d}\sigma' = |\mathrm{d}\tau|. \tag{26}$$

Na závěr dokažme několik vět pro Schwarzova jádra, jež jsou nutné pro další výklad.

V ě t a 1. *Nechť $f(\zeta)$ je funkce bodu na hranici L, spojitá podél L a m-krát spojitě diferencovatelná podél jistého oblouku L' této hranice. Nechť mimo to úhel sevřený normálou ν a reálnou osou je také m-krát spojitě diferencovatelný podél L'. Potom funkce*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L f(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma$$

je $m - 1$-krát spojitě diferencovatelná podél oblouku L'', jenž leží uvnitř L'.

Stačí uvažovat případ, kdy $f(\zeta)$ je reálná. Funkce $\Phi(z)$ je analytická a regulární v každé jednoduše souvislé části oblasti D. Její reálná část se na L shoduje s $f(z)$. Vyjmeme z D jednoduše souvislou část D_1 tak, aby L' ležela na hranici D_1. Zobrazme D_1 na kruh. Potom, vyjdeme-li ze Schwarzova integrálu pro kruh, lehce zjistíme, že $\Phi(z)$ je $m - 1$-krát diferencovatelná podél oblouku kruhu, odpovídajícímu oblouku L''. Nyní, abychom dokázali větu 1, stačí užít známého faktu, že v důsledku podmínek věty je funkce realisující zobrazení D_1 na kruh $m - 1$-krát spojitě diferencovatelná podél L''.

V ě t a 2. *Nechť úhel sevřený normálou ν a osou ξ je spojitý a má derivace až do řádu m-tého včetně vzhledem k σ na celé hranici L. Potom platí vzorec*

$$\frac{1}{4\pi}T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + P(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{27}$$

kde funkce $P(z;\,\zeta)$, jestliže nepřihlížíme k jejím logaritmickým singularitám, je spojitá uvnitř i na hranici a $m - 2$-krát diferencovatelná na hranici vzhledem k z.

Funkce $M(z; \zeta) + \lg(\zeta - z)$, uvažovaná jako funkce proměnné z, nemá singulární body uvnitř D; její reálná část je jednoznačná a na L splývá s $\lg|\zeta - z|$. Na tuto funkci lze užít vzorce (17), jenž dává:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \lg|\zeta - t|\, T(z; t)\, d\sigma_t =$$
$$= M(z; \zeta) + \lg(\zeta - z) + i\, H(a; \zeta) - i\arg(\zeta - a).$$

V tomto vzorci z a ζ jsou body uvnitř D, t je bod na hranici L. Protože $H(a, \zeta) \equiv 0$, platí

$$M(z; \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_L \lg|\zeta - t|\, T(z; t)\, d\sigma_t - \lg(\zeta - z) + i\arg(\zeta - a).$$

Derivujeme-li tuto rovnici ve směru normály ν_ζ, procházející bodem ζ, necháme-li ζ konvergovat k hranici a užijeme-li věty o normální derivaci logaritmického potenciálu jednoduché vrstvy, dostaneme

$$T(z; \zeta) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\partial \lg|\zeta - t|}{\partial \nu_\zeta} T(z; t)\, d\sigma_t - \frac{2}{\zeta - z}\frac{\partial \zeta}{\partial \nu_\zeta} + 2i\,\frac{\partial \arg(\zeta - a)}{\partial \nu_\zeta}.$$

Dále

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \nu_\zeta} = \cos(\nu_\zeta, \xi) + i\cos(\nu_\zeta, \eta) = \cos(\sigma, \eta) - i\cos(\sigma, \xi) = -i\frac{d\zeta}{d\sigma}.$$

Tak dojdeme ke vzorci (27), jestliže položíme

$$P(z; \zeta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_L \frac{\partial \lg|\zeta - t|}{\partial \nu_\zeta} T(z; t)\, d\sigma_t + \frac{i}{2\pi}\frac{\partial \arg(\zeta - a)}{\partial \nu_\zeta}.$$

Zbývá dokázat, že $P(z; \zeta)$ je $m - 2$-krát spojitě diferencovatelná podle z v $D + L$. Avšak to přímo plyne z věty 1, neboť v důsledku podmínek věty 2 je funkce $\dfrac{\partial \lg|\zeta - t|}{\partial \nu_\zeta}$ $m - 1$-krát spojitě diferencovatelná podle σ podél hranice L.

Věta 3. *Identita*

$$g(\zeta) = h(\zeta), \tag{28}$$

kde ζ je bod na hranici L a funkce $g(\zeta)$ a $h(\zeta)$ jsou spojité, je ekvivalentní soustavě identit

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\int_L g(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{4\pi}\int_L h(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma,\\
\frac{1}{4\pi}\int_L \overline{g(\zeta)}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{4\pi}\int_L \overline{h(\zeta)}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{29}
$$

Je třeba dokázat, že (28) plyne z (29). Sečteme-li obě identity (29) a převedeme-li všechny členy nalevo, dostaneme

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \mathrm{Re}\{g(\zeta) - h(\zeta)\}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma \equiv 0.$$

Reálná část posledního integrálu je harmonická funkce v D, splývající na L s $\mathrm{Re}\{g(\zeta) - h(\zeta)\}$. Odtud plyne, že $\mathrm{Re}\{g(\zeta) - h(\zeta)\} = 0$. Úplně obdobně se dokáže, že $\mathrm{Im}\{g(\zeta) - h(\zeta)\} = 0$.

§ 42. Převedení prvého a třetího problému na integrální rovnici.

V § 40 jsme zjistili, že prvý a třetí biharmonický problém se převádí na následující krajovou úlohu theorie funkcí komplexní proměnné:

Určit analytické funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, vyhovující těmto podmínkám:

1. $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ nemají singulární body uvnitř oblasti D;
2. $\varphi'(z)$ je jednoznačná v D;
3. na hranici L oblasti D platí

$$\varkappa\,\varphi(\zeta) - \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = g(\zeta), \tag{1}$$

kde $\varkappa$ je konstanta a $g(\zeta)$ je daná spojitá a jednoznačná funkce bodu na hranici. Budeme předpokládat, že tato funkce je dostatečně hladká.

V prvém problému

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu},\ g(\zeta) = 2\mu(u_x + iu_y);$$

v třetím je třeba položit

$$\varkappa = -1,\ g(\zeta) = -f(\zeta) - b_k.$$

O oblasti D budeme předpokládat, že je omezená.

Přistupme k řešení formulované krajové úlohy.

Často bývá užitečné konformně zobrazit oblast D na nějakou oblast D^*. Nechť $z = \omega(t)$ je funkce, realisující toto zobrazení. Označme

$$\varphi(\omega(t)) = \Phi(t),\ \psi(\omega(t)) = \Psi(t).$$

Dále nechť $\zeta = \omega(\tau)$ a $G(t) = g(\omega(t))$. Úloha se tedy převádí na určení $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ z krajové podmínky

$$\varkappa\,\Phi(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\overline{\Phi'(\tau)} - \overline{\Psi(\tau)} = G(\tau), \tag{1_1}$$

jež má být splněna na hranici γ oblasti D^*. Všimněme si, že $\Phi'(t)$ je jednoznačná v D^*. Odtud plyne, že funkce $\varkappa\,\Phi(t) - \overline{\Psi(t)}$ je také jednoznačná v D^*.

Skutečně z jednoznačnosti $\Phi'(t)$ a $G(t)$ plyne, že $\varkappa\,\Phi(t) - \overline{\Psi(t)}$ je jednoznačná na hranici. Odtud plyne, že tato funkce je jednoznačná i uvnitř oblasti, kde $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ nemají singulární body.

Podle věty 3, § 41 rovnice (1_1) je ekvivalentní těmto dvěma:

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \left\{\varkappa\,\Phi(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\overline{\Phi'(\tau)} - \overline{\Psi(\tau)}\right\} T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\gamma G(\tau)\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{2}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \left\{\varkappa\,\overline{\Phi(\tau)} - \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\,\Phi'(\tau) - \Psi(\tau)\right\} T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \overline{G(\tau)}\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

Zde je γ hranice oblasti D^*; $T(t, \tau)$ je Schwarzovo jádro této oblasti.

Rovnice (2) a (3) lze zjednodušit. Položme

$$\Phi(t) = p + iq, \quad \Psi(t) = p_1 + iq_1.$$

Harmonické funkce $\varkappa p - p_1 = \mathrm{Re}\{\varkappa\,\Phi(t) - \overline{\Psi(t)}\}$ a $\varkappa q + q_1 = \mathrm{Im}\{\varkappa\,.\,\Phi(t) - \overline{\Psi(t)}\}$ jsou jednoznačné v D^*. Na ně lze užít vzorců (17) a (17_1), § 41. Protože

$$\varkappa p - p_1 = \mathrm{Re}\{\varkappa\,\Phi(t) - \Psi(t)\}, \quad \varkappa q + q_1 = \mathrm{Im}\{\varkappa\,\Phi(t) + \Psi(t)\},$$

podle uvedených vzorců

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma (\varkappa p - p_1)\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = \varkappa\,\Phi(t) - \Psi(t) - i[\varkappa\,q(a) - q_1(a)],$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma (\varkappa q + q_1)\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{i}[\varkappa\,\Phi(t) + \Psi(t)] - \frac{1}{i}[\varkappa\,p(a) + p_1(a)].$$

Vynásobme druhou rovnici i. Přičteme-li a odečteme-li ji od prvé, dostaneme:

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma [\varkappa\,\Phi(\tau) - \overline{\Psi(\tau)}]\,T(t,\tau)\,\mathrm{d}\sigma = \varkappa\,\Phi(t) - \frac{1}{2}[\varkappa\,\Phi(a) + \overline{\Psi(a)}],$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma [\varkappa\,\overline{\Phi(\tau)} - \Psi(\tau)]\,T(t,\tau)\,d\sigma = -\Psi(t) + \frac{1}{2}[\varkappa\,\overline{\Phi(a)} + \Psi(a)].$$

Protože $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ jsou určeny až na aditivní konstantu, můžeme položit

$$\varkappa\,\Phi(a) + \overline{\Psi(a)} = 0.$$

Dosadíme-li nyní poslední dvě rovnice do (2) a (3) a označíme-li pro stručnost

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma G(\tau)\,T(t,\tau)\,d\sigma = A(t),\quad \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \overline{G(\tau)}\,T(t,\tau)\,d\sigma = -B(t), \tag{4}$$

dostaneme

$$\varkappa\,\Phi(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\overline{\Phi'(\tau)}\,T(t,\tau)\,d\sigma = A(t), \tag{5}$$

$$\Psi(t) + \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\,\Phi'(\tau)\,T(t,\tau)\,d\sigma = B(t). \tag{6}$$

Rovnice (6) přímo určuje $\Psi(t)$, jestliže je známa $\Phi'(\tau)$. Obraťme se proto k rovnici (5). Přepišme ji v tomto tvaru:

$$\begin{aligned}\varkappa\,\Phi(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t,\tau)\,\overline{\Phi'(\tau)}\,d\sigma - {}&\\ -\frac{\omega(t)}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t,\tau)\,d\sigma = A(t).&\end{aligned} \tag{7}$$

Funkce $\dfrac{\Phi'(t)}{\omega'(t)}$ je regulární v D^* a podle vzorce (23), § 41 máme

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t,\tau)\,d\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}.$$

Dosadíme-li toto do (7) a derivujeme-li podle t, dostaneme:

$$\varkappa\,\Phi'(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,T(t,\tau)\right]\overline{\Phi'(\tau)}\,d\sigma - \frac{1}{2}\,\omega'(t)\,\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}} = A'(t). \tag{8}$$

Určeme konstantu l z rovnice

$$l - \frac{1}{2\varkappa}\bar{l} = \frac{1}{2\varkappa}\,\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}} \tag{9}$$

a položme

$$\Phi'(t) = \vartheta(t) + l\,\omega'(t). \tag{10}$$

Dosadíme-li toto do (8), dostaneme rovnici pro novou neznámou $\vartheta(t)$:

$$\varkappa\,\vartheta(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau)\right]\overline{\vartheta(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma = A'(t). \tag{11}$$

Budeme předpokládat, že hranice γ je dostatečně hladká. Potom $A(t)$ a $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau)\right]$ jsou spojité uvnitř i na hranici oblasti. Předpokládejme, že t konverguje k nějakému bodu τ_0 na hranici. Provedeme-li v (11) limitní přechod, dostaneme integrální rovnici

$$\vartheta(\tau_0) - \frac{1}{4\pi\varkappa}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(\tau_0)}{\overline{\omega'(\tau)}} T(\tau_0, \tau)\right]\overline{\vartheta(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\varkappa} A'(\tau_0), \tag{12}$$

v níž neznámou je hodnota funkce $\vartheta(\tau)$ na hranici, při čemž $\vartheta(\tau)$ je regulární v D^*.

Rovnici (12) lze zjednodušit. Užijeme k tomu vzorce (14), § 41, z něhož lze lehce nahlédnout, že

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau)\right] = K(t, \tau) - \frac{\omega'(t)}{4\pi}\sum_{k=1}^{n} a_k(\tau)\lg(t - t_k),$$

kde $K(t; \tau)$ je v D^* regulární funkce t a t_k je bod uvnitř γ_k; γ_k je obraz L_k. Funkce $\dfrac{\vartheta(t)}{\omega'(t)}$ je regulární v D^* a podle vzorce (21), § 41

$$\int_\gamma a_k(\tau)\frac{\overline{\vartheta(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Pro $\vartheta(\tau)$ nyní dostaneme rovnici

$$\vartheta(\tau_0) - \frac{1}{\varkappa}\int_\gamma K(\tau_0, \tau)\,\overline{\vartheta(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\varkappa} A'(\tau_0). \tag{13}$$

Integrální rovnice (13) není Fredholmova, neboť za integračním znaménkem je $\overline{\vartheta(\tau)}$ a nikoliv $\vartheta(\tau)$. Lze ji však převést na soustavu dvou rovnic Fredholmova typu, jestliže oddělíme reálnou a imaginární část a za neznámé považujeme $\mathrm{Re}\{\vartheta(\tau)\}$ a $\mathrm{Im}\{\vartheta(\tau)\}$. Odtud plyne, že na rovnici (13) lze užít Fredholmovy alternativy.

§ 43. Vyšetřování integrální rovnice. Všimněme si především, že pravá strana rovnice (13) § 42 je jednoznačná v D^*. Skutečně v důsledku vzorce (14), § 41

$$A'(t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\gamma G(\tau)\frac{\partial T(t,\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\gamma G(\tau)\frac{\partial^2 M_0(t,\tau)}{\partial\nu\partial t}\,\mathrm{d}\sigma +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_\gamma \frac{G(\tau)}{(\tau-t)^2}\frac{\partial\tau}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t-t_k}\int\limits_\gamma a_k(\tau)\,G(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

a všechny tři členy napravo jsou jednoznačné a regulární v D^*.

Předpokládejme nyní, že rovnice (13), § 42 je rozřešena a hodnoty $\vartheta(\tau)$ na hranici jsou určeny. Táž rovnice dá potom analytické pokračování $\vartheta(t)$ uvnitř oblasti, totiž

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\varkappa}A'(t) + \frac{1}{\varkappa}\int\limits_\gamma K(t,\tau)\,\overline{\vartheta(\tau)}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Určeme nyní konstantu l ve vzorci (9), § 42. Položme v (10), § 42 $t = a$ a přejděme ke konjugovaným hodnotám. Potom dostaneme $\overline{\Phi'(a)} = \overline{\vartheta(a)} + \bar{l}\,\overline{\omega'(a)}$. Dosadíme-li toto do vzorce (9), § 42, dostaneme rovnici pro l:

$$\varkappa l - \bar{l} = \frac{1}{2}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \tag{1}$$

V prvém problému $\varkappa > 1$ a l je jednoznačně určeno rovnicí (1). V třetím problému $\varkappa = -1$ a rovnice (1) přejde v rovnici:

$$l + \bar{l} = -\frac{1}{2}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \tag{2}$$

Aby mohla být konstanta l v třetím problému určena, je nutné a stačí, aby veličina $\dfrac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ byla reálná. Jestliže je tato podmínka splněna, pak

$$\mathrm{Re}(l) = -\frac{1}{4}\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)} \tag{2_1}$$

a imaginární část l zůstává libovolnou. Funkce $\Phi'(t)$ je určena až na sčítanec tvaru $i\alpha\omega'(t)$, kde α je reálná konstanta.

Je-li určena $\Phi'(t)$, nalezneme ze vzorců (5) a (6), § 42 $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ a lehce se přesvědčíme, že tyto funkce jsou řešením naší úlohy.

Podmínka, že $\dfrac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ musí být reálná, je ekvivalentní podmínce:[1]

$$\int_L f_1\,dx + f_2\,dy = 0. \tag{3}$$

Dokažme to. V třetím problému

$$\varkappa = -1,\ g(\zeta) = -(f_1 + if_2)$$

a rovnice (12), § 42 nabývá tvaru

$$\left.\begin{aligned} \vartheta(\tau_0) + \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\,\overline{\vartheta(\tau)}\,d\sigma &= \lim_{t\to\tau_0} \frac{1}{4\pi} \int_\gamma F(\tau)\,\frac{\partial T(t, \tau)}{\partial t}\,d\sigma, \\ F(\tau) &= f_1 + if_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Řešme pomocnou úlohu: Určit analytické funkce $R(t)$ a $S(t)$ s jednoznačnou $R'(t)$, které nemají singulární body uvnitř D^* a vyhovují na γ rovnici

$$R(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\overline{R'(\tau)} + \overline{S(\tau)} = F(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{2}\,\overline{\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}}. \tag{5}$$

Upravujeme-li tuto rovnici obdobně jako rovnici (1), § 42, nalezneme:

$$S(t) + \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \overline{\frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}}\,R'(\tau)\,T(t, \tau)\,d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \overline{F(\tau)}\,T(t, \tau)\,d\sigma + \\ + \frac{\overline{\omega(a)}}{4}\,\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}, \tag{6}$$

$$R(t) + \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\overline{R'(\tau)}\,T(t, \tau)\,d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma F(\tau)\,T(t, \tau)\,d\sigma - \\ - \frac{\omega(a)}{4}\,\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}} + \frac{\omega(t)}{2}\,\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}, \tag{7}$$

$$R'(t) + \int_\gamma K(t, \tau)\,\overline{R'(\tau)}\,d\sigma + \frac{\omega'(t)}{2}\,\frac{\overline{R'(a)}}{\overline{\omega'(a)}} = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma F(\tau)\,\frac{\partial T(t, \tau)}{\partial t}\,d\sigma + \\ + \frac{\omega'(t)}{2}\,\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \tag{8}$$

---

[1] V problému II rovnice (3) značí, že se hlavní moment vnějších sil působících na hranici L rovná nule. Viz [28a].

Porovnáme-li (8) a (4), vidíme, že rovnici (8) vyhovuje $R'(t) = \vartheta(t)$. Určíme-li takto $R'(t)$, nalezneme z rovnic (6) a (7) $R(t)$ a $S(t)$.

Řešení pomocné úlohy tedy existuje. Označme nyní $R(t) = r(z)$, $S(t) = s(z)$, kde $z = \omega(t)$. Položme dále

$$s(z) = t'(z), \quad \mathrm{Re}\{\bar{z}\, r(z) + t(z)\} = w^*.$$

Rovnice (5) potom nabude tvaru (viz vzorec (2), § 40)

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} + i\frac{\partial w^*}{\partial y} = f_1 + if_2 + \frac{1}{2}z\,\overline{\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}}.$$

Vynásobme ji $\mathrm{d}\bar{z}$, zintegrujme podél L a na obou stranách nalezené rovnice vezměme pouze reálné části. Potom dostaneme

$$\int_L \mathrm{d}w^* = \int_L (f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y) - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overline{\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}}\right)\int_L (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y).$$

Avšak integrál nalevo se zřejmě rovná nule a druhý integrál napravo je dvojnásobná plocha S oblasti D. Odtud

$$\mathrm{Im}\left(\overline{\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}}\right) = \frac{1}{S}\int_L (f_1\,\mathrm{d}x + f_2\,\mathrm{d}y)$$

a naše tvrzení je dokázáno.

Všechny úvahy tohoto paragrafu byly učiněny za předpokladu, že integrální rovnice (13), § 42 má řešení. Dokažme nyní, že tento předpoklad je správný, že totiž rovnice je řešitelná, ať je na pravé straně cokoliv.

Na konci § 42 bylo uvedeno, že na rovnici (13), § 42 lze užít Fredholmovy alternativy. Stačí tedy dokázat, že příslušná homogenní rovnice má jediné řešení $\vartheta(\tau) \equiv 0$.

Položme $g(\zeta) \equiv 0$. Potom $A'(t) \equiv 0$ a rovnice (13), § 42 se stane homogenní. Nechť $\vartheta_0(\tau)$ je libovolné její řešení.

Všimněme si, že při třetím problému (pro $\varkappa = -1$) bude veličina $\dfrac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ reálná, neboť podmínka (3) je zřejmě splněna pro $f_1 + if_2 \equiv 0$. Pomocí známé funkce $\vartheta_0(\tau)$ nalezneme příslušné funkce $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$, jež řeší prvý nebo třetí problém s nulovými krajovými podmínkami.

Užijeme-li věty o jednoznačnosti, lehce zjistíme, že $\varphi_0'(z) \equiv 0$ v prvém problému a $\varphi_0'(z) = Ci$ (C je reálná konstanta) v třetím problému. V obou případech vzorce (9) a (10), § 42 dávají $\vartheta_0(z) \equiv 0$. Řešitelnost integrální rovnice (13), § 42 je tím dokázána.

Jestliže jsme rozřešili třetí biharmonický problém, jsme s to rozřešit i druhý problém, t. j. problém theorie pružnosti při daných vnějších silách působících na hranici. Jak to lze učinit, ukážeme níže na příkladech.

Týmž způsobem se řeší problémy theorie pružnosti i pro případ nekonečné oblasti. V § 46 na příkladu ukážeme, jak se změní shora uvedená methoda. Zde pouze poznamenáme, že podmínka (3) není nutná, jestliže oblast D je neomezená.

§ 44. Případ jednoduše souvislé oblasti. Objasněme, jak se změní integrální rovnice (13), § 42 v případě, že oblast D je jednoduše souvislá. Nechť funkce $z = \omega(t)$ konformně zobrazuje kruh $|t| < 1$ na oblast D. Položme ještě $\zeta = \omega(\tau)$. Potom se Schwarzovo jádro pro kruh $|t| < 1$, jak známo, rovná

$$T(t, \tau) = \frac{\tau + t}{\tau - t}. \tag{1}$$

Rovnice (5), § 42 nabývá tvaru

$$\varkappa \Phi(t) - \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \overline{\Phi'(\tau)} \frac{\tau + t}{\tau - t} \, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma G(\tau) \frac{\tau + t}{\tau - t} \, d\sigma.$$

Všimneme-li si, že na kružnici γ $d\sigma = \frac{d\tau}{i\tau}$, lehce převedeme poslední rovnici na tvar

$$\varkappa \Phi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\tau - t} \, d\tau + C' = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{G(\tau)}{\tau - t} \, d\tau + C'', \tag{2}$$

kde C' a C'' jsou konstanty, rovné

$$C' = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \overline{\Phi'(\tau)} \, d\sigma, \quad C'' = -\frac{1}{4\pi} \int_\gamma G(\tau) \, d\sigma.$$

Připočtěme a odečtěme $\omega(t)$ v čitateli integrálu na levé straně rovnice (2). Potom dostaneme

$$\varkappa\,\Phi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)(\tau-t)}\,\overline{\Phi'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau - \frac{\omega(t)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t} +$$

$$+ C' = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G(\tau)}{\tau-t}\,\mathrm{d}\tau + C''. \tag{3}$$

Podle vzorce (23), § 41

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\frac{\tau+t}{\tau-t}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t} = \frac{\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}$$

a rovnice (3) nabude tvaru

$$\varkappa\,\Phi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)(\tau-t)}\,\overline{\Phi'(\tau)}\,\mathrm{d}\tau - \frac{\omega(t)\,\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}} + C' = A(t) + C''. \tag{4}$$

Tentokrát jsme označili

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma G(\tau)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}.$$

Zderivujme (4) a položme jako v § 43

$$\Phi'(t) = \vartheta(t) + l\omega'(t),$$

kde l je určeno rovnicí

$$l = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}.$$

Tak dojdeme k rovnici

$$\vartheta(t) - \frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(t)-\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}(\tau-t)}\right]\overline{\vartheta(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = A'(t). \tag{5}$$

Jestliže v této rovnici chápeme t jako bod hranice a $A'(t)$ jako hodnotu této funkce na hranici, pak je to integrální rovnice pro neznámou $\vartheta(t)$. Tuto rovnici odvodil N. I. Muschelišvili.

Všimněme si důležité vlastnosti Muschelišviliho rovnice. Jestliže zobrazující funkce $\omega(t)$ je racionální, pak jádro rovnice (3) je degenerované. Vskutku, nechť $\omega(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$, kde $p(t)$ a $q(t)$ jsou polynomy. Potom

$$\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\tau-t} = \frac{p(\tau)\,q(t) - p(t)\,q(\tau)}{(\tau-t)\,q(t)\,q(\tau)}.$$

Čitatel se rovná nule pro $\tau = t$ a je proto dělitelný výrazem $\tau - t$. Podíl je polynom v proměnných t a τ. Napíšeme jej ve tvaru

$$\frac{p(\tau)\,q(t) - p(t)\,q(\tau)}{\tau - t} = \sum_{k=1}^{N} t^k\,q_k(\tau).$$

Jádro rovnice (3) má nyní tvar

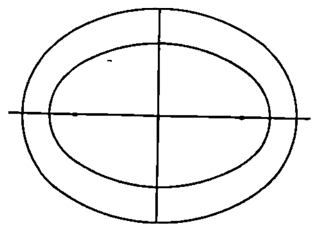
$$\frac{1}{\overline{\omega'(\tau)}}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\tau - t}\right] = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t^k}{q(t)}\right)\frac{q_k(\tau)}{q(\tau)\,\overline{\omega'(\tau)}} \tag{6}$$

a je jasné, že toto jádro je degenerované. Podle toho, co bylo dokázáno v § 4, je rovnice (3) řešitelná v uzavřeném tvaru.

Tak dostáváme větu N. I. Muschelišviliho: Jestliže je kruh zobrazen na oblast D racionální funkcí, je základní úloha theorie pružnosti pro tuto oblast řešitelná v konečném tvaru.

§ 45. Oblast mezi dvěma konfokálními elipsami. Uvažujme oblast ohraničenou konfokálními elipsami

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{a_0^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - c^2} = 1,$$



Obr. 9.

při čemž $a_0 > a_1$ (obr. 9). Nechť na hranici oblasti působí vnější síly, jejichž rozložení je nám známo. Pro jednoduchost předpokládejme, že hlavní vektor vnějších sil působících na každou elipsu zvlášť je roven nule. V tom případě jsou Goursatovy funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jednoznačné v oblasti (§ 40).

Integrujeme-li složky vnějších sil podél oblouku, dostaneme hodnoty derivací funkcí napětí; jsou při tom určeny až na aditivní konstanty, různé na L_0 a L_1. Zvolme je libovolně na L_0; na L_1 zůstanou zatím neurčeny. Označme $f(\zeta)$ veličinu

$$f(\zeta) = i \int (X_\nu + iY_\nu)\,\mathrm{d}s.$$

Potom Goursatovy funkce splňují na hranici rovnici

$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = \begin{cases} f(\zeta) & \text{na } L_0 \\ f(\zeta) + C & \text{na } L_1. \end{cases} \tag{1}$$

Oblast mezi konfokálními elipsami se zobrazí na mezikruží funkcí

$$z = \omega(t) = \frac{c}{2}\left(t\sqrt{\varrho_0\varrho_1} + \frac{1}{t\sqrt{\varrho_0\varrho_1}}\right), \tag{2}$$

kde

$$\varrho_0 = \frac{1}{c}\left(a_0 + \sqrt{a_0^2 - c^2}\right),\ \varrho_1 = \frac{1}{c}\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - c^2}\right).$$

Přitom L_0 a L_1 přejdou v kružnice

$$|t| = \frac{1}{\sqrt{q}},$$

resp.

$$|t| = \sqrt{q}, \tag{3}$$

kde

$$q = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}.$$

Tyto kružnice označme γ_0 a γ_1.

Označme nyní

$$\zeta = \omega(\tau),\ \varphi(\omega(t)) = \Phi(t),\ \psi(\omega(t)) = \Psi(t),\ f(\omega(t)) = F(t).$$

Kromě toho označíme B veličinu rovnou nule na γ_0 a C na γ_1. Transformujeme-li proměnné v (1), dostaneme

$$\Phi(\tau) + \frac{\tau\sqrt{\varrho_0\varrho_1} + \dfrac{1}{\tau\sqrt{\varrho_0\varrho_1}}}{\sqrt{\varrho_0\varrho_1} - \dfrac{1}{\tau^2\sqrt{\varrho_0\varrho_1}}}\overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = F(\tau) + B. \tag{4}$$

Pro kruhové mezikruží je komplexní Greenova funkce známa,[1] totiž

$$M(t, \tau) = -\frac{1}{4}\lg q + \left(\frac{1}{2} + \frac{\lg|\tau|}{\lg q}\right)\lg t + \frac{1}{2}\lg\tau - \lg(\tau - t) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty}\lg\left(1 - q^{2n}\frac{t}{\tau}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\lg\left(1 - q^{2n}\frac{\tau}{t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\lg\left(1 - q^{2n-1}t\bar{\tau}\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\lg\left(1 - \frac{q^{2n-1}}{t\bar{\tau}}\right) - \alpha(\tau), \tag{5}$$

[1] Viz na př. [4] a [24]. Ve výraze pro komplexní Greenovu funkci ve [4] je chyba.

kde $\alpha(\tau)$ je třeba určit tak, aby se imaginární část $M(t, \tau)$ v nějakém bodě a mezikruží rovnala nule.

Z (5) plyne výraz pro Schwarzovo jádro:

$$T(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{2} + \frac{\lg|\tau|}{\lg q}\right)\lg t - \frac{1}{\tau - t}\frac{\partial \tau}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{2}\lg \tau - \alpha(\tau)\right) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}\dfrac{t}{\tau}}\frac{t}{\tau^2}\frac{\partial \tau}{\partial \nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}\dfrac{\tau}{t}}\frac{1}{t}\frac{\partial \tau}{\partial \nu} -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}t\bar{\tau}}t\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - \dfrac{q^{2n-1}}{t\bar{\tau}}}\frac{1}{t\bar{\tau}^2}\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu}. \tag{6}$$

Poznamenejme, že funkce

$$\frac{1}{2} + \frac{\lg|\tau|}{\lg q} = b_1(\tau)$$

je harmonická v mezikruží, rovna nule na vnější kružnici a jednotce na kružnici vnitřní; její normální derivace, kterou v souhlase s § 41 označíme $a_1(\tau)$, je orthogonální ke každé funkci, regulární v mezikruží.

Vzorec (6) poněkud upravíme. Především

$$\frac{\partial \tau}{\partial \nu}\,\mathrm{d}\sigma = i\,\mathrm{d}\tau, \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu}\,\mathrm{d}\sigma = -i\,\mathrm{d}\bar{\tau}.$$

Oddělme nyní v (6) členy, jež obsahují rozdíl $t - \tau$ ve jmenovateli. Uvažujme prvé sčítance ve třetím a čtvrtém součtu:

$$A = -\frac{q}{1 - qt\bar{\tau}}t\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu} + \frac{q}{1 - \dfrac{q}{t\bar{\tau}}}\frac{1}{t\bar{\tau}^2}\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \nu} = iq\frac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{1}{1 - qt\bar{\tau}} - \frac{1}{\bar{\tau}(t\bar{\tau} - q)}\right).$$

Na kružnici γ_1 $\bar{\tau} = \dfrac{q}{\tau}$, a tedy

$$A = -\frac{iq^2}{\tau^2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{t\tau}{\tau - q^2 t} - \frac{\tau^2}{q^2(t - \tau)}\right) = -i\left[\frac{1}{\tau - t} + \frac{q^2 t}{\tau(\tau - q^2 t)}\right]\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Úplně obdobně nalezneme, že na γ_0, kde $\bar{\tau} = \dfrac{1}{q\tau}$,

$$A = -i\left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{t}{\tau(t - q^2\tau)}\right]\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Definujme funkci $p(t, \tau)$ vztahy

$$p(t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{-iq^2t}{\tau(\tau - q^2t)} & \text{na } \gamma_1, \\ \dfrac{it}{\tau(t - q^2\tau)} & \text{na } \gamma_0. \end{cases} \tag{7}$$

Potom

$$A = \frac{1}{i(\tau - t)}\frac{d\tau}{d\sigma} + p(t, \tau)\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Nyní

$$T(t, \tau) = a_1(\tau)\lg t + \frac{2}{i(\tau - t)}\frac{d\tau}{d\sigma} + p(t, \tau)\frac{d\tau}{d\sigma} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}\lg\tau - \alpha(\tau)\right) - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{\tau - q^{2n}t}\frac{t}{\tau}\frac{d\tau}{d\sigma} + \tag{8}$$

$$+ i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{t - q^{2n}\tau}\frac{d\tau}{d\sigma} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}t}{1 - q^{2n+1}t\bar\tau}\frac{d\bar\tau}{d\sigma} - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{\bar\tau(t\bar\tau - q^{2n+1})}\frac{d\bar\tau}{d\sigma}.$$

Určeme nyní jádro $K(t, \tau)$. Máme

$$\omega(\tau) - \omega(t) = \frac{c(\tau - t)}{2\sqrt{\varrho_0\varrho_1}}\frac{\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1}{t\tau}.$$

Odtud

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t, \tau)\right] = -\frac{\omega'(t)}{\omega'(\tau)}a_1(\tau)\lg t + \frac{2}{i}\frac{\bar\tau^2}{t^2\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}\frac{d\tau}{d\sigma} +$$

$$+ \frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar\tau^2}{t^2\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}a_1(\tau) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar\tau^2}{t\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}p(t, \tau)\right]\frac{d\tau}{d\sigma} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar\tau^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}\right]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}\lg\tau - \alpha(\tau)\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar\tau^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}\left[-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}t}{\tau(\tau - q^{2n}t)}\frac{d\tau}{d\sigma} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{t - q^{2n}\tau}\frac{d\tau}{d\sigma} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}t}{1 - q^{2n+1}t\bar\tau}\frac{d\bar\tau}{d\sigma} - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{\bar\tau(t\bar\tau - q^{2n+1})}\frac{d\bar\tau}{d\sigma}\right]\right\}$$

a

$$K(t, \tau)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi i}\frac{\bar\tau^2}{t^2\,\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar\tau^2}{t^2\,\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}\,a_1(\tau)\,\mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar\tau^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}\,p(t, \tau)\right]\mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar\tau^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}\right]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}\lg\tau - \alpha(\tau)\right) +$$

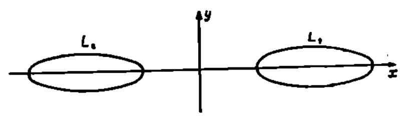
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(\tau - t)(\varrho_0\varrho_1 t\tau - 1)\,\bar\tau^2}{t\,\tau(\varrho_0\varrho_1\bar\tau^2 - 1)}\left[-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}t\,\mathrm{d}\tau}{\tau(\tau - q^{2n}t)} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\,\mathrm{d}\tau}{t - q^{2n}\tau} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}t\,\mathrm{d}\bar\tau}{1 - q^{2n+1}t\bar\tau} - i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}\,\mathrm{d}\bar\tau}{\bar\tau(t\bar\tau - q^{2n+1})}\right]\right\}. \qquad (9)$$

Rozviňme $K(t, \tau)$ v Laurentovu řadu vzhledem k t. Ponecháme-li v této řadě pouze konečný počet členů, nahradíme přibližně jádro $K(t, \tau)$ degenerovaným. Tím najdeme přibližné řešení naší úlohy.

Nedostatek místa nám nedovoluje podrobněji se zastavit u tohoto přibližného řešení. Poznamenejme pouze, že řešíme-li integrální rovnici, dostaneme $\Phi'(t)$ ve tvaru Laurentovy řady (konečné, jestliže jádro (9) bylo nahrazeno degenerovaným). Konstantu C ve vzorci (1) zvolíme nyní tak, aby ve výrazu $\Phi'(t)$ zmizel člen obsahující $\frac{1}{t}$. Při takové volbě bude $\Phi(t)$ a tedy i $\varphi(z)$ jednoznačná. Tím bude zajištěna jednoznačnost posunutí.

§ 46. Vnějšek dvou oválů. V tomto paragrafu formulujeme a řešíme druhý problém theorie pružnosti pro oblast D, kterou dostaneme z roviny odstraněním dvou oválů (obr. 10).



Obr. 10.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že se hlavní vektor vnějších sil působících na každé z křivek L_1 a L_2 rovná nule. Máme určit funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, regulární vně vyňatých oválů L_1 a L_2 a vyhovující krajové podmínce

$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = \begin{cases} f(\zeta) & \text{na } L_1, \\ f(\zeta) + C & \text{na } L_2, \end{cases} \qquad (1)$$

O oválech L_1 a L_2 učiníme předpoklad sloužící k zjednodušení řešení naší úlohy.

Rovina, rozdělená řezy $(-b, -a)$ a (a, b) na reálné ose, se zobrazuje na kruhovém mezikruží

$$\sqrt{q} < |t| < \frac{1}{\sqrt{q}}$$

pomocí funkce

$$t = \exp\left\{\frac{\pi b}{K'} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}\right\}.^{1} \tag{2}$$

Zde jsme položili

$$q = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi K}{K'}}, \quad K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2 z^2)}}$$

a $k = \frac{a}{b}$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Za ovály L_1 a L_2 zvolíme křivky, ve které při zobrazení (2) přejdou kružnice $|t| = q_1^{-\frac{1}{2}}$ a $|t| = q_1^{\frac{1}{2}}$, kde q_1 je číslo větší než q a jemu dostatečně blízké. Funkce (2) zobrazuje oblast D na mezikruží

$$q_1^{\frac{1}{2}} \leqq |t| \leqq q_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Řešíme-li rovnici (2) pro neznámou z, dostaneme

$$z = \omega(t) = a \operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi} \lg t\right),$$

kde sn je eliptická funkce Jacobiho. Položíme-li v (1) $\zeta = \omega(t)$ a užijeme-li našich obvyklých označení, dostaneme tutéž krajovou podmínku jako v předcházejícím paragrafu:

$$\Phi(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = \begin{cases} F(\tau) & \text{na } \gamma_1, \\ F(\tau) + C & \text{na } \gamma_2; \end{cases} \tag{3}$$

[1] Viz na př. [24]. Užíváme zde označení $\exp u = \mathrm{e}^u$.

γ_1 a γ_2 značí kružnice $|\tau| = q_1^{-\frac{1}{2}}$ a $|\tau| = q_1^{\frac{1}{2}}$. Obvyklým způsobem dostaneme rovnice

$$\Phi(t) + \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \overline{\Phi'(\tau)}\, T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma F(\tau)\, T(t, \tau)\, d\sigma + $$
$$+ \frac{C}{4\pi} \int_{\gamma_1} T(t, \tau)\, d\sigma, \tag{4}$$

$$\Psi(t) + \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} \Phi'(\tau)\, T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \overline{F(\tau)}\, T(t, \tau)\, d\sigma + $$
$$+ \frac{\overline{C}}{4\pi} \int_{\gamma_2} T(t, \tau)\, d\sigma. \tag{5}$$

Zde Γ značí celou hranici mezikruží.

Jako v obecném případě rovnice (5) přímo určuje $\Psi(t)$, jestliže $\Phi'(t)$ je známa, a stačí vyšetřovat pouze rovnici (4).

Poznamenejme nyní: Protože oblast D je neomezená, funkce $z = \omega(t)$ nabývá uvnitř mezikruží nekonečné hodnoty (a to $\omega(-1) = \infty$) a je v něm tedy neregulární. Jestliže v rovnici (5) provedeme tytéž úpravy, jichž jsme užili v § 42, dojdeme nakonec k rovnici (viz (11), § 42)

$$\vartheta(t) + \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau) \right] \overline{\vartheta(\tau)}\, d\sigma = A'(t). \tag{6}$$

Avšak řešíme-li ji, neřešíme tím naší úlohu. Vskutku určíme-li ze (6) hodnoty $\vartheta(\tau)$ na hranici, pomocí téže rovnice (6) analyticky pokračujeme $\vartheta(t)$ dovnitř mezikruží. Přitom, vzhledem ke sčítanci $-\omega(t)$ v integrandu, bude $\vartheta(t)$ obecně neregulární v mezikruží a proto nevhodná pro řešení problému z theorie pružnosti.

Rovnici (4) upravíme tak, že v ní položíme $t = -1$ a výsledek odečteme od (4). Dostaneme rovnici:

$$\Phi(t) - \Phi(-1) + \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)]\, \overline{\Phi'(\tau)}\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma F(\tau)[T(t, \tau) - T(-1, \tau)]\, d\sigma + \frac{C}{4\pi} \int_{\gamma_1} [T(t, \tau) - T(-1, \tau)]\, d\sigma. \tag{7}$$

V čitateli integrandu nalevo odečteme a přičteme $\omega(t)$. Všimněme si, že

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma [T(t,\tau) - T(-1,\tau)]\, \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, d\sigma = 0. \tag{8}$$

Funkce $\dfrac{\Phi'(t)}{\omega'(t)}$ je regulární v mezikruží a podle vzorce (23), § 41

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma T(t,\tau)\, \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, d\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}.$$

Tato identita je správná pro libovolné t uvnitř mezikruží. Speciálně pro $t = -1$

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma T(-1,\tau)\, \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, d\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}.$$

Odečteme-li toto od předcházející rovnice, dostaneme rovnici (8).

Rovnice (7) nabývá nyní tvaru:

$$\Phi(t) - \Phi(-1) + \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,[T(t,\tau) - T(-1,\tau)]\,\overline{\Phi'(\tau)}\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma F(\tau)[T(t,\tau) - T(-1,\tau)]\, d\sigma + \frac{C}{4\pi}\int_{\gamma_2} [T(t,\tau) - T(-1,\tau)]\, d\sigma.$$

V této rovnici je jádro integrálu nalevo regulární v mezikruží. Derivujeme-li podle t, dostaneme:

$$\Phi'(t) + \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\,[T(t,\tau) - T(-1,\tau)]\right\}\overline{\Phi'(\tau)}\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_\Gamma F(\tau)\, T(t,\tau)\, d\sigma + \frac{C}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_{\gamma_2} T(t,\tau)\, d\sigma. \tag{9}$$

Schwarzovo jádro $T(t,\tau)$ pro mezikruží je určeno vzorcem (8), § 45, v němž je pouze třeba místo q psát q_1.

Stejně jako v případě omezené oblasti lze v (9) nalevo zanedbat v integrandu člen obsahující funkci

$$a_1(\tau)\lg t = \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2} + \frac{\lg|\tau|}{\lg q_1}\right)\lg t.$$

Zbývající část jádra označme $K(t, \tau)$. Tak dojdeme k rovnici pro neznámou $\Phi'(t)$:

$$\Phi'(t) + \int_\Gamma K(t, \tau)\, \overline{\Phi'(\tau)}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Gamma F(\tau)\, T(t, \tau)\, \mathrm{d}\sigma + \\ + \frac{C}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\gamma_2} T(t, \tau)\, \mathrm{d}\sigma, \tag{10}$$

jejíž jádro jako funkce t je regulární uvnitř Γ.

Označme

$$\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma F(\tau) T(t, \tau)\, \mathrm{d}\sigma = A(t).$$

Druhý integrál napravo v (10) se vypočte lehce, neboť integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} T(t, \tau)\, \mathrm{d}\sigma$$

je analytická funkce uvnitř Γ, jejíž reálná část se rovná jedné na γ_2 a nule na γ_1. Týmž podmínkám vyhovuje funkce

$$\frac{\lg t}{\lg q_1} + \frac{1}{2}$$

a poslední integrál se od ní může lišit pouze čistě imaginární aditivní konstantou:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} T(t, \tau)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{\lg t}{\lg q_1} + \tfrac{1}{2} + i\alpha. \tag{11}$$

Dosaďme toto do (10). Necháme-li $t \to \tau_0$, kde τ_0 je bod na Γ, dostaneme integrální rovnici

$$\Phi'(\tau_0) + \int_\Gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\Phi'(\tau)}\, \mathrm{d}\sigma = A'(\tau_0) + \frac{C}{2\tau_0 \lg q_1}. \tag{12}$$

Stejně jako v případě omezené oblasti lze dokázat, že rovnice (12) má vždy řešení. Při řešení je třeba zvolit C tak, aby v Laurentově rozvoji funkce $\Phi'(t)$ nebyl člen obsahující $\frac{1}{t}$. Potom $\Phi(t)$ bude jednoznačná v mezikruží a naše úloha bude rozřešena.

Abychom prakticky řešili rovnici (12), lze rozvinout $K(t, \tau)$ v Laurentovu řadu a ponechat z ní konečný počet členů. Ve článcích [24] a [25] je rovnice (12) řešena v tom případě, kdy jsou q a q_1 velmi malé, takže lze zanedbat vyšší mocniny těchto čísel, než je prvá. V uvedených článcích je funkce $f(\zeta)$ dána výrazem

$$f(\zeta) = \tfrac{1}{2}h[(1 + n)\,\zeta + (1 - n)\,\bar{\zeta}], \tag{13}$$

kde h a n jsou konstanty. Na tento případ vede úloha o tlaku horniny na nadloží dvou slojí.

Naznačme stručně toto řešení. Nebudeme zde provádět podrobné výpočty a uvedeme většinou pouze výsledky. Především se dá $\omega(t)$ uvnitř Γ rozvinout v řadu

$$\omega(t) = \frac{\pi b}{K'}\left[-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q^m}{1+q^m}\left(t^m - \frac{1}{t^m}\right)\right] =$$
$$= -\frac{\pi b}{K'(t+1)} + \omega_0(t). \tag{14}$$

Dále, klademe-li v (13) $\zeta = \omega(\tau)$, dostaneme

$$F(\tau) = \tfrac{1}{2}h(1 + n)\,\omega(\tau) + \tfrac{1}{2}h(1 - n)\,\overline{\omega(\tau)}$$

a

$$A(t) = \frac{h}{2}(1+n)\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \omega_0(\tau)\,T(t, \tau)\,\mathrm{d}\sigma +$$
$$+ \frac{h}{2}(1-n)\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \overline{\omega_0(\tau)}\,T(t, \tau)\,\mathrm{d}\sigma - \tag{15}$$
$$- \frac{bh}{8K'}\left\{(1+n)\int_\Gamma \frac{1}{1+\tau}T(t, \tau)\,\mathrm{d}\sigma + (1-n)\int_\Gamma \frac{1}{1+\bar{\tau}}T(t, \tau)\,\mathrm{d}\sigma\right\}.$$

Funkce $\omega_0(t)$ je regulární uvnitř Γ a prvé dva integrály v (15) se vypočtou přímo na základě vzorců (22) a (23), § 41. Obtížnější je výpočet druhých dvou integrálů. Provedeme-li tyto výpočty a ponecháme-li pouze členy s nižšími mocninami, dostaneme výraz pro pravou stranu v (12)

$$A'(t) + \frac{C}{2t\lg q_1} = -\frac{h\pi b}{2K'}\Big\{[(1 + n)\,q + (1 - n)\,q_1] + [(1 + n)\,q +$$
$$+ (1 - n)\,q_1]\frac{1}{t^2} - 2[(1 + n)q^2 + (1 - n)q_1^2]\left(t + \frac{1}{t^3}\right) + 3[(1 + n)\,q^3 +$$

$$+ (1 - n)\, q_1^3]\, t^2 + 3[(1 + n)\, q^3 + (1 - n)\, q_1^3]\, \frac{1}{t^4} + \frac{1 - C_0}{t \lg q_1}\Big\};$$

$$C_0 = \frac{CK'}{h\pi b}. \tag{16}$$

Ponecháme-li v jádře $K(t, \tau)$ pouze nižší členy, nahradíme (12) rovnicí s degenerovaným jádrem:

$$\Phi'(\tau_0) + \frac{ib}{4K'} \int_\Gamma \left(\frac{2q}{\tau + 1} + \frac{q_1^2}{\tau(\tau + 1)}\right) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, d\tau -$$

$$- \frac{ib}{4K'} \int_{\gamma_2} \frac{q_1^2}{\tau^2(\tau + 1)} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, d\tau - \frac{ib}{4K'\tau_0 \lg q_1} \int_\Gamma \left(\frac{1}{\tau + 1} - \frac{1}{2} + q\tau -\right.$$

$$\left. - \frac{q}{\tau} - q^2\tau^2 + \frac{q^2}{\tau^2} + q^3\tau^3 - \frac{q^3}{\tau^3}\right) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\tau\, \overline{\omega'(\tau)}}\, d\sigma - \frac{ib}{4K'\tau_0^2} \int_\Gamma \left(\frac{2q(1 - q)}{\tau(\tau + 1)} -\right.$$

$$\left. - \frac{2q^2(1 - q)}{\tau^2(\tau + 1)} + \frac{2q^3}{\tau^3(\tau + 1)} + \frac{qq_1^2}{\tau^2} + \frac{q_1^2\tau}{\tau + 1}\right) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, d\tau +$$

$$+ \frac{ib}{4K'\tau_0^2} \int_{\gamma_2} \frac{qq_1^2}{\tau^2} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, d\tau + \frac{ib}{4K'\tau_0^3} \int_\Gamma \left(\frac{4q^2(1 - q)}{\tau(\tau + 1)} -\right.$$

$$\left. - \frac{4q^3}{\tau^2(\tau + 1)}\right) \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, d\tau - \frac{ib}{4K'\tau_0^4} \int_\Gamma \frac{6q^3}{\tau(\tau + 1)} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\, d\tau = B(\tau_0). \tag{17}$$

Pro stručnost jsme označili $B(\tau_0)$ veličinu (16). Z rovnice (17) je patrno, že

$$\Phi'(\tau_0) = B(\tau_0) + D_0 + \frac{D_1}{\tau_0} + \frac{D_2}{\tau_0^2} + \frac{D_3}{\tau_0^3} + \frac{D_4}{\tau_0^4}. \tag{18}$$

Dosadíme-li toto do (17) a porovnáme-li koeficienty při stejných mocninách τ_0, dostaneme soustavu pěti rovnic s neznámými $D_0, \ldots, D_4$. K nim je třeba připojit šestou rovnici

$$D_1 - \frac{h\pi b}{2K' \lg q_1} (1 - C_0) = 0,$$

jež vyjadřuje, že $\Phi'(t)$ neobsahuje člen s $\frac{1}{t}$.

Řešíme-li uvedenou soustavu, najdeme

$$D_0 = D_2 = D_3 = D_4 = 0,$$

$$D_1 = \frac{h\pi^4 b^2 q}{4aK'(1+k)\,q_1 \lg q_1}[(1+n)\,q + (1-n)\,q_1],$$

$$C_0 = 1 - \frac{\pi^3 bq[(1+n)\,q + (1-n)\,q_1]}{2a(1+k)\,q_1}.$$

Odtud plyne, že přibližné řešení rovnice (12) zní:

$$\Phi'(t) = -\frac{h\pi b}{2K'}\left\{[(1+n)\,q + (1-n)\,q_1]\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - 2[(1+n)\,q^2 + \right.$$

$$\left. + (1-n)\,q_1^2]\left(t + \frac{1}{t^3}\right) + 3[(1+n)\,q^3 + (1-n)\,q_1^3]\left(t^2 + \frac{1}{t^4}\right)\right\}.$$

§ 47. O konvergenci postupných aproximací. Integrální rovnice (13), § 42, jak už jsme uvedli, je ekvivalentní soustavě dvou rovnic Fredholmova typu. Abychom sestavili tuto soustavu, položme

$$\vartheta(\tau) = p(\tau) + i\,q(\tau),\ K(\tau_0, \tau) = R(\tau_0, \tau) + i\,S(\tau_0, \tau),$$
$$\frac{1}{\varkappa}A'(\tau) = A_1(\tau) + i\,A_2(\tau);\ \frac{1}{\varkappa} = \lambda. \tag{1}$$

Oddělíme-li nyní v (13), § 42 reálnou a imaginární část, dostaneme uvedenou soustavu:

$$p(\tau_0) - \lambda \int_\gamma \{R(\tau_0, \tau)\,p(\tau) + S(\tau_0, \tau)\,q(\tau)\}\,d\sigma = A_1(\tau_0),$$
$$q(\tau_0) - \lambda \int_\gamma \{S(\tau_0, \tau)\,p(\tau) - R(\tau_0, \tau)\,q(\tau)\}\,d\sigma = A_2(\tau_0). \tag{2}$$

O soustavě (2) dokážeme následující větu.[1]

Věta 1. *Všechna charakteristická čísla soustavy* (2) *jsou reálná a jejich absolutní hodnoty jsou větší než jedna.*

Fredholmova alternativa nám dovoluje nahradit tvrzení vyslovené ve větě 1 tvrzením, jež také budeme dokazovat:

Jestliže λ je buď číslo komplexní, nebo číslo reálné, jehož absolutní hodnota není větší než jedna, má homogenní soustava

---

[1] Pro případ jednoduše souvislé oblasti dokázal tuto větu D. I. Šerman [37e]; jeho důkaz lze snadno přenést i na případ mnohonásobně souvislé oblasti.

$$p(\tau_0) - \lambda \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q(\tau)]\, d\sigma = 0,$$
$$q(\tau_0) - \lambda \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q(\tau)]\, d\sigma = 0 \tag{3}$$

pouze triviální řešení $p(\tau) \equiv 0,\ q(\tau) \equiv 0.$

Předpokládejme nejdříve, že λ je reálné. Potom $|\lambda| \leqq 1$. Vynásobme druhou rovnici (3) i a přičtěme k prvé. Označme ještě $p(\tau) + iq(\tau) = \vartheta(\tau)$. Potom

$$\vartheta(\tau_0) - \lambda \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta(\tau)}\, d\sigma = 0. \tag{4}$$

Mohou nastat tyto případy:

a) $0 < \lambda < 1$. Rovnice (2) potom odpovídá prvému biharmonickému problému pro nulová posunutí na hranici a pro koeficient $\varkappa = \frac{1}{\lambda}$. Podle toho, co bylo dokázáno v § 43, má rovnice (4) a s ní i soustava (3) pouze triviální řešení.

b) $\lambda = -1$. Rovnice (4) odpovídá třetímu biharmonickému problému s nulovými hodnotami derivací hledané biharmonické funkce na hranici a uvedená rovnice má opět pouze triviální řešení.

c) Jestliže $-1 < \lambda < 0$ nebo $\lambda = 1$, položme $\lambda = -\lambda^*$, $\vartheta(\tau) = i\,\vartheta^*(\tau)$. Rovnice (4), jestliže krátíme i, přejde v

$$\vartheta^*(\tau_0) - \lambda^* \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta^*(\tau)}\, d\sigma = 0. \tag{5}$$

Zde je buď $0 < \lambda^* < 1$, nebo $\lambda^* = -1$. V důsledku a) a b) má rovnice (5) pouze triviální řešení $\vartheta^*(\tau) \equiv 0$. Avšak potom $\vartheta(\tau) \equiv 0$, $p(\tau) = q(\tau) \equiv 0$.

Nechť je nyní číslo λ komplexní: $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ a $\lambda_2 \neq 0$. Funkce $p(\tau)$ a $q(\tau)$ vyhovující soustavě (3) budou v tomto případě také obecně komplexní. Položme $p(\tau) = p_1(\tau) + i\, p_2(\tau)$, $q(\tau) = q_1(\tau) + i\, q_2(\tau)$. Oddělíme-li v (3) reálnou a imaginární část, dojdeme k soustavě čtyř integrálních rovnic:

$$p_1(\tau_0) - \lambda_1 \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p_1(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q_1(\tau)]\, d\sigma +$$
$$+ \lambda_2 \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p_2(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q_2(\tau)]\, d\sigma = 0, \tag{6}$$
$$p_2(\tau_0) - \lambda_2 \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p_1(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q_1(\tau)]\, d\sigma -$$

$$- \lambda_1 \int_\gamma [R(\tau_0, \tau)\, p_2(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q_2(\tau)]\, d\sigma = 0,$$

$$q_1(\tau_0) - \lambda_1 \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p_1(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q_1(\tau)]\, d\sigma +$$

$$+ \lambda_2 \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p_2(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q_2(\tau)]\, d\sigma = 0, \tag{6}$$

$$q_2(\tau_0) - \lambda_2 \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p_1(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q_1(\tau)]\, d\sigma -$$

$$- \lambda_1 \int_\gamma [S(\tau_0, \tau)\, p_2(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q_2(\tau)]\, d\sigma = 0.$$

Třetí a čtvrtou rovnici této soustavy násobme i a přičtěme k prvé resp. k druhé rovnici. Zavedeme-li nová označení

$$p_1(\tau) + i\, q_1(\tau) = \vartheta_1(\tau), \quad p_2(\tau) + i\, q_2(\tau) = \vartheta_2(\tau),$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\tau_0) - \lambda_1 \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta_1(\tau)}\, d\sigma + \lambda_2 \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta_2(\tau)}\, d\sigma = 0, \\ \vartheta_2(\tau_0) - \lambda_2 \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta_1(\tau)}\, d\sigma - \lambda_1 \int_\gamma K(\tau_0, \tau)\, \overline{\vartheta_2(\tau)}\, d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Vyšetřujme podrobněji soustavu (7). Jádro $K(t, \tau)$ je regulární v oblasti D^*; odtud plyne, že funkce $\vartheta_1(\tau_0)$ a $\vartheta_2(\tau_0)$, vyhovující soustavě (7), lze analyticky pokračovat dovnitř D^* a že jsou v této oblasti regulární. Avšak v tomto případě jsou orthogonální k funkcím $a_k(\tau)$.

Připomeneme-li si vzorec (§ 42)

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau) \right] = K(t, \tau) - \frac{\omega'(t)}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} a_k(\tau) \lg(t - t_k),$$

přesvědčíme se o tom, že

$$\int_\gamma K(t, \tau)\, \overline{\vartheta_j(\tau)}\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau) \right] \overline{\vartheta_j(\tau)}\, d\sigma, \quad j = 1, 2.$$

Dosadíme toto do (7) a takto nalezené rovnice, na základě analytického pokračování, napíšeme pro vnitřní bod t oblasti D^*:

$$\vartheta_1(t) - \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau) \right] [\lambda_1 \overline{\vartheta_1(\tau)} - \lambda_2 \overline{\vartheta_2(\tau)}]\, d\sigma = 0,$$

$$\vartheta_2(t) - \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}\, T(t, \tau) \right] [\lambda_2 \overline{\vartheta_1(\tau)} + \lambda_1 \overline{\vartheta_2(\tau)}]\, d\sigma = 0.$$

Označme $\Theta_1(t)$ a $\Theta_2(t)$ neurčité integrály funkcí $\vartheta_1(t)$ a $\vartheta_2(t)$. Integrujme poslední rovnice vzhledem k t. Zvolíme-li vhodným způsobem libovolné konstanty, až na které jsou určeny $\Theta_1(t)$ a $\Theta_2(t)$, dostaneme

$$\begin{aligned}\Theta_1(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau)[\lambda_1 \overline{\Theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\Theta_2'(\tau)}]\, d\sigma &= 0,\\ \Theta_2(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau)[\lambda_2 \overline{\Theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\Theta_2'(\tau)}]\, d\sigma &= 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Poslední rovnice lze zjednodušit. Vskutku podle vzorce (23), § 41

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\lambda_1 \overline{\Theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\Theta_2'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{2}\, \frac{\lambda_1 \overline{\Theta_1'(a)} - \lambda_2 \overline{\Theta_2'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\lambda_2 \overline{\Theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\Theta_2'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau)\, d\sigma = \frac{1}{2}\, \frac{\lambda_2 \overline{\Theta_1'(a)} + \lambda_1 \overline{\Theta_2'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}. \tag{10}$$

Konstanty na pravých stranách v (9) a (10) označme k_1 a k_2. Nyní lze rovnice (8) napsat takto:

$$\begin{aligned}\Theta_1(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau)[\lambda_1 \overline{\Theta_1'(\tau)} - \lambda_2 \overline{\Theta_2'(\tau)}]\, d\sigma + k_1\, \omega(t) &= 0\\ \Theta_2(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} T(t, \tau)\, [\lambda_2 \overline{\Theta_1'(\tau)} + \lambda_1 \overline{\Theta_2'(\tau)}]\, d\sigma + k_2\, \omega(t) &= 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Předpokládejme, že $\omega(a) = 0$. Tím je určena pouze volba počátku v rovině t. Definujme nyní nové analytické funkce $\Psi_1(t)$ a $\Psi_2(t)$ vzorci

$$\begin{aligned}\Psi_1(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} T(t, \tau)[\lambda_1 \Theta_1'(\tau) - \lambda_2 \Theta_2'(\tau)]\, d\sigma &= 0,\\ \Psi_2(t) - \frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} T(t, \tau)[\lambda_2 \Theta_1'(\tau) + \lambda_1 \Theta_2'(\tau)]\, d\sigma &= 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Lze přímo ověřit, že funkce $\Theta_1(t) + \overline{\Psi_1(t)}$ a $\Theta_2(t) + \overline{\Psi_2(t)}$ jsou jednoznačné v D^*. Dále z (11) a (12) plyne, že na γ jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned} \Theta_1(\tau) &- \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}[\lambda_1\overline{\Theta_1'(\tau)} - \lambda_2\overline{\Theta_2'(\tau)}] + \overline{\Psi_1(\tau)} + k_1\,\omega(\tau) = 0,\\ \Theta_2(\tau) &- \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}[\lambda_2\overline{\Theta_1'(\tau)} + \lambda_1\overline{\Theta_2'(\tau)}] + \overline{\Psi_2(\tau)} + k_2\,\omega(\tau) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

O tom se lze okamžitě přesvědčit, aplikujeme-li na každou z rovnic (13) větu 3, § 41. Potom dostaneme rovnici (11) a (12).

Položme

$$\Theta_j(t) = \Phi_j(t) + a_j\,\omega(t),\ j = 1, 2 \tag{14}$$

a zvolme a_1 a a_2 tak, aby v (13) vymizely členy, jež obsahují $\omega(\tau)$. Aby tomu tak bylo, musí a_1 a a_2 vyhovovat soustavě rovnic

$$\begin{aligned} a_1 - \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + k_1 = 0,\\ a_2 - \lambda_2\bar{a}_1 - \lambda_1\bar{a}_2 + k_2 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Není obtížné se přesvědčit, že pro $\lambda_2 \neq 0$ je tato soustava řešitelná.

Vrátíme se opět k proměnné z, kladouce $\omega(t) = z$ a $\omega(\tau) = \zeta$. Označme

$$\Phi_j(t) = \varphi_j(z),\ \Psi_j(t) = \psi_j(z),\ j = 1, 2.$$

Rovnice (13) nyní nabývají tvaru

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) - \zeta[\lambda_1\overline{\varphi_1'(\zeta)} - \lambda_2\overline{\varphi_2'(\zeta)}] + \overline{\psi_1(\zeta)} = 0,\\ \varphi_2(\zeta) - \zeta[\lambda_2\overline{\varphi_1'(\lambda)} + \lambda_1\overline{\varphi_2'(\zeta)}] + \overline{\psi_2(\zeta)} = 0. \end{aligned}$$

Sečteme-li a odečteme-li poslední rovnice, dostaneme:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) - (\lambda_1 + \lambda_2)\,\zeta\,\overline{\varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)} &= -\varphi_2(\zeta) + \\ &+ (\lambda_1 - \lambda_2)\,\zeta\overline{\varphi_2'(\zeta)} - \overline{\psi_2(\zeta)},\\ \varphi_1(\zeta) - (\lambda_1 - \lambda_2)\,\zeta\,\overline{\varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)} &= \varphi_2(\zeta) - \\ &- (\lambda_1 + \lambda_2)\,\zeta\,\overline{\varphi_2'(\zeta)} + \overline{\psi_2(\zeta)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Rovnice (16) platí na hranici L.

Zaveďme reálné funkce $u_1^1(x, y)$, $v_1^1(x, y)$, …, $v_2^2(x, y)$ definované v oblasti D relacemi

$$\begin{aligned} u_1^1 + iv_1^1 &= \varphi_1(z) - (\lambda_1 + \lambda_2)\,z\,\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)},\\ u_2^1 + iv_2^1 &= \varphi_1(z) - (\lambda_1 - \lambda_2)\,z\,\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)},\\ u_1^2 + iv_1^2 &= -\varphi_2(z) + (\lambda_1 - \lambda_2)\,z\,\overline{\varphi_2'(z)} - \overline{\psi_2(z)},\\ u_2^2 + iv_2^2 &= \varphi_2(z) - (\lambda_1 + \lambda_2)\,z\,\overline{\varphi_2'(z)} + \overline{\psi_2(z)}. \end{aligned}$$

V tomto označení lze rovnice (16) napsat takto:

$$\text{na } L \qquad u_1^1 + iv_1^1 = u_1^2 + iv_1^2;\; u_2^1 + iv_2^1 = u_2^2 + iv_2^2. \tag{17}$$

Zaveďme dále označení

$$\varphi_1(z) = p^1 + iq^1,\; \varphi_2(z) = p^2 + iq^2.$$

Není obtížné se přesvědčit o platnosti rovnic:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1^1}{\partial x} + \frac{\partial v_1^1}{\partial y} &= 2(1 - \lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial p^1}{\partial x};\\
\frac{\partial v_1^1}{\partial x} - \frac{\partial u_1^1}{\partial y} &= 2(1 + \lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial q^1}{\partial x};\\
\frac{\partial u_2^1}{\partial x} + \frac{\partial v_2^1}{\partial y} &= 2(1 - \lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial p^1}{\partial y};\\
\frac{\partial v_2^1}{\partial x} - \frac{\partial u_2^1}{\partial y} &= 2(1 + \lambda_1 - \lambda_2)\frac{dq^1}{dy};\\
\frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial v_1^2}{\partial y} &= -\,2(1 - \lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial p^2}{\partial x};\\
\frac{\partial v_1^2}{\partial x} - \frac{\partial u_1^2}{\partial y} &= -\,2(1 + \lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial q^2}{\partial x};\\
\frac{\partial u_2^2}{\partial x} + \frac{\partial v_2^2}{\partial y} &= 2(1 - \lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial p^2}{\partial y};\\
\frac{\partial v_2^2}{\partial x} - \frac{\partial u_2^2}{\partial y} &= 2(1 + \lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial q^2}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Ze (17) zřejmě plyne platnost těchto rovnic:

$$\begin{aligned}
&\int_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}u_1^1 + \frac{\partial q^1}{\partial x}v_1^1\right)dy + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x}v_1^1 - \frac{\partial q^1}{\partial x}u_1^1\right)dx\right] =\\
&= \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}u_1^2 + \frac{\partial q^1}{\partial x}v_1^2\right)dy + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x}v_1^2 - \frac{\partial q^1}{\partial x}u_1^2\right)dx\right],\\
&\int_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}u_1^1 + \frac{\partial q^2}{\partial x}v_1^1\right)dy + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x}v_1^1 - \frac{\partial q^2}{\partial x}u_1^1\right)dx\right] =\\
&= \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}u_1^2 + \frac{\partial q^2}{\partial x}v_1^2\right)dy + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x}v_1^2 - \frac{\partial q^2}{\partial x}u_1^2\right)dx\right],
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\int_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x} u_2^1 + \frac{\partial q^1}{\partial x} v_2^1\right) dy + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x} v_2^1 - \frac{\partial q^1}{\partial x} u_2^1\right) dx\right] =$$
$$= \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x} u_2^2 + \frac{\partial q^1}{\partial x} v_2^2\right) dy + \left(\frac{\partial p^1}{\partial x} v_2^2 - \frac{\partial q^1}{\partial x} u_2^2\right) dx\right],$$
$$\int_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x} u_2^1 + \frac{\partial q^2}{\partial x} v_2^1\right) dy + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x} v_2^1 - \frac{\partial q^2}{\partial x} u_2^1\right) dx\right] =$$
$$= \int_L \left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x} u_2^2 + \frac{\partial q^2}{\partial x} v_2^2\right) dy + \left(\frac{\partial p^2}{\partial x} v_2^2 - \frac{\partial q^2}{\partial x} u_2^2\right) dx\right]. \tag{19}$$

Integrály v (19) transformujeme podle Greenova vzorce na dvojné. Zaveďme označení:

$$\int_D\int \left(\frac{\partial p^j}{\partial x}\right)^2 dx\, dy = A_j, \quad \int_D\int \left(\frac{\partial q^j}{\partial x}\right)^2 dx\, dy = B_j, \ j = 1, 2, \tag{20}$$

$$\int_D\int \frac{\partial p^1}{\partial x}\frac{\partial p^2}{\partial x} dx\, dy = A_{12}, \int_D\int \frac{\partial q^1}{\partial x}\frac{\partial q^2}{\partial x} dx\, dy = B_{12}. \tag{21}$$

Užijeme-li rovnic (18) a Cauchy-Riemannových rovnic pro funkce p^j a q^j, dostaneme z (19):

$$(1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_1 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_1 = -(1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_{12} - \\ - (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_{12},$$
$$(1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_1 + (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_1 = (1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_{12} + \\ + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_{12},$$
$$(1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_2 = (1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_{12} + \\ + (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_{12},$$
$$(1 + \lambda_1 - \lambda_2) A_2 + (1 - \lambda_1 + \lambda_2) B_2 = -(1 + \lambda_1 + \lambda_2) A_{12} - \\ - (1 - \lambda_1 - \lambda_2) B_{12}.$$

Vyloučíme-li odtud A_{12} a B_{12}, dostaneme

$$2\lambda_2(A_1 + A_2) = 0, \ 2\lambda_2(B_1 + B_2) = 0.$$

Protože čísla A_j, B_j jsou nezáporná a $\lambda_2 \neq 0$, je

$$A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0.$$

Avšak v takovém případě

$$\frac{\partial p^1}{\partial x} = \frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{\partial q^1}{\partial x} = \frac{\partial q^2}{\partial x} \equiv 0,$$

a tedy

$$\varphi_1'(z) = \varphi_2'(z) \equiv 0.$$

Vrátíme-li se opět k proměnné t, $z = \omega(t)$, nalezneme, že

$$\Phi_1'(t) = \Phi_2'(t) \equiv 0$$

čili

$$\Theta_1'(t) - a_1\,\omega'(t) \equiv 0, \; \Theta_2'(t) - a_2\,\omega'(t) \equiv 0.$$

Určíme-li odtud čísla k_1 a k_2 (vzorce (9) a (10)) a dosadíme-li je do (15), najdeme $a_1 = a_2 = 0$, a tedy $\Theta_1'(t) = \Theta_2'(t) \equiv 0$. Uvědomíme-li si nyní, že

$$\Theta_j'(t) = \vartheta_j(t) = p_j + iq_j,$$

přesvědčujeme se, že $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 \equiv 0$, a soustava (3) má pro komplexní λ pouze triviální řešení. Tím je věta 1 úplně dokázána.

Věta 2. *Posloupnost postupných aproximací pro rovnici* (13), § 42 *konverguje.*

Parametr λ v rovnici (13), § 42 je reálný a jeho absolutní hodnota není větší než jedna. Uvedená rovnice pro reálná λ je ekvivalentní soustavě (3), pro kterou body kruhu $|\lambda| \leqq 1$ nejsou charakteristické. Řešení soustavy (13), § 42 lze v tomto kruhu rozvinout v Taylorovu řadu podle mocnin λ. To je ekvivalentní tomu, že posloupnost postupných aproximací pro soustavu (3) čili pro rovnici (13), § 42 konverguje.

Je třeba poznamenat, že užití methody postupných aproximací v praxi je ztíženo tím, že je při ní třeba vypočítat veliké množství kvadratur.

KAPITOLA 3

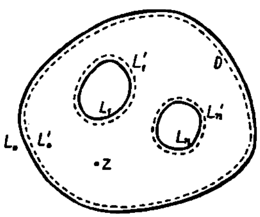
ZOBECNĚNÝ SCHWARZŮV ALGORITMUS

§ 48. Dirichletův problém pro mnohonásobně souvislé oblasti v rovině. Nechť D je mnohonásobně souvislá rovinná oblast, o níž budeme zprvu předpokládat, že je omezená. Stejně jako výše označíme křivky hranice $L_0, L_1, \ldots, L_n$, při čemž L_0 bude označovat křivku, omezující oblast z vnějšku. Označme dále D_0 oblast ležící uvnitř L_0 a D_k oblast, ležící vně L_k $k = 1, 2, \ldots, n$. Je zřejmé, že oblast D je část společná všem oblastem $D_0, D_1, \ldots, D_n$.

Nechť $U(x, y)$ je funkce harmonická v D a $V(x, y)$ je funkce s ní konjugovaná. Označme $U(x, y) + i\,V(x, y) = \varphi(z)$. V § 31 jsme ukázali, že funkci $\varphi(z)$ lze napsat ve tvaru

$$\varphi(z) = \varphi^*(z) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg(z - z_k), \tag{1}$$

kde $\varphi^*(z)$ je funkce regulární v D, A_k jsou reálné koeficienty a z_k je pevně zvolený bod uvnitř L_k.



Obr. 11.

Dokažme, že $\varphi^*(z)$ lze napsat ve tvaru součtu funkcí, z nichž každá je regulární v D_k. Zvolme v D libovolný bod z. Veďme uvnitř D křivky $L_0', L_1', \ldots, L_n'$ blízké k odpovídajícím křivkám $L_0, L_1, \ldots, L_n$ tak, aby bod z byl uvnitř oblasti omezené křivkami $L_0', L_1', \ldots, L_n'$ (obr. 11). Soustavu těchto kladně orientovaných křivek označme L'. Nyní podle Cauchyho vzorce

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} \int_{L_k'} \frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{2}$$

Funkce

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k'} \frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

je regulární uvnitř L_0' $(k = 0)$ nebo vně L_k' $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Avšak křivky L_k' lze zvolit libovolně blízko k L_k. Odtud plyne, že $\varphi_k(z)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ lze analyticky pokračovat na celou oblast D_k. Protože

$$\varphi^*(z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z), \tag{4}$$

je naše tvrzení dokázáno. Označme

$$U_k(x, y) = \mathrm{Re}\{\varphi_k(z)\}.$$

Potom z (1) a (4) plyne vyjádření funkce harmonické v D ve tvaru

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x, y) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|z - z_k|, \tag{5}$$

kde funkce $U_k(x, y)$ je harmonická v D_k. Funkce $U_k(x, y)$ ve vzorci (5) nejsou určeny jednoznačně; ke každé z nich lze připočíst konstantu a_k za toho jediného předpokladu, že

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0.$$

Předpokládejme nyní, že umíme poměrně jednoduše řešit Dirichletův problém pro každou z oblastí D_k. Jak ukážeme, řešení Dirichletova problému pro oblast D lze převést na řešení jisté soustavy integrálních rovnic, která je také poměrně jednoduchá.

Označme $u_k(\zeta)$ hodnotu funkce $U_k(x, y)$ na hranici L_k. Veličiny $u_k(\zeta)$ budeme v úloze považovat za neznámé. Řešení Dirichletova problému pro oblasti D_k je nám známo a můžeme tedy považovat za známé Greenovy funkce $G_k(z; \zeta)$ pro tyto oblasti. Při tom

$$U_k(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} \, d\sigma. \tag{6}$$

Nechť $f_k(\zeta)$ je hodnota hledané funkce $U(x, y)$ na křivce L_k. Ve vzorci (5) bude $z = x + iy$ značit bod na křivce L_m. Na této křivce $U(x, y) = f_m(z)$, $U_m(x, y) = u_m(z)$ a hodnoty ostatních funkcí $U_k(x, y)$ jsou určeny vzorcem (6). Vzorec (5) nyní dává:

na L_m

$$u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{d\nu} \, d\sigma = f_m(z) - \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|z - z_k|. \tag{7}$$

Rovnice (7) tvoří soustavu integrálních rovnic Fredholmova typu s neznámými $u_k(\zeta)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Koeficienty A_k budeme zatím považovat za libovolné.

Soustava (7) není řešitelná, jestliže její pravá strana je dána libovolně. Abychom se o tom přesvědčili, stačí dokázat, že příslušná homogenní soustava

na L_m
$$u_m(z) + \sum_{k \neq m} \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} \, d\sigma = 0 \tag{8}$$

má netriviální řešení. Všimněme si identity

$$\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\partial G_k(z;\,\zeta)}{\partial\nu}\,d\sigma\equiv 1, \tag{9}$$

jež značí, že se harmonická funkce, která se rovná jedné na hranici, rovná jedné identicky. Z (9) přímo plyne, že homogenní soustava (8) má řešení $u_m(z) = \alpha_m$, kde α_m jsou konstanty, jejichž součet je roven nule. Není obtížné pozměnit soustavu (7) tak, aby se stala řešitelnou. Nechť $l_k(\zeta)$ je funkce podrobená podmínce

$$\frac{1}{2\pi}\int_{L_k} l_k(\zeta)\,d\sigma = 1 \tag{10}$$

a jinak libovolná. Nahraďme soustavu (7) soustavou:

$$\text{na } L_m \qquad u_m(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}u_k(\zeta)\left[\frac{\partial G_k(z;\,\zeta)}{\partial\nu}-l_k(\zeta)\right]d\sigma =$$

$$= f_m(z)-\sum_{k=1}^{n}A_k\lg|z-z_k|. \tag{11}$$

Dokažme nyní, že soustava (11) je řešitelná, ať je její pravá strana jakákoliv. Ve shodě s Fredholmovou alternativou uvažujme homogenní soustavu:

$$\text{na } L_m \quad v_m(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}v_k(\zeta)\left[\frac{\partial G_k(z;\,\zeta)}{\partial\nu}-l_k(\zeta)\right]d\sigma = 0. \tag{12}$$

Nechť $v_0(z), v_1(z), \ldots, v_n(z)$ je nějaké řešení této soustavy. Označme a_m konstanty

$$a_m = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}v_k(\zeta)\,l_k(\zeta)\,d\sigma.$$

V tomto označení nabude soustava (12) tvaru

$$\text{na } L_m \qquad v_m(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}\frac{\partial G_k}{\partial\nu}v_k(\zeta)\,d\sigma = a_m. \tag{13}$$

Veličinu $v_m(z)$, jež je určena pomocí soustavy (12) na křivce L_m, budeme považovat za hodnotu na hranici funkce harmonické v D_m.

Tuto funkci budeme označovat symbolem $V_m(z)$. Je zřejmé, že funkce konjugovaná s $V_m(z)$ je jednoznačná v D_m, neboť oblast D_m je jednoduše souvislá. Utvořme funkci

$$V(z) = \sum_{m=0}^{n} V_m(z).$$

Tato funkce je harmonická v D; funkce s ní konjugovaná je jednoznačná v D. Vzorec (13) ukazuje, že funkce $V(z)$ nabývá na každé z křivek L_m konstantní hodnotu rovnou a_m. Vycházejíce z toho, dokažme, že $V(z) = \text{konst.}$

Zaveďme znovu funkce $b_m(z)$ a $a_m(z)$ (viz § 41, vzorce (10) až (12)). Položme ještě $b_0(z) \equiv 1$. Bez obtíží nahlédneme, že

$$V(z) = a_0\, b_0(z) + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_0)\, b_k(z). \tag{14}$$

Podmínky jednoznačnosti funkce $V(z)$ jsou:

$$\int_L V(\zeta)\, a_k(\zeta)\, d\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Všimněme si, že identita (15) platí i pro $k = 0$, protože potom $b_0(\zeta) \equiv 1$ a $a_0(\zeta) \equiv 0$. Vynásobme nyní (15) a_0 pro $k = 0$ a $a_k - a_0$ pro $k > 0$ a nalezené rovnice sečtěme. Pomocí vzorce (14) dostaneme

$$\int_L V(\zeta) \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \nu}\, d\sigma = 0.$$

Avšak, jak se dokazuje v theorii potenciálu, jestliže $V(z)$ je funkce harmonická v D, pak (ν je vnější normála)

$$\int_L V \frac{\partial V}{\partial \nu}\, d\sigma = \int\int_D \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad V(z) = \text{konst.}$$

Snadno se nyní přesvědčíme, že funkce $V_m(x)$ jsou také konstantní. Skutečně

$$V_m(z) = V(z) - \sum_{k \neq m} V_k(z).$$

Protože $V(z)$ je konstanta, jsou všechny sčítance napravo funkce harmonické uvnitř L_m, a tedy $V_m(z)$ je funkce harmonická uvnitř L_m.

Avšak $V_m(z)$ je podle definice harmonická vně L_m. Je tedy V_m harmonická v celé rovině. Podle Liouvillovy věty $V_m(z) = \text{konst.}$

Dosaďme nyní do (12) konstanty místo $v_k(z)$. Užijeme-li vztahů (9) a (10), dostaneme okamžitě $v_k(z) \equiv 0$. Odtud plyne, že soustava (11) je řešitelná.

Ukažme nyní, že pomocí této soustavy lze řešit Dirichletův problém. Řešme soustavu (11) tak, že v ní nahradíme pravé strany nejdříve výrazy $f_m(z)$ a potom $\lg|z - z_k|$. Příslušná řešení označme $W_m(z)$ a $W_{km}(z)$. Potom bude řešení soustavy (11)

$$U_m(z) = W_m(z) - \sum_{k=1}^{m} A_k\, W_{km}(z).$$

Konstanty A_k, které byly dosud neurčeny, podrobíme požadavku, aby součty

$$A = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta)\, l_k(\zeta)\, \mathrm{d}\sigma$$

byly stejné pro všechny hodnoty $m = 0, 1, \ldots, n$. To dá soustavu $n + 1$ rovnic s $n + 1$ neznámými $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Určíme-li tyto neznámé, dostaneme řešení Dirichletova problému ve tvaru

$$U(z) = \sum_{k=0}^{n} U_k(z) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|z - z_k| - A. \tag{16}$$

Podstatně jednodušeji se řeší modifikovaný Dirichletův problém. V tomto případě $A_k = 0$ a $U = \sum_{k=0}^{n} U_k$. Funkce $U_k(z)$ lze určit ze soustavy:

na L_m

$$U_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z;\, \zeta)}{\partial \nu} - l_k(\zeta)\right] \mathrm{d}\sigma = f_m(z). \tag{17}$$

Veličiny

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_m} U_k(\zeta)\, l_k(\zeta)\, \mathrm{d}\sigma$$

dávají hodnoty konstant, jež je třeba odečíst od $f_m(z)$ ve shodě s formulací problému.

§ 49. Případ trojdimensionální oblasti. Téhož postupu, a to ve značně jednodušším tvaru, lze užít na řešení Dirichletova problému v prostoru. Nechť je problém formulován pro oblast D, jejíž hranice se skládá z několika oddělených ploch $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Označme D_m tu z obou oblastí omezených plochou S_m, uvnitř které leží oblast D. Funkce $U(M)$,[1] harmonická v D, může být vyjádřena jako součet funkcí harmonických v D_m. To okamžitě plyne z Greenova vzorce, jenž může být napsán ve tvaru

$$U(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{n} \iint_{S_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S = \sum_{m=1}^{n} U_m(M). \tag{1}$$

Je zřejmé, že funkce

$$U_m(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S \tag{2}$$

je harmonická v D_m.

Vyjádření $U(M)$ ve tvaru

$$U(M) = \sum_{m=1}^{n} U_m(M) \tag{3}$$

je jednoznačné. Abychom to dokázali, předpokládejme, že existuje ještě jedno vyjádření,

$$U(M) = \sum_{m=1}^{n} U'_m(M),$$

kde $U'_m(M)$ je funkce harmonická v D_m. Odečteme-li toto od (3) a klademe-li pro stručnost $U_m - U'_m = V_m$, nalezneme

$$\sum_{m=1}^{n} V_m = 0.$$

Napišme tuto rovnici ve tvaru

$$V_m = -\sum_{k \neq m} V_k.$$

[1] M zde značí proměnný bod prostoru.

Levá strana této rovnice je harmonická vně S_m a pravá uvnitř S_m. Avšak v takovém případě je $V_m(M)$ harmonická v celém prostoru, a tedy je rovna nule. Tím je jednoznačnost vyjádření (3) dokázána.

Označme $f_m(M)$ danou hodnotu hledané funkce $U(M)$ na ploše S_m. Předpokládejme, že umíme řešit Dirichletův problém pro každou z oblastí D_m; nechť $G_m(M, M_1)$ je Greenova funkce této oblasti. Týmiž úvahami jako v předcházejícím paragrafu lehce dojdeme k následující soustavě integrálních rovnic:

$$U_m(M) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint_{S_k} U_k(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = f_m(M);$$

$$m = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Na rozdíl od rovinného problému je soustava (4) vždy řešitelná. Nechť $v_1(M), \ldots, v_n(M)$ vyhovují homogenní soustavě

$$v_m(M) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint_{S_k} v_k(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = 0. \tag{5}$$

Označme $V_m(M)$ funkci harmonickou v D_m a rovnou $v_m(M)$ na S_m.

Porovnáme-li soustavy (5) a (4), vidíme, že funkce

$$V(M) = \sum_{m=1}^{n} V_m(M)$$

je harmonická v D a rovna nule na její hranici. Avšak potom $V(M) \equiv$ $\equiv 0$, a protože vyjádření (3) je jednoznačné, jsou také $V_m(M) \equiv 0$. Homogenní soustava (5) má tedy pouze triviální řešení; v důsledku Fredholmovy alternativy má nehomogenní soustava (4) vždy řešení, jež nás zřejmě vede k řešení Dirichletova problému pro oblast D.

§ 50. Zobecněný Schwarzův algoritmus. Vraťme se k rovinnému problému (§ 48). Pro jednoduchost předpokládejme, že oblast D je neomezená, takže hranice L_0 neexistuje. Za $l_k(\zeta)$ zvolme funkce

$$l_k(\zeta) = \left. \frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu} \right|_{z=\infty}, \tag{1}$$

takže soustava (17) nabude tvaru:

na L_m

$$u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu} - \frac{\partial G_k(\infty, \zeta)}{\partial \nu} \right] \mathrm{d}S = f_m(z), \quad (2)$$

$$m = 1, 2, \ldots, n.$$

Předpokládejme, že křivky L_k jsou od sebe dostatečně vzdáleny. Potom, jak lze lehce nahlédnout, budou jádra soustavy (2) malá a je zřejmé (viz § 2), že soustava (2) je řešitelná methodou postupných aproximací.

Analysujme podrobněji algoritmus postupných aproximací pro soustavu (2). Postupujeme tak, že nejdříve zavedeme do rovnice (2) parametr λ. Dostaneme novou rovnici:

na L_m

$$u_m(z) + \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu} - \frac{\partial G_k(\infty, \zeta)}{\partial \nu} \right] \mathrm{d}\sigma = f_m(z),$$

$$m = 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

Její řešení budeme hledat ve tvaru

$$u_m(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \lambda^r u_{mr}(z). \quad (4)$$

Dosaďme toto do (3). Porovnáním koeficientů při stejných mocninách λ nalevo a napravo dostaneme tyto rekurentní vzorce:

$$u_{m0}(z) = f_m(z),$$

$$u_{mr}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L} u_{k,r-1}(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu} - \frac{\partial G_k(\infty, \zeta)}{\partial \nu} \right] \mathrm{d}\sigma. \quad (5)$$

Položíme-li nyní v (4) $\lambda = 1$, najdeme řešení rovnice (2).

Vzorce (5) určují funkci $u_{mr}(z)$ pouze na křivce L_m. Nechť nyní z značí libovolný bod oblasti D_m. Symbol $U_{mr}(z)$ nechť značí funkci harmonickou v D_m, jejíž hodnoty na obvodu této oblasti jsou dány vzorci (5). Je zřejmé, že uvnitř D_m

$$U_{mr}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_m} u_{mr}(\zeta) \frac{\partial G_m(z, \zeta)}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma;$$

vzorce (5) lze vyjádřit v takovém tvaru:

na L_m

$$U_{m0}(z) = f_m(z),\ U_{mr}(z) = \sum_{k \neq m} [U_{k,\,r-1}(z) - U_{k,\,r-1}(\infty)]. \tag{6}$$

Jak ukazují vzorce (6), členy řady (4) lze sestrojit takto:

Jako nulovou aproximaci zvolíme funkce $U_{m0}(x)$ harmonické v D_m, jejichž hodnoty na hranici se shodují s danými funkcemi $f_m(z)$.

Jestliže už jsou sestrojeny funkce $U_{m0}(z), \ldots, U_{m,\,r-1}(z)$, pak $U_{mr}(z)$ je určena takto: od funkcí $U_{k,\,r-1}(z)$, $k \neq m$ odečteme jejich hodnoty v nekonečnu; nalezené rozdíly se vypočtou pro hodnoty na křivce L_m a potom sečtou pro všechna k, která se nerovnají m. Jako výsledek dostaneme hodnoty funkce $U_{m,r}(z)$ na hranici L_m. Pomocí příslušné Greenovy funkce potom určíme funkci $U_{mr}(z)$ v celé oblasti D_m. Hledaná harmonická funkce $U(z)$ v D se rovná součtu řady

$$U(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{m=1}^{n} U_{mr}(z). \tag{7}$$

Vyložený postup má ideu shodnou s alternujícím Schwarzovým algoritmem; budeme jej nazývat zobecněným Schwarzovým algoritmem.

Zobecněný Schwarzův algoritmus je obzvlášť jednoduchý v tom případě, kdy je oblast D dvojnásobně souvislá. Můžeme předpokládat, že $f_2(\zeta) \equiv 0$. K tomu stačí odečíst od hledané funkce $U(z)$ funkci $U'(z)$ harmonickou v D_2 a rovnou $f_2(z)$ na L_2. Vzorce (6) nyní dávají:

$$\begin{aligned} &\text{na } L_1 \quad U_{10}(z) = f(z),\ U_{1r}(z) = U_{2,r-1}(z) - U_{2,r-1}(\infty),\\ &\text{na } L_2 \quad U_{20}(z) = 0, \quad\ U_{2r}(z) = U_{1,r-1}(z) - U_{1,r-1}(\infty). \end{aligned} \tag{8}$$

Ze vzorců (8) plyne, že se $U_{1r}(z)$ pro lichá r a $U_{2r}(z)$ pro sudá r identicky rovnají nule. Označme nyní pro stručnost

$$U_{1r}(z) = U_r(z),\ U_{2r}(z) = V_r(z).$$

Potom

$$U(z) = U_0(z) - V_1(z) + U_2(z) - V_3(z) + \ldots \tag{9}$$

Bez podstatných změn lze užít zobecněného Schwarzova algoritmu i pro případ omezené, mnohonásobně souvislé oblasti. Stačí nahradit funkci $l_0(\zeta)$ nulou. Lze také zvolit

$$l_0(\zeta) = \frac{\partial G_0(a, \zeta)}{\partial \nu},$$

kde a je libovolný bod uvnitř D.

V případě trojdimensionální oblasti se zobecněný Schwarzův algoritmus zjednoduší. Do rovnice (4), § 49 zavedeme parametr λ a napíšeme rovnici ve tvaru:

na S_m

$$u_m(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint_{S_k} u_k(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S = f_m(M). \quad (10)$$

Její řešení budeme hledat ve tvaru

$$u_m(M) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \lambda^r u_{mr}(M). \quad (11)$$

Dojdeme potom k rekurentním vzorcům:

$$u_{m0}(M) = f_m(M),$$

$$u_{mr}(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint_{S_k} u_{k,r-1}(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S. \quad (12)$$

Jestliže M bude nyní značit vnitřní bod oblasti D_m, bude $U_{mr}(M)$ označovat funkci harmonickou v D_m, jejíž hodnoty na S_m jsou dány rovnicemi (12).

Avšak v takovém případě

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_k} u_{k,r-1}(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S = U_{k,r-1}(M)$$

a rovnice (12) nabývají jednoduššího tvaru:

$$\text{na } S_m \qquad U_{m0}(M) = f_m(M), \; U_{mr}(M) = \sum_{k \neq m} U_{k,r-1}(M). \quad (13)$$

Jak zřejmě plyne ze vzorců (13), sestrojí se postupné aproximace takto: Nulovou aproximací jsou funkce $U_{m0}(M)$, $m = 1, 2, \ldots, n$, harmonické v D_m a rovné $f_m(M)$ na plochách S_m. Jestliže aproximace $U_{m0}(M)$, $U_{m1}(M)$, …, $U_{m,r-1}(M)$ jsou již sestrojeny, je $U_{mr}(M)$ určena jako funkce harmonická v D_m, jež se na ploše S_m rovná součtu

$$\sum_{k \neq m} U_{k, r-1}(M).$$

Jestliže oblast D je dvojnásobně souvislá, pak zobecněný Schwarzův algoritmus konverguje.

Důkaz této věty lze najít v článku S. L. Soboleva [34]. Omezíme se zde na případ dvojnásobně souvisle trojdimensionální oblasti, pro kterou je důkaz elementární.

Jak už jsme poznamenali, náš algoritmus je shodný s algoritmem postupných aproximací pro soustavu integrálních rovnic:[1]

$$\begin{aligned}
&\text{na } S_1 \quad u_1(M) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} u_2(M_1) \frac{\partial G_2(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S = f_1(M),\\
&\text{na } S_2 \quad u_2(M) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} u_1(M_1) \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S = f_2(M).
\end{aligned} \tag{14}$$

Uvažujme homogenní soustavu integrálních rovnic, obsahujících parametr λ:

$$\begin{aligned}
&\text{na } S_1 \quad v_1(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{S_2} v_2(M_1) \frac{\partial G_2(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S = 0,\\
&\text{na } S_2 \quad v_2(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{S_1} v_1(M_1) \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Dokažme, že charakteristická čísla této soustavy jsou v absolutní hodnotě větší než jedna. V důsledku toho, co bylo dokázáno v § 5, bude odtud plynout konvergence algoritmu postupných aproximací pro soustavu (14).

Jestliže M je vnitřní bod oblasti D_m $(m = 1, 2)$, budeme $U_1(M)$, $U_2(M)$ jako shora považovat za funkce harmonické v D_1, D_2, jejichž hodnoty na S_1 resp. S_2 jsou určeny ze soustavou (15).

Potom lze tuto soustavu napsat takto:

$$\begin{aligned}
&\text{na } S_1 \qquad U_1(M) + \lambda U_2(M) = 0,\\
&\text{na } S_2 \qquad U_2(M) + \lambda U_1(M) = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

---

[1] Píšeme zde tuto soustavu pro případ dvojnásobně souvislé oblasti, který nás zajímá.

Funkce $U_1(M)$ a $U_2(M)$ mohou být komplexní, nicméně věta o maximu absolutní hodnoty zůstává pro ně v platnosti[1]. Označme A_k maximum $|U_k(M)|$ a N_k ten bod plochy S_k, v němž $|U_k| = A_k$. V prvé z rovnic (16) položme $M = N_1$ a ve druhé $M = N_2$. Nyní z těchto rovnic plyne

$$|\lambda| = \frac{A_1}{|U_2(N_1)|} = \frac{A_2}{|U_1(N_2)|}.$$

Odtud

$$|\lambda|^2 = \frac{A_1}{|U_1(N_2)|} \frac{A_2}{|U_2(N_1)|}. \tag{17}$$

Oba činitelé napravo jsou větší než jedna, neboť oblasti D_1 a D_2 jsou neomezené a funkce U_1 a U_2, harmonické v těchto oblastech, se nerovnají identicky konstantě; v takovém případě je hodnota harmonické funkce ve vnitřním bodě menší (s vyloučením rovnosti) než maximum na hranici. Je tedy $|\lambda_1| > 1$, jak jsme měli dokázat.

Náš důkaz konvergence zobecněného Schwarzova algoritmu zůstává v platnosti i tehdy, když je oblast D omezená. V tomto případě je jedna z oblastí, na př. D_1, omezená a druhá je neomezená. Ve vzorci (17) prvý činitel napravo není pak menší než jedna a druhý je větší (s vyloučením rovnosti) než jedna. Jako dříve $|\lambda| > 1$ a to stačí ke konvergenci našeho algoritmu.

---

[1] Nechť na S_1 $|U_1(M)| \leqq K$. Potom uvnitř D_1

$$|U_1(M)| = \frac{1}{4\pi} \left| \int\int_{S_1} U_1(M_1) \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S \right| \leqq \frac{K}{4\pi} \int\int_{S_1} \left| \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \right| \mathrm{d}S.$$

Avšak normální derivace Greenovy funkce uvnitř oblasti je kladná. Odtud

$$|U_1(M)| \leqq \frac{K}{4\pi} \int\int_{S_1} \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S.$$

Dále je integrál

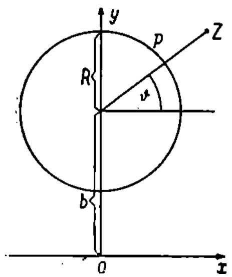
$$\frac{1}{4\pi} \int\int_{S_1} \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S$$

funkce harmonická v D_1 a rovna jedné na S_1. Tato funkce uvnitř D_1 je rovna jedné, když je oblast D omezená a je menší než jedna, když je oblast neomezená. Tedy definitivně

$$|U_1(M)| \leqq K$$

v celé oblasti D_1.

§ 51. Obtékání křídla letadla vzdušným proudem v blízkosti povrchu země. Pro jednoduchost výpočtu předpokládejme, že křídlo je kruhového průřezu. Osy souřadnic zvolme tak, jak je ukázáno na obr. 12. Budeme předpokládat, že se křídlo pohybuje ve směru osy x stálou rychlostí U; rychlost částic vzduchu v nekonečnu zvolme rovnou nule. Konečně předpokládejme, že pohyb je necirkulární. Proudová funkce $\psi(x, y)$ řeší modifikovaný Dirichletův problém s těmito podmínkami na hranici:[1]



Obr. 12.

na kružnici $|z - b| = R$

$$\psi = Uy + C', \; C' = \text{konst}, \tag{1}$$

na ose x $\qquad \psi = 0.$ $\qquad$ (2)

Aplikujme na tento problém zobecněný Schwarzův algoritmus. Označme L_1 hranici průřezu křídla, L_2 osu x. Potom D_1 bude rovina s kruhovým výřezem a D_2 horní polorovina. Můžeme užít přímo vzorce (9), § 47, neboť $\psi = 0$ na L_2:

$$\psi(x, y) = U_0(x, y) - V_1(x, y) + U_2(x, y) - V_3(x, y) + \ldots \tag{3}$$

Funkce $U_0(x, y)$ je harmonická v D_1 a rovna $Uy = UR \sin\vartheta$ [1] na kružnici L_1. Není obtížné nahlédnout, že těmto podmínkám vyhovuje funkce

$$U_0(x, y) = \frac{UR^2 \sin\vartheta}{\varrho} = \frac{UR^2 (y - b)}{x^2 + (y - b)^2}.$$

V nekonečnu $U_0(x, y) = 0$ a na ose x

$$U_0(x, 0) = -\frac{UR^2 b}{x^2 + b^2}.$$

Nyní je $V_1(x, y)$ definována jako funkce harmonická v horní polorovině, jež se na hranici poloroviny rovná $-\dfrac{UR^2 b}{x^2 + b^2}$. Podle známého vzorce

---

[1]) Viz § 35.

[1] Označení viz na obr. 12. Konstantu C' neuvažujeme, neboť je pro řešení modifikovaného problému Dirichletova nepodstatná.

$$V_1(x, y) = -\frac{UR^2by}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(\xi^2+b^2)[(\xi-x)^2+y^2]} = -\frac{UR^2(y+b)}{x^2+(y+b)^2}.$$

Hodnoty na hranici následující aproximace dostaneme, odečteme-li od $V_1(x, y)$ její hodnotu v nekonečnu a vypočteme-li hodnotu nalezeného rozdílu na kružnici L_1. Protože v nekonečnu $V_1(x, y) = 0$, rovnají se prostě hodnoty na hranici funkce $U_2(x, y)$ hodnotám $V_1(x, y)$ na L_1:

$$\text{na } L_1 \qquad U_2(x, y) = -\frac{UR^2(2b + R\sin\vartheta)}{R^2 + 4b^2 + 4bR\sin\vartheta}.$$

Nyní podle Poissonova vzorce

$$U_2(x, y) =$$

$$= -\frac{UR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2b + R\sin\Theta}{R^2+4b^2+4bR\sin\Theta}\,\frac{\varrho^2 - R^2}{\varrho^2+R^2-2\varrho R\cos(\vartheta-\Theta)}\,d\Theta =$$

$$= -UR^2\frac{2b[x^2+(y-b)^2]+R^2(y-b)}{R^4+4b^2[x^2+(y-b)^2]+4bR^2(y-b)}.$$

Omezíme-li se na již nalezené aproximace, máme

$$\psi(x, y) = U_0(x, y) - V_1(x, y) + U_2(x, y) =$$

$$= UR^2\left\{\frac{y-b}{x^2+(y-b)^2} + \frac{y+b}{x^2+(y+b)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2b[x^2+(y-b)^2]+R^2(y-b)}{R^4+4b^2[x^2+(y-b)^2]+4bR^2(y-b)}\right\}. \tag{4}$$

§ 52. Užití na problémy theorie pružnosti. Zobecněného Schwarzova algoritmu a s ním spojené soustavy integrálních rovnic se může užít nejen při problémech vedoucích na Laplaceovu rovnici, nýbrž po každé, kdy se řeší krajový problém pro rovnici eliptického typu v případě mnohonásobně souvislé oblasti. Objasněme to na příkladě rovinného problému theorie pružnosti. Budeme uvažovat omezenou, mnohonásobně souvislou oblast. Případ neomezené oblasti lze vyšetřovat obdobně.

Nechť je tedy položen problém určit napjatost v mnohonásobně souvislé oblasti D, ohraničené z vnitřku hranicemi $L_1, L_2, \ldots, L_n$ a z vnějšku hranicí L_0. Tento problém, jak víme (§ 40), se převádí na určení funkce biharmonické v D z daných hodnot jejích derivací na hranici. Označme složky vnějších sil ve směru os x, y, působících na hranici L_k, X_k a Y_k a hledanou biharmonickou funkci W. Potom

na L_k

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = i\int_{s_0}^{s} (X_{k\nu} + iY_{k\nu})\,ds + B_k = f_k(z) + B_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n; \tag{1}$$

z je komplexní souřadnice bodu na hranici.

Ve vzorci (1) jsou B_k konstanty. Jedna z konstant B_k může být zvolena libovolně a ostatní jsou potom určeny z podmínek jednoznačnosti posunutí. Budeme předpokládat, že hlavní vektor a hlavní moment sil působících na každé z křivek L_k jsou rovny nule. Toho lze vždy dosáhnout.

Označme D_0 oblast, ležící uvnitř L_0, a D_k oblast, ležící vně L_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Lze lehce dokázat, že při splnění právě vyslovené podmínky lze funkci W vyjádřit ve tvaru součtu biharmonických funkcí

$$W = W_0 + W_1 + \ldots + W_n, \tag{2}$$

při čemž každá funkce W_k je regulární v příslušné oblasti D_k.

Goursatovy funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, odpovídající příslušné biharmonické funkci W, jsou regulární v D. Ve vzorci (1), § 48 se logaritmické členy nevyskytují. Podle vzorce (4), § 48 budeme mít

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z), \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(z).$$

Označme ještě

$$\chi_k(z) = \int \psi_k(z)\,dz.$$

Funkce $\chi_k(z)$ mají jednoznačné reálné části v příslušných oblastech D_k. V opačném případě, jak lze lehce nahlédnout, byl by hlavní moment sil působících na hranici L_k různý od nuly. Abychom dostali vzorec (2), stačí nyní položit

$$W_k = \operatorname{Re}\{\bar{z}\,\varphi_k(z) + \chi_k(z)\}.$$

Předpokládejme nyní, že umíme řešit problém theorie pružnosti pro každou z oblastí D_k. Jestliže budeme znát hodnoty veličiny

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i\frac{\partial W_k}{\partial y} = g_k(z)$$

na příslušné křivce L_k, pak rozřešíme-li uvedený problém v každé z oblastí D_k, nalezneme funkce W_k a tedy i W. Tím bude řešen problém theorie pružnosti pro naši mnohonásobně souvislou oblast D. Vše se tedy převádí na sestrojení funkcí $g_k(z)$.

Učiníme několik předběžných poznámek.

1. Podrobný rozbor, který zde nebudeme provádět,[1] vede k následujícímu výsledku: nechť D je jednoduše souvislá oblast a L její hranice. Nechť je dále U funkce biharmonická v D a nechť na hranici L

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = g(z).$$

Potom v libovolném vnitřním bodě oblasti D

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \int_L [M_1(x, y; \zeta)\, g(\zeta) + M_2(x, y; \zeta)\, \overline{g(\zeta)}]\, \mathrm{d}\zeta, \tag{3}$$

kde M_1 a M_2 jsou spojité funkce, pokud bod (x, y) zůstává uvnitř oblasti a bod ζ na její hranici; tyto funkce jsou úplně určeny oblastí D. Pro stručnost budeme označovat integrál na pravé straně (3) $M(z; g)$, takže

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = M(z; g). \tag{3$_1$}$$

Operátor M, příslušející oblasti D_k, budeme značit $M_k(z; g)$, takže speciálně

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i\frac{\partial W_k}{\partial y} = M_k(z; g_k). \tag{4}$$

2. Jestliže $g(z) \equiv g =$ konst, pak z věty o jednoznačnosti řešení problému theorie pružnosti plyne, že

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} \equiv g.$$

Odtud plyne, že

$$\text{pro } g(\zeta) \equiv g = \text{konst}, \ M(z; g) \equiv g. \tag{5}$$

[1] Viz [37b], str. 5—8.

3. Protože funkce W_k jsou biharmonické v jednoduše souvislých oblastech, jsou jim příslušející posunutí jednoznačná. Avšak potom v důsledku vzorce (2) budou automaticky jednoznačná i posunutí, odpovídající funkci W. A priori je jasné, že funkce (2) nemůže vyhovovat krajové podmínce (1) pro libovolné hodnoty konstant B_k, neboť, jak už bylo poznamenáno, při jejich libovolné volbě jsou posunutí obecně mnohoznačná. Položíme si proto náš problém takto: budeme hledat funkci W ve tvaru (2); přitom se budeme snažit, aby W vyhovovala krajové podmínce

$$\text{na } L_k \qquad \frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = f_k(z) \tag{6}$$

až na aditivní konstantu, jež může být různá na různých hranicích.

Není obtížné sestavit nyní soustavu integrálních rovnic pro neznámé $g_k(\zeta)$. Na křivce L_m

$$\frac{\partial W_m}{\partial x} + i\frac{\partial W_m}{\partial y} = g_m(z).$$

Dále, jestliže $k \neq m$, leží L_m uvnitř oblasti D_k a podle vzorce (4)

$$\text{na } L_m \qquad \frac{\partial W_k}{\partial x} + i\frac{\partial W_k}{\partial y} = M_k(z; g_k),$$

kde z značí bod na L_m. Užijeme-li vzorců (2) a (5), dostaneme soustavu, která nás zajímá:

$$\text{na } L_m \qquad g_m(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k) = f_m(z), \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Soustava (7) je jako v případě rovinného Dirichletova problému (§ 45) v obecném případě neřešitelná. Abychom se o tom přesvědčili, uvažujme homogenní soustavu:

$$\text{na } L_m \qquad g_m^{(0)}(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k^{(0)}) = 0. \tag{8}$$

Jak plyne ze vzorce (6), vyhovují soustavě (8) $g_m^{(0)}(z) = a_m =$ konst jestliže konstanty a_m jsou podrobeny jediné podmínce $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$. Homogenní soustava (8) má tedy netriviální řešení (nerovnající se identicky nule) a z Fredholmovy alternativy plyne neřešitelnost soustavy (7).

Upravme nyní soustavu (7) tak, aby se stala řešitelnou. Uvažujme integrály

$$N_k(g) = \int_{L_k} [\alpha_k(\zeta)\, g(\zeta) + \beta_k(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}]\, \mathrm{d}\zeta, \tag{9}$$

kde funkce $\alpha_k(\zeta)$ a $\beta_k(\zeta)$ jsou podrobeny těmto podmínkám:

1. jsou spojité na L_k;
2. $\int_{L_k} \alpha_k(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 1, \quad \int_{L_k} \beta_k(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 0.$ (10)

Soustavu (7) nahraďme soustavou:

na L_m

$$g_m(z) + \sum_{k \neq m} \{M_k(z; g_k) - N_k(g_k)\} = f_m(z); \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Dokažme, že soustava (11) je řešitelná pro libovolné funkce $f_m(z)$. Uvažujme příslušnou homogenní soustavu

na L_m

$$g_m^{(0)}(z) + \sum_{k \neq m} \{M_k(z; g_k^{(0)}) - N_k(g_k^{(0)})\} = 0; \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

a dokažme, že má pouze triviální řešení $g_m^{(0)}(x) = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Nechť $g_0^0(z), g_1^{(0)}(z), \ldots, g_n^{(0)}(z)$ je libovolné řešení soustavy (12). Označme

$$\sum_{k \neq m} N_k(g_k^{(0)}) = a_m.$$

Veličiny a_m jsou zřejmě konstanty. Z (12) nyní plyne, že

na L_m

$$g_m^{(0)}(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k^{(0)}) = a_m. \tag{13}$$

Uvažujme funkce $W_m^{(0)}(x, y)$ biharmonické v oblasti D_m, vyhovující na L_m rovnici

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y} = g_m^{(0)}(z).$$

Podle vzorce (4) uvnitř D_k máme:

$$\frac{\partial W_k^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_k^{(0)}}{\partial y} = M_k(z; g_k^{(0)}).$$

Položme nyní

$$W^{(0)}(x, y) = \sum_{m=0}^{n} W_m^{(0)}(x, y). \tag{14}$$

Funkce $W^{(0)}(x, y)$ je biharmonická v mnohonásobně souvislé oblasti; protože se rozkládá na součet funkcí biharmonických v jednoduše souvislých oblastech, odpovídají jí jednoznačná posunutí v D. Z (13) plyne, že

$$\text{na } L_m \qquad \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W^{(0)}}{\partial y} = a_m. \tag{15}$$

Ze vzorce (1) plyne, že

$$X_{k\nu} + iY_{k\nu} = \frac{1}{i} \frac{\mathrm{d}f_k(z)}{\mathrm{d}s}.$$

Užijeme-li toho na rovnici (15), kde $f_k(z) = a_k =$ konst., nalezneme $X_{k\nu} = Y_{k\nu} = 0$. Biharmonická funkce přísluší tedy napjatosti v mnohonásobně souvislé oblasti D, na jejíž hranici nepůsobí vnější síly. Podle věty o jednoznačnosti se příslušná napětí rovnají identicky nule. Příslušná biharmonická funkce $W^{(0)}$ bude potom lineární (viz vzorce (4), § 39) a

$$\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W^{(0)}}{\partial y} \equiv \text{konst.}$$

Dokažme, že konstantní jsou také veličiny

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y}; \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Podle Goursatova vzorce (1), § 40

$$W^{(0)} = \mathrm{Re}\{\bar{z}\, \varphi(z) + \chi(z)\}, \quad W_m^{(0)} = \mathrm{Re}\{\bar{z}\, \varphi_m(z) + \chi_m(z)\};$$

přitom zřejmě

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{n} \varphi_m(z), \quad \chi(z) = \sum_{m=0}^{n} \chi_m(z). \tag{16}$$

Opakujeme-li odvození Goursatova vzorce pro funkci $W^{(0)}(x, y)$ a vezmeme-li v úvahu, že tato funkce je lineární, lehce zjistíme, že $\varphi(z) = i\alpha z + \beta$, kde α je reálná a β je komplexní konstanta. Úplně obdobně najdeme, že $\chi(z) = \gamma z + \delta$, kde γ a δ jsou konstanty.

Dokažme, že obdobný tvar mají i funkce $\varphi_m(z)$, $\chi_m(z)$. Prvou z rovnic (16) derivujme podle z a výsledek napišme ve tvaru

$$\varphi_m'(z) = i\alpha - \sum_{k \neq m} \varphi_k'(z).$$

Levá strana rovnice, $\varphi'_m(z)$, je regulární vně L_m a pravá strana uvnitř L_m. Avšak potom $\varphi'_m(z)$ je regulární v celé rovině. Podle Liouvillovy věty je $\varphi'_m(z)$ konstanta. Musí být ryze imaginární, neboť v opačném případě měla by $W_m^{(0)}$ derivace neomezené v nekonečnu. Označíme-li tuto konstantu $i\alpha_m$, dostaneme $\varphi'_m(z) = i\alpha_m$ a $\varphi_m(z) = i\alpha_m z + \beta_m$. Obdobně zjistíme, že $\chi_m(z) = \gamma_m z + \delta_m$. Užívajíce vzorce N. I. Muschelišviliho

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i\,\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y} = \varphi_m(z) + z\,\overline{\varphi'_m(z)} + \overline{\psi_m(z)},\ \psi_m(z) = \chi'_m(z)$$

nalezneme, že

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i\,\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y} = \beta_m + \overline{\gamma_m} = \text{konst.}$$

Odtud zřejmě plyne, že $g_m^{(0)}(z) = \text{konst.}$

Řešení homogenní soustavy (12) jsou tedy konstanty. V takovém případě podle vzorce (5) $M_k(z; g_k^{(0)}) = g_k^{(0)}$. Dále ze vzorců (9) a (10) také plyne, že $N_k(g_k^{(0)}) = g_k^{(0)}$. Dosadíme-li toto do (12), zjistíme, že $g_m^{(0)}(z) \equiv 0$, t. j. homogenní soustava (12) má pouze triviální řešení. V důsledku Fredholmovy alternativy je soustava (11) řešitelná.

Řešíme-li soustavu (11), řešíme tím současně problém theorie pružnosti pro oblast D. Nechť $g_m(z)$ je řešení uvedené soustavy. Označme

$$\sum_{k \neq m} N_k(g_k) = B_m.$$

Potom

na L_m
$$g_m(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k) = f_m(z) + B_m. \tag{17}$$

Nechť $W_m(x, y)$ je biharmonická funkce v D_m, vyhovující na hranici L_m rovnici

$$\frac{\partial W_m}{\partial x} + i\,\frac{\partial W_m}{\partial y} = g_m(z),$$

a nechť $W = W_0 + W_1 + \ldots + W_n$. Funkce $W(x, y)$ je součet biharmonických funkcí, z nichž každá je regulární ve své jednoduše souvislé oblasti; vzorec (17) ukazuje, že tato funkce vyhovuje podmínce (1). Náš problém je tím řešen.

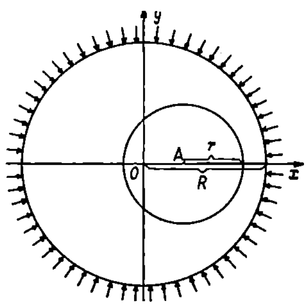
Jako $N_k(g)$ lze speciálně zvolit

$$N_k(g) = M_k(\infty; g),\ k = 1, 2, \ldots, n;\ N_0(g) = M_0(a, g),$$

kde a je libovolný bod uvnitř L_0. Jestliže hranice $L_0, L_1, \ldots, L_n$ jsou od sebe navzájem dostatečně vzdáleny, je ihned patrno, že jádra integrálů v soustavě (11) budou malá a tato soustava bude řešitelná methodou postupných aproximací. Stejně jako při Dirichletově problému docházíme i zde k zobecněnému Schwarzovu algoritmu.[1] V následujícím paragrafu ukážeme jeho užití na jeden speciální problém.

§ 53. Excentrické mezikruží s rovnoměrně rozloženým tlakem na vnější kružnici.[2]

Počátek souřadnic položme do středu vnější kružnice; osu x položme do spojnice obou středů a její kladný směr nechť je orientován ke středu A vnitřní kružnice. Poloměry kružnic označme r a R (viz obr. 13), vzdálenost mezi středy a. Oblast D_0 je kruh $|z| < R$, oblast D_1 vnějšek kruhu $|z - a| \leqq r$.



Obr. 13.

Podmínky na hranici oblasti jsou takové: na vnitřní kružnici L_1 $\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = f_1(z) = 0$; na vnější kružnici, podrobené stálému normálnímu tlaku, který označíme $-p$,

$$X_\nu = -p\cos(\nu, x) = -p\frac{dy}{ds}, \quad Y_\nu = -p\cos(\nu, y) = p\frac{dx}{ds}$$

Odtud plyne, že na L_0

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = f_0(z) = i\int(X_\nu + iY_\nu)\,ds = -pz. \qquad (1)$$

Integrační konstantu neuvažujeme, neboť je nepodstatná při užití zobecněného Schwarzova algoritmu.

[1] V již citovaném článku S. L. Soboleva [34] je dokázáno, že v problémech theorie pružnosti vede zobecněný Schwarzův algoritmus vždy ke konvergentní řadě, když je oblast dvojnásobně souvislá.

[2] Tento problém lze řešit elementárnějšími prostředky. Uvádíme jej zde pro ilustraci methody. Méně elementární příklad užití našeho algoritmu nalezne čtenář v [27b].

Řešení problému theorie pružnosti pro oblasti D_0 a D_1 jsou úplně elementární a dobře známá. Zavedeme-li Goursatovy funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, vázané s $W(x, y)$ vzorcem

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = \varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{2}$$

máme[1] pro oblast D_0

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - a_1 z - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f_0(\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{f_0(\zeta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{R^2[\varphi'(z) - a_1]}{z}, \tag{3}$$

$$a_1 = \frac{1}{4\pi i}\int_{L_0}\frac{f_0(\zeta)}{\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

a pro oblast D_1

$$\begin{gathered}\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,\\ \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{f_1(\zeta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{f_1(\zeta)}}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta - z\,\varphi'(z).\end{gathered} \tag{4}$$

Ve vzorcích (3) a (4) značí $f_0(\zeta)$ a $f_1(\zeta)$ hodnoty veličiny (2) na hranici L_0 resp. L_1.

V našem problému $f_1(\zeta) = 0$ a můžeme podle analogie se vzorcem (9), § 47 napsat řešení ve tvaru

$$W(x, y) = W_1(x, y) - W_2(x, y) + W_3(x, y) - \ldots, \tag{5}$$

kde W_{2k+1} jsou funkce biharmonické v D_0 a W_{2k} biharmonické v D_1.

V souhlase se vzorcem (2) zaveďme analytické funkce $\varphi_k(z)$ a $\psi_k(z)$ tak, aby

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i\frac{\partial W_k}{\partial y} = \varphi_k(z) + z\,\overline{\varphi_k'(z)} + \overline{\psi_k(z)}.$$

Dohodněme se ještě na tom, že ζ bude značit bod buď na hranici L_0, nebo L_1.

[1] Viz [28a]. Tyto vzorce bez nesnází dostaneme, vyjdeme-li z výsledků § 41.

Prvá aproximace $W_1(x, y)$ vyhovuje na L_0 krajové podmínce

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} + i\frac{\partial W_1}{\partial y} = f_0(\zeta) = -p\zeta.$$

Dosadíme-li toto do (3) a provedeme-li příslušné výpočty, snadno dostaneme, že

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} + i\frac{\partial W_1}{\partial y} = -pz \tag{6}$$

uvnitř D_0. Dále na hranici L_1 je veličina $\frac{\partial W_2}{\partial x} + i\frac{\partial W_2}{\partial y}$ identická s $\frac{\partial W_1}{\partial x} + i\frac{\partial W_1}{\partial y}$; tedy

na L_1
$$\frac{\partial W_2}{\partial x} + i\frac{\partial W_2}{\partial y} = -p\zeta.$$

Dosadíme-li toto na místo $f_1(\zeta)$ do vzorce (4), dostaneme po jednoduchých výpočtech

$$\varphi_2(z) = 0, \quad \psi_2(z) = -\frac{pr^2}{z-a} - ap,$$

a tedy uvnitř D_1

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} + i\frac{\partial W_2}{\partial y} = -\frac{pr^2}{\bar{z}-a} - ap. \tag{7}$$

Hodnoty na hranici veličiny $\frac{\partial W_3}{\partial x} + i\frac{\partial W_3}{\partial y}$ najdeme, odečteme-li od veličiny (7) její hodnotu v nekonečnu a vypočteme-li hodnotu nalezeného rozdílu na L_0. Potom dostaneme

$$\frac{\partial W_3}{\partial x} + i\frac{\partial W_3}{\partial y} = -\frac{pr^2}{\bar{\zeta}-a} = -\frac{pr^2\zeta}{R^2 - a\zeta},$$

neboť na kružnici L_0 $\bar{\zeta} = \frac{R^2}{\zeta}$. Vrátíme-li se opět ke vzorci (3), najdeme:

$$\varphi_3(z) = -\frac{pr^2(R^2+az)\,z}{2R^2(R^2-az)}, \quad \psi_3(z) = \frac{apr^2(2a-z)}{(R^2-az)^2}.$$

Odtud

$$\frac{\partial W_3}{\partial x} + i\frac{\partial W_3}{\partial y} = pr^2\left[\frac{(R^2+az)\,z}{2R^2(R^2-az)} + \frac{z}{2R^2} - \frac{R^2z}{(R^2-az)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{a(2a-\bar{z})}{(R^2-a\bar{z})^2}\right]. \tag{8}$$

Stejně jednoduše vypočteme i následující aproximace.

KAPITOLA 4

NĚKTERÁ UŽITÍ INTEGRÁLŮ OBDOBNÝCH POTENCIÁLŮM

§ 54. Užití Cauchyho integrálů v rovinné theorii pružnosti (rovnice N. I. Muschelišviliho). Omezme se pro jednoduchost na případ, kdy pružné prostředí vyplňuje omezenou, jednoduše souvislou oblast. Označme tuto oblast D a její hranici L. Jak už víme, úloha spočívá v určení analytických funkcí $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, regulárních v oblasti D a vyhovujících na hranici L podmínce

$$\varphi(z) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta), \tag{1}$$

kde $f(\zeta)$ je známá spojitá funkce bodu na hranici L. Budeme předpokládat, že je dostatečně hladká.

Je pohodlnější vyjádřit podmínku (1) v poněkud jiném tvaru, totiž zaměnit v ní všechny veličiny konjugovanými:

$$\overline{\varphi(\zeta)} + \overline{\zeta}\,\varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = \overline{f(\zeta)}. \tag{2}$$

Při řešení úlohy budeme postupovat takto: Budeme uvažovat oblast D' ležící vně L. Nechť z' je libovolný bod této oblasti. Násobme obě strany rovnice (2) výrazem

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z'}$$

a integrujme podél L. Protože $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ a $\psi(z)$ jsou regulární v D a bod z' leží vně D, platí v důsledku známých vlastností Cauchyho integrálu identity

$$\text{a)}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta \equiv 0,\quad \text{b)}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta \equiv 0,$$
$$\text{c)}\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta \equiv 0. \tag{3}$$

Užijeme-li identity (3, c), dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z'}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\zeta}\,\varphi'(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta = A(z'), \tag{4}$$

kde
$$A(z') = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{5}$$

Upravme rovnici (4). V identitě (3, a) nahraďme všechny veličiny konjugovanými, identitu (3, b) násobme $-\bar{z}'$; obě takto nalezené rovnice přičtěme k (4). Dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\varphi(\zeta)}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z'} - \frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}'}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}'}{\zeta - z'}\,\varphi'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = A(z').$$

Poslední integrál lze integrovat per partes, a tak dostaneme rovnici neobsahující $\varphi'(\zeta)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\varphi(\zeta)}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z'} - \frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}'}\right) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}'}{\zeta - z'} = A(z'). \tag{6}$$

Nechť nyní $z' \to t$, kde t je bod na hranici L. Podle vzorce (3), § 22 lehce dostaneme:

$$\lim_{z'\to t}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z'}\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{2}\,\overline{\varphi(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$\lim_{z'\to t}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}'}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}\right) = -\frac{1}{2}\,\overline{\varphi(t)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{t}}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}.$$

Připomeňme, že integrály napravo v těchto vzorcích jsou singulární.

Pokud se týče třetího členu ve vzorci (6), lze v něm provést limitní přechod za integračním znakem. Položme $\zeta - z' = r'\mathrm{e}^{i\vartheta}$. Potom

$$\mathrm{d}\,\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}'}{\zeta - z'} = -\,2i\mathrm{e}^{-2i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta,$$

což je veličina spojitá při libovolné poloze bodů z' a ζ, za toho jediného předpokladu, že hranice L je hladká. Poněvadž však integrand je spojitý, lze přejít k limitě za integračním znakem. Provedeme-li limitní přechod, dostaneme integrální rovnici:

$$\overline{\varphi(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\varphi(\zeta)}\,\mathrm{d}\lg\frac{\bar{\zeta} - \bar{t}}{\zeta - t} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\frac{\bar{\zeta} - \bar{t}}{\zeta - t} = -\,A(t).$$

Položíme-li $\zeta - t = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$, převedeme tuto rovnici na tvar

$$\overline{\varphi(t)} - \frac{1}{\pi}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}\,\mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{\pi}\int_L \varphi(\zeta)\,\mathrm{e}^{-2i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = -A(t). \tag{7}$$

Jestliže hranice L je hladká, bude $\mathrm{d}\vartheta$ spojitou funkcí bodů t a ζ. Položíme-li $\varphi(t) = p(t) + i\,q(t)$ a oddělíme-li v (7) reálnou a imaginární část, dostaneme soustavu dvou integrálních rovnic Fredholmova typu. Odtud plyne, že pro rovnici (7) platí Fredholmova alternativa.

Rovnici (7) odvodil N. I. Muschelišvili [28b, c], jehož úvahy jsme zde reprodukovali.

Obraťme se k vyšetřování rovnice (7). Dokažme především, že její libovolné řešení lze analyticky pokračovat z hranice L na celou oblast D. Připomeneme-li si odvození rovnice (7), lehce se přesvědčíme, že ji lze vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{z'\to t}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{\zeta} - \overline{z}'}\,\mathrm{d}\overline{\zeta} - \frac{\overline{z}'}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta - z'}\,\mathrm{d}\zeta + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \overline{\zeta}\,\varphi'(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'}\,\mathrm{d}\zeta\right\} = 0. \tag{8}$$

Přitom je třeba v druhém integrálu chápat $\varphi'(z)$ jako derivaci $\varphi(\zeta)$ podél křivky L. Položme nyní

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z'}\,\mathrm{d}\zeta = i\,\Phi(z'),$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \overline{\zeta}\,\varphi'(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'}\,\mathrm{d}\zeta = -i\,\Psi(z'). \tag{9}$$

Rovnice (8) přejde v rovnici:

$$\overline{\Phi(t)} + \overline{t}\,\Phi'(t) + \Psi(t) = 0. \tag{10}$$

Funkce $\Phi(z')$ a $\Psi(z')$ jsou regulární v D' a rovnice (10) ukazuje, že dávají řešení rovinného problému theorie pružnosti pro oblast D' za předpokladu, že na hranici oblasti nepůsobí vnější síly. Avšak potom, podle věty o jednoznačnosti řešení rovinné úlohy,[1]

$$\Phi(z') = i\alpha z' + \beta,\ \Psi(z') = -\overline{\beta},$$

[1] Viz [28a], str. 111.

kde α je reálná a β komplexní konstanta. Ze vzorců (9) plyne, že $\Phi(\infty) = \Psi(\infty) = 0$. Avšak potom $\alpha = \beta = 0$ a

$$\Phi(z') \equiv 0, \ \Psi(z') \equiv 0.$$

Prvá identita ukazuje, že funkci $\varphi(\zeta)$, jež vyhovuje rovnici (7), lze analyticky pokračovat do vnitřku celé oblasti D; z druhé identity plyne, že do téže oblasti lze analyticky pokračovat i funkci

$$\psi(\zeta) = -\overline{\varphi(\zeta)} - \bar{\zeta}\, \varphi'(\zeta) + \overline{f(\zeta)}.$$

Řešíme-li rovnici (7), najdeme krajové hodnoty obou hledaných Goursatových funkcí. Hodnoty uvnitř oblasti lze nyní určit třeba z Cauchyho vzorce. Řešíme-li tedy rovnici (7), řešíme tím současně i problém theorie pružnosti.

Není však obtížné dokázat, že rovnice (7) je v obecném případě neřešitelná. Vskutku, jestliže se hlavní moment vnějších sil nerovná nule, jinak řečeno, jestliže

$$\operatorname{Re} \int_L \overline{f(\zeta)}\, \mathrm{d}\zeta \neq 0,$$

nemá problém theorie pružnosti řešení. Avšak potom nemá řešení ani rovnice (7). Příslušná homogenní rovnice

$$\overline{\varphi_0(t)} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\varphi_0(\zeta)}\, \mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(\zeta)\, \mathrm{e}^{-2i\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta = 0 \tag{11}$$

má netriviální řešení. Tímto řešením, a při tom jediným, je funkce

$$\varphi_0(t) = \alpha t + \beta \tag{12}$$

(α je reálná a β je komplexní konstanta), příslušející rovinnému problému theorie pružnosti, jestliže nepůsobí vnější síly.

To, že řešení (12) je jediné, plyne přímo z věty o jednoznačnosti řešení rovinného problému theorie pružnosti.

Uvedeme takovou změnu tvaru rovnice (7), při níž se tato stane řešitelnou a dá řešení problému theorie pružnosti za toho jediného předpokladu, že se hlavní moment vnějších sil působících na hranici L rovná nule.[1]

Položme počátek souřadnic do vnitřku oblasti D. K levé straně rovnice (7) připočtěme výraz

[1] Viz [37d].

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i t}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right). \tag{13}$$

Uvedená rovnice bude nahrazena rovnicí

$$\overline{\varphi(t)} - \frac{1}{\pi}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}\,d\vartheta - \frac{1}{\pi}\int_L \varphi(\zeta)\,e^{-2i\vartheta}\,d\vartheta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i t}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right) = -A(t). \tag{14}$$

Vyšetřme rovnici (14). Především dokažme, že každé její řešení lze analyticky pokračovat do celé oblasti D. Stačí tentokrát položit

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta = i\,\Phi(z'),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta}\,\varphi'(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i z'}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right) = -i\,\Psi(z').$$

Uvažujeme-li analogicky jako v předcházejícím, nalezneme, že

$$\Phi(z') \equiv 0, \quad \Psi(z') \equiv 0.$$

První rovnice ukazuje, že $\varphi(\zeta)$ lze analyticky pokračovat do oblasti D.

Předpokládejme nyní, že se hlavní moment vnějších sil působících na hranici L rovná nule. V takovém případě (viz § 43, vzorec (3))

$$\operatorname{Re}\int_L \overline{f(\zeta)}\,d\zeta = 0. \tag{15}$$

Dokažme, že při této podmínce libovolné řešení rovnice (14) anuluje každý z integrálů v (13).

Napišme explicitně rovnici $\Psi(z') = 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta}\,\varphi'(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z'}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i z'}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right) = 0. \tag{16}$$

Rozviňme levou stranu v (16) v Laurentovu řadu v okolí bodu v nekonečnu a položme rovný nule [v důsledku identity (16)] absolutní člen této řady a koeficient u $\frac{1}{z'}$. Potom dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = 0, \tag{17_1}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L [\overline{\varphi(\zeta)} + \bar{\zeta}\,\varphi'(\zeta)]\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(\zeta)}\,d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right) = 0. \tag{17_2}$$

Rovnice (17_1) ukazuje, že se prvý z integrálů v (13) rovná nule. Obraťme se k rovnici (17_2). Integrujeme-li per partes, máme

$$\int_L \bar{\zeta}\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta = -\int_L \varphi(\zeta)\,d\bar{\zeta}.$$

Dosaďme toto do (17_2):

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L (\overline{\varphi(\zeta)}\,d\zeta - \varphi(\zeta)\,d\bar{\zeta}) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(\zeta)}\,d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right) = 0.$$

Prvý sčítanec je zřejmě reálný; druhý je v důsledku rovnice (15) také reálný a třetí ryze imaginární. Avšak potom se třetí sčítanec rovná nule, t. j. rovná se nule druhý integrál v (13):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right) = 0. \tag{17_3}$$

Dokažme nyní, že rovnice (14) je řešitelná, ať je její pravá strana jakákoliv. Ve shodě s Fredholmovou alternativou stačí dokázat, že homogenní rovnice

$$\overline{\varphi_0(t)} - \frac{1}{\pi}\int_L \overline{\varphi_0(\zeta)}\,d\vartheta - \frac{1}{\pi}\int_L \varphi_0(\zeta)\,e^{-2i\vartheta}\,d\vartheta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\pi i t}\int_L \left(\frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + \frac{\overline{\varphi_0(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right) = 0 \tag{18}$$

má pouze triviální řešení $\varphi_0(t) \equiv 0$.

Rovnici (18) dostaneme ze (14) pro $f(\zeta) \equiv 0$. Podmínka (15) je zde zřejmě splněna, a proto pro libovolné řešení rovnice (18) platí rovnice (17_1) a (17_2). Poslední dva členy v (18) vymizí a tato rovnice se shoduje s (11). Její řešení je potom dáno vzorcem (12). Dosadíme-li nyní výraz (12) do (17_1) a (17_3) a vzpomeneme-li si, že α je reálné číslo, najdeme, že $\alpha = \beta = 0$ a tedy $\varphi_0(t) \equiv 0$. Tím je řešitelnost rovnice (14) dokázána.

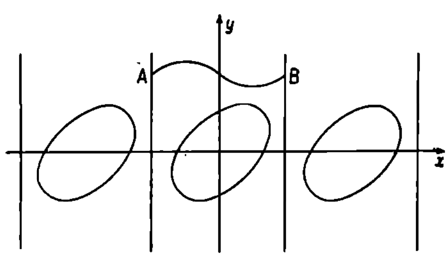
Nechť je nyní splněna podmínka (15), která je nutná k tomu, aby měl problém theorie pružnosti řešení. Lze bez obtíží dokázat, že potom vede řešení rovnice (14) k řešení našeho problému. Vskutku funkce $\varphi(t)$ vyhovující rovnici (14) anuluje výraz (13). Potom rovnice (14) přejde v (7), o níž jsme už dokázali, že její řešení vede k řešení problému theorie pružnosti.

K methodě vyložené v tomto paragrafu připojme několik poznámek:

1. Tvar integrálních rovnic (7) a (14) se nemění, přejdeme-li k mnohonásobně souvislým oblastem. Avšak vyšetřování této rovnice je tím neobyčejně ztíženo. Podrobný rozbor pro případ mnohonásobně souvislých oblastí je obsažen v citovaném článku D. I. Šermana [37d].

2. Jestliže jsou na hranici L body, v nichž má prvá derivace nespojitosti 1. druhu, nevedou rovnice (7) a (14) na rovnice Fredholmovy. Přesto však zůstávají Fredholmovy věty v platnosti i pro tyto rovnice. Podrobně o tom viz článek L. G. Magnaradze [26a].

Ve svých článcích [37f, g] užil D. I. Šerman methody integrálů typu Cauchyho také na případ nehomogenních a neisotropních pružných prostředí.



Obr. 14.

§ 55. Pružná rovina s nekonečnou řadou výřezů. Užití integrálu typu Cauchyho umožňuje také řešit následující důležitou úlohu. Nechť pružné prostředí vyplňuje celou rovinu s výjimkou nekonečné řady stejných a periodicky rozložených výřezů (obr. 14). Předpokládejme dále, že všechny tyto výřezy jsou podrobeny působení stejných vnějších sil. Naší úlohou je určit napětí v pružném prostředí při uvedených podmínkách.

Předpokládejme, že se hlavní vektor vnějších sil, působících na každý výřez odděleně, rovná nule. Jako obvykle lze problém převést na určení analytických funkcí $\varphi(\zeta)$ a $\psi(\zeta)$, splňujících na každém výřezu podmínku

$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + C, \tag{1}$$

kde $f(\zeta)$ je daná funkce. Je zřejmé, že na všech hranicích výřezů nabývá $f(\zeta)$ v odpovídajících bodech stejné hodnoty. Konstanta C, jak uvidíme níže, má jednu a touž hodnotu na všech hranicích.

V našem problému jsou napětí a posunutí periodické funkce x s periodou a. Vyšetřme, jak se mění $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, dosadíme-li $x + a$ za x čili, což je totéž, položíme-li $z + a$ za z.

Užijeme vzorců (5), (6) a (7), § 40

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\}, \tag{5,40}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)], \tag{6,40}$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \tag{7,40}$$

Prvý ze vzorců ukazuje, že se $\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\}$ nemění, nahradíme-li $z + a$ za z. Odtud plyne, že $\varphi''(z)$ má periodu a. Vskutku, nechť $\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\} = p(x, y)$. Potom $p(x + a, y) \equiv p(x, y)$. Derivujeme-li tuto identitu, máme

$$\frac{\partial p(x + a, y)}{\partial x} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial p(x + a, y)}{\partial y} = \frac{\partial p(x, y)}{\partial y}.$$

Dále

$$\varphi''(z) = \frac{\partial p}{\partial x} - i\frac{\partial p}{\partial y}$$

a periodicita $\varphi''(z)$ přímo plyne z právě napsaných rovnic.

Integrujeme-li identitu

$$\varphi''(z + a) \equiv \varphi''(z),$$

dostaneme

$$\varphi'(z + a) = \varphi'(z) + i\alpha,$$

$$\varphi(z + a) = \varphi(z) + i\alpha z + a\beta, \tag{2}$$

kde α a β jsou jisté konstanty. Konstanta α je nutně reálná, neboť reálná část $\varphi'(z)$ se nemění při záměně z v $z + a$.

Obraťme se ke vzorci (6,40). Při záměně z v $z + a$ se její levá strana nemění. Odtud

$$(\bar{z} + a)\,\varphi''(z + a) + \psi'(z + a) = \bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)$$

a v důsledku periodicity funkce $\varphi''(z)$

$$\psi'(z + a) = \psi'(z) - a\cdot\varphi''(z).$$

Integrujeme-li poslední rovnici, najdeme:

$$\psi(z + a) = \psi(z) - a\,\varphi'(z) + \gamma, \tag{3}$$

kde γ je nějaká konstanta.

Dosaďme nyní $z + a$ za z ve vzorci (7,40) a dosaďme místo $\varphi(z + a)$, $\varphi'(z + a)$ a $\psi(z + a)$ jejich hodnoty z (2) a (3). Užijeme-li periodicity posunutí, lehce najdeme, že $\alpha = 0$ a $\gamma = a\bar{\beta}\varkappa$. Tudíž $\varphi'(z)$ má periodu a a $\varphi(z)$ vzroste o konstantu $a\beta$. Funkce $\psi(z)$ se mění podle vzorce (3).

Položme

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) - \beta z, \tag{4}$$

$$\psi_0(z) = \psi(z) + z\,\varphi'(z) - \bar{\beta}\varkappa z. \tag{5}$$

Funkce $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$ jsou zřejmě periodické s periodou a a vzorce (4) a (5) dávají výrazy pro $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ pomocí dvou periodických funkcí.

Objasněme fysikální význam veličiny β. Na přímkách omezujících libovolný pás periodicity vezměme dva body A a B se stejnými pořadnicemi (obr. 14) a spojme tyto body spojitou křivkou ležící úplně v páse periodicity a neprotínající hranici pružné oblasti. Najděme hlavní vektor napětí působících na oblouk AB. Označme složky uvedeného vektoru ve směru souřadnicových os X a Y; podle známého vzorce N. I. Muschelišviliho ([28a], str. 109) máme

$$i(X + iY) = [\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_A^B.$$

Nahraďme zde $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ podle vzorců (4) a (5) a užijme periodicity funkcí $\varphi_0(z)$, $\varphi'(z)$ a $\psi_0(z)$; pak dostaneme

$$i(X + iY) = [\varphi_0(z) + 2iy\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi_0(z)} + (1 + \varkappa)\,\beta z]_A^B = \\ = (1 + \varkappa)\,\beta a,$$

odkud

$$\beta = \frac{i(X + iY)}{(1 + \varkappa)\,a}. \tag{*}$$

Tím je konstanta β určena pomocí složek hlavního vektoru napětí působících na oblouk AB. Ze vzorce (*) plyne také, že uvedený vektor nezávisí na volbě bodu A a B.

Předpokládejme nyní, že napětí konvergují k nule pro $y \to \infty$. Potom zřejmě $X = Y = 0$, a tedy $\beta = 0$. Místo (4) a (5) dostaneme jednodušší vzorce,

$$\varphi(z) = \varphi_0(z), \ \psi(z) = \psi_0(z) - z\,\varphi_0'(z), \tag{6}$$

kde $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$ jsou periodické funkce s periodou a. Budeme předpokládat, že jsou omezené pro $y \to \pm\infty$; potom pro $y \to \pm\infty$ budou napětí konvergovat k nule.

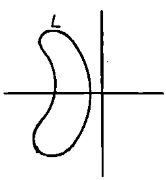
Nahradíme-li v (1) funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ podle vzorců (6), dostaneme krajovou podmínku pro nové funkce $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$:

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \bar{\zeta})\,\overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta) + C.$$

Poněvadž všechny sčítance vyskytující se v poslední rovnici jsou periodické, má C jednu a touž hodnotu na všech hranicích. Můžeme nyní, užívajíce libovolnosti v určení C, položit $C = 0$. Nakonec se tedy problém převádí na určení periodických funkcí $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$ vyhovujících krajové podmínce:

$$\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \bar{\zeta})\,\overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta). \tag{7}$$

Obvyklým způsobem lze dokázat, že $\varphi_0(\zeta)$ a $\psi_0(\zeta)$ jsou až na aditivní konstanty určeny jednoznačně.



Obr. 15.

Položme nyní

$$e^{\frac{2\pi i z}{a}} = t, \ z = \frac{a}{2\pi i}\lg t. \tag{8}$$

Zobrazením (8) se pás $0 \leqq \mathrm{Re}(z) \leqq a$ převede v rovinu t rozdělenou řezem podél reálné kladné poloosy a výřez ležící v uvedeném pásu přejde v nějakou omezenou oblast neobsahující počátek souřadnic (obr. 15). Hranici této oblasti označme L. Funkce $\Phi(t) = \varphi_0\left(\frac{a}{2\pi i}\lg t\right)$ je regulární v rozdělené t-rovině vně hranice L. Tato funkce, která je periodickou vzhledem k z, nabývá stejné hodnoty v geometricky splývajících bodech řezu a lze ji tedy spojitě pokračovat přes řez. Avšak potom, jak je známo[1], lze tuto funkci analyticky pokračovat přes řez; je potom regulární v celé oblasti roviny t, ležící vně L. Totéž ovšem platí o funkci $\Psi(t) = \psi_0\left(\frac{a}{2\pi i}\lg t\right)$. Problém se tím převádí na určení dvou funkcí $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$, regulárních vně L. Krajové podmínky pro tyto funkce dostaneme, položíme-li v (7) $\zeta = \frac{a}{2\pi i}\lg\tau$:

$$\Phi(\tau) - 2\bar{\tau}\lg|\tau|\,\overline{\Phi'(\tau)} + \overline{\Psi(\tau)} = F(\tau), \quad F(\tau) = f\left(\frac{a}{2\pi i}\lg\tau\right). \tag{9}$$

Už jsme poznamenali, že $\varphi_0(z)$ a $\psi_0(z)$ jsou určeny až na aditivní konstantu. Zvolme tuto aditivní konstantu tak, aby $\Psi(t) \to 0$ pro $t \to \infty$.

Při řešení úlohy užijeme téhož postupu jako v předcházejícím paragrafu. V rovnici (9) nahradíme všechny členy konjugovanými; dále ji násobme výrazem $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\tau}{\tau - t'}$, kde t' je bod uvnitř L, a integrujme podél L proti hodinovým ručičkám. Potom dostaneme:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\Phi(\tau)}}{\tau - t'}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\tau\lg|\tau|\,\Phi'(\tau)}{\tau - t'}\,d\tau = A(t'),\\ A(t') = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{F(\tau)}}{\tau - t'}\,d\tau.\end{gathered} \tag{10}$$

Protože funkce $\Phi(t)$ je regulární vně L, je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t'}\,d\tau = \Phi(\infty).$$

Nechť c je pevně zvolený bod uvnitř L. Položme v poslední rovnici $t' = c$. Odečteme-li tyto dva výrazy, dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t'}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - c}\,d\tau = 0. \tag{11}$$

---

[1] Viz na př. I. I. Privalov, Vvěděnije v těoriju funkcij kompleksnogo peremennogo.

Derivujeme-li a potom integrujeme per partes, dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi'(\tau)}{\tau - t'}\,d\tau = 0. \tag{12}$$

V identitě (11) nahraďme všechny členy konjugovanými, identitu (12) násobme výrazem $2t'\lg|t'|$ a oba výsledky přičtěme k (10). Integrál obsahující $\Phi'(\tau)$ integrujme per partes. Nakonec připočtěme k levé straně rovnice veličinu $\frac{i}{2\pi}\,\overline{\lg t'}\,\mathrm{Re}\left\{\int\limits_L \frac{\Phi(\tau)}{(\tau - c)^2}\,d\tau\right\}$. Necháme-li dále $t' \to \tau_0$, kde τ_0 je bod na hranici L, dostaneme integrální rovnici

$$\overline{\Phi(\tau_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\Phi(\tau)}\,d\lg\frac{\tau - \tau_0}{\bar\tau - \bar\tau_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \Phi(\tau)\,d\,\frac{\tau\lg|\tau| - \tau_0\lg|\tau_0|}{\tau - \tau_0} +$$
$$+ \frac{i}{2\pi}\,\overline{\lg\tau_0}\,\mathrm{Re}\left\{\int\limits_L \frac{\Phi(\tau)}{(\tau - c)^2}\,d\tau\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\Phi(\tau)}}{\bar\tau - \bar c}\,d\bar\tau = A(\tau_0), \tag{13}$$

jež je ekvivalentní soustavě dvou Fredholmových rovnic.[1]

Nebudeme zde analysovat rovnici (13) — dělalo by se to téměř úplně tak, jako v předcházejícím paragrafu — a vyslovíme pouze výsledek:

1. Funkci $\Phi(\tau_0)$ vyhovující rovnici (13) lze analyticky pokračovat na celý vnějšek křivky L; při tom je v nekonečnu omezená.

2. Jestliže $\Phi(\tau_0)$ vyhovuje rovnici (13), pak funkci

$$\Psi(\tau_0) = \overline{F(\tau_0)} - \overline{\Phi(\tau_0)} + 2\tau_0\lg|\tau_0|\,\Phi'(\tau_0) \tag{14}$$

lze analyticky pokračovat na celý vnějšek křivky L; tato funkce je v nekonečnu rovna nule.

3. Rovnice (13) je řešitelná, ať je funkce $F(t)$ jakákoliv.

Ze shora řečeného je jasno, že funkce $\Phi(t)$ a $\Psi(t)$ určené rovnicemi (13) a (14) a následujícím analytickým pokračováním řeší naši úlohu.

[1] Tuto soustavu dostaneme, jestliže v (13) oddělíme reálnou a imaginární část a za neznámé považujeme

$$\mathrm{Re}\{\Phi(\tau_0)\} \text{ a } \mathrm{Im}\{\Phi(\tau_0)\}.$$

§ 56. Rovnice Lauricelliho. Methody integrálních rovnic při rovinném problému theorie pružnosti po prvé použil r. 1908 G. Lauricella [23]. Avšak jeho rovnice a zvláště jejich odvození byly dosti neobratné a nepohodlné. D. I. Šerman [37j] vyjádřil Lauricelliho rovnici v komplexním tvaru a udal nové, mnohem jednodušší odvození. V novém tvaru se tyto rovnice ukázaly poměrně jednoduchými — jsou jednodušší než rovnice N. I. Muschelišviliho (§ 54), které jsou jim velmi blízké.

V tomto paragrafu uvedeme odvození D. I. Šermana, omezujíce se na případ jednoduše souvislé, omezené oblasti.

Jak už víme, problém v tomto případě pozůstává v určení dvou funkcí $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ regulárních v oblasti D, vyplněné pružným prostředím, a vyhovujících na hranici L této oblasti podmínce

$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta), \tag{1}$$

kde $f(\zeta)$ je daná spojitá funkce, o níž budeme předpokládat, že je dostatečně hladká. Připomeňme, že $f(\zeta)$ nutně vyhovuje podmínce

$$\mathrm{Re}\{\int_L f\overline{(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta\} = 0, \tag{2}$$

která vyjadřuje, že hlavní moment vnějších sil působících na L je roven nule.

Budeme hledat $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ ve tvaru těchto integrálů Cauchyho typu:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \tag{3}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\,\omega(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)\,\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta - z}, \tag{4}$$

kde $\omega(\zeta)$ je neznámá funkce, jež má být určena na hranici L.

Sestrojme z (3) a (4) výraz $\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ a nechme blížit z k nějakému bodu t na hranici L. Užijeme-li vzorců pro limitní hodnoty integrálů typu Cauchyho, dostaneme okamžitě integrální rovnici pro neznámou $\omega(t)$:[1]

---

[1]) Vynecháváme zde detaily transformací, neboť se téměř doslova shodují s transformacemi § 54.

$$\omega(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(\zeta)\, \mathrm{d} \lg \frac{\zeta - t}{\bar{\zeta} - \bar{t}} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\zeta)}\, \mathrm{d} \frac{\zeta - t}{\bar{\zeta} - \bar{t}} = f(t). \tag{5}$$

To je Lauricelliho rovnice v komplexním tvaru.

Lze dokázat, že rovnice (5) je v obecném případě neřešitelná. Abychom ji učinili řešitelnou, připočtěme k její levé straně veličinu

$$b\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar{t}-\bar{a}} + \frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right),$$

kde a je vnitřní bod oblasti D a

$$b = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta - a)^2} \mathrm{d}\zeta. \tag{6}$$

Položme ještě $\zeta - t = re^{i\vartheta}$. Rovnice (6) je nahrazena rovnicí:

$$\omega(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \omega(\zeta)\, \mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\omega(\zeta)}\, \mathrm{e}^{2i\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta + \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar{t}-\bar{a}} + \right.$$

$$\left. + \frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right) \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta-a)^2} \mathrm{d}\zeta = f(t). \tag{7}$$

Vyšetřme rovnici (7). Dokažme především, že každé její řešení anuluje veličinu b. Vraťme se proto k funkcím $\varphi(z)$ a $\psi(z)$.

Provedeme-li v opačném pořádku úvahy, jež nás vedly k rovnici (5), vyjádříme (7) ve tvaru

$$\varphi(t) + t\, \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + b\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar{t}-\bar{a}} + \frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right) = f(t).$$

Násobme tuto rovnici $\mathrm{d}\bar{t}$ a integrujme podél L. Po nepříliš složitých úpravách dostaneme

$$\int_L (\varphi(t)\, \mathrm{d}\bar{t} - \overline{\varphi(t)}\, \mathrm{d}t) + b \int_L \left(\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{t-a} + \frac{\mathrm{d}t}{\bar{t}-\bar{a}}\right) + 2\pi i b = \int_L f(t)\, \mathrm{d}\bar{t}.$$

Z (6) je patrno, že veličina b je ryze imaginární. Reálná část nalevo v poslední rovnici je potom zřejmě $2\pi i b$ a napravo se rovná nule podle podmínky (2). Tudíž $b = 0$.

Z dokázaného plyne, že každé řešení rovnice (7) vyhovuje současně také rovnici (5). Dosadíme-li uvedené řešení do (3) a (4), dojdeme k řešení problému theorie pružnosti.

Dokažme nyní, že rovnice (7) je řešitelná. Podle Fredholmovy alternativy stačí dokázat, že homogenní rovnice má pouze triviální řešení.

Položme $f(t) \equiv 0$. Tím dostaneme homogenní rovnici

$$\omega_0(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_L \omega_0(\zeta)\, \mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{\pi} \int\limits_L \overline{\omega_0(\zeta)}\, \mathrm{e}^{2i\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} b_0 \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{\bar{t}-\bar{a}} + \frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2} \right) = 0. \tag{8}$$

Zde je

$$b_0 = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int\limits_L \frac{\omega_0(\zeta)}{(\zeta-a)^2}\, \mathrm{d}\zeta. \tag{9}$$

Podle dokázaného $b_0 = 0$. Položme nyní ve shodě se vzorci (3) a (4)

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\omega_0(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta, \tag{10}$$

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)}}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\bar{\zeta}\, \omega_0(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\omega_0(\zeta)\, \mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta - z}. \tag{11}$$

Přihlédneme-li k tomu, že $b_0 = 0$, dostaneme z rovnice (8):

$$\varphi_0(t) + t\,\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0.$$

Poslední rovnice ukazuje, že $\varphi_0(t)$ a $\psi_0(t)$ řeší rovinný problém theorie pružnosti za předpokladu, že na hranici L nejsou žádná napětí. Podle věty o jednoznačnosti

$$\varphi_0(z) = i\alpha z + \beta,\ \psi_0(z) = -\bar{\beta},$$

kde α je reálná a β je komplexní konstanta.

Není obtížné nahlédnout, že $\alpha = 0$. Skutečně, $b_0 = 0$. Avšak z (9) a (10) plyne, že

$$0 = b_0 = 2i \operatorname{Im}\{\varphi_0'(a)\} = 2i\alpha.$$

Tudíž

$$\varphi_0(z) = \beta,\ \psi_0(z) = -\bar{\beta}.$$

Ve výrazu (11) integrujme druhý integrál per partes:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\,\omega_0(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d(\bar{\zeta}\,\omega_0(\zeta))}{\zeta-z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(\zeta)}{\zeta-z}\,d\bar{\zeta}.$$

Dosaďme toto do (11):

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)} - \bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{11_1}$$

Přihlédneme-li k hodnotám $\varphi_0(z) = \beta$ a $\psi_0(z) = -\bar{\beta}$, dostaneme z (10) a (11_1):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(\zeta)-\beta}{\zeta-z}\,d\zeta \equiv 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)} - \bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta) + \bar{\beta}}{\zeta-z}\,d\zeta \equiv 0.$$

Z toho je patrno, že $\omega_0(\zeta) - \beta$ a $\overline{\omega_0(\zeta)} - \bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta) + \bar{\beta}$ jsou hodnoty na hranici analytických funkcí, regulárních vně L a rovných nule v nekonečnu. Označme je $i\delta(z)$ a $i\varepsilon(z)$, takže

$$\begin{aligned} i\delta(\zeta) &= \omega_0(\zeta) - \beta, \\ i\varepsilon(\zeta) &= \overline{\omega_0(\zeta)} - \bar{\zeta}\,\omega_0'(\zeta) + \bar{\beta}. \end{aligned} \tag{12}$$

Vylučme z těchto rovnic $\omega_0(\zeta)$:

$$\overline{\delta(\zeta)} + \bar{\zeta}\,\delta'(\zeta) + \varepsilon(\zeta) + 2i\bar{\beta} = 0.$$

Funkce $\delta(z)$ a $\varepsilon(z) + 2i\bar{\beta}$ jsou řešení homogenní (t. j. nepůsobí vnější síly) úlohy theorie pružnosti pro oblast, ležící vně L. Podle věty o jednoznačnosti $\delta(z) = i\alpha' z + \beta'$, $\varepsilon(z) + 2i\bar{\beta} = -\bar{\beta}'$. Avšak $\delta(z)$ je regulární vně L a rovna nule v nekonečnu. Odtud $\alpha' = \beta' = 0$, $\delta(z) \equiv 0$. Protože $\varepsilon(\infty) = 0$, je také $\beta = 0$. Nyní z (12) plyne, že $\omega_0(\zeta) = i\delta(\zeta) + \beta \equiv 0$, což jsme měli dokázat.

Ještě řekneme několik slov o Lauricelliho rovnici (5). Už jsme poznamenali, že je v obecném případě neřešitelná. Není však obtížné dokázat (nebudeme se však u toho zdržovat), že podmínka (2) je nutná a postačující k tomu, aby měla řešení.

Užijme rovnice (5) na případ, kdy oblast D je omezena elipsou [371]. Nechť parametrické rovnice této elipsy jsou

$$\xi = a\cos\vartheta,\ \eta = b\sin\vartheta,\ \zeta = \xi + i\eta.$$

Položme

$$\zeta = \frac{c}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right), \tag{13}$$

kde $\sigma = \varrho e^{i\varphi}$ a konstanty ϱ ($\varrho > 1$) a c jsou určeny rovnicemi

$$c = \sqrt{a^2 - b^2};\ \varrho = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Transformace (13) převádí elipsu v kružnici $|\sigma| = \varrho$. Označme tuto kružnici písmenem γ. Položme

$$t = \frac{c}{2}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right). \tag{14}$$

Dosaďme (13) a (14) do (5). Označme ještě

$$\omega(\zeta) = \omega^*(\sigma),\ f(t) = f^*(\tau).$$

Dojdeme potom k rovnici

$$\omega^*(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega^*(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \frac{1}{\tau}} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega^*(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \frac{\varrho^4}{\tau}} -$$

$$- \frac{\varrho^4(\varrho^4 - 1)}{2\pi i\tau}\int_\gamma \frac{\overline{\omega^{*\prime}(\sigma)}}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma - \frac{\varrho^4}{\tau}} = f^*(\tau). \tag{15}$$

Rozviňme $\omega^*(\tau)$ a $f^*(\tau)$ ve Fourierovy řady čili, což je totéž, v mocninné řady pro τ a nechť

$$\omega^*(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\tau^k,\ f^*(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\tau^k.$$

Dosaďme toto do (15) a porovnejme koeficienty při stejných mocninách τ. Potom dostaneme soustavu rovnic s neznámými a_k:

$$2a_0 = A_0,$$
$$a_k + a_{-k}\varrho^{-4k} + (\varrho^4 - 1)\,k\bar{a}_k\varrho^{-2(k+1)} = A_k,$$
$$a_k + a_{-k} = A_{-k};\ k = 1, 2, \ldots$$

Prvou rovnicí je určeno a_0. Ze dvou dalších vylučme a_{-k}. Tak dostaneme rovnici pro jedinou neznámou a_k:

$$(1 - \varrho^{-4k})\, a_k + \varrho^{-2(k+1)}(\varrho^4 - 1)\, k\bar{a}_k = A_k - \varrho^{-4k} A_{-k}.$$

Odtud lze určit a_k pro všechny hodnoty k mimo $k = 1$. Pro $k = 1$ dává poslední rovnice

$$a_1 + \bar{a}_1 = \frac{A_1 - \varrho^{-4} A_{-1}}{1 - \varrho^{-4}}.$$

Pravá strana poslední rovnice musí býti reálná. Můžeme se lehce přesvědčit, že tato poslední podmínka je identická s podmínkou (2). Předpokládáme-li, že je splněna, najdeme:

$$\operatorname{Re}(a_1) = \frac{1}{2} \frac{A_1 - \varrho^{-4} A_{-1}}{1 - \varrho^{-4}}.$$

Imaginární část a_1 lze zvolit libovolně.

Znajíce a_k pro $k > 1$, určíme a_{-k} ze vzorce

$$a_{-k} = A_{-k} - a_k.$$

Nyní $\omega^*(\sigma) = \omega(\zeta)$ je známá. Zabývejme se výpočtem $\varphi(z)$. Ve vzorci (3) položme

$$z = \frac{c}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \quad \zeta = \frac{c}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right).$$

Protože z leží uvnitř L, lze se lehce přesvědčit, že $1 \leqq |\lambda| \leqq \varrho$. Vzorec (3) potom dává

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega^*(\sigma)(\sigma^2 - 1)}{\sigma(\sigma - \lambda)\left(\sigma - \frac{1}{\lambda}\right)}\, d\sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sigma^{k-1}(\sigma^2 - 1)}{(\sigma - \lambda)\left(\sigma - \frac{1}{\lambda}\right)}\, d\sigma.$$

Pro $k < 0$ je integrand regulární vně γ a rovná se nule v nekonečnu, a to řádově jako σ^{k-1}. Podle známé Cauchyho věty jsou příslušné integrály rovny nule. Pro $k = 0$ je integrand také regulární vně γ, avšak v nekonečnu se jeho residuum rovná jedné. Příslušný integrál se rovná jedné. Konečně pro $k > 0$ má integrand uvnitř γ jednoduché póly $\sigma = \lambda$ a $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ s residui λ^k resp. λ^{-k}. To dává

$$\varphi(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda^k + \lambda^{-k}).$$

Vyjádříme-li λ pomocí z, dostaneme pro $\varphi(z)$ rozvoj podle mnohočlenů:

$$\varphi(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{c^k} [(z + \sqrt{z^2 - c^2})^k + (z - \sqrt{z^2 - c^2})^k]. \quad (16)$$

§ 57. Dirichletův problém pro vlnovou rovnici. Vlnová rovnice

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (1)$$

(Δ je Laplaceův operátor) hraje význačnou úlohu v mnohých otázkách matematické fysiky. Speciálně se vyskytuje v problému ustálených elektromagnetických kmitů. Budeme zde vyšetřovat Dirichletův problém pro rovnici (1), při čemž se omezíme na rovinnou, jednoduše souvislou, omezenou oblast. Obecnější formulaci problému, vztahující se k vlnové rovnici, najde čtenář v pracích V. D. Kupradzeho [20] a V. Sternberga [38].

Není obtížné nahlédnout, že pro některá k je Dirichletův problém pro rovnici (1) neřešitelný. Abychom to dokázali, všimněme si tohoto: Nechť $f(\sigma)$ (σ je délka oblouku) je hodnota funkce $U(x, y)$ na hranici L oblasti D. Dirichletův problém spočívá v určení funkce $U(x, y)$, vyhovující dané rovnici (1), je-li dána $f(\sigma)$. Nechť $G(x, y; \xi, \eta)$ je Greenova funkce oblasti D. Podle Greenova vzorce

$$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \Delta U(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_L f(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

čili v důsledku rovnice (1)

$$U(x, y) - \frac{k^2}{2\pi} \iint_D G(x, y; \xi, \eta)\, U(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_L f(\sigma) \frac{\partial G}{\partial \nu} d\sigma. \quad (2)$$

Rovnice (2) je integrální rovnice Fredholmova typu pro neznámou $U(x, y)$ s parametrem $\frac{k^2}{2\pi}$ a s jádrem $G(x, y; \xi, \eta)$. Toto jádro je souměrné a nedegenerované a existuje proto nekonečně mnoho charakteristických čísel λ čili, což je totéž, hodnot k^2, pro něž rovnice (2) nemá řešení. Tyto hodnoty k^2 jsou reálné. Dokážeme, že jsou kladné (a tedy hodnoty k jsou reálné). Nechť $\lambda_n = \frac{k_n^2}{2\pi}$ je charakteristické číslo a $U_n(x, y)$ příslušná charakteristická funkce. Podle definice je splněna identita

$$U_n(x, y) - \frac{k_n^2}{2\pi} \iint_D G(x, y; \xi, \eta)\, U_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0. \tag{3}$$

Porovnáme-li to s rovnicí (2), vidíme, že se $U_n(x, y)$ rovná nule na hranici L a uvnitř oblasti vyhovuje rovnici

$$\Delta U_n + k_n^2 U_n = 0. \tag{4}$$

Podle Greenova vzorce

$$\iint_D U_n\, \Delta U_n\, dx\, dy = -\iint_D \left[\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \int_L U \frac{\partial U}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Avšak křivkový integrál se rovná nule, neboť $U = 0$ na L. Dále $\Delta U_n = - k_n^2 U_n$. Nyní z poslední rovnice plyne

$$k_n^2 = \frac{\displaystyle\iint_D \left[\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy}{\displaystyle\iint_D U_n^2(x, y)\, dx\, dy} > 0.$$

Ta okolnost, že čísla k_n jsou reálná, dá se lehce interpretovat fysikálně: k_n je veličina úměrná frekvenci vlastních kmitů prostředí vyplňujícího oblast D.

Budeme zde uvažovat Dirichletův problém za předpokladu, že $k \neq k_n$.

Jeden ze způsobů řešení Dirichletova problému jsme už v podstatě ukázali. Převedli jsme jej totiž na integrální rovnici (2). Této rovnice lze s výhodou užít, jestliže je známa Greenova funkce a její charakteristické funkce $U_n(x, y)$; v tom případě se řeší rovnice (2) methodou § 19. Avšak oblastí, pro něž jsou charakteristické funkce sestrojeny, není mnoho a v obecném případě je výhodné mít integrální rovnici s jednodušším jádrem.

Takovou rovnici lze sestavit pomocí t. zv. zobecněného potenciálu dvojvrstvy

$$U(x, y) = \int_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr)\right] d\sigma, \tag{5}$$

kde $H_0^{(2)}$ je Hankelova funkce druhého druhu,[1] r je vzdálenost bodu (x, y) od bodu σ na hranici a ν je vnější normála k hranici. Označme, jak je zvykem, indexy i a e limity při přibližování k hranici z vnitřku resp. z vnějšku oblasti D. Potom lze dokázat, že platí vzorce, známé pro logaritmický potenciál:

$$
\begin{gathered}
U_i(x, y) = -\mu(s) + \int\limits_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr)\right] d\sigma, \\
U_e(x, y) = \mu(s) + \int\limits_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr)\right] d\sigma, \qquad (6) \\
\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e.
\end{gathered}
$$

Zde s značí bod na hranici, k němuž konverguje bod (x, y), a n značí vnější normálu k hranici v bodě s. Dále jak uvnitř, tak vně L vyhovuje $U(x, y)$ rovnici (1).

Jestliže budeme hledat řešení Dirichletova problému ve tvaru potenciálu (5), povede vzorec (6) na integrální rovnici Fredholmova typu pro $\mu(s)$:

$$
\mu(s) - \int\limits_L \mu(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{1}{2i} H_0^{(2)}(kr)\right] d\sigma = -f(s). \qquad (7)
$$

Podrobnější vyšetřování, jež zde nebudeme provádět, ukazuje, že kromě hodnot k_n, pro něž Dirichletův problém nemá řešení, existují ještě výjimečné hodnoty $k = k_n'$, pro něž je rovnice (7) neřešitelná. Řešení Dirichletova problému pro hodnoty k_n' může být také určeno pomocí potenciálů. Výklad o těchto otázkách najde čtenář v již citovaných článcích V. D. Kupradzeho. Poznamenáme zde pouze, že čísla k_n' jsou reálná. Odtud speciálně plyne, že integrální rovnice (7) má řešení pro všechny komplexní hodnoty k.

Pro reálné k lze sestrojit integrální rovnici, která řeší Dirichletův problém pro rovnici (1) a má řešení pro všechna $k \neq k_n$, t. j. pro všechna k, pro něž je sám Dirichletův problém řešitelný. Odvození

---

[1] Viz na př. R. O. Kuzmin, Besselevy funkcii.

těchto rovnic se zakládá na vzorci, jenž dává obecný tvar integrálu rovnice (1).[1] Tento vzorec má pro reálné k tvar

$$U(x, y) = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} + \int_0^z H(z, \bar{z}, \lambda, k)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda +$$
$$+ \int_0^{\bar{z}} H(\bar{z}, z, \lambda, k)\, \overline{\varphi(\lambda)}\, d\lambda. \tag{8}$$

Zde $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$ je analytická funkce; konečně

$$H(z, \bar{z}, \lambda, k) = -\frac{k}{2} \sqrt{\frac{\bar{z}}{z - \lambda}}\, J_1(k\sqrt{\bar{z}(z - \lambda)}); \tag{9}$$

J_1 je Besselova funkce prvého druhu prvého řádu.

Dirichletův problém zřejmě rozřešíme, jestliže určíme funkci $\varphi(z)$, jež se vyskytuje ve vzorci (8). Budeme ji hledat ve tvaru integrálu typu Cauchyho

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{10}$$

jehož hustotu budeme považovat za reálnou. Opakujeme-li úvahy § 29, dojdeme k integrální rovnici

$$\mu(t) + \int_L K(t, \zeta)\, \mu(\zeta)\, d\sigma = f(s). \tag{11}$$

Zde

$$K(t, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(\nu, r)}{r} + \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i} \int_0^t \frac{H(t, \bar{t}, \lambda, k)}{\zeta - \lambda} d\lambda\right\}. \tag{12}$$

Dále, t je bod na hranici L, příslušející hodnotě parametru s, $r = |t - \zeta|$ a ν je směr vnější normály k L v bodě ζ. Opakujeme-li úvahy § 29, lehce dokážeme, že rovnice (11) je pro $k \neq k_n$ řešitelná. Najdeme-li z této rovnice $\mu(t)$, dostaneme pomocí vzorců (10) a (9) řešení našeho problému.

Jiný postup, jak převést základní úlohy pro vlnovou rovnici na integrální rovnici, je uveden v článku D. I. Šermana [37o].

[1] Odvození tohoto vzorce viz v [10]. Poněkud jsme pozměnili označení uvedeného článku.

§ 58. Tepelné potenciály a jejich užití. Omezíme-li se na případ, že teplota závisí kromě času pouze na dvou souřadnicích, můžeme rovnici pro vedení tepla napsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{1}$$

Nejjednodušším krajovým problémem, spojeným s touto rovnicí, je určit integrál rovnice (1), spojitý i s jeho prvými a druhými derivacemi ve všech bodech (x, y) nějaké oblasti D a pro všechny okamžiky času následující za počátečním. Hledaný integrál musí vyhovovat podmínkám:

a) počáteční

pro $t = 0$ $$U = F(x, y); \tag{2}$$

b) krajové

na hranici L oblasti D

$$U = f(s, t). \tag{3}$$

Tento problém budeme nazývat Dirichletovým problémem pro rovnici (1).

Dané funkce $F(x, y)$ a $f(s, t)$ budeme považovat za dostatečně hladké.

Na právě formulovaný problém se převede na př. vyšetřování pohybu viskosní kapaliny v dlouhé rouře konstantního průřezu.

Budeme předpokládat, že rychlosti částic kapaliny mají směr povrchových přímek roury. Tudíž, jestliže orientujeme osu z rovnoběžně s rourou, je od nuly různá pouze složka rychlosti ve směru z. Dále předpokládáme, že uvedená rychlost nezávisí na z. Potom, jak je známo,[1] uvedená rychlost vyhovuje rovnici (1). Je zřejmé, že stačí určit ji v libovolném průřezu roury. Tento průřez bude oblastí D. Abychom určili rychlosti v libovolný okamžik času, je nutné udat rozdělení rychlostí v počátečním okamžiku. Označíme-li $F(x, y)$ rychlost v bodě (x, y) pro $t = 0$, dojdeme k podmínce (2). Viskosní kapalina lne na stěny roury. Z toho plyne, že na hranici průřezu je rychlost rovna nule; krajová podmínka (3) v našem případě nabývá tvaru:

na L $$U(s, t) = 0.$$

---

[1] Viz N. E. Kočin, I. A. Kibel' a N. V. Roze, Těoretičeskaja gydromechanika, č. II.

Shora formulovanou krajovou úlohu lze převést na integrální rovnici, jesilže užijeme t. zv. tepelných potenciálů. Uveďme krátce jejich definici a základní vlastnosti; podrobný výklad theorie tepelných potenciálů lze najít na př. v [6].

Označme σ hodnotu parametru, určujícího polohu bodu na L i sám bod; ν značí vnější normálu k L v bodě σ. Dále označme r vzdálenost bodu σ od bodu (x, y); úsečku, jež je spojuje, budeme považovat za orientovanou od bodu σ k bodu (x, y).

Nechť $\mu(\sigma, t)$ je funkce definovaná pro $t \geqq 0$ a σ ležící na L. Budeme předpokládat, že $\mu(\sigma, t) = 0$ pro $t = 0$ a že je dostatečně hladká. Tepelným potenciálem dvojvrstvy budeme nazývat integrál

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{t - \tau} \frac{\partial}{\partial \nu} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\sigma, \tag{4}$$

definovaný pro body ležící jak uvnitř, tak i vně hranice L. Potenciál (4) lze také napsat ve tvaru

$$U(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{5}$$

K tomu stačí provést derivování za integračním znaménkem.

Funkce $\mu(\sigma, \tau)$ se nazývá hustotou potenciálu. Uveďme vlastnosti potenciálu (4).

1. Jak uvnitř, tak i vně L je $U(x, y)$ spojitá i se svými derivacemi libovolného řádu a vyhovuje diferenciální rovnici pro vedení tepla (rovnici (1)).

2. Pro $t = 0$ se potenciál (4) rovná nule.

3. Jestliže bod (x, y) konverguje k bodu s na hranici, pak potenciál (4) konverguje k limitním hodnotám, jež jsou dány vzorci

$$U_i = -\mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r)\, \mathrm{d}\sigma, \tag{6}$$

$$U_e = \mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{7}$$

4. Normální derivace potenciálu (4) je spojitá při překročení hranice.

Zabývejme se řešením Dirichletova problému pro rovnici pro vedení tepla. Není obtížné určit integrál této rovnice, vyhovující počáteční podmínce (2). K tomu stačí určit $F(x, y)$ v celé rovině (x, y), a to tak, že položíme na př. $F(x, y) = 0$ vně L, a potom je uvedené partikulární řešení dáno známým vzorcem

$$U_0(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}}\, d\xi\, d\eta,$$

čili, máme-li na zřeteli, že $F(x, y) = 0$ vně L,

$$U_0(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_D F(\xi, \eta)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}}\, d\xi\, d\eta. \tag{8}$$

Řešení Dirichletova problému budeme hledat ve tvaru

$$U(x, y, t) = U_0(x, y, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r \cos(\nu, r)\, d\sigma. \tag{9}$$

Z vlastností (1) a (2) tepelného potenciálu dvojvrstvy plyne, že funkce (9) vyhovuje diferenciální rovnici (1) a počáteční podmínce (2). Zbývá určit hustotu $\mu(\sigma, \tau)$ tak, aby se vyhověla krajové podmínce (3).

Nechť bod (x, y) konverguje k bodu s na hranici. Užijeme-li krajové podmínky (3) a vzorce (6), dostaneme integrální rovnici s neznámou $\mu(\sigma, \tau)$:

$$\mu(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r \cos(\nu, r)\, d\sigma = -g(s, t), \tag{10}$$

kde

$$g(s, t) = f(s, t) - \lim_{(x, y) \to s} U_0(x, y, t).$$

V příštím paragrafu podáme důkaz řešitelnosti získané integrální rovnice. Zde učiníme jen některé poznámky.

1. Pomocí téhož tepelného potenciálu lze řešit Dirichletův problém v tom případě, kdy oblast leží vně hranice L. Řešení se jako v předchá-

zejícím předpokládá ve tvaru (9). Necháme-li (x, y) konvergovat k bodu s, musíme užít vzorce (7) a to nás vede k integrální rovnici t. zv. vnějšího Dirichletova problému:

$$\mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r)\, \mathrm{d}\sigma = g(s, t). \quad (11)$$

2. V theorii šíření tepla hraje důležitou úlohu krajový problém, v němž je podmínka (3) nahrazena podmínkou:

$$\text{na } L \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu} + h(\sigma)\, U = f(\sigma, \tau), \quad (12)$$

kde $h(\sigma)$ je nějaká spojitá kladná funkce. Na tento problém se převádí vyšetřování teploty v dlouhém válci, který ztrácí (nebo získává) teplo do okolního prostředí, při čemž teplota tohoto prostředí v blízkosti válce je známa v libovolný okamžik. Tato úloha může být řešena pomocí tepelného potenciálu jednoduché vrstvy, který má tvar

$$V(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{t-\tau} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\sigma. \quad (13)$$

Jako v případě potenciálu dvojvrstvy budeme o hustotě $\varrho(\sigma, \tau)$ předpokládat, že je dostatečně hladká a rovna nule pro $\tau = 0$. Potenciál (13) vyhovuje rovnici pro vedení tepla; rovná se nule pro $t = 0$ a je spojitý při přechodu hranice. Jeho normální derivace má skok při přechodu hranice; označíme-li n vnější normálu k L v bodě s, máme:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i = \varrho(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r, n)\, \mathrm{d}\sigma, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e = -\varrho(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(r, n)\, \mathrm{d}\sigma. \quad (15)$$

Řešíce krajový problém s podmínkou (12), budeme hledat U ve tvaru

$$U(x, y, t) = U_0(x, y, t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\sigma, \quad (16)$$

kde U_0 je dáno vzorcem (8). Užijeme-li vzorců (14) a (15), dostaneme integrální rovnici pro neznámou $\varrho(\sigma, \tau)$:

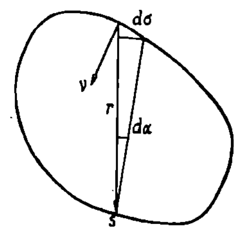
$$\pm\, \varrho(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r \cos(r, n)\, \mathrm{d}\sigma + \tag{17}$$
$$+ \frac{h(s)}{2\pi} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, \mathrm{d}\sigma = f(s, t) - \frac{\partial U_0}{\partial n} - h(s)\, U_0.$$

Znaménko plus odpovídá vnitřní oblasti, znaménko minus vnější oblasti.

3. Integrální rovnice (10), (11) a (17) podržují svůj tvar i tehdy, když je oblast D mnohonásobně souvislá.

4. Položme

$$\frac{\cos(r, \nu)}{r}\, \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\alpha. \tag{18}$$



Obr. 16.

Není obtížné nahlédnout, že $\mathrm{d}\alpha$ je úhel sevřený dvěma nekonečně blízkými radius-vektory, vedenými z bodu s ke koncovým bodům oblouku $\mathrm{d}\sigma$ (obr. 16). Rovnici (10) lze napsat ve tvaru

$$\mu(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r^2\, \mathrm{d}\alpha = -\, g(s, t). \tag{19}$$

V takovém tvaru naše integrální rovnice neztrácí smysl ani tehdy, když není hranice L hladká. Stačí pouze předpokládat, že integrál

$$\int_L |\mathrm{d}\alpha| = \int_L \frac{|\cos(\nu, r)|}{r}\, \mathrm{d}\sigma$$

má konečnou hodnotu.

5. Tepelné potenciály v trojdimensionálním prostoru jsou dány následujícími vzorci:[1]

[1] Viz [8].

potenciál jednoduché vrstvy

$$V(x, y, z, t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int\int_S \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\sigma; \tag{20}$$

potenciál dvojvrstvy

$$U(x, y, z, t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int\int_S \frac{\mu(\sigma, \tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\sigma. \tag{21}$$

Pomocí těchto potenciálů lze základní krajové problémy převést na integrální rovnice právě tak, jak jsme to již učinili při rovinném problému.

§ 59. Konvergence postupných aproximací. V monografii G. M. Mjuntce [6] je dokázáno, že rovnice (10) a (11), § 58, lze řešit methodou postupných aproximací. Přitom se předpokládá, že hranice L je hladká a má spojitou křivost.

V tomto paragrafu podáme důkaz konvergence postupných aproximací za předpokladu, že hranice L je konvexní, není však nutně hladká. Získaný odhad rychlosti konvergence bude horší než u Mjuntce. Uvedeme však tyto horší odhady, neboť nehladké hranice, speciálně mnohoúhelníkové, se často vyskytují v praxi.

Rovnice (10), § 58, a také rovnice konjugovaná s rovnicí (11), § 58, jsou zvláštní případy obecnější rovnice

$$\mu(s, t) - \frac{\lambda}{4\pi a^2} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-t)}} r^2 \,\mathrm{d}\alpha = g(s, t) \tag{1}$$

pro $\lambda = \pm 1$. Dokažme, že postupné aproximace pro rovnici (1) konvergují, jestliže hranice L je konvexní a $|\lambda| \leqq 1$.

Ve shodě s methodou postupných aproximací položme

$$\mu(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mu_n(s, t). \tag{2}$$

Dosadíme-li toto do (1) a porovnáme-li koeficienty při stejných mocninách λ, dostaneme rekurentní vzorce, jež nám dovolují určit funkce $\mu_n(s, t)$:

$$\mu_0(s, t) = g(s, t),$$
$$\mu_n(s, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_L \frac{\mu_{n-1}(s, t)}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-t)}} r^2 \,\mathrm{d}\alpha. \tag{3}$$

Nechť $|g(s, t)| = |\mu_0(s, t)| \leqq A_0$, kde A_0 je jistá konstanta. Předpokládejme dále, že $|\mu_{n-1}(s, t)| \leqq A_{n-1}$, A_{n-1} je také konstanta, a určeme odhad pro $|\mu_n(s, t)|$.

Zřejmě máme

$$|\mu_n(s, t)| \leqq \frac{A_{n-1}}{4\pi a^2}\int_L \mathrm{d}\alpha \int_0^t \frac{r^2}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\tau.$$

Provedeme-li transformaci

$$\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)} = z,$$

lehce najdeme:

$$\frac{1}{4a^2}\int_0^t \frac{r^2}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\tau = e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}.$$

A tedy

$$|\mu_n(s, t)| \leqq \frac{A_{n-1}}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\alpha.$$

Dále

$$\frac{1}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\alpha < \frac{1}{\pi}\int_L \mathrm{d}\alpha = \frac{\Omega(s)}{\pi}. \tag{4}$$

Zde jsme $\Omega(s)$ označili úhel, pod nímž vidíme hranici z bodu s. Zřejmě $\Omega(s) = \pi$ v bodech, v nichž existuje tečna, a (neboť hranice je konvexní) $\Omega(s) < \pi$ v bodech s nespojitou tečnou. V každém případě

$$\frac{1}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\alpha < 1.$$

Položme

$$q(t_0) = \max_{0 \leqq t \leqq t_0} \frac{1}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\alpha. \tag{5}$$

Zřejmě $q(t_0) < 1$ pro libovolné t_0 a

$$|\mu_n(s, t)| < q(t_0)\, A_{n-1}, \quad t \leqq t_0. \tag{6}$$

Chceme-li vyšetřovat postupné aproximace pro nějaké t, pevně zvolíme libovolné t_0, $t_0 \geqq t$. Užijeme-li nerovnosti (6), najdeme:

$$|\mu_n(s, t)| < A_0\, q^n(t_0). \tag{7}$$

Z posledního odhadu plyne konvergence postupných aproximací, stejnoměrná pro $0 \leqq t \leqq t_0$.

Jestliže hranice L je hladká a se spojitou křivostí, pak odhad pro $|\mu_n(s, t)|$ je:[1]

$$|\mu_n(s, t)| < \frac{A_0 (pt)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}. \tag{8}$$

Zde Γ je Eulerova funkce gamma a konstanta p závisí na tvaru hranice.

KAPITOLA 5

UŽITÍ THEORIE SOUMĚRNÝCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

§ 60. Vlastní kmity struny. Uvažujme nehomogenní strunu délky l, jež v rovnovážné poloze zaujímá úsečku $\langle 0, l\rangle$ na ose abscis a je podrobena napětí T. Koncové body struny budeme považovat za pevné. Nechť na strunu působí spojitě rozložená síla $F(x, t)$. Tím myslíme, že v okamžiku t působí na element struny $\langle x, x + dx\rangle$ síla rovnající se $F(x, t)\, dx$. Budeme dále předpokládat, že tato síla působí kolmo na strunu. Rovnice pro příčné kmity struny, jak je známo, má tvar

$$\varrho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \tag{1}$$

kde $\varrho(x)$ je hustota struny v bodě s úsečkou x.

---

[1] Viz [6].

Mimo rovnici (1) musí výchylka struny $u(x, t)$ od rovnovážné polohy vyhovovat ještě podmínkám:

a) krajovým

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \tag{2}$$

jež vyjadřují, že konce struny jsou upevněny;

b) počátečním

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi(x), \tag{3}$$

kde $\varphi(x)$ a $f(x)$ je počáteční rychlost resp. počáteční výchylka struny.

Abychom určili vlastní kmity struny, řešme nejprve pomocnou úlohu. Najděme tvar struny, jejíž konce jsou upevněny a jež je v rovnováze vlivem spojitě rozložené síly $F(x)$. Rovnice (1) přejde v tom případě na rovnici rovnováhy struny

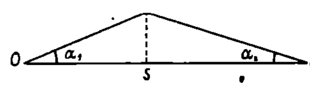
$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{T} F(x) = 0. \tag{4}$$

Uvažujme speciální případ, kdy na celou strunu, s výjimkou jednoho bodu $x = s$, nepůsobí zatížení a v bodě s působí bodová síla, jež se číselně rovná jednotce. V našem případě $F(x) = 0$ pro $x \neq s$; na každém z intervalů $0 \leqq x < s$ a $s < x \leqq l$ má rovnice (4) tvar

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

odkud

$$u = \alpha_1 x + \beta_1 \text{ pro } 0 \leqq x < s,$$
$$u = \alpha_2 x + \beta_2 \text{ pro } s < x \leqq l.$$



Obr. 17.

Poslední rovnice ukazují, že na každém z intervalů $\langle 0, s)$ a $(s, l\rangle$ má struna tvar přímky (obr. 17).

Poněvadž koncové body struny jsou upevněny, platí rovnice (2). Užijeme-li jich, nalezneme, že $\beta_1 = 0$ a $\beta_2 = -\alpha_2 l$, a tedy

$$u = \begin{cases} \alpha_1 x & (0 \leqq x < s), \\ \alpha_2(x - l) & (s < x \leqq l). \end{cases}$$

Zbývá určit koeficienty α_1 a α_2. Všimněme si především toho, že pro $x = s$ je struna spojitá a oba výrazy pro u musí v tomto bodě souhlasit. To dává

$$\alpha_1 s = -\alpha_2(l - s). \tag{5}$$

Součet vertikálních průmětů napětí na obou částech struny se musí rovnat jedné — velikosti síly působící v bodě s:

$$T(\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2) = 1$$

čili, poněvadž úhly γ_1 a γ_2 jsou malé,

$$T(\operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\gamma_2) = 1.$$

Avšak $\operatorname{tg}\gamma_1 = \alpha_1$, $\operatorname{tg}\gamma_2 = -\alpha_2$. Odtud

$$T(\alpha_1 - \alpha_2) = 1. \tag{6}$$

Určíme-li α_1 a α_2 z rovnic (5) a (6) a dosadíme-li je do (4), dostaneme

$$u = \begin{cases} \dfrac{x(l-s)}{lT} & (0 \leqq x \leqq s), \\[2ex] \dfrac{s(l-x)}{lT} & (s \leqq x \leqq l). \end{cases}$$

Zaveďme označení

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{x(l-s)}{l} & (0 \leqq x \leqq s), \\[2ex] \dfrac{s(l-x)}{l} & (s \leqq x \leqq l). \end{cases} \tag{7}$$

Potom

$$u = \frac{1}{T} G(x, s). \tag{8}$$

Pro další výklad je důležité si všimnout toho, že funkce $G(x, s)$ je souměrná:

$$G(x, s) \equiv (Gs, x). \tag{9}$$

Nyní už není obtížné určit rovnovážný tvar struny při působení libovolné, spojitě rozložené síly $F(x)$. Vskutku, jestliže v bodě s působí síla, rovná nikoliv jednotce, nýbrž nějaké veličině F, bude příslušná výchylka rovna

$$u = \frac{F}{T} G(x, s).$$

Nechť nyní v bodech $s_1, s_2, \ldots, s_n$ struny působí síly $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Potom

$$u = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{T} G(x, s_k).$$

Přejdeme-li v této rovnici k limitě, nalezneme, že v případě spojitě rozložené síly s hustotou $F(s)$

$$u = \frac{1}{T} \int_0^l G(x, s)\, F(s)\, \mathrm{d}s. \tag{10}$$

Ze vzorce (10) lehce získáme rovnici pro kmity struny. Podle d'Alembertova principu stačí připojit k síle $F(s)\,\mathrm{d}s$, působící na element struny $\mathrm{d}s$, „inerciální sílu“ $-\varrho(s)\,\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Potom dostaneme

$$u(x, t) = \frac{1}{T} \int_0^l G(x, s)\, F(s)\, \mathrm{d}s - \frac{1}{T} \int_0^l \varrho(s)\, G(x, s)\, \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2}\, \mathrm{d}s \tag{11}$$

— integro-diferenciální rovnici pro kmity upevněné struny, jež je ekvivalentní diferenciální rovnici (1) s krajovými podmínkami (2). Síla F může záviset na čase — potom v rovnici (11) je třeba psát $F(s, t)$ místo $F(s)$. Jestliže $F(s, t) \equiv 0$, dostaneme integro-diferenciální rovnici vlastních kmitů upevněné struny

$$u(x, t) = -\frac{1}{T} \int_0^l \varrho(s)\, G(x, s)\, \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2}\, \mathrm{d}s. \tag{12}$$

Budeme hledat periodická řešení této rovnice; položme

$$u(x, t) = v(x) \sin(\nu t + \varepsilon).$$

Dosadíme-li toto do (12), zjistíme, že $v(x)$ vyhovují integrální rovnici

$$v(x) - \frac{\nu^2}{T} \int_0^l \varrho(s)\, G(x, s)\, v(s)\, \mathrm{d}s = 0. \tag{14}$$

Jestliže je struna homogenní, pak $\varrho(x) = \varrho =$ konst. V tom případě $v(x)$ vyhovuje souměrné integrální rovnici

$$v(x) - \mu \int_0^l G(x, s)\, v(s)\, \mathrm{d}s = 0; \quad \mu = \frac{\nu^2 \varrho}{T}. \tag{15}$$

V obecném případě není rovnice (14) souměrná. Lze ji však lehce učinit souměrnou (viz § 18), jestliže ji násobíme výrazem $\sqrt{\varrho(x)}$ a položíme

$$v(x)\sqrt{\varrho(x)} = \varphi(x), \quad G(x, s)\sqrt{\varrho(x)\,\varrho(s)} = K(x, s).$$

Potom dostaneme rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^l K(x, s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s = 0; \quad \lambda = \frac{\nu^2}{T}, \tag{16}$$

jejíž jádro je souměrné.

Dokažme, že charakteristická čísla rovnice (16) jsou kladná. Nechť $\varphi(x)$ a λ vyhovují rovnici (16). Klademe-li $\varphi(x) = v(x)\sqrt{\varrho(x)}$, najdeme, že $v(x)$ vyhovuje rovnici (14), v které je $\frac{\nu^2}{T}$ nahrazeno λ:

$$v(x) - \lambda \int_0^l \varrho(s)\,G(x, s)\,v(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{14_1}$$

Ze (7) je patrno, že pro $x = 0$ a pro $x = l$ se $G(x, s)$ rovná nule. Avšak potom ze (14_1) plyne, že

$$v(0) = v(l) = 0. \tag{17}$$

Derivováním rovnice (14) dojdeme k diferenciální rovnici

$$v''(x) + \lambda\,\varrho(x)\,v(x) = 0. \tag{18}$$

Připouštějíce, že $v(x)$ může být komplexní, násobme (18) výrazem $\overline{v(x)}$ a zintegrujme:

$$\int_0^l v''(x)\,\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x + \lambda \int_0^l \varrho(x)\,|v(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0. \tag{19}$$

Prvý integrál integrujme per partes. V důsledku rovnic (17)

$$\int_0^l v''(x)\,\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^l |v'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Rovnice (19) nyní dává

$$\lambda = \frac{\int_0^l |v'(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho(x)|v^2(x)|\,\mathrm{d}x} > 0.$$

Jestliže určíme charakteristická čísla λ_n rovnice (16), určíme tím také frekvence charakteristických kmitů struny, jež se rovnají

$$\frac{\nu_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_n T}.$$

Příslušné charakteristické funkce určují tvar struny kmitající s frekvencí $\frac{\nu_n}{2\pi}$:

$$v_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\varrho(x)}}.$$

Charakteristické funkce a charakteristická čísla souměrné rovnice (16) mohou být určeny methodami, vyloženými v kap. 1 části I.

§ 61. Kmity struny, jejíž hustota se mění lineárně.

Pro určitost výpočtů budeme předpokládat, že $l = 1$ a hustota $\varrho(x)$ je dána rovnicí

$$\varrho(x) = \varrho_0(1 + x). \tag{1}$$

Potom rovnice (14), § 60 nabude tvaru

$$v(x) - \frac{\nu^2\varrho_0}{T}\int_0^1 (1 + s)\, G(x, s)\, v(s)\, ds = 0.$$

Násobme tuto rovnici $\sqrt{1 + x}$ a položme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sqrt{1 + x}\, v(x), \\ K(x, s) &= \sqrt{(1 + x)(1 + s)}\, G(x, s); \\ \lambda &= \frac{\nu^2\varrho_0}{T}. \end{aligned} \tag{2}$$

Funkce $\varphi(x)$ vyhovuje integrální rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0. \tag{3}$$

Všimněme si, že v našem případě

$$G(x, s) = \begin{cases} x(1 - s) & (0 \leqq x \leqq s), \\ s(1 - x) & (s \leqq x \leqq 1). \end{cases}$$

Určeme frekvenci základního tónu. K tomu stačí určit prvé charakteristické číslo rovnice (3). Užijme methody § 15, jež dává λ_1 pomocí stop jádra. Podle vzorce (5), § 15

$$A_2 = \int_0^1\int_0^1 K^2(x, s)\,dx\,ds = \int_0^1\int_0^1 (1 + x)(1 + s)\,G^2(x, s)\,dx\,ds =$$
$$= 2\int_0^1 (1 + x)(1 - x)^2\,dx \int_0^x (1 + s)\,s^2\,ds = \tfrac{127}{5040}.$$

Ve druhém přibližném vzorci (7_1), § 15

$$|\lambda_1| \approx \frac{1}{\sqrt[2m]{A_{2m}}}$$

položme $m = 1$.

V § 60 jsme dokázali, že charakteristická čísla rovnice (3) jsou kladná. V takovém případě

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}} = 6{,}300$$

a tedy

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{T\lambda_1}{\varrho_0}} = 2{,}510\sqrt{\frac{T}{\varrho_0}}.$$

Abychom dostali přesnější hodnotu λ_1, vypočtěme druhé iterované jádro

$$K_2(x, s) = \int_0^1 K(x, t)\,K(t, s)\,dt = \sqrt{(1 + x)(1 + s)} \int_0^1 (1 + t)\,G(x, t)\,G(t, s)\,dt.$$

Vypočtěme jádro $K_2(x, s)$ za předpokladu, že $x > s$. Pro $x < s$ se jádro $K_2(x, s)$ určí z podmínky, že je souměrné. Integrační obor $\langle 0, 1\rangle$ rozdělíme na tři: Od nuly do s, od s do x a od x do 1. Užijeme-li definice $G(x, s)$, dostaneme:

$$\int_0^1 (1 + t)\,G(x, t)\,G(t, s)\,dt =$$
$$= \int_0^s (1 + t)\,t^2(1 - x)(1 - s)\,dt + \int_s^x t(1 - t^2)\,s(1 - x)\,dt +$$
$$+ \int_x^1 (1 + t)(1 - t)^2\,xs\,dt =$$
$$= \tfrac{5}{12}xs - \tfrac{1}{2}x^2s - \tfrac{1}{6}s^3 + \tfrac{1}{6}xs^3 - \tfrac{1}{12}s^4 + \tfrac{1}{12}x^4s + \tfrac{1}{12}xs^4.$$

Odtud pro $x > s$,

$$K_2(x, s) = \frac{\sqrt{(1+x)(1+s)}}{12} (5xs - 6x^2s - 2s^3 + 2xs^3 - s^4 + x^4s + xs^4).$$

Hodnotu $K_2(x, s)$ pro $x < s$ dostaneme jednoduchou výměnou argumentů x a s: pro $x < s$

$$K_2(x, s) = \frac{\sqrt{(1+x)(1+s)}}{12} (5xs - 6xs^2 - 2x^3 + 2x^3s - x^4 + xs^4 + x^4s).$$

Nyní

$$A_4 = \int_0^1\int_0^1 K_2^2(x, s)\,dx\,ds = 2\int_0^1 dx \int_0^x K_2^2(x, s)\,ds = 0{,}0006154.$$

Ve druhém vzorci (7_1), § 15 položme nyní $m = 2$. Potom

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[4]{A_4}} = 6{,}349.$$

Tato hodnota λ_1 je menší než hodnota přesná. Přibližnou hodnotu, jež je větší než hodnota přesná, dostaneme, vezmeme-li prvý ze vzorců (7_1), § 15, který pro $\lambda_1 > 0$ má tvar

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}.$$

Položme v tomto vzorci $m = 1$. Potom

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_2}{A_4}} = 6{,}398.$$

Přesná hodnota λ_1 leží mezi čísly 6,349 a 6,398. Je zajímavé si všimnout, že poměrně nepřesný vzorec

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}}$$

dal hodnotu λ_1 s chybou menší než 2%.

Známe-li hodnoty A_2 a A_4, můžeme vypočítat i druhé charakteristické číslo λ_2, užívajíce přibližného vzorce (6), § 17:

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}}, \quad B_{2m} = A_{2m}^2 - A_{4m}.$$

Klademe-li $m = 1$ a všimneme-li si, že $\lambda_2 > 0$, máme:

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{A_2^2 - A_4}} = 49{,}9.$$

§ 62. Greenova funkce. Podrobný výklad otázek, spojených s pojmem Greenovy funkce, najde čtenář v mnoha dobře známých učebnicích. Poukažme na př. na knihy Couranta-Hilberta [4], V. I. Smirnova [8] a I. I. Privalova [7]. Omezíme se zde proto pouze na definici Greenovy funkce a na uvedení jejích základních vlastností.

Začněme nejjednodušším případem. Nechť je dán obyčejný lineární diferenciální operátor druhého řádu

$$L(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)\,y, \tag{1}$$

kde $p(x) \geqq 0$. Budeme uvažovat funkce $y(x)$, které v koncových bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ splňují podmínky

$$\alpha\, y(a) + \beta\, y'(a) = 0, \quad \gamma\, y(b) + \delta\, y'(b) = 0 \tag{2}$$

a uvnitř intervalu jsou spojité i se svou první derivací. Druhou derivaci $y''(x)$ podrobíme jediné podmínce – aby $L(y)$ měl smysl. Předpokládejme, že ani jedna z těchto funkcí, kromě funkce $y(x) \equiv 0$, neanuluje operátor $L(y)$. Jinak řečeno, předpokládáme, že jediným řešením rovnice

$$L(y) = 0, \tag{3}$$

jež vyhovuje podmínkám (2) a je spojité i se svou první derivací, je $y \equiv 0$. Greenovou funkcí operátoru $L(y)$ pro krajové podmínky (2) se nazývá funkce dvou proměnných $G(x, y)$, která má tyto vlastnosti:

1. $G(x, s)$ je spojitá pro $a \leqq x \leqq b$ a $a \leqq s \leqq b$.

2. V každém z intervalů $a \leqq x < s$ a $s < x \leqq b$ jsou derivace $\dfrac{\partial G(x, s)}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial G(x, s)}{\partial s}$ spojité.

3. V bodě $x = s$ má derivace $\dfrac{\partial G(x, s)}{\partial s}$ skok určený vzorcem

$$\left.\frac{\partial G(x, s)}{\partial s}\right|_{x = s + 0} - \left.\frac{\partial G(x, s)}{\partial s}\right|_{x = s - 0} = \frac{1}{p(s)}. \tag{4}$$

4. Pro pevně zvolené s vyhovuje $G(x, s)$ rovnici (3)

$$L(G) = 0$$

v každém z intervalů $a \leqq x < s$ a $s < x \leqq b$.

5. Jako funkce proměnné x vyhovuje $G(x, s)$ krajovým podmínkám (2).

Greenovu funkci lze sestrojit takto:

Určíme integrály $u(x)$ a $v(x)$ rovnice (3), vyhovující Cauchyho podmínkám

$$u(a) = \beta, \quad u'(a) = -\alpha,$$
$$v(b) = \delta, \quad v'(b) = -\gamma.$$

Je zřejmé, že $u(x)$ vyhovuje také prvé z krajových podmínek (2) a $v(x)$ druhé. Integrály $u(x)$ a $v(x)$ jsou lineárně nezávislé, neboť v opačném případě by existoval integrál rovnice (3), vyhovující oběma krajovým podmínkám (2), a to je ve sporu s naším předpokladem.

Z theorie lineárních diferenciálních rovnic je známa identita

$$p(x)[u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x)] = -c. \tag{5}$$

Konstanta c je různá od nuly, neboť v opačném případě by $u(x)$ a $v(x)$ byly lineárně závislé.

Jestliže jsme určili integrály $u(x)$ a $v(x)$, můžeme okamžitě napsat výraz pro Greenovu funkci, totiž

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{u(x)\, v(s)}{c} & (a \leqq x \leqq s), \\[2ex] \dfrac{u(s)\, v(x)}{c} & (s \leqq x \leqq b). \end{cases} \tag{6}$$

Není obtížné se přesvědčit o tom, že funkce (6) má vlastnosti 1 až 5, vytčené v definici Greenovy funkce.

Ze vzorce (6) přímo plyne, že $G(x, s)$ je souměrná funkce, t. j.

$$G(x, s) \equiv G(s, x). \tag{7}$$

Skutečně, nechť na př. $x < s$. Potom $G(x, s) = \dfrac{u(x)\, v(s)}{c}$. Počítáme-li $G(s, x)$, musíme vzít dolní řádku v (6), neboť prvý argument, s, je větší než druhý. Avšak potom

$$G(s, x) = \frac{1}{c} u(x)\, v(s) = G(x, s).$$

Druhá vlastnost Greenovy funkce, velmi důležitá pro aplikace, je vyjádřena následující větou:

Integrál nehomogenní rovnice

$$L(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)\,y = -f(x), \tag{8}$$

vyhovující krajovým podmínkám (2), *je dán vzorcem*

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)\,f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Řešení (9) *je jediné.*

Důkaz této věty najde čtenář v učebnicích citovaných na začátku tohoto paragrafu.

Není obtížné se přesvědčit o tom, že funkce $G(x, s)$ sestrojená v § 60 je Greenovou funkcí operátoru $L(y) \equiv y''$ při krajových podmínkách $y(0) = y(l) = 0$.

Vzorec (9) nám dovoluje podat jednoduchou a užitečnou interpretaci Greenovy funkce. V rovnici (8) budeme $f(x)$ považovat za spojitě rozloženou sílu a $y(x)$ za posunutí bodu x vzhledem k rovnovážné poloze vyvolané touto silou. V takovém případě je $G(x, s)$ posunutí bodu x, vyvolané jednotkovou bodovou silou, působící v bodě s. Předpokládejme, že v intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ působí taková spojitě rozložená síla $f(x)$, jejíž hlavní vektor se rovná jednotce:

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{10}$$

Nechť intervaly $\langle a, s - \varepsilon\rangle$ a $\langle s + \varepsilon, b\rangle$ nejsou podrobeny působení sil, takže v těchto intervalech $f(x) = 0$. Ve vzorci (9) integrály v intervalech $\langle a, s - \varepsilon\rangle$ a $\langle s + \varepsilon, b\rangle$ vymizejí, a tak dostaneme

$$y(x) = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} G(x, t)\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Předpokládáme-li, že $f(x) > 0$, můžeme užít věty o střední hodnotě integrálu:

$$y(x) = G(x, s')\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t = G(x, s'),\quad s - \varepsilon < s' < s + \varepsilon.$$

Necháme-li $\varepsilon \to 0$, přejdeme k bodové síle působící v bodě s a rovné jedné v důsledku rovnice (10). Přitom $s' \to s$, a poněvadž $G(x, s)$ je spojitá, je v limitě

$$y(x) = G(x, s),$$

což jsme měli dokázat.

Při úlohách z theorie kmitů a theorie stability je třeba často řešit následující problém. Je dána diferenciální rovnice

$$L(y) + \lambda\, r(x)\, y = 0 \tag{11}$$

čili podrobněji

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + [q(x) + \lambda\, r(x)]\, y = 0,$$

kde $r(x)$ je spojitá kladná funkce a λ je číselný parametr, jenž není předem dán. Chceme určit ty hodnoty λ, pro něž existuje integrál rovnice (11), který je spojitý a má spojitou derivaci, jež se nerovná identicky nule a vyhovuje krajovým podmínkám (2). Známe-li Greenovu funkci, můžeme pomocí vzorce (9) převést uvedený problém na určení charakteristických čísel integrální rovnice se souměrným jádrem. Všimněme si, že rovnice (11) přejde v (8), jestliže položíme $f(x) = \lambda\, r(x)\, y(x)$. Protože hledaný integrál vyhovuje podmínkám (2), lze užít vzorce (9):

$$y(x) = \lambda \int_a^b r(s)\, G(x, s)\, y(s)\, \mathrm{d}s. \tag{12}$$

Rovnice (12) je homogenní integrální rovnice s neznámou $y(x)$ a parametrem λ; vyloučíme-li případ, že $r(x) =$ konst., je nesouměrná. Abychom ji převedli na souměrnou, násobme obě strany $\sqrt{r(x)}$ a položme

$$\sqrt{r(x)}\, y(x) = \varphi(x), \quad \sqrt{r(x)\, r(s)}\, G(x, s) = K(x, s).$$

Tak dostaneme rovnici

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s = 0, \tag{13}$$

jejíž jádro je již souměrné. Charakteristická čísla této rovnice jsou zřejmě hledané hodnoty λ.

Je užitečné si všimnout, že všechna charakteristická čísla rovnice (13) jsou jednoduchá, t. j. každému z nich přísluší pouze jedna charakteristická funkce. Abychom se o tom přesvědčili, předpokládejme, že charakteristickému číslu λ' příslušejí lineárně nezávislé charakteristické funkce $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$. Sestrojme funkce

$$y_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{r(x)}}, \quad y_2(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{r(x)}}.$$

Tyto funkce vyhovují integrální rovnici (12) pro $\lambda = \lambda'$. Odtud plyne, že vyhovují téže diferenciální rovnici

$$L(y) + \lambda' r(x)\, y = 0.$$

s krajovými podmínkami (2). Všimněme si prvé z těchto podmínek:

$$\alpha\, y_1(a) + \beta\, y_1'(a) = 0, \quad \alpha\, y_2(a) + \beta\, y_2'(a) = 0.$$

Protože se čísla α a β nerovnají nule současně, je

$$\begin{vmatrix} y_1(a), & y_1'(a) \\ y_2(a), & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Napsaný determinant je hodnota Wronského determinantu integrálů $y_1(x)$ a $y_2(x)$ pro $x = a$. Protože se rovná nule v jednom bodě, rovná se nule identicky. Odtud plyne, že $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou lineárně závislé. Avšak potom $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou také lineárně závislé, což je ve sporu s předpokladem.

Pojem Greenovy funkce lze rozšířit na rovnice vyššího řádu a s větším počtem nezávisle proměnných. Tak na př. Greenova funkce Laplaceovy rovnice je definována jako funkce dvou bodů oblasti, M a M_1, mající logaritmickou singularitu[1] pro $M = M_1$, harmonická pro $M \neq M_1$ a rovná nule na hranici oblasti.

§ 63. Torsní kmity tyčí (také v přítomnosti osamělých hmot). Diferenciální rovnice torsních kmitů tyčí má tvar

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GI_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right] - I_m \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Zde je ϑ úhel zkroucení, I_m je moment setrvačnosti délkové jednotky tyče vzhledem k rotační ose, G je modul torse, I_p je moment tuhosti v kroucení. Budeme uvažovat periodické kmity tyče, jejíž jeden konec,

[1] Uvažujeme případ dvou nezávisle proměnných.

$x = 0$, je pevně vetknut a druhý konec, $x = l$, je volný. Podmínky pro konce tyče budou

$$\begin{aligned} &\vartheta = 0 \text{ pro } x = 0, \\ &\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0 \text{ pro } x = l. \end{aligned} \tag{2}$$

Hledajíce periodická řešení, položíme

$$\vartheta(x, t) = \mathrm{e}^{i\nu t}\,\Theta(x).$$

Dosadíme-li toto do (1), zjistíme, že $\Theta(x)$ vyhovuje obyčejné diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[GI_p\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda I_m\Theta = 0;\ \lambda = \nu^2. \tag{3}$$

Z (2) plynou krajové podmínky, jimž vyhovuje $\Theta(x)$:

$$\Theta(0) = 0;\ \Theta'(l) = 0. \tag{4}$$

Je zřejmé, že význam mají pouze ty funkce $\Theta(x)$, jež se nerovnají identicky nule: jestliže $\Theta(x) \equiv 0$, pak i $\vartheta(x, t) \equiv 0$ a kmitů vůbec není. Tak docházíme ke speciálnímu případu problému, formulovaného v předcházejícím paragrafu: Jest určit hodnoty λ, pro něž se $\Theta(x)$, vyhovující rovnici (3) a podmínkám (4), nerovná identicky nule. Jak už víme, tato úloha se převádí na integrální rovnici.

Sestrojme příslušnou Greenovu funkci. Označme ji $H(x, s)$. Funkce $H(x, s)$ vyhovuje diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[GI_p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = 0.$$

Tato rovnice má lineárně nezávislé integrály

$$u(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{GI_p},\ v(x) = 1,$$

vyhovující podmínkám $u(0) = 0$, $v'(l) = 0$. Při tom v našem případě $p(x) = GI_p$ a

$$p(x)[uv' - vu'] = -1.$$

Odtud $c = 1$ [vzorec (5), § 62], a tedy

$$H(x, s) = \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}x}{GI_p} & (0 \leqq x \leqq s), \\ \int\limits_0^s \frac{\mathrm{d}x}{GI_p} & (s \leqq x \leqq l). \end{cases} \tag{5}$$

Integrální rovnice pro $\Theta(x)$ má tvar

$$\Theta(x) - \lambda \int\limits_0^l H(x, s)\, I_m(s)\, \Theta(s)\, \mathrm{d}s = 0. \tag{6}$$

Vynásobíme-li ji $\sqrt{I_m(x)}$ a zavedeme-li odpovídající označení, převedeme ji na rovnici se souměrným jádrem.

Rovnice (6) byla odvozena za předpokladu, že se moment setrvačnosti $I_m(x)$ mění podél tyče spojitě. Může se však stát, že na tyči jsou osamělé hmoty. Potom se tvar rovnice (6) mění. Speciálně, jestliže je n osamělých hmot s momenty setrvačnosti $I_1, I_2, \ldots, I_n$ rozložených v bodech $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tyče, máme místo (6):

$$\Theta(x) - \lambda \int\limits_0^l H(x, s)\, I_m(s)\, \Theta(s)\, \mathrm{d}s - \lambda \sum_{k=1}^{n} H(x, s_k)\, I_k\, \Theta(s_k) = 0. \tag{7}$$

Lze dokázat, že Hilbert-Schmidtovu theorii lze úplně přenést na rovnice typu (7). V pracích I. V. Anaňjeva [9] a A. I. Komaje [16] je uvedeno užití rovnice typu (7) na problém kmitů křídla s osamělými břemeny. K výpočtu frekvencí užívají tito autoři hlavně Kellogovy methody.

§ 64. Stabilita tlačené tyče. (Vzpěr tyče.) Rovnice ohybové křivky pružné tyče, má, jak známo, tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[EI \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = M,$$

kde M a I je působící moment a moment setrvačnosti v průřezu s úsečkou x, E je Youngův modul. Uvažujme případ, kdy tyč je stlačována silami působícími na jejích koncích. Označme velikost každé z těchto sil P. Potom $M = -Py$ a rovnice ohnuté osy bude

$$\frac{d}{dx}\left[EI\frac{dy}{dx}\right] + Py = 0. \tag{1}$$

Konce tyče se neposunují ve směru kolmém na tyč, a proto, označíme-li délku tyče l, máme

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{2}$$

Rovnici (1) dělme E a položme $\frac{P}{E} = \lambda$. Potom

$$\frac{d}{dx}\left[I\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0. \tag{3}$$

Označme $G(x, s)$ Greenovu funkci operátoru

$$\frac{d}{dx}\left[I\frac{dy}{dx}\right]$$

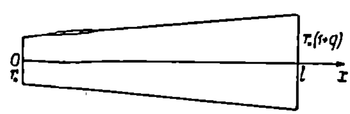
příslušející krajovým podmínkám (2). Potom (viz § 62)

$$y(x) - \lambda\int_0^l G(x, s)\, y(s)\, ds = 0. \tag{4}$$

Ohyb $y(x)$ zatížené tyče vyhovuje tedy homogenní integrální rovnici se souměrným jádrem. Pro libovolně zvolenou sílu P nebude číslo $\lambda = \frac{P}{E}$ charakteristické a $y(x) \equiv 0$. Jinak řečeno, libovolně zvolená stlačující síla ponechá přímkový tvar tyče. Pouze v tom případě, kdy $P = \lambda_n E$, kde λ_n je charakteristické číslo rovnice (4), může být $y(x)$ různá od nuly a tyč se zkřiví — ztrácí stabilitu.

Při úloze o vzpěru tyče je důležité určit nejmenší sílu, pro kterou tyč ztrácí stabilitu. To je tak zvaná kritická síla rovnající se součinu Youngova modulu s nejmenším charakteristickým číslem rovnice (4). V praxi postačuje přibližný vzorec, dávající λ_1 menší, než je hodnota přesná:

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}};\quad A_2 = \int_0^l\int_0^l G^2(x, s)\, dx\, ds. \tag{5}$$



Obr. 18.

Určeme na příklad kritickou sílu pro tyč, která má tvar komolého kužele. Označme poloměry r_0 a $r_0(1 + q)$ (obr. 18). Poloměr průřezu s úsečkou x bude potom $r_0\left(1+\frac{qx}{l}\right)$ a moment setrvačnosti tohoto průřezu

$$I = \frac{\gamma r_0^4}{2}(1+\alpha x)^4, \tag{6}$$

kde γ je hustota tyče a $\alpha = \frac{q}{l}$. Rovnici (4) přepišme ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+\alpha x)^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \mu y = 0;\ \mu = \frac{2\lambda}{\gamma r_0^4}. \tag{7}$$

Jestliže $G(x, y)$ je Greenova funkce operátoru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+\alpha x)^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]$$

při krajových podmínkách (2), vyhovuje $y(x)$ integrální rovnici

$$y(x) - \mu\int_0^l G(x, s)\, y(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{8}$$

Máme určit její nejmenší charakteristické číslo.

Určeme Greenovu funkci $G(x, s)$. Rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+\alpha x)^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = 0$$

má obecný integrál

$$y = C_1 + \frac{C_2}{(1+\alpha x)^3}.$$

Podmínce $y(0) = 0$ vyhovuje integrál

$$u(x) = 1 - \frac{1}{(1+\alpha x)^3}$$

a podmínce $y(l) = 0$ integrál

$$v(x) = \frac{1}{(1+\alpha x)^3} - \frac{1}{(1+\alpha l)^3}.$$

Dále

$$c = -p(x)[u(x)\,v'(x) - u'(x)\,v(x)] = 3\alpha\left(1 - \frac{1}{(1+\alpha l)^3}\right),$$

a tak dostaneme výraz pro Greenovu funkci:

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\left[1 - \dfrac{1}{(1+\alpha x)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha s)^3} - \dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right] & (0 \leqq x \leqq s), \\ \dfrac{1}{c}\left[1 - \dfrac{1}{(1+\alpha s)^3}\right]\left[\dfrac{1}{(1+\alpha x)^3} - \dfrac{1}{(1+\alpha l)^3}\right] & (s \leqq x \leqq l). \end{cases}$$

Nejmenší charakteristické číslo μ_1 rovnice (8) je určeno přibližným vzorcem

$$\frac{1}{\mu_1^2} \approx \int_0^l \int_0^l G^2(x, s)\, dx\, ds = 2\int_0^l dx \int_0^x G^2(x, s)\, ds.$$

Uvedený integrál se vypočte úplně elementárně. Vzorec je však dosti těžkopádný. Chceme-li jej zjednodušit, omezíme se na případ, kdy veličina q je malá, a lze zanedbat členy, jež obsahují q ve vyšší mocnině než prvé. Provedeme-li výpočty za tohoto zjednodušujícího předpokladu, dostaneme:

$$\frac{1}{\mu_1^2} \approx l^4\left(\frac{1}{90} - \frac{2}{45}q\right). \tag{9}$$

Odtud lehce určíme kritickou sílu P. Všimneme-li si, že $\lambda = I_0\mu$, kde I_0 je moment setrvačnosti v průřezu $x = 0$, najdeme výraz pro kritickou sílu ve tvaru

$$P = E\lambda_1 = \frac{\sqrt{90}EI_0}{l^2}(1 + 2q) = \frac{9{,}487EI_0}{l^2}(1 + 2q). \tag{10}$$

Jestliže položíme $q = 0$, dostaneme tyč stálého průřezu. Vzorec (10) v tom případě dává velikost kritické síly

$$P = \frac{9{,}487EI_0}{l^2}.$$

Přesná hodnota kritické síly, jak je známo, se v tomto případě rovná

$$\frac{\pi^2 EI_0}{l^2} = \frac{9{,}897EI_0}{l^2}.$$

Přibližná hodnota se od přesné liší o méně než 5%.

Tentýž postup převedení na integrální rovnici umožňuje určit kritickou sílu i ve složitějších případech. Speciálně, na integrální rovnice lze převést problém stability pružné destičky, na kterou působí síly v rovině destičky [18]. N. V. Zvolinskij řeší ve svém článku [14] pomocí integrálních rovnic problém stability válcovité skořepiny. Ve dvou posledních případech jsou jádra nesouměrná, avšak patří do třídy t. zv. symetrisovatelných, pro něž platí věta o existenci reálného charakteristického čísla.

§ 65. Tlak tuhého razníku na pružný poloprostor. Uvažujme poloprostor $z < 0$. Předpokládejme, že na část S roviny $z = 0$, která jej omezuje, tlačí absolutně tuhé těleso (budeme je nazývat razníkem), přitisknuté k polorovině silou Q rovnoběžnou s osou z. Předpokládáme, že mezi poloprostorem a razníkem není tření. Zbývající část S' hranice není namáhána vnějšími silami. Chceme určit pole napětí a posunutí v poloprostoru a také určit závislost mezi silou působící na razník a jeho posunutím.

O problému, který jsme formulovali a který je znám pod názvem „problém tlaku razníku", pojednává obsáhlá literatura. Obdobný rovinný problém budeme analysovat v kap. 6. Zde vyložíme řešení problému o tlaku razníku na poloprostor, založené na jeho převedení na integrální rovnici prvého druhu. Toto řešení odvodil V. I. Dovnorovič ve své disertaci [39].

Formulujme rovnice a krajové podmínky našeho problému.

Označme u, v, w složky vektoru elastických posunutí. Zanedbáme-li objemové síly, můžeme předpokládat, že u, v, w vyhovují známým rovnicím theorie pružnosti:

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} &= 0, \\ \Delta v + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} &= 0, \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} &= 0, \\ \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

kde σ je Poissonova konstanta. Krajové podmínky příslušející těmto rovnicím jsou tyto:

Na S' nejsou vnější síly a na S není tření; v celé rovině xy tedy máme

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \ z = 0. \tag{2}$$

Dále zřejmě

na S' $$\sigma_z = 0. \tag{3}$$

Nechť $z = \varphi(x, y)$ je rovnice té části plochy razníku, kterou se dotýká poloprostoru. Potom

na S $$w = ax + by + c - \varphi(x, y) = \Phi(x, y), \tag{4}$$

kde veličina $ax + by + c$ charakterisuje posunutí razníku jako tuhého tělesa. Poznamenejme, že v souhlase s předpokladem, že deformace jsou malé, považujeme konstanty a, b, c a funkci $\varphi(x, y)$ za malé. Na konec předpokládejme, že v nekonečnu jsou posunutí omezená a napětí neexistuje. Problém o tlaku razníku se tedy převádí na integrování rovnice (1) při krajových podmínkách (2) až (4). Konstanty a, b, c při řešení problému zůstávají neurčeny; po rozřešení problému lze je určit z podmínek rovnováhy razníku takto: Nechť síla Q, působící na razník, působí ve směru osy z. Potom

$$\iint_S \sigma_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = Q,$$

$$\iint_S x\sigma_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_S y\sigma_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0. \tag{5}$$

Přistupme k řešení našeho problému. Jak je známo,[1] funkce u, v, w vyhovující soustavě (1) mohou být vyjádřeny ve tvaru

$$u = \varphi_1 + z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad v = \varphi_2 + z\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad w = \varphi_3 + z\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

kde φ_1, φ_2, φ_3, ψ jsou harmonické funkce spjaté relací

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{3 - 4\sigma}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right).$$

Krajové podmínky našeho problému dovolují převést[2] úlohu na určení pouze jedné funkce φ_3, vyhovující těmto krajovým podmínkám:

na S $$\varphi_3 = \Phi(x, y), \tag{6}$$

[1] E. Treftc, Matěmatičeskaja těorija uprugosti, GTTI, 1932.

[2] Viz F. Frank a R. Mises, Diferencialnyje i intěgralnyje uravněnija matěmatičeskoj fyziki, GTTI, 1937, str. 290—292.

na S' $$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Budeme předpokládat, že povrch razníku je dostatečně hladký, takže má spojité derivace druhého řádu. Speciálně tedy předpokládáme, že na povrchu razníku nejsou hrany. Dále se budeme podstatně opírat o výsledky S. Zaremby [40], z nichž speciálně plyne, že existuje funkce $\varphi_3(x, y, z)$ harmonická v poloprostoru $z < 0$, kterou lze vyjádřit ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy se spojitě diferencovatelnou hustotou; funkce $\varphi_3(x, y, z)$ vyhovuje krajovým podmínkám (6) a (7) za jediného předpokladu, že funkce $\Phi(x, y)$ je dostatečně hladká. Poznamenejme, že z toho faktu, že funkci $\varphi_3(x, y, z)$ lze vyjádřit jako potenciál jednoduché vrstvy, plyne, že tato funkce je spojitá v celé rovině xy, počítaje v to hranici oblastí S a S'.

Majíce toto na paměti, budeme hledat φ_3 ve tvaru

$$\varphi_3(x, y, z) = \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{d\xi \, d\eta}{r}, \tag{8}$$

kde $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$. Vně oblasti S, speciálně na S', lze potenciál (8) derivovat za integračním znaménkem. Při tom

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = -2z \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{d\xi \, d\eta}{r},$$

což se anuluje na S'. Potenciál (8) tedy automaticky vyhovuje podmínce (7).

Krajová podmínka (6) dále dává

na S $$\iint_S \frac{\mu(\xi, \eta)}{r} \, d\xi \, d\eta = \Phi(x, y). \tag{9}$$

To je integrální rovnice prvého druhu s neznámou $\mu(\xi, \eta)$. Protože na S $z = 0$, je její jádro

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}$$

souměrné. V důsledku shora uvedených výsledků S. Zaremby je rovnice (9) řešitelná. Řešení je jediné, neboť v opačném případě by existovalo několik spojitých, pro $z < 0$ harmonických funkcí, vyhovujících krajovým podmínkám (6) a (7), což, jak je známo, je nemožné.

Jádro $\frac{1}{r}$ má slabou singularitu. Dokážeme však, že věta Hilbert-Schmidtova zůstane v platnosti pro toto jádro s tou jedinou výhradou, že řada (8), § 13 nebude obecně konvergovat stejnoměrně, nýbrž jen v průměru.[1]

Označme jako obvykle

$$\iint_S \frac{\mu(\xi, \eta)}{r} \, d\xi \, d\eta = K\mu.$$

Z věty (1), § 10 plyne, že jádro, druhé iterované vzhledem k jádru $\frac{1}{r}$, bude pouze logaritmicky nekonečné, a proto bude pro něj platit věta Hilbert-Schmidtova. Označme λ_i a $\varphi_i(\xi, \eta)$ charakteristická čísla a charakteristické funkce souměrného jádra $\frac{1}{r}$; potom λ_i^2 a $\varphi_i(\xi, \eta)$ budou charakteristická čísla a charakteristické funkce druhého iterovaného jádra. Podle Hilbert-Schmidtovy věty

$$\begin{aligned} K^2\mu &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k^2} \varphi_k(x, y); \\ a_k &= (\mu, \varphi_k) = \iint_S \mu(\xi, \eta) \varphi_k(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta, \end{aligned} \tag{10}$$

při čemž řada na pravé straně konverguje stejnoměrně, za toho jediného předpokladu, že integrál

$$\iint_S |\mu^2(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta = \|\mu\|^2$$

existuje.

Označme

$$\mu_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_l(x, y)$$

a vyšetřujme skalární součin

$$(K^2(\mu - \mu_n), \mu - \mu_n). \tag{11}$$

Podle Buňakovského nerovnosti platí

$$\begin{aligned} |(K^2(\mu - \mu_n), \mu - \mu_n)| &\leq \|K^2(\mu - \mu_n)\| \cdot \|\mu - \mu_n\| = \\ &= \|K^2\mu - K^2\mu_n\| \cdot \|\mu - \mu_n\|. \end{aligned}$$

[1] O konvergenci v průměru viz § 20.

Dále,
$$K^2\mu_n = K^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k K^2\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k^2}\varphi_k.$$

Řada (10) konverguje stejnoměrně, a tedy $K^2\mu_n$ konverguje stejnoměrně ke $K^2\mu$; tím spíše
$$\|K^2\mu - K^2\mu_n\| \to 0.$$

Veličina $\|\mu - \mu_n\|$ je omezená. Podle trojúhelníkové nerovnosti totiž platí
$$\|\mu - \mu_n\| \leqq \|\mu\| + \|\mu_n\| = \|\mu\| + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$$
a v důsledku Besselovy nerovnosti
$$\|\mu - \mu_n\| \leqq 2\|\mu\|.$$

Odtud plyne, že veličina (11) konverguje k nule. Na druhé straně, protože jádro $\frac{1}{r}$ je souměrné, podle vzorce (3), § 11
$$(K^2(\mu - \mu_n), \mu - \mu_n) = (K(\mu - \mu_n), K(\mu - \mu_n)) = \|K(\mu - \mu_n)\|^2 = \\ = \|K\mu - K\mu_n\|^2.$$

Odtud plyne, že $K\mu_n$ konverguje v průměru ke $K\mu$. Avšak
$$K\mu_n = K\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k K\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k}\varphi_k.$$

Tedy
$$K\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k}\varphi_k; \tag{12}$$
součet nekonečné řady je třeba považovat za limitu jejích částečných součtů ve smyslu konvergence v průměru. Rovnice (12) vyjadřuje Hilbert-Schmidtovu větu pro jádro $\frac{1}{r}$.[1]

Obraťme se k rovnici (9). Jak už jsme poznamenali, má jediné řešení. Odtud plyne, že soustava charakteristických funkcí jádra je úplná. Vskutku, nechť funkce $\omega(x, y)$ je orthogonální ke všem funkcím $\varphi_k(x, y)$. Potom podle vzorce (12) $K\omega \equiv 0$. Protože řešení nehomogenní rovnice (9) je jediné, má příslušející homogenní rovnice pouze nulové řešení, a proto nutně $\omega(x, y) \equiv 0$. Je-li soustava $\varphi_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$

---

[1] Malou změnou úvah lze dokázat, že Hilbert-Schmidtova věta platí pro libovolné souměrné jádro se slabou singularitou.

úplná, lze hledanou funkci $\mu(\xi, \eta)$ a pravou stranu $\Phi(x, y)$ rozvinout v řady

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\xi, \eta), \quad a_k = (\mu, \varphi_k),$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \varphi_k(x, y), \quad \Phi_k = (\Phi, \varphi_k).$$

Dosadíme-li toto do (9) a užijeme-li vzorce (12), dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \varphi_k(x, y),$$

odkud $a_k = \lambda_k \Phi_k$. Řešení dostaneme ve tvaru

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Phi_k \varphi_k(\xi, \eta). \tag{13}$$

Úloha se tedy převádí na výpočet charakteristických čísel a charakteristických funkcí souměrného jádra $\frac{1}{r}$. Ten lze provést způsoby vyloženými v kap. 2, části I. V. I. Dovnorovič, aby si ověřil praktickou vhodnost řady (13), vypočetl prvých šest členů této řady pro razník tvaru rotačního paraboloidu. Porovnání s přesným řešením ukázalo, že chyba v určení působící síly Q byla okolo 2,25%.

KAPITOLA 6

NĚKOLIK APLIKACÍ THEORIE SINGULÁRNÍCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

§ 66. Hilbertův problém. Rozebereme problém určit funkci harmonickou v nějaké rovinné oblasti D za předpokladu, že na některých částech hranice jsou dány hodnoty hledané funkce a na jiných jsou dány hodnoty její normální derivace.[1]

[1] Tento problém je speciálním případem obecného Hilbertova problému, při němž se hledá harmonická funkce za podmínky, že na hranici je známa lineární kombinace samotné funkce a její normální derivace.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že na každé z uzavřených křivek tvořících hranici L jsou jak oblouky, na nichž je dána funkce, tak i oblouky, na nichž je dána normální derivace.

Označme $\gamma_1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{2n-1}$ oblouky hranice, na kterých je dána hledaná harmonická funkce $U(x, y)$. Nechť na těchto obloucích

$$U = f(s), \tag{1}$$

kde s je délka oblouku hranice. Označme dále $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}$ ty oblouky hranice, na kterých je dána normální derivace. Nechť na těchto obloucích

$$\frac{\partial U}{\partial n} = f_1(s), \tag{2}$$

kde n je vnější normála k hranici. Problém spočívá v určení funkce $U(x, y)$ harmonické v oblasti a na hranici vyhovující rovnicím (1) a (2).

Označme α_k a β_k počáteční a koncový bod oblouku γ_{2k}. Potom zřejmě β_k a α_{k+1} jsou počáteční a koncový bod oblouku γ_{2k+1}. Nebudeme předem předpokládat, že $U(x, y)$ je spojitá v bodech α_k a β_k. Potom, jak uvidíme, Hilbertův problém připouští nekonečně mnoho řešení, závisících na nějakých parametrech. Volbou těchto parametrů lze docílit toho, aby $U(x, y)$ byla spojitá.

Upravme podmínku (2). Označme $V(x, y)$ funkci konjugovanou s $U(x, y)$. V důsledku Cauchy-Riemannových rovnic

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Odtud můžeme určit hodnoty $V(x, y)$ na obloucích γ_{2k}:

$$\text{na } \gamma_{2k} \qquad V(x, y) = \int_{\alpha_k}^{s} \frac{\partial V}{\partial s} \, ds + C_k = \int_{\alpha_k}^{s} f_1(s) \, ds + C_k.$$

Označme

$$\int_{\alpha_k}^{s} f_1(s) \, ds = f^*(s).$$

Nyní může být Hilbertův problém formulován takto: určit funkci analytickou v oblasti D, jestliže na jedněch částech hranice jsou dány hodnoty její reálné části a na druhých její části imaginární:

$$
\begin{aligned}
&\text{na } \gamma_{2k-1} \qquad && U = f(s), \\
&\text{na } \gamma_{2k} \qquad && V = f^*(s) + C_k,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

kde C_k jsou libovolné konstanty.

Položme $U + iV = \varphi(z)$ a nechť $T(z; \zeta)$ je Schwarzovo jádro oblasti (viz § 41). Potom

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L U(\sigma)\, T(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma + iC, \tag{4}$$

kde C je jistá konstanta; L je hranice oblasti D. Funkce $\varphi(z)$ bude zřejmě známa a náš problém bude rozřešen, jestliže určíme hodnoty $U(\sigma)$ na obloucích γ_{2k}.

Integrál v (4) rozdělme na dva: jeden vztažený na oblouky $\gamma_1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{2n-1}$ a druhý vztažený na oblouky $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}$. V důsledku podmínky (1) je prvý integrál veličina známá a rovná se

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k-1}} f(\sigma)\, T(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Pro stručnost označme tento integrál $\omega(z)$, takže

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\, T(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma + \omega(z) + iC.$$

Nechť t je bod na nějakém oblouku γ_{2m}, příslušející délce oblouku s. V poslední rovnici přejdeme k limitě nechajíce $z \to t$. Abychom provedli limitní přechod v integrálu napravo, užijeme vzorce (27), § 41:

$$\frac{1}{2\pi} T(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\pi i} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + P(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Nyní

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} \frac{U(\sigma)\, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\, P(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma + \omega(z) + iC.$$

V druhém členu lze provést limitní přechod za integračním znaménkem, neboť funkce $P(z; \zeta)$ je spojitá. První člen je integrál Cauchyho typu a jeho limita se určí podle vzorce (2), § 22. Máme tedy:

$$\varphi(t) = U(s) + \frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_{2k}}\frac{U(\sigma)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t} + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\,P(t;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma + \omega(t) + iC.$$

Oddělme v této rovnici imaginární části a užijme podmínky (3). Potom dostaneme:

na γ_{2m}

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t}\right) + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\,\mathrm{Im}\{P(t;\,\zeta)\}\,\mathrm{d}\sigma = \tag{5}$$
$$= f^*(s) - \mathrm{Im}\{\omega(t)\} + C'_m;$$
$$C'_m = C_m - C.$$

Rovnice (5) je singulární integrální rovnice, v níž neznámá je hodnota $U(x, y)$ na obloucích γ_{2m}. Když jsme rozřešili tuto rovnici, určíme $U(x, y)$ pomocí vzorce (4). Způsobem vyloženým v § 27 lze rovnici (5) převést na rovnici Fredholmovu. Avšak vyšetřování a řešení této rovnice v obecném případě je značně obtížné. Omezíme se proto na nejjednodušší a současně pro aplikace dosti důležitý případ, kdy oblast D je polorovina. Tomuto případu bude věnován následující paragraf.

§ 67. Hilbertův problém pro polorovinu. Schwarzovo jádro pro polorovinu lze lehce sestrojit. Užijeme k tomu vzorce (26), § 41.

Schwarzovo jádro pro kruh je dobře známo a rovná se

$$\frac{1}{2\pi}T'(t, \tau)\,\mathrm{d}\sigma' = \frac{1}{2\pi}\frac{\tau + t}{\tau - t}\,\mathrm{d}\sigma',$$

kde t je bod uvnitř kruhu, τ je bod na kružnici a $\mathrm{d}\sigma' = |\mathrm{d}\tau|$. Funkce zobrazující jednotkový kruh na horní polorovinu $y > 0$ má tvar

$$t = \frac{z - i}{z + i}, \quad \tau = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}.$$

Podle vzorce (26), § 41

$$\frac{1}{2\pi}T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\pi i}\frac{\zeta z + 1}{\zeta - z}\frac{|\mathrm{d}\zeta|}{|\zeta + i|^2}.$$

Jestliže položíme $\zeta = \xi + i\eta$, pak na hranici poloroviny $\eta = 0$ a $\zeta = \xi$.

Odtud
$$\frac{1}{2\pi}T(z;\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\pi i}\frac{\xi z+1}{\xi-z}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1}\tag{1}$$
čili
$$\frac{1}{2\pi}T(z;\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\pi i}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-z}-\frac{1}{\pi i}\frac{\xi\,\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1}.$$

Vzorec (4), § 66 nabývá tvaru
$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-z}-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi)\frac{\xi\,\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1}+iC;$$
$$u(\xi) = U(\xi, 0).$$

Druhý integrál je konstanta. Označíme-li týmž písmenem C veličinu
$$C+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi)\frac{\xi\,\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1},$$
vyjádříme Schwarzův integrál ve tvaru
$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi-z}+iC.\tag{2}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny úsečky $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}$ jsou omezené, takže na částech hranice poloroviny vzdalujících se do nekonečna je dána funkce $U(\xi, 0) = f(\xi)$.

Nechť t je bod na jedné z úseček γ_{2k}. Ve vzorci (2) nechme $z \to t$. Opakujíce úvahy § 66, dojdeme k singulární integrální rovnici

na γ_{2m}
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}}u(\xi)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-t}\right) = f^*(t)-\mathrm{Im}\{\omega(t)\}+C'_m.$$

Význam označení je tentýž jako v § 66.

Naši rovnici lze zjednodušit. Především veličiny ξ, t, $\mathrm{d}\xi$ jsou reálné, a proto lze symbol Re vypustit. Označme ještě pro stručnost
$$f^*(t)-\mathrm{Im}\{\omega(t)\}+C'_m = -B(t).$$

Tak dojdeme k rovnici

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} u(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-t}=B(t). \tag{3}$$

Tuto rovnici lze řešit způsobem vyloženým v § 27. Užijeme zde tohoto způsobu, pouze jej nepatrně pozměníme tak, jak jsme to učinili na konci § 26.

Nechť z je libovolný bod v komplexní rovině. Položme

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} u(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-t}. \tag{4}$$

Užijeme-li věty o limitních hodnotách integrálu typu Cauchyho, dostaneme

$$\text{na } \gamma_{2m} \qquad F_i(t)+F_e(t)=iB(t). \tag{5}$$

Zaveďme novou neznámou $\Phi(z)$, kladouce

$$\Phi(z)=\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)(\beta_k-z)}\;F(z). \tag{6}$$

Odmocnina ve vzorci (6) má různá znaménka na různých stranách úseček γ_{2m}. Odtud lze lehce určit, že $\Phi(z)$ vyhovuje rovnici

$$\text{na } \gamma_{2m} \qquad \Phi_i(t)-\Phi_e(t)=i\,B(t)\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}. \tag{7}$$

Jedno řešení této rovnice je

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} B(\xi)\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-z},$$

a tedy

$$F(z)=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)(\beta_k-z)}}\cdot\int\limits_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} B(\xi)\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-z}.$$

Odtud určíme $u(t)$, užívajíce vzorce

$$u(t)=F_i(t)-F_e(t),$$

který v našem případě dává

na γ_{2m}

$$u(t) = \\ = \frac{1}{\pi \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}} \int_{\gamma_2 + \ldots + \gamma_{2n}} B(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)} \frac{d\xi}{\xi - t}. \tag{8}$$

Obecné řešení dostaneme, přičteme-li k tomuto ještě $u_0(t)$ — řešení homogenní rovnice

na γ_{2m}
$$\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_2 + \ldots + \gamma_{2n}} u_0(\xi) \frac{d\xi}{\xi - t} = 0.$$

Klademe-li

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2 + \ldots + \gamma_{2n}} u_0(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{\Phi_0(z)}{\sqrt{\prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)(\beta_k - z)}},$$

dostaneme
$$\Phi_{0i}(t) - \Phi_{0e}(t) = 0.$$

Odtud plyne, že $\Phi_0(t)$ je jednoznačná v celé rovině. Pomocí úvah obdobných těm, jež jsme prováděli v § 26, se lehce přesvědčíme, že $\Phi_0(t)$ je libovolný polynom stupně $n - 1$. Označíme-li jej $\frac{i^{n-1}}{2} Q_{n-1}(t)$, máme:

$$u_0(t) = F_{0i}(t) - F_{0e}(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}. \tag{9}$$

Obecné řešení rovnice (3) má tvar

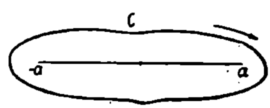
na γ_{2m}

$$u(t) = \\ = \frac{1}{\pi \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}} \int_{\gamma_2 + \ldots + \gamma_{2n}} B(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)} \frac{d\xi}{\xi - t} + \\ + \frac{Q_{n-1}}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}. \tag{10}$$

Koeficienty polynomu Q_{n-1} je třeba zvolit reálné, protože funkce $u(t)$ je reálná.

Vzorec (10) obsahuje $2n$ libovolných konstant: n konstant C'_m, obsažených v $B(\xi)$, a n koeficientů polynomu $Q_{n-1}(t)$. Lze je určit, zvolíme-li další doplňující podmínky. Speciálně lze je zvolit tak, aby $u(t)$ byla spojitá v bodech α_k a β_k.

§ 68. Úloha o styku dvou pružných polorovin. Nechť jsou dána dvě pružná prostředí, z nichž jedno vyplňuje horní a druhé dolní polorovinu. Předpokládejme, že se poloroviny dotýkají podél polopřímek $x < -a$ a $x > a$ (obr. 19), při čemž nepůsobí žádné tření. V intervalu $-a \leqq x \leqq a$ je nekonečně úzká štěrbina, jež rozděluje obě poloroviny. Na obě poloroviny působí od štěrbiny stejné roztahující síly intensity h, stejnoměrně rozložené podél hranice štěrbiny. Konečně budeme předpokládat, že se napětí rovnají v nekonečnu nule. Máme určit pole napětí v obou polorovinách. Označme $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ napětí, u_x^1, u_y^1 posunutí v horní polorovině, λ_1 a μ_1 její Laméovy konstanty. Položme dále



Obr. 19.

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}.$$

Tytéž veličiny vztahující se k dolní polorovině opatříme indexem 2. Budeme také označovat $\varphi_1(z), \psi_1(z)$ resp. $\varphi_2(z), \psi_2(z)$ Goursatovy funkce pro horní resp. dolní polorovinu. Vyšetřeme krajové podmínky naší úlohy.

Především podél celé osy $y = 0$

$$\tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 = 0. \tag{1}$$

Skutečně, v intervalech $|x| > a$, kde se poloroviny dotýkají, není tření a nejsou tedy tečná napětí; v intervalu $|x| < a$ působí pouze normální síly a tečná napětí opět neexistují. Dále v intervalu $|x| < a$ podle předpokladu působí normální roztahující síly intensity h. To dává tyto podmínky:

$$\sigma_y^1 = h, \ \sigma_y^2 = h, \ y = 0, \ |x| < a. \tag{2}$$

Konečně v intervalech, kde se dotýkají pružná prostředí, musí být vertikální normální napětí i vertikální posunutí stejná pro obě prostředí. To vede na poslední skupinu podmínek:

$$\sigma_y^1 = \sigma_y^2,\ y = 0,\ |x| > a; \tag{3}$$

$$u_y^1 = u_y^2,\ y = 0,\ |x| > a. \tag{4}$$

Řešíce naši úlohu, nahradíme krajové podmínky (3) a (4) těmito podmínkami:

$$u_y^1 = 0,\ u_y^2 = 0,\ y = 0,\ |x| > a. \tag{5}$$

Podmínka (4) při tom zřejmě není porušena. Pokud se týče podmínky (3), přesvědčíme se na konec o tom, že bude také vyplněna.

Zavedení podmínek (5) místo (3) a (4) nám umožňuje odděleně uvažovat horní a dolní polorovinu. Tak pro horní polorovinu máme následující krajové podmínky:

$$\tau_{xy}^1 = 0,\ y = 0; \tag{6}$$

$$\sigma_y^1 = h,\ y = 0,\ |x| \leqq a; \tag{7}$$

$$u_y^1 = 0,\ y = 0,\ |x| > a. \tag{8}$$

Tytéž podmínky platí i pro dolní polorovinu. Budeme proto v dalším vynechávat indexy 1 a 2.

Obraťme se ke Goursatovým funkcím $\varphi(x)$ a $\psi(z)$. Podle vzorců (8) a (9), § 40 na přímce $y = 0$

$$\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = i \int (X_\nu + iY_\nu)\, \mathrm{d}s. \tag{9}$$

Podle známých vzorců

$$X_\nu = \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y),$$
$$Y_\nu = \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y),$$

kde ν je vnější normála k hranici. Uvažujeme horní polorovinu, a proto ν je orientována směrem záporných y, takže $\cos(\nu, x) = 0$, $\cos(\nu, y) = -1$. Vezmeme-li nyní v úvahu podmínku (6), dostaneme $X_\nu = 0$, $Y_\nu = -\sigma_y$. Dále $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$. Dosadíme-li toto do (9), dostaneme:

$$\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \int \sigma_y\, \mathrm{d}x,\ y = 0.$$

Avšak pro $y = 0$, $z = x = \bar{z}$ a poslední rovnici jsme oprávněni upravit na tvar

$$\varphi(z) + \bar{z}\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \int \sigma_y \, dx, \quad y = 0. \tag{10}$$

Označme

$$z\,\varphi'(z) + \psi(z) = \vartheta(z). \tag{11}$$

Funkce $\vartheta(z)$ je regulární v horní polorovině. Z (10) plyne

$$\varphi(z) + \overline{\vartheta(z)} = \int \sigma_y \, dx, \quad y = 0. \tag{12}$$

Pravá strana poslední rovnice je veličina reálná. Odtud plyne, že i levá strana je reálná, t. j.

$$\mathrm{Im}\{\varphi(z)\} = \mathrm{Im}\{\vartheta(z)\}, \quad y = 0.$$

Avšak potom se harmonické funkce $\mathrm{Im}\{\varphi(z)\}$ a $\mathrm{Im}\{\vartheta(z)\}$, jež se rovnají na hranici poloroviny, rovnají sobě všude, a tedy se mohou analytické funkce $\varphi(z)$ a $\vartheta(z)$ lišit pouze o reálnou konstantu. Avšak $\varphi(z)$ je určena až na aditivní konstantu, a proto jsme oprávněni položit

$$\varphi(z) \equiv \vartheta(z).$$

Dosadíme-li toto do (12) a derivujeme-li vzhledem k x, dostaneme:

$$\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\} = \tfrac{1}{2}\sigma_y, \quad y = 0. \tag{13}$$

Užijeme-li podmínky (7), máme:

$$\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\} = \tfrac{1}{2}h, \quad y = 0, \quad |x| < a. \tag{14}$$

Zabývejme se podmínkou (8). Podle vzorce (4), § 40

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Položme v tomto vzorci $y = 0$. Potom $z = \bar{z}$ a

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\,\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}.$$

Oddělíme-li imaginární části a užijeme-li podmínky (8), dostaneme

$$\mathrm{Im}\{\varphi(z)\} = 0, \quad y = 0, \quad |x| > a.$$

Derivujeme-li tuto rovnici podle x, dostaneme:

$$\mathrm{Im}\{\varphi'(z)\} = 0, \quad y = 0, \quad |x| > a. \tag{15}$$

Podmínky (14) a (15) ukazují, že funkce $\varphi'(z)$ je řešení Hilbertova problému.

Položme $\Phi(z) = \frac{1}{i}\varphi'(z)$. Podmínky (14) a (15) se převádějí na tyto podmínky:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{\Phi(z)\} &= 0, \qquad y = 0,\ |x| > a, \\ \mathrm{Im}\{\Phi(z)\} &= -\tfrac{1}{2}h,\ y = 0,\ |x| < a. \end{aligned} \tag{16}$$

V našem případě je pouze jeden interval $\gamma_2 \langle -a, a\rangle$. Dále $\omega(t) \equiv 0$, $f^*(t) = -\frac{1}{2}h$, a tedy $B(t) = -\frac{1}{2}h + C_1'$. Veličinu $-\frac{1}{2}h + C_1'$ označme B. Ze vzorce (10), § 67 nyní určíme:

pro $y = 0$, $|t| < a$

$$\mathrm{Re}\{\Phi(t)\} = \frac{B}{\pi\sqrt{a^2 - t^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - t}\,\mathrm{d}\xi + \frac{A}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{17}$$

Vypočtěme integrál v (17). Poněkud jej zjednodušíme, násobíme-li a dělíme-li jej i; tím jej převedeme na tvar

$$\frac{B}{\pi\sqrt{t^2 - a^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - t}\,\mathrm{d}\xi.$$

Zvolme tu větev odmocniny, pro níž v nekonečnu platí rozvoj

$$\sqrt{z^2 - a^2} = z - \frac{a^2}{2z} + \ldots$$

Vyšetřme integrál typu Cauchyho:

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Hranice C je zobrazena na obr. 19; bod z leží vně C. Připočtěme a odečtěme ζ v čitateli integrandu. Pak dostaneme

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2} - \zeta}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Druhý integrál se rovná nule, protože funkce $\frac{\zeta}{\zeta - z}$ je regulární uvnitř C. Dále funkce $\sqrt{\zeta^2 - a^2} - \zeta$ je regulární vně C a rovna nule v nekonečnu. Prvý integrál je tedy integrál Cauchyho, a tedy

$$\chi(z) = \sqrt{z^2 - a^2} - z.$$

Hranice C je ekvivalentní s dvakrát proběhnutým intervalem $\langle -a, a\rangle$. Na horní a dolní straně intervalu má odmocnina různá znaménka, takže

$$\chi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - z} \, d\xi.$$

Odtud

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - z} \, d\xi = \sqrt{z^2 - a^2} - z.$$

Podle věty o limitních hodnotách integrálu typu Cauchyho

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - t} \, d\xi = \frac{1}{2} [\chi_i(t) + \chi_e(t)] = -t.$$

Dosadíme-li toto do (17), dostaneme:

pro $y = 0$ a $|t| < a$

$$\mathrm{Re}\{\Phi(t)\} = -\frac{Bti}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \frac{A}{\sqrt{t^2 - a^2}}. \tag{18}$$

Dokažme, že $A = 0$. Položme $\varphi'(z) = p + iq$; potom $\Phi(z) = q - ip$. Podle vzorce (5), § 40

$$p = \tfrac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y).$$

V našem případě se zřejmě σ_x a σ_y sobě rovnají v bodech souměrně položených vzhledem k ose y. Odtud plyne, že

$$p(x, y) = p(-x, y),$$

t. j. $p(x, y)$ je sudá funkce x. Avšak potom

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

je také sudá funkce x a funkce

$$q(x, 0) = \int_{a}^{x} \frac{\partial q(x, 0)}{\partial x} \, dx + q(0, 0)$$

je buď lichá, nebo se od liché liší pouze konstantou. Podle vzorce (18)

$$q(t, 0) = \mathrm{Re}\{\Phi(t)\} = -\frac{Bti}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \frac{A}{\sqrt{t^2 - a^2}}, \quad |t| < a.$$

Odtud

$$q(-t, 0) = \frac{Bti}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \frac{A}{\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

Součet

$$q(t, 0) + q(-t, 0) = \frac{2A}{\sqrt{t^2 - a^2}}$$

může být konstanta pouze pro $A = 0$.

Tedy

$$\mathrm{Re}\{\Phi(t)\} = -\frac{Bti}{\sqrt{t^2 - a^2}}, \quad y = 0, \quad |t| < a. \tag{19}$$

Připomeňme, že $\mathrm{Re}\{\Phi(t)\} = 0$ pro $|t| > a$ a $y = 0$. $\mathrm{Re}\{\Phi(t)\}$ je tedy určena na celé reálné ose.

Podle vzorců (1) a (2), § 67

$$\Phi(z) = -\frac{B}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\xi \, \mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}(\xi - z)} + iC', \tag{20}$$

kde C' je reálná konstanta. Abychom vypočetli integrál (20), vyšetřme integrál

$$\varrho(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta \, \mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}(\zeta - z)},$$

kde C je hranice zobrazená na obr. 19 (str. 300). Funkce $\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}$ je regulární vně C a rovna jedné v nekonečnu; podle známé vlastnosti Cauchyho integrálu

$$\varrho(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1.$$

Nahraďme hranici C hranicí ekvivalentní, sestávající z dvakrát proběhnutého intervalu $\langle -a, a \rangle$. Uvažujeme-li obdobně jako při výpočtu integrálu (17), zjistíme, že

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\xi \, \mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}(\xi - z)} = \frac{1}{i} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right)$$

a

$$\Phi(z) = \frac{B}{i} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) + C'i.$$

Nyní
$$\varphi'(z) = i\,\Phi(z) = B\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1\right) - C'.$$

Zbývá určit konstanty B a C'. Podle předpokladu napětí v nekonečnu se rovnají nule. Odtud

$$(\sigma_x + \sigma_y)_{z=\infty} = 4\mathrm{Re}\{\varphi'(\infty)\} = -4C' = 0$$

a $C' = 0$. Abychom určili B, obraťme se k podmínce (14). V intervalu $\langle -a, a\rangle$ je odmocnina $\sqrt{z^2 - a^2}$ imaginární, a proto

pro $y = 0$, $-a \leqq x \leqq a$
$$\mathrm{Re}\{\varphi'(x)\} = -B,$$

což v důsledku podmínky (14) dává $B = -\frac{1}{2}h$. Definitivně

$$\varphi'(z) = -\frac{h}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1\right). \tag{21}$$

Dostali jsme řešení pro horní polorovinu, vyhovující krajovým podmínkám (1), (2) a (5). Řešíme-li naši úlohu pro dolní polorovinu, dojdeme k témuž řešení (21), takže $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$. Zbývá přesvědčit se, že naše řešení vyhovuje podmínce (3). Avšak to přímo plyne ze vzorce (13), v důsledku něhož

pro $y = 0$ $\qquad \sigma_y^1 = 2\mathrm{Re}\{\varphi_1'(z)\} = 2\mathrm{Re}\{\varphi_2'(z)\} = \sigma_y^2.$

Naše úloha je nyní úplně řešena.

§ 69. Úloha o styku dvou pružných polorovin (obecný případ). Předpokládejme nyní, že na společné hranici dvou pružných polorovin je několik štěrbin $\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \ldots, \langle a_n, b_n\rangle$. Ponecháme předpoklad § 68 o tom, že na hranici nepůsobí tření, a předpokládejme, že na kraje štěrbin působí normální napětí intensity $p_1(x)$ v horní polorovině a $p_2(x)$ v dolní. Dojdeme k následující skupině krajových podmínek:

na celé ose x
$$\tau_{xy}^1 = 0,\ \tau_{xy}^2 = 0, \tag{1}$$

na štěrbinách
$$\sigma_y^1 = p_1(x),\ \sigma_y^2 = p_2(x), \tag{2}$$

na ose x vně štěrbin
$$\sigma_y^1 = \sigma_y^2,\ u_y^1 = u_y^2. \tag{3}$$

Jako v § 68 zjistíme, že v důsledku rovnic (1)

$$\varphi_k(z) = z\,\varphi_k'(z) + \psi_k(z),\ k = 1, 2$$

a

$$\operatorname{Re}\{\varphi_k'(z)\} = \tfrac{1}{2}\sigma_y^k,\ y = 0,\ k = 1, 2.$$

Rovnice (2) a prvá z rovnic (3) dávají tyto podmínky pro $\varphi_1'(z)$ a $\varphi_2'(z)$:

na štěrbinách

$$\operatorname{Re}\{\varphi_k'(x)\} = \tfrac{1}{2}p_k(x), \tag{4}$$

na ose x vně štěrbin

$$\operatorname{Re}\{\varphi_1'(x)\} = \operatorname{Re}\{\varphi_2'(x)\}. \tag{5}$$

Vyšetřujme druhou z podmínek (3). Obdobnými úvahami jako v § 68 ji převedeme na tvar

$$C_1 \operatorname{Im}\{\varphi_1(x)\} = C_2 \operatorname{Im}\{\varphi_2(x)\},$$

kde

$$C_k = \frac{\varkappa_k + 1}{2\mu_k},\ k = 1, 2.$$

Derivujeme-li tuto rovnici vzhledem k x, dostaneme krajovou podmínku, nutnou k určení funkcí $\varphi_k'(z)$:

na ose x vně štěrbin

$$C_1 \operatorname{Im}\{\varphi_1'(x)\} = C_2 \operatorname{Im}\{\varphi_2'(x)\}. \tag{6}$$

Označme

$$\overline{\varphi}_2(z) = \overline{\varphi_2(\bar{z})}.$$

Funkce $\overline{\varphi}_2(z)$ je regulární v horní polorovině; její derivace se rovná nule v nekonečnu. Všimněme si, že na ose x

$$\operatorname{Re}\{\overline{\varphi}_2'(x)\} = \operatorname{Re}\{\varphi_2'(x)\},\ \operatorname{Im}\{\overline{\varphi}_2'(x)\} = -\operatorname{Im}\{\varphi_2'(x)\}.$$

Uvažujme funkci

$$\omega(z) = C_1\,\varphi_1'(z) + C_2\,\overline{\varphi}_2'(z).$$

Tato je regulární v horní polorovině a vyhovuje na ose x těmto podmínkám:

na štěrbinách

$$\operatorname{Re}\{\omega(x)\} = \tfrac{1}{2}(C_1 p_1(x) + C_2 p_2(x)), \tag{7}$$

vně štěrbin

$$\operatorname{Im}\{\omega(x)\} = 0. \tag{8}$$

Prvá z nich plyne ze (4) a druhá z (6). Určení $\omega(z)$ je tedy převedeno na Hilbertův problém, jehož řešení je uvedeno v § 67. Když jsme určili $\omega(z)$, najdeme ze vzorců (5) a (7), že vně štěrbin na ose x

$$\mathrm{Re}\{\varphi_1'(x)\} = \mathrm{Re}\{\varphi_2'(x)\} = \frac{\mathrm{Re}\{\omega(x)\}}{C_1 + C_2}.$$

Nyní jsou reálné části funkcí $\varphi_1'(x)$ a $\varphi_2'(x)$ známy na celé ose x a tyto funkce jsou určeny vzorcem (2), § 67.

Výraz pro $\omega(z)$ obsahuje n libovolných konstant, jež se vyskytují také ve $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$. Tyto konstanty lze určit na základě následujících úvah.

Podmínku (8) jsme dostali z (6), kterou jsme opět dostali derivováním podle x podmínky (3)

$$u_y^1 = u_y^2.$$

Odtud plyne, že sestrojené řešení nebude vyhovovat oné podmínce, nýbrž této:

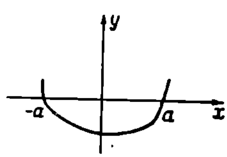
vně štěrbin
$$\frac{\partial u_y^1}{\partial x} = \frac{\partial u_y^2}{\partial x}$$

čili, což je totéž,

vně štěrbin
$$u_y^1 = u_y^2 + \text{konst.},$$

při čemž konstanty v poslední rovnici budou obecně různé v různých intervalech osy x vně štěrbin. Aby námi sestrojené řešení vyhovovalo všem krajovým podmínkám, musí se uvedené konstanty rovnat nule. Tato podmínka stačí k určení libovolných konstant vyskytujících se v $\omega(z)$.

Obdobně se řeší problém styku dvou pružných anisotropních polorovin.



Obr. 20.

§ 70. Tlak tuhého razníku na pružnou polorovinu. Představme si tuhý razník libovolného tvaru, vtlačený v pružnou polorovinu (obr. 20). Chceme určit napětí způsobená tlakem razníku. Učiňme tyto předpoklady:

a) V intervalech hranice $x > a$ a $x < -a$ nejsou žádná napětí.

b) Na razník působí síly normální k hranici. Odtud plyne, že pod razníkem nevzniká žádné tření.

Uvedené předpoklady dovolují formulovat krajové podmínky úlohy:

1. $\tau_{xy} = 0$ pro $y = 0$, (1)

2. $\sigma_y = 0$ pro $y = 0$ a $|x| > a$. (2)

3. Protože je tvar razníku známý, lze vertikální posunutí bodů poloroviny pod razníkem považovat za známá až na libovolnou aditivní konstantu, závisící na hloubce vniknutí razníku. Tedy

$$u_y = f(x) + \text{konst. pro } y = 0,\ |x| < a, \tag{3}$$

kde $f(x)$ je daná funkce.

Obdobně jako v § 68 dovoluje podmínka (1) určit toto ($\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou Goursatovy funkce):

$$z\,\varphi'(z) + \psi(z) = \varphi(z), \tag{4}$$

$$\operatorname{Re}\{\varphi'(z)\} = \tfrac{1}{2}\sigma_y \text{ pro } y = 0, \tag{5}$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\,\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}. \tag{6}$$

V důsledku (4) se úloha převádí pouze na určení funkce $\varphi(z)$; relace (5) a (6) převádějí tuto poslední úlohu na Hilbertův problém.

Označme

$$\varphi(z) = p_1 + iq_1,\ \varphi'(z) = p + iq.$$

Podmínky (2) a (5) dávají:

$$p = 0 \text{ pro } y = 0 \text{ a } |x| > a. \tag{7}$$

Oddělíme-li v (6) imaginární části a užijeme-li podmínky (3), dostaneme:

$$q_1 = \frac{2\mu}{\varkappa + 1} f(x) + \text{konst. pro } y = 0 \text{ a } |x| < a.$$

Derivujme tuto rovnici podle x a všimněme si, že $\dfrac{\partial q_1}{\partial x} = q$. Potom dostaneme:

$$q = \frac{2\mu}{\varkappa + 1} f'(x) \text{ pro } y = 0 \text{ a } |x| < a. \tag{8}$$

Došli jsme opět k Hilbertovu problému. Ten lze řešit užitím methody § 67. Zvolíme jinou methodu, jež nás zprostí nutnosti vypočítat některé konstanty.

Předpokládáme-li, že $\varphi(z)$ je omezená v polorovině, můžeme ji vyjádřit pomocí Schwarzova integrálu[1]

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{p_1(\xi, 0)}{\xi - z}\,\frac{1+\xi z}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi + iC.$$

Derivujme tuto rovnici a potom integrujme per partes. Vezmeme-li v úvahu, že $\dfrac{\partial p_1(\xi, y)}{\partial \xi} = p(\xi, y)$, dostaneme

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi, 0)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Označme pro stručnost $p(\xi, 0) = p(\xi)$. Užijeme-li podmínky (7), nalezneme:

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - z}. \tag{9}$$

Nechť nyní $z \to t$, kde t je bod intervalu $(-a, a)$ reálné osy. Protože z leží v dolní polorovině, je

$$\varphi'(t) = p(t) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - t}.$$

Oddělme imaginární části. V důsledku podmínky (8) máme:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - t} = \frac{2\mu}{\varkappa + 1}\,f'(t). \tag{10}$$

To je singulární rovnice, jejíž řešení lze určit methodou § 26; dosadíme-li naše označení do vzorce (26), § 26, dostaneme:

$$p(t) = -\frac{2\mu}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{a^2-t^2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi - t}\,\mathrm{d}\xi + \frac{A}{\sqrt{a^2-t^2}}. \tag{11}$$

[1] Schwarzova jádra pro horní a dolní polorovinu se liší znaménkem.

Konstantu A lze určit, jestliže je znám hlavní vektor P sil působících na razník. Vskutku

$$P = \int_{-a}^{a} \sigma_y(t, 0)\,dt = 2\int_{-a}^{a} p(t)\,dt.$$

Označíme-li pro stručnost prvý člen v (11) $p_0(t)$, máme zřejmě

$$\tfrac{1}{2}P = \int_{-a}^{a} p_0(t)\,dt + \pi A,$$

odkud

$$A = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} p_0(t)\,dt. \tag{12}$$

Všimněme si speciálního případu rovinného razníku. V tom případě $f(x) =$ konst. a

$$p(t) = \frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{13}$$

Tento vzorec udává rozdělení normálních napětí pod razníkem. Dále

$$\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi^2 i}\int_{-a}^{a}\frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - z)}.$$

Abychom vypočetli tento integrál, položme

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - z)},$$

kde C je hranice zobrazená na obr. 19. Funkce $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}$ je regulární vně C a rovna nule v nekonečnu, a proto

$$\omega(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

Nahraďme hranici C dvakrát proběhnutým intervalem $\langle -a, a\rangle$; tak dostaneme

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - z)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

a tedy

$$\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - z^2}}. \tag{14}$$

Ve vzorci (14) je odmocnina na dolní straně úsečky $\langle -a, a\rangle$ záporná.

§ 71. Případ několika razníků. Jestliže na polorovinu tlačí několik razníků, řeší se úloha v podstatě stejně jako v případě jednoho razníku; výpočty jsou ovšem poněkud složitější.

Označme $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle, \langle\alpha_2, \beta_2\rangle, \dots, \langle\alpha_n, \beta_n\rangle$ intervaly hranice, na něž působí razník; množinu těchto intervalů označme L a množinu doplňkových intervalů hranice M. Označme jako dříve $f(x)$ vertikální posunutí pod razníkem v bodě s abscisou x. Veličinu $f(x)$ můžeme považovat za danou předem až na libovolnou aditivní konstantu, jež může mít různé hodnoty na různých intervalech $\langle\alpha_k, \beta_k\rangle$.

Užijeme-li označení předcházejícího paragrafu, převedeme úlohu o tlaku několika razníků na následující Hilbertův problém:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\varphi'(t)\} &= 0 \text{ na } M, \\ \operatorname{Im}\{\varphi'(t)\} &= \frac{2\mu}{\varkappa+1} f'(t) \text{ na } L, \end{aligned} \tag{1}$$

při čemž

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = -\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{p(\xi)}{\xi - z}\,d\xi. \tag{2}$$

Odvození těchto vzorců je stejné jako v předcházejícím paragrafu. Necháme-li v (2) $z \to t$, kde t je bod na L, a oddělíme-li imaginární části, dojdeme k rovnici

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{p(\xi)\,d\xi}{\xi - t} = \frac{2\mu}{\varkappa+1} f'(t). \tag{3}$$

Její řešení lze napsat podle vzorce (8), § 68, zaměníme-li v tomto vzorci $B(t)$ výrazem $\frac{2\mu}{\varkappa+1} f'(t)$:

$$\text{na } L \quad p(t) = -\frac{2\mu}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{(-1)^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k - t)}}\,.$$
$$\cdot \int_L f'(\xi)\frac{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}}{\xi - t}\,d\xi +$$
$$+ \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}. \tag{4}$$

Koeficienty polynomu $Q_{n-1}(t)$ mohou být určeny, jestliže známe hlavní vektory sil, působících na každý razník jednotlivě; tyto koeficienty jsou vyjádřeny hypereliptickými integrály.

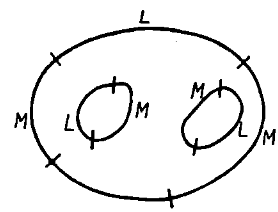
Jestliže jsou razníky rovinné, pak $f(x) =$ konst. (konstanty mohou být různé na různých intervalech $\langle\alpha_k, \beta_k\rangle$) a $f'(x) \equiv 0$. V tomto případě

$$p(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}. \tag{5}$$

Dosadíme-li toto do (2), lehce najdeme:

$$\varphi'(z) = -\frac{Q_{n-1}(z)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)(\beta_k-z)}}. \tag{6}$$

§ 72. Smíšený problém theorie pružnosti. Uvažujme nějakou rovinnou oblast D, vyplněnou pružným prostředím. Budeme předpokládat, že oblast D je obecně mnohonásobně souvislá (obr. 21). Nechť jsou na části hranice, kterou označíme M, dána posunutí bodů prostředí a na doplňkové části hranice, kterou označíme L, jsou dány síly působící na pružné prostředí. Problém určit napětí v pružném prostředí za těchto podmínek se nazývá smíšeným problémem theorie pružnosti.



Obr. 21.

V dalším budeme předpokládat, že hranice oblasti D je dostatečně hladká.

Zaveďme následující označení. Hranici oblasti D označme C, takže $C = L + M$. Dále, L se skládá z několika navzájem nesouvislých oblouků, jež označíme $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; komplexní souřadnice bodů, oddělujících tyto oblouky od oblouků M, budeme značit $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_n, \beta_n$. Složky vnějších sil působících na oblouky L označme jako obvykle X_ν a Y_ν; elastická posunutí u_x a u_y. V důsledku vzorců (4), (8) a (9), § 40 vyhovují Goursatovy funkce našeho problému těmto krajovým podmínkám:

na M

$$\varkappa\,\varphi(\zeta) - \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2\mu(u_x + iu_y), \tag{1}$$

na γ_k

$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = i\int (X_\nu + iY_\nu)\,\mathrm{d}s + C_k. \tag{2}$$

Upravme tyto podmínky. Určeme funkce bodu na hranici $\delta(\zeta)$ a $f(\zeta)$, kladouce

$$\delta(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{na } M, \\ \varkappa + 1 & \text{na } L; \end{cases} \tag{3}$$

$$f(\zeta) = \begin{cases} -i\int (X_\nu + Y_\nu)\,\mathrm{d}s & \text{na } L, \\ 2\mu(u_x + iu_y) & \text{na } M. \end{cases} \tag{4}$$

Konstanty, až na které jsou určeny integrály

$$\int (X_\nu + iY_\nu)\,\mathrm{d}s$$

na každém z oblouků γ_k, lze zvolit tak, aby $f(\zeta)$ byla spojitá na př. v bodech α_k. Na konec položme ještě

$$C(\zeta) = \begin{cases} -C_k & \text{na } \gamma_k, \\ 0 & \text{na } M. \end{cases} \tag{5}$$

V tomto označení lze podmínky (1) a (2) napsat takto:

$$\varkappa\,\varphi(\zeta) - \delta(\zeta)\,\varphi(\zeta) - \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + C(\zeta). \tag{6}$$

Jako obvykle je podstatné určit funkci $\varphi(\zeta)$; potom lze určit $\psi(\zeta)$, vypočteme-li pomocí (6) její hodnoty na hranici, z nichž se funkce $\psi(\zeta)$ určí pomocí Cauchyho nebo Schwarzova integrálu.

Zabývejme se určením $\varphi(z)$; vynásobme obě strany rovnice (6) výrazem

$$\frac{1}{4\pi}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma,$$

kde $T(z;\,\zeta)$ je Schwarzovo jádro oblasti D, a integrujme podél hranice C. Opakujeme-li úvahy § 42, dostaneme

$$\varkappa\varphi(z) - \frac{1}{4\pi}\int_C \delta(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_C \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_C f(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_C C(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{7}$$

Rovnici (7) lze zjednodušit. Připomeňme si identitu (23), § 41

$$\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{F(\zeta)}\, T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\overline{F(a)},$$

která platí pro každou funkci $F(z)$, regulární v D. V § 42 jsme zjistili, že $\varphi'(z)$ je regulární v D, a proto

$$\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi'(\zeta)}\; T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\overline{\varphi'(a)}.$$

Položme v této identitě $z = a$. Odečteme-li, dostaneme:

$$\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi'(\zeta)}\,\{T(z;\,\zeta) - T(a;\,\zeta)\}\,\mathrm{d}\sigma = 0. \tag{8}$$

Identitu (8) násobme z a odečtěme od (7). Třetí člen nalevo v (7) se transformuje takto:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_C \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)}\; T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi'(\zeta)}\left\{[(\zeta - z)\,T(z;\,\zeta) + z\,T(a,\,\zeta)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\bar\zeta}\right\}\mathrm{d}\bar\zeta =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi(\zeta)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left\{[(\zeta - z)\,T(z;\,\zeta) + z\,T(a,\,\zeta)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\bar\zeta}\right\}\mathrm{d}\sigma. \tag{9}$$

Derivace $\varphi'(\zeta)$ je tedy z rovnice (7) vyloučena. Všimněme si ještě, že až na logaritmické sčítance je jádro integrálu (9) spojité v oblasti D i s hranicí. Jádro integrálu (9) budeme značit $K(z;\,\zeta)$.

Vraťme se ke druhému členu nalevo v (7). Podle definice a podle vzorce (27), § 41

$$\frac{1}{4\pi}\int_C \delta(\zeta)\varphi(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1+\varkappa}{4\pi}\int_L \varphi(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1+\varkappa}{4\pi}\int_L \varphi(\zeta)\,P(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{10}$$

Přejděme k pravé straně rovnice (7) a označme

$$\frac{1}{4\pi}\int_C f(\zeta)\, T(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = F(z). \tag{11}$$

Dále podle definice

$$\frac{1}{4\pi}\int_C C(\zeta)\, T(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = -\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{4\pi}\int_{\gamma_k} T(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = \sum_{k=1}^{n} C_k\, F_k(z), \tag{12}$$

kde jsme označili

$$F_k(z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_k} T(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Vzorce (9) a (12) dovolují upravit rovnici (7) na tvar

$$\varkappa\, \varphi(z) - \frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1+\varkappa}{4\pi}\int_L \varphi(\zeta)\, P(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi(\zeta)}\, K(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = F(z) + \sum_{k=1}^{n} C_k\, F_k(z). \tag{13}$$

Nechť nyní $z \to t$, kde t je bod na L. Užijeme-li věty o limitních hodnotách integrálů typu Cauchyho, dostaneme singulární integrální rovnici

$$(\varkappa - 1)\, \varphi(t) - \frac{\varkappa + 1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\mathrm{d}\zeta - \frac{\varkappa + 1}{2\pi}\int_L \varphi(\zeta)\, P(t,\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_C \overline{\varphi(\zeta)}\, K(t,\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = 2F(t) + 2\sum_{k=1}^{n} C_k\, F_k(t). \tag{14}$$

Převeďme druhý a třetí integrál napravo a tak získanou pravou stranu označme $\Phi(t)$. Potom

$$(\varkappa - 1)\, \varphi(t) - \frac{\varkappa + 1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\mathrm{d}\zeta = \Phi(t). \tag{15}$$

Uvažujíce dočasně $\Phi(t)$ jako veličinu známou, můžeme rovnici (15) řešit. Podle vzorce (8), § 27 na L

$$\varphi(t) = -\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa}\Phi(t) - \frac{\varkappa + 1}{4\varkappa\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k}\right)^m \int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta +$$

$$+ \frac{Q_{n-1}(t)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(t - \alpha_k)^{1-m}(t - \beta_k)^m}; \quad m = \frac{1}{2\pi i}\lg\left(-\frac{1}{\varkappa}\right).$$

Podrobme toto řešení podmínce, aby $\varphi(t)$ byla spojitá v bodech α_k. K tomu je nutné a stačí, aby $Q_{n-1}(t) = 0$, a potom

na L

$$\varphi(t) = -\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa}\Phi(t) - \frac{\varkappa + 1}{4\varkappa\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k}\right)^m \int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta. \tag{16}$$

Naznačme stručně další postup řešení. Konstanty C_k, jež byly dosud libovolné, lze zvolit tak, aby $\varphi(t)$ byla spojitá také v bodech β_k. Dosaďme tyto hodnoty do (13) a (16). Dále v integrálu $-\frac{1 + \varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ nahraďme $\varphi(\zeta)$ jejím vyjádřením ze (16). Potom bude jádro uvedeného integrálu absolutně integrovatelné. Nechme nyní v (13) $z \to t$, kde t tentokrát značí libovolný bod na hranici C. Limitní přechod lze provést za integračním znaménkem všech integrálů a to nás přivede k integrální rovnici tvaru

$$\varkappa\,\varphi(t) - \int_C K'(\zeta, t)\,\varphi(\zeta)\,d\sigma - \int_C K''(\zeta, t)\,\overline{\varphi(\zeta)}\,d\sigma = \Omega(t), \tag{17}$$

kde $\Omega(t)$ je známá funkce. Oddělíme-li v této rovnici reálné a imaginární části, dostaneme soustavu dvou integrálních rovnic Fredholmova typu. Lze dokázat, že tato soustava a s ní i rovnice (17) je řešitelná. Řešením rovnice (17) určíme hodnoty $\varphi(t)$ na hranici, a potom lze $\varphi(z)$ určit z jejích hraničních hodnot pomocí Cauchyho integrálu.

Řešení smíšeného problému theorie pružnosti je podrobně vyloženo v pracích D. I. Šermana [37h, k]. Podotýkáme, že rovnice (15) je v [37h] řešena neobyčejně složitou methodou.

§ 73. Případ oblasti racionálně zobrazené na kruh. Ve shora citovaném článku [37h] dokázal D. I. Šerman následující větu:

Jestliže oblast D je konformně zobrazena na kruh pomocí racionální funkce, je smíšený problém theorie pružnosti pro tuto oblast řešitelný v konečném tvaru a to kvadraturami.

Úvahy D. I. Šermana se v mnohém shodují s úvahami, jichž užil N. I. Muschelišvili při důkaze analogických vět pro základní problémy. Uvedeme zde úvahy D. I. Šermana s některými nepodstatnými změnami.

Nechť $z = \omega(\tau)$ je funkce konformně zobrazující oblast D na kruh $|\tau| < 1$. Hranice C je přitom zobrazena na kružnici $|\tau| = 1$, kterou budeme v dalším značit Γ, a množina oblouků L a M přejde v nějakou množinu oblouků L' a M', při čemž $L' + M' = \Gamma$. Oblouky γ_k přejdou v nějaké oblouky γ'_k kružnice Γ. Koncové body oblouků γ_k označme α'_k a β'_k. Označme ještě

$$\zeta = \omega(\sigma), \varphi(\omega(\tau)) = \Phi(\tau), \psi(\omega(\tau)) = \Psi(\tau), f(\omega(\sigma)) = F(\sigma),$$
$$\delta(\omega(\sigma)) = \delta_1(\sigma), C(\omega(\sigma)) = C_1(\sigma).$$

Proveďme nyní ve vzorci (6), § 72 transformaci $\zeta = \omega(\sigma)$. Uvedený vzorec nabude tohoto tvaru:

$$\varkappa\, \Phi(\sigma) - \delta_1(\sigma)\, \Phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\, \overline{\Phi'(\sigma)} - \overline{\Psi(\sigma)} = F(\sigma) + C_1(\sigma). \qquad (1)$$

Podle předpokladu je funkce $\omega(\sigma)$ racionální:

$$\omega(\sigma) = \frac{a(\sigma)}{b(\sigma)},$$

kde $a(\sigma)$ a $b(\sigma)$ jsou polynomy. Odtud

$$\omega'(\sigma) = \frac{b(\sigma)\, a'(\sigma) - a(\sigma)\, b'(\sigma)}{b^2(\sigma)} = \frac{a_1(\sigma)}{b_1(\sigma)},$$

kde $a_1(\sigma)$ a $b_1(\sigma)$ jsou také polynomy. Dále

$$\overline{\omega'(\sigma)} = \frac{\overline{a_1(\sigma)}}{\overline{b_1(\sigma)}}.$$

Označme $\bar{a}_1(\sigma)$ a $\bar{b}_1(\sigma)$ polynomy, jež dostaneme z polynomů $a_1(\sigma)$ a $b_1(\sigma)$ záměnou všech koeficientů komplexně sdruženými.

Potom $\overline{a_1(\sigma)} = \bar{a}_1(\bar{\sigma}),\ \overline{b_1(\sigma)} = \bar{b}_1(\bar{\sigma}).$

Protože však $|\sigma| = 1$, je $\bar{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma}$, a proto

$$\overline{a_1(\sigma)} = \bar{a}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right),\ \overline{b_1(\sigma)} = \bar{b}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Odtud je patrno, že $\overline{\omega'(\sigma)}$ je racionální funkce σ; totéž lze říci o funkci $\dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}$. Tato funkce, protože je racionální, může být vyjádřena jako podíl dvou polynomů:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{l} a_k\sigma^k}{\sum\limits_{k=0}^{l_1} b_k\sigma^k} = \frac{\varrho(\sigma)}{r(\sigma)}. \tag{2}$$

Všimněme si, že se polynom $r(\sigma)$ neanuluje na Γ; v opačném případě by se $\omega'(\sigma)$ anulovala na Γ a zobrazení by nebylo konformní. Avšak uvnitř Γ může mít $r(\sigma)$ nulové body. Jejich počet označme l'. Zřejmě $l' \leqq l_1$.

Rovnici (1) násobme výrazem

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{r(\sigma)}{\sigma - \tau}\,d\sigma,$$

kde τ je bod uvnitř Γ, a integrujme podél Γ. Připomeneme-li si definici funkcí $\delta_1(\sigma)$ a $C_1(\sigma)$, dostaneme rovnici:

$$\varkappa\, r(\tau)\,\Phi(\tau) - \frac{\varkappa + 1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{r(\sigma)\,\Phi(\sigma)}{\sigma - \tau}\,d\sigma - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varrho(\sigma)\,\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma - \tau}\,d\sigma -$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{r(\sigma)\,\overline{\Psi(\sigma)}}{\sigma - \tau}\,d\sigma =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{F(\sigma)\,r(\sigma)}{\sigma - \tau}\,d\sigma + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{2\pi i}\int_{\gamma_k'} \frac{r(\sigma)}{\sigma - \tau}\,d\sigma. \tag{3}$$

Vyšetřme levou stranu v (3). Ze známé identity

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\sigma^s\,d\sigma}{\sigma - \tau} = \begin{cases} \tau^s & (s \geqq 0), \\ 0 & (s < 0) \end{cases}$$

plyne: jestliže

$$A(\sigma) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s \sigma^s,$$

pak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{A(\sigma)}{\sigma - \tau} \mathrm{d}\sigma = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \tau^s.$$

Tato poznámka nám dovoluje jednoduše vypočítat poslední dva integrály v (3) nalevo. Nechť

$$\Phi(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_s \tau^s, \quad \Psi(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \nu_s \tau^s.$$[1]

Potom

$$\varrho(\sigma)\, \overline{\Phi'(\sigma)} = \sum_{s=-\infty}^{l} \sigma^s \sum_{k=0}^{l-s} (k+1)\, \bar{\mu}_{k+1} a_{k+s},$$

$$r(\sigma)\, \overline{\Psi(\sigma)} = \sum_{s=-\infty}^{l_1} \sigma^s \sum_{k=1}^{l_1-s} \bar{\nu}_k b_{k+s}.$$

Nyní je zřejmé, že

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varrho(\sigma)\, \overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma - \tau} \mathrm{d}\sigma = \sum_{s=0}^{l} \tau^s \sum_{k=0}^{l-s} (k+1)\, \bar{\mu}_{k+1} a_{k+s}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{r(\sigma)\, \overline{\Psi(\sigma)}}{\sigma - \tau} \mathrm{d}\sigma = \sum_{s=0}^{l_1} \tau^s \sum_{k=1}^{l_1-s} \bar{\nu}_k b_{k+s}. \tag{5}$$

Koeficienty v (4) a (5) označme A_n resp. B_n. Kromě toho zaveďme ještě označení

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\sigma)\, r(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma}{\sigma - \tau} = M(\tau),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k'} \frac{r(\sigma)}{\sigma - \tau} \mathrm{d}\sigma = r_k(\tau).$$

Dosadíme-li toto vše do (3), dostaneme:

$$\varkappa\, r(\tau)\, \Phi(\tau) - \frac{\varkappa + 1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{r(\sigma)\, \Phi(\sigma)}{\sigma - \tau} \mathrm{d}\sigma = M(\tau) + \sum_{k=1}^{n} C_k\, r_k(\tau) - \\ - \sum_{s=0}^{l} A_s \tau^s - \sum_{s=0}^{l_1} B_s \tau^s. \tag{6}$$

[1] Klademe tedy $\Psi(0) = 0$. To lze vždy od počátku předpokládat.

Všimněme si, že pravá strana rovnice (6) je regulární uvnitř Γ. Pro stručnost ještě označme jako $N(\tau)$:

$$N(\tau) = 2\{M(\tau) + \sum_{k=1}^{n} C_k\, r_k(\tau) - \sum_{s=0}^{l} A_s \tau^s - \sum_{s=0}^{l_1} B_s \tau^s\}.$$

Nechme nyní $\tau \to \sigma_0$, kde σ_0 je libovolný bod na Γ. Užijeme-li věty o limitních hodnotách Cauchyho integrálu, dostaneme jako v předcházejícím paragrafu singulární rovnici

$$(\varkappa - 1)\, r(\sigma_0)\, \Phi(\sigma_0) - \frac{\varkappa + 1}{\pi i} \int_{L'} \frac{r(\sigma)\, \Phi(\sigma)}{\sigma - \sigma_0}\, \mathrm{d}\sigma = N(\sigma). \tag{7}$$

Tato rovnice se v podstatě shoduje s rovnicí (15) předcházejícího paragrafu a její řešení lze napsat podle analogie se vzorcem (16), § 72:

na L'
$$r(\sigma_0)\, \Phi(\sigma_0) = -\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa} N(\sigma_0) -$$
$$- \frac{\varkappa + 1}{4\pi\varkappa i} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma_0 - \alpha_k'}{\sigma_0 - \beta_k'}\right)^m \int_{L'} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma - \beta_k'}{\sigma - \alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \sigma_0}\, \mathrm{d}\sigma. \tag{8}$$

Vzorec (8) upravíme. Podle věty o limitních hodnotách integrálu Cauchyho typu máme:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma - \beta_k'}{\sigma - \alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \sigma_0}\, \mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma_0 - \beta_k'}{\sigma_0 - \alpha_k'}\right)^m N(\sigma_0) +$$
$$+ \lim_{\tau \to \sigma_0} \left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma - \beta_k'}{\sigma - \alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \tau}\, \mathrm{d}\sigma\right\}.$$

Dosadíme-li toto do (8), dostaneme:

na L'
$$r(\sigma_0)\, \Phi(\sigma_0) = \frac{1}{2\varkappa} N(\sigma_0) -$$
$$- \lim_{\tau \to \sigma_0} \left\{\frac{\varkappa + 1}{4\pi i\varkappa} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\tau - \alpha_k'}{\tau - \beta_k'}\right)^m \int_{L'} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma - \beta_k'}{\sigma - \alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \tau}\, \mathrm{d}\sigma\right\}. \tag{9}$$

Funkce na obou stranách rovnice (9) jsou analytické, regulární uvnitř Γ a jsou si rovny na množině oblouků L'. Na základě analytického pokračování můžeme tvrdit, že se uvedené funkce rovnají identicky uvnitř Γ:

$$r(\tau)\,\Phi(\tau) = \frac{1}{2\varkappa} N(\tau) -$$

$$- \frac{\varkappa+1}{4\pi i\varkappa} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\tau-\alpha_k'}{\tau-\beta_k'}\right)^m \int_{L'} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma-\beta_k'}{\sigma-\alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma-\tau}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{10}$$

Pravá strana vzorce (10) obsahuje $n + l + l_1$ neznámých konstant C_k, μ_s, ν_s. Jestliže budou určeny, dává vzorec (10) řešení problému. Tyto neznámé lze určit z těchto podmínek:

1. $\Phi(\tau)$ je spojitá v bodech β_k'.
2. Uvnitř Γ se pravá strana v (10) anuluje v týchž bodech jako $r(\tau)$; to je nutné k tomu, aby $\Phi(\tau)$ byla regulární v Γ.
3. Taylorovy koeficienty napravo i nalevo se sobě rovnají.
4. V rovnici (1) přejdeme k hodnotám komplexně konjugovaným, vynásobíme ji výrazem $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\tau}$ a integrujeme podél Γ. Potom dostaneme:

$$\Psi(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\, \frac{\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma-\tau}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{\varkappa+1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{\overline{\Phi(\sigma)}}{\sigma-\tau}\,\mathrm{d}\sigma - \varkappa\,\overline{\Phi(0)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma-\tau}\,\mathrm{d}\sigma - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{C}_k}{2\pi i}\int_{\gamma_k'} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\tau}. \tag{11}$$

Dosaďme do (11) místo $\Phi(\tau)$ její vyjádření z (8). Porovnáme-li Taylorovy koeficienty při stejných mocninách τ napravo i nalevo, dostaneme poslední skupinu podmínek.

Všechny tyto podmínky vedou na soustavu lineárních rovnic, z nichž určíme hledané konstanty.

§ 74. Problém obtékání oblouku daného tvaru. Uvažujme problém obtékání dostatečně hladkého, neuzavřeného oblouku AB (obr. 22).

Tento problém lze řešit methodou § 35, avšak tato methoda vede v případě neuzavřené hranice na integrální rovnici značně složité struktury, jež není Fredholmova. Budeme proto řešit problém jiným způsobem; ukážeme totiž, že jej lze převést na jistou singulární integrální rovnici.

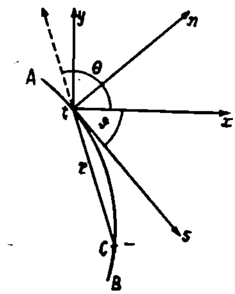
Na rozdíl od § 35 budeme předpokládat, že rychlost proudu v nekonečnu má libovolný směr vzhledem k ose x. Nechť složky rychlosti proudu v nekonečnu jsou U a V. Potom komplexní potenciál rychlostí $w(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$ vyhovuje v nekonečnu podmínce

$$\lim_{z \to \infty} [w'(z) - (U - iV)] = 0. \qquad (1)$$

Budeme předpokládat, že se oblouk AB nepohybuje. Potom na něm musí platit rovnice (viz (3), § 35)

$$\psi = C'. \qquad (2)$$

Náš problém spočívá v tom, abychom určili funkci $w(z)$, analytickou vně oblouku AB a vyhovující podmínkám (1) a (2). V takovém tvaru není problém úplně určen, a proto připojíme ještě doplňující podmínku.



Obr. 22.

Rychlost proudu na celém oblouku AB, až snad na bod A, je konečná.[1]

Označme

$$w'(z) - (U - iV) = \omega(x). \qquad (3)$$

Funkce $\omega(z)$ je regulární vně AB a rovna nule v nekonečnu. Určeme podmínku, jíž musí vyhovovat na AB. Označme t komplexní souřadnici libovolného bodu C na oblouku AB a s délku oblouku AC. Z (2) plyne, že na AB $\dfrac{\partial \psi}{\partial s} = 0$. Dále

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \operatorname{Im}\left(w'(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right).$$

Označme ϑ úhel sevřený tečnou k AB v bodě C a osou x. Potom $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{i\vartheta}$.

Nyní z posledních dvou rovnic plyne

$$\operatorname{Im}\{\omega(t)\,\mathrm{e}^{i\vartheta}\} = V\cos\vartheta - U\sin\vartheta. \qquad (4)$$

Funkci $\omega(z)$ budeme hledat ve tvaru integrálu Cauchyho typu tohoto tvaru:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB} \frac{T(\zeta)\,\mathrm{e}^{-i\vartheta}\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB} \frac{T(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma}{\zeta - z}, \qquad (5)$$

[1] Viz [21].

kde $d\sigma = |d\zeta|$ a δ je úhel, sevřený tečnou k AB v bodě ζ a osou x. O funkci $T(\zeta)$ budeme předpokládat, že je reálná. Integrál v (5) lze interpretovat jako součet elementárních vírů, rozložených podél AB s hustotou $T(\zeta)$. V souhlase s tím nazývá M. A. Lavrenťjev funkci $T(\zeta)$ „vírovou funkcí".

Nechť bod z konverguje k bodu t na oblouku AB. Podle věty o limitních hodnotách integrálu Cauchyho typu

$$\omega(t) = \pm \frac{1}{2} T(t)\, e^{-i\vartheta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta)\, e^{-i\delta}\, d\zeta}{\zeta - t}.$$

Dosadíme-li toto do (4), dostaneme singulární integrální rovnici pro neznámou T:

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta)\, e^{i(\vartheta-\delta)}\, d\zeta}{\zeta - t}\right\} = V \cos\vartheta - U \sin\vartheta. \tag{6}$$

Rovnici (6) lze poněkud upravit. Označme Θ úhel, který svírá vektor $t - \zeta$ s osou x a r délku tohoto vektoru. Potom $\zeta - t = -re^{i\Theta}$, a tedy

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta)\, e^{i(\vartheta-\delta)}}{\zeta - t} d\zeta\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta)\, e^{i(\vartheta-\Theta)}}{r} d\sigma\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) \cos(\vartheta - \Theta)}{r}\, d\sigma.$$

Rovnice (6) nyní nabývá tvaru

$$\frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) \cos(\vartheta - \Theta)}{r}\, d\sigma = V \cos\vartheta - U \sin\vartheta. \tag{6_1}$$

Veličina $\vartheta - \Theta$ je úhel, sevřený vektorem $t - \zeta$ a tečnou k AB v bodě t. Zavedeme-li úhel (r, n) sevřený vektorem $t - \zeta$ a normálou v bodě C k oblouku AB, máme:

$$\cos(\vartheta - \Theta) = \sin(r, n).$$

To dává nový tvar rovnice (6):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) \sin(r, n)}{r}\, d\sigma = V \cos\vartheta - U \sin\vartheta. \tag{6_2}$$

Rovnice (6) má nekonečně mnoho řešení. Dosazena do rovnice (5) dávají všechna $\omega(z)$ (a tedy i rychlost proudu) konečné až snad na body A a B. Podle našeho předpokladu musí být rychlost v bodě B konečná. Avšak potom $\omega(z)$ v bodě B musí být konečná; k tomu je nutné, aby se $T(\zeta)$ v tomto bodě anulovala. Vskutku, označme komplexní souřadnice bodů A a B jako α a β. Dále

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AB}\frac{T_1(\zeta) - T_1(\beta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{T_1(\beta)}{2\pi i}\lg\frac{\beta - z}{\alpha - z}; \tag{7}$$

$$T_1(\zeta) = T(\zeta)\,e^{-i\delta}.$$

Lze dokázat, že integrál v (7) je spojitý pro $z \to \beta$, jestliže v něm $T(\zeta)$ chápeme jako libovolné řešení rovnice (6).[1] Avšak v takovém případě bude $\omega(z)$ omezená pro $z = \beta$ tehdy a jen tehdy, když $T_1(\beta) = 0$, t. j. když $T(\beta) = 0$. Této podmínce také podrobíme řešení rovnice (6).

Rovnice (6) se v obecném případě neřeší v konečném tvaru; M. A. Lavrenťjev v citovaném článku [21] uvádí methodu jejího přibližného řešení. Dole uvedeme přesné řešení ve dvou nejjednodušších případech, kdy AB je buď úsečka, nebo oblouk kružnice.[2]

a) Nechť AB je interval $\langle -a, a\rangle$ reálné osy. V tom případě $\vartheta = \delta = 0$, veličiny ζ a t jsou reálné a rovnice (6) se zjednodušuje:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{T(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta = -V. \tag{8}$$

Řešení rovnice (8) napíšeme podle vzorce (26), § 26:

$$T(t) = \frac{2V}{\pi\sqrt{t^2 - a^2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}{\zeta - t}\,d\zeta + \frac{C}{\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

Integrál vyskytující se v tomto vzorci byl vypočten v § 68:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}{\zeta - t}\,d\zeta = -it,$$

---

[1] Důkaz toho lze najít v článku M. A. Lavrenťjeva [21].

[2] Ve článku [22] M. A. Lavrenťjev, Ja. I. Sekerž-Zeňkovič a V. M. Šepelev sestrojují soustavu singulárních rovnic pro problém obtékání dvou obloučků a řeší ji pomocí zobecněného Schwarzova algoritmu.

a tedy

$$T(t) = \frac{2Vt - C'}{\sqrt{a^2 - t^2}}; \quad C' = -iC. \tag{9}$$

V bodě $t = a$ se funkce $T(t)$ musí rovnat nule. Odtud určíme $C' = 2aV$ a

$$T(t) = -2V\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}. \tag{10}$$

Nyní

$$\omega(z) = -\frac{V}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}\frac{\mathrm{d}t}{t-z}. \tag{11}$$

Abychom vypočetli integrál v (11), položme

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sqrt{\frac{a-t}{a+t}}\frac{\mathrm{d}t}{t-z},$$

kde C je hranice na obr. 19. Máme:

$$\sqrt{\frac{a-t}{a+t}} = \frac{a-t}{i\sqrt{t^2-a^2}}.$$

Při výpočtu $T(t)$ jsme zvolili tu hodnotu odmocniny, která má v nekonečnu rozvoj

$$\sqrt{t^2 - a^2} = t - \frac{a^2}{2t} + \ldots$$

Dosadíme-li toto do předcházející rovnice, nalezneme, že

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}} = i.$$

Funkce $\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}$ je regulární vně C a rovna i v nekonečnu; odtud plyne, že

$$\Omega(z) = \sqrt{\frac{a-z}{a+z}} - i.$$

Nahraďme hranici C dvakrát proběhnutým intervalem $\langle -a, a\rangle$. Vezmeme-li v úvahu, že $\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}$ má různá znaménka na různých stranách uvedeného intervalu, najdeme:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}\,\frac{dt}{t-z}=\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}-i.$$

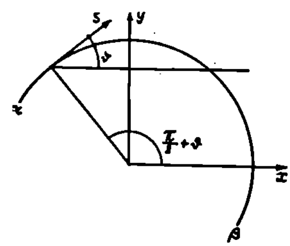
a

$$\omega(z)=iV-V\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}. \tag{12}$$

Nakonec

$$w'(z)=U-V\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}. \tag{13}$$

b) Nechť nyní AB je oblouk kružnice $|\zeta|=1$. Komplexní souřadnice konců oblouku označme α a β. Osu x orientujme rovnoběžně s rychlostí proudu v nekonečnu, takže $V=0$. Z obr. 23 je patrno, že $\arg t=\vartheta+\frac{1}{2}\pi$, a tedy $t=e^{i(\vartheta+\frac{1}{2}\pi)}=ie^{i\vartheta}$. Obdobně $\zeta=ie^{i\delta}$. Upravme integrál (6) na jednodušší tvar. Především $e^{i(\vartheta-\delta)}=\dfrac{t}{\zeta}$. Dále



Obr. 23.

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{T(\zeta)\,t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right\}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}T(\zeta)\operatorname{Re}\left\{\frac{t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right\}.$$

Na druhé straně

$$2\operatorname{Re}\left\{\frac{t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right\}=\frac{t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}+\frac{\bar t\,d\bar\zeta}{\bar\zeta(\bar\zeta-\bar t)}.$$

Protože na kružnici $\bar t=\dfrac{1}{t}$ a $\bar\zeta=\dfrac{1}{\zeta}$, dostaneme po jednoduchých výpočtech

$$2\operatorname{Re}\left\{\frac{t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right\}=\frac{\zeta+t}{\zeta-t}\,\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Dosadíme-li toto do (6), dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}T(\zeta)\,\frac{\zeta+t}{\zeta-t}\,\frac{d\zeta}{\zeta}=2U\sin\vartheta.$$

Avšak

$$2\sin\vartheta = \frac{1}{i}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) = -\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

a definitivní tvar rovnice bude

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{\zeta + t}{\zeta - t}\frac{d\zeta}{\zeta} = -\left(t + \frac{1}{t}\right)U. \tag{14}$$

Přistupme k řešení této rovnice. Vyšetřme integrál

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{15}$$

$F(z)$ je zřejmě regulární na celé rovině, rozdělené řezem podél oblouku $\langle\alpha, \beta\rangle$, při čemž

$$F(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = A.$$

Protože se jádro

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\zeta}{\zeta}$$

liší od Cauchyho jádra pouze konstantním součinitelem a regulárním sčítancem, platí pro integrál (15), jak lze lehce nahlédnout, tytéž věty o limitách jako pro integrál Cauchyho typu:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= T(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{\zeta + t}{\zeta - t}\frac{d\zeta}{\zeta}, \\ F_e(t) &= -T(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{\zeta + t}{\zeta - t}\frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dosadíme-li toto do (14), dostaneme:

$$F_i(t) + F_e(t) = -2i\left(t + \frac{1}{t}\right)U. \tag{17}$$

Položme

$$F(z)\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)} = \Phi(z).$$

Funkce $\Phi(z)$ je regulární v rozříznuté rovině s výjimkou bodu v nekonečnu, v němž má pól prvého řádu. Zvolme tu hodnotu odmocniny, jejíž rozvoj v nekonečnu začíná členem $+z$. Potom lze napsat

$$\Phi(z) = Az + \Phi_0(z),$$

kde $\Phi_0(z)$ je regulární pro $z = \infty$. Dosadíme-li do (17) místo $F(z)$ její vyjádření pomocí $\Phi(z)$ a uvědomíme-li si, že na různých stranách oblouku $\langle\alpha, \beta\rangle$ má odmocnina různá znaménka, převedeme rovnici (17) na tvar

$$\Phi_i(t) - \Phi_e(t) = -2i\left(t + \frac{1}{t}\right)\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}\, U.$$

Avšak

$$\Phi_i(t) = At + \Phi_{0i}(t),$$

$$\Phi_e(t) = At + \Phi_{0e}(t).$$

Odtud

$$\Phi_{0i}(t) - \Phi_{0e}(t) = -2i\left(t + \frac{1}{t}\right)\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}. \tag{18}$$

Partikulární řešení této rovnice je:

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{19}$$

Výraz (19) se rovná nule pro $z = \infty$. O funkci $\Phi_0(z)$ můžeme však pouze tvrdit, že je regulární v nekonečnu, a může se tedy pro $z = \infty$ rovnat nějaké konstantě. Obecné řešení rovnice (17) dostaneme, jestliže k (19) připočteme libovolnou konstantu:

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} + C.$$

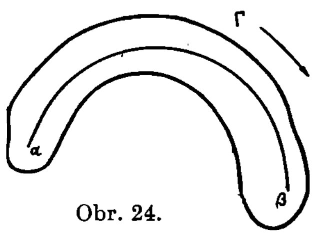
Abychom vypočetli poslední integrál, uvažujme integrál

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Hranice Γ je zobrazena na obr. 24; bod z leží vně Γ. V okolí bodu $\zeta = \infty$ lze odmocninu rozvinout v Laurentovu řadu tohoto tvaru:

$$\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)} = \zeta - \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8\zeta} + \dots$$

Integrál ve výrazu pro $\Omega(z)$ se rozpadá na dva. Prvý z nich vyjádříme ve tvaru



Obr. 24.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left\{\zeta\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)} - \zeta^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha + \beta)\,\zeta}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^2}{8}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta - z} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\zeta^2 - \frac{(\alpha + \beta)\,\zeta}{2} - \frac{(\alpha - \beta)^2}{8}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Ve druhém integrálu je integrand regulární uvnitř Γ a integrál se rovná nule. Prvý integrál je pak integrál Cauchyho. Tedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\zeta\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} = z\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)} - z^2 +$$
$$+ \frac{(\alpha + \beta)\,z}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^2}{8}.$$

V nekonečnu je funkce $\dfrac{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}}{\zeta(\zeta - z)}$ regulární a má tam residuum -1. V konečné vzdálenosti vně Γ má póly v bodech $\zeta = 0$ a $\zeta = z$ s residui $-\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}$ a $\dfrac{1}{z}\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)}$. Všimneme-li si, že Γ je probíhána ve směru hodinových ručiček a užijeme-li věty o residuích, najdeme:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{\zeta}\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{z}\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)} - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z} - 1.$$

Sečtením dostaneme:

$$\Omega(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)} - z^2 + \frac{(\alpha + \beta)\,z}{2} + \frac{(\alpha - \beta)^2}{8} - 1 -$$
$$- \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}.$$

Hranici Γ lze nahradit dvakrát proběhnutým obloukem $\langle\alpha, \beta\rangle$. To dá

$$\Phi_0(z) = -i\left(z + \frac{1}{z}\right)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} +$$

$$+ i\left(z^2 - \frac{(\alpha+\beta)\,z}{2} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right) + C, \tag{20}$$

a tedy

$$\Phi(z) = -i\left(z + \frac{1}{z}\right)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} +$$

$$+ i\left(z^2 - \frac{\alpha+\beta-2iA}{2}\,z - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right) + C. \tag{21}$$

Odtud

$$F(z) = -i\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{i}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}\left(z^2 - \frac{\alpha+\beta-2iA}{2}\,z -\right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right) + \frac{C}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}. \tag{22}$$

Nyní ze vzorců (16) plyne

$$T(t) = \tfrac{1}{2}[F_i(t) - F_e(t)] =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}\left[t^2 - \frac{\alpha+\beta-2iA}{2}\,t - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 - C' +\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right]; \quad C' = -iC. \tag{23}$$

Konstanta C' je určena podmínkou $T(\beta) = 0$ a konstanta A rovnicí

$$A = -\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta T(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Nyní

$$w'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{T(\zeta)\,e^{-i\vartheta}\,d\zeta}{\zeta - z} + U = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{T(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} + U. \tag{24}$$

Integrál (24) lehko vypočteme, vyjdeme-li z integrálu typu Cauchyho

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{T(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)},$$

kde Γ je hranice na obr. 24. Nebudeme uvádět definitivní vyjádření $w(z)$ pro jeho těžkopádnost.

LITERATURA

A. Učebnice theorie integrálních rovnic.

[1] G. Wiarda, Integralgleichungen, B. G. Teubner, 1930.

[2] E. Goursat, Cours d'analyse mathématique, Tome III, Gauthier-Villars, Paris.

[3] N. M. Gjuntěr, Osnovy matěmatičeskoj fiziki. Č. I. Intěgralnyje uravněnija. Izd. Kubuč. Leningrad, 1931.

[4] R. Courant-D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, K. III, Springer, Berlin.

[5] Lovitt, Integral Equations, McGraw-Hill Book Co, New York.

[6] G. M. Mjuntc, Intěgralnyje uravněnija, GTTI, 1934.

[7] I. I. Privalov, Intěgralnyje uravněnija, II. izd., GTTI, 1937.

[8] V. I. Smirnov, Kurs vyssej matěmatiki, t. IV, GTTI, 1941.

[8a] I. G. Petrovskij, Lekcii po těorii intěgralnych uravněnij, Gostěchizdat, 1948.

B. Literatura o aplikacích a speciálních otázkách theorie integrálních rovnic.

[9] I. V. Anaňjev, Rešenije zadač o sobstvěnnych kolebanijach kryljev s sosredotočennymi massami metodom intěgralnych uravněnij. Trudy CAGI, No. 348, 1938.

[10] I. N. Vekua, Kompleksnoje predstavlenije obščego rešenija uravněnij stacionarnoj ploskoj zadači těorii uprugosti. Doklady AN SSSR, sv. XVI, No. 3, 1937.

[11] A. J. Gorgidze, Metod posledovatělnych približenij v primeněniji k ploskoj zadače těorii uprugosti. Doklady AN SSSR, sv. IV, No. 5—6, 1934.

[12] N. Günter, La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Paris, Gauthier-Villars, 1934.

[13] F. H. van den Dungen, Cours de technique des vibrations. Bruxelles, 1926.

[14] N. V. Zvolinskij, Priloženije metoda intěgralnych uravněnij k odnoj zadače ustojčivosti cilindričeskich oboloček. Trudy CAGI, No. 320, 1937.

[15] T. Carleman, a) Zur Theorie der linearen Integralgleichungen. Math. Zeitschrift, Bd. 9, H. 3/4, 1921. — b) Sur la résolution des certaines équations intégrales. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, t. 16, 1922.

[16] A. I. Komaj, Sovměstnyje kolebanija kryla s sosredotočennymi gruzami. Trudy CAGI, No. 472, 1940.

[17] N. E. Kočin, a) Ploskaja zadača o glissirovaniji slabo izognutogo kontura po pověrchnosti tjaželoj nesžimajemoj židkosti. Trudy CAGI, No. 356, 1938. b) O volnovom soprotivleniji i podjomnoj sile pogružennych v židkosť těl. Trudy konferencii po těorii volnovogo soprotivlenija. Izd. CAGI, 1937.

[18] G. Krall, Sulla configuratione d'equilibrio instabile d'una piastra elastica sottile, Annali di matematica pura e applicata, s. IV, t. IV, 1927.

[19] M. G. Krejn i J. L. Nudelman, Pro minimaksimalni vlastivosti vuzliv obertoniv vibrujučogo strižnja. Trudy Oděskogo Děrž. Univers., Matěm., t. II, 1938.

[20] V. D. Kupradze, a) Metod intěgralnych uravněnij v těorii diffrakcii. Matěm. sbornik, t. 41, No. 4, str. 561—581, 1934. — b) Rasprostraněnije elektromagnitnych voln v něodnorodnoj sredě. Trudy Tbil. Mat. in-ta, t. I, str. 115—123, 1937. — c) K issledovaniju elektromagnitnych kolebanij v ploskom něodnorodnom polě. Doklady AN SSSR, t. XVI, No. 3, 1937. — d) Zur Frage der Ausbreitung electromagnetischer Wellen in einem inhomogenen ebenen Medium. Compositio Mathematica, vol. 6, fasc. 2, pp. 228—234, 1938. — e) Někotoryje novyje priloženija těorii rezolvěnty k graničnym zadačam těorii potěnciala. Doklady AN SSSR, t. XXIII, No. 1, 1939.

[21] M. A. Lavrenťjev, O postrojeniji potoka, obtěkajuščego dugu zadannoj formy. Trudy CAGI, No. 118, 1932.

[22] M. A. Lavrenťjev, J. I. Sekerž-Zeňkovič i V. M. Šepelov, K těorii biplannoj korobki kryljev. Trudy CAGI, No. 153, 1935.

[23] G. Lauricella, Sur l'intégration de l'équation rélative à l'equilibre des plaques élastiques encastrées. Acta Mathem., t. 32, pp. 201—256, 1909.

[24] C. O. Levina i S. G. Michlin, K voprosu o rasčetě naprjaženij v meždukamernych celikach. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 94, 1940.

[25] C. O. Levina, Dopolnitělnyje issledovanija naprjaženij v meždukamernych celikach. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 108, 1941.

[26] L. G. Magnaradze, a) Osnovnyje zadači ploskoj těorii uprugosti dlja konturov s uglovymi točkami. Trudy Tbil. Matem. in-ta, t. III, str. 43—75, 1938. b) Někotoryje graničnyje zadači matěmatičeskoj fiziki dlja pověrchnostěj s uglovymi linijami. Trudy Tbil. Mat. in-ta, t. VII, str. 23—45, 1939.

[27] S. G. Michlin, a) Zadača Dirichle dlja oblastěj s něskolkimi zamknutymi granicami. Doklady AN SSSR, No. 7, str. 2—7, 1934. — b) O raspreděleniji napraženij v polupIoskosti s elliptičeskim vyrezom. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 29, 1934. — c) Metod posledovatělnych približenij v priměněniji k bigarmoničeskoj problemě. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 39, 1934. — d) Ploskaja zadača těorii uprugosti. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 65, 1935. — e) Ploskaja zadača těorii uprugosti dlja něodnorodnoj sredy. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 66, 1935. — f) Ploskaja deformacija v anizotropnoj sredě. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 76, 1936. — g) Problema ekvivalentnosti v těorii singuljarnych intěgralnych uravněnij.

Matěm. sbornik, t. 3 (45), No. 1, str. 121—141, 1938. — h) Ob odnom klasse singuljarnych intěgralnych uravněnij. Doklady AN SSSR, t. XXIV, No. 4, 1939. — i) Někotoryje elementarnyje krajevyje zadači dlja volnovogo uravněnija. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 101, 1940. — j) Osnovnyje krajevyje zadači dlja volnovogo uravněnija. Doklady AN SSSR, t. XXIX, No 4, 1940. — k) Priměněnije preobrazovanija Laplaca k krajevym zadačam dlja volnovogo uravněnija. Doklady AN SSSR, t. XXXI, No. 4, 1941. — l) O naprjaženijach v porodě nad ugolnym plastom. Izv. OTN AN SSSR, No. 7—8, 1942. — m) Približennoje rešenije krajevych zadač dlja uravněnija cilindričeskich voln. Izv. OTN AN SSSR, No. 11—12, 1942. — n) O schodimosti rjadov Fredgolma. Doklady AN SSSR, t. XLII, No. 9, 1944. — o) Zadača o soprikasaniji dvuch uprugich poluploskostěj. Prikl. matěm. i mech., t. IX, 1945, str. 179—184. — p) Singuljarnyje intěgralnyje uravněnija. Uspěchi matěmatičeskich nauk, t. III, vyp. 3 (25), 1945.

[28] N. I. Muschelišvili, a) Někotoryje zadači těorii uprugosti. Izd. AN SSSR, 1935. — b) Novyj obščij sposob rešenija osnovnych konturnych zadač ploskoj těorii uprugosti. Doklady AN SSSR, t. III, No. 1, 1934. — c) Issledovanije novych intěgralnych uravněnij ploskoj těorii uprugosti. Doklady AN SSSR, t. III, No 2, 1934. — d) Priměněnija intěgralov tipa Koši k odnomu klassu singuljarnych intěgralnych uravněnij. Trudy Tbil. Mat. in-ta, t. X, str. 1—43, 1941. — e) Sistěmy singuljarnych intěgralnych uravněnij s jadrami tipa Koši. Soobščenija AN Gruzinskoj SSR, t. III, No. 10, str. 987—994, 1942. — f) Singuljarnyje intěgralnyje uravněnija. Gostěchizdat, 1946.

[29] N. I. Muschelišvili i D. Z. Avazašvili, O rešeniji osnovnych konturnych zadač těorii logarifmičeskogo potěnciala. Trudy Tbil. Matem. in-ta, t. VII, str. 1—23, 1940.

[30] N. I. Muschelišvili i D. A. Kveselava, Singuljarnyje intěgralnyje uravněnija s jadrami tipa Koši na razomknutych konturach. Trudy Tbil. Mat. in-ta, t. IX, str. 141—172, 1942.

[31] J. L. Nudelman, Do těorii stijkosti prostolinijnogo strižnja. Trudy Oděskogo Děrž. Univers., Matěm., t. II, 1938.

[32] I. Radon, O krajevych zadačach dlja logarifmičeskogo potěnciala. Uspěchi matěmatičeskich nauk, t. I, vyp. 3—4, 1946.

[33] G. N. Savin, Napraženija v uprugoj ploskosti s beskoněčnym rjadom vyrězov. Doklady AN SSSR, t. XXIII, str. 515—519, 1939.

[34] S. L. Sobolev, Algorifm Švarca v těorii uprugosti. Doklady AN SSSR, t. IV (XIII), No 6, str. 236—238, 1936.

[35] E. Treftz, Allgemeine Theorie der Knickung des geraden Stabes. ZAMM, Bd. 3, H. 4, S. 273, 1923.

[36] E. Schwerin, Über die Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts. Verh. d. 2. Intern. Kongresses f. techn. Mechanik, Zürich, 1926, S. 138—145.

[37] D. I. Šerman, a) Opredělenije napraženij v poluploskosti s elliptičeskim vyrězom. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 58, 1935. — b) Ob odnom metodě rešenija statičeskoj ploskoj zadači těorii uprugosti dlja mnogosvjajznych oblastěj. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No 54, 1935. — c) Někotoryje slučaji statičeskoj zadači těorii uprugosti s osěvoj simmetrijej. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 71, 1935. — d) Statičeskije ploskije zadači těorii uprugosti, Trudy Tbil. Matěm. in-ta, t. II, str. 163—225, 1937. — e) O raspredělěniji charaktěrističeskich čisel intěgralnych uravněnij ploskoj zadači těorii uprugosti. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 86, 1938. — f) Statičeskaja ploskaja zadača těorii uprugosti dlja něodnorodnych sred. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 86, 1938. — g) Ploskaja zadača těorii uprugosti dlja anizotropnoj sredy. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 86, 1938. — h) Ploskaja zadača těorii uprugosti so směšannymi predělnymi uslovijami. Trudy Sejsm. in-ta AN SSSR, No. 88, 1938. — i) Ob odnoj zadače těorii uprugosti. Doklady AN SSSR, t. XXVII, No. 9, 1940. — j) K rešeniju ploskoj statičeskoj zadači těorii uprugosti pri zadannych vněšnich silach. Doklady AN SSSR, t. XXVIII, No. 1, 1940. — k) Směšannaja zadača statičeskoj těorii uprugosti dlja ploskich mnogosvjaznych oblastěj. Doklady AN SSSR, t. XXVIII, No. 1, 1940. — l) O naprjaženijach v elliptičeskoj plastinkě. Doklady AN SSSR, t. XXXI, No 4, 1941. — m) Novoje rešenije ploskoj zadači těorii uprugosti dlja anizotropnoj sredy. Doklady AN SSSR, t. XXXII, No 5, 1941. — n) Ob odnoj směšannoj zadače těorii uprugosti. Prikl. Matěm. i Mech., t. VII, No. 6, 1943. — o) K voprosu o diffrakcii uprugich voln. Doklady AN SSSR, t. XLVIII, No. 9, 1945.

[38] W. Sternberg, Anwendung der Integralgleichungen in der electromagnetischen Lichttheorie. Compositio Mathematica, vol. 3, pp. 254—275, 1936.

[39] V. I. Dovnorovič, Davlenije žestkogo štampa na uprugoje poluprostranstvo. Dissertacija. Leningradskij Gos. Univěrsitět.

[40] S. Zaremba, Ob odnoj směšannoj zadače otnosjaščejsja k uravněniju Laplasa. Uspěchi matěm. nauk, t. I, vyp. 3—4 (13—14), 1946.

[41] I. A. Ickovič, O rjadach Fredgolma. Doklady AN SSSR, t. IX, No. 3, 1948.

[42] L. V. Kantorovič i V. I. Krylov, Približennyje metody vysšego analiza. GTTI, 1941.

VĚCNÝ REJSTŘÍK

(čísla udávají stránky)

Airyho funkce 175
algoritmus Schwarzův zobecněný 217
alternativa Fredholmova 47

Bertrand-Poincarého vzorec 119
Besselova funkce 71
— nerovnost 68
biharmonický problém první 176
— — druhý 176
— — třetí 182
bilineární řada 89
Buňakovského nerovnost 13, 39

Cauchyho jádro 116
cirkulace 157

Čebyševovy polynomy 71
číslo charakteristické (hodnota charakteristická) 36
číslo (hodnota) regulární 36

determinant Fredholmův 58
Dirichletův problém 135
— — modifikovaný 148
— — pro mnohonásobně souvislé oblasti 143, 217
— — pro vlnovou rovnici 259
— — v prostoru 167

Fischer-Rieszova věta 104
Fourierovy koeficienty 67
— řady 67
Fredholmova alternativa 47
— rovnice 6
Fredholmův determinant 58
— operátor 39
— — konjugovaný 39
— prvý minor 58
funkce analytická 136
— Besselova 71
— Greenova 183, 278
— — komplexní 183
— Goursatovy 178
— napětí (Airyho) 175
— normovaná 38
— regulární 136

Goursatovy funkce 178
Goursatův vzorec 178
Greenova funkce 183, 278
— — komplexní 183

Hilbertovo jádro 117
Hilbert-Schmidtova věta 78
Hilbertův problém 293
— vzorec 120
hlavní hodnota integrálu 111
hodnota regulární 36
homogenní rovnice 9

charakteristická funkce 36
charakteristické číslo 36

integrál Poissonův 117
— Schwarzův 310
— singulární 112
integrální rovnice druhého druhu 9
— — Fredholmova 6
— — homogenní 9
— — nehomogenní 9
— — prvého druhu 9
— — se slabou singularitou 6
— — singulární 6
— — souměrná 66
— — Volterrova 23

Kelloggova methoda 94
kmity tyčí torsní 282
— struny vlastní 270
Kolosovovy vzorce 179
konformní zobrazení 139, 164
kroucení tyčí 151

Lauricelliho rovnice 253
Legendreovy polynomy 71
Lipschitzova podmínka 113
Ljapunovovy podmínky 167

methoda Kelloggova 94
— postupných aproximací 10
— Ritzova 81
minor první Fredholmův 58

množina funkcí kompaktní 105
— — omezená 105
Muschelišviliho rovnice 241
— věta 199
— vzorce 178

Navier-Stokesova rovnice 176
nehomogenní rovnice 9
nerovnost Besselova 68
— Buňakovského (Schwarzova) 13, 39
Neumannův problém 150
norma 38

obtékání dvou válců 157
— křídla letadla 230
— oblouku daného tvaru 322
— problém 156
orthogonalisace 71
orthogonální funkce 38
— — s vahou 70
— posloupnost (soustava) 67
— — neúplná 69
— — úplná 69
orthonormovaná soustava 67

paradoxon Stokesovo 177
parametr rovnice 5
Parsevalova identita 68
podmínka Lipschitzova 113
— Ljapunovova 167
Poincaré-Bertrandův vzorec 119
Poissonův integrál 117
polynomy Čebyševovy 71
— Legendreovovy 71
potenciál dvojvrstvy 168
— tepelný 264
— (jednoduché) vrstvy 168
Privalovova věta, 115

problém biharmonický první 176
— — druhý 176
— — třetí 182
— Dirichletův 135
— Hilbertův 293
— Neumannův 150
— obtékání 156
— Riemannův 126
— pružnosti první 176
— — druhý 176
— — smíšený 313

regulární hodnota 36
resolventa 16, 48
Riesz-Fischerova věta 104
Riemannův problém 126
Ritzova methoda 81
rovnice, viz příslušný název

řada bilineární 89
— Fourierova 67

Schwarzův algoritmus zobecněný 217
— integrál 310
Schwarzovo jádro 185
singulární integrál 112
skalární součin 38
skládání singulárních integrálů 118
souměrná rovnice 66
souměrné jádro 66
Stokes-Navierova rovnice 176
stopa jádra 49
styk dvou polorovin 306

tepelné potenciály 264
tlak tuhého razníku 288, 308
torsní kmity tyčí 282

vlastní hodnota 36
vzpěr tyče 284

OBSAH

Předmluva k prvému vydání 3
Předmluva k druhému vydání 4

ČÁST I

METHODY ŘEŠENÍ INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

KAPITOLA 1. ROVNICE FREDHOLMOVA TYPU

§ 1. Klasifikace integrálních rovnic 5
§ 2. Methoda postupných aproximací. Pojem resolventy . . . 10
§ 3. Rovnice Volterrova typu 17
§ 4. Integrální rovnice s degenerovaným jádrem 21
§ 5. Obecný případ Fredholmovy rovnice 24
§ 6. Soustavy integrálních rovnic 32
§ 7. Užití přibližného integrování 33
§ 8. Fredholmovy věty 35
§ 9. Fredholmova resolventa 48
§ 10. Rovnice se slabou singularitou 59

KAPITOLA 2. SOUMĚRNÉ ROVNICE. HILBERT-SCHMIDTOVA THEORIE

§ 11. Souměrná jádra 66
§ 12. Základní věty o souměrných rovnicích 73
§ 13. Věta Hilbert-Schmidtova 75
§ 14. Určení prvého charakteristického čísla Ritzovou methodou 81
§ 15. Určení prvého charakteristického čísla pomocí stop jádra 88

§ 16. Kelloggova methoda 94
§ 17. Určení dalších charakteristických čísel 98
§ 18. Jádra, která lze převést na souměrná 102
§ 19. Řešení souměrných integrálních rovnic 102
§ 20. Věta o existenci charakteristického čísla 104

KAPITOLA 3. SINGULÁRNÍ INTEGRÁLNÍ ROVNICE

§ 21. Hlavní hodnota integrálu 111
§ 22. Jádro Cauchyho a Hilbertovo 115
§ 23. Vzorce pro skládání singulárních integrálů 118
§ 24. Singulární integrální rovnice s Hilbertovým jádrem . . . 121
§ 25. Singulární integrální rovnice s jádrem Cauchyho 125
§ 26. Případ neuzavřené souvislé křivky 126
§ 27. Případ neuzavřené nesouvislé křivky 131
§ 28. Soustavy singulárních integrálních rovnic 132

ČÁST II

UŽITÍ INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

KAPITOLA 1. DIRICHLETŮV PROBLÉM A JEHO UŽITÍ

§ 29. Dirichletův problém pro jednoduše souvislou rovinnou oblast 135
§ 30. Příklad: Konformní zobrazení vnitřku elipsy na kruh . . 139
§ 31. Dirichletův problém pro mnohonásobně souvislé oblasti 143
§ 32. Modifikovaný Dirichletův problém a Neumannův problém 148
§ 33. Kroucení plných a dutých tyčí 151
§ 34. Kroucení tyče čtvercového průřezu 153
§ 35. Problém obtékání 156
§ 36. Obtékání dvou eliptických válců 157
§ 37. Konformní zobrazení mnohonásobně souvislých oblastí . 164
§ 38. Dirichletův a Neumannův problém v prostoru 167

KAPITOLA 2. BIHARMONICKÁ ROVNICE (UŽITÍ GREENOVY FUNKCE)

§ 39. Problémy, vedoucí na biharmonickou rovnici 174
§ 40. Komplexní vyjádření biharmonické funkce 178
§ 41. Greenova funkce a Schwarzovo jádro 183
§ 42. Převedení prvého a třetího problému na integrální rovnici 190
§ 43. Vyšetřování integrální rovnice 194
§ 44. Případ jednoduše souvislé oblasti 197
§ 45. Oblast mezi dvěma konfokálními elipsami 199
§ 46. Vnějšek dvou oválů 203
§ 47. O konvergenci postupných aproximací 210

KAPITOLA 3. ZOBECNĚNÝ SCHWARZŮV ALGORITMUS

§ 48. Dirichletův problém pro mnohonásobně souvislé oblasti v rovině 217
§ 49. Případ trojdimensionální oblasti 223
§ 50. Zobecněný Schwarzův algoritmus 224
§ 51. Obtékání křídla letadla vzdušným proudem v blízkosti povrchu země 230
§ 52. Užití na problémy theorie pružnosti 231
§ 53. Excentrické mezikruží s rovnoměrně rozloženým tlakem na vnější kružnici 238

KAPITOLA 4. NĚKTERÁ UŽITÍ INTEGRÁLŮ OBDOBNÝCH POTENCIÁLŮM

§ 54. Užití integrálů Cauchyho v rovinné theorii pružnosti (rovnice N. I. Muschelišviliho) 241
§ 55. Pružná rovina s nekonečnou řadou výřezů 247
§ 56. Rovnice Lauricelliho 253
§ 57. Dirichletův problém pro vlnovou rovnici 259
§ 58. Tepelné potenciály a jejich užití 263
§ 59. Konvergence postupných aproximací 268

KAPITOLA 5. UŽITÍ THEORIE SOUMĚRNÝCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

§ 60. Vlastní kmity struny 270
§ 61. Kmity struny, jejíž hustota se mění lineárně 275
§ 62. Greenova funkce 278
§ 63. Torsní kmity tyčí (také v přítomnosti osamělých hmot) . 282
§ 64. Stabilita tlačené tyče. (Vzpěr tyče.) 284
§ 65. Tlak tuhého razníku na pružný poloprostor 288

KAPITOLA 6. NĚKOLIK APLIKACÍ THEORIE SINGULÁRNÍCH ROVNIC

§ 66. Hilbertův problém 293
§ 67. Hilbertův problém pro polorovinu 296
§ 68. Úloha o styku dvou pružných polorovin 300
§ 69. Úloha o styku dvou pružných polorovin (obecný případ) 306
§ 70. Tlak tuhého razníku na pružnou polorovinu 308
§ 71. Případ několika razníků 312
§ 72. Smíšený problém theorie pružnosti 313
§ 73. Případ oblasti racionálně zobrazené na kruh 318
§ 74. Problém obtékání oblouku daného tvaru 322

Literatura 332

Rejstřík 336

KRUH
svazek
26

S. G. MICHLIN

INTEGRÁLNÍ ROVNICE

a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952. Šéfredaktor Dr Miroslav Střída, odborný redaktor Miroslav Fuka, výtvarný redaktor Miloš Hrbas, jazykově upravila Jarmila Coufalová. Z nové sazby písmem Extended vytiskla Státní tiskárna n. p., závod 05 (Prometheus), Praha VIII — 1. vydání, náklad 3300 výtisků — 301 03/2 — 45971/51/19/III/1 — 122 — 1% — Sazba 12. VIII. 1951 — Tisk 9. II. 1952 — 21,38 plánovacích archů, 14,20 autorských archů, 14,61 vydavatelských archů — 342 stran, 24 obrazců — Papír 222-14, formát 61/86 cm, 80 g.

Cena brož. 163 Kčs

DT 517.9

KRUH

svazek

26

Cena brož. 163 Kčs

301 03/2

DT 517.9