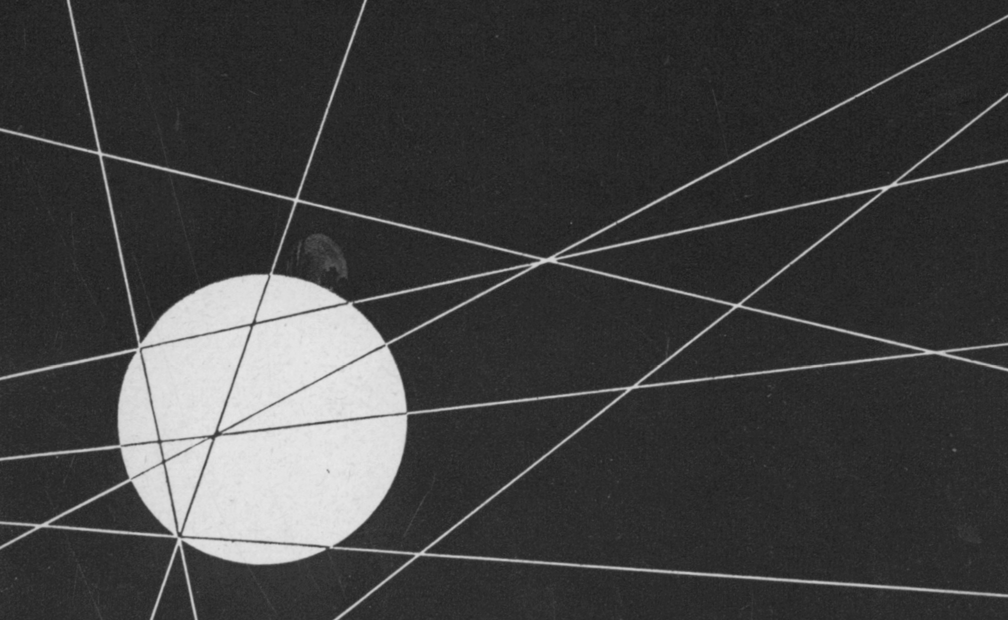
J. B. PAVLÍČEK

ZÁKLADY NEEUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE LOBAČEVSKÉHO



PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

JAN B. PAVLÍČEK

ZÁKLADY NEEUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE LOBAČEVSKÉHO

JAN B. PAVLÍČEK

Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského

1953

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

PŘEDMLUVA

Když jsem před 40 lety vstoupil na universitu jako student matematiky, měl jsem ten dojem, že geometrie, kterou jsem měl po celý život ve zvláštní oblibě, se stává poměrně málo významnou částí matematiky. Ve skutečnosti jsou právě dvacátá léta tohoto století počátkem úžasného, dodnes trvajícího rozmachu geometrie. Nejen v nejrůznějších oborech theoretické matematiky, nýbrž i ve fysice a technice prokazují dnes neocenitelné služby rozmanité prostory o čtyřech i více, většinou však o nekonečně mnoha dimensích.

Jestliže však dnešní smělé abstraktní koncepce matematiky znamenají nesmírný krok vpřed, je opravdové pochopení jejich významu nemožné bez znalosti historického vývoje, který jasně prokazuje, že skutečně plodné matematické abstrakce nejsou „svobodným výtvorem čistého rozumu“, nýbrž shrnutím a synthesou velkého množství speciálních konkretních fakt, odrážejících zákonitosti skutečného světa, a abstraktní matematické theorie jen tehdy jsou trvalým ziskem vědy, jestliže vedou ke zdolání nových konkretních problémů kladených praxí.

Správně bylo řečeno:[1] *„Lobačevskij podal v geometrii nejvýznamnější (v celých světových dějinách geometrie) a nejprincipiálnější výkon. On dokázal, že více než 2000 let trvající pokusy „dokázat“ postulát o rovnoběžkách nevedly k cíli proto, že jej dokázat nelze... Práce Lobačevského měly dva nejdůležitější důsledky. Jednak byly počátkem studia rozmanitých možných geometrií, různých od eukleidovské, což zase bylo počátkem studia vlastností skutečného vesmíru, z něhož se později vyvinul proslulý „princip relativity“. Za druhé tyto práce prokázaly důležitost axiomatické methody pro matematiku, a proto v určitém smyslu jsou jedním z pramenů abstraktní matematiky vůbec“. Je stěží přecenit genialitu a odvahu, kterou projevil Lobačevskij, když 1835 napsal slova, pochopená až dlouho po jeho smrti: „Není žádného rozporu v tom, jestliže připustíme, že některé síly v přírodě se řídí tou, jiné opět jinou geometrií.“*

Význam díla Lobačevského daleko přesahuje hranice matematiky. Pro pěstitele matematiky je však nesmírně důležité plně pochopit exaktní smysl Lobačevského geometrie. Tento úkol řeší autor s plným zdarem, spojuje vě-

---

[1]) Б. Н. Делоне, Математика и её развитие в России, 1948.

deckou přesnost s přístupností výkladu, plně srozumitelného každému, kdo s úspěchem prostudoval středoškolskou geometrii a kdo má zájem o matematické myšlení. Neméně zdařile je zpracována i obšírná část historická. Přeji proto knize co největší úspěch.

E. Čech

Tato kniha pojednává o Lobačevského neeukleidovské (hyperbolické) geometrii s matematického hlediska. Látku jsem rozdělil na dvě části; první obsahuje vlastní výklad elementů této geometrie, druhá má tento výklad doplnit a osvěžit podrobnějším vylíčením jejího historického vzniku. Obě části knihy jsou na sobě více méně nezávislé, takže je možné číst nejdříve část historickou a teprve potom vlastní výklad.

V prvé části jsem se v úvodních odstavcích snažil nejdříve několika slovy naznačit, jak neeukleidovská geometrie vznikla a oč v ní jde. Shrnul jsem v nich také některé matematické pojmy, jichž se v dalším výkladu užívá.

Na čtenářovy znalosti geometrie ze školy jsem se snažil navázat co nejpřirozeněji tím, že jsem zvolil elementárně geometrickou formu výkladu. Zúmyslně jsem se vyhnul užívání reálných čísel při studiu kontinua geometrických bodů, takže výklad nezahrnuje na př. analytickou geometrii ani trigonometrii.

Neeukleidovská geometrie se v této části soustavně vykládá od prvých elementů, takže celá I. kapitola zahrnuje věty společné neeukleidovské i eukleidovské geometrii. Teprve potom se čtenář seznámí se základními fakty Lobačevského geometrie (rovinné i prostorové), totiž s metrickými vlastnostmi přímek, s různými druhy svazků a trsů přímek i s jejich orthogonálními trajektoriemi jakožto charakteristickými elementárními křivkami a plochami Lobačevského prostoru. Protože česká literatura nemá dosud termínů pro tři různé druhy dvojic přímek Lobačevského roviny, užívám názvů nových, takže vedle přímek různoběžných je zde také řeč o přímkách souběžných a rozběžných.

V historické části jsem se snažil ukázat především spletité cesty, po nichž se ubírali matematikové obou tisíciletí během svého zápasu o rozřešení problému theorie rovnoběžek. Hojné citáty mají umožnit čtenáři co nejlepší pochopení těch, kteří svou namáhavou prací připravovali nové *geometrii půdu. Vedle toho mi šlo o to, aby se v plné šíři objevila zásluha N. I. Lobačevského, jenž svými spisy vybojoval v době plné předsudků nové geometrii místo, které jí náleželo, a nezalekl se boje proti tehdy panujícím zpátečnickým noetickým názorům na geometrii i celou matematiku. Na Lobačevském vidíme, že vedle široké erudice musí velký vědec mít také odvahu hlásat nové názory a nebát se nést za ně odpovědnost.*

*

Tuto knihu jsem napsal na podnět akademika Eduarda Čecha, kterému na tomto místě s vděčností děkuji za účinnou podporu a rady, jež mi ochotně dával, kdykoli jsem se na něho obrátil, i za zapůjčení rukopisu práce „Základy geometrie" (z r. 1945), jež mi velmi usnadnila sepsání odstavců 11, 12 a 13.

Dále děkuji všem, kteří jakýmkoli způsobem pomohli mé práci a přispěli k zlepšení knihy. Děkuji zvláště s. Ladě Vaňatové za pečlivé narýsování obrázků. Vděčností jsem také zavázán tiskárně za to, že ochotně vyšla vstříc mým přáním.

J.B.P.

OBSAH

ČÁST I.

VÝKLAD LOBAČEVSKÉHO GEOMETRIE.

ČÁST II.

HISTORICKÝ VÝVOJ.

ČÁST I

VÝKLAD LOBAČEVSKÉHO GEOMETRIE

ÚVOD

1. O geometrii vůbec. V úvodu této knížky, která má čtenáře seznámit se základy neeukleidovské geometrie, pohovoříme nejdříve o tom, jak tato geometrie vznikla, jaký je její význam a v jakém je vztahu ke geometrii eukleidovské, k té geometrii, se kterou se každý setkal ve škole. Nejprve však několik slov o geometrii vůbec.

Geometrické pojmy, tak jako všechny matematické pojmy, jsou odrazem skutečného, nás obklopujícího světa. „*Jak pojem čísla, tak i pojem figury je vypůjčen výlučně z vnějšího světa a nevznikl v hlavě z čistého myšlení. Musely být věci, které měly formu, a jejich formy byly připravovány, než se mohlo dospět k pojmu figury. Předmětem čisté matematiky jsou prostorové tvary a číselné vztahy skutečného světa, tedy velmi reálná látka. Že se tato látka jeví v nejvýš abstraktní formě, může jen velmi slabě zastřít její původ z vnějšího světa. Abychom však mohli tyto tvary a vztahy zkoumat ryzí, musíme je úplně odloučit od jejich obsahu a ten jako lhostejný ponechat stranou.*“[1])

Geometrie, tak jako ostatně celá matematika, obráží svými pojmy a vývody skutečnost v abstraktní formě. Jak způsob logického usuzování, tak i prvotní matematické pojmy se vyvinuly na základě tisícileté praxe a odtud právě vyplývá přesvědčivost a bezespornost matematiky.

S geometrií (a vůbec s matematikou) jakožto *abstraktní vědou* se setkáváme po prvé u starověkých Řeků. Ve svých zárodcích však geometrie vznikala již v šerém dávnověku u orientálních národů a to na základě praktických potřeb a zkušeností, ať už při stavbách nebo vyměřování pozemků nebo jakékoli výrobě. Hlavním přínosem řeckých matematiků byl jednak přechod k vyšším abstrakcím, jednak logický rozbor jednotlivých úvah; a právě tím se řecká matematika dostala na vyšší úroveň než jakou měla u Egypťanů nebo Babyloňanů. Tím, že poučky byly logicky odvozovány a ne pouze konstatovány na základě

[1]) F. Engels: Antidühring, str. 36—37 českého vydání, Svoboda 1949.

přímého pozorování a zkušeností, geometrie přestala být záležitostí jen smyslového vnímání a empirického, více méně náhodě ponechaného pozorování. Nyní vyžadovala naopak uvědomělého pozorování, cílevědomého vyhledávání problémů, kontroly úsudků a jejich třídění v systém. Tím vším byl člověk podněcován k dalším bádáním, jež geometrii stále více obohacovala, takže nakonec byla také způsobilejší řešit konkretní úkoly, z nichž vyrostla.

Říkáme-li, že geometrie obráží a popisuje prostor nás obklopujícího světa, pak musíme hned také dodat, že ho *popisuje jen přibližně, zjednodušeně a schematicky*, protože každá abstrakce je vlastně zjednodušením. Znamená to tedy, že určitý geometrický systém či určitá geometrie si nemůže činit nárok na to, že by skutečnost zobrazovala s neomezenou platností, za všech okolností a podmínek. Někdy proto může jiná geometrie podávat přesnější obraz a lépe vystihnout určité prostorové vlastnosti materiálního světa.

„*Člověk nemůže uchvátit celou skutečnost v její bezprostřední plnosti, on se k tomu může jen věčně blížit.*“ [2]) To platí i o zkoumání geometrických vlastností skutečného, mimo nás existujícího prostoru. Rozvoj praxe a vědy ukázal, že eukleidovská geometrie je pouze prvním přiblížením v poznání geometrických vlastností tohoto skutečného prostoru, přes to, že dlouho platila za absolutní, plné a proto i jediné vyjádření těchto vlastností, což jako by se potvrzovalo jejím širokým uplatněním v klasické fysice i denní praxi. Ukázalo se, že dalším přiblížením ve vyšetřování skutečného prostoru je geometrie neeukleidovská.

Tato geometrie zobecňuje v určitém smyslu geometrii eukleidovskou a obsahuje ji jako zvláštní případ, podobně jako geometrie na kouli s hlavními kružnicemi jakožto „přímkami“ zahrnuje v sobě planimetrii: sférická geometrie uvažovaná na celé kouli se sice podstatně liší od geometrie roviny, blíží se jí však tím více, čím menší je vzhledem k poloměru koule část jejího povrchu, na niž geometrii omezíme.

Přesnost, s jakou eukleidovská geometrie popisuje geometrické vlastnosti té části prostoru, jež je našim smyslům dostupná, ať již jde o blízké okolí našeho denního života nebo vzdálený svět stálic, je víc než

[2]) V. I. Lenin, Filosofické sešity, 1947, str. 156 rus. vyd.

postačující. Neeukleidovská geometrie se uplatňuje teprve při popisu světa v kosmickém měřítku, teprve když přihlížíme k tomu, že vesmírný prostor je vyplněn hmotou, teprve když ve fysikálních úvahách nahradíme poměrně nevelíké rychlosti rychlostmi řádu rychlosti světla. Neeukleidovská geometrie se uplatňuje plně ve fysice relativistické, zatím co fysika klasická stojí všude na geometrii eukleidovské.

Pojem neeukleidovské geometrie, o niž se opírá relativistická fysika, je svým rozsahem širší než pojem geometrie, kterou se budeme v dalším zabývat a která se přesněji nazývá Lobačevského neeukleidovskou geometrií. Lobačevského geometrie je jen velmi speciálním a jednoduchým případem *neeukleidovské geometrie v širším smyslu*, neboť předpokládá, že prostor má v každé části tentýž charakter a tytéž vlastnosti. Neeukleidovská geometrie v širším smyslu naproti tomu pracuje s prostorem, který má v různých místech charakter různý. Zabývá se tedy prostorem, jehož geometrické vlastnosti jsou v něm, abychom tak řekli, nerovnoměrně rozloženy. Protože geometrické vlastnosti udílí fysikálnímu prostoru teprve hmota a protože hmota je ve vesmírném prostoru rozdělena nerovnoměrně, je odtud snadno patrné, proč se relativistická fysika opírá o neeukleidovskou geometrii v širším smyslu.

Vraťme se nyní ještě k abstraktní stránce geometrie. Jak jsme již jednou řekli, pracujeme v rámci „čisté“ matematiky s pouhými abstrakcemi a poučky dokazujeme úvahami na základě definic pojmů a jiných pouček, aniž bychom se přitom opírali o nějaké experimentální ověřování. Vidíme tak, že matematika zaujímá abstraktní stupeň našeho poznání.

Pokud se na matematiku díváme jako na abstraktní vědu, pak je pro ni příznačné, že nevychází z rámce abstraktnosti: její tvrzení jsou *logicky dokazována*, její pojmy *přesně zaváděny definicemi*. Odtud plyne další charakteristický rys matematiky. Jestliže každý důkaz spočívá na dovolávání se určitých známých vět a jestliže chceme být naprosto důslední, pak se musíme při důkazech odvolávat jen na věty již dříve dokázané. Protože však není možné dovolávat se dokázaných vět do nekonečna (někde musí totiž výklad začínat), přijímáme některá tvrzení za správná bez důkazu a z nich pak celou příslušnou partii matematiky logicky odvozujeme. Tvrzení, jejichž správnost je takto od počátku předpokládána, se nazývají *postuláty* nebo častěji *axiomy*.

S axiomaticky budovanou matematikou se setkáváme již u řeckých matematiků. Známé Eukleidovy *Základy* jsou prvním pokusem o axiomatický výklad matematiky a v tom spočívá jejich velký význam a Eukleidova zásluha. Eukleides však nebyl všude zcela důsledný, a proto jeho *Základy* jsou skutečně jen pokusem o axiomatisaci matematiky. Svůj výklad začíná sice výčtem axiomů, avšak při důkazech se nevědomky dovolává také takových vět, které ani neuvádí mezi axiomy, ani je nedokazuje. Podat důsledný axiomatický výklad geometrie nebo jiné matematické discipliny nebylo ostatně v době Eukleidově ještě dost dobře možné, uvážíme-li, že to byla doba, kdy se matematika jakožto abstraktní věda teprve začala krystalisovat. Axiomatisace geometrie byla důsledně provedena teprve v 19. století (blíže o tom viz odstavec **7**, str. 36), u ostatních disciplin matematiky se tak stalo až ve 20. století.

Ani abstraktní povaha matematiky ani možnost budovat ji čistě logickou cestou (axiomaticky) nás nesmí mýlit. Nesmíme se domnívat, že by se snad matematika vyvíjela odtrženě od mimo nás existující skutečnosti. „*Myšlení, přecházejíc od konkretního k abstraktnímu, nevzdaluje se — je-li správné — od pravdy, nýbrž přibližuje se k ní … Od živého pozorování k abstraktnímu myšlení a od něho k praxi — to je cesta dialektického poznání pravdy, poznání objektivní reality.*“[3]) Je nutné, aby si byl každý dobře vědom toho, že matematika nemůže být nikdy chápána odděleně od obklopující nás skutečnosti, od praxe, ale na druhé straně také toho, že v důsledku vysokého stupně abstraktnosti matematiky není její vztah k praxi vždy bezprostřední, nýbrž je často zprostředkován teprve jinými vědeckými a technickými disciplinami.

Leninova základní these o poznávání, kterou jsme právě citovali, se plně ověřuje na geometrii eukleidovské a neeukleidovské. Geometrie přechází nejprve od konkretních útvarů skutečného prostoru k abstrakcím a geometrickým pojmům; důkladným studiem těchto pojmů a jejich vlastností rozvíjí tyto abstrakce, na jejich podkladě dochází k novým pojmům a abstrakcím — k objevu neeukleidovské geometrie došlo vlastně takovýmto způsobem uvnitř geometrie jakožto abstraktní

[3]) V. I. Lenin, Filosofické sešity, 1947, str. 146—147, rus. vyd.

vědy — a odtud se vrací k živé skutečnosti, k našim představám o prostoru, který nás obklopuje, a k aplikacím na fysiku.

Právě uvedená slova nám dávají odpověď nejen na otázku, jaký je význam neeukleidovské geometrie, ale také na otázku, jak tato geometrie vznikla: původní a jednoduché abstrakce skutečného prostoru byly skládány do systému po vzoru Eukleidově. Studium těchto abstrakcí a jejich postupné rozvíjení vyústilo ve vytvoření abstrakcí nových — a právě takovým způsobem došlo mimo jiné k důležitému objevu neeukleidovské geometrie. S hlediska historického bude tento objev osvětlen v následujícím odstavci.

2. Jak se zrodila neeukleidovská geometrie. Neeukleidovská geometrie je nauka poměrně nová. V únoru 1826 s ní po prvé veřejně vystoupil mladý ruský matematik N. I. Lobačevskij a první tištěnou prací o ní byl jeho spis *O načalach geometrii*, napsaný r. 1829. Majetkem matematické veřejnosti se však nová geometrie stala teprve po r. 1860, tedy až po smrti Lobačevského, a tehdy se také ukázalo, jak velký je význam jejího objevu.

Ačkoliv je neeukleidovská geometrie dílem 19. století, sahá svými kořeny o celá dvě tisíciletí nazpět. K jejímu objevu došlo totiž při řešení jednoho velmi starého geometrického problému, táhnoucího se dějinami matematiky již od dob Eukleidových. Lobačevskij byl nucen se s tímto problémem vypořádat, když jako mladý docent kazaňské university konal přednášky o základech geometrie, a jeho objev svědčí o tom, že tak učinil způsobem opravdu skvělým.

Tímto problémem byl t. zv. *problém rovnoběžek*; naznačíme nyní, oč v něm šlo. Zmínili jsme se již o tom, že Eukleides pojal výklad geometrie ve svých *Základech* axiomaticky. Celou geometrii odvozuje ze 14 axiomů, z nichž 5 nazývá postuláty a jež zní takto:

I. *Dvěma body lze vždy vést jedinou přímku.*

II. *Úsečku lze neomezeně prodloužiti.*

III. *Z libovolného středu lze libovolným poloměrem sestrojit kružnici.*

IV. *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

V. *Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně přímky, kde je součet menší.*[4])

Poslední postulát je tak zvaný „postulát o rovnoběžkách", neboť říká totéž, jak později podrobně rozebereme, jako tvrzení, že „*v rovině lze bodem mimo danou přímku k ní vést právě jednu přímku, která ji neprotíná neboli je s ní rovnoběžná.*" Již řečtí vykladači Eukleidových *Základů* si povšimli, že V. postulát se od ostatních liší svou složitostí, a pojali podezření, že by se dal z ostatních odvodit, takže by bylo zbytečno ho uvádět. Říkali, že Eukleides v dalším výkladu dokazuje věty, které bychom mohli mnohem snáze přijmout pro jejich jednoduchost bez důkazu než pátý postulát. Všimli si také, že celá řada důležitých základních vět se u Eukleida dokazuje bez tohoto postulátu. Aby si ověřili své podezření, pokoušeli se ho dokázat. Již několikrát se zdálo, že se jim to podařilo, ale po každé se ukázalo, že při důkazu nebylo použito jenom vět dokazovaných bez pomoci V. postulátu, takže se důkaz opíral vlastně o něco, co měl teprve dokázat. Matematikové se snažili znovu a znovu najít správný důkaz, ale ku podivu stále marně. Tak vznikl problém rovnoběžek: nebylo totiž jisto, zda pokusy selhávají proto, že důkaz není možný, či proto, že důkaz sice možný je, ale vyžaduje nějakého dosud neznámého obratu.

Na otázku, jak je to s důkazem V. postulátu, nedal odpověď ani starověk, ani středověk, ačkoli se o řešení problému pokoušeli matematikové neustále, od starověkých Řeků přes středověké Araby po novodobé Italy, Angličany, Francouze, Švýcary i Němce. Rozřešit tento problém se podařilo teprve v 19. století, a to N. I. Lobačevskému a skoro současně maďarskému matematikovi Janu Bolyaiovi. V té době znal již řešení také německý matematik C. F. Gauss. ~~O všem tom budeme podrobněji jednat v historické části našeho výkladu~~. Nyní se však podíváme, jakou cestou rozřešil tuto otázku Lobačevskij.

Můžeme říci, že Lobačevskij užil v podstatě methody *nepřímého dů-*

[4]) Některé rukopisy *Základů* mají postuláty jen čtyři, zatím co postulát o rovnoběžkách je uveden mezi axiomy, nejčastěji jako axiom XI, někdy jako axiom IX nebo XII. Dříve se vedly diskuse o tom, jaký je vlastně rozdíl mezi postulátem a axiomem. Dnes se však mezi nimi žádný podstatný rozdíl nehledí a obou slov se užívá ve stejném smyslu.

kazu. Tato methoda spočívá, jak známo, v tom, že z vět, na základě nichž důkaz provádíme, a z předpokladu, že neplatí tvrzení, jehož správnost chceme dokázat, se odvozují důsledky tak dlouho, až se objeví spor, to znamená, až dojdeme v důsledcích ke dvěma tvrzením, z nichž jedno je negací druhého. To pak znamená, že předpoklad, podle něhož dokazované tvrzení neplatí, je falešný, a tudíž podle principu o vyloučeném třetím musí platit tvrzení dokazované. Lobačevskij vzal v úvahu první čtyři Eukleidovy postuláty i s jejich důsledky, tedy všechny věty eukleidovské geometrie, které se dají dokázat bez užití V. postulátu (o takových větách se dnes říká, že tvoří absolutní geometrii), a k nim přidal negaci V. postulátu:

Existuje alespoň jeden pár neprotínajících se přímek v rovině, které protínají tutéž přímku a tvoří s ní po jedné její straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých.

Nyní se dalo čekat, že při odvozování vět z takovýchto podivných předpokladů se jistě objeví spor a že tím bude V. postulát dokázán. Lobačevskij odvozoval větu za větou, ale na žádný spor nepřicházel. Při tom bylo zapotřebí velkého ostrovtipu, aby se mezi neobvyklými, s hlediska eukleidovské geometrie úplně absurdními důsledky našel skutečný *logický spor*, to znamená taková dvojice tvrzení, z nichž jedno tvrdí opak druhého, a ne jen nějaký spor zdánlivý, spočívající v tom, že určité tvrzení odporuje našim vžitým představám. Nenechat se zmást navyklými představami, ale vidět logický spor jen tam, kde skutečně je, bylo velmi těžké. Již před Lobačevským se někteří matematikové pokoušeli řešit problém rovnoběžek nepřímým důkazem, avšak během svých úvah se zastavili u některého tvrzení v přesvědčení, že jistě odporuje nějakému důsledku absolutní geometrie a negace V. postulátu, a domnívali se pak, že postulát o rovnoběžkách dokázali. Ve skutečnosti však jejich poslední tvrzení neodporovalo žádnému takovému důsledku, nýbrž odporovalo jen nějaké zdánlivě tak samozřejmé větě, že se před tím nikdo nezajímal o její důkaz a nevěděl, že ho lze podat jen na základě V. postulátu.

Lobačevskij naproti tomu se takové chyby nikde nedopustil a hledal skutečný logický spor, avšak stále marně. Když již měl celou dlouhou řadu neobvyklých vět, počal si náhle uvědomovat, že se k sobě jaksi

„rozumně“ řadí, jako by měly tvořit harmonickou stavbu. Tehdy mu také připadla na mysl možnost, že se spor nikde neobjeví, protože třebas všechny důsledky z jeho předpokladů tvoří bezesporný celek. Vypořádat se s těmito myšlenkami znamenalo veliký krok kupředu. Této možnosti nepostřehli ti, kteří již před Lobačevským dokazovali V. postulát nepřímo, při čemž ani na chvíli nepřestali pochybovat, že se dokázat dá. Toto jejich přesvědčení bylo tak silné, že viděli spor tam, kde žádného nebylo, a proto V. postulát nakonec vždy „dokázali“.

Od počátečního tušení přešel Lobačevskij brzy k přesvědčení o bezespornosti nových tvrzení, takže potom odvozoval další věty již s vědomím, že mu pod rukama vzniká jiná stavba geometrických pojmů a tvrzení než je geometrie eukleidovská, a tak tvoří vlastně novou geometrii. Té dnes říkáme geometrie neeukleidovská, přesněji *Lobačevského neeukleidovská geometrie*.

Nebudeme se nyní zabývat dalším historickým vývojem neeukleidovské geometrie. Nemůžeme však pominout mlčením, že druhá polovina 19. století nám dala ještě jednu neeukleidovskou geometrii. R. 1854 přišel totiž Bernhard Riemann diferenciálně-geometrickými úvahami na obecnou metrickou geometrii, jež zahrnovala celkem tři typy různých geometrií: vedle geometrie Eukleidovy a Lobačevského to byla geometrie, jež později byla nazvána jménem Riemannovým. Eukleidovská geometrie má s ní daleko méně společných vět než s geometrií Lobačevského. V Riemannově geometrii se na příklad vždy protínají kolmice na tutéž přímku, což má za následek, že v rovině neexistují přímky, které by se neprotínaly, neexistují v ní tedy rovnoběžky. Další zvláštností jejích přímek je, že se chovají — řečeno názorně — tak, že bod pohybující se stále v témž smyslu po přímce vrací se opět do původní polohy. Chovají se tedy jako uzavřené čáry.

Obě neeukleidovské geometrie, Lobačevského i Riemannova, byly v 19. století osvětleny ještě s dalšího hlediska, a to projektivní geometrií. Tato geometrie vznikla tak, že nejdříve byly v geometrických úvahách zavedeny nevlastní body, přímky a roviny (Desargues)[4a] a potom později se vyšetřovaly věty, ve kterých nebylo rozlišováno mezi elementy vlastními a nevlastními. Protože takové věty vyjadřovaly

---

[4a]) Viz začátek odstavce **18**, str. 124.

jenom ty vlastnosti útvarů, které se při promítání (při projekci) nemění, nepatřily mezi ně poučky o metrických vlastnostech a ani metrické pojmy (délka úsečky, velikost úhlu) nemohly mít v projektivní geometrii žádného místa. Další vývoj ukázal, že přece však lze jistým způsobem zavést metrické vztahy projektivně (Laguerre 1853, Cayley 1859). R. 1872 ukázal F. Klein, že projektivně lze zavést metriku v podstatě trojím způsobem, a obdržel tak vedle geometrie Eukleidovy a Lobačevského také geometrii Riemannovu. Podle Kleina se pro Lobačevského geometrii užívá také názvu *hyperbolická geometrie* a pro Riemannovu názvu *eliptická geometrie.*[5])

3. Význam objevu neeukleidovské geometrie. Objevem neeukleidovské geometrie bylo potvrzeno, že se postulát o rovnoběžkách dokázat nedá a že ho tudíž Eukleides uváděl mezi postuláty právem. Tím však nebyl význam nového objevu vyčerpán. Neeukleidovskou geometrií se totiž objasnila mnohá bolavá místa v základech geometrie, která byla odkryta nezdařenými pokusy o důkaz V. postulátu a kvůli nimž byla theorie rovnoběžek od 17. století nazývána „skvrnou na krásném těle geometrie", „skandálem základů geometrie", „ostudnou částí matematiky" a pod. Zmíněné nedostatky spočívaly v tom, že některé pojmy nebyly ještě blíže analysovány a mnohá tvrzení byla pokládána za samozřejmá, zatím co jejich důkaz je možno podat jen pomocí V. postulátu.

Příkladem takového nevyjasněného pojmu byla ekvidistance přímek. Někteří matematikové si položili otázku, zda by se V. postulát nedal dokázat, kdyby se rovnoběžky definovaly jako přímky všude od sebe stejně vzdálené (ekvidistantní) na rozdíl od Eukleida, který, jak známo, nazývá rovnoběžkami přímky v rovině, které se neprotínají. Přitom považovali za samozřejmé, že takové přímky existují, čili jinými slovy, že body ležící ve stejné vzdálenosti od přímky (a po téže její straně) leží v přímce. Později ukážeme, že toto tvrzení je rovno-

[5]) Riemannova geometrie (v užším smyslu) zahrnuje vedle eliptické ještě také sférickou geometrii, která při dimensi 2 splývá s geometrií na obyčejné kouli, jestliže za „přímky" vezmeme hlavní kružnice. Zde jsou tedy přímky opravdu uzavřené čáry a vidíme také, že zde neexistují rovnoběžky, protože každé dvě „přímky" se protínají. Protože se protínají dokonce vždy ve dvou bodech, neplatí ve sférické geometrii věta „*dvěma body je určena jedna a jen jedna přímka*" a tím se geometrie sférická odlišuje od eliptické, ve které je tato věta splněna.

cenné s V. postulátem. Jiným takovým choulostivým místem byl pojem podobnosti útvarů, u něhož bylo teprve později zjištěno, že stojí a padá s postulátem o rovnoběžkách.

Tato nejasná místa, která způsobila, že problém rovnoběžek přitahoval tolik pozornosti, ukázala také na dříve uvedené vážné nedostatky Eukleidových *Základů*: neúplný výčet axiomů, z nichž se všechny geometrické věty mají dokazovat, a neuspokojivé definice základních pojmů, tedy jedním slovem — nedůsledné uplatnění axiomatické methody.

Eukleidova kniha byla dlouhou dobu považována za vzor logického budování jakékoli nauky a platila jako svrchovaná autorita až do 18. století jak u učenců, tak na školách, kde se jí do té doby užívalo jako učebnice geometrie (na anglických školách ještě i ve století devatenáctém). Během 19. století však její autorita padla (nejdříve se tak stalo ve Francii po revoluci z roku 1789), její nedostatky byly kritisovány a na školách byla nahrazena prvními novými učebnicemi. Pro tuto dobu je charakteristická Lobačevského poznámka v úvodu jeho spisu *O načalach geometrii*:

> „Kdo by nepřiznal, že by žádná matematická nauka neměla začínat takovými temnými pojmy, jakými my po vzoru Eukleida začínáme geometrii a že by se nikde v matematice nemělo trpět tolik nepřesnosti, jako se to stalo v theorii rovnoběžek." (Lobačevskij [5], str. 185.)[6])

Odstranit všechny nejasnosti v geometrii a nahradit je přesným výkladem bylo možné až po objevu neeukleidovské geometrie, neboť teprve ona ukázala mnohé pojmy ve správném světle. Nový objev vedl tak k přezkoumání logických základů geometrie a posléze se stal jedním z mocných podnětů k revisi základů celé matematiky. Tato revise charakterisuje matematiku 19. století a spolu s rodící se matematickou logikou dala vznik nové matematické disciplině, t. zv. *základům matematiky*. Prvním ovocem této nové disciplíny bylo důsledné propracování axiomatické methody, z níž se brzy stal důležitý nástroj moderní matematiky.

O tom, že objev neeukleidovské geometrie obohatil naše nazírání na prostor, když se tato geometrie ukázala být hlubším vystižením geo-

---

[6]) Čísla v hranatých závorkách odkazují na seznam citované literatury, str. 215.

metrických vlastností světového prostoru, a o tom, jaký význam to mělo později pro fysiku, jsme se zmínili již v prvním odstavci. Těchto důsledků nového objevu si byl ostatně plně vědom již sám Lobačevskij. Ve svých spisech se zamýšlel nad tím, jak by se novou geometrií změnila klasická mechanika, a experimentálně se pokoušel zjistit, do jaké míry nová geometrie platí ve skutečném prostoru. Protože v hyperbolické geometrii je součet úhlů trojúhelníka vždy menší než $2R$ a při tom tím menší, čím větší jsou strany trojúhelníka, pozůstával jeden způsob experimentu v měření součtu úhlů velikých trojúhelníků. Zatím co Gauss zkoumal velké trojúhelníky na povrchu zemském, vyšetřoval Lobačevskij trojúhelníky, jejichž vrcholy tvořily různé stálice; zjistil však, že i tak velké trojúhelníky jsou ještě příliš „malé", takže odchylka od $2R$, byla-li vůbec jaká, byla ještě v mezích pozorovacích chyb.

Jestliže eukleidovská geometrie dlouho platila za plné (adekvátní) a jediné vystižení prostorových vlastností materiálního světa, pak Lobačevského objev neeukleidovské geometrie znamenal revoluční průlom do těchto starých představ i do idealistického učení, které na nich bylo založeno. Přesvědčení o jedinečnosti eukleidovské geometrie totiž způsobilo, že mnozí matematikové i filosofové zapomněli na empirický původ geometrických pouček, takže pak vykládali, že způsob geometrického nazírání nám byl vrozen a dán jednou provždy a před jakoukoliv zkušeností (a priori). Podle nich Eukleidova zásluha spočívala v tom, že popsal právě toto naše vrozené geometrické nazírání. Někteří šli dokonce tak daleko, že říkali, že prostor je jen naší subjektivní nazírací formou. S takovýmto pojetím věci se setkáváme u Kanta v jeho učení o synthetických soudech a priori.

K zapomenutí faktu, že eukleidovská geometrie je odrazem skutečnosti, přispělo také to, že geometrie je nauka abstraktní a že může být budována axiomaticky. Deduktivní odvozování z axiómů, i když ne všude zcela důsledné, svádělo mnohé k tomu, že se dívali na geometrii jako na výtvor čistého rozumu. S podobným pojetím se setkáváme ještě i dnes u idealisticky zaměřených matematiků. To však je nesprávný pohled na axiomatickou methodu, jejíž skutečný význam se pokusíme vyložit v příštím odstavci. Pokud jde o abstraktní stránku geometrie, postačí snad, když řekneme, že *„abstrakce je nezbytným a důležitým stupněm nebo, chceme-li, stránkou poznání; abstrakce obrážejí* *skutečnost... Každá abstrakce je pouze stupínkem ve věčném přibližování se k plnému poznání přírody. Nesmí tedy být abstrakce zabsolutněna a vytržena z obecné souvislosti, z obecného vývoje poznání.*“[7])

Viděli jsme, že v době, v níž byla objevena neeukleidovská geometrie, byla noetická stránka geometrie a vlastně celé matematiky pojímána na mnoha místech falešně. Jedním z prvních průlomů do fronty mylných názorů byl Lobačevského objev, což je další a jistě ne nejmenší význam objevu neeukleidovské geometrie.

Tyto mylné představy však neodešly a neodcházejí samy sebou. Lobačevskij přišel na svoji geometrii právě v době, kdy v Evropě všude vládlo Kantovo učení, o němž jsme se již zmínili. Psát tehdy o nové geometrii a plně se k ní hlásit — k tomu bylo zapotřebí velké odvahy a odhodlání za vědeckou pravdu třebas i bojovat, neboť ve světle kantovského učení o prostoru byla jakákoli řeč o jiné geometrii než eukleidovské absurdností a bláznovstvím. Gaussovi, nesporně velikému matematikovi, se této odvahy nedostalo, a proto o neeukleidovské geometrii, na kterou přišel zcela nezávisle na Lobačevském, nepublikoval ani řádky, ačkoliv si byl plně vědom jejího významu. Naproti tomu Lobačevskij si nenechal za nepříznivých okolností nový objev pro sebe, ale pustil se nebojácně do boje proti dogmatismu a nedal se zastrašit ani nepochopením, ani výsměchem. O tom všem je blíže pojednáno v historické části naší knížky.

4. O axiomatické methodě. Chceme-li přesně vyložit základy neeukleidovské geometrie a ukázat souvislosti mezi touto geometrií a geometrií eukleidovskou, je snad nejlépe vyložit vše na základě přesně vyslovených axiomů geometrie, jak je vytvořila matematika koncem 19. století. Protože výklad geometrie v naší knížce je podán tímto způsobem, bude jistě vhodné seznámit se podrobněji s axiomatickou methodou, což nyní také učiníme. Nejdříve pojednáme o axiomatické methodě s obecného stanoviska, později pak také s ohledem na její užití v geometrii.

---

[7]) A. D. Alexandrov: Leninská dialektika a matematika, Priroda, 1951, č. 1, str. 6. Český překlad tohoto článku viz Sovětská věda, Matematika-fysika, 1951, č. 6, str. 327 nebo také Časopis pro pěstování matematiky, roč. **76** (1951), str. 239.

Každá matematická disciplina pracuje s určitými pojmy, zabývá se určitými (matematickými) objekty, studuje jejich vlastnosti a vzájemné vztahy a svoje výsledky shrnuje v poučkách. Rozrůstáním a postupným zdokonalováním discipliny se stává, že u mnohých vlastností, které byly dříve považovány za jasné samy sebou, se ukáže, že je lze odvodit z jednodušších, a podobně, že některé objekty, o nichž máme jednoduchou názornou představu, mohou být odvozeny z objektů jiných a elementárnějších (na př. kružnice může být odvozena z pojmu bodu a vzdálenosti). Vidíme tedy, že jak pojmy, s nimiž určitá disciplina pracuje, tak i věty, které do ní patří, spolu navzájem souvisí takovým způsobem, že některé z nich se dají odvodit pomocí jiných. O odvozených *pojmech* (objektech a vztazích) říkáme, že jsme je pomocí jiných *definovali* (někdy také konstruovali), o *větách*, které jsme odvodili, říkáme, že jsme je na základě jiných *dokázali*.

Protože každá definice převádí definovaný pojem na pojmy jiné a podobně i důkaz je redukcí na jiné, před tím již známé věty, je zřejmé, že by bylo nesmyslné žádat, aby *všechny pojmy*, s nimiž disciplina pracuje, byly definovány a aby *všechny* její *věty* byly dokázány. Postupné logické rozvíjení discipliny musí vycházet z několika pojmů, jež zůstávají nedefinovány, a od určitého počtu tvrzení, jež dále nedokazujeme, nýbrž jejichž pravdivost prostě předpokládáme.

Na počátku každé logicky důsledně budované matematické discipliny musí tudíž stát určitá skupina *nedefinovaných pojmů* a určitá skupina *nedokázaných tvrzení*. To také budou jediné nedefinované pojmy a nedokázaná tvrzení, kdežto všechny ostatní pojmy i všechna ostatní tvrzení musí být z nich pomocí pravidel logické dedukce odvozeny. Takové nedefinované pojmy budeme nazývat *primitivní pojmy*, nedokázaná tvrzení *axiomy* a soubor primitivních pojmů a axiomů *axiomatickým systémem* příslušné matematické discipliny. Zaxiomatisovat určitou disciplinu nebo podat její axiomatiku znamená totéž, jako určit její axiomatický systém.

Pro matematickou disciplinu nemusí být axiomatický systém určen jednoznačně. Podobně jako v geometrii může být táž rovina určena různými trojicemi bodů (neležících v přímce), tak i jedna a táž disciplina může být zaxiomatisována různě; prohlásit některé pojmy za primitivní a některá tvrzení za axiomy (tak, aby se z nich pak dala celá disciplina odvodit), je do jisté míry věc výběru, právě tak jako u bodů určujících naši rovinu. Přitom ovšem tvrzení, které v jednom zaxiomatisování je axiomem, může být v jiném dokazovanou větou a podobně je to i u pojmů. Je tedy zřejmé, že mluvit o důkazu nějakého tvrzení a o definici nějakého pojmu můžeme jen vzhledem k určitému axiomatickému systému. Současně je vidět, že v tomto pojetí nejsou axiomy „tvrzení, jež nelze dokázat" nebo „tvrzení, jež jsou sama sebou zřejma, takže důkazů nepotřebují", jak se to někde říkalo ještě u starších autorů.

Na primitivní pojmy i axiomy patřící do axiomatického systému klademe obvykle podmínku, aby byly *nezávislé*, t. j. aby se žádný člen axiomatického systému nedal ze zbývajících odvodit. Tento požadavek není nutný, umožňuje však, aby axiomatický systém nebyl zbytečně rozsáhlý, ale obsahoval jen ty členy, jichž je k vybudování celé disciplíny nezbytně zapotřebí. To značně napomáhá přehlednosti a usnadňuje další práci. Axiomatický systém musí dále nutně splňovat podmínku, že jeho axiomy tvoří *bezespornou soustavu*, t. j. že z nich nelze odvodit dvě tvrzení, jež by si odporovala. Kdyby totiž soustava axiomů nebyla bezesporná, pak by se z ní dalo odvodit *jakékoli* tvrzení, tedy i nesprávné.[7a])

Velmi nám pomůže hlouběji pochopit axiomatickou methodu, jestliže ji budeme současně pojímat následujícími dvěma různými způsoby.

První spočívá v tom, že se na primitivní pojmy díváme jako na prázdné bezobsažné symboly, jimž teprve axiomy dávají určitý obsah. Jestliže tedy primitivní pojmy označujeme mnohdy slovy s vžitým obsahem (jako *bod*, *přímka*, *vzdálenost*, *násobení*, *číslo* atd.), musíme dát pozor, abychom nerozuměli takovým pojmem víc než co o něm říkají axiomy. Také na dokazované věty se musíme dívat tak, jako by tvořily systém čistě abstraktních vět, dokazatelných úplně formálně, bez zřetele na jejich obsah. V tomto prvém pohledu se axiomatika často přirovnává ke hře v šachy: primitivní pojmy hrají roli figur, které samy o sobě nemají žádný smysl. Teprve pravidla šachové hry, jež v našem přirovnání odpovídají axiomům, ukazují, co se s figurami má dělat.

S tímto pojetím je nezbytné spojit pojetí druhé, neboť obě se navzá-

[7a]) O tom viz blíže O. V. Zich: Úvod do filosofie matematiky, JČMF, Praha 1947, 34. sv. sbírky Cesta k vědění, str. 59.

jem doplňují: je sice pravda, že primitivní pojmy jsou bezobsažné symboly, ale jsou to symboly, a proto si pod nimi můžeme myslet jakékoli konkretní objekty a vztahy, jen když budou vyhovovat příslušným axiomům. Ostatně při rozvíjení axiomaticky pojaté discipliny nikdy nepostupujeme ryze formálně, nýbrž všechny úvahy provádíme nakonec v určitých konkretních pojmech a představách, které si za primitivní pojmy dosazujeme.

Takto jsme se dostali k pojmu *modelu* nebo také *interpretace* abstraktní zaxiomatisované discipliny. Řečeno obecně, je to dosazení určitých pojmů (o nichž předpokládáme, že je již známe) za primitivní pojmy zaxiomatisované discipliny, dosazení zcela libovolné, vázané pouze podmínkou, aby dosazené pojmy vyhovovaly daným axiomům.

Zaxiomatisovaná disciplina jakožto systém abstraktních vět je vždy schopna rozmanitých modelů. Jestliže na př. axiomatisujeme nějakou rozvinutou klasickou disciplinu (na př. geometrii), pak ona je jedním (a obyčejně nejdůležitějším) modelem získané axiomatiky. Vedle toho však tutéž axiomatiku lze interpretovat také jinými modely, někdy na první pohled velmi odlehlými a někdy velmi zvláštními. Z tohoto hlediska se jeví geometrie Eukleidova a Lobačevského jako dva různé modely téže *absolutní geometrie* (o tom viz později).

Abychom lépe pochopili všechno to, co jsme dosud řekli o axiomatisaci, bude nejlépe uvést nějaký příklad, což také v odst. **6** učiníme. Nyní shrneme ještě v několika poznámkách význam axiomatické methody, zejména pro dnešní matematiku.

Zaxiomatisovat rozvinutou klasickou disciplinu má především určitý didaktický význam, neboť tím se v disciplině zavádí systém a lepší přehled. Na druhé straně to prospívá dalšímu rozvoji discipliny samé, neboť se upřesní její logické základy. Rigorosnost logických základů neprobíhá během staletí stále po vzestupné linii, ale v určitých výkyvech. Jsou taková údobí, kdy se hromadí nový a nový materiál, nové a nové objevy, kdy se postupuje vpřed jen zdravým odhadem, zatím co chybí pevné logické základy. Proto se někdy do leckterých detailů vloudí i mylné představy. Příkladem takového údobí může být pro infinitesimální počet 17. a 18. století. Nato přichází údobí, kdy se nahromaděný materiál přezkoumává, provádí se jeho revise a dodatečně se objasňuje logická struktura mnohých, jinak správných theorií.

Zaxiomatisovat některou matematickou disciplinu znamená proto vždy velký krok vpřed. Jedním z nejnovějších úspěchů tohoto druhu bylo zaxiomatisování theorie pravděpodobnosti zásluhou sovětské matematické školy, zejména pak A. N. Kolmogorova, jednoho z největších sovětských matematiků. Tímto zásahem byl počet pravděpodobnosti povýšen na skutečnou matematickou disciplinu, na kterou pak bylo možno aplikovat i ty důležité partie matematiky, které před tím stály od počtu pravděpodobnosti stranou (na př. theorii míry), a tak z původní theorie hazardních her, používané z počátku pouze v theorii vyrovnávání chyb a v pojistné matematice, stává se dnes důležitý nástroj matematické statistiky, theoretické fysiky a celé řady technických disciplin.

Jestliže axiomatická methoda, jež byla důsledně propracována teprve v nejnovější době, se stává jedním z charakteristických znaků dnešní matematiky, pak je příčinou a zároveň i důsledkem jednoho důležitého rysu moderní matematiky, totiž tendence víc a víc zobecňovat základní pojmy i theorie. Starověká matematika byla naukou o číslech, veličinách a geometrických útvarech našeho názorného prostoru. Matematika 17. a 18. století postavila ve formě funkcionální závislosti na přední místo ideu plynulé změny (vlivem fysiky) a v geometrii si začala všímat nejrůznějších geometrických příbuzností (transformací). Dnešní matematika se svými množinami, abstraktními prostory různých dimensí a struktur, grupami, algebraickými tělesy atd. už rozhodně nezapadá do starých rámců matematiky. Postupným zobecňováním dochází matematika jak k novým, dosud neprobádaným oblastem, tak také, a to je velice důležité, k synthese již existujících a na první pohled od sebe vzdálených theorií. Odhaluje mezi nimi panující souvislosti, abstrahuje jejich společné jádro a propracovává je dál v theorii, která zahrnuje původní theorie jako speciální případy. Je právě znakem axiomatické methody, že nám umožňuje všímat si vnitřní stavby té které partie matematiky a neulpívat pouze na vnějších formulacích.

5. Množiny. Pro naše další výklady bude vhodné seznámit se s pojmem *množiny*, který hraje dnes v matematice důležitou úlohu. Je to vlastně pojem patřící do logiky, takže se ho v podstatě užívá již v elementární matematice, byť podvědomě a pod jinými názvy, jako je *souhrn*, *soubor*, *množství* a pod.

Množinou rozumíme souhrn určitých věcí, které nazýváme jejími *prvky*. Tak na př. kružnice je množina všech bodů, stejně vzdálených od jistého bodu; všechna čísla m taková, že $m^3 + 2m^2 - 5m - 6 = 0$ tvoří množinu, jež má tři prvky, totiž čísla 2, —1, —3; množina všech kladných dělitelů čísla 600 obsahuje 24 prvků (která jsou to čísla?).

Množina je *určena*, jestliže o každé věci víme, zda do ní patří nebo nepatří; stačí tedy vyjmenovat všechny její prvky (což lze jen u množin s konečným počtem prvků; obsahuje-li taková množina prvky a, b, c, d, pak ji značíme symbolicky $\{a, b, c, d\}$) nebo udat vlastnost, kterou mají všechny prvky množiny a už žádné jiné; tímto druhým způsobem jsou na př. určeny tyto množiny: množina všech přirozených čísel od 1 do 2000; množina všech bodů prostoru, majících od dané přímky stejnou vzdálenost. Každou množinu považujeme jejími prvky za *jednoznačně* určenou. Když nějaká věc označená písmenem a je prvkem množiny $\boldsymbol{A}$, pak to píšeme symbolicky $a \in \boldsymbol{A}$. Když dvě množiny $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ mají tytéž prvky (čili když pro každé $a \in \boldsymbol{A}$ platí také $a \in \boldsymbol{B}$ a když pro každé $a \in \boldsymbol{B}$ platí také $a \in \boldsymbol{A}$), pak je nazýváme *identickými*, symbolicky $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. V opačném případě říkáme, že jsou *různé*, $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$.

Množinu $\boldsymbol{A}$ nazýváme *částí* množiny $\boldsymbol{B}$ nebo také *podmnožinou* množiny $\boldsymbol{B}$ (resp. v množině $\boldsymbol{B}$), jestliže pro každé $a \in \boldsymbol{A}$ platí také $a \in \boldsymbol{B}$. Symbolicky to píšeme $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ nebo $\boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$. Někdy místo podmnožina říkáme také *třída*. Je-li na př. $\boldsymbol{A}$ množina všech čísel iracionálních a $\boldsymbol{B}$ množina všech čísel komplexních, pak je jistě $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$; obsahuje-li množina $\boldsymbol{A}$ n prvků, pak v množině $\boldsymbol{A}$ existuje $\binom{n}{k}$ podmnožin o k prvcích. Vztah označený symbolem $\subset$ nazýváme *vztahem inkluse*. Podle toho jak jsme ho zavedli je zřejmé, že ať je $\boldsymbol{A}$ jakákoli množina, platí vždy $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}$. Dále je patrno, že je-li $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ a současně $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}$, pak je vždy také $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}$. Jestliže je současně $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, pak snadno zjistíme podle toho jak jsme zavedli vztahy $\subset$ a $=$, že je $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Součtem množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří alespoň do jedné z nich, neboli názorně, je to množina skládající se z prvků obou množin zároveň. Součet množin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ značíme $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ nebo $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$. Je-li $\boldsymbol{A} = \{a, b, c, d\}$ a $\boldsymbol{B} = \{c, d, e, f\}$, pak $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} =$

$= \{a, b, c, d, e, f\}$. Nechť si čtenář promyslí, že pro jakékoli množiny A, B, C platí na příklad: $A + A = A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$; je-li $A \subset B$, pak také $A + C \subset B + C$.

Průnikem množin A, B rozumíme množinu všech prvků, které patří do obou množin současně, čili množinu všech prvků společných oběma množinám. Průnik množin A, B značíme symbolicky AB nebo BA. Je-li na př. A množina všech násobků čísla 2 a B množina všech násobků čísla 3, pak AB je množina všech násobků čísla 6. Je zřejmé, že průnik AB je vždy podmnožinou každé z množin A, B.

Někdy se může stát, že dvě množiny nemají žádný prvek společný. Abychom i u takových množin mohli mluvit o průniku, zavádíme t. zv. *prázdnou množinu*, která tedy nemá žádný prvek. Protože je jenom jedna prázdná množina (množina je totiž svými prvky jednoznačně určena), budeme ji vždy značit O. Je-li tedy na př. P množina všech bodů přímky p a Q množina všech bodů přímky q a přímky p, q jsou mimoběžné, pak $PQ = O$. O množinách, které nemají společné prvky čili mají prázdný průnik, říkáme, že jsou *disjunktní*. Ať je A jakákoli množina (třeba i prázdná), je vždy $O \subset A$. Dále snadno zjistíme, že $A + O = A$; $AO = O$. Prázdná množina je zahrnuta i mezi množinami, jež jsou určeny společnou vlastností jejich prvků. Tak na příklad množina všech čísel, která jsou současně větší než 2 a menší než 1, je množina prázdná. Podobně i množina všech bodů prostoru majících od každého ze tří daných bodů ležících na přímce stejnou vzdálenost je prázdná.

6. Ukázka axiomatisace: uspořádání množiny. Abychom se blíže seznámili s axiomatickou methodou, ukážeme nyní, jak se axiomaticky zavádí pojem *uspořádání množiny*. Tento příklad volíme proto, že je jednoduchý a protože pojem uspořádání je důležitý, neboť se s ním v matematice setkáváme na každém kroku a v geometrii patří mezi nejzákladnější pojmy. Budeme ho potřebovat také během našeho výkladu geometrie a tento odstavec může k tomu proto sloužit jako příprava.

Pojem uspořádání je zcela názorný. Je v něm zahrnuto na př. srovnávání čísel podle velikosti, orientace přímky a vůbec jakékoli řadění podle vztahů menší — větší, vpravo — vlevo, nahoře — dole a pod.

Uvidíme, že v jistém smyslu sem patří také dělitelnost celých čísel a množinová inkluse.

Při axiomatickém zavádění pojmu uspořádání zvolíme za primitivní pojmy *množinu* $\boldsymbol{M}$ a *dvojčlennou relaci* R, t. j. pravidlo, které udává, zda mezi *dvěma* prvky z $\boldsymbol{M}$ relace R platí nebo neplatí. Že mezi prvky $a, b \in \boldsymbol{M}$[7a]) platí vztah R budeme symbolicky psát $a\, R\, b$.

O množině $\boldsymbol{M}$ budeme říkat, že je *relací R uspořádána*, nebo kratčeji, že je *uspořádanou množinou*, jestliže budou splněny axiomy:

1. *Pro každé dva prvky $a, b \in \boldsymbol{M}$ platí právě jeden ze vztahů*

$$a = b, \quad a R b, \quad b R a.^{8})$$

2. $a, b, c \in \boldsymbol{M}, \ a R b, \ b R c \Rightarrow a R c.$[9])

O relaci, která splňuje axiom 1, říkáme, že je vzhledem k množině $\boldsymbol{M}$ *trichotomická*, a o relaci, která splňuje axiom 2, že je *transitivní.*

Relaci, která splňuje axiomy 1 a 2, budeme nazývat také krátce uspořádáním.

Nyní uvedeme několik konkretních interpretací (modelů) pojmu uspořádání (přesvědčte se sami o tom, že jsou splněny axiomy 1 a 2): 1. Za množinu $\boldsymbol{M}$ vezměme množinu všech reálných čísel a za relaci R vztah $<$ (*větší*, *menší*). 2. $\boldsymbol{M}$ budiž množina všech bodů na přímce a relace R vztah „*leží napravo*". 3. $\boldsymbol{M}$ budiž množina všech bodů roviny, při čemž relace R je zavedena takto: $a\ R\ b$ resp. $b\ R\ a$ znamená, že *vzdálenost bodů a* a *m je menší* resp. *větší než vzdálenost bodů b* a m, kde m je určitý pevný bod naší roviny. Bude-li tedy vzdálenost am stejná jako bm, pak v našem modelu bude podle axiomu 1 $a = b$. 4. $\boldsymbol{M}$ budiž mno-

---

[7a]) Místo „$a \in \boldsymbol{M}$ *a současně* $b \in \boldsymbol{M}$" píšeme krátce „$a, b \in \boldsymbol{M}$". Podobný význam má „$a, b, c \in \boldsymbol{M}$".

[8]) Slůvko *právě* má v matematice zvláštní význam: *právě dvě přímky* znamená totéž jako *alespoň dvě přímky a současně nejvýše dvě přímky.* Ve starší terminologii by se místo *právě jeden ze vztahů* řeklo *jeden a jen jeden vztah.*

[9]) Symbol „$p \Rightarrow q$" čteme obvykle „*když platí p, pak platí také q.* Přesně vzato je však $\Rightarrow$ symbol pro *logickou implikaci.* Jsou-li p a q dva výroky, pak „$p \Rightarrow q$" znamená, že „*výrok p implikuje výrok q*", což má tento význam: ze čtyř možností, jež se navzájem vylučují, totiž [1] *p platí, q platí*; [2] *p neplatí, q neplatí*; [3] *p neplatí, q platí*; [4] *p platí, q neplatí*, nastane některá z prvých tří. Jsou-li p_1, p_2, q tři výroky, pak „$p_1, p_2 \Rightarrow q$" znamená, že „*současná platnost výroků p_1 a p_2 implikuje výrok q*". – Symbol „$p \Leftrightarrow q$" znamená totéž, jako „$p \Rightarrow q$ *a současně* $q \Rightarrow p$" čili $\Leftrightarrow$ je symbol pro *logickou ekvivalenci.*

žina všech mocnin čísla 3 (s celými kladnými exponenty) a relace R vztah „*je pravým dělitelem*". Při tom „*a je pravým dělitelem b*" znamená totéž jako „*číslo a je dělitelem čísla b, při čemž* $a \neq b$".

Relace může mít obecně ještě jiné vlastnosti než je trichotomie a transitivnost. Z nich důležité jsou *reflexivnost* a *symetrie*. Relace R je reflexivní, jestliže pro každé $a \in \mathsf{M}$ platí $a\,R\,a$. Relace R je symetrická, jestliže kdykoliv je $a\,R\,b$ je také $b\,R\,a$. Uvedeme příklady takových relací. Reflexivní, transitivní a nesymetrickou relaci nám představuje na př. vztah $\leqq$ na množině reálných čísel nebo vztah „*je dělitelem*" na množině všech mocnin čísla 3. Relací reflexivní, transitivní a symetrickou je na př. známý vztah rovnosti ($=$). Příkladem množiny s netrichotomickou relací může být množina M všech částí neprázdné množiny A spolu se vztahem inkluse. V M mohou totiž existovat prvky, jež jsou *disjunktními částmi* množiny A, takže mezi nimi neplatí ani vztah $\subset$ ani $\supset$. Jiným příkladem může být množina všech přirozených čísel spolu se vztahem „*je dělitelem*", neboť na př. mezi dvěma různými prvočísly není tento vztah nikdy splněn.

O relaci uspořádání, t. j. o relaci R, která je trichotomická i transitivní, platí však následující věty, jak se dá z axiomů 1 a 2 snadno dokázat:

3. *Relace R není reflexivní.*
4. *Relace R není symetrická.*
5. *Každé dva různé prvky* $a, b \in \mathsf{M}$ *jsou v relaci, t. j. je vždy buď* $a\,R\,b$ nebo $b\,R\,a$.
6. *Zavedeme-li pomocí R relaci S tak, že je* $a\,S\,b$ *kdykoli je* $b\,R\,a$, *pak relace S je uspořádáním.*

K důkazu věty 6 si stačí uvědomit, že z toho, že R splňuje axiom 1 plyne, že i S splňuje axiom 1. Abychom dokázali, že S splňuje axiom 2 vezměme takové prvky $a, b, c \in \mathsf{M}$, že je $a\,S\,b$, $b\,S\,c$. Potom je ale také $b\,R\,a$, $c\,R\,b$, a protože R je transitivní, je $c\,R\,a$. Podle definice relace S je ale také $a\,S\,c$, což jsme měli dokázat. Právě definované uspořádání S se nazývá *inversní* k R a často se značí symbolem R^*. Je zřejmé, že uspořádání inversní k R^* je opět R.

Nyní se budeme blíže zabývat větami 3, 4, 5. Lze se totiž snadno přesvědčit, že místo tvrzení 1 a 2 můžeme vzít za axiomy tvrzení

5, 3 a 2, protože všechno, co lze odvodit (i to, co jsme dosud ještě neodvodili) z 1 a 2, lze také odvodit z 5, 3 a 2. To plyne odtud, že sama tvrzení 1, 2 lze z 5, 3 a 2 odvodit.

O tvrzení 2 je to triviální, protože je v obou systémech obsaženo. Zbývá to tedy dokázat o tvrzení 1. Nejdříve dokážeme tu část, která říká, že pro každé dva prvky a, b platí alespoň jeden z případů $a = b$, $a R b$, $b R a$. Vezměme libovolné prvky $a, b \in \boldsymbol{M}$. Je-li $a = b$, není již co dokazovat. Je-li $a \neq b$, pak podle tvrzení 5 je buď $a R b$ nebo $b R a$ a tím jsme hotovi. Dokážeme nyní druhou část tvrzení 1, že totiž platí nejvýše jeden z případů $a = b$, $a R b$, $b R a$. Kdyby platil zároveň první a druhý, mohli bychom v $a R b$ „dosadit“ za b prvek a, takže by bylo $a R a$, což je ve sporu s 3. Zcela tak se dokáže, že nemůže platit zároveň první a třetí případ. Konečně ani druhý a třetí nemohou zároveň platit, protože potom by podle 2 bylo $a R a$, což by bylo opět ve sporu s 3. Tím je celý důkaz hotov.

Poznamenejme ještě, že tvrzení 3 jsme potřebovali pouze k důkazu druhé části tvrzení 1. V tomto místě důkazu lze však místo tvrzení 3 užít také tvrzení 4. Neboť kdyby platil zároveň první a druhý z diskutovaných případů, pak bychom v $a R b$ mohli nalevo „dosadit“ za a a napravo za b podle vztahu $a = b$, čímž bychom dostali, že platí také $b R a$, což by bylo ve sporu s tvrzením 4. Podobně, kdyby platil první a třetí případ. Vzhledem k tvrzení 4 je bezprostředně patrno, že nemůže platit ani druhý ani třetí případ.

Vidíme tedy, že i tvrzení 5, 4 a 2 lze vzít jako axiomy a tím docházíme ke *třem různým axiomatisacím* pojmu uspořádání. Všechny tři mají tytéž primitivní pojmy a liší se jen v axiomech. První má za axiomy tvrzení 1 a 2, druhá tvrzení 5, 3 a 2, třetí 5, 4 a 2.

Axiomatický výklad o uspořádání lze podat také pomocí axiomatického systému, který vychází z *jiných primitivních pojmů*. Takový výklad pomocí jiného axiomatického systému si také nyní skutečně provedeme. Za tím účelem se ještě v dosavadní axiomatice (s tvrzeními 1 a 2 jako axiomy) seznámíme s jedním novým pojmem.

Mějme opět naši množinu $\boldsymbol{M}$ a předpokládejme, že je relací R uspořádána. Pomocí R zavedeme nyní *novou relaci* mezi prvky množiny $\boldsymbol{M}$, tentokráte *trojčlennou*, t. j. týkající se *tří* prvků, kterou budeme značit μ. Jsou-li prvky a, b, c (v tomto pořadí) v relaci μ, budeme to symbolicky psát $\mu(abc)$. Relace μ bude definována tak, že

$$\mu(abc) \Leftrightarrow a\,R\,b\,R\,c \text{ nebo } c\,R\,b\,R\,a.^{10})$$

O relaci μ mezi prvky a, b, c můžeme tedy mluvit, jen když tyto prvky jsou všecky různé. Podle interpretací relace R je vidět, že relace μ je abstrakce známého vztahu „*mezi*“. Podívejme se nyní na některé vlastnosti tohoto vztahu.

7. $\mu(abc) \Rightarrow \mu(cba)$.

Tato vlastnost plyne přímo z definice vztahu μ.

8. *Jsou-li a, b, c tři různé prvky z $\mathbf{M}$, pak nastává právě jeden z případů $\mu(abc)$, $\mu(bca)$, $\mu(cab)$.*

Bezprostředním důsledkem věty 5 je, že nastává *aspoň* jeden z těchto tří případů. Zbývá tedy dokázat, že nastává *nejvýše* jeden z těchto případů. Nejdříve dokážeme, že nemůže současně být $\mu(abc)$, $\mu(bca)$. Za předpokladu, že oba tyto vztahy platí, odvodíme spor. Rozeznávejme dva případy podle toho, co znamená $\mu(abc)$. Nechť nejdříve $\mu(abc) \Leftrightarrow a\,R\,b\,R\,c$. Jestliže $\mu(bca) \Leftrightarrow b\,R\,c\,R\,a$, pak podle věty 2 je $a\,R\,a$, což je spor, a jestliže $\mu(bca) \Leftrightarrow a\,R\,c\,R\,b$, pak podle věty 2 je $b\,R\,b$, což je spor. Budiž nyní $\mu(abc) \Leftrightarrow c\,R\,b\,R\,a$. Potom i předpoklad $\mu(bca) \Leftrightarrow b\,R\,c\,R\,a$ i předpoklad $\mu(bca) \Leftrightarrow a\,R\,c\,R\,b$ vede ke sporu. Ve všech případech dostáváme spor. Stejným způsobem se dokáže, že ze zmíněných tří případů nemůže současně nastat ani první s třetím, ani druhý s třetím.

Další vlastnosti relace μ uvedeme bez důkazu.

9. $\mu(abc), \mu(bcd) \Rightarrow \mu(abd)$.

10. $\mu(abc), \mu(abd), c \neq d \Rightarrow \mu(bcd)$ *nebo* $\mu(bdc)$.

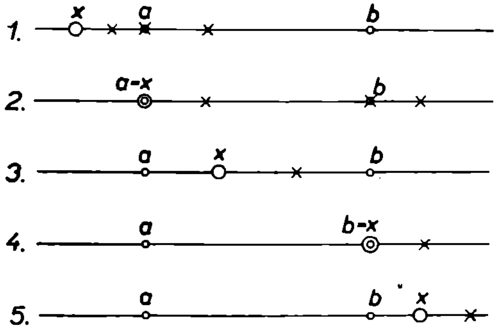
Tyto věty vyjadřují názorné vlastnosti vztahu „*mezi*“ pro skupinu čtyř bodů na přímce.

Nyní se dá dokázat toto: jestliže se relace μ položí jako *primitivní pojem* a jestliže se bude předpokládat, že vzhledem k množině $\mathbf{M}$ *splňuje tvrzení* 7, 8, 9 a 10 *vzatá za axiomy*, pak se dá pomocí μ definovat dvojčlenná relace R o níž se z vět 7, 8, 9 a 10 dokáže, že splňuje tvrzení 1 a 2. Definovat relaci R pomocí μ lze velmi názorně na příklad tímto způsobem:

10) Místo „$a\,R\,b$ *a současně* $b\,R\,c$“ píšeme zde krátce „$a\,R\,b\,R\,c$“.

V množině M zvolíme dva pevné prvky a, b a pro libovolné prvky $x, y \in M$ položíme $x R y$, jestliže (viz obr. 1)

1. *při* $\mu(xab)$ *bude* $\mu(xya)$ *nebo* $y = a$ *nebo* $\mu(xay)$
2. *při* $x = a$ *bude* $\mu(ayb)$ *nebo* $y = b$ *nebo* $\mu(aby)$
3. *při* $\mu(axb)$ *bude* $\mu(axy)$
4. *při* $x = b$ *bude* $\mu(aby)$
5. *při* $\mu(abx)$ *bude* $\mu(bxy)$.



Obr. 1.

Jiným způsobem, jak zavést pomocí relace μ relaci R pro uspořádání, se budeme zabývat v první kapitole našeho výkladu geometrie, kde většina **11**. odstavce bude v podstatě věnována zavedení pojmu uspořádání pomocí relace μ.

Ve zbývající části tohoto odstavce uvedeme ještě některé zvláštní vlastnosti uspořádané množiny, o nichž bude během našeho výkladu geometrie řeč. Jde zejména o pojem *spojitého uspořádání* (*spojitosti*), jehož význam pro geometrii bude blíže probrán v odstavci **13**. Zbytek tohoto odstavce stačí proto číst teprve současně s odstavcem **13**.

Všimneme-li si blíže uspořádané množiny racionálních nebo reálných čísel nebo bodů na přímce, pak snadno nahlédneme, že mají následující vlastnost:

11. *Ke každým dvěma prvkům* $a, b \in M$ *existuje vždy prvek* $c \in M$ *takový, že je* $\mu(acb)$ *čili že je buď* $a R c R b$ *nebo* $b R c R a$.

Uspořádaná množina, která vyhovuje tvrzení 11 se nazývá *hustě uspořádanou množinou*. Při tom tvrzení 11 je na axiomech 1, 2 (nebo 5, 3, 2 resp. 5, 4, 2, které jsou s 1, 2 ekvivalentní) nezávislé, t. j. nedá se z nich dokázat, jak ukazuje příklad množiny přirozených čísel s uspořádáním „větší — menší", které splňuje tvrzení 1, 2, nikoli však tvrzení 11. Toto tvrzení musí proto být pojímáno jako další axiom.

Z formulace tohoto axiomu je vidět, že každá hustě uspořádaná množina má nekonečně mnoho prvků.

Nyní přistoupíme k pojmu *spojitého uspořádání*. Za tím účelem zavedeme pojem *řezu* (kterému se často také říká *Dedekindův řez*):

Jestliže rozdělíme všechny prvky hustě uspořádané množiny $\boldsymbol{M}$ *do dvou neprázdných tříd, označených* $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$, *tak, že platí*

a) *třídy* $\boldsymbol{S}_1$ *a* $\boldsymbol{S}_2$ *jsou disjunktní*,

b) *každý prvek z* $\boldsymbol{M}$ *náleží alespoň do jedné z obou tříd*,

c) *jsou-li* a, b *libovolné dva prvky z* $\boldsymbol{M}$, *pro které je* $a \in \boldsymbol{S}_1$, $b \in \boldsymbol{S}_2$, *pak je vždy* $a \, R \, b$,

potom řezem množiny $\boldsymbol{M}$ *rozumíme dvojici obou tříd* $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$.

Dříve než osvětlíme pojem řezu na příkladě, uvedeme hned ještě následující definici:

Říkáme, že řez $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ *množiny* $\boldsymbol{M}$ *je vytvořen prvkem* $d \in \boldsymbol{M}$ *nebo že* d *je vytvořující prvek řezu, jestliže pro každé* $a \neq d$, $a \in \boldsymbol{S}_1$ *a pro každé* $b \neq d$, $b \in \boldsymbol{S}_2$ *platí* $\mu(adb)$ (obě nerovnosti $a \neq d$, $b \neq d$ píšeme proto, že se nestaráme o to, zda prvek d patří do $\boldsymbol{S}_1$ nebo $\boldsymbol{S}_2$, při čemž podle vlastnosti b), uvedené v definici řezu, jistě náleží jedné z obou tříd).

Jinými slovy bychom tedy mohli říci, že vytvořující prvek d řezu má tu vlastnost, že všechny prvky x téže třídy leží po téže jeho straně, t. j. pokud je $x \neq d$, platí stále $x \, R \, d$ nebo $d \, R \, x$, a to podle toho, je-li $x \in \boldsymbol{S}_1$ nebo $x \in \boldsymbol{S}_2$. Z vlastnosti c) uvedené v definici řezu plyne, že je-li a prvek třídy $\boldsymbol{S}_1$, pak každý prvek $x \in \boldsymbol{M}$, pro který je $x \, R \, a$, patří také do $\boldsymbol{S}_1$. Podobně to platí pro $\boldsymbol{S}_2$.

Z toho, co jsme dosud řekli, je vidět, že každý prvek m hustě uspořádané množiny $\boldsymbol{M}$ vytvořuje jistý řez. Ten lze na př. sestrojit tak, že do třídy $\boldsymbol{S}_1$ dáme všechny prvky x množiny $\boldsymbol{M}$, pro které je $x \, R \, m$, do $\boldsymbol{S}_2$ všechny prvky $y \in \boldsymbol{M}$, pro které je $m \, R \, y$, a prvek m sám dáme buď do $\boldsymbol{S}_1$ nebo $\boldsymbol{S}_2$. Na základě tohoto faktu bychom mohli nyní vymyslet libovolný počet příkladů množin s nějakým řezem.

Dá se snadno dokázat, že řez hustě uspořádané množiny je vytvořen *nejvýše jedním* prvkem. Z předpokladu, že by řez $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ množiny $\boldsymbol{M}$ měl dva vytvořující prvky $d_1 \neq d_2$ plyne totiž spor, jak hned dokážeme. Předpokládejme pro určitost, že je $d_1 \, R \, d_2$. Protože množina $\boldsymbol{M}$ je relací R hustě uspořádána, existuje prvek $m \in \boldsymbol{M}$ takový, že je $\mu(d_1 m d_2)$ čili že je $d_1 \, R \, m \, R \, d_2$. Prvek m nemůže tedy náležet ani do $\boldsymbol{S}_1$ ani do $\boldsymbol{S}_2$ (kdyby totiž náležel do $\boldsymbol{S}_1$, pak by bylo $m \, R \, d_1$, což by bylo ve sporu se vztahem $d_1 \ R \ m \ R \ d_2$, právě tak jako předpoklad, že m náleží do $\boldsymbol{S}_2$). To však není možné, protože $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ je řez a podle definice řezu musí každý prvek z množiny $\boldsymbol{M}$ náležet jedné z obou tříd $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$.

Vraťme se ještě k definici řezu! Jestliže bychom pro uspořádání množiny $\boldsymbol{M}$ měli místo relace R dánu relaci μ (jako tomu tak bude v našem výkladu geometrie), je vhodné podmínku c) v definici řezu nahradit touto s ní ekvivalentní podmínkou:

c′) *jsou-li a_1, b_1 libovolné dva prvky z $\boldsymbol{S}_1$, pak všechny prvky $x \in \boldsymbol{M}$, pro které je $\mu(a_1 x b_1)$, patří také do $\boldsymbol{S}_1$ a podobně je-li $a_2, b_2 \in \boldsymbol{S}_2$, pak pro všechna $x \in \boldsymbol{M}$, pro která je $\mu(a_2 x b_2)$, je také $x \in \boldsymbol{S}_2$.*

Důkaz ekvivalence podmínek c) a c′) není složitý a proto ho jen naznačíme. Že z c) plyne c′) se dokáže na základě transitivnosti relace pro uspořádání. K tomu, aby se z c′) odvodilo c) stačí dokázat, že když je $a_1, b_1 \in \boldsymbol{S}_1$ a $a_2, b_2 \in \boldsymbol{S}_2$ a při tom $a_1 \ R \ a_2$, pak je také $b_1 \ R \ b_2$. To se ale snadno dokáže sporem pomocí transitivnosti relace R.

Zatím co každý prvek množiny $\boldsymbol{M}$ je vytvořujícím prvkem jistého řezu, opak vždy neplatí: někdy hustě uspořádaná množina $\boldsymbol{M}$ připouští takový řez, že k němu žádný vytvořující prvek neexistuje.

Uvedeme příklad: vezmeme množinu všech racionálních čísel s obvyklým uspořádáním „větší — menší" (ta je jistě hustě uspořádána) a řez utvoříme takto: do třídy $\boldsymbol{S}_1$ dáme všechna čísla a, pro která je $a^2 < 2$, do třídy $\boldsymbol{S}_2$ všechna ostatní čísla, což tedy znamená, že to budou čísla b, pro něž je $b^2 > 2$ (racionální číslo, jehož druhá mocnina by bylo číslo 2, neexistuje). Tento řez *nemá* vytvořujícího prvku, neboť neexistuje racionální číslo d tak, že by pro všechna $x \in \boldsymbol{S}_1$ $(x^2 < 2)$ bylo $x \leqq d$ a současně pro všechna $y \in \boldsymbol{S}_2$ $(y^2 > 2)$ bylo $y \geqq d$.

Vidíme proto, že následující tvrzení, totiž

12. *Ke každému řezu hustě uspořádané množiny existuje v této množině vytvořující prvek*

neplyne z axiomů 1, 2, 11 a proto může být novým axiomem. Množina $\boldsymbol{M}$ se nazývá *spojitě uspořádaná*, jestliže její uspořádání vyhovuje axiomům 11 a 12.

Na závěr se ještě zmíníme o supremu a infimu množiny. Jestliže prvek $d \in \boldsymbol{M}$ je vytvořující prvek řezu $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ množiny $\boldsymbol{M}$, potom má vzhledem k množině S_1 (pro S_2 by to platilo analogicky) tyto vlastnosti:

a) *pro každý prvek* $x \in S_1$ *platí buď* $x R d$ *nebo* $x = d$,

b) *je-li* $d' \in M$, $d' R d$, *pak pro* $x \in S_1$ *není vždy splněno, že buď* $x R d'$ *nebo* $x = d'$, *to je, v* S_1 *existuje alespoň jeden prvek* x' *tak, že je* $d' R x'$.

Vezmeme-li nyní jakoukoli množinu $N \subset M$, k níž existuje prvek $d \in M$ s vlastnostmi a), b) právě uvedenými (kde místo S_1 by se psalo N), potom prvek d se nazývá *supremum množiny* N. Analogicky se definuje *infimum množiny* N. Supremum resp. infimum množiny je jakési zobecnění pojmu největšího resp. nejmenšího prvku. Největší prvek neboli *maximum* množiny N je totiž takový prvek $m \in N$, že pro všechny prvky $x \in N$, $x \neq m$ platí $x R m$. Obdobná bude definice nejmenšího prvku neboli *minima* množiny N. Zatím co u množin s konečným počtem prvků existuje vždy maximum a minimum, nemusí tomu tak být u množin s nekonečně mnoha prvky, i když jsou omezené (množina $N \subset M$ je *omezená*, jestliže existují prvky $k, l \in M$ tak, že pro všechny prvky $x \in N$ platí $k R x R l$), jak ukazuje příklad množiny A čísel $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, obecně $\frac{1}{n}$, která nemá minimum. Je-li však množina M, z níž N bylo vzato, spojitě uspořádaná a při tom množina $N \neq O$ je omezená, pak *vždy* existuje supremum a infimum množiny N. Důkaz tohoto tvrzení, kterého ostatně k našemu výkladu geometrie nepotřebujeme, je celkem snadný: na množině M utvoříme řez (Z_1, Z_2) tak, že do třídy Z_1 dáme každý prvek $x \in N$ spolu se všemi prvky $y \in M$, pro něž platí $y R x$, a do Z_2 dáme prvky zbývající. Bez obtíží si lze podle definice řezu ověřit, že (Z_1, Z_2) je opravdu řez množiny M, a proto podle axiomu 11 existuje vytvořující prvek tohoto řezu. Tento prvek je supremum množiny N, jak se můžeme snadno podle definice suprema přesvědčit. Analogicky probíhá důkaz pro infimum.

Jestliže množina N má maximum, pak zřejmě má také supremum, a to právě toto maximum. Podobně to platí pro infimum a minimum. Naše množina A má supremum 1, jež je současně maximem, naproti tomu nemá minimum. Má však infimum, a to číslo 0.

7. Geometrie a axiomatika. Na jiném místě jsme již připomněli, že Eukleides se první pokusil přesně logicky vyložit určité partie matematiky, mezi nimi také geometrii. Řekli jsme ovšem také, že jeho pokus není plně uspokojivý a ani nemohl být jinačí vzhledem ke stavu rozvoje řecké matematiky. Poznamenali jsme přitom, že důsledné zaxiomatisování geometrie je dílem teprve 19. a 20. století. V tomto paragrafu se pokusíme stručně shrnout charakteristiky jednotlivých axiomatických systémů, jež vznikly v poslední době.

Axiomatisace spočívá, jak jsme si již řekli, jednak ve stanovení některých pojmů jakožto pojmů primitivních, jednak ve výběru některých tvrzení za axiomy.

První novodobé pokusy o axiomatisaci geometrie braly za primitivní pojmy pojem *bodu* a pojem *vzdálenosti* či *shodnosti* (nebo také v odvozené formě pojem kružnice a koule). Tak na příklad o Leibnizovi je známo, že se touto cestou pokoušel (1679) definovat lineární geometrické útvary: rovinu jakožto množinu všech bodů (jako geometrické místo bodů), stejně vzdálených od dvou pevných bodů, a přímku jako průsečnici dvou rovin nebo také jako množinu všech bodů stejně vzdálených od tří bodů neležících v přímce. Podobným způsobem zaváděli rovinu a přímku F. Bolyai a Lobačevskij: rovinu jakožto množinu všech bodů společných vždy dvěma koulím téhož poloměru, opisovaných stále kolem týchž dvou středů, a přímku jakožto množinu všech bodů společných vždy dvěma kružnicím téhož poloměru, opisovaným v téže rovině stále kolem týchž dvou středů. Také Lobačevského současník, francouzský matematik A. Cauchy, se pokoušel na základě pojmu bodu a vzdálenosti definovat poněkud jiným způsobem přímku a rovinu. Přímku určenou body A, B definoval jako množinu všech bodů X takových, že neexistuje v prostoru jiný bod X' té vlastnosti, že by bylo současně $XA \equiv X'A$, $XB \equiv X'B$ (symbol $XA \equiv X'A$ zde znamená, že úsečka XA je shodná s úsečkou $X'A$ čili že body X a A mají touž vzdálenost jako body X' a A). Podle toho definoval analogicky rovinu ABC jako množinu bodů X takových, že v prostoru neexistuje jiný bod X', pro který by bylo $XA \equiv X'A$, $XB \equiv X'B$, $XC \equiv X'C$.

Vidíme tedy, že s různých stran, a to již dost brzy, byly činěny pokusy budovat geometrii na základě pojmu vzdálenosti, avšak důsledná axiomatika pomocí tohoto primitivního pojmu tehdy nebyla vybudována. K tomu bylo nutno provést nejdříve logický rozbor pojmu shodnosti i celé řady pojmů jiných, které se na shodnost převést nedají. Mezi takové patří na příklad pojmy týkající se *uspořádání* bodů na přímce a *rozmístění* bodů v rovině nebo v prostoru, totiž pojmy jako úsečka, polopřímka, polorovina, vztah „mezi", vnitřek trojúhelníka atd. Po prvé na ně upozornil M. Pasch a provedl jejich rozbor. On to také byl, který vlastně první podal důslednou axiomatisaci geometrie (1882). Za primitivní pojmy zvolil *bod, úsečku, omezenou část roviny* (Flächenstück) a *vztah shodnosti.* Italský matematik Peano později ukázal, že v Paschově systému lze vypustit primitivní pojem „omezená část roviny", protože ho lze definovat na základě pojmu úsečky. Ještě o něco později američtí matematikové Moore (1902) a Veblen (1904) nahradili pojem úsečky vztahem „mezi", tak jak jsme o něm mluvili v odstavci 6. Je zřejmé, že výrok „bod C leží na úsečce AB" je týž jako výrok „bod C leží mezi body A a B."

Samotným pojmem shodnosti (úseček a úhlů) se vedle zmíněného již Pasche zabývali také italští matematikové Veronese (1891) a Pieri (1899). Veronese ve své axiomatice bere za primitivní pojmy vedle *bodu, přímky* a *uspořádání* ještě *shodnost úseček.* Shodnost úhlů zavádí definitoricky na základě shodnosti úseček. Poněkud jiným způsobem postupuje Pieri. Za primitivní pojem klade místo pojmu shodnosti pojem *pohybu*: při tom se řekne, že útvar V lze pohybem převést v útvar W, jestliže lze mezi prvky útvaru V a útvaru W (t. j. na př. mezi body, z nichž se V resp. W skládá) určit jednoznačné přiřazení, které splňuje jisté axiomy. Shodnost se pak zavádí definitoricky tak, že dvě úsečky resp. dva úhly jsou shodné v tom a jen v tom případě, jestliže je lze v sebe převést pohybem. Z pojmu pohybu lze také odvodit na př. pojem přímky AB: je to množina všech bodů, které zůstávají nezměněny všemi pohyby, které nechávají nezměněný současně bod A i bod B.

Pomocí pojmů pohybu, bodu a vzdálenosti (jakožto reálného čísla přiřazeného dvojici bodů), vzatých za pojmy primitivní, odvodil celou geometrii ruský matematik V. F. Kagan (1902) a podobně Italové Peano (1902) a Levi (1904) a Angličan Coolidge (1909). Jestliže vzdálenost bodů M, N je označena symbolem $\varrho(MN)$, potom Coolidge definuje přímku určenou body A, B jako množinu, do níž patří všechny body X, pro něž je $\varrho(AB) = \varrho(AX) + \varrho(XB)$ (jež tvoří úsečku AB), dále všechny body X, pro něž je $\varrho(AX) = \varrho(AB) + \varrho(BX)$ (ty tvoří prodloužení úsečky AB za bod B), a konečně všechny body X, pro něž je $\varrho(XB) = \varrho(XA) + \varrho(AB)$ (jež tvoří opačné prodloužení úsečky AB).

Zatím co dosud uvedení matematikové definovali pomocí primitivních pojmů přímku a rovinu jakožto jisté množiny bodů, někteří matematikové položili *bod*, *přímku* a *rovinu* přímo jako pojmy primitivní. Učinil tak na příklad italský matematik F. Enriques (1898). Vedle pojmů bod, přímka, rovina je však nutno vzít ještě jako primitivní pojem vztah mezi těmito útvary, který je opisován různými slovy, jako na př. bod leží na přímce, přímka prochází bodem, přímka spojuje dva body, rovina proložená přímkou a bodem a pod. Zdálo by se, že zde jde o vztahy různé, ale ukázalo se, že je zbytečné je od sebe rozlišovat a že podstatě věci lépe odpovídá pojímat tyto vztahy jako vztah jediný. Nejčastěji se mu pak dává název *incidence*, takže se říká „přímka incidentní s bodem", „bod incidentní s přímkou" atd.

Důležitým příspěvkem pro axiomatisaci geometrie byl rozbor pojmu *spojitosti*, který hraje důležitou roli jak v geometrii, tak v matematické analyse (v infinitesimálním počtu). S pojmem spojitosti souvisí v geometrii představa souvislého oblouku čáry, který se rozpadne na dvě části vyjmutím jednoho bodu, nebo také představa patřící spíše do mechaniky, jako je plynulý pohyb bodu nebo plynulé otáčení. Převedením pojmu takovéto spojitosti na aritmetické pojmy (na pojem množiny a uspořádání, jak jsme o tom mluvili v odstavci **5** a **6**) se úspěšně zabývalo několik matematiků: K. Weierstrass, G. Cantor (1871), R. Dedekind (1872). (V odstavci **6** jsme se poněkud dotkli Dedekindova zavedení pojmu spojitosti.)

Z toho, co jsme dosud uvedli, je patrné, že různí matematikové se zaměřili vždy jen na určitý úsek geometrie, který se jim pak podařilo náležitě osvětlit a zaxiomatisovat. Takové podstatně různé úseky v axiomatisaci geometrie můžeme rozeznávat tři: první se týká incidence, druhý rozmístění (uspořádání), třetí shodnosti.

Podat axiomatiku celé geometrie znamená nyní vybrat náležitě axiomatiku každého z oněch tří úseků a vhodně tyto úseky skloubit v jeden celek. Při tom je mezi těmito třemi úseky taková souvislost, že rozmístění nelze studovat bez incidence a podobně shodnost bez rozmístění a incidence. Naproti tomu incidence může sama o sobě tvořit soběstačný celek, který se nemusí dovolávat jiných pojmů: obor incidence tvoří v geometrii jakousi kostru, axiomy jiných skupin ji vyplňují již jen dalšími vlastnostmi. Každá z geometrií jako je eukleidovská, hyperbolická, eliptická nebo sférická je dostatečně charakterisována již vlastnostmi její incidence. Vždyť i sám axiom o rovnoběžkách patří mezi axiomy incidence.

Spojení zmíněných tří úseků v jedinou axiomatiku geometrie bylo předmětem úvah různých matematiků. Velmi úspěšně se tohoto úkolu zhostil D. Hilbert, který ve spise *Grundlagen der Geometrie* z r. 1899 podal axiomatiku geometrie, která se později stala klasickou. Jeho spis vyšel postupně v několika vydáních, v nichž byla původní axiomatika ještě o něco zjednodušena, takže dnes se Hilbertovy axiomatiky geometrie velmi hojně užívá. Také výklad geometrie v naší knížce je založen v podstatě na Hilbertových axiomech.

8. Poznámka k dalšímu výkladu. Forma, kterou se zapíše matematický výklad, může být velmi rozmanitá a je do určité míry věcí módy. Jiný styl byl vžitý v 19. století, jiný styl převládá dnes. Všeobecně vzato jsou možny dva extrémy. První záleží v tom, že se výklad i se všemi názornými a heuristickými poznámkami podává v souvislém celku a jen občas jsou důležitá fakta shrnuta do vět. Druhý extrém by se mohl nejlépe charakterisovat slovy „definice, věta, důkaz". Místo plynulého ničím nepřerušovaného výkladu se zde objevuje výklad roztrhaný na drobné celky: z počátku jsou to příslušné definice a axiomy a pak střídavě znění vět a jejich důkazy, případně další definice, vše to bez zbytečných slov a v pokud možno nejpřesnější formulaci.

V současné době je patrna tendence k extrému druhému. Tato forma má před první tu nesmírnou výhodu, že je přehledná, že všechny předpoklady jednotlivých úsudků jsou vždy přesně uvedeny, což při způsobu prvním je nutno mnohdy zpátky hledat v textu; další její výhodou je stručnost. Její nevýhodou je, že studium takto podaného výkladu je trochu obtížnější, protože vyžaduje u čtenáře větší samostatnost. Správný výklad má být totiž takový, aby čtenář nebo posluchač v každém okamžiku věděl, co se vlastně dělá a za jakým cílem. Extrémní výklad formou „věta — důkaz" má právě tu potíž, že čtenáři není jen tak beze všeho patrno, proč věty za sebou následují právě v uvedeném pořadí. Vidí sice, že věty za sebou následují tak, že důkaz žádné z nich se nedovolává vět uvedených až po ní, přitom mu ale pořadí připadá dost umělé. Ve skutečnosti je to tak, že ten, kdo takový výklad psal, nevypisoval hned věty za sebou v pořadí, jak jsou nakonec sepsány, nýbrž jejich výčet postupně doplňoval. Na příklad v určitém paragrafu bylo nutno dokázat dvě věty fundamentální důležitosti. Při promýšlení jejich důkazu se ukázalo, že by důkaz byl snadný, kdyby se nejdříve dokázala věta pomocného charakteru. K důkazu této pomocné věty se třeba opět ukázalo vhodné odvodit ještě několik pomocných vět. A tak se takovýmto způsobem pozpátku tvořil sled vět, které pak na sebe krásně navazují. Bylo by ovšem možné místo důkazu hlavní věty, rozkouskovaného na pomocné věty, uvést tento důkaz v celku, i když by zabral několik stránek. Je však lépe každý krok isolovat jako pomocnou větu, a to jednak kvůli přehlednosti, jednak kvůli ekonomičnosti, protože mnohý krok se v důkazech vět vyskytuje vícekrát, takže později nemusí být už opakován, ale lze říci prostě „podle VĚTY 11,19 víme že..." a pod.

Je tedy nutno, aby čtenář při studiu výkladu formou *věta — důkaz* znal předem cestu, proč se od jedné věty přechází k druhé právě v uvedeném pořadí. To může poznat na příklad tak, že projde nejprve znění vět jak za sebou sledují, zatím bez čtení důkazů. Autoři často pomáhají čtenáři naznačit a zdůvodnit směr další cesty různými způsoby: buď poznámkami, uvedenými mezi jednotlivými větami, buď tím, že se odliší věty hlavní od pomocných (na př. tak, že se tyto označí přímo slovy „*pomocná věta*" nebo někdy řeckým slovem „*lemma*") a že se bezprostřední důsledky hlavních vět označují slovem „*korolár*". Nakonec je nutno poznamenat, že žádný z obou zmíněných extrémů se nikdy neobjevuje v ryzím tvaru, nýbrž v různých vzájemných kombinacích.

Výklad geometrie v této knížce je podán formou *věta — důkaz*. Pro větší srozumitelnost je na začátku každého odstavce petitem naznačen jeho program i s upozorněním na hlavní věty, jimž ostatní slouží jako věty rázu spíše pomocného.

KAPITOLA I

ABSOLUTNÍ GEOMETRIE

9. Primitivní pojmy. V následujícím výkladu geometrie jsme zvolili jako primitivní pojmy *bod*, *přímku*, *rovinu*, *incidenci*, *rozmístění* a *shodnost*. Předpokládáme, že máme dánu *množinu*, jejíž prvky se dělí do *tří skupin*. Prvky jedné se nazývají *body*, prvky druhé *přímky* a prvky třetí *roviny*. Předpokládáme dále, že prvky celé množiny jsou v určitých vzájemných *vztazích*. Tyto vztahy jsou tři, a vyjadřujeme je slovy *incidentní*, *mezi* a *shodný*.

Slova bod, přímka, rovina, incidentní, mezi a shodný jsou pro nás dosud spíše symboly, jež samy o sobě nic neznamenají. Smysl jim dají teprve axiomy, které postupně uvedeme. To tedy znamená, že nesmíme s těmito slovy spojovat všechny běžné vlastnosti, jak jsme na to zvyklí. Naproti tomu si můžeme pod primitivními pojmy představovat jakékoli věci, jestliže naše axiomy budou správné výroky o těchto věcech.

Axiomy rozdělíme do tří skupin podle toho, kterého ze tří primitivních vztahů si hlavně všímají. Skupiny budeme nazývat takto:

axiomy incidence (symbolicky $\mathfrak{J}$),
axiomy rozmístění (symbolicky $\mathfrak{R}$),
axiomy shodnosti (symbolicky $\mathfrak{S}$).[11])

Primitivní pojmy budeme označovat symboly, které utvoříme během výkladu.

10. Axiomy incidence a jejich důsledky. Body budeme označovat velkými latinskými písmeny $A, B, C, \ldots$, přímky malými latinskými písmeny $a, b, c, \ldots$, roviny malými řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ a vztah

[11]) Náš axiomatický systém je v podstatě systém Hilbertův. Axiomy incidence jsme zde upravili podle Glagoleva (N. A. Glagoleff: *Sur les axiomes d'appartenance de la géométrie euclidienne*, Mat. Sbornik **6 (48)**, 1939). Axiomům *rozmístění* se častěji říká axiomy uspořádání; tohoto názvu se však v této knize užívá již v jiném, byť velmi příbuzném smyslu (viz odstavec **6**). Axiomy odpovídající Hilbertovým axiomům *spojitosti* jsme zařadili tak, že Cantorův axiom (jenž je ekvivalentní s Hilbertovým axiomem úplnosti) je mezi axiomy *rozmístění*, axiom Archimedův mezi axiomy *shodnosti*.

incidence symbolem ∇. Výrok „*přímka a je incidentní s bodem A*“[12]) zapisujeme symbolicky „$a \nabla A$“. Místo „$A \nabla a$ *a současně* $B \nabla a$“ píšeme stručně „$A, B \nabla a$“. Analogický význam má „$A \nabla a, b$“. Výraz „$A, B \nabla a, b$“ tedy znamená: „*platí současně* $A \nabla a$, $A \nabla b$, $B \nabla a$, $B \nabla b$“. Místo „non($A \nabla a$)“[12a]) píšeme „$A \overline{\nabla} a$“. Jestliže A a B označují týž bod, pak píšeme $A = B$, označují-li různé body, potom $A \neq B$. Podobně pro přímky a roviny.

Axiomy incidence, $\mathfrak{J}$.

$\mathfrak{J}$, 1. *Vztah incidence je reflexivní a symetrický.*

$\mathfrak{J}$, 2. *Vztah incidence není obecně transitivní; je-li však* $A \nabla a$ *a* $a \nabla \alpha$, *pak je také* $A \nabla \alpha$.

$\mathfrak{J}$, 3. *Je-li* $a \nabla A, B$ *a* $A, B \nabla \alpha$, *pak je také* $a \nabla \alpha$.

$\mathfrak{J}$, 4. *Jsou-li* A, B *dva různé body, pak existuje právě jedna taková přímka* a, *že* $A, B \nabla a$.

Definice. Tři různé body A, B, C jsou *kolineární*, jestliže existuje taková přímka a, že je $A, B, C \nabla a$. V opačném případě říkáme, že jsou *nekolineární.*

$\mathfrak{J}$, 5. *Jsou-li* A, B, C *tři nekolineární body, pak existuje právě jedna taková rovina* α, *že je* $A, B, C \nabla \alpha$.

$\mathfrak{J}$, 6. *Jsou-li roviny* α, β *takové, že existuje bod* A, *pro který je* $A \nabla \alpha, \beta$, *pak existuje ještě alespoň jeden bod* $B \neq A$, *pro který je také* $B \nabla \alpha, \beta$.

$\mathfrak{J}$, 7. *Každá přímka je incidentní alespoň se dvěma různými body.*

$\mathfrak{J}$, 8. *Každá rovina je incidentní alespoň se třemi nekolineárními body.*

Definice. Čtyři různé body A, B, C, D jsou *komplanární*, jestliže existuje taková rovina α, že je $A, B, C, D \nabla \alpha$. V opačném případě říkáme, že jsou *nekomplanární.*

$\mathfrak{J}$, 9. *Existují alespoň čtyři nekomplanární body.*

Uvedeme nyní několik modelů axiomatického systému incidence.

Model 1. Pojmy *bod, přímka, rovina* a *incidentní* můžeme chápat v obvyklém smyslu názorné geometrie. Pak jsou zřejmě axiomy $\mathfrak{J}$ splněny.

---

[12]) Výrok „*Přímka a je incidentní s bodem A*“ znamená totéž, jak jsme již dříve uvedli, jako rčení „*přímka a prochází bodem A*“ nebo „*přímka obsahuje bod A*“ nebo „*bod A leží na přímce a*“, „*A je bod přímky a*“ a pod.

[12a]) Je-li p nějaký výrok, pak „non p“ znamená negaci tohoto výroku, tedy výrok „*není pravda, že platí p*“.

Model 2. *Bodem* budeme rozumět jakoukoli skupinu tří reálných čísel

$$(a_1, a_2, a_3), \tag{1}$$

přímkou jakoukoli skupinu osmi reálných čísel, psaných ve dvou řádcích (ve tvaru t. zv. matice)

$$\begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3, p_4 \\ q_1, q_2, q_3, q_4 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

při čemž vyloučíme ty matice, pro které je $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}$ nebo $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ nebo $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, a při čemž budeme předpokládat, že matice (2) a matice

$$\begin{pmatrix} r_1, r_2, r_3, r_4 \\ s_1, s_2, s_3, s_4 \end{pmatrix}$$

představují tutéž přímku, jestliže platí $r_i = kp_i + lq_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ a $s_i = k'p_i + l'q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, kde k, l resp. k', l' jsou dvě libovolná čísla nikoli současně rovna nule. Rovinou budeme rozumět jakoukoli skupinu čtyř reálných čísel

$$(t_1, t_2, t_3, t_4), \tag{3}$$

pro kterou nikdy není $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, při čemž budeme předpokládat, že čtveřice (3) a čtveřice (kt_1, kt_2, kt_3, kt_4) představují tutéž rovinu, jestliže k je libovolné číslo různé od nuly. *Incidence* konečně budiž dána takto: bod (1) je incidentní s přímkou (2), jestliže platí

$$\begin{aligned} p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 + p_4 &= 0, \\ q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3 + q_4 &= 0, \end{aligned}$$

bod (1) je incidentní s rovinou (3), jestliže platí

$$t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 + t_4 = 0,$$

přímka (2) je incidentní s rovinou (3), jestliže existují čísla g, h tak, že je

$$gp_i + hq_i = t_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Pojímáme-li takto zavedenou incidenci ještě také jako vztah reflexivní a symetrický, pak jsou splněny axiomy $\mathfrak{J}$. Důkaz je záležitostí algebraickou a je předmětem každé učebnice prostorové analytické geometrie.

Model 3. *Bodem* budeme rozumět jakoukoli skupinu čtyř reálných čísel

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), \tag{1}$$

z nichž alespoň jedno je různé od nuly, a při tom budeme předpokládat, že tato skupina a skupina (ka_1, ka_2, ka_3, ka_4), kde $k \neq 0$, představují týž bod. *Přímkou* budeme rozumět jakoukoli matici

$$\begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3, p_4 \\ q_1, q_2, q_3, q_4 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ve které v každém řádku je alespoň jedno číslo různé od nuly a nikdy není $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_4}{q_4}$, při čemž budeme předpokládat, že matice (2) a matice

$$\begin{pmatrix} r_1, r_2, r_3, r_4 \\ s_1, s_2, s_3, s_4 \end{pmatrix}$$

představují tutéž přímku, jestliže platí $r_i = kp_i + lq_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ a $s_i = k'p_i + l'q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, kde k, l resp. k', l' jsou dvě libovolná čísla, nikoli současně rovna nule. *Rovinou* budeme rozumět jakoukoli skupinu čtyř reálných čísel

$$(t_1, t_2, t_3, t_4), \tag{3}$$

z nichž alespoň jedno je různé od nuly, při čemž budeme předpokládat, že tato skupina a skupina (kt_1, kt_2, kt_3, kt_4), kde $k \neq 0$, představují tutéž rovinu. *Incidenci* zavedeme takto: bod (1) je incidentní s přímkou (2), jestliže platí

$$p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 + p_4a_4 = 0,$$
$$q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3 + q_4a_4 = 0,$$

bod (1) je incidentní s rovinou (3), jestliže platí

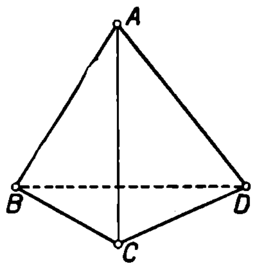
$$t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 + t_4a_4 = 0,$$

přímka (2) je incidentní s rovinou (3), jestliže existují čísla g, h tak, že je

$$gp_i + hq_i = t_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Zde opět bereme incidenci jako vztah reflexivní a symetrický a opět se dá pomocí algebry dokázat, že jsou splněny axiomy $\mathfrak{J}$. Tohoto vyjádření se také užívá v analytické geometrii, při čemž čísla (1) jsou t. zv. homogenní souřadnice bodu.

MODEL 4. Vezměme množinu čtyř prvků $\{A, B, C, D\}$ a uvažujme její podmnožiny; podmnožiny o jednom prvku pojímejme jako *body*, podmnožiny o dvou prvcích jako *přímky* a podmnožiny o třech prvcích jako *roviny*. *Incidenci* pojímejme jako množinovou inklusi; na př. bod $\{A\}$ je incidentní s přímkami $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$ a s rovinami $\{A, B, C\}$, $\{A, C, D\}$, $\{A, B, D\}$; přímka $\{A, B\}$ je incidentní s rovinami $\{A, B, C\}$ a $\{A, B, D\}$. Snadno se přesvědčíme, že pak jsou axiomy $\mathfrak{J}$ splněny (názorně si tento model můžeme představit jako čtyrstěn, viz obr. 2). Tento model ukazuje, že z axiomů $\mathfrak{J}$ neplyne, že by přímka musela obsahovat nekonečně mnoho bodů, a je současně jedním z nejjednodušších příkladů t. zv. konečných geometrií, kterými se podrobně zabývá studium základů geometrie.



Obr. 2.

Ve zbývající části tohoto paragrafu odvodíme nejdůležitější důsledky axiomů $\mathfrak{J}$.

OZNAČENÍ. Místo „*přímka incidentní s body A a B*“ budeme psát krátce „*přímka* $\overline{AB}$“. Je-li to přímka a, budeme psát „$\overline{AB} = a$“.

VĚTA 10,1. *Jsou-li body A, B, C různé a takové, že C není incidentní s přímkou $\overline{AB}$, pak body A, B, C jsou nekolineární.*

VĚTA 10,2. *Dvě různé přímky jsou incidentní nejvýše s jedním bodem.*

DŮKAZ obou vět plyne bezprostředně z axiomu $\mathfrak{I}$, 4.

OZNAČENÍ. Místo „*rovina incidentní s body A, B, C*“ budeme psát krátce „*rovina* $\overline{ABC}$“. Je-li to rovina α, budeme psát „$\alpha = \overline{ABC}$“.

VĚTA 10,3. *Je-li dána přímka a a bod A, při čemž $a \overline{\bigtriangledown} A$, pak existuje právě jedna rovina α tak, že $a, A \bigtriangledown \alpha$.*

DŮKAZ. Podle $\mathfrak{I}$, 7. existují body B, C tak, že $a \bigtriangledown B, C$. Podle VĚTY 10,1 jsou body A, B, C nekolineární, podle $\mathfrak{I}$, 5 existuje právě jedna rovina $\alpha \bigtriangledown A, B, C$, podle $\mathfrak{I}$, 3 z $a \bigtriangledown B, C$ plyne $a \bigtriangledown \alpha$.

VĚTA 10,4. *Existují alespoň tři nekolineární body.*

DŮKAZ. Kdyby všechny trojice bodů byly kolineární, pak by v každé čtveřici bodů byly každé tři body kolineární, tedy by podle $\mathfrak{I}$, 5 každé čtyři body byly incidentní s rovinou, což by bylo ve sporu s $\mathfrak{I}$, 9.

VĚTA 10,5. *Je-li dána přímka, pak existuje vždy bod, jenž s ní není incidentní.*

DŮKAZ. Podle $\mathfrak{I}$, 7 existují alespoň dva body A, B incidentní s danou přímkou. Kdyby pro každý bod C byly body A, B, C kolineární, bylo by to ve sporu s VĚTOU 10,4.

VĚTA 10,6. *Je-li $A, B \bigtriangledown \alpha$, pak pro každý bod $C \bigtriangledown \overline{AB}$ platí $C \bigtriangledown \alpha$.*

DŮKAZ plyne bezprostředně z axiomů $\mathfrak{I}$, 2—3.

VĚTA 10,7. *Jsou-li A, B dva různé body a α, β dvě různé roviny, při čemž $A, B \bigtriangledown \alpha, \beta$, pak $C \bigtriangledown \overline{AB}$ nastává tehdy a jen tehdy, když $C \bigtriangledown \alpha, \beta$.*

DŮKAZ. Budiž $A, B, C \bigtriangledown \alpha, \beta$. Kdyby nebylo $C \bigtriangledown \overline{AB}$, pak by podle VĚTY 10,1 body A, B, C byly nekolineární a tedy podle $\mathfrak{I}$, 5 by existovala právě jedna rovina $\gamma \bigtriangledown A, B, C$. Protože $\alpha, \beta \bigtriangledown A, B, C$, znamenalo by to, že platí $\alpha = \gamma$ a $\beta = \gamma$, tedy také $\alpha = \beta$, což by byl spor. Obrácená implikace je důsledkem VĚTY 10,6.

VĚTA 10,8. *Dvě různé roviny buď nejsou incidentní s žádným společným bodem nebo jsou incidentní se všemi body nějaké přímky.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 10,7.

VĚTA 10,9. *Jestliže rovina a přímka nejsou incidentní, pak jsou incidentní nejvýše s jedním společným bodem.*

DŮKAZ. Kdyby byly incidentní se dvěma různými společnými body, byly by podle $\mathfrak{I}$, 3 incidentní.

VĚTA 10,10. *Jestliže dvě různé přímky jsou incidentní s týmž společným bodem, pak existuje právě jedna rovina incidentní s oběma přímkami.*

DŮKAZ. *Alespoň jedna*: Nechť $a \neq b$; $a, b \nabla M$. Podle $\mathfrak{I}$, 7 existují body $A \neq M \neq B$, $A \nabla a$, $B \nabla b$. Podle VĚTY 10,2 je $A \neq B$ a A, B, M jsou nekolineární. Podle $\mathfrak{I}$, 5 existuje rovina $\overline{ABM}$, při čemž $a, b \nabla \overline{ABM}$. *Nejvýše jedna*: Kdyby pro roviny $\alpha \neq \beta$ platilo $\alpha, \beta \nabla a, b$, pak by body A, B, M byly incidentní se dvěma různými rovinami, což by vzhledem k $\mathfrak{I}$, 5 byl spor.

OZNAČENÍ. Podle VĚTY 10,3 resp. 10,10 rovina incidentní s přímkou a a bodem A mimo ni resp. s dvěma přímkami a, b, které mají společný bod, je jediná, a proto budeme říkat, že je příslušnými prvky *jednoznačně určena* nebo prostě *určena*. Je-li to rovina α, budeme psát symbolicky $\alpha = \overline{aA} = \overline{Aa}$ resp. $\alpha = \overline{ab}$.[13])

VĚTA 10,11. *Ze čtyř nekomplanárních bodů jsou každé tři nekolineární.*

DŮKAZ. Kdyby mezi nimi byly některé tři body kolineární, pak by existovala rovina incidentní s jejich přímkou a zbývajícím čtvrtým bodem, takže by všechny čtyři body byly komplanární.

V tomto paragrafu jsme se při vyjadřování důsledně drželi pojmu incidence, aby vynikla jeho role jakožto pojmu primitivního v naší axiomatice. V dalším se však takovéto formulace nebudeme přísně držet, protože by to vedlo leckdy k těžkopádnostem, a budeme užívat také takových rčení, jako bod leží na přímce, přímka prochází bodem, přímka leží v rovině, přímka protíná přímku, průsečík dvou přímek atd.

---

[13]) V naší knížce bude *pruh* v symbolech mít zpravidla význam t. zv. *lineárního obalu*: je-li M množina nějakých elementů, t. j. bodů, přímek a rovin, pak lineární obal množiny M, symbolicky $\overline{M}$, bude *lineární prostor nejmenší dimense, který je incidentní se všemi elementy z* M. Při tom lineárním prostorem dimense 0, resp. 1, resp. 2, resp. 3 budeme rozumět bod resp. přímku, resp. rovinu, resp. obyčejný prostor. Je-li tedy na př. $a \nabla A$, pak $\overline{aA} = a$. Jsou-li A, B, C, D čtyři různé body, pak $\overline{ABCD}$ je buď přímka, rovina nebo obyčejný prostor, podle toho, leží-li tyto body v přímce nebo v rovině (a při tom ne v jedné přímce) nebo v prostoru (a při tom ne v jedné rovině).

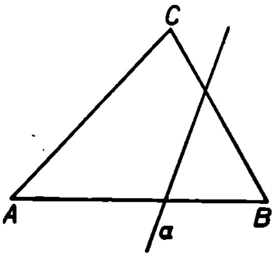
11. Axiomy rozmístění a jejich důsledky. Vztah „*bod B leží mezi body A a C*" budeme symbolicky psát $\mu(ABC)$.[13a]) Místo „non $\mu(ABC)$" budeme psát „$\bar{\mu}(ABC)$".

AXIOMY ROZMÍSTĚNÍ, $\mathfrak{R}$.

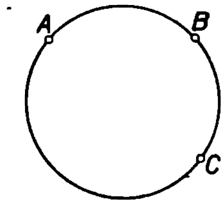
$\mathfrak{R}$, 1. *Jsou-li A, B, C tři různé kolineární body, pro které je $\mu(ABC)$, pak je také $\mu(CBA)$.*

$\mathfrak{R}$, 2. *Jsou-li A, B dva různé body, pak existuje alespoň jeden bod C tak, že $C \nabla \overline{AB}$ a $\mu(ABC)$.*

$\mathfrak{R}$, 3. *Ze tří kolineárních bodů nejvýše jeden leží mezi ostatními dvěma.*



Obr. 3.



Obr. 4.

DEFINICE. Skupina dvou různých bodů A, B se nazývá *úsečka*; symbolicky ji budeme značit AB. Body M, pro něž je $\mu(AMB)$ se nazývají *vnitřní body* úsečky nebo prostě body úsečky, body A, B jsou *koncové body* úsečky. Ostatní body přímky $\overline{AB}$ jsou *vnější body* vzhledem k úsečce AB.

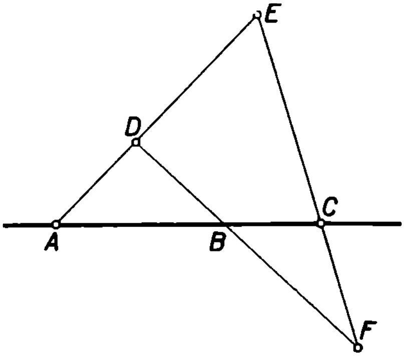
DEFINICE. Skupina tří nekolineárních bodů A, B, C se nazývá *trojúhelník*, symbolicky $\triangle ABC$. Úsečky AB, BC, AC jsou jeho *strany* a body A, B, C jeho *vrcholy*.

$\mathfrak{R}$, 4. *Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$ a nechť přímka a je incidentní s rovinou $\overline{ABC}$, při čemž a není incidentní s žádným z vrcholů trojúhelníka $\triangle ABC$ (viz obr. 3). Je-li a incidentní s bodem úsečky AB, pak je incidentní ještě buď s bodem úsečky BC nebo AC.*

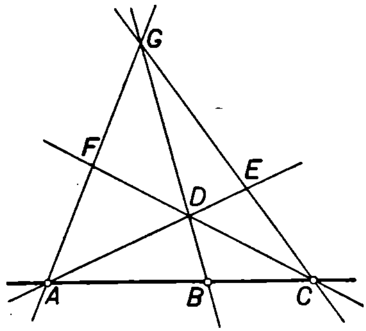
Pojem „*mezi*" s vlastnostmi uvedenými v axiomech $\mathfrak{R}$ lze zavést na některých modelech minulého paragrafu. Na MODELU 1 má obvyklý názorný význam.

[13a]) Symbol $\mu(ABC)$ jsem převzal z rukopisu práce E. Čecha *Základy geometrie*.

U MODELU 2 lze pojem „*mezi*“ zavést takto: bod (b_1, b_2, b_3) je *mezi* body (a_1, a_2, a_3) a (c_1, c_2, c_3), jestliže všechny tři body leží na přímce a jestliže platí $a_i \leqq b_i \leqq c_i$ resp. $a_i \geqq b_i \geqq c_i$ $(i = 1, 2, 3)$, při čemž alespoň pro jedno i platí ostrá nerovnost. U MODELU 3 nelze pojem „*mezi*“ zavést tak, aby byly splněny axiomy $\mathfrak{R}$, neboť přímky tohoto modelu se chovají jako uzavřené čáry (protože zde každé dvě přímky v rovině mají společný bod, takže lze každému bodu přímky přiřadit



Obr. 5.



Obr. 6.

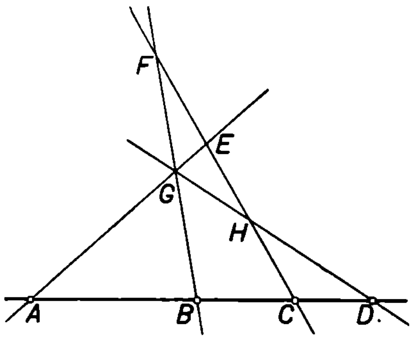
jednojednoznačně přímku svazku, jehož střed leží mimo uvažovanou přímku; pohybu bodu po přímce v jednom z obou smyslů odpovídá otáčení přímky ve svazku) a na uzavřené čáře neplatí VĚTA 11,2, neboť kterýkoli bod můžeme považovat za ležící mezi ostatními dvěma (viz obr. 4). Důsledkem axiomů $\mathfrak{J}$ a $\mathfrak{R}$ je m. j. věta, podle které přímka obsahuje nekonečně mnoho bodů (viz VĚTA 11,7), takže ani na MODELU 4 nelze zavést pojem „*mezi*“ tak, aby byly splněny axiomy $\mathfrak{R}$.

Postup při odvozování vět v tomto paragrafu je následující: nejdříve jsou odvozeny základní vlastnosti vztahu „*mezi*“. První důležitý výsledek je věta (11,8), podle které každý bod rozděluje přímku na dvě různé části, které pak definujeme jako *polopřímky*. Pomocí vlastností polopřímek (věty 11,9 až 11,14) zavádíme potom *uspořádání* (ve smyslu odstavce 6) bodů na přímce a pojem *orientace* přímky. Nato obracíme svoji pozornost na rozmístění bodů v rovině a dokazujeme větu (11,18), podle které každá přímka roviny rozděluje rovinu na dvě různé části. Tato věta slouží jako podklad k definici *poloroviny*. Zbytek paragrafu je pak věnován zavedení pojmu *úhlu*.

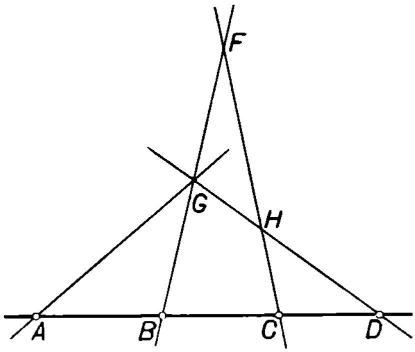
DEFINICE. Budeme říkat, že *přímka protíná úsečku*, jestliže přímka je incidentní s některým *vnitřním* bodem této úsečky.

VĚTA 11,1. *Jsou-li A a C dva různé body, pak existuje vždy na přímce $\overline{AC}$ bod B tak, že je $\mu(ABC)$.*

Důkaz. Podle Věty 10,5 existuje bod D, který neleží na přímce $\overline{AC}$ (viz obr. 5), podle $\mathfrak{R}$, 2 existuje bod $E \nabla \overline{AD}$ takový, že $\mu(ADE)$, podle Věty 10,6 je $E \nabla \overline{ACD}$, podle $\mathfrak{R}$, 2 existuje bod $F \nabla \overline{EC}$ takový, že $\mu(ECF)$, a podle Věty 10,6 je $F \nabla \overline{ACD}$. Body A, E, C jsou nekolineární a přímka $\overline{DF}$ protíná úsečku AE, takže podle $\mathfrak{R}$, 4 protíná $\overline{DF}$ buď



Obr. 7.



Obr. 8.

úsečku AC nebo EC. Úsečku EC však protnout nemůže, protože pak by měla $\overline{FD}$ s $\overline{EC}$ dva průsečíky. Tedy $\overline{DF}$ protíná úsečku AC, čímž je dokázána existence bodu mezi A a C.

Věta 11,2. *Ze tří kolineárních bodů právě jeden je mezi ostatními dvěma.*

Důkaz. Protože podle $\mathfrak{R}$, 3 *nejvýše jeden* z kolineárních bodů A, B, C leží mezi ostatními dvěma, zbývá dokázat, že *alespoň jeden* leží mezi ostatními dvěma. Předpokládejme, že ani A ani C neleží mezi ostatními dvěma a zkoumejme, co potom platí o bodu B.

Zvolme bod D (viz obr. 6) tak, že $D \nabla \overline{AC}$ (to lze podle Věty 10,4). Podle $\mathfrak{R}$, 2 existuje bod G tak, že $G \nabla \overline{BD}$, $\mu(BDG)$. Body B, G, C jsou nekolineární, podle $\mathfrak{R}$, 4 přímka $\overline{AD}$ protíná úsečku CG v průsečíku, který označme E, takže je $\mu(CEG)$. Body B, A, G jsou nekolineární, podle $\mathfrak{R}$, 4 přímka $\overline{CD}$ protíná úsečku AG, průsečík označme F, takže je $\mu(AFG)$. Body A, E, G jsou nekolineární, přímka $\overline{FC}$ neprotíná úsečku GE, takže podle $\mathfrak{R}$, 4 je $\mu(ADE)$. Body A, C, E jsou nekolineární, podle $\mathfrak{R}$, 4 přímka $\overline{DG}$ protíná úsečku AC. Průsečíkem je ale bod B, takže je $\mu(ABC)$. ∎

Věta 11,3. *Je-li* $\mu(ABC)$ *a* $\mu(BCD)$, *pak je také* $\mu(ACD)$ *a* $\mu(ABD)$.

Důkaz. Zvolme E (viz obr. 7) tak, že $E \mathrel{\overline{\nabla}} \overline{AB}$ (to lze podle Věty 10,4), a zvolme $F \mathrel{\nabla} \overline{EC}$ tak, že $\mu(CEF)$ (to lze podle $\mathfrak{R}$, 2). Podle $\mathfrak{R}$, 3 a $\mathfrak{R}$, 4 existuje bod G tak, že $G \mathrel{\nabla} \overline{AE}, \overline{BF}$, $\mu(AGE)$, $\mu(BGF)$, a existuje bod H tak, že $H \mathrel{\nabla} \overline{CE}, \overline{GD}$, $\mu(GHD)$. Podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na trojúhelník $\triangle\, ADG$ a přímku $\overline{EH}$ platí pro bod C vztah $\mu(ACD)$, což jsme měli dokázat.

Nyní můžeme předpoklad psát $\mu(DCB)$ a $\mu(CBA)$ a podle právě dokázaného je $\mu(DBA)$ čili $\mu(DBA)$.

Věta 11,4. *Je-li* $\mu(ABC)$ a $\mu(ACD)$, *pak je také* $\mu(BCD)$ a $\mu(ABD)$.

Důkaz. Zvolme bod G tak, že $G \mathrel{\overline{\nabla}} AB$ (viz obr. 8), a bod F tak, že $F \mathrel{\overline{\nabla}} \overline{BG}$, $\mu(BGF)$. Přímka $\overline{CF}$ neprotíná ani úsečku AB, ani úsečku GB (podle $\mathfrak{R}$, 3 a $\mathfrak{I}$, 4), tedy podle $\mathfrak{R}$, 4 neprotíná ani úsečku GA. Podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na trojúhelník $\triangle\, AGD$ protíná přímka $\overline{CF}$ úsečku GD v průsečíku, který označme H. Je tedy $H \mathrel{\nabla} \overline{GD}, \overline{CF}$ a $\mu(GHD)$. Vzhledem k trojúhelníku $\triangle\, BDG$ a přímce $\overline{FH}$ platí podle $\mathfrak{R}$, 4 $\mu(BCD)$. Protože je $\mu(ABC)$, $\mu(BCD)$, pak podle Věty 11,2 je $\mu(ABD)$.

Věta 11,5. *Je-li* $\mu(ABC)$ *a* $\mu(ABD)$ *a* $C \neq D$, *pak platí právě jedna z možností* $\mu(BCD)$, $\mu(BDC)$ *čili platí* $\overline{\mu}(CBD)$.

Důkaz. Body B, D, C mohou splňovat pouze jeden ze tří vztahů: $\mu(BDC)$, $\mu(BCD)$, $\mu(CBD)$. Třetí však splňovat nemohou, neboť tvrzení, že by mohlo být současně $\mu(ABC)$, $\mu(ABD)$, $\mu(CBD)$, vede ke sporu. Podle Věty 11,4 platí totiž současně $\mu(ABC)$, $\mu(ACD)$, $\mu(BCD)$, $\mu(ABD)$, takže podle Věty 11,2 nemůže už být $\mu(CBD)$, vedle $\mu(BCD)$.

Snadno lze nyní verifikovat, že první dvě možnosti ke sporu nevedou, neboť platí:

$$\begin{aligned}
&\mu(ABC),\ \mu(BDC) \Rightarrow \mu(DBA),\ \mu(CDA) \quad \text{(podle Věty 11,4)},\\
&\mu(ABC),\ \mu(DCB) \Rightarrow \mu(ACD),\ \mu(ABD) \quad \text{(podle Věty 11,3)},\\
&\mu(ABD),\ \mu(BDC) \Rightarrow \mu(ADC),\ \mu(ABC) \quad \text{(podle Věty 11,3)},\\
&\mu(ABD),\ \mu(DCB) \Rightarrow \mu(CBA),\ \mu(DCA) \quad \text{(podle Věty 11,4)},
\end{aligned}$$

při čemž žádná z těchto čtyř eventualit nevede ke sporu.

Věta 11,6. *Je-li* $\mu(ABD)$, $\mu(ACD)$ *a* $B \neq C$, *pak platí právě jedna z obou možností:* $\mu(ABC)$, $\mu(CBD)$.

Důkaz. Pro body A, B, C může a priori nastat jedna ze tří možností: $\mu(ABC)$, $\mu(BAC)$, $\mu(ACB)$. Možnost $\mu(BAC)$ není však podle VĚTY 11,3 slučitelná s předpoklady $\mu(ABD)$, $\mu(BAC) \Rightarrow \mu(DAC)$. Proto platí právě jeden z obou vztahů $\mu(ABC)$, $\mu(ACB)$. Je-li $\mu(ACB)$, pak podle VĚTY 11,4 vzhledem k $\mu(ABD)$ je $\mu(CBD)$.

VĚTA 11,7. *Jsou-li A, B dva různé body, pak množina všech bodů mezi A a B má nekonečně mnoho prvků.*

DŮKAZ. Podle VĚTY 11,1 existuje bod C_1 tak, že $C_1 \nabla \overline{AB}$, $\mu(AC_1B)$, a podle téže věty existuje bod $C_2 \nabla \overline{AB}$ tak, že $\mu(AC_2C_1)$. Podle VĚTY 11,4 je také $\mu(AC_2B)$. Body A, C_2, C_1, B jsou různé. Nyní podobně existuje bod $C_3 \nabla AB$, pro který je $\mu(AC_3C_1)$, a tedy také $\mu(AC_3B)$ a tak můžeme stále pokračovat.

DEFINICE. Body A, O, B buďtež kolineární. Jsou-li body A, O, B v takovém vztahu, že není $\mu(AOB)$, pak říkáme, že body A a B leží po *téže straně bodu O*. Je-li $\mu(AOB)$, pak říkáme, že body A a B leží *na různých stranách* od bodu O.

VĚTA 11,8. *Každý bod O přímky rozděluje body této přímky, které jsou různé od O, na dvě disjunktní třídy tak, že do téže třídy patří body ležící po téže straně od bodu O, do různých tříd patří body, ležící na různých stranách od bodu O.*

DŮKAZ. Budiž na přímce dán bod O. Vezměme na přímce bod $A \neq O$ a utvořme dvě třídy, které označíme $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}_2$, takto: do třídy $\mathbf{S}_1$ dáme bod A a každý bod X, který leží od O na téže straně jako A, do třídy $\mathbf{S}_2$ dáme bod Y, jestliže body Y a A leží na různých stranách od bodu O. Nyní musíme dokázat:

1. *Každý bod přímky mimo bod O patří právě do jedné z obou tříd.* To je ale zřejmé. Je-li totiž X jakýkoli bod $O \neq X \neq A$, pak ze tří bodů O, A, X leží právě jeden mezi ostatními dvěma.

2. *Každé dva body téže třídy leží na téže straně od bodu O.* Vezměme dva body X a Y ze třídy $\mathbf{S}_1$. Můžeme vzít hned $X \neq A \neq Y$. Podle konstrukce tříd $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ platí pro bod X buď $\mu(OAX)$, buď $\mu(OXA)$ a pro bod Y buď $\mu(OAY)$, buď $\mu(OYA)$. Potom nemůže platit $\mu(XOY)$, protože jinak by platilo $\mu(XOY)$, $\mu(OAY) \Rightarrow \mu(AOX)$ (podle VĚTY 11,4), což je spor, nebo $\mu(XOY)$, $\mu(OYA) \Rightarrow \mu(XOA)$, což je také spor. Jsou-li X a Y body třídy $\mathbf{S}_2$, pak podle konstrukce tříd je $\mu(XOA)$ a $\mu(YOA)$ a podle VĚTY 11,5 není $\mu(XOY)$.

3. *Body různých tříd leží na různých stranách od bodu O.* Budiž bod X z třídy S_1, t. j. $\mu(OAX)$ nebo $\mu(OXA)$ a bod Y z třídy S_2, t. j. $\mu(YOA)$. Potom je podle VĚTY 11,3 $\mu(OAX)$, $\mu(YOA) \Rightarrow \mu(YOX)$ a podle VĚTY 11,4 $\mu(OXA)$, $\mu(YOA) \Rightarrow \mu(XOY)$.

DEFINICE. *Polopřímka*, určená body O a A, symbolicky (OA), je množina bodů, do níž patří bod O, bod A a všechny body přímky $\overline{OA}$, které leží po téže straně bodu O jako bod A. Bod O se nazývá *počátkem* polopřímky (OA). Každý bod polopřímky různý od jejího počátku se nazývá *vnitřní bod* polopřímky. Polopřímky značíme také malými latinskými písmeny.

Každý bod O přímky určuje podle VĚTY 11,8 na ní právě dvě polopřímky, jež mají týž počátek a nemají mimo bod O společný bod. Tyto polopřímky se nazývají *opačné*. Opačná polopřímka k (OA) resp. h se značí $(OA)^*$ resp. h^*. Je-li h polopřímka, pak přímku, jíž je h částí, značíme $\overline{h}$.[14])

VĚTA 11,9. *Je-li B bod polopřímky (OA), pak je $(OA) = (OB)$.*

DŮKAZ. Zvolme M tak, že je $M \bigtriangledown \overline{OA}$ a $\mu(MOA)$. Protože B je na (OA), leží B na opačné straně od O než M. Je však $(OB) = (OM)^*$ a také $(OA) = (OM)^*$, takže $(OB) = (OA)$.

Naším nejbližším úkolem bude definovat uspořádání množiny všech bodů na přímce a to tak, aby mezi binární relací tohoto uspořádání, kterou budeme značit $\precsim$, a ternární relací μ byl tento vztah: je-li $\mu(ABC)$, pak je buď $A \precsim B \precsim C$ nebo $C \precsim B \precsim A$ a obráceně.

DEFINICE. Uspořádání bodů přímky pomocí binární relace $\precsim$, pro které platí ekvivalence

$$\mu(ABC) \Leftrightarrow A \precsim B \precsim C \text{ nebo } C \precsim B \precsim A$$

budeme nazývat *přirozeným uspořádáním*.

V dalším nám půjde nejdříve o důkaz existence přirozeného uspořádání. Za tím účelem ukážeme, že každému bodu X přímky lze přiřadit polopřímku, kterou označíme $p(X)$, tak, že pro každé dva body X a Y na přímce je jedna z obou polopřímek $p(X)$ a $p(Y)$ části druhé, čili že jsou ve vztahu inkluse. Nejdříve však několik pomocných vět.

VĚTA 11,10. *Jestliže je na přímce dána polopřímka (OA) a bod X, pak z obou polopřímek na $\overline{AO}$, jež mají počátek v bodě X, právě jedna je s polopřímkou (OA) ve vztahu inkluse.*

---

[14]) Viz poznámku [13]) na str. 47.

DůKAZ. Je-li $X = O$, je věc zřejmá. Nechť X je na polopřímce (OA). Podle $\mathfrak{R}$, 2 existuje bod $M \bigtriangledown \overline{OX}$ tak, že $\mu(OXM)$. Potom podle VěTY 11,9 je $(OA) = (OX) = (OM)$ a polopřímka (XM) je částí polopřímky $(OA) = (OM)$, neboť pro každý bod $Y \bigtriangledown \overline{XM}$, pro který je $\mu(XYM)$ resp. $\mu(XMY)$, platí $\mu(OXM)$, $\mu(XYM) \Rightarrow \mu(OYM)$ (podle VěTY 11,4) resp. $\mu(OXM)$, $\mu(XMY) \Rightarrow \mu(OMY)$ (podle VěTY 11,3). Naproti tomu polopřímky $(XM)^*$ a $(OA) = (OX)$ nejsou ve vztahu inkluse; zvolíme-li totiž $Z \bigtriangledown \overline{OA}$ tak, že $\mu(ZOX)$ (podle $\mathfrak{R}$, 2 to lze), pak Z není na (OX), je však na $(XO) = (XM)^*$. Vedle toho bod M je na (OX), není však na $(XM)^*$.

Není-li X na polopřímce (OA), je polopřímka (OA) částí polopřímky (XA), neboť je-li $\mu(OYA)$ resp. $\mu(OAY)$, je $\mu(XOA)$, $\mu(OYA) \Rightarrow \mu(XYA)$ resp. $\mu(XOA)$, $\mu(OAX) \Rightarrow \mu(XAY)$ (podle VěTY 11,4 a VěTY 11,3). Naproti tomu polopřímky (OA) a $(XA)^*$ nejsou ve vztahu inkluse, nýbrž jsou dokonce disjunktní, neboť pro každé Y, pro něž je $\mu(YXA)$, platí $\mu(XOA)$, $\mu(YXA) \Rightarrow \mu(YOA)$ (podle VěTY 11,4), takže není Y na (OA).

Sledujeme-li vztahy mezi páry polopřímek téže přímky podle jejich průniku, vidíme, že nastávají pouze tyto možnosti:

1. dvě polopřímky nemají společný bod,

2. dvě polopřímky mají společný právě jeden bod — počátek obou polopřímek,

3. dvě polopřímky mají společné všechny body nějaké úsečky — počáteční body obou polopřímek jsou pak koncovými body této úsečky,

4. dvě polopřímky mají společné všechny body nějaké polopřímky, t. j. buď obě polopřímky splývají nebo jedna obsahuje druhou.

V případech 1, 2, 3 nejsou obě polopřímky ve vztahu inkluse, v případě 4 pak ano.

VěTA 11,11. *Je-li polopřímka h obsažena v polopřímce k, pak je k^* obsažena v h^*.*

DůKAZ. Budiž $\mu(O_1O_2A)$ a nechť $k = (O_1A)$, $h = (O_2A)$. Je-li $\mu(YO_1A)$, pak je $\mu(YO_2A)$ podle VěTY 11,4, takže $(O_1A)^*$ je částí $(O_2A)^*$.

VěTA 11,12. *Jestliže dvě polopřímky obsahují současně polopřímku třetí, pak jsou ve vztahu inkluse.*

DůKAZ. Nechť polopřímky h, k, (OA) jsou různé a na téže přímce a nechť h i k obsahují polopřímku (OA). Označme počáteční bod polopřímky h písmenem O_1 a počáteční bod polopřímky k písmenem O_2. Podle VĚTY 11,9 lze psát $h = (O_1A)$, $k = (O_2A)$. Bod O_1 nemůže patřit do (OA), protože pak by $(O_1A) = h$ neobsahovala bod O. Podobně nemůže patřit do (OA) bod O_2. Je tedy současně $\mu(O_1OA)$ a $\mu(O_2OA)$. Podle VĚTY 11,5 je tedy buď $\mu(O_1O_2O)$ nebo $\mu(O_2O_1O)$. Je-li na př. $\mu(O_1O_2O)$, pak je $\mu(O_1O_2A)$ podle VĚTY 11,4 a pak (O_2A) je částí (O_1A), neboť je-li $\mu(O_2YA)$ resp. $\mu(O_2AY)$, pak je $\mu(O_1YA)$ resp. $\mu(O_1AY)$.

VĚTA 11,13. *Jestliže dvě polopřímky jsou současně obsaženy v polopřímce třetí, pak jsou ve vztahu inkluse.*

DŮKAZ plyne bezprostředně z VĚTY 11,10 a 11,9.

VĚTA 11,14. *Všechny polopřímky dané přímky lze rozdělit do právě dvou disjunktních tříd tak, že v téže třídě jsou každé dvě polopřímky ve vztahu inkluse, v různých třídách jsou polopřímky, jež ve vztahu inkluse nejsou.*

DŮKAZ. Na dané přímce zvolme polopřímku q. Do třídy $\mathbf{S}_1$ dejme všechny polopřímky, jež jsou s q ve vztahu inkluse, do třídy $\mathbf{S}_2$ dejme všechny ostatní.

1. *Ve třídě $\mathbf{S}_1$ jsou každé dvě polopřímky ve vztahu inkluse.* Mějme dvě různé polopřímky h a k ze třídy $\mathbf{S}_1$. Jestliže h obsahuje q a q obsahuje k nebo obráceně, jestliže k obsahuje q a q obsahuje h, pak je věc zřejmá. Je-li h a k obsaženo současně v q nebo obsahuje-li h a k současně polopřímku q, pak je tvrzení zřejmé podle VĚT 11,12 a 11,13.

2. *Podle* VĚTY 11,10 *nemůže třída $\mathbf{S}_1$ obsahovat s polopřímkou h také polopřímku h^*.* Třída $\mathbf{S}_2$ obsahuje tedy opačné polopřímky k polopřímkám třídy $\mathbf{S}_1$ a podle VĚTY 11,11 třída $\mathbf{S}_2$ má také tu vlastnost, že každé dvě polopřímky v ní jsou ve vztahu inkluse.

VĚTA 11,15. *Existují právě dvě přirozená uspořádání přímky a ta jsou navzájem inversní.*[15])

DŮKAZ. Pro body na přímce p zavedeme uspořádání takto: rozdělme všechny polopřímky na přímce p na dvě třídy, jak o tom mluví VĚTA 11,14. Každému bodu X přiřaďme ze třídy $\mathbf{S}_1$ tu polopřímku, která má v bodě X počátek, a označme ji $p(X)$. Protože polopřímka má právě jeden počátek, mají dva různé body přiřazeny různé polopřímky a naopak. Jsou-li body X a Y různé, pak budeme říkat, že X je před Y,

---

[15]) Definici inversního uspořádání viz odst. **6**, str. 30.

symbolicky $X \prec Y$, jestliže polopřímka $p(X)$ je obsažena v polopřímce $p(Y)$.

Je vidět, že takto definované uspořádání bodů vyhovuje oběma axiomům 1 a 2 pro uspořádání z odstavce **6**. Dokažme ještě, že je-li $\mu(ABC)$ a $A \prec B$, pak je také $B \prec C$. Avšak $A \prec B$ znamená, že $p(A)$ je obsaženo v $p(B)$. Sestrojme polopřímku h tak, že do ní dáme všechny body přímky $\overline{AB}$, které jsou od C po téže straně jako bod B. Je tedy $h = (CB)$ a h obsahuje $p(B)$. Avšak podle VĚTY 11,10 existuje k bodu C právě jedna polopřímka, jež je s $p(B)$ ve vztahu inkluse, je tedy $(CB) = p(C)$ a $p(B)$ je obsaženo v $p(C)$.

Z definice přirozeného uspořádání a z VĚTY 11,14 plyne, že existují dvě přirozená uspořádání bodů na přímce. Druhé uspořádání bychom dostali, kdybychom v definici vzali místo třídy $\boldsymbol{S}_1$ třídu $\boldsymbol{S}_2$. Obě přirozená uspořádání jsou navzájem inversní.

DEFINICE. Zvolíme-li určité přirozené uspořádání bodů na přímce, budeme říkat, že jsme přímku *orientovali* nebo že jsme na ní zvolili určitou *orientaci*. Orientace příslušející oběma inversním přirozeným uspořádáním bodů přímky budeme nazývat *opačnými orientacemi*. Přímku p, na níž jsme zvolili určitou orientaci, budeme nazývat *orientovanou* a budeme ji značit $\vec{p}$, v opačné orientaci symbolem $\vec{p}^*$.

OZNAČENÍ. Přímku $\overline{AB}$, na níž jsme zvolili orientaci tak, že je $A \prec B$, budeme značit $A\vec{B}$. Polopřímku na orientované přímce p, jež má počátek A a pro jejíž body X platí $A \prec X$, značíme $(A\vec{p})$.

VĚTA 11,16. *Přímka, která s body A, B, C leží v téže rovině a která protíná jednu ze tří úseček AB, BC, AC, protíná ještě alespoň jednu z nich.*

DŮKAZ. Jsou-li body A, B, C nekolineární, říká věta totéž jako axiom $\mathfrak{R}$, 4.

Buďtež tedy body A, B, C kolineární. Přímka $p \neq \overline{AB}$ nechť protíná úsečku AB, takže (podle definice) je incidentní s vnitřním bodem M úsečky AB, tedy $\mu(AMB)$. Pro body A, B, C platí právě jedna z možností: $\mu(ABC)$, $\mu(BCA)$, $\mu(CAB)$. Odtud dostáváme pro bod M vztahy:

$\mu(AMB), \mu(ABC) \Rightarrow \mu(AMC)$ (podle VĚTY 11,4),
$\mu(AMB), \mu(CAB) \Rightarrow \mu(BMC)$ (podle VĚTY 11,4),
$\mu(AMB), \mu(BCA) \Rightarrow$ buď $\mu(AMC)$, buď $\mu(CMB)$ (podle VĚTY 11,6).

VĚTA 11,17. *Přímka, která protíná dvě ze tří různých úseček AB, BC, CA neprotíná třetí.*

DŮKAZ. 1. *Předpokládejme předně, že body A, B, C* jsou kolineární: Nechť přímka a protíná úsečky AB a BC v bodě označeném písmenem M, takže platí $\mu(AMB)$ a $\mu(BMC)$. Při tom nemůže být $\mu(AMC)$, neboť kdyby tomu tak bylo, pak by podle VĚTY 11,5 platilo $\mu(AMC)$, $\mu(AMB) \Rightarrow \overline{\mu}(CMB)$, což by bylo ve sporu se vztahem $\mu(BMC)$.

2. *Nechť za druhé body A, B, C jsou nekolineární.* Nechť přímka a protíná úsečku AB v bodě P, úsečku BC v bodě Q. Pak a nemůže protínat úsečku AC. Předpokládejme naopak, že protíná také úsečku AC, a to v bodě R. Body P, Q, R jsou kolineární, některý z nich musí být podle VĚTY 11,2 mezi ostatními dvěma. Předpoklad, že je $\mu(PQR)$, vede ke sporu, neboť body P, R, A jsou nekolineární, přímka $\overline{CB}$ protíná úsečku RP a tedy podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 musí protnout buď AR, buď AP, ale obojí je nemožné podle $\mathfrak{R}$, 4. Právě tak vede ke sporu předpoklad, že $\mu(QRP)$ nebo $\mu(RPQ)$. Znamená to tedy, že přímka a nemůže protínat úsečku AC.

DEFINICE. Nechť body A, B a přímka p leží v téže rovině, při čemž A, B neleží na p. Potom říkáme, že body A a B leží *po téže straně* přímky p, jestliže p neprotíná úsečku AB. Protíná-li přímka p úsečku AB, pak říkáme, že body A, B leží *na různých stranách přímky p*.

VĚTA 11,18. *Každá přímka p roviny rozděluje body této roviny, které neleží na p, do dvou různých disjunktních tříd tak, že do téže třídy patří body ležící po téže straně přímky p, do různých tříd patří body, jež leží na různých stranách přímky p.*

DŮKAZ. Budiž v rovině dána přímka p. Vezměme v rovině bod P, jenž neleží na p, a utvořme dvě třídy, které označíme $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}_2$, takto: do $\mathbf{S}_1$ dáme bod P a bod X roviny $\overline{pP}$ dáme do třídy $\mathbf{S}_1$, jestliže X a P leží na téže straně od p, bod Y dáme do třídy $\mathbf{S}_2$, jestliže body Y a P leží na různých stranách od p.

Nyní musíme dokázat: 1. *Každý bod A roviny, který neleží na p, patří právě do jedné třídy.* To je ale zřejmé, neboť úsečka AP buď má s p společný bod nebo nemá.

2. *Každé dva body téže třídy leží na téže straně od přímky p.* Nechť body X a Y patří do třídy $\mathbf{S}_1$, $X \neq P \neq Y$. Přímka p neprotíná úsečky PX, PY, nemůže tedy podle VĚTY 11,16 protínat ani XY. Nechť body

X a Y patří do třídy S_2. Přímka p protíná úsečky PX, PY, nemůže již tedy podle VĚTY 11,17 protínat úsečku XY.

3. *Každé dva body různých tříd leží na různých stranách přímky* p. Nechť X je z třídy S_1, Y z třídy S_2. Přímka p protíná tedy úsečku PY, ale neprotíná úsečku PX. Podle VĚTY 11,16 protíná tedy p úsečku XY.

DEFINICE. *Polorovina*, určená přímkou p a bodem P — symbolicky ji budeme značit (p, P) — je množina bodů, do níž patří body přímky p, bod P a všechny body roviny $\overline{pP}$, jež leží od p po téže straně jako bod P. Přímka p se nazývá *hranicí* poloroviny (p, P). Poloroviny značíme někdy také malými řeckými písmeny.

Podle VĚTY 11,18 rozděluje každá přímka rovinu, ve které leží, na dvě poloroviny. Oběma polorovinám říkáme, že jsou opačné. Opačnou polorovinu k (p, P) značíme $(p, P)^*$.

VĚTA 11,19. *Nechť body A, B, C jsou nekolineární. Přímka $\overline{AB}$ nemá s polorovinou $(\overline{AC}, B)$ jiných společných bodů kromě těch, které leží na polopřímce (AB).*

DŮKAZ. Je-li D bod přímky $\overline{AB}$, který neleží na polopřímce (AB), pak platí $\mu(DAB)$ a podle definice poloroviny nemůže bod D ležet v polorovině $(\overline{AC}, B)$.

DEFINICE. Říkáme, že *bod leží uvnitř poloroviny*, jestliže leží v polorovině, ne však na její hranici. Podobně říkáme, že *polopřímka leží uvnitř poloroviny*, jestliže každý vnitřní bod polopřímky leží uvnitř poloroviny.

DEFINICE. Nechť p, q, r jsou tři polopřímky v téže rovině a s týmž počátkem, při čemž nechť p a r neleží na jedné přímce. Říkáme, že polopřímka q leží mezi polopřímkami p a r, symbolicky $\mu(pqr)$, jestliže polopřímka q protíná úsečku spojující libovolné dva body, ležící na polopřímkách p, r. (Podle $\mathfrak{R}$, 4 nezáleží na volbě obou těchto bodů.)

DEFINICE. Buďtež dány dvě polopřímky p, q se společným počátkem S, které neleží na téže přímce. *Úhlem* $\sphericalangle\, pq$ rozumíme množinu polopřímek, do níž vedle polopřímek p a q patří každá polopřímka r roviny $\overline{pq}$ s počátkem S, pro kterou platí $\mu(prq)$. Polopřímky p, q se nazývají *ramena* úhlu $\sphericalangle\, pq$, o všech ostatních polopřímkách úhlu $\sphericalangle\, pq$ říkáme, že *leží uvnitř* něho. Bod S se nazývá *vrcholem úhlu*.

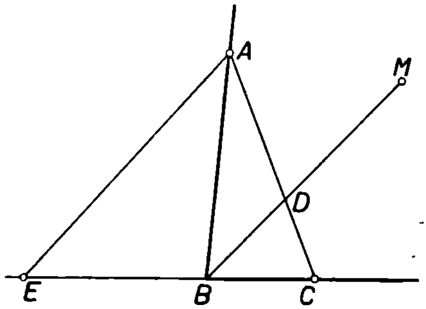
Má-li úhel vrchol B a ramena (BA) a (BC), pak ho značíme také

$\sphericalangle\, ABC$. Říkáme, že bod X leží *uvnitř úhlu* $\sphericalangle\, ABC$, jestliže uvnitř tohoto úhlu leží polopřímka (BX).

Někdy značíme úhel s rameny (PM) a $(P\vec{p})$ také krátce $\sphericalangle\, MP\vec{p}$.

VĚTA 11,20. *Mějme úhel $\sphericalangle\, ABC$. Bod M resp. polopřímka (BM) leží mezi (BA) a (BC) tehdy a jen tehdy, když M resp. (BM) leží současně uvnitř obou polorovin $(\overline{BC}, A)$ a $(\overline{BA}, C)$.*

DŮKAZ. 1. Leží-li M mezi rameny (BC) a (BA) (viz obr. 9), pak (BM) protíná úsečku AC, průsečík označme D. Vnitřní body úsečky AC a tedy i průsečík D leží uvnitř polorovin $(\overline{BC}, A)$, $(\overline{BA}, C)$, takže polopřímka (BM) leží současně uvnitř obou polorovin a tedy i bod M.



Obr. 9.

2. Nechť M leží současně uvnitř obou polorovin $(\overline{BC}, A)$, $(\overline{BA}, C)$ a budiž $E \neq B$ bod polopřímky $(BC)^*$. Uvažujme trojúhelník $\triangle\, ACE$. Přímka $\overline{BM}$ protíná stranu CE, tedy podle $\mathfrak{R}$, 4 musí ještě protínat buď EA nebo AC. Podle VĚTY 11,19 však stranu EA protnout nemůže, neboť body úsečky EA a bod M leží po různých stranách přímky $\overline{AB}$.

VĚTA 11,21. *Mějme úhel $\sphericalangle\, pq$. Polopřímka $r \neq q$, která má počátek ve vrcholu úhlu $\sphericalangle\, pq$ a leží uvnitř poloroviny $(\bar{p}, q)$, je buď mezi p a q nebo mezi p^* a q.*

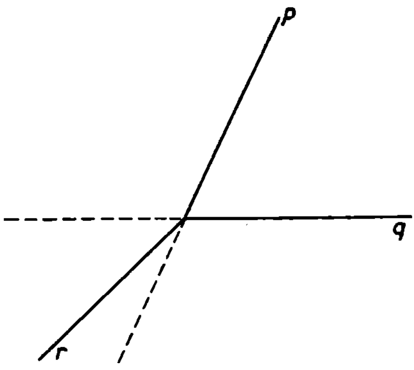
DŮKAZ. Nechť M je bod na polopřímce r různý od jejího počátku. Bod M leží uvnitř poloroviny $(\bar{p}, q)$, neleží však na q, neboť $r \neq q$. Bod M a podle toho tedy i polopřímka r je buď uvnitř poloroviny $(\bar{q}, p)$ nebo $(\bar{q}, p)^* = (\bar{q}, p^*)$. Je-li uvnitř poloroviny $(\bar{q}, p)$, je podle VĚTY 11,20 mezi p a q, je-li uvnitř poloroviny $(\bar{q}, p^*)$, je mezi p^* a q.

VĚTA 11,22. *Jestliže tři polopřímky mají společný počátek a leží v téže rovině, pak nejvýše jedna leží mezi ostatními dvěma.*

DŮKAZ. Nechť polopřímky p, q, r splňují podmínky naší věty a nechť na př. q leží mezi p a r. Je-li tedy A resp. B bod na p resp. na r, pak polopřímka q protíná úsečku AB. Průsečík označme C, takže je tedy

$\mu(ACB)$. Kdyby nyní polopřímka p ležela mezi polopřímkami q a r, muselo by být $\mu(BAC)$, což je nemožné vzhledem k VĚTĚ 11,2.

Vztah μ pro polopřímky nemá všechny vlastnosti jako vztah μ pro body na přímce. Neplatí totiž věta obdobná VĚTĚ 11,2, že by ze tří polopřímek se společným počátkem a ležících v téže rovině *právě jedna* ležela mezi ostatními dvěma.



Obr. 10.

O tom se můžeme přesvědčit na příkladě polopřímek p, q, r, jestliže na př. polopřímka r leží současně uvnitř polorovin $(\overline{p}, q)^*$ a $(\overline{q}, p)^*$. Potom žádná z polopřímek p, q, r neleží mezi ostatními dvěma. (Viz obr. 10.)

Podobně jako jsme definovali pojem polopřímky a poloroviny, zavádí se pojem *poloprostoru*: je to množina, do níž patří body nějaké roviny a všechny body prostoru, ležící po téže její straně, při čemž opět definujeme, že body A, B leží po téže straně roviny α tehdy a jen tehdy, jestliže úsečka AB nemá s rovinou α společných bodů. Nebudeme zde však vlastnosti poloprostorů blíže rozvádět.

12. Axiomy shodnosti a jejich důsledky. Vztah „*úsečka AB je shodná s úsečkou CD*" budeme symbolicky psát „$AB \equiv CD$" a vztah „*úhel $\sphericalangle pq$ je shodný s úhlem $\sphericalangle rs$*" budeme psát „$\sphericalangle pq \equiv \sphericalangle rs$".

AXIOMY SHODNOSTI, $\mathfrak{S}$:

$\mathfrak{S}$, 1. *Shodnost úseček je vztah reflexivní a transitivní.*

$\mathfrak{S}$, 2. *Je-li $\mu(A_1B_1C_1)$, $\mu(A_2B_2C_2)$, $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, pak je také $A_1C_1 \equiv A_2C_2$.*

$\mathfrak{S}$, 3. *Buďtež dány body $A_1 \neq B_1$ a nechť p je polopřímka s počátkem A_2. Potom na polopřímce p existuje vždy alespoň jeden bod $B_2 \neq A_2$ tak, že je $A_1B_1 \equiv A_2B_2$.*

$\mathfrak{S}$, 4. *Jsou-li p, q polopřímky s týmž počátkem a $\overline{p} \neq \overline{q}$, pak je vždy $\sphericalangle pq \equiv \sphericalangle qp$.*

$\mathfrak{S}$, 5. *Je-li dán úhel $\sphericalangle p_1q_1$, polopřímka p_2 s počátkem S a polorovina ω s hranicí $\overline{p}_2$, pak v ω existuje právě jedna polopřímka q_2 s počátkem S a taková, že $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_2q_2$.*

$\mathfrak{S}$, 6. *Buďtež dány dva trojúhelníky $\triangle\, A_1B_1C_1$ a $\triangle\, A_2B_2C_2$. Je-li*

$A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $A_1C_1 \equiv A_2C_2$ a $\sphericalangle B_1A_1C_1 \equiv \sphericalangle B_2A_2C_2$, pak je také $\sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$.

Pojem shodnosti má v MODELU 1 obvyklý význam: dvě úsečky resp. dva úhly jsou *shodné*, jestliže je lze přemístit tak, že splynou. V MODELU 2 lze pojem shodnosti zavést tak, že úsečky AB a CD (kde $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$) jsou shodné, jestliže je

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2 + (c_3 - d_3)^2.$$

Shodnost úhlů můžeme zavést pomocí shodnosti úseček na příklad takto: úhly $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle DEF$ budou shodné, jestliže bude $AB \equiv DE$, $BE \equiv EF$, $AC \equiv DF$. Pak MODEL 2 bude splňovat axiomy $\mathfrak{S}$.

V dalším odvodíme nejdůležitější důsledky axiomů shodnosti. Po větách o *shodnosti trojúhelníků* (12,4; 12,5; 12,8) zavedeme některé nové pojmy: úhly *vedlejší* a *vrcholové*, úhel *pravý* (existuje alespoň jeden úhel pravý — VĚTA 12,14; všechny pravé úhly jsou shodné — VĚTA 12,15), dále pojem *středu* úsečky a *osy* úsečky i úhlu. Na základě primitivních pojmů „mezi“ a „shodnosti“ je zaveden vztah „*menší* — *větší*“ pro úsečky a úhly. Následuje věta pro další výklad fundamentální důležitosti, totiž věta o vnějším úhlu trojúhelníka (VĚTA 12,23).

Pomocí primitivních pojmů „mezi“ a „shodnosti“ lze také zavést *sčítání úseček a úhlů*. Přitom je však nutno *rozšířit* námi zavedený pojem úhlu (který odpovídá dosud jen t. zv. úhlům dutým), aby zahrnoval také úhel přímý a vypuklý. Dále je zaveden pojem *vzdálenosti dvou bodů* A, B jakožto třídy všech úseček shodných s úsečkou AB a podobně i pojem *velikosti úhlu* $\sphericalangle pq$ jakožto třídy všech úhlů shodných s úhlem $\sphericalangle pq$. Nezavádíme tedy vzdálenost a velikost úhlu jakožto *čísla*, protože v našem dalším výkladu se bez toho můžeme obejít. Věta o délce lomené čáry spojující dva body (VĚTA 12,32), jež je zobecněním důležité *trojúhelníkové nerovnosti* (VĚTA 12,26), uzavírá probírané vlastnosti vztahu shodnosti v rovině.

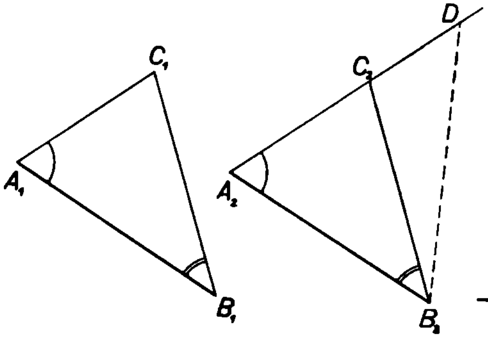
Zbývající část tohoto paragrafu je věnována *útvarům prostorovým*. Jde zejména o zavedení stěnového úhlu a o pojem kolmosti přímek a rovin. Závěrečné věty (12,45 a 12,46) se zabývají v podstatě tvrzeními o vztazích mezi úhlem a jeho kolmým průmětem.

VĚTA 12,1. *Jestliže pro tři kolineární body A, B, C platí $\mu(ABC)$, pak nemůže být $AB \equiv AC$.*

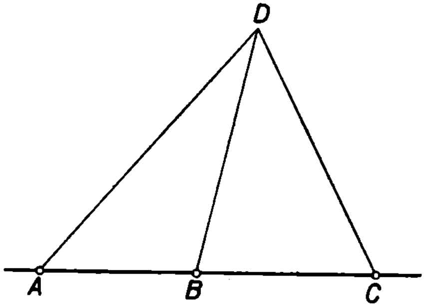
DŮKAZ. Nechť je $\mu(ABC)$ a nechť naopak platí $AB \equiv AC$. Mimo přímku $\overline{AB}$ zvolme bod D (viz obr. 11). Protože $AB \equiv AC$, $AD \equiv AD$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ je podle $\mathfrak{S}$, 6 $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$. Protože je $\mu(ABC)$, body B a C jsou v téže polorovině $(\overline{AD}, C)$. Podle $\mathfrak{S}$, 5 je polopřímka $\overline{DB}$ totožná s polopřímkou $\overline{DC}$, což je spor, neboť D neleží na $\overline{BC}$.

VĚTA 12,2. *Buďtež dány body $A_1 \neq B_1$ a nechť p je polopřímka s počátkem A_2. Potom na polopřímce p existuje vždy právě jeden bod B_2 tak, že platí $A_1B_1 \equiv A_2B_2$.*

DŮKAZ. Kdyby byly takové body dva, B_2 a B_2', pak by bylo $A_2B_2' \equiv \equiv A_2B_2$ a současně by platilo buď $\mu(A_2B_2'B_2)$ nebo $\mu(A_2B_2B_2')$. Podle VĚTY 12,1 jsou však obě možnosti ve sporu se vztahem $A_2B_2' \equiv A_2B_2$.



Obr. 11.



Obr. 12.

POZNÁMKA. *Shodnost úseček je vztah symetrický a má tu vlastnost, že vždycky platí $AB \equiv BA$*, jak se dá z axiomů $\mathfrak{S}$ snadno dokázat. Platí-li totiž $AB \equiv CD$, pak podle $\mathfrak{S}$, 3 existuje na polopřímce (AB) bod B', pro který platí $CD \equiv AB'$, čili vzhledem k transitivnosti shodnosti úseček také $AB \equiv AB'$. Podle VĚTY 12,2 je však $B = B'$, neboť B a B' leží na téže polopřímce (AB), takže platí také $CD \equiv AB$. Že vždycky platí $AB \equiv BA$, plyne z toho, že shodnost úseček je vztah reflexivní a že symboly AB i BA označují touž úsečku.

Později dokážeme, že také shodnost úhlů je vztah reflexivní, symetrický a transitivní.

VĚTA 12,3. *Jestliže body A_1, B_1, C_1 jsou kolineární a body A_2, B_2, C_2 jsou kolineární a jestliže platí $\mu(A_1B_1C_1)$ a $\mu(A_2B_2C_2)$ a jestliže ze vztahů $A_1B_1 \equiv A_2B_2$; $B_1C_1 \equiv B_2C_2$; $A_1C_1 \equiv A_2C_2$ platí alespoň dva, potom platí také třetí.*

DŮKAZ. Nechť je $\mu(A_1B_1C_1)$ a $\mu(A_2B_2C_2)$. Jestliže je $A_1B_1 \equiv A_2B_2$ a $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, potom je také $A_1C_1 \equiv A_2C_2$ podle $\mathfrak{S}$, 2. Budiž tedy $A_1B_1 \equiv A_2B_2$; $A_1C_1 \equiv A_2C_2$. Kdyby neplatilo $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, bylo by

$B_1C_1 \not\equiv B_2C_2$. Podle $\mathfrak{S}$, 3 existuje však na polopřímce (B_2C_2) bod C_2' tak, že $B_1C_1 \equiv B_2C_2'$. Bylo by tedy $C_2 \neq C_2'$. Protože je $\mu(A_1B_1C_1)$, $\mu(A_2B_2C_2')$, $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $B_1C_1 \equiv B_2C_2'$, bylo by podle $\mathfrak{S}$, 2 $A_1C_1 \equiv \equiv A_2C_2'$, takže by platilo $A_2C_2 \equiv A_2C_2'$. To však je ve sporu s VĚTOU 12,2, neboť C_2 a C_2' jsou na téže polopřímce (A_2B_2) a přitom $C_2 \neq C_2'$

Jestliže je $B_1C_1 \equiv B_2C_2$ a $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, potom důkaz probíhá stejně. Liší se pouze záměnou písmen A a C.

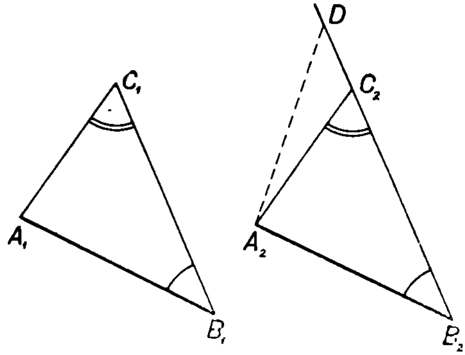
DEFINICE. O dvou trojúhelnících $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ říkáme, že jsou *shodné*, symbolicky $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2C_2$, jestliže platí vztahy:

$$A_1B_1 \equiv A_2B_2; \quad A_1C_1 \equiv A_2C_2; \quad B_1C_1 \equiv B_2C_2,$$
$$\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2; \quad \sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2; \quad \sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2,$$

ve kterých píšeme $\sphericalangle C_1$ místo $\sphericalangle A_1C_1B_1$ a pod. (tohoto označení, pokud nepovede k nedorozumění, budeme používat i nadále).

VĚTA 12,4. *Jestliže pro dva trojúhelníky* $\triangle A_1B_1C_1$ *a* $\triangle A_2B_2C_2$ *platí* $A_1B_1 \equiv A_2B_2$; $A_1C_1 \equiv A_2C_2$; $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$, *pak jsou shodné.*

DŮKAZ. Máme dokázat, že platí $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$, $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$. Stačí však dokázat pouze $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, protože platnost vztahu $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$ potvrzuje axiom $\mathfrak{S}$, 6 přímo a vztah $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$ plyne z $\mathfrak{S}$, 6, když v něm zaměníme písmena B a C, což můžeme učinit vzhledem k $\mathfrak{S}$, 4. Kdyby bylo $B_1C_1 \not\equiv \not\equiv B_2C_2$, pak by na polopřímce (B_2C_2) existoval bod D (obr. 12) tak, že $B_2 \div D \div C_2$, $B_1C_1 \equiv \equiv B_2D$ (podle $\mathfrak{S}$, 3). Protože $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, bylo by podle $\mathfrak{S}$, 6 $\sphericalangle B_1A_1C_1 \equiv \sphericalangle B_2A_2D$ a body C_2 a D by ležely v téže polorovině $(\overline{B_2A_2}, C_2)$. Podle $\mathfrak{S}$, 5 by tedy polopřímky (A_2C_2) a (A_2D) byly totožné, což je spor, neboť A_2 neleží na $\overline{DC_2} = \overline{C_2B_2}$.



Obr. 13.

VĚTA 12,5. *Jestliže pro dva trojúhelníky* $\triangle A_1B_1C_1$ *a* $\triangle A_2B_2C_2$ *platí* $A_1B_1 \equiv A_2B_2$; $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$; $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$, *pak jsou shodné.*

DŮKAZ. Dokážeme-li, že $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, jsme vzhledem k VĚTĚ 12,4 hotovi. Kdyby bylo $A_1C_1 \not\equiv A_2C_2$, pak by na polopřímce (A_2C_2) existoval bod D (viz obr. 13) tak, že $A_2 \neq D \neq C_2$, $A_1C_1 \equiv A_2D$. Podle $\mathfrak{S}$, 6 je za tohoto předpokladu $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2D$. Protože je také $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$ a protože body C_2 a D jsou v téže polorovině $(\overline{A_2B_2}, C_2)$, jsou podle $\mathfrak{S}$, 5 také polopřímky (B_2C_2) a (B_2D) totožné, což je spor, neboť B_2 neleží na $\overline{C_2D} = \overline{A_2C_2}$.

VĚTA 12,6. *Nechť každá trojice polopřímek p_1, q_1, r_1 a p_2, q_2, r_2 má týž počátek, leží v téže rovině a platí pro ni $\mu(p_1q_1r_1)$, $\mu(p_2q_2r_2)$. Jestliže ze tří vztahů $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_2q_2$, $\sphericalangle p_1r_1 \equiv \sphericalangle p_2r_2$, $\sphericalangle q_1r_1 \equiv \sphericalangle q_2r_2$ platí alespoň dva, je splněn i třetí.*

DŮKAZ. Společný počátek trojice p_1, q_1, r_1 označme O_1, trojice p_2, q_2, r_2 písmenem O_2. Nechť platí nejprve $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_2q_2$ a $\sphericalangle q_1r_1 \equiv \sphericalangle q_2r_2$ a předpokládejme, že jest $\sphericalangle p_1r_1 \not\equiv \sphericalangle p_2r_2$. Pak v polorovině $(\overline{p_2}, r_2)$ existuje polopřímka r' s počátkem O_2 (viz obr. 14) a taková, že $\sphericalangle p_1r_1 \equiv \sphericalangle p_2r'$, při čemž jest $r' \neq r_2$. Budiž A_1 resp. A_2 bod na polopřímce p_1 resp. p_2 tak, že $O_1A_1 \equiv O_2A_2$ a bod B_1 resp. B_2 na polopřímce r_1 resp. r' tak, že $O_1B_1 \equiv O_2B_2$. Protože je $\mu(p_1q_1r_1)$, protíná q_1 úsečku A_1B_1; průsečík označme C_1. Na polopřímce (A_2B_2) zvolme bod C_2 tak, že $A_1C_1 \equiv A_2C_2$. Protože podle VĚTY 12,4 je $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, je podle VĚTY 12,3 také $C_1B_1 \equiv C_2B_2$. Ze vztahů $O_1A_1 \equiv O_2A_2$, $O_1B_1 \equiv O_2B_2$, $\sphericalangle p_1r_1 \equiv \sphericalangle p_2r'$ plyne podle VĚTY 12,4 $\sphericalangle O_1A_1C_1 \equiv \sphericalangle O_2A_2C_2$ a $\sphericalangle O_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle O_2B_2C_2$. Ze vztahů $O_1A_1 \equiv O_2A_2$, $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, $\sphericalangle O_1A_1C_1 \equiv \sphericalangle O_2A_2C_2$ plyne podle VĚTY 12,4 $\sphericalangle A_1O_1C_1 \equiv \sphericalangle A_2O_2C_2$, takže podle $\mathfrak{S}$, 5 leží C_2 na q_2. Protože platí $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, $O_1B_1 \equiv O_2B_2$, $\sphericalangle O_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle O_2B_2C_2$, dokážeme pomocí VĚTY 12,4, že $\sphericalangle C_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle C_2O_2B_2$ čili $\sphericalangle q_1r_1 \equiv \sphericalangle q_2r'$. Protože je také $\sphericalangle q_1r_1 \equiv \sphericalangle q_2r_2$ a při tom je $r_2 \neq r'$ a r_2 a r' leží v téže polorovině, je závěr ve sporu s $\mathfrak{S}$, 5.

Analogicky probíhá důkaz v obou ostatních případech.

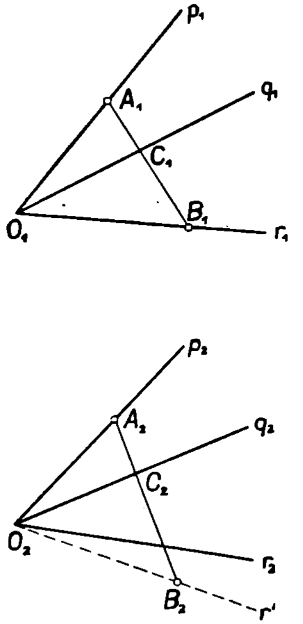
VĚTA 12,7. *Jestliže v trojúhelníku $\triangle ABC$ je $AC \equiv CB$, je $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.*

DŮKAZ je důsledkem axiomu $\mathfrak{S}$, 4 a axiomu $\mathfrak{S}$, 6, použitého na $\triangle CAB$ a $\triangle CBA$.

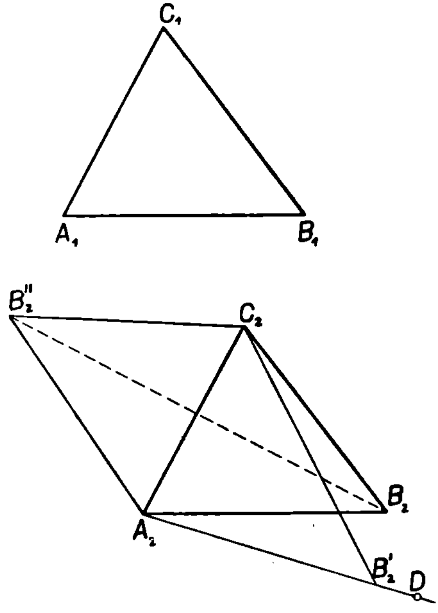
DEFINICE. Trojúhelník, který má dvě shodné strany, se nazývá *rovnoramenný*.

Věta 12,8. *Jestliže pro dva trojúhelníky* $\triangle A_1B_1C_1$ *a* $\triangle A_2B_2C_2$ *platí* $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, *pak jsou shodné.*

Důkaz. Vzhledem k Větě 12,4 stačí dokázat, že $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$. Kdyby naopak bylo $\sphericalangle A_1 \not\equiv \sphericalangle A_2$, existovala by podle $\mathfrak{S}$, 5 polopřímka (A_2D) v polorovině $(\overline{A_2C_2}, B)$ (viz obr. 15) tak, že $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle C_2A_2D$,



Obr. 14.



Obr. 15.

při čemž by bylo $(A_2B_2) \neq (A_2D)$. Podle $\mathfrak{S}$, 3 leží na (A_2D) bod B_2' tak, že $A_1B_1 \equiv A_2B_2'$. Protože platí $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, $A_1B_1 \equiv A_2B_2'$, $\sphericalangle A_1 \equiv$ $\equiv \sphericalangle C_2A_2B_2'$, je podle Věty 12,4 také $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2'C_2$, speciálně tedy $B_1C_1 \equiv B_2'C_2$. Protože shodnost úseček je vztah symetrický a transitivní, trojúhelníky $\triangle A_2B_2C_2$ a $\triangle A_2B_2'C_2$ mají shodné strany. Podobně sestrojme trojúhelník $\triangle A_2B_2''C_2$ s vrcholem B_2'' na opačné straně od $\overline{A_2C_2}$ než je B_2, pro který platí $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle C_2A_2B_2''$ a $A_1B_1 \equiv$ $\equiv A_2B_2''$ a tedy také $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2''C_2$. Uvažujme trojúhelníky $\triangle A_2B_2B_2''$ a $\triangle C_2B_2B_2''$. Protože je $A_2B_2 \equiv A_2B_2''$ a $C_2B_2 \equiv C_2B_2''$, platí podle Věty 12,7 $\sphericalangle A_2B_2B_2'' \equiv \sphericalangle A_2B_2''B_2$ a $\sphericalangle C_2B_2B_2'' \equiv \sphericalangle C_2B_2''B_2$

čili podle VĚTY 12,6 je $\sphericalangle A_2B_2''C_2 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$. Odtud pomocí VĚTY 12,4 plyne, že $\triangle A_2B_2''C_2 \equiv \triangle A_2B_2C_2$, speciálně tedy $\sphericalangle C_2A_2B_2'' \equiv \equiv \sphericalangle C_2A_2B_2$. Analogicky dokážeme, že $\sphericalangle C_2A_2B_2'' \equiv \sphericalangle C_2A_2B_2'$. Protože je $(A_2B_2) \neq (A_2B_2'')$, máme vzhledem k $\mathfrak{S}$, 5 spor.

VĚTA 12,9. *Je-li $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_2q_2$ a $\sphericalangle p_2q_2 \equiv \sphericalangle p_3q_3$, pak je také $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_3q_3$.*

DŮKAZ. Zvolme body $O_1, O_2, O_3, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ tak, aby platilo $O_1A_1 \equiv O_2A_2$, $O_2A_2 \equiv O_3A_3$, $O_1B_1 \equiv O_2B_2$, $O_2B_2 \equiv O_3B_3$, $\sphericalangle A_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle p_1q_1$, $\sphericalangle A_2O_2B_2 \equiv \sphericalangle p_2q_2$, $\sphericalangle A_3O_3B_3 \equiv \sphericalangle p_3q_3$. Podle VĚTY 12,4 je potom $A_2B_2 \equiv A_2B_2$, $A_2B_2 \equiv A_3B_3$. Protože shodnost úseček je vztah symetrický a transitivní, je $O_1A_1 \equiv O_3A_3$, $O_1B_1 \equiv O_3B_3$, $A_1B_1 \equiv A_3B_3$, takže podle VĚTY 12,8 platí $\triangle O_1A_1B_1 \equiv \equiv \triangle O_3A_3B_3$, speciálně tedy $\sphericalangle A_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle A_3O_3B_3$ čili $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \equiv \sphericalangle p_3q_3$.

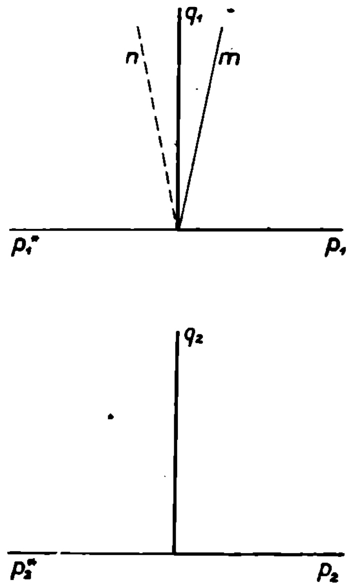
POZNÁMKA. *Shodnost úhlů je vztah reflexivní, symetrický a transitivní.* Podle $\mathfrak{S}$, 4 platí totiž $\sphericalangle pq \equiv \sphericalangle qp$ a současně $\sphericalangle qp \equiv \sphericalangle pq$, takže vzhledem k transitivnosti, o které nás poučuje VĚTA 12,10, platí $\sphericalangle pq \equiv \sphericalangle pq$. Dokažme tedy ještě, že shodnost úhlů je také vztah symetrický. Platí-li $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_2q_2$, pak podle $\mathfrak{S}$, 5 existuje v polorovině $(\bar{p}_1, q_1)$ polopřímka q_1' (jež má společný počátek s p_1) tak, že je $\sphericalangle p_2q_2 \equiv \sphericalangle p_1q_1'$. Vzhledem k transitivnosti tedy platí $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \equiv \sphericalangle p_1q_1'$, a protože q_1 i q_1' leží v téže polorovině $(\bar{p}_1, q_1)$, platí podle $\mathfrak{S}$, 5 $q_1 = q_1'$, takže jest $\sphericalangle p_2q_2 \equiv \sphericalangle p_1q_1$.

VĚTA 12,10. *Nechť body A, B, C a D, E, F jsou kolineární, při čemž nechť je $\mu(ABC)$ a E leží na polopřímce (DF). Je-li $AB \equiv DE$ a $AC \equiv \equiv DF$, pak je také $\mu(DEF)$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že naopak platí $\mu(DFE)$. Na polopřímce $(CB)^*$ zvolme bod G tak, aby bylo $CG \equiv FE$. Protože je $\mu(ACG)$ a $\mu(DFE)$ a $AC \equiv DF$, $CG \equiv FE$, je podle $\mathfrak{S}$, 2 také $AG \equiv DE$. Protože je také $AB \equiv DE$ a při tom $G \neq B$ a G a B jsou na téže straně od A, je to vzhledem k VĚTĚ 12,2 spor.

VĚTA 12,11. *Buďtež dány dva shodné úhly $\sphericalangle ab \equiv \sphericalangle pq$. Jestliže c je polopřímka úhlu $\sphericalangle ab$, pak existuje polopřímka r, jež je polopřímkou úhlu $\sphericalangle pq$ a jež splňuje vztahy $\sphericalangle ac \equiv \sphericalangle pr$, $\sphericalangle cb \equiv \sphericalangle rq$.*

DŮKAZ. Zvolme body A, B, C, P, Q, R tak, že úhel $\sphericalangle ABC$ je týž jako $\sphericalangle ab$ a $\sphericalangle PQR$ týž jako $\sphericalangle pq$, při čemž vzhledem k $\mathfrak{S}$, 3 můžeme předpokládat, že jest $AB \equiv PQ$, $BC \equiv QR$. Pak je také $AC \equiv PQ$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle QPR$, $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle QRP$. Protože c leží uvnitř úhlu $\sphericalangle ab$, protíná c úsečku AC. Průsečík označme D. Zvolme S na polopřímce (PR) tak, že $AD \equiv PS$. Podle VĚTY 12,10 je $\mu(PSR)$, takže podle VĚTY 12,3 je také $CD \equiv RS$. Podle axiomu $\mathfrak{S}$, 6 aplikovaného na trojúhelníky $\triangle ABD$ a $\triangle PQS$ je $\sphericalangle ABD \equiv \equiv \sphericalangle PQS$ a podobně je $\sphericalangle CBD \equiv \equiv \sphericalangle RQS$. Polopřímka (QS) má tedy vlastnost polopřímky r, o níž je řeč v naší větě.



Obr. 16.

DEFINICE. Dva úhly nazýváme *vedlejší*, jestliže mají společné jedno rameno (a tedy i vrchol) a jestliže jejich zbývající ramena jsou opačné polopřímky.

VĚTA 12, 12. *Vedlejší úhly shodných úhlů jsou také shodné.*

DŮKAZ. Nechť body trojic A_1, B_1, C_1 a A_2, B_2, C_2 jsou nekolineární, při čemž nechť $\sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$. Na polopřímce $(B_1C_1)^*$ resp. $(B_2C_2)^*$ zvolme bod C_1' resp. C_2'.

Můžeme předpokládat, že $B_1A_1 \equiv \equiv B_2A_2$, $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, $B_1C_2' \equiv B_2C_2'$. Podle $\mathfrak{S}$, 2 je potom $C_1C_1' \equiv C_2C_2'$. Podle VĚTY 12,4 aplikované na trojúhelníky $\triangle B_1A_1C_1$ a $\triangle B_2A_2C_2$ je $C_1A_1 \equiv C_2A_2$, $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle A_2$ a podle VĚTY 12,4 aplikované na trojúhelníky $\triangle C_1C_1'A_1$ a $\triangle C_2C_2'A_2$ je $C_1'A_1 \equiv C_2'A_2$, $\sphericalangle C_1C_1'A_1 \equiv \sphericalangle C_2C_2'A_2$. Podle axiomu $\mathfrak{S}$, 6 aplikovaného na $\triangle C_1'B_1A_1$ a $\triangle C_2'B_2A_2$ je $\sphericalangle C_1'B_1A_1 \equiv \sphericalangle C_2'B_2A_2$.

VĚTA 12,13. *Budiž dán úhel $\sphericalangle pq$. Pak platí $\sphericalangle pq \equiv \sphericalangle p^*q^*$.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 12,12.

DEFINICE. Úhly $\sphericalangle pq$ a $\sphericalangle p^*q^*$ se nazývají *vrcholové*.

DEFINICE. Úhel shodný se svým vedlejším se nazývá *pravý*.

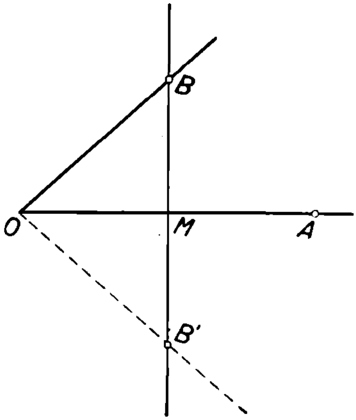
VĚTA 12,14. *Existuje pravý úhel.*

DŮKAZ. Vezměme libovolný úhel $\sphericalangle AOB$. Podle $\mathfrak{S}$, 5 existuje polopřímka OB' (viz obr. 16) tak, že $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle AOB'$, při čemž body

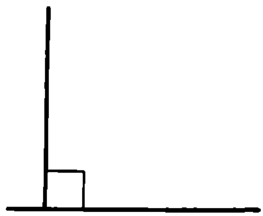
B a B' jsou na různých stranách přímky $\overline{AO}$ a při čemž podle $\mathfrak{S}$, 3 je $OB \equiv OB'$. Označme průsečík $\overline{OA}$ a $\overline{BB'}$ písmenem M. Podle $\mathfrak{S}$, 6 je $\sphericalangle\ BMO \equiv \sphericalangle\ B'MO$, takže úhly $\sphericalangle\ BMO$ a $\sphericalangle\ B'MO$ jsou pravé.

VĚTA 12,15. *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

DŮKAZ. Mějme dva pravé úhly $\sphericalangle\ p_1q_1$ a $\sphericalangle\ p_2q_2$. To znamená, že $\sphericalangle\ p_1q_1 \equiv \sphericalangle\ q_1p_1^*$, $\sphericalangle\ p_2q_2 \equiv \sphericalangle\ q_2p_2^*$. Za předpokladu, že neplatí $\sphericalangle\ p_1q_1 \equiv \sphericalangle\ p_2q_2$, existuje podle $\mathfrak{S}$, 5 právě jedna polopřímka m (viz obr. 17) s počátkem ve vrcholu úhlu $\sphericalangle\ p_1q_1$ a v polorovině $(\overline{p}_1, q_1)$ taková, že platí $\sphericalangle\ p_1m \equiv \sphericalangle\ p_2q_2$, a při tom $m \neq q_1$. Podle VĚTY 11,20 je buď $\mu(p_1mq_1)$, buď $\mu(q_1mp_1^*)$. Je-li na př. $\mu(p_1mq_1)$, pak existuje podle VĚTY 12,11 polopřímka n tak, že je $\mu(q_1np_1^*)$ a $\sphericalangle\ p_1m \equiv \sphericalangle\ p_1^*n$ a při tom $n \neq m$. Je ale $\sphericalangle\ p_2q_2 \equiv \sphericalangle\ p_1^*n$ a také (podle VĚTY 12,12) $\sphericalangle\ p_2q_2 \equiv$ $\equiv \sphericalangle\ q_2p_2^* \equiv \sphericalangle\ mp_1^*$, což je vzhledem k $\mathfrak{S}$, 5 spor. Je zřejmé, že ke sporu vede také zbývající předpoklad, že platí $\mu(q_1mp_1^*)$.



Obr. 17.



Obr. 18.

OZNAČENÍ. Pravý úhel budeme v textu značit také písmenem R. Na obrázcích budeme pravý úhel vyznačovat malým čtverečkem, jako je to na obr. 18.

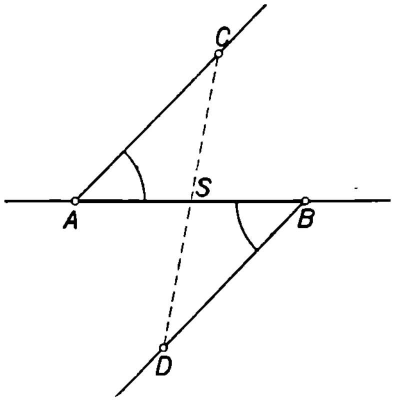
VĚTA 12,16. *Budiž dána polopřímka p a polorovina s hranicí $\overline{p}$. Pak v této polorovině existuje právě jedna polopřímka, mající počátek společný s danou polopřímkou p a svírající s ní pravý úhel.*

DŮKAZ. *Existence* takové polopřímky plyne z VĚTY 12,14. Kdyby existovaly takové polopřímky *dvě*, q a q', pak by podle VĚTY 12,15 bylo $\sphericalangle\ pq \equiv \sphericalangle\ pq'$ a to by byl vzhledem k $\mathfrak{S}$, 5 spor.

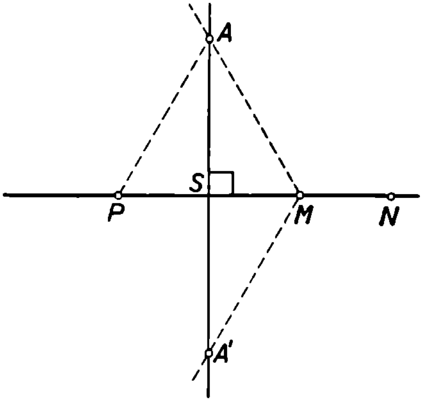
DEFINICE. Nechť polopřímky p a q mají společný počátek a svírají pravý úhel. Pak říkáme, že přímky $\overline{p}$ a $\overline{q}$ jsou *k sobě kolmé*, nebo že jsou to *kolmice*. Symbolicky to značíme $\overline{p} \perp \overline{q}$.

VĚTA 12,17. *Daným bodem na přímce lze vést v dané rovině (incidentní s přímkou) právě jednu kolmici k této přímce.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 12,16.



Obr. 19.



Obr. 20.

DEFINICE. Bod O přímky AB se nazývá *středem úsečky AB*, jestliže platí $AO \equiv OB$.

Za pomoci VĚTY 12,1 lze sporem snadno dokázat, že střed úsečky leží mezi jejími koncovými body.

VĚTA 12,18. *Každá úsečka má střed a to právě jeden.*

DŮKAZ. *Existence*: mějme úsečku AB (viz obr. 19) a nechť body C a D jsou v opačných polorovinách s hranicí $\overline{AB}$ a při tom nechť $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABD$ a $AC \equiv BD$. Úsečka CD protíná přímku $\overline{AB}$, neboť C a D jsou na různých stranách od $\overline{AB}$, průsečík označme S. Podle VĚTY 12,4 je $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$, čili též $CB \equiv DA$. Podle VĚTY 12,8 je $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$, tedy $\sphericalangle ADS \equiv \sphericalangle BCS$. Podle VĚTY 12,5 je $\triangle ADS \equiv \triangle BCS$, čili $AS \equiv BS$.

Jednoznačnost: nechť úsečka AB má dva středy O_1 a O_2; je tedy $AO_1 \equiv O_1B$, $AO_2 \equiv O_2B$ a $\mu(AO_1B)$, $\mu(AO_2B)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $\mu(AO_1O_2)$. Budiž nyní O' takový bod polopřímky (AO_1), že je $AO' \equiv BO_2$. Podle VĚTY 12,10 platí současně se vztahem $\mu(BO_2O_1)$ vztah $\mu(AO'O_1)$, takže je jistě $O' \neq O_2$, při čemž oba body leží na polopřímce (AO_1). To je ale vzhledem k $AO' \equiv AO_2$ spor (VĚTA 12,2).

DEFINICE. O polopřímce r s počátkem ve vrcholu úhlu $\sphericalangle\, pq$, která leží v jeho rovině a splňuje vztah $\sphericalangle\, pr \equiv \sphericalangle\, rq$, říkáme, že *úhel půlí* nebo že je to jeho *půlící polopřímka.*

VĚTA 12,19. *Mějme rovnoramenný trojúhelník* $\triangle\, ABC$, $AB \equiv AC$. *Půlící polopřímka úhlu* $\sphericalangle\, A$ *stojí na stranu* BC *kolmo a půlí ji.*

DŮKAZ. Označme průsečík BC s půlící polopřímkou úhlu $\sphericalangle\, A$ písmenem O. Podle VĚTY 12,4 je $\triangle\, AOB \equiv \triangle\, AOC$.

VĚTA 12,20. *Každý úhel má půlící polopřímku a to právě jednu.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 12,19 a VĚTY 12,18.

VĚTA 12,21. *Bodem mimo přímku lze k ní (v rovině určené daným bodem a danou přímkou) vést právě jednu kolmici.*

DŮKAZ. *Existence.* Budiž dána přímka $\overline{MN}$ a mimo ni bod A (viz obr. 20). Určeme bod A' v polorovině $(\overline{MN}, A)^*$ tak, aby bylo $\sphericalangle\, AMN \equiv \sphericalangle\, A'MN$, $AM \equiv A'M$. Úsečka AA' protne přímku $\overline{MN}$, průsečík označme S. Trojúhelník $\triangle\, AMA'$ je rovnoramenný, podle VĚTY 12,19 je tedy $\overline{AA'}$ kolmice na $\overline{MN}$.

Jednoznačnost. Předpokládejme, že bodem A procházejí dvě různé kolmice na přímku $\overline{MN}$, kterou protínají v bodech S_1 a S_2. Je tedy $S_1 \neq S_2$ a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí $M \neq S_1 \neq N$ a $M \neq S_2 \neq N$. Na polopřímce $(S_1A)^*$ určeme bod A' tak, aby platilo $S_1A \equiv S_1A'$; podobně určeme na $(S_2A)^*$ bod A'', pro který platí $S_2A \equiv S_2A''$. Pomocí vět o shodnosti trojúhelníků snadno dokážeme, že $\triangle\, MNA \equiv \triangle\, MNA'$ a $\triangle\, MNA \equiv \triangle\, MNA''$, z čehož plyne, že $A' = A''$. Přímky $\overline{AS_1}$ a $\overline{AS_2}$, které jsou různé, mají tedy dva různé průsečíky A a $A' = A''$, což je ve sporu s $\mathfrak{I}$, 4.

DEFINICE. Přímka se nazývá *osou úsečky,* jestliže ji protíná v půlícím bodě a stojí na ní kolmo. Je-li p půlící polopřímka úhlu, pak přímka $\overline{p}$ se nazývá jeho *osou.*

VĚTA 12,22. *Budiž dána úsečka* AB. *Pro bod* P *platí vztah* $AP \equiv BP$ *tehdy a jen tehdy, jestliže bod* P *leží na ose úsečky* AB.

DŮKAZ. Platí-li $AP \equiv BP$, pak trojúhelník $\triangle\, ABP$ je rovnoramenný a věta je podle VĚTY 12,19 správná. Je-li bod P na ose úsečky $\overline{AB}$

a označíme-li průsečík osy s AB písmenem H, pak trojúhelníky $\triangle AHP$ a $\triangle BHP$ jsou shodné. Odtud plyne naše věta.

DEFINICE. Nechť A_1B_1 a A_2B_2 jsou dvě úsečky. Jestliže C je vnitřní bod úsečky A_1B_1 takový, že je $A_1C_1 \equiv A_2B_2$, pak říkáme, že úsečka A_1B_1 je *větší* než úsečka A_2B_2 čili že úsečka A_2B_2 je *menší* než úsečka A_1B_1, symbolicky $A_1B_1 > A_2B_2$ nebo $A_2B_2 < A_1B_1$.

Z vlastnosti relace μ plyne, že je-li $A_1B_1 > A_2B_2$ a $A_2B_2 > A_3B_3$, pak také $A_1B_1 > A_3B_3$, takže relace $<$ pro úsečky je transitivní.

DEFINICE. Nechť $\sphericalangle p_1q_1$ a $\sphericalangle p_2q_2$ jsou dva úhly. Jestliže uvnitř úhlu $\sphericalangle p_1q_1$ existuje polopřímka r tak, že je $\sphericalangle p_1r \equiv \sphericalangle p_2q_2$, pak říkáme, že úhel $\sphericalangle p_1q_1$ je větší než $\sphericalangle p_2q_2$ nebo že $\sphericalangle p_2q_2$ je menší než $\sphericalangle p_1q_1$, což symbolicky píšeme $\sphericalangle p_1q_1 > \sphericalangle p_2q_2$ nebo $\sphericalangle p_2q_2 < < \sphericalangle p_1q_1$.

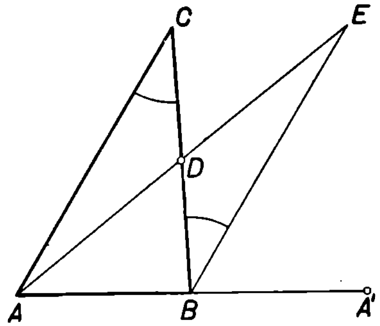
Je vidět, že relace $<$ pro úhly je také transitivní.

DEFINICE. Úhel menší než pravý se nazývá *ostrý*, úhel větší než pravý je *tupý*.

DEFINICE. *Vnější úhel trojúhelníka* je vedlejší úhel některého jeho úhlu. Úhly trojúhelníka nazýváme také *vnitřními*.

VĚTA 12,23. *Vnější úhel trojúhelníka je větší než kterýkoli vnitřní, který s ním není vedlejší.*

DŮKAZ. Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$ a nechť bod A' je na polopřímce $(BA)^*$. Dokážeme, že je $\sphericalangle A'BC > \sphericalangle ACB$.



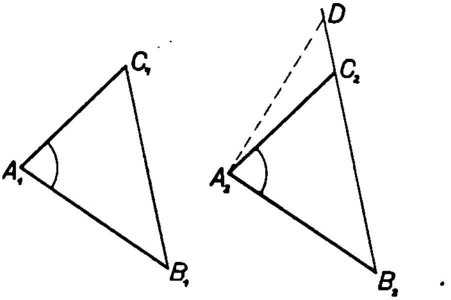
Obr. 21.

Budiž D (viz obr. 21) půlící bod strany CB a E bod na polopřímce $(DA)^*$ takový, že $AD \equiv DE$. Bod E je uvnitř poloroviny $(\overline{AB}, C)$, protože polopřímka (AD) leží v této polorovině a je také uvnitř poloroviny $(\overline{BC}, A)^*$ čili $(\overline{CB}, A')$, protože je na opačné straně od $\overline{BC}$ než A. Proto polopřímka (BE) je uvnitř úhlu $\sphericalangle CBA'$, takže je $\sphericalangle CBE < < \sphericalangle CBA'$. Je však $\sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle ACB$, neboť podle VĚTY 12,13 je $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle EDB$ a podle VĚTY 12,4 je tudíž $\triangle ADC \equiv \triangle EDB$. Skutečně tedy $\sphericalangle ACB < \sphericalangle A'BC$.

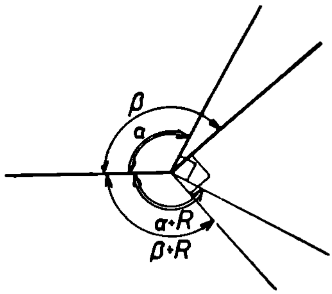
Podobně se dokáže, že $\sphericalangle CAB < \sphericalangle CBA'$.

VĚTA 12,24. *Jestliže pro dva trojúhelníky* $\triangle A_1B_1C_1$ *a* $\triangle A_2B_2C_2$ *platí* $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$, $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$, *pak jsou shodné.*

DŮKAZ. Vzhledem k VĚTĚ 12,5 stačí dokázat, že platí $C_1B_1 \equiv C_2B_2$. Předpokládejme, že jest $C_1B_1 \not\equiv C_2B_2$, takže potom pro bod D polopřímky (B_2C_2) (viz obr. 22), pro který je $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, platí $C_2 \neq D$.



Obr. 22.



Obr. 23.

Podle VĚTY 12,23 platí $\sphericalangle A_2C_2B_2 > \sphericalangle A_2DB_2$, zatím co ze vztahu $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2D$ plyne, že jest $\sphericalangle A_2DB_2 \equiv \sphericalangle A_1C_1B_1$. To vede však ke sporu s předpokladem, že je $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$.

VĚTA 12,25. *V trojúhelníku leží proti větší straně větší úhel a naopak proti většímu úhlu větší strana.*

DŮKAZ. Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$. Máme dokázat, že z $AC < CB$ plyne $\sphericalangle ABC < \sphericalangle CAB$ a naopak, že z $\sphericalangle ABC < \sphericalangle CAB$ plyne $AC < CB$. Obojí se ale snadno dokáže pomocí VĚTY 12,7 a VĚTY 12,23.

DEFINICE. *Součtem úseček* A_1B_1 *a* A_2B_2 rozumíme jakoukoli úsečku AC té vlastnosti, že existuje vnitřní bod B úsečky AC takový, že je $AB \equiv A_1B_1$, $BC \equiv A_2B_2$. Pak píšeme symbolicky $AC \equiv A_1B_1 + A_2B_2$.

Je-li $AB < CD$, pak *rozdílem úseček* AB a CD rozumíme úsečku MN takovou, že je $AB \equiv CD + MN$. Potom píšeme $MN \equiv AB - CD$.

Vztah $AB \equiv CD + CD + \ldots + CD$, při čemž na pravé straně je n sčítanců, budeme psát stručně $AB \equiv n \,.\, CD$ nebo také

$$CD \equiv \frac{AB}{n}.$$

Dříve než budeme definovat součet úhlů, rozšíříme námi dosud zavedený pojem úhlu. Součet úhlů $\sphericalangle\, p_1q_1$ a $\sphericalangle\, p_2q_2$ bychom mohli zavést ovšem již nyní a to na př. jakožto jakýkoli úhel $\sphericalangle\, pq$ takový, že existuje polopřímka r, jež má v jeho vrcholu počátek, leží v rovině $\overline{pq}$ a má tu vlastnost, že je $\sphericalangle\, pr \equiv \sphericalangle\, p_1q_1$ a $\sphericalangle\, rq \equiv \sphericalangle\, p_2q_2$. Potom by ale pro vzájemnou polohu polopřímek p, r, q mohly nastat tyto možnosti:

1. buďto je $\mu(prq)$, na př. v případě, že sčítáme dva ostré úhly;

2. nebo není $\mu(prq)$, takže potom žádná z polopřímek p, r, q neleží mezi ostatními dvěma. To nastane, když na příklad sčítáme dva tupé úhly;

3. nebo otázka, je-li $\mu(prq)$, nemá smysl, protože polopřímky p a q jsou opačné. To nastane, když sčítáme na př. dva vedlejší úhly.

V případě 1 by naše definice plně vyhovovala, kdežto v případě 2 by měla jistou nevýhodu: jestliže by na př. α, β, γ byly úhly a jestliže by $\alpha + \gamma$ a $\beta + \gamma$ byly součty podle případu 2 potom by se mohlo stát, že ačkoliv by bylo $\alpha < \beta$, přesto by pro $\alpha + \gamma$ a $\beta + \gamma$ pojímané jako úhly v dosavadním smyslu platilo $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ (viz obr. 23). V případě 3 by pak nemělo vůbec smysl mluvit o úhlu $\sphericalangle\, pq$. Abychom se vyhnuli všem těmto potížím, rozšíříme dosavadní pojem úhlu zavedením *nevlastních úhlů.*

Definice. Úhly, které jsme dosud definovali, budeme nazývat *vlastní. Nevlastním úhlem* $\sphericalangle\, pq$, kde p, q jsou dvě polopřímky se společným počátkem S, které neleží na téže přímce, rozumíme množinu polopřímek, do níž vedle polopřímek p a q patří každá polopřímka r roviny $\overline{pq}$ s počátkem S, pro kterou neplatí $\mu(prq)$. Mnohdy nevlastní úhel nazýváme také *úhel vypuklý*, zatím co každý úhel vlastní se nazývá také *úhel dutý.*

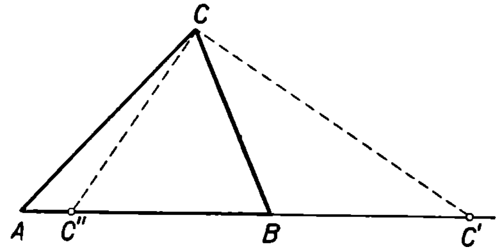
Definice. Jsou-li p, q dvě opačné polopřímky s počátkem S, pak množina polopřímek, do níž vedle polopřímek p a q patří každá polopřímka mající počátek S a ležící v určité polorovině s hranicí $\overline{p} = \overline{q}$, je *nevlastní úhel* $\sphericalangle\, pq$, který se nazývá *úhel přímý.*

Definice. Budiž p polopřímka s počátkem S. Množina všech polopřímek roviny, které mají počátek v bodě S, je *nevlastní úhel* $\sphericalangle\, pp$, který se nazývá *úhel plný.*

Podobně jako u úhlu vlastního nazývají se u nevlastního úhlu $\sphericalangle\, pq$ polopřímky p, q jeho *ramena* a o všech ostatních polopřímkách úhlu $\sphericalangle\, pq$ se říká, že *leží uvnitř* něho. Také zde se společný počátek ramen nazývá *vrcholem úhlu.* Nevlastní úhel s vrcholem B a rameny (BA), (BC) značíme také $\sphericalangle\, ABC$.

Poznámka. Pro nevlastní úhly jsme zavedli totéž označení jako pro úhly vlastní. V dalším budeme však pod symboly $\sphericalangle\, pq$ a $\sphericalangle\, ABC$ rozumět jen úhly vlastní, pokud nebude výslovně uveden opak. Někdy budeme také úhly, ať už vlastní nebo nevlastní, značit jediným malým řeckým písmenem α, β, γ atd.

Definice. Shodnost pro úhly nevlastní budiž zavedena takto: všechny přímé úhly jsou shodné; jsou-li $\sphericalangle\, p_1q_1$ a $\sphericalangle\, p_2q_2$ dva vypuklé úhly, pak říkáme, že jsou shodné tehdy a jen tehdy, když jsou shodné vlastní úhly $\sphericalangle\, p_1q_1$, $\sphericalangle\, p_2q_2$.



Obr. 24.

Poznámka. Naše definice relace $<$ pro úhly vlastní má smysl i pro úhly nevlastní. Podle této definice je úhel dutý vždy menší než úhel přímý nebo vypuklý, úhel přímý je vždy menší než úhel vypuklý a úhel vypuklý je vždy menší než úhel plný.

Definice. Jsou-li $\sphericalangle\, p_1q_1$ a $\sphericalangle\, p_2q_2$ dva úhly, z nichž žádný není vypuklý ani plný (jsou tedy buď oba duté nebo jeden dutý a druhý přímý nebo oba přímé), pak *součtem* těchto úhlů budeme rozumět jakýkoli úhel $\sphericalangle\, pq$ (vlastní nebo nevlastní) té vlastnosti, že existuje vnitřní polopřímka r tohoto úhlu, pro kterou platí $\sphericalangle\, pr \equiv \sphericalangle\, p_1q_1$ a $\sphericalangle\, rq \equiv \equiv \sphericalangle\, p_2q_2$. Že úhel α je součtem úhlů β a γ píšeme symbolicky $\alpha \equiv \equiv \beta + \gamma$.

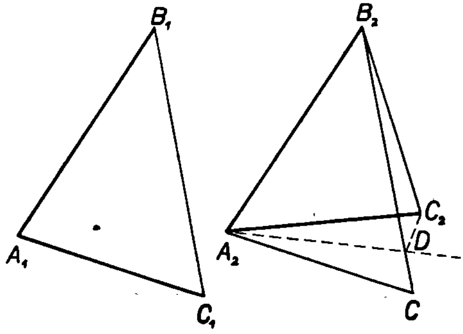
Poznámka. Je zřejmé, že součtem dvou pravých úhlů je úhel přímý, který proto značíme také často $2R$. Někdy místo názvů *úhel dutý* resp. *přímý* resp. *vypuklý* se užívá názvu *úhel menší* resp. *rovný* resp. *větší než dvà pravé úhly* (než $2R$). Dále je zřejmé, že součtem dvou přímých úhlů je úhel plný, který se proto často značí $4R$.

Definice. Je-li $\alpha < \beta$, pak *rozdílem úhlů* α a β budeme rozumět ten úhel γ, pro který je $\alpha = \beta + \gamma$. Potom budeme psát také $\gamma = \alpha - \beta$.

Jestliže je $\alpha = \beta + \beta + \ldots + \beta$, při čemž na pravé straně je n sčítanců, budeme psát stručně $\alpha = n\,.\,\beta$ nebo také $\beta = \dfrac{\alpha}{n}$.

VĚTA 12,26. *Každá strana trojúhelníka je menší než součet a větší než rozdíl obou zbývajících stran.*

DůKAZ. Mějme dán trojúhelník $\triangle ABC$ a nechť bod C' (viz obr. 24) leží na polopřímce $(BA)^*$, při čemž $BC \equiv BC'$. Je zřejmé, že $\sphericalangle ACC' > \sphericalangle BCC' \equiv \sphericalangle AC'C$, takže podle VĚTY 12,25 v trojúhelníku $\triangle ACC'$ je $AC' > AC$, $AC' \equiv AB + BC$. Budiž nyní na př. $AB > CB$. Pak existuje na úsečce AB vnitřní bod C'' tak, že $C''B \equiv CB$. Úhel $\sphericalangle AC''C$ je vedlejší k úhlu $\sphericalangle CC''B \equiv$ $\equiv \sphericalangle C''CB$, úhel $\sphericalangle ACC''$ je menší než vedlejší úhel úhlu $\sphericalangle C''CB$, tedy menší než $\sphericalangle AC''C$. Odtud podle VĚTY 12,25 plyne naše tvrzení $AC <$ $AC'' = AB - CB$.



Obr. 25.

VĚTA 12,27. *Buďtež dány trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ takové, že $A_1B_1 \equiv A_2B_2$ a $A_1C_1 \equiv A_2C_2$. Potom z $\sphericalangle B_1A_1C_1 > \sphericalangle B_2A_2C_2$ plyne $B_1C_1 > B_2C_2$ a obráceně.*

DůKAZ. Nechť trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ splňují podmínky věty. V polorovině $(\overline{A_2B_2}, C_2)$ určeme bod C (viz obr. 25) tak, že $\triangle A_2B_2C \equiv \triangle A_1B_1C_1$. Je-li $\sphericalangle B_1A_1C_1 > \sphericalangle B_2A_2C_2$, pak strana A_2C_2 bude uvnitř úhlu $\sphericalangle B_2A_2C$ a půlící polopřímka úhlu $\sphericalangle C_2A_2C$ bude také uvnitř úhlu $\sphericalangle B_2A_2C$, takže tato půlící polopřímka protne úsečku B_2C v bodě, který označíme D. Zřejmě platí $\triangle A_2C_2D \equiv \triangle A_2CD$, takže také $DC \equiv DC_2$. V trojúhelníku $\triangle B_2C_2D$ je $B_2C_2 > B_2D + DC_2 \equiv$ $\equiv B_2C$, což jsme měli dokázat.

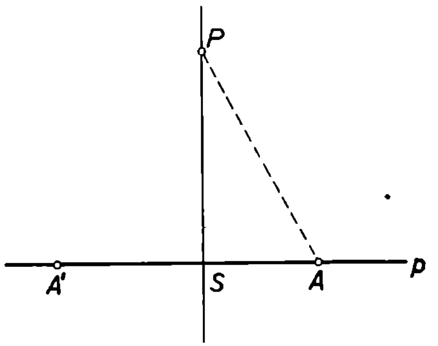
Jestliže je $B_1C_1 > B_2C_2$, pak nemůže být $\sphericalangle B_1A_1C_1 < \sphericalangle B_2A_2C$ (podle právě provedeného důkazu) ani nemohou být oba úhly shodné (podle vět o shodnosti trojúhelníků).

VĚTA 12,28. *V trojúhelníku je součet kterýchkoli dvou vnitřních úhlů menší než dva pravé.*

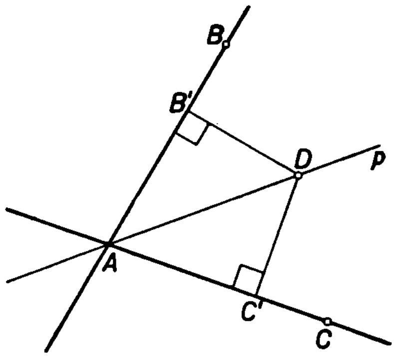
DůKAZ. Budiž dán $\triangle ABC$. Máme-li dokázat, že $\sphericalangle A + \sphericalangle B <$ $< 2R$, pak uvážíme, že $\sphericalangle A < \sphericalangle B^*$, kde $\sphericalangle B^*$ je vnější úhel při vrcholu B, a že $\sphericalangle B + \sphericalangle B^* \equiv 2R$.

VĚTA 12,29. *Budiž dána přímka p a bod P mimo ni. Je-li S průsečík přímky p s kolmicí vedenou bodem P k přímce p, pak pro každý bod $A \neq S$ přímky p platí $AP > SP$.*

DŮKAZ. Nechť A' je bod polopřímky $(SA)^*$ (viz obr. 26). Podle VĚTY 12,23 je $\sphericalangle PSA \equiv \sphericalangle PSA' > \sphericalangle PAS$, takže podle VĚTY 12,25 je opravdu $PS < PA$.



Obr. 26.



Obr. 27.

DEFINICE. *Vzdáleností dvou bodů* budeme rozumět každou úsečku shodnou s úsečkou spojující oba body. Podobně *velikostí úhlu* budeme rozumět každý úhel s ním shodný.

DEFINICE. *Vzdáleností bodu A od množiny bodů $\mathbf{S}$*, do níž A nepatří, budeme rozumět vzdálenost MN takovou, že

1. pro všechny body B z $\mathbf{S}$ platí $MN \leqq AB$,
2. je-li vzdálenost $M'N'$ taková, že platí $MN < M'N'$, pak existuje v $\mathbf{S}$ bod P tak, že $AP < M'N'$.[17])

DEFINICE. *Vzdáleností bodu od přímky* resp. *roviny* budeme rozumět vzdálenost od množiny všech jejích bodů.

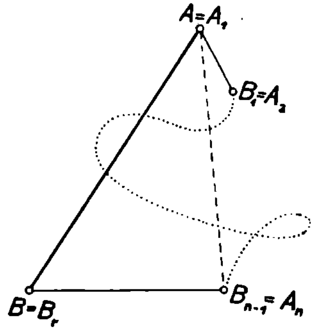
VĚTA 12,30. *Budiž dána přímka p a bod P mimo ni. Vzdálenost bodu P od přímky p je úsečka, spojující bod P a průsečík přímky p s kolmicí vedenou bodem P na přímku p.*

[17]) Je tedy vzdálenost bodu A od množiny $\mathbf{S}$ infimum všech vzdáleností AX, kde bod X probíhá všechny body z množiny $\mathbf{S}$. Existuje-li tedy mezi vzdálenostmi AX vzdálenost *nejmenší*, je to přímo také vzdálenost A od $\mathbf{S}$. Toho je použito při důkazu VĚTY 12,30.

DŮKAZ plyne okamžitě z VĚTY 12,29.

VĚTA 12,31. *Jsou-li $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$ dvě přímky a je-li p osa úhlu $\sphericalangle BAC$, pak všechny body osy p mají od obou přímek $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$ stejné vzdálenosti.*

DŮKAZ. Zvolme na ose p bod $D \neq A$ (viz obr. 27) a veďme jím kolmice $\overline{DC'}$ a $\overline{DB'}$ na přímky $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$. Podle definice osy a podle VĚTY 12,13 je $\sphericalangle B'AD \equiv \sphericalangle C'AD$. Podle VĚTY 12,24 o shodnosti trojúhelníků je $\triangle AB'D \equiv \triangle AC'D$, takže vzdálenosti bodu D od přímek $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$ jsou stejné.



Obr. 28.

OZNAČENÍ. Vzdálenost dvou bodů A a B značíme stejně jako úsečku, tedy AB. Podobně vzdálenost bodu A od přímky $a = \overline{BC}$ značíme aA nebo Aa nebo $A\ \overline{BC}$ a od roviny $\alpha = \overline{BCD}$ symbolem $A\alpha$, $A\ \overline{BCD}$. Podobně velikost úhlu značíme stejně jako úhel nebo také někdy malými řeckými písmeny.

DEFINICE. *Lomenou čarou spojující body* A, B nazýváme jakoukoli množinu n úseček ($n > 1$), $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ takových, že $A = A_1$, $B_1 = A_2$, $B_2 = A_3$, $\ldots$, $B_{n-1} = A_n$, $B_n = B$, při čemž alespoň jeden z bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ leží mimo úsečku AB.

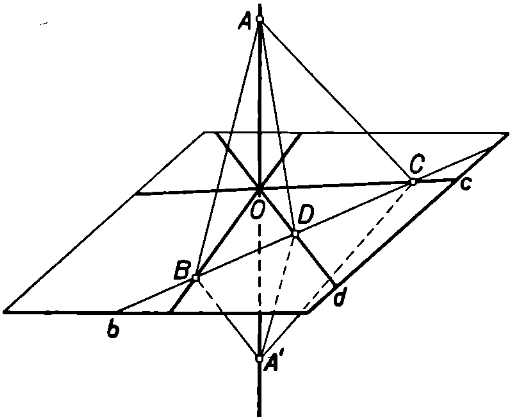
VĚTA 12,32. *Úsečka AB je kratší než jakákoli lomená čára spojující body A a B.*

DŮKAZ. Pro lomenou čáru se dvěma úsečkami bylo tvrzení dokázáno VĚTOU 12,26. Pro lomenou čáru s více úsečkami (jejich počet označme n) dokážeme větu takto: Vezměme v úvahu poslední úsečku A_nB_n (viz obr. 28). Podle předešlého je $AB < AA_n + A_nB_n$. Zbytek lomené čáry mezi A a $A_n = B_{n-1}$ obsahuje již jen $n - 1$ úseček a pro případ $n - 1$ úseček můžeme větu považovat za správnou, neboť podobně jako jsme přešli od případu s n úsečkami k případu s $n - 1$ úsečkami, mohli bychom přejít od $n - 1$ k $n - 2$, od $n - 2$ k $n - 3$, a tak dále až k přechodu od $n = 4$ k $n = 3$ a posléze od $n = 3$ k $n = 2$, pro kterýžto případ je již věta dokázána. Můžeme tedy psát $AA_n < A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_{n-1}B_{n-1}$, takže je $AB < A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_{n-1}B_{n-1} + A_nB_n$.

Nyní se budeme zabývat důsledky axiomů shodnosti pro geometrii prostoru.

VĚTA 12,33. *Nechť přímka* $\overline{OA}$ *je kolmá ke dvěma různým přímkám* $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. *Přímka* $\overline{OA}$ *je kolmá na přímku* $\overline{OD}$, *při čemž* $\overline{OB} \mp \overline{OD} \mp \overline{OC}$ *tehdy a jen tehdy, když přímka* $\overline{OD}$ *leží v rovině* $\overline{OBC}$.

DŮKAZ. Nechť předně přímka $\overline{OD}$ leží v rovině $\overline{OBC}$ (viz obr. 29). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že body B, C, D jsou kolineární, při čemž je $\mu(BDC)$. Budiž A' bod polopřímky (OA)*, při čemž $OA \equiv OA'$. Potom $\triangle OBA \equiv \triangle OBA'$ a $\triangle OCA \equiv \triangle OCA'$, takže je $AB \equiv A'B$, $AC \equiv A'C$. Protože také $BC \equiv BC$, je $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$ čili $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle A'BD \Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle A'BD$, $AD \equiv A'D$. Odtud je vidět, že $\triangle OAD \equiv \triangle OA'D$, takže $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle A'OD$ čili přímky $\overline{OA}$ a $\overline{OD}$ jsou kolmé.



Obr. 29.

Nyní naopak předpokládejme, že přímky $\overline{OA}$ a $\overline{OD}$ jsou kolmé. Dokážeme, že $\overline{OD}$ leží v rovině $\overline{OBC}$. Roviny $\overline{AOD}$ a $\overline{OBC}$ mají společný bod O, mají tedy společnou celou přímku. Tato přímka i přímka $\overline{OD}$ leží v rovině $\overline{AOD}$, obě procházejí bodem O a obě stojí kolmo na $\overline{OA}$ ($\overline{OD}$ podle předpokladu, druhá podle první části našeho důkazu), takže podle VĚTY 12,17 obě splývají.

DEFINICE. *Přímka je kolmá na rovinu*, jestliže ji protíná a stojí kolmo na všechny přímky roviny, jež procházejí jejím průsečíkem s rovinou. V tomto případě také říkáme, že *rovina je kolmá na přímku.*

Protože dvě kolmice jsou vždy různé, nemůže přímka ležet v rovině, na kterou je kolmá.

VĚTA 12,34. *Přímka, jež má s rovinou* α *společný bod* A, *je kolmá na tuto rovinu, jestliže je kolmá alespoň na dvě různé přímky roviny* α, *které procházejí bodem* A.

DŮKAZ plyne z VĚTY 12,33.

VĚTA 12,35. *Bodem na přímce prochází právě jedna rovina kolmá na tuto přímku.*

DůKAZ. Přímkou veďme dvě různé roviny a v každé veďme daným bodem na přímce kolmici k této přímce. Podle VĚTY 12,33 a definice kolmosti přímky s rovinou je rovina určená oběma kolmicemi kolmá na danou přímku. Že tato rovina je jediná, která má vlastnost uvedenou v naší větě, lze za pomoci VĚTY 12,17 snadno dokázat sporem.

VĚTA 12,36. *Každým bodem roviny lze k ní vést právě jednu kolmici.*

DůKAZ. Bodem v dané rovině vedeme v ní dvě různé přímky a ke každé vedeme daným bodem rovinu kolmou. Obě roviny mají společný bod, tedy i celou přímku. Ta je podle VĚTY 12,33 kolmá na danou rovinu; že tato kolmice je určena jednoznačně, dokáže se pomocí VĚTY 12,17 snadno sporem.

VĚTA 12,37. *Budiž dána úsečka. Bod prostoru má od koncových bodů úsečky stejné vzdálenosti tehdy a jen tehdy, leží-li v rovině, jež prochází středem úsečky a je kolmá na přímku úsečky.*

DůKAZ. Vedeme-li přímkou úsečky nějakou rovinu, pak bod této roviny má podle VĚTY 12,22 od koncových bodů úsečky stejné vzdálenosti tehdy a jen tehdy, leží-li na ose úsečky. Všechny osy úsečky leží podle VĚTY 12,33 v rovině kolmé na přímku úsečky a tato rovina prochází zřejmě středem uvažované úsečky.

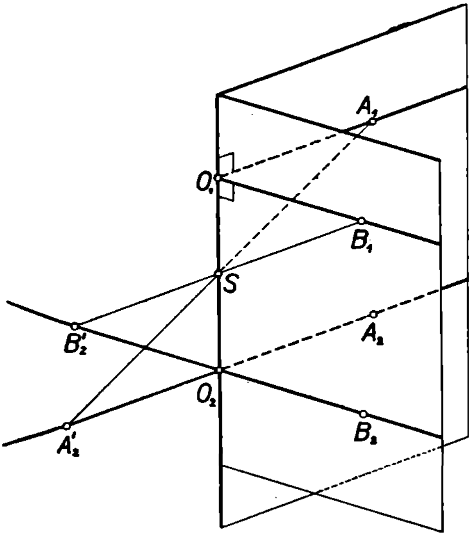
DEFINICE. Dvě poloroviny se společnou hranicí, které se nedoplňují na rovinu, nazýváme *stěnovým úhlem*. Obě poloroviny jsou *stěnami* stěnového úhlu a společná hranice je jeho *hranou*.

Rovina, která neobsahuje hranu stěnového úhlu, má s tímto stěnovým úhlem společné dvě polopřímky. O úhlu (vlastním) určeném těmito polopřímkami budeme říkat, že *vznikl průsekem stěnového úhlu s rovinou*.

VĚTA 12,38. *Úhly vzniklé průsekem stěnového úhlu s jakýmikoli dvěma rovinami kolmými na jeho hranu jsou shodné.*

DůKAZ. Buďtež O_1 a O_2 dva body hrany stěnového úhlu a $\sphericalangle A_1O_1B_1$ a $\sphericalangle A_2O_2B_2$ oba úhly vzniklé průsekem stěnového úhlu s rovinami $\overline{A_1O_1B_1}$ a $\overline{A_2O_2B_2}$, jež jsou kolmé na hranu $\overline{O_1O_2}$. Budiž S (viz obr. 30) střed úsečky O_1O_2 a budiž A_2' bod na polopřímce $(SA_1)^*$ a B_2' bod na polopřímce $(SB_1)^*$, při čemž $SA_1 \equiv SA_2'$, $SB_1 \equiv SB_2'$. Ze shodnosti $\triangle SO_1A_1 \equiv \triangle SO_2A_2'$ a $\triangle SO_1B_1 \equiv \triangle SO_2B_2'$ plyne, že úhly $\sphericalangle A_2'O_2S$ a

$\sphericalangle B_2'O_2S$ jsou pravé, protože $\sphericalangle A_1O_1S$ a $\sphericalangle B_1O_1S$ jsou pravé, takže body A_2' a B_2' leží v rovině $\overline{A_2O_2B_2}$. Přitom A_2' leží v rovině $\overline{O_1O_2A_1}$ a B_2' leží v rovině $\overline{O_1O_2B_1}$, takže $\sphericalangle A_2O_2B_2 \equiv \sphericalangle A_2'O_2B_2'$, ježto jsou vrcholové. Protože úhly $\sphericalangle A_1SB_1$ a $\sphericalangle A_2'SB_2'$ jsou také vrcholové, platí $\triangle A_1SB_1 \equiv \triangle A_2'SB_2'$, takže $A_1B_1 \equiv A_2'B_2'$. Odtud plyne shodnost $\triangle A_1O_1B_1 \equiv \triangle A_2'O_2B_2'$ a odtud vztah $\sphericalangle A_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle A_2'O_2B_2'$, takže nakonec také platí $\sphericalangle A_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle A_2O_2B_2$.



Obr. 30.

DEFINICE. *Velikostí stěnového úhlu* budeme rozumět velikost úhlu, vzniklého průsekem stěnového úhlu s rovinou kolmou na jeho hranu. Stěnový úhel nazveme *pravý*, jestliže bude mít velikost pravého úhlu.

DEFINICE. O dvou rovinách, které tvoří pravé stěnové úhly, budeme říkat, že *stojí na sobě kolmo* nebo že *jsou k sobě kolmé*.

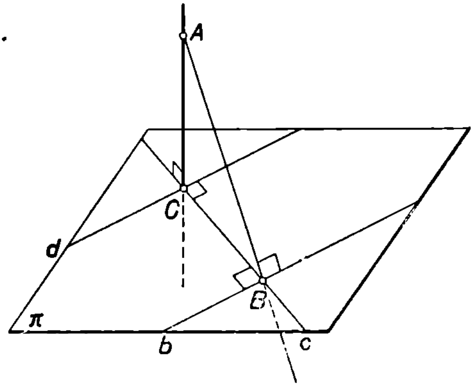
VĚTA 12,39. *Dvě roviny, které mají společný bod, stojí k sobě kolmo tehdy a jen tehdy, když kolmice vedená společným bodem na jednu rovinu leží v rovině druhé.*

DŮKAZ. Budiž předně přímka p kolmá na rovinu π a budiž P její průsečík s π. Jestliže ϱ je rovina procházející přímkou p a s průsečnice ϱ a π, pak rovina σ vedená bodem P kolmo na s obsahuje přímku p a průsečnice rovin σ a π musí být kolmá na p podle definice kolmosti přímky p s rovinou π. Tedy stěnový úhel rovin π a ϱ je pravý.

Jsou-li naopak roviny π a ϱ k sobě kolmé a bod P na jejich průsečnici s a δ rovina vedená bodem P kolmo k s, pak průsečnice ϱ a δ stojí kolmo na π, neboť je kolmá na s i na průsečnici π a δ. Obsahuje tedy ϱ kolmici vedenou bodem P na rovinu π.

VĚTA 12,40. *Každým bodem prostoru lze k dané rovině vést právě jednu kolmici.*

DŮKAZ. Je-li daný bod na rovině, je věta správná podle VĚTY 12,36. Budiž tedy bod A mimo rovinu π (viz obr. 31). Nechť b je libovolná přímka roviny π, B takový bod na b, že $AB \perp b$, a budiž přímka $c \bigtriangledown B$, π kolmá na b. Je-li $\overline{AB} \perp_{\bullet} c$, jsme s důkazem hotovi. Není-li tomu tak, veďme v rovině $\overline{Ac}$ bodem A kolmici k přímce c, její průsečík s c označme C. Roviny π a $\overline{Ac}$ jsou kolmé, ježto π obsahuje kolmici b na $\overline{Ac}$, a proto přímka $d \bigtriangledown C$, vedená kolmo na $\overline{Ac}$, leží v π. Je tedy přímka $\overline{AC}$ kolmá ke dvěma přímkám roviny π a tedy kolmá k π. Nyní snadno dokážeme sporem, že bodem P lze k rovině π vést nejvýše jednu kolmici. Kdyby totiž existovaly dvě, pak v rovině ϱ proložené oběma kolmicemi by existovaly dvě kolmice vedené bodem P k průsečnici rovin π a ϱ, což by byl vzhledem k VĚTĚ 12,21 spor.



Obr. 3

VĚTA 12,41. *Vzdálenost bodu od roviny je dána vzdáleností tohoto bodu od průsečíku roviny s kolmicí, vedenou k ní daným bodem.*

DŮKAZ. Podle definice vzdálenosti stačí dokázat, že vzdálenost daného bodu od každého bodu roviny, různého od průsečíku roviny a kolmice vedené na ni daným bodem, je větší než vzdálenost daného bodu od tohoto průsečíku. To je však zřejmé podle toho, co platí o vzdálenosti bodu od přímky.

VĚTA 12,42. *Každým bodem prostoru lze k dané rovině vést rovinu kolmou.*

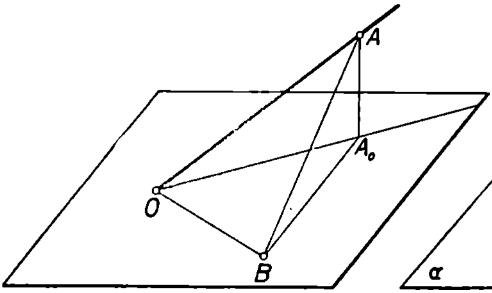
DŮKAZ. Podle VĚTY 12,40 lze každým bodem vést k rovině kolmici a podle VĚTY 12,39 každá rovina incidentní s touto kolmicí je kolmá na danou rovinu.

VĚTA 12,43. *Každými dvěma různými kolmicemi k rovině lze proložit právě jednu rovinu.*

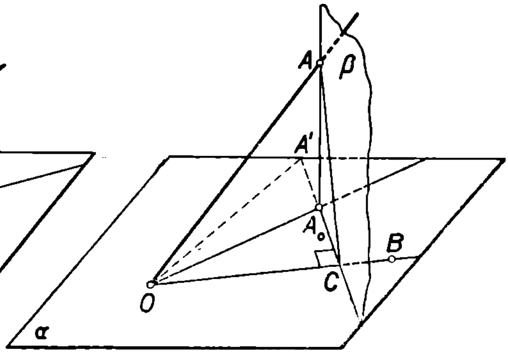
DŮKAZ. Každá z obou kolmic určuje s průsečíkem druhé kolmice s danou rovinou rovinu, jež je kolmá na danou rovinu, takže podle VĚTY 12,39 obsahuje i druhou kolmici.

VĚTA 12,44. *Každou přímkou prostoru lze proložit rovinu kolmou na danou rovinu.*

DŮKAZ. Jsou-li daná přímka a rovina navzájem k sobě kolmé, je to patrné z VĚTY 12,39.



Obr. 32.



Obr. 33.

Není-li daná přímka kolmá na danou rovinu, zvolme na přímce dva body a veďme jimi kolmici k rovině. Podle VĚTY 12,43 leží obě kolmice v rovině, která je kolmá na rovinu danou.

VĚTA 12,45. *Nechť polopřímka (OA) má počátek O v rovině, v níž však sama neleží a k níž není kolmá. Budiž A_0 průsečík roviny s kolmicí vedené k ní bodem A. Je-li B bod roviny, jenž neleží na polopřímce (OA_0), pak je vždy $\sphericalangle AOA_0 < \sphericalangle AOB$.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $OA_0 \equiv OB$ (viz obr. 32). Potom je $AB > AA_0$, protože $\sphericalangle AA_0B$ je pravý. V trojúhelnících $\triangle AOA_0$ a $\triangle AOB$ je $AO \equiv AO$, $A_0O \equiv OB$, $AA_0 < AB$, takže podle VĚTY 12,27 je $\sphericalangle AOA_0 < \sphericalangle AOB$.

VĚTA 12,46. *Nechť polopřímka (OA) má počátek v rovině α, v níž však sama neleží a k níž není kolmá. Budiž A_0 průsečík roviny α s kolmicí vedenou k ní bodem A. Neleží-li bod B roviny α na (OA_0) a přitom $\sphericalangle BOA_0$ je ostrý, pak $\sphericalangle AOB > \sphericalangle A_0OB$.*

DŮKAZ. Bodem A veďme rovinu β (viz obr. 33) kolmou na přímku

$\overline{OB}$. Rovina β stojí kolmo na rovinu α a obsahuje přímku $\overline{AA_0}$, bodem A_0 prochází kolmo na $\overline{OB}$ průsečnice rovin α a β, která protíná přímku $\overline{OB}$ v bodě C. Bod C leží dokonce na polopřímce (OB), protože je $\sphericalangle\ BOA_0 < R$. Trojúhelník $\triangle\ AA_0C$ je pravoúhlý při A_0, proto $AC >$ $> A_0C$. Určíme-li v polorovině $(\overline{OC}, A_0)$ bod A' tak, že $\triangle\ OCA' \equiv$ $\equiv \triangle\ OCA$, pak bod A' leží na polopřímce (A_0C)*, takže $\sphericalangle\ COA_0 <$ $< \sphericalangle\ COA' \equiv \sphericalangle\ COA$.

13. Spojitost. V tomto paragrafu se budeme zabývat axiomem Cantorovým a axiomem Archimedovým, jejichž důsledky se týkají vlastností, jež obvykle shrnujeme pod název *spojitost*. Přitom Cantorův axiom patří svou formulací mezi axiomy rozmístění, Archimedův mezi axiomy shodnosti.

$\mathfrak{R}$, 5. (CANTORŮV AXIOM.) *Je-li dána taková (nekonečná) posloupnost úseček A_1B_1, A_2B_2, ... na přímce, že*

1. *každá úsečka posloupnosti leží uvnitř úsečky předcházející, t. j. pro $i < k$ je $\mu(A_iA_kB_i)$, $\mu(A_iB_kB_i)$,*

2. *neexistuje úsečka, která by ležela uvnitř všech úseček posloupnosti A_1B_1, A_2B_2, ...*

pak existuje na přímce právě jeden bod, který leží uvnitř všech úseček posloupnosti A_1B_1, A_2B_2, ...

$\mathfrak{S}$, 7. (ARCHIMEDŮV AXIOM.) *Nechť AB a CD jsou libovolné úsečky, při čemž $AB > CD$. Pak na přímce $\overline{AB}$ existuje konečný počet bodů A_1, A_2, ..., A_n tak, že je $\mu(AA_1A_2)$, $\mu(A_1A_2A_3)$, ... a $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv$ $\equiv A_{n-1}A_n \equiv CD$ a při tom $\mu(ABA_n)$ (čili vždy existuje přirozené číslo n tak, že je $AB < n\,.\,CD$).*

V tomto paragrafu si nejdříve ukážeme (VĚTA 13,2), že současná platnost axiomu Cantorova a Archimedova je ekvivalentní s jistou větou o Dedekindově řezu, který jsme definovali v odstavci **6**. Jde totiž o to, že podle VĚTY 11,8 každý bod přímky vytvořuje na množině všech bodů přímky Dedekindův řez, zatím co věta, že ke každému Dedekindovu řezu existuje vytvořující bod, nemusí vždy platit (viz odstavec **6**). Jsou-li však splněny oba naše axiomy, pak tato věta *vždy platí* a obráceně, oba axiomy se dají z této věty dokázat.

V dalším pak ukážeme, že tvrzení analogická axiomům Cantora a Archimeda platí také *pro úhly*. Nejdůležitějšími důsledky obou axiomů jsou tvrzení, že úsečku (a úhel) *lze postupným půlením libovolně zmenšit* (VĚTY 13,1 a 13,5), a věta, že *součet vnitřních úhlů trojúhelníka není větší než dva pravé* (VĚTA 13,6).

VĚTA 13,1. *Jsou-li AB a CD dvě úsečky, $AB > CD$, pak existuje vždy přirozené číslo n tak, že* $\frac{AB}{2^n} < CD$.

DŮKAZ. Kdyby pro každé n bylo $\frac{AB}{2^n} > CD$, pak by neexistovalo přirozené číslo k tak, že by platilo $k \cdot CD > AB$, což by bylo ve sporu s Archimedovým axiomem.

VĚTA 13,2. *Tvrzení, že ke každému Dedekindovu řezu množiny bodů na přímce (s přirozeným uspořádáním) existuje bod, který tento řez vytvořuje, je ekvivalentní se současnou platností axiomu Cantorova a Archimedova.*

DŮKAZ. I. *Předpokládejme nejdříve současnou platnost Cantorova i Archimedova axiomu a dokažme, že pak existuje vytvořující bod libovolného Dedekindova řezu.* Nechť tedy $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ je řez na množině bodů přímky a budiž A_1 bod z $\mathbf{S}_1$ a B_1 bod z $\mathbf{S}_2$. Půlící bod X úsečky A_1B_1 je buď vytvořující nebo není, takže X leží v jedné z obou tříd řezu. V tomto druhém případě označme A_2B_2 tu z obou polovičních úseček A_1X, XB_1, která má koncové body v různých třídách, při čemž A_2 je v $\mathbf{S}_1$. Nyní můžeme opakovat právě provedenou úvahu s půlícím bodem úsečky A_2B_2. Dostaneme buď vytvořující bod nebo úsečku A_3B_3 a tak buď jednou přijdeme k vytvořujícímu bodu nebo dostaneme nekonečnou posloupnost úseček $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ při čemž všechny body A_i leží v $\mathbf{S}_1$. Tato posloupnost má zřejmě vlastnost 1 Cantorova axiomu a podle VĚTY 13,1 i vlastnost 2. Existuje tedy podle $\mathfrak{R}$, 5 právě jeden bod D společný všem úsečkám posloupnosti.

Ukážeme nyní, že bod D je vytvořující. Podle konstrukce všechny body A_i leží jednak v $\mathbf{S}_1$, jednak po stejné straně bodu D. Neexistuje tedy bod X z $\mathbf{S}_1$ tak, že by bylo $\mu(A_1DX)$, protože podle vlastnosti 2 posloupnosti $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ existuje úsečka A_kB_k, která neobsahuje bod X, takže nemůže být $\mu(A_kXB_k)$. Protože je $\mu(A_1A_kD)$ a $\mu(A_1DX)$, je $\mu(A_kDX)$ (podle VĚTY 11,4). Protože je $\mu(A_kDX)$ a $\mu(A_kDB_k)$, je buď $\mu(DXB_k)$, buď $\mu(DB_kX)$ (podle VĚTY 11,5) čili buď $\mu(A_kXB_k)$, buď $\mu(A_kB_kX)$. Musí tedy být $\mu(A_kB_kX)$, takže X patří do $\mathbf{S}_2$, což je spor. Podobně dokážeme, že neexistuje bod Y z $\mathbf{S}_2$, pro který by bylo $\mu(B_1DY)$.

II. *Předpokládejme nyní, že ke každému Dedekindovu řezu existuje vytvořující bod, a dokažme odtud platnost Cantorova i Archimedova axiomu.*

a) *Důkaz Cantorova axiomu*: Mějme posloupnost úseček A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$, která má vlastnost 1 i 2 Cantorova axiomu. Sestrojme nyní Dedekindův řez $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ na množině bodů přímky $\overline{A_1B_1}$ takto: přímku $\overline{A_1B_1}$ uspořádáme tak, že $A_1 \succ B_1$. Body $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ lze označit vždy tak, že je jednak $A_1 \underline{\underline{\prec}} A_2 \underline{\underline{\prec}} A_3 \underline{\underline{\prec}} \ldots$, jednak $B_1 \underline{\underline{\succ}} B_2 \underline{\underline{\succ}} B_3 \underline{\underline{\succ}} \ldots$ Do třídy $\boldsymbol{S}_1$ dáme s každým bodem A_i všechny body X, pro něž je $X \prec A_i$ (pro $i = 1, 2, \ldots$). Do třídy $\boldsymbol{S}_2$ dáme ostatní body přímky $\overline{A_1B_1}$. Je zřejmé, že

1. pro každý bod X přímky $\overline{A_1B_1}$ buď existuje bod A tak, že je $X \prec A_i$, nebo neexistuje. Jsou tedy splněny podmínky a), b) definice Dedekindova řezu (viz odst. **6**, str. 34).

2. Budiž X bod z $\boldsymbol{S}_1$ a Y bod z $\boldsymbol{S}_2$. K bodu X existuje bod A_k tak, že je $X \prec A_k$. Protože pro všechna i jest $A_i \prec Y$, je také $A_k \prec Y$, takže je $X \prec Y$ a je splněna podmínka c) definice řezu (viz odst. **6**, str. 34).

Skupiny $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ tvoří tedy Dedekindův řez a podle předpokladu existuje právě jeden bod D, který ho vytvořuje. Tedy pro všechna i platí $A_i \prec D$, $D \prec B_i$, takže bod D leží uvnitř všech úseček posloupnosti $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$

2. *Důkaz Archimedova axiomu.* Předpokládejme nyní, že jsou dány úsečky AB a CD, při čemž na př. $AB > CD$, a předpokládejme, že na přímce $\overline{AB}$ jsou dány body $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tak, že $A \prec B$, $A \prec A_1 \prec$ $\prec A_2 \prec \ldots$, $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv CD$. Z předpokladu, že by pro všechna i bylo $A_i \prec B$, odvodíme spor.

Nechť tedy pro všechna i je $A_i \prec B$. Rozdělme body přímky $\overline{AB}$ do dvou tříd $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$. Do $\boldsymbol{S}_1$ dejme všechny body A_i a všechny body X, pro něž existuje A_k tak, že $X \prec A_k$. Do $\boldsymbol{S}_2$ dejme ostatní body přímky $\overline{AB}$ (do $\boldsymbol{S}_2$ patří na př. B). Je zřejmé, že $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ je Dedekindův řez. Existuje tedy bod D, který ho vytvořuje, takže všechny body z $\boldsymbol{S}_1$ leží před, všechny body z $\boldsymbol{S}_2$ za bodem D. Bod D nesplývá s žádným bodem A_i. Označme E ten bod, pro který platí $E \prec D$, $ED \equiv AA_1$. Protože E patří do $\boldsymbol{S}_1$, existuje k tak, že je $E \prec A_k \prec D$. Pak je $A_kD <$ $< ED \equiv AA_1$, takže pro bod F takový, že $A_k \prec F$, $A_kF \equiv AA_1$ platí $D \prec F$. Je však $F = A_{k+1}$ a to je spor.

Analogicky k Dedekindovu řezu množiny bodů přímky nebo úsečky definujeme *Dedekindův řez množiny polopřímek vlastního úhlu i vytvořující polopřímku* tohoto řezu, při čemž množinu polopřímek vlastního úhlu předpokládáme uspořádánu vztahem μ pro polopřímky. Zde musíme tedy vzít v úvahu definici řezu s podmínkami a), b), c') — viz odst. 6, str. 34 a 35.

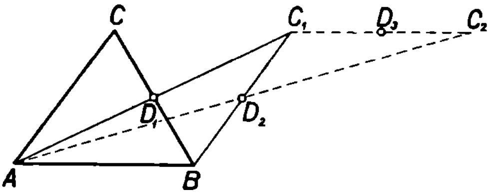
Dokážeme, že pro vlastní úhly platí tvrzení, že ke každému Dedekindovu řezu existuje vytvořující polopřímka a že také pro ně platí Archimedův axiom.

VĚTA 13,3. *Je-li dán Dedekindův řez množiny polopřímek vlastního úhlu, pak existuje polopřímka úhlu, která tento řez vytvořuje.*

DŮKAZ. Uvažujme Dedekindův řez množiny polopřímek vlastního úhlu $\sphericalangle POQ$. Každé polopřímce úhlu $\sphericalangle POQ$ přiřaďme bod na úsečce PQ, totiž její průsečík s PQ. Je vidět, že Dedekindův řez množiny polopřímek úhlu $\sphericalangle POQ$ určuje Dedekindův řez množiny odpovídajících bodů úsečky PQ. Z existence vytvořujícího bodu D na úsečce plyne existence vytvořující polopřímky, jíž je zřejmě polopřímka (OD).

VĚTA 13,4. *Cantorův i Archimedův axiom zůstanou v platnosti, když v nich nahradíme úsečku, resp. bod, resp. přímku vlastním úhlem, resp. polopřímkou, resp. množinou všech polopřímek s týmž počátkem.*

DŮKAZ. Podle předcházející věty existuje ke každému Dedekindovu řezu množiny polopřímek vlastního úhlu polopřímka vytvořující. Zbytek důkazu je analogický II. části důkazu VĚTY 13,2.



Obr. 34.

VĚTA 13,5. *Jsou-li dány dva duté úhly $\alpha > \beta$, pak existuje vždy přirozené číslo n tak, že $\frac{\alpha}{2^n} < \beta$.*

DŮKAZ. Tvrzení plyne z Archimedova axiomu pro úhly analogicky jako VĚTA 13,1 z axiomu $\mathfrak{S}$, 7.

VĚTA 13,6. *V trojúhelníku součet všech tří vnitřních úhlů není větší než dva pravé.*

DŮKAZ. Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$ a označme úhly při vrcholech A, B, C, postupně α, β, γ a nechť $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$. Budiž D_1 (viz obr. 34) půlicí bod strany BC a C_1 bod na polopřímce (D_1A) takový, že $AD_1 \equiv D_1C_1$. Protože $\triangle AD_1C \equiv \triangle C_1D_1B$, je součet úhlů trojúhelníka $\triangle ABC_1$ týž, jako v $\triangle ABC$. Při tom je $\sphericalangle BAC_1 \leqq \frac{1}{2}\alpha$, neboť podle předpokladu je $CA \leqq AB$, takže v trojúhelníku $\triangle ABC_1$ je $BC_1 \leqq AB$, čili $\sphericalangle BAC_1 < \sphericalangle AC_1B \equiv \sphericalangle CAC_1$.

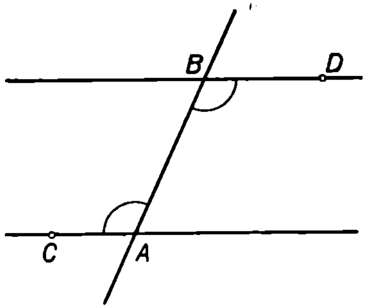
Nyní můžeme pomocí půlícího bodu D_2 strany BC_1 sestrojit trojúhelník $\triangle\ AC_1C_2$, potom $\triangle\ AC_2C_3$, ... atd. Při tom bod D_{i+1} volíme vždy na té straně, která leží proti nejmenšímu z úhlů v trojúhelníku $\triangle\ AC_{i-1}C_i$ a bod C_{i+1} spojíme s jedním z obou bodů C_{i-1} a C_i tak, aby jeho vzdálenost od C_{i+1} byla menší než od A. Potom pro každý z trojúhelníků $\triangle\ AC_{i-1}C_i$ můžeme opakovat podobnou úvahu jako pro úhel $\sphericalangle\ BAC_1$, takže pro úhly trojúhelníků při vrcholu A je $\sphericalangle\ C_{i-1}AC_i \leqq \frac{\alpha}{2^i}$. Vedle toho součet úhlů těchto trojúhelníků je stále týž jako u trojúhelníka $\triangle\ ABC$. Předpokládejme nyní, že trojúhelník $\triangle\ ABC$ má součet úhlů větší než $2R$, a budiž δ takový úhel, že $\alpha + \beta + \gamma = 2R + \delta$. Úhel δ je tedy vždy dutý. Podle Archimedova axiomu (VĚTA 13,5) existuje n tak, že je $\delta > \frac{\alpha}{2^n}$. Trojúhelník $\triangle\ AC_{n-1}C_n$ má součet $2R + \delta$, jeden jeho úhel je však menší než δ, je tedy součet zbývajících dvou větší než $2R$. To však není podle VĚTY 12,28 možné a máme spor.

KAPITOLA II

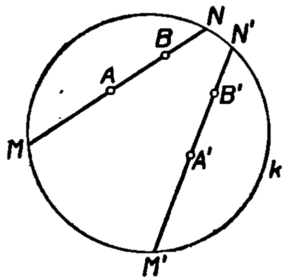
DVOJÍ GEOMETRIE ROVINY

14. Neprotínající se přímky v rovině.

Na předcházejících stránkách jsme se seznámili se základními geometrickými pojmy, při čemž jsme se dosud nedotkli otázky neprotínajících se přímek. Tím se budeme zabývat v tomto i příštím odstavci. Svoje úvahy omezíme v obou odstavcích pouze na geometrii roviny.



Obr. 35.



Obr. 36.

DEFINICE. Dvě přímky, které mají společný bod (které se protínají) nazýváme *různoběžnými* (různoběžkami), v opačném případě říkáme, že to jsou přímky *neprotínající se* nebo také *nerůznoběžné* (nerůznoběžky).

Při tom přímky nerůznoběžné leží buď v rovině nebo neleží. V prvém případě říkáme někdy, že přímky jsou rovnoběžné, v druhém mimoběžné. Názvu „rovnoběžné" budeme však pokud možno málo užívat, protože se mu dává leckdy ještě jiný smysl, jak uvidíme později.

VĚTA 14,1. *V rovině existují přímky, které se neprotínají.*

DŮKAZ. Dvě přímky v rovině, které mají společnou kolmici se neprotínají, protože jinak by bodem bylo možno vést k přímce dvě kolmice, což odporuje VĚTĚ 12,21.

VĚTA 14,2. *Body C a D buďtež na různých stranách od přímky $\overline{AB}$ a přitom nechť $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$. Pak se přímky $\overline{CA}$ a $\overline{BD}$ neprotínají.*

DŮKAZ. Kdyby se přímky $\overline{BD}$ a $\overline{CA}$ (viz obr. 35) protly v bodě E, pak v trojúhelníku $\triangle ABE$ by součet úhlů při vrcholech A a B byl $2R$, což není podle VĚTY 12,28 možné.

OZNAČENÍ. Fakt, že na přímkách p, q, r lze určit body A, B, C, D tak, že $p = \overline{AC}$, $q = \overline{BD}$, $r = \overline{AB}$, při čemž body C a D jsou na různých stranách od přímky r a při tom $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$ (resp. $\sphericalangle CAB \not\equiv \sphericalangle DBA$), budeme také krátce vyjadřovat tak, že *součet vnitřních úhlů přímek p a q s příčkou r po jedné její straně je roven dvěma pravým* (resp. *různý od dvou pravých*).[16])

VĚTA 14,3. *V rovině lze každým bodem mimo přímku vést alespoň jednu s ní se neprotínající přímku.*

DŮKAZ plyne z toho, že bodem můžeme k dané přímce vždy vést kolmici, a z VĚTY 14,1.

Nyní vzniká otázka, lze-li bodem mimo přímku (v rovině, kterou bod a přímka určují) vést k této přímce nerůznoběžku *právě jednu* nebo *více*. O tom však nelze rozhodnout na základě dosud uvedených axiomů, neboť připouštějí jednak modely, ve kterých je zmíněná nerůznoběžka právě jedna (takové jsou na př. MODELY 1 a 2, str. 43), jednak modely, ve kterých takových nerůznoběžek lze vést více (nekonečně mnoho). Uveďme příklad takového modelu.

MODEL 5. Vezměme obyčejnou eukleidovskou rovinu a v ní nějakou kružnici k (viz obr. 36). „Bodem" našeho modelu rozumějme nyní každý bod uvnitř kružnice k, „přímkou" každou tětivu této kružnice (ovšem bez koncových bodů) a „rovinou" celý vnitřek kružnice.[16a]) Ponecháme-li vztahům *incidence* a *mezi* smysl, jaký mají v obyčejné rovině, pak jsou zřejmě splněny důsledky axiomů $\mathfrak{I}$ pro geometrii roviny a axiomy $\mathfrak{R}$, 1—5.

Shodnost úseček zavedeme tak, že „úsečky" $\overline{AB}$ a $\overline{A'B'}$ budou shodné, jestliže čtveřice bodů M, A, B, N a M', A', B', N' (kde M, N resp. M', N' jsou průsečíky přímky $\overline{AB}$ resp. $\overline{A'B'}$ s kružnicí k a kde pořadí bodů v každé čtveřici odpovídá přirozenému uspořádání bodů na přímce) budou projektivní (viz obr. 36). Z projektivních vlastností čtveřic bodů plyne, že jsou splněny axiomy $\mathfrak{S}$, 1—3. (O těchto projektivních vlastnostech viz na př. *Jan Vojtěch*: *Geometrie projektivní*, JČMF, Praha 1932, str. 43—47 a str. 63.)

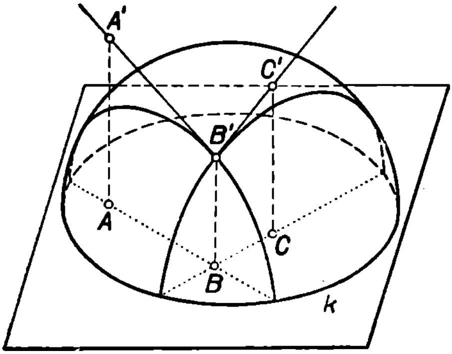
---

[16]) Výrok vytištěný kursivou vzat doslova nemá smysl, protože jsme nezavedli pojem úhlu dvou přímek, nýbrž jen úhel polopřímek nebo polorovin. Uvedený výrok má tedy smysl pouze jako celek, a ačkoliv bychom se bez něho obešli, uvádíme ho proto, že se jím zjednoduší naše vyjadřování. Zmíněný výrok se také objevuje v klasické formulaci V. Eukleidova postulátu (viz str. 16).

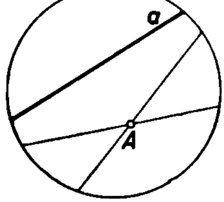
[16a]) *Vnitřek kružnice* je množina všech bodů, které leží *uvnitř kružnice*, t. j. takových bodů, které mají od středu kružnice vzdálenost *menší* než je poloměr kružnice. Body, které leží *na kružnici*, neleží již tedy uvnitř kružnice.

Shodnost úhlů zavedeme takto: mysleme si nejdříve polokouli, která má kružnici k za kružnici hlavní (na př. jako rovník) — viz obr. 37. Je-li nyní v naší „rovině" dán „úhel" $\sphericalangle ABC$, pak vedeme přímkami $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$ roviny kolmé na rovinu kružnice k, které protnou povrch polokoule ve dvou polokružnicích, které mají společný bod B'. Úhlu $\sphericalangle ABC$ přiřadíme nyní úhel tečen $\sphericalangle A'B'C'$ a dva „úhly" $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle DEF$ budeme považovat za „shodné", budou-li jim přiřazené úhly $\sphericalangle A'B'C'$ a $\sphericalangle D'E'F'$ shodné v obvyklém smyslu. Pro takto definovanou „shodnost úhlů" se dá dokázat, že jsou splněny axiomy $\mathfrak{S}$, 4—7.

Snadno se můžeme přesvědčit, že v tomto modelu lze „bodem" mimo danou „přímku" vést k ní více „nerůznoběžek" (viz obr. 38).



Obr. 37.



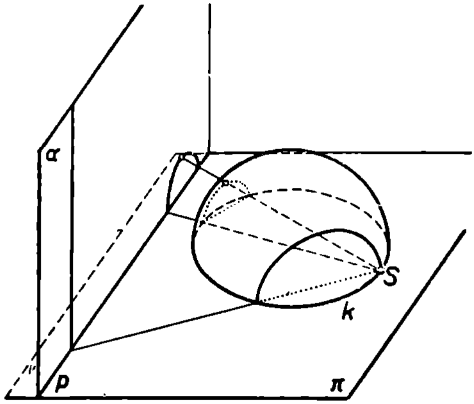
Obr. 38.

Uvedený Model 5 bychom mohli zobecnit i pro úvahy prostorové, totiž tak, že bychom místo kružnice vzali kouli a její vnitřek vzali za „prostor" a analogicky podle Modelu 5 bychom definovali pojmy „bod", „přímka", atd.

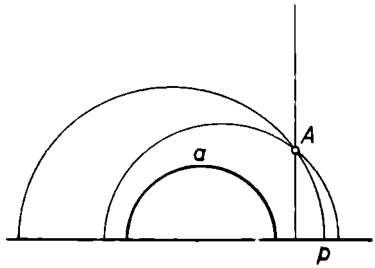
Model 5 se často nazývá modelem Beltrami-Kleinovým (někdy se také spojuje se jménem Cayleyho). Jak později uvidíme, vystihuje tento model některé význačné vlastnosti Lobačevského geometrie. Podobných modelů existuje několik. Na tomto místě se seznámíme ještě se dvěma druhy modelů Poincarého. Abychom snáze pochopili jejich podstatu, seznámíme se ještě s modelem polokulovým.

Model 6. Polokulový model odvodíme z modelu Beltrami-Kleinova takto: plocha kulová je hlavní kružnicí k rozdělena na dvě části. Jednu z nich bez bodů na hlavní kružnici k označme Φ a budeme ji pojímat jako „rovinu". Body z Φ budou „body" naší „roviny", polokružnice na Φ, jejichž roviny jsou kolmé k rovině hlavní kružnice k, budeme pojímat jako „přímky". Vztahy incidence, rozmístění a shodnosti přeneseme na naši rovinu kolmým promítáním modelu Beltrami-Kleinova na povrch polokoule (tak totiž, že mezi průměty budou definitoricky platit tytéž vztahy jako mezi originály).

Model 7. Oba modely Poincarého vzniknou *středovým promítnutím* polokulového modelu na určitou rovinu (všechno v Eukleidově geometrii). V jednom se promítá na rovinu α (viz obr. 39) kolmou k rovině π kružnice k, při čemž střed promítání S je vzdálenější koncový bod průměru kolmého na rovinu α. Při tomto promítnutí se celý povrch polokoule zobrazí na *otevřenou polorovinu*[18]) roviny α určené průsečnicí p rovin α a π. Každá „přímka“ modelu je tedy buď polopřímka kolmá na přímku p, na které má i počátek (viz obr. 40), buď polokružnice se středem

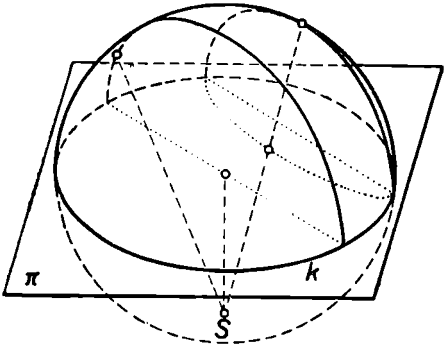


Obr. 39.

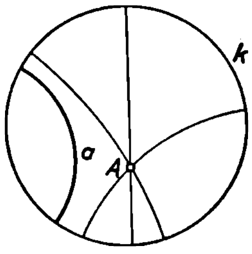


Obr. 40.

na přímce p. Vztahy *incidence, rozmístění* a *shodnosti* můžeme převést z polokulového modelu promítnutím. Snadno se přesvědčíme, že v právě uvedeném modelu lze „bodem“ A mimo „přímku“ a vést k a více než jednu „nerůznoběžku“ (viz obr. 40).



Obr. 41.

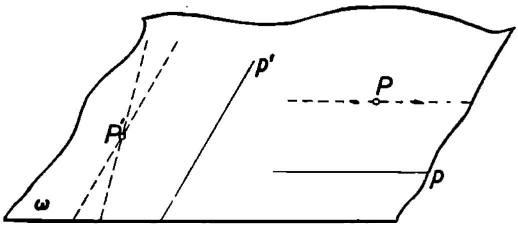


Obr. 42.

Model 8. V druhém modelu Poincarého se promítá polokulový model do

[18]) *Otevřená polorovina* vznikne z poloroviny dříve již definované vynecháním bodů na hranici. Podobně *otevřená polopřímka* vznikne z polopřímky vynecháním počátku.

roviny π kružnice k z bodu, který je pólem „doplňkové“ polokoule (obr. 41). Je vidět, že při tomto promítání se celá „rovina“ promítá do *vnitřku kružnice k*, při čemž body uvnitř kružnice k jsou „body“ našeho modelu a „přímky“ se zde promítají buď jako průměry, buď jako oblouky kružnic (obr. 42), orthogonální ke kružnici k. Také na tento model můžeme přenést promítnutím pojmy *incidence, rozmístění* a *shodnosti* a také zde je názorně vidět, že k „přímce“ a může existovat více „nerůznoběžek“ procházejících týmž „bodem“ A (obr. 42). Modely 7 a 8 mají podobně jako Model 5 také prostorovou analogii. Zde „prostorem“ bude otevřený poloprostor (t. j. poloprostor bez ohraničující jej roviny) resp. vnitřek koule, „přímky“ a „roviny“ budou příslušné části kružnic nebo povrchů koulí (jež mohou někdy přejít v přímky nebo roviny), jež jsou orthogonální k hranici poloprostoru resp. základní koule.



Obr. 43.

Definice. Jestliže bodem A lze k přímce a, která bodem A neprochází, vést *právě jednu* nerůznoběžku, budeme říkat, že pár elementů A, a *má vlastnost* I; lze-li nerůznoběžek vést *více*, budeme říkat, že má *vlastnost* II.

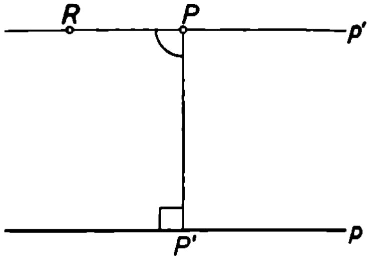
Věta 14,4. *V rovině má každý pár elementů P, p právě jednu z vlastností* I *a* II.

Důkaz. Z předcházející věty je zřejmé, že vlastnosti I a II vyčerpávají všechny možnosti: bodem P lze totiž vést přímku neprotínající p buď jednu nebo jich lze vést více.

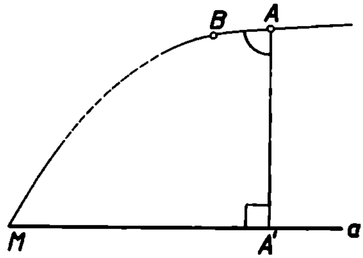
A priori je myslitelné, že některý pár A, a roviny má vlastnost I a současně jiný pár vlastnost II. Pokud bereme v úvahu jen axiomy incidence a rozmístění, může tomu tak skutečně být, jak ukazuje následující model.

Model 9. „Rovinou“ bude otevřená polorovina eukleidovské roviny, „bodem“ bude každý bod této poloroviny, „přímkou“ část přímky uvnitř poloroviny (tedy buď otevřená polopřímka nebo celá přímka, viz obr. 43 a pozn. [18]) na str. 91). Vztahy „incidentní“ a „mezi“ budeme chápat ve smyslu eukleidovské roviny, ve které je model konstruován. Nyní je patrné, že naše „rovina“ bude mít, pokud jde o incidenci a rozmístění, tytéž vlastnosti, jaké se dají pro rovinu odvodit z axiomů $\mathfrak{I}$ a $\mathfrak{R}$. Při tom „přímka“, jež vznikla z přímky rovnoběžné s hranicí poloroviny, bude mít s každým „bodem“ vlastnost I (přímka p' na obr. 43) a „přímka“, která vznikla z přímky různoběžné s hranicí, má s každým „bodem“ vlastnost II (přímka p'').

Okolnost, že některý pár v MODELU 9 má vlastnost I a jiný vlastnost II, je způsobena tím, že v tomto modelu *nelze zavést* vztah shodnosti tak, aby byl splněn Archimedův axiom. Jestliže však naproti tomu v geometrii předpokládáme, že platí Archimedův axiom, potom každá rovina je vůči vlastnostem I a II *homogenní*, t. j. všechny její páry mají buďto vlastnost I nebo všechny mají vlastnost II. Úkolem tohoto paragrafu je dokázat na základě našich axiomů takovouto homogennost roviny.



Obr. 44.



Obr. 45.

VĚTA 14,5. *Platí-li všechny dosud uvedené axiomy* $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ *a má-li jediný pár* P, p *vlastnost* I, *pak tuto vlastnost mají všechny páry roviny* $\overline{Pp}$.

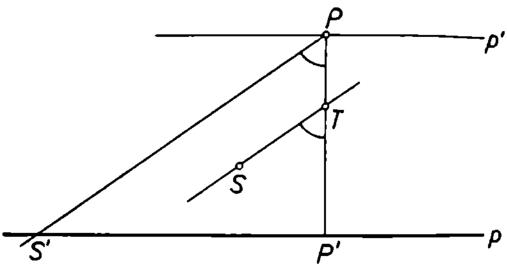
DŮKAZ.[19]) Nechť elementy P, p mají vlastnost I. Označme P' (viz obr. 44) průsečík p s kolmicí vedenou k ní bodem P a buďiž p' jediná nerůznoběžka, kterou lze bodem P vést k p (přímka p' je pak nutně kolmá na $\overline{PP'}$). Důkaz provedeme v několika krocích:

1. *Každý pár* A, a, *pro který platí* $Aa \equiv Pp$, *má vlastnost* I. Označíme-li totiž A' (viz obr. 45) průsečík přímky a s kolmicí vedenou k ní bodem A a je-li $R \neq P$ bod přímky p' a je-li bod B takový, že $\sphericalangle BAA' \equiv \equiv \sphericalangle RPP'$, pak a a $\overline{AB}$ jsou nerůznoběžné. Kdyby se totiž protly v bodě M, protínaly by se přímky p a p' v bodě N, kde $NP' \equiv MA'$. Právě tak je vidět, že $\overline{AB}$ je jediná nerůznoběžka bodem A s přímkou a.

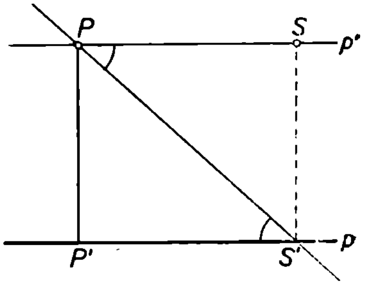
2. *Každý pár* A, a, *pro který platí* $Aa < Pp$, *má vlastnost* I. Buďiž T vnitřní bod úsečky PP' (viz obr. 46) a $\overline{ST}$ přímka bodem T, jež není kolmá na $\overline{PP'}$. Přímky $\overline{ST}$ a p se protínají. Neboť je-li $\overline{S'P}$ přímka ve-

[19]) Podle Baldus [1], str. 52.

daná bodem P tak, že je $\sphericalangle S'PT \equiv \sphericalangle STP'$, pak $\overline{S'P}$ protíná přímku p, jelikož není kolmá na $\overline{PP'}$, a to v bodě S', a s přímkou $\overline{ST}$ je nerůznoběžná podle VĚTY 14,2. Podle $\mathfrak{R}$, 4 musí tedy $\overline{ST}$ protnout přímku p.

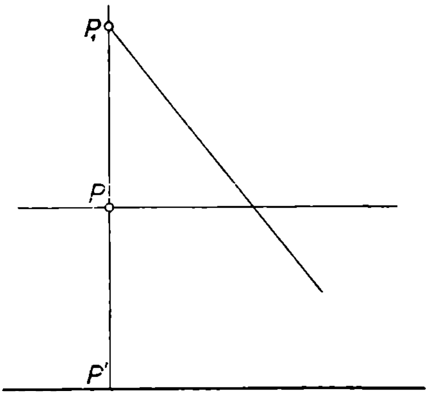


Obr. 46.



Obr. 47.

Ze všech přímek procházejících bodem T je tedy pouze kolmice na $\overline{TP'}$ nerůznoběžná s přímkou p, takže pár T, p má vlastnost I. Závěr vyvodíme podobně jako v 1. části našeho důkazu.



Obr. 48.

3. *Každá kolmice na jednu z přímek p, p' je kolmá i na druhou a průsečíky kolmic s oběma přímkami mají konstantní vzdálenost (přímky p a p' jsou ekvidistantní).* Nechť $S' \neq P'$ je bod na p (viz obr. 47). Budiž S bod, který má tu vlastnost, že $\sphericalangle P'S'P \equiv \sphericalangle SPS'$, $SP \equiv P'S'$ a že P' a S jsou na různých stranách od $\overline{PS'}$. Pak $\overline{PS}$ a p jsou podle VĚTY 14,2 nerůznoběžné, takže S leží na p'. Protože $\triangle PP'S' \equiv \triangle S'SP$, je $\sphericalangle PSS' \equiv R$ a $PP' \equiv SS'$. Také $\sphericalangle SS'P' \equiv \equiv R$, protože podle části 1 tohoto důkazu mají S', p' vlastnost I, takže kolmice bodem S' na $\overline{SS'}$ je jediná nerůznoběžka s p'.

4. *Každý pár A, a, pro který platí $Aa > Pp$, má vlastnost* I. Nechť P_1 (viz obr. 48) leží na přímce $\overline{PP'}$ a při tom $P_1P' \equiv 2 \, . \, PP'$. Je-li $\mu(P'PP_1)$, potom pár P_1, p' má vlastnost I, takže každá přímka bodem

P_1, jež není kolmá na $\overline{PP_1}$, protíná přímku p', a protože průsečík s p' má od p podle části 3 tohoto důkazu vzdálenost PP', protíná také přímku p podle 1. části důkazu. Elementy P_1, p mají tedy vlastnost I. Závěr plyne pomocí Archimedova axiomu a 2. části našeho důkazu.

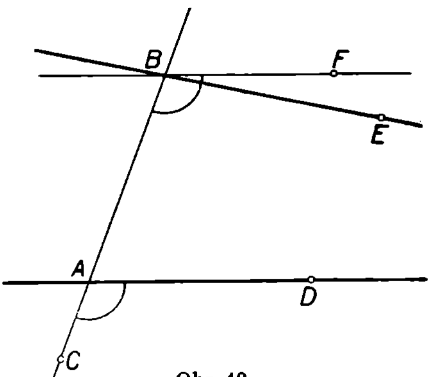
VĚTA 14,6. *Má-li jediný pár P, p vlastnost* II, *pak ji má každý pár roviny* $\overline{Pp}$.

DŮKAZ plyne z VĚT 14,4 a 14,5. Kdyby totiž jeden pár roviny $\overline{Pp}$ měl vlastnost II a kdyby přitom neměl každý pár této roviny vlastnost II, potom by alespoň jeden měl vlastnost I a podle VĚTY 14,5 by tedy dokonce každý pár musel mít vlastnost I, což by byl spor.

DEFINICE. Místo abychom říkali, že každý pár roviny má vlastnost I, budeme říkat, že *rovina má vlastnost* I. Podobně pro vlastnost II.

15. Věty ekvivalentní s V. Eukleidovým postulátem.

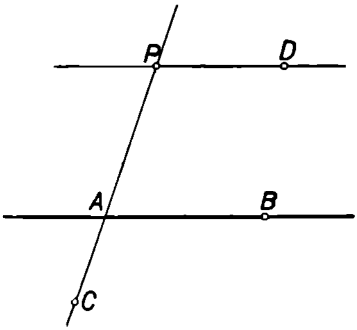
V minulém paragrafu jsme se setkali s dvojím typem roviny. Ačkoliv jejich charakteristické vlastnosti (vlastnost I a II) se dají formulovat pouze pomocí primitivního pojmu incidence, přesto velmi úzce souvisí i s ostatními primitivními pojmy. V tomto paragrafu se budeme zabývat právě těmito souvislostmi. Ukážeme řadu vět, jež jsou *ekvivalentní s tvrzením, že rovina má vlastnost* I, a tím také budeme moci ukázat nutné a postačující podmínky, aby rovina měla vlastnost II. Protože mezi větami ekvivalentními s vlastností I je také V. Eukleidův postulát (jeho znění viz v odstavci **2**, str. 16), budou všechny tyto věty současně ekvivalentní s tímto postulátem. Mnohé z nich byly kdysi nevědomky brány za samozřejmé a tak byl jejich pomocí podán důkaz V. postulátu; nebyl to však skutečný důkaz, jak jsme se o tom zmínili již v odstavci **2**, nýbrž nejvýše objev nové věty ekvivalentní s postulátem o rovnoběžkách, a proto mnohá z těchto vět má historickou cenu a budeme o ní mluvit ještě také v druhé části naší knížky.



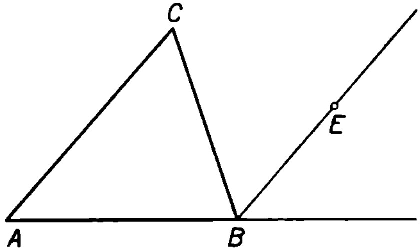
Obr. 49.

VĚTA 15,1. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže platí tvrzení: je-li součet vnitřních úhlů dvou přímek s příčkou po jedné její straně různý od* $2R$, *pak se přímky protínají.*

DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I. Jsou-li $\overline{AD}$ a $\overline{BE}$ (viz obr. 49) takové přímky, že mají součet vnitřních úhlů s příčkou $\overline{AB} = \overline{CB}$ po jedné její straně různý od $2R$, při čemž je $\mu(CAB)$, pak budiž F takový bod, že $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ABF$ a že body D, F leží po téže straně přímky $\overline{AB}$. Přímky $\overline{BF}$ a $\overline{BE}$ jsou různé, $\overline{BF}$ je však jediná přímka jdoucí bodem B, která je s $\overline{AD}$ nerůznoběžná, takže $\overline{AD}$ a $\overline{BE}$ se protínají.



Obr. 50.



Obr. 51.

2. Budiž dána přímka $\overline{AB}$ a bod P mimo ni a nechť C (viz obr. 50) je na polopřímce $(AP)^*$. Budiž D takový bod, že $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle APD$ a nechť bod D leží po téže straně od $\overline{AP}$ jako B. Pak přímky $\overline{AB}$ a $\overline{PD}$ jsou jednak nerůznoběžné, jednak mají součet vnitřních úhlů s příčkou $\overline{AP}$ po jedné její straně rovný $2R$. Každá přímka bodem P různá od $\overline{PD}$ má s příčkou $\overline{AP}$ (po téže straně) součet vnitřních úhlů různý od $2R$, tedy podle předpokladu protíná přímku $\overline{AB}$, takže $\overline{PD}$ je jediná nerůznoběžka s přímkou $\overline{AB}$ bodem P.

VĚTA 15,2. *Rovina má vlastnost* II *tehdy a jen tehdy, jestliže existují dvě neprotínající se přímky, u nichž součet vnitřních úhlů s příčkou po jedné její straně je různý od* $2R$.

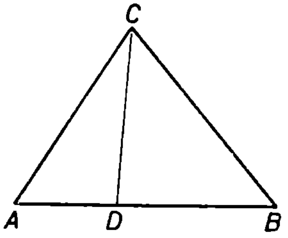
DŮKAZ vyplývá z předcházející věty a z VĚTY 14,4.

VĚTA 15,3. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existuje alespoň jeden trojúhelník, jehož úhly mají součet rovný* $2R$.

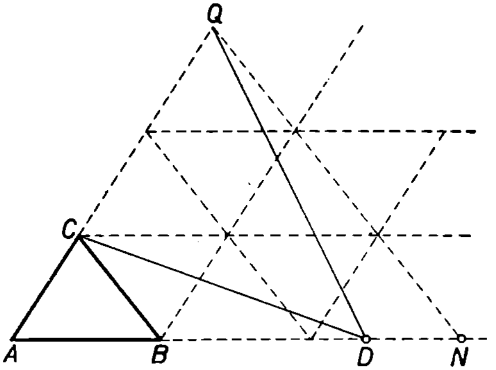
DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I a budiž v ní dán trojúhelník $\triangle ABC$ (viz obr. 51). Nechť E je bod poloroviny (AB, C) takový, že $\sphericalangle ABE + \sphericalangle BAC \equiv 2R$. Přímka $\overline{BE}$ je nerůznoběžná k $\overline{AC}$, tedy podle předpokladu a VĚTY 15,1 je $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle EBC$. Tedy $\sphericalangle ABC +$ $+ \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB \equiv 2R$.

2. Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$, jenž má součet úhlů $2R$. Stačí nyní dokázat, že alespoň jeden pár roviny má vlastnost I. Důkaz provedeme ve třech krocích:

a) *Je-li bod* $D \neq A$ *na přímce* $\overline{AB}$, *pak i trojúhelník* $\triangle ADC$ *má součet úhlů* $2R$. Neboť je-li $\mu(ADB)$ (viz obr. 52), pak součet úhlů u obou trojúhelníků $\triangle ADC$, $\triangle DBC$ činí $4R$. Kdyby v jednom z obou troj-



Obr. 52.



Obr. 53.

úhelníků byl součet menší než $2R$, musel by být v druhém větší, což podle VĚTY 13,6 není možné. Proto je součet u obou $2R$. Je-li $\mu(ABD)$ (viz obr. 53), pak podle Archimedova axiomu existuje na přímce $\overline{AB}$ bod N tak, že $\mu(ADN)$ a $AN \equiv n \,.\, AB$, kde n je přirozené číslo. Trojúhelník $\triangle ANQ$, kde Q je takový bod poloroviny $(\overline{AB}, C)$, že platí $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ANQ$ a $NQ \equiv n \,.\, BC$, má součet $2R$, neboť je složen z konečného počtu trojúhelníků shodných s $\triangle ABC$. Součet úhlů trojúhelníků $\triangle ADC$, $\triangle DCQ$, $\triangle DQN$ činí $6R$. Zde zase podle VĚTY 13,6 je vidět, že každý z těchto trojúhelníků má součet $2R$.

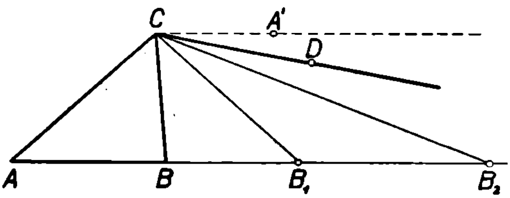
b) *Vnější úhel trojúhelníka se součtem* $2R$ *je roven součtu obou vnitřních úhlů, jež k němu nejsou vedlejší*, jak je bezprostředně patrno.

c) *Přímka* $\overline{CD}$, *pro kterou je* $\sphericalangle BCD < \beta \equiv \sphericalangle ABC$ (viz obr. 54), *při čemž body* A, D *jsou na různých stranách od* $\overline{BC}$, *protíná přímku* $\overline{AB}$. Budiž A' takový bod na opačné straně od $\overline{BC}$ než je A, že platí $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'CB$. Určeme nyní bod B_1 na polopřímce $(BA)^*$ tak, že $BC \equiv BB_1$, bod B_2 na $(B_1A)^*$ tak, že $B_1C \equiv B_1B_2$, a podobně body

B_3, B_4, ... atd. Trojúhelníky $\triangle\ CBB_1$, $\triangle\ CB_1B_2$, ... mají součet úhlů $2R$ (neboť podle a) mají trojúhelníky $\triangle\ AB_1C$, $\triangle\ AB_2C$, ... součet $2R$) a jsou rovnoramenné. Podle b) je tedy $\sphericalangle\ CB_1B \equiv \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle\ CB_2B \equiv \frac{1}{4}\beta$, ... obecně $\sphericalangle\ CB_iB \equiv \frac{\beta}{2^i}$. Snadno se ukáže, že $\sphericalangle\ B_iCA' \equiv \sphericalangle\ CB_iB$, takže $\sphericalangle\ B_iCA' \equiv \frac{\beta}{2^i}$. Podle Archimedova axiomu existuje nyní přirozené číslo n tak, že $\frac{\beta}{2^n} < \sphericalangle\ DCA'$, takže potom $\sphericalangle\ B_nCA' < \sphericalangle\ DCA'$. Leží tedy polopřímka (CD) mezi polopřímkami (CB) a (CB_n), jež obě protínají $\overline{AB}$. Podle definice pojmu „ležet mezi polopřímkami" a podle $\mathfrak{R}$, 4 protíná $\overline{CD}$ přímku $\overline{AB}$.

VĚTA 15,4. *Je-li alespoň v jednom trojúhelníku součet úhlů $2R$, pak má tuto vlastnost každý trojúhelník.*

DŮKAZ je zřejmý z bodu 2 a) předešlého důkazu.



Obr. 54.

VĚTA 15,5. *Rovina má vlastnost* II *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existuje trojúhelník, jehož součet úhlů je menší než $2R$.*

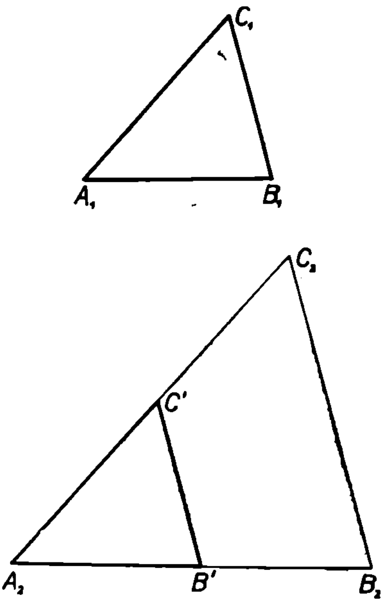
DŮKAZ plyne z VĚTY 15,3 a 14,4.

DEFINICE. Skupinu čtyř bodů A, B, C, D v rovině nazýváme *čtyrúhelníkem*, symbolicky $\square\ ABCD$, jestliže úsečky AB a CD resp. BC a AD nemají společných bodů, zatím co úsečky AC a BD mají společný (vnitřní) bod. Úsečky AB, BC, CD, DA jsou *strany*, úhly $\sphericalangle\ ABC$, $\sphericalangle\ BCD$, $\sphericalangle\ CDA$, $\sphericalangle\ DAB$ (krátce značené, pokud to nevede k nedorozumění, také $\sphericalangle\ B$, $\sphericalangle\ C$ atd.) jsou *úhly čtyrúhelníka*.[19a]) Dva čtyrúhelníky jsou *shodné*, symbolicky $\square\ ABCD \equiv \square\ EFGH$, jestliže se shodují ve stranách i úhlech.

[19a]) Podmínka o společném vnitřním bodě úseček AC a BD zaručuje, že čtyrúhelník $ABCD$ je *konvexní*. Při tom část roviny, jejíž hranici tvoří uzavřená křivka k, se nazývá konvexní, jestliže v ní leží všechny body úsečky XY, kde X a Y jsou jakékoli body křivky k. Nekonvexní čtyrúhelník vylučujeme tedy ze svých úvah.

Je-li $\square\, ABCD$ čtyrúhelník, pak podle definice není na př. $ACBD$ čtyrúhelník. V symbolu $\square\, ABCD$ záleží tedy na pořadí písmen, při čemž tento symbol označuje týž čtyrúhelník zřejmě jen při cyklických záměnách písmen.

VĚTA 15,6. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, existuje-li v ní alespoň jeden čtyrúhelník se součtem úhlů* 4R.



Obr. 55.

DŮKAZ je zřejmý podle VĚTY 15,3 a 15,4, uvažujeme-li oba trojúhelníky $\triangle\, ABC$ a $\triangle\, ADC$ čtyřúhelníka $\square\, ABCD$.

DEFINICE. Dva neshodné trojúhelníky, jejichž odpovídající úhly jsou shodné (a tedy odpovídající strany jsou neshodné), se nazývají *podobné*.

VĚTA 15,7. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existuje alespoň jeden pár neshodných podobných trojúhelníků.*

DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I a nechť v ní je dán trojúhelník $\triangle\, ABC$. Podle bodu 2 a) důkazu VĚTY 15,3 existuje $\triangle\, AB_1C_1$, který má shodné úhly s $\triangle\, ABC$ a při tom je $AB_1 \equiv 2\,.\,AB$ (a tedy i $B_1C_1 \equiv$ $\equiv 2\,.\,BC$, $AC_2 \equiv 2\,.\,AC$).

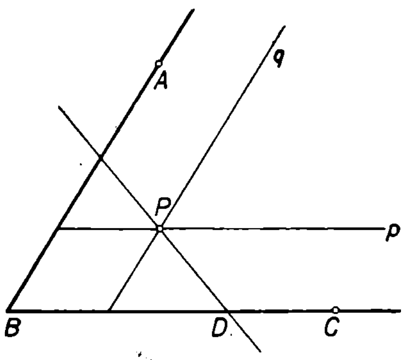
2. Buďtež dány trojúhelníky $\triangle\, A_1B_1C_1$ a $\triangle\, A_2B_2C_2$ tak, že úhly při stejně označených vrcholech jsou shodné (viz obr. 55) a při tom $A_1B_1 < A_2B_2$. Snadno dokážeme nepřímo, že pak je také $A_1C_1 < A_2C_2$ (a $B_1C_1 < B_2C_2$). Budiž C' bod na úsečce A_2C_2 takový, že $A_1C_1 \equiv A_2C'$, a bod B' na úsečce A_2B_2 takový, že $A_1B_1 \equiv A_2B'$. Potom $\sphericalangle\, B'C'C_2 +$ $+ \sphericalangle\, B_2C_2C' \equiv \sphericalangle\, C'B'B_2 + \sphericalangle\, C_2B_2B' \equiv 2R$, takže čtyrúhelník $\square\, B'B_2C_2C'$ má součet úhlů $4R$. Závěr plyne z VĚTY 15,6.

VĚTA 15,8. *Jestliže rovina má vlastnost* II, *pak v ní neexistují neshodné podobné trojúhelníky.*

DŮKAZ je zřejmý z předcházející věty a z VĚTY 14,4.

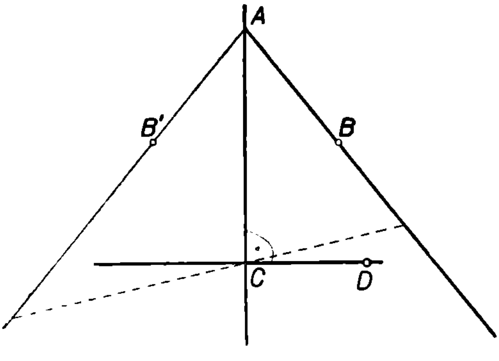
VĚTA 15,9. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, lze-li každým vnitřním bodem úhlu (dutého) vést alespoň jednu přímku protínající obě ramena mimo vrchol.*

DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I a budiž v ní dán úhel $\sphericalangle ABC$ a jeho vnitřní bod P (viz obr. 56). Nechť dále přímka q jdoucí bodem P je nerůznoběžná s $\overline{AB}$ a přímka p vedená bodem P nerůznoběžná s $\overline{BC}$. Je-li D bod na $\overline{BC}$ takový, že B a D jsou na různých stranách od q, pak $\overline{DP}$ protíná $\overline{AB}$, protože q je jediná nerůznoběžka bodem P k $\overline{AB}$.



Obr. 56.

2. Nechť každým vnitřním bodem úhlu lze vést alespoň jednu přímku protínající obě ramena. Buďte $\overline{AB}$ a $\overline{CD} \equiv \overline{CD'}$ (viz obr. 57) takové dvě přímky, že $\sphericalangle BAC < R \equiv \sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ACD'$. Je tedy součet úhlů přímek $\overline{AB}$ a $\overline{CD'}$ s příčkou $\overline{AC}$ (po jedné straně) různý od $2R$.



Obr. 57.

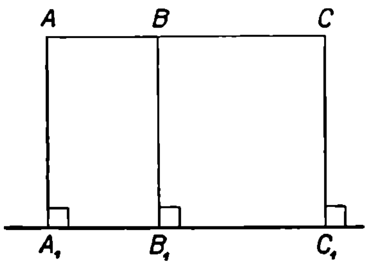
Zvolíme-li bod B' v polorovině $(\overline{AC}, B)$* tak, že $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'AC$, pak bod C je uvnitř úhlu $\sphericalangle BAB'$, takže jím lze podle předpokladu vést přímku protínající obě jeho ramena. Pomocí $\mathfrak{R}$, 4 a vlastností shodnosti dokážeme, že $\overline{CD}$ protíná i $\overline{AB}$ i $\overline{AB'}$, takže podle VĚTY 15,1 má rovina vlastnost I.

VĚTA 15,10. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existují alespoň tři body, které jsou stejně vzdáleny od přímky, leží po téže její straně a jsou kolineární.*

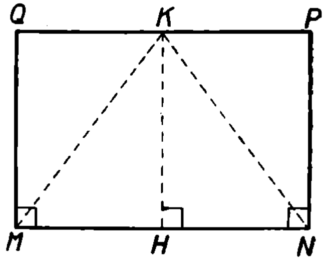
DŮKAZ. 1. Má-li rovina vlastnost I, pak podle části 3 důkazu VĚTY 14,5 existují ekvidistantní přímky.

2. Nechť body A, B, C leží na téže straně přímky p (viz obr. 58) a jsou stejně od ní vzdáleny a při tom jsou kolineární. Označme A_1, B_1, C_1 průsečíky kolmic s přímkou p vedených body A, B, C na p.

Nyní platí věta: jestliže ve čtyrúhelníku $\square\, MNPQ$ (viz obr. 59) jsou úhly při vrcholech M a N pravé a $MQ \equiv NP$, pak úhly při vrcholech Q a P jsou shodné. Neboť je-li H půlící bod strany MN a $\overline{HK}$ kolmice



Obr. 58.



Obr. 59.

bodem H na $\overline{MN}$ a K průsečík $\overline{HK}$ a QP, pak $\triangle\, MHK \equiv \triangle\, NHK$, a proto i $\triangle\, MQK \equiv \triangle\, NPK$.

Je tedy $\sphericalangle\, A_1AB \equiv \sphericalangle\, B_1BA$, $\sphericalangle\, A_1AB \equiv \sphericalangle\, C_1CB$, $\sphericalangle\, B_1BC \equiv$ $\equiv \sphericalangle\, C_1CB$ a odtud plyne, že $\sphericalangle\, B_1BA \equiv \sphericalangle\, B_1BC$, takže všechny tyto úhly jsou pravé a tím je dokázána existence čtyrúhelníka se čtyřmi pravými úhly. Závěr vyplývá z Věty 15,6.

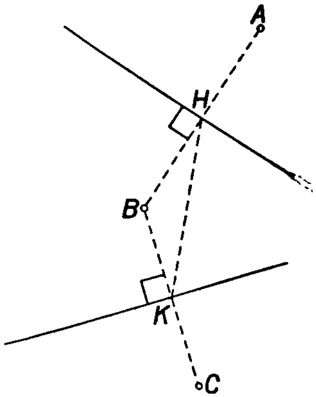
Definice. Čtyrúhelník $\square\, MNPQ$ (viz obr. 59), jehož úhly při vrcholech M a N jsou pravé a strany MQ a NP jsou shodné, se nazývá *Saccheriho čtyrúhelník* $\square\, MNPQ$ (pravé úhly jsou vždy při prvních dvou vrcholech).

Věta 15,11. *V Saccheriho čtyrúhelníku $\square\, MNPQ$ jsou úhly $\sphericalangle\, P$ a $\sphericalangle\, Q$ shodné a spojnice půlících bodů stran MN a PQ je společná kolmice přímek $\overline{MN}$ a $\overline{PQ}$.*

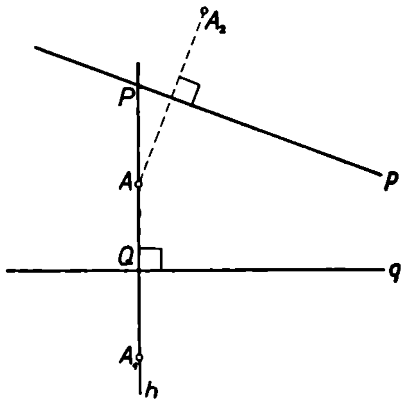
Důkaz. Budiž H půlící bod strany MN (viz obr. 59) a $\overline{KH}$ kolmice bodem H na $\overline{MN}$ a K průsečík $\overline{HK}$ a $\overline{QP}$. Podle části 2 důkazu Věty 15,10 je $\triangle\, MQK \equiv \triangle\, NPK$, takže je $QK \equiv KP$ čili K je půlící bod strany QP. Odtud plyne také, že $\triangle\, QKH \equiv \triangle\, PKH$, takže je $\overline{KH} \perp \overline{QP}$.

VĚTA 15,12. *Má-li rovina vlastnost* II, *pak všechny body, ležící po téže straně nějaké přímky ve stejných vzdálenostech od ní, neleží na přímce (ekvidistanta přímky není přímka).*

DŮKAZ plyne z VĚT 15,10 a 14,4.



Obr. 60.



Obr. 61.

VĚTA 15,13. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, když ke každým třem nekolineárním bodům existuje bod stejně od nich vzdálený (když každé tři nekolineární body leží na kružnici).*

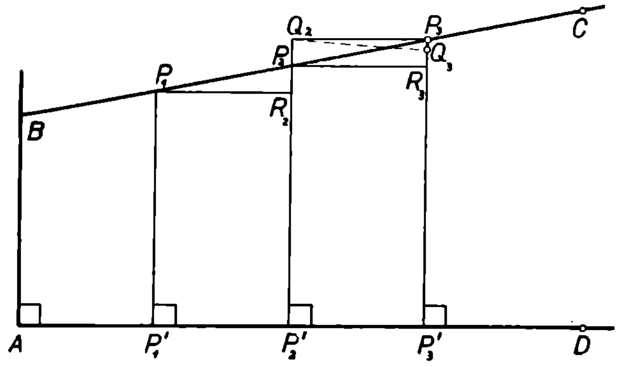
DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I a buďtež v ní dány tři libovolné nekolineární body A, B, C (viz obr. 60). Podle VĚTY 12,22 by bod stejně vzdálený od A, B i C musel být průsečíkem os úseček AB a BC. Budiž H resp. K půlící bod úsečky AB resp. BC. Součet vnitřních úhlů tvořených osami s přímkou $\overline{HK}$ je v polorovině $(\overline{HK}, B)$ zřejmě větší než $2R$, a protože rovina má vlastnost I, obě osy se protnou.

2. Nechť ke každým třem nekolineárním bodům existuje bod, stejně od nich vzdálený. Buďte h, p, q (viz obr. 61) tři přímky, při čemž q protíná h v bodě Q a stojí na ní kolmo, p protíná h v bodě P a nestojí na ní kolmo, takže součet vnitřních úhlů přímek p a q s příčkou $\overline{PQ}$ (po jedné její straně) je různý od $2R$. Zvolme mezi P a Q bod A, na polopřímce $(QA)^*$ určeme bod A_1 tak, aby $AQ \equiv QA_1$, a v polorovině $(pA)^*$ určeme bod A_2 tak, aby $\overline{AA_2}$ bylo kolmé na p a vzdálenost $Ap \equiv A_2p$. Bod A_2 neleží na h, takže body A, A_1, A_2 jsou nekolineární. Existuje

tudíž bod, stejně od nich vzdálený, a tímto bodem prochází jak p, tak q (podle VĚTY 12,22), takže p a q se protínají a podle VĚTY 15,1 má rovina vlastnost I.

VĚTA 15,14. *Má-li rovina vlastnost* II, *pak neleží každé tři nekolineární body na kružnici.*

DŮKAZ je důsledkem věty předcházející a VĚTY 14,4.



Obr. 62.

VĚTA 15,15. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže v ní existuje alespoň jeden pár různých přímek té vlastnosti, že body jedné z nich mají od druhé vzdálenosti shora omezeny.*

DŮKAZ. 1. Nechť rovina má vlastnost I. Potom podle VĚTY 15,10 jsou nerůznoběžné přímky ekvidistantní, takže je splněno tvrzení naší věty.

2. Jestliže rovina nemá vlastnost I (takže má podle VĚTY 14,4 vlastnost II), pak se dá dokázat, že neexistují přímky té vlastnosti, že by body jedné z nich měly od druhé vzdálenosti shora omezeny. Jestliže je totiž $\sphericalangle BAD$ pravý úhel a bod C (viz obr. 62) je po téže straně přímky $\overline{AB}$ jako bod D, pak dokážeme, že ať je $\sphericalangle ABC$ pravý nebo tupý úhel, lze vždy na polopřímce (BC) určit bod T tak, že vzdálenost bodu T od přímky $\overline{AD}$ je větší než libovolná předem daná úsečka.

Zvolme na polopřímce (BC) body P_1, P_2, P_3 tak, že $\mu(P_1P_2P_3)$, $P_1P_2 \equiv P_2P_3$, a veďme jimi kolmice na přímku $\overline{AD}$ a průsečíky označme P_1', P_2', P_3'. Na $(P_2'P_2)$ určeme bod R_2 a na $(P_3'P_3)$ bod R_3 tak, že platí $P_1'P_1 \equiv P_2'R_2$, $P_2'P \equiv P_3'R_3$. Protože $\square\ P_1'P_2'R_2P_1$ je Saccheriho čtyrúhelník, jsou za předpokladu, že rovina má vlastnost II, úhly $\sphericalangle\ P_1'P_1R_2$ a $\sphericalangle\ P_2'R_2P_1$ ostré a podobně i úhly $\sphericalangle\ P_2'P_2R_3$ a $\sphericalangle\ P_3'R_3P_2$. Bod R_2 resp. R_3 padne tedy na úsečku $P_2'P_2$ resp. $P_3'P_3$. Ukážeme nyní, že je $R_2P_2 < R_3P_3$. Zvolme na $(P_2P_2')^*$ bod Q_2 tak, že je $R_2P_2 \equiv P_2Q_2$ a na $(R_3P_3')^*$ bod Q_3 tak, že $P_2Q_2 \equiv R_3Q_3$. Zřejmě platí $\triangle\ P_1R_2P_2 \equiv$ $\equiv \triangle\ P_3Q_2P_2$, takže $\sphericalangle P_3Q_2P_2' > R$. Ježto $\square\ P_2R_3Q_3Q_2$ je čtyrúhelník Saccheriho, je úhel $\sphericalangle\ P_2'Q_2Q_3$ ostrý, takže bod Q_3 padne mezi body P_3 a R_3.

Je-li nyní dána úsečka MN, pak podle Archimedova axiomu existuje přirozené číslo n tak, že $n\,.\,P_2R_2 > MN - P_1P_1'$, takže pro vzdálenost bodu P_{n+1}, který je určen vztahy

$$P_1 \prec P_2 \prec P_3 \prec \ldots \prec P_n \prec P_{n+1}$$

a $P_1P_2 \equiv P_2P_3 \equiv \ldots \equiv P_nP_{n+1}$, od přímky $\overline{AD}$ platí $\overline{AD}\,P_{n+1} >$ $> \overline{AD}\,P_1 + n\,.\,P_2R_2 > MN$.

Jako shrnutí výsledků tohoto paragrafu uvedeme v přehledu věty ekvivalentní s V. postulátem, jež jsou ovšem také navzájem ekvivalentní. Můžeme je roztřídit podle toho, kterých primitivních pojmů se jejich formulace přímo týká.

Věty, týkající se pouze pojmu incidence:

1. *Alespoň jeden pár P, p má tu vlastnost, že bodem P lze k přímce p vést právě jednu nerůznoběžku* (vlastnost I).

2. *Každá přímka, která protíná jednu ze dvou nerůznoběžek, protíná i druhou.*

Věta, vyjádřená pomocí incidence a rozmístění:

3. *Každým vnitřním bodem dutého úhlu lze vést alespoň jednu přímku, protínající obě ramena mimo vrchol.*

Pouze incidence a shodnosti úseček se týká věta:

4. *Ke každým třem nekolineárním bodům existuje bod od všech tří stejně vzdálený.*

Věty, týkající se pojmů incidence, shodnosti úseček a rozmístění:

5. *Existují alespoň dvě přímky té vlastnosti, že body jedné z nich mají od druhé vzdálenosti shora omezeny.*

6. *Existují alespoň tři body stejně vzdálené od přímky, které leží po téže její straně a jsou kolineární.*

Pomocí pojmů incidence, rozmístění a shodnosti úhlů jsou vyjádřeny věty:

7. *Existuje alespoň jeden trojúhelník se součtem úhlů $2R$.*

8. *Existuje alespoň jeden čtyrúhelník se součtem úhlů $4R$.*

9. *Je-li součet vnitřních úhlů dvou přímek po jedné straně příčky různý od $2R$, pak se tyto přímky protínají.*

10. *Každá kolmice na jedno rameno ostrého úhlu protne i druhé rameno.* (Přímka je kolmá na rameno, jestliže je kolmá na přímku, v níž rameno leží, a protíná ji ve vnitřním bodě ramena; věta 10 je pouze jiná formulace VĚTY 15,1 čili V. Eukleidova postulátu.)

Věta, týkající se pojmu incidence a shodnosti úseček i úhlů:

11. *Existují alespoň dva trojúhelníky s odpovídajícími shodnými úhly a s odpovídajícími stranami neshodnými.*

POZNÁMKA. V. postulát je také ekvivalentní s tvrzením, které v podstatě říká, že limitou kružnice s neomezeně vzrůstajícím poloměrem je přímka. Přesnou formulaci tohoto tvrzení a důkaz ekvivalence viz v odst. **18** (VĚTA 18,4).

KAPITOLA III

NEEUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

16. Nový axiom. Ve druhé kapitole jsme mluvili o dvojí geometrii roviny a ukázali jsme, že geometrie roviny s vlastností I splňuje V. Eukleidův postulát. Překračuje tedy již oblast absolutní geometrie a přechází v geometrii eukleidovskou. Podobně geometrie roviny s vlastností II se vymyká již absolutní geometrii; rozšířena také na prostorové vlastnosti tvoří *Lobačevského neeukleidovskou geometrii.* Tato geometrie se tedy vedle dosud uvedených axiomů absolutní geometrie opírá ještě o další axiom, který můžeme formulovat různě, nejjednodušeji však jako axiom o incidenci.

AXIOM LOBAČEVSKÉHO GEOMETRIE:

$\mathfrak{I}$, 10. *V rovině prochází bodem mimo přímku alespoň dvě různé s ní se neprotínající přímky.*

Některé věty neeukleidovské geometrie jsme odvodili již v minulém odstavci. Jsou to tyto věty:

VĚTA 16,1. *Existují tři nekolineární body, jež neleží na žádné kružnici.*

VĚTA 16,2. *Ekvidistanta přímky není přímka.*

VĚTA 16,3. *Součet úhlů v trojúhelníku je vždy menší než 2R.*

VĚTA 16,4. *Součet úhlů ve čtyrúhelníku je vždy menší než 4R.*

VĚTA 16,5. *Existují oba případy, že dvě neprotínající se přímky v rovině tvoří s příčkou po jedné její straně vnitřní úhly, jejichž součet je v jednom případě roven a v druhém různý od 2R.*

VĚTA 16,6. *Existuje kolmice na rameno ostrého úhlu, která neprotne druhé rameno.*

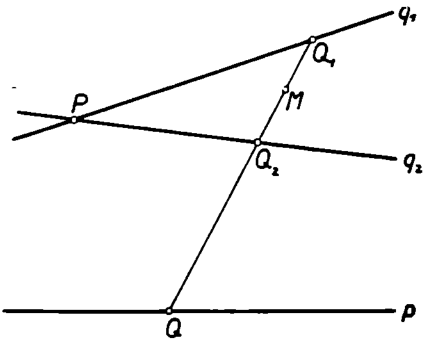
VĚTA 16,7. *Neexistují trojúhelníky se shodnými odpovídajícími úhly, které by měly odpovídající strany neshodné.*

Poslední větě je možno dát tvar věty o shodnosti trojúhelníků:

VĚTA 16,8. *Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže mají shodné odpovídající úhly.*

17. Přímky různoběžné, souběžné a rozběžné.

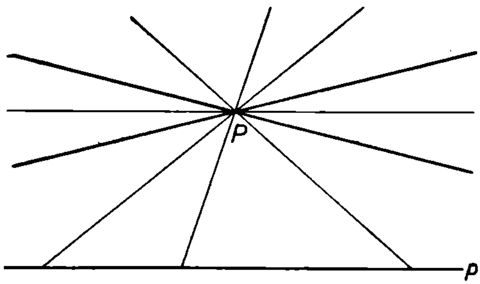
Předním úkolem tohoto paragrafu je provést *klasifikaci dvojic přímek v rovině* podle jejich incidenčních vlastností na tři typy: přímky *různoběžné, souběžné a rozběžné* a odvodit základní vlastnosti těchto dvojic přímek (věty 17,1 až 17,12). Dále jsou zkoumány přímky v prostoru a vztah různoběžnosti, souběžnosti a rozběžnosti je rozšířen na dvojici *přímky s rovinou* nebo *dvojici dvou rovin*. Poslední věta tohoto odstavce (VĚTA 17,28) bude mít později důležitý důsledek (viz str. 140).



Obr. 63.

VĚTA 17,1. *V rovině prochází bodem mimo danou přímku nekonečně mnoho přímek, jež danou přímku neprotínají.*

DŮKAZ. Buďtež q_1, q_2 dvě nerůznoběžky vedené bodem P k přímce p (viz obr. 63). Na přímce q_1 určeme bod Q_1 tak, aby ležel na opačné straně od q_2 než leží přímka p. Je-li nyní Q jakýkoli bod přímky p, pak úsečka Q_1Q protne přímku q_2, průsečík označme Q_2. Pro každý bod M úsečky Q_1Q_2 leží polopřímka (PM) mezi rameny úhlu $\sphericalangle\, Q_1PQ_2$, takže přímka $\overline{PM}$ je nerůznoběžná s p. Neboť kdyby $\overline{PM}$ měla s přímkou p průsečík N, pak by bylo buď $\mu(PMN)$, buď $\mu(NPM)$. Podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na $\triangle\ MQN$ bychom dostali, že buď q_2 nebo q_1 protíná p, což by byl spor.



Obr. 64.

Mezi nekonečně mnoha přímkami, o nichž mluví předcházející věta, jsou dvě, které hrají v celé Lobačevského geometrii význačnou roli. Dojdeme k nim touto úvahou: všechny přímky procházející bodem P (viz obr. 64) mohou být vzhledem k přímce p (neprocházející bodem P) rozděleny do dvou tříd tak, že v jedné třídě jsou přímky, jež protínají p, a v druhé ty, které neprotínají přímku p. Hranici mezi oběma třídami tvoří dvě přímky, o nichž později dokážeme, že neprotínají p, a to jsou právě ony význačné přímky neeukleidovské geometrie. Lobačevskij nazýval tyto přímky *rovnoběžkami k* přímce p (viz citát z Lobačevského na str. 182 této knížky!).

Již v odstavci 14 jsme řekli, že se budeme pokud možno vyhýbat názvu „rovnoběžky", protože má několikerý význam. Tato nejednotnost nevede sice k žádným nedorozuměním, přesto však může některé pojmy zatemnit.

Termín „rovnoběžný" má v matematice tři různé významy. U Eukleida znamenají dvě rovnoběžné přímky totéž jako „dvě přímky v rovině, které se neprotínají". Jiný význam má tento název v eukleidovské geometrii, kde se ho přeneseně užívá pro význačnou dvojici přímek v rovině (pro přímky, které se neprotínají; obráceně, každé dvě neprotínající se přímky v rovině patří do kategorie význačných dvojic přímek, totiž mezi rovnoběžky). Konečně s třetím významem termínu rovnoběžný jsme se právě nyní setkali v Lobačevského geometrii. V této geometrii nepatří každé dvě neprotínající se přímky do kategorie dvojic přímek rovnoběžných. Rovnoběžné přímky podle původní Eukleidovy definice by na druhé straně zahrnovaly každou dvojici neprotínajících se přímek v neeukleidovské rovině.

V dalším budeme přímky rovnoběžné ve smyslu Lobačevského raději nazývat přímkami *souběžnými* nebo *souběžkami*, zatím co termín „rovnoběžky" ponecháme pouze geometrii eukleidovské. Pro přímky v rovině, které se neprotínají, nebudeme užívat žádného zvláštního názvu.[20])

Lobačevskij měl určité důvody, když souběžné přímky nazýval rovnoběžkami. Jestliže totiž odlišíme obě souběžky jdoucí bodem P pomocí orientace přímky p, pak platí, jak zanedlouho ukážeme:

1. bodem P lze k přímce $\vec{p}$ (orientované) vést právě jednu souběžku,

2. je-li $\vec{q}$ souběžka vedená bodem P k přímce $\vec{p}$ a Q jiný bod na přímce $\vec{q}$, potom souběžka vedená bodem Q k $\vec{p}$ splývá s $\vec{q}$,

3. je-li $\vec{q}$ souběžka k přímce $\vec{p}$, pak $\vec{p}$ je souběžka k přímce $\vec{q}$,

4. je-li $\vec{p}$ souběžka k přímce $\vec{r}$ a $\vec{q}$ ($\neq \vec{p}$) také souběžka k přímce $\vec{r}$, pak přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou souběžné.

Je tedy vztah orientované souběžnosti symetrický, transitivní a vyznačuje se jednoznačností, právě tak jako vztah rovnoběžnosti v eukleidovské geometrii.

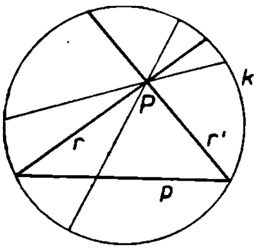
Pojem přímek souběžných lze osvětlit na každém z dříve uvedených modelů Lobačevského roviny. Na př. na modelu Beltrami-Kleinově (viz obr. 65a) má „přímka" p za souběžky ty „přímky", které s ní mají společný bod na kružnici k (který se tedy už nepočítá jako „bod" „roviny"). Současně je vidět, že „souběžky" r a r' tvoří ve svazku „přímek" určeném bodem P hranici mezi „přímkami" protínajícími a neprotínajícími „přímku" p. Podobně je tomu u ostatních modelů (obr. 65 b, c).

---

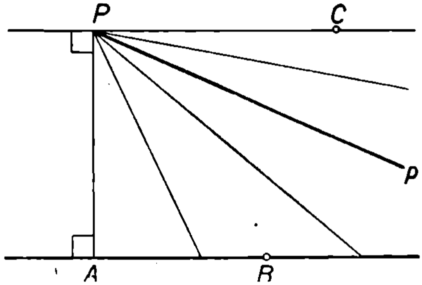
[20]) *Jan Vyšín* ve své knížce *Elementární geometrie III* (Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952) užívá termínu souběžné přímky právě pro přímky v rovině, které se neprotínají.

VĚTA 17,2. *Budiž* $\overline{PA} \perp \overline{AB}$ a $\overline{CP} \perp \overline{AP}$ (viz obr. 66), *při čemž body* B *a* C *jsou po téže straně přímky* $\overline{AP}$. *Rozdělíme-li všechny polopřímky dutého úhlu* $\sphericalangle CPA$ *na dvě třídy tak, že do jedné dáme polopřímky neprotínající přímku* $\overline{AB}$ *a do druhé ty polopřímky, jež přímku* $\overline{AB}$ *protínají, pak*

1. *obě třídy tvoří řez na množině polopřímek úhlu* $\sphericalangle CPA$,
2. *vytvořující polopřímka tohoto řezu neprotíná přímku* $\overline{AB}$.



Obr. 65.



Obr. 66.

DŮKAZ. 1. Rozdělení polopřímek úhlu $\sphericalangle CPA$ určené v naší větě zřejmě splňuje podmínky a), b) definice řezu (viz odst. **6**, str. 34). Zbývá dokázat, že splňuje i podmínku c′) (viz str. 35). V důkazu VĚTY 17,1 jsme však viděli, že všechny polopřímky mezi dvěma polopřímkami úhlu $\sphericalangle ABC$ neprotínajícími přímku $\overline{AB}$ jsou rovněž neprotínající. O protínajících polopřímkách je to zřejmé podle $\mathfrak{R}$, 4.

2. Označíme-li písmenem p vytvořující polopřímku řezu, o němž mluví naše věta, máme dokázat, že polopřímka p neprotíná přímku $\overline{AB}$. Předpokládejme naopak, že by p protínala $\overline{AB}$ v bodě M. Pak by existoval na $\overline{AB}$ bod N tak, že by platilo $\mu(AMN)$. Polopřímka (PN) by ležela mezi p a (PC) (protože by ležela v polorovinách $(\overline{p}, A)^*$ a $(\overline{PC}, A)$) a neprotínala by v důsledku vlastnosti vytvořující polopřímky Dedekindova řezu přímku $\overline{AB}$, což by byl spor.

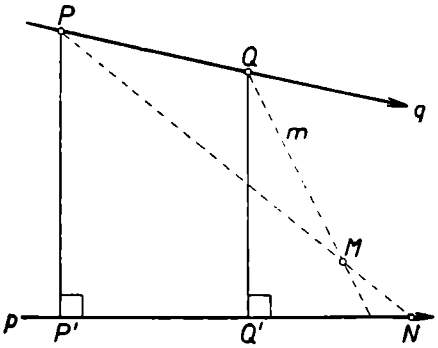
DEFINICE. O orientovaných přímkách $\vec{p}$ a $\vec{q}$ v rovině, které se neprotínají, budeme říkat, že jsou *orientovány souhlasně*, jestliže polopřímky $(P\vec{p})$ a $(Q\vec{q})$, kde P resp. Q je bod na p resp. q, leží v téže polorovině, určené přímkou $\overline{PQ}$. (Je vidět, že tato definice nezávisí na volbě bodů P, Q na přímkách p, q).

Definice. *Souběžka vedená bodem P k orientované přímce $\overrightarrow{AB}$,* jež neprochází bodem P, je definována takto:

Budiž $\overline{PA} \perp \overline{AB}$ a $\overline{CP} \perp \overline{AP}$ (viz obr. 66), při čemž body B a C jsou po téže straně přímky $\overline{AP}$. Budiž p vytvořující polopřímka Dedekindova řezu polopřímek úhlu $\sphericalangle CPA$, jehož jedna třída obsahuje polopřímky protínající $\overline{AB}$ a druhá polopřímky neprotínající $\overline{AB}$. Souběžkou vedenou bodem P k orientované přímce $\overrightarrow{AB}$ se nazývá *orientovaná přímka* $\vec{p}$ taková, že

a) $\bar{p}$ je přímka, jíž je polopřímka p částí,

b) orientace přímky $\vec{p}$ je taková, že jest $P\vec{p} = p$ a že orientované přímky $\vec{p}$ a $\overrightarrow{AB}$ jsou orientovány souhlasně.



Obr. 67.

Věta 17,3. *Bodem mimo orientovanou přímku lze k ní vést právě jednu souběžku.*

Důkaz je patrný přímo z definice a z toho, že řez má nejvýše jeden vytvořující prvek.

Věta 17,4. *Je-li $\vec{q}$ souběžka vedená bodem P k orientované přímce $\vec{p}$, pak q je také souběžka k $\vec{p}$ vedená jakýmkoli bodem ležícím na $\vec{q}$.*

Důkaz. Nechť Q je bod na q různý od P. Máme dokázat, že souběžka bodem Q k $\vec{p}$ je $\vec{q}$. Označíme-li Q' (viz obr. 67) průsečík p s kolmicí na p vedenou bodem Q, pak stačí dokázat, že libovolná polopřímka mezi $(Q\vec{q})$ a (QQ') protíná přímku p. Budiž m taková polopřímka s počátkem Q. Je-li $P \prec Q$, při čemž $\prec$ je uspořádání, příslušející orientaci přímky $\vec{q}$, zvolme na m libovolný bod $M \neq Q$, takže polopřímka (PM) leží mezi (PP') (P' je průsečík přímky p a kolmice na ni bodem P vedené) a $(P\vec{q})$, a tudíž podle předpokladu souběžnosti protíná p, průsečík označme N. Podle $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na trojúhelník $\triangle\, PP'N$ protíná přímka $\overline{QM}$ a tedy i polopřímka m přímku p.

Je-li $Q \prec P$, zvolíme bod M na m^* (t. j. opačné polopřímce k m) a důkaz je obdobný.

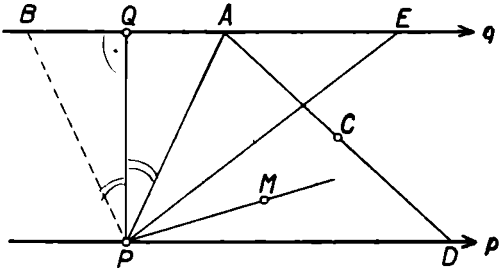
Poznámka. V důsledku Věty 17,4 můžeme mluvit o „souběžce $\vec{q}$

k orientované přímce $\vec{p}$", t. j. můžeme vynechat dodatek „vedené bodem P", kde P je určitý bod na q, protože za bod P můžeme podle VĚTY 17,4 volit kterýkoli bod přímky q.

VĚTA 17,5. *Je-li $\vec{q}$ souběžka k orientované přímce $\vec{p}$, pak je $\vec{p}$ souběžka k přímce $\vec{q}$.*

DŮKAZ. Bodem P na p veďme kolmici ke q (viz obr. 68), průsečík označme Q. Stačí dokázat, že $\vec{p}$ je souběžka bodem P ke $\vec{q}$ čili že každá polopřímka mezi (PQ) a $(P\vec{p})$ protíná q.

Nechť naopak (PM) leží mezi (PQ) a $(P\vec{p})$ a je s q nerůznoběžná. Budiž A na $(Q\vec{q})$ a B na $(Q\vec{q})^*$ tak, aby $\sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle BPQ \equiv \frac{1}{2} \sphericalangle MP\vec{p}$ a bod C v polorovině (qP) tak, že $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PBA$. Podle předpokladu, že $\vec{q}$ je souběžná s $\vec{p}$, polopřímka (AC) protne p; tento průsečík označme D a na polopřímce (BA) určeme E tak, že $BE \equiv AD$. Potom $\triangle APD \equiv \triangle BPE$, takže $\sphericalangle BPE \equiv \equiv \sphericalangle APD \equiv \sphericalangle BPM$, takže (PE) splývá s (PM), což je spor.



Obr. 68.

POZNÁMKA. V důsledku VĚTY 17,5 můžeme vedle rčení „*přímka $\vec{q}$ je souběžná k orientované přímce $\vec{p}$*" říkat také „*orientované přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou souběžné*" (vztah souběžnosti je totiž *symetrický*).

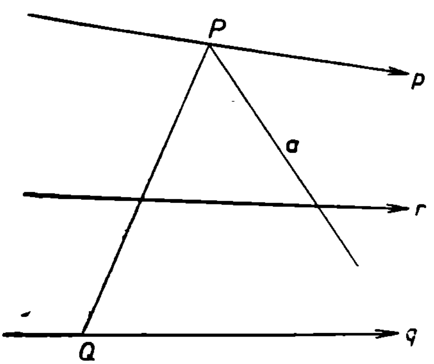
DEFINICE. Vedle souběžnosti orientovaných přímek mluvíme také často o *souběžnosti přímek neorientovaných.* Potom nazýváme dvě přímky souběžnými tehdy, jestliže je lze obě orientovat tak, aby byly souběžnými orientovanými přímkami. (Je zřejmé, že takto orientovat dvě přímky lze nejvýše jedním způsobem.)

DEFINICE. Dvě *splývající přímky* budeme vždy považovat za *souběžné* (tato definice, která říká, že vztah souběžnosti je *reflexivní*, je nutná, abychom mohli dokázat následující větu).

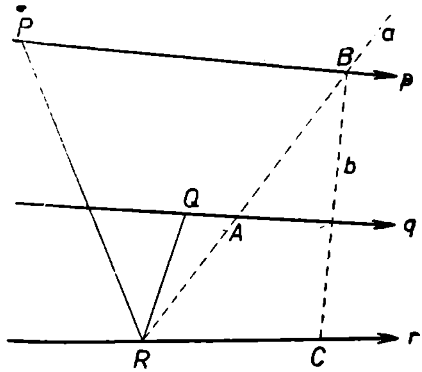
VĚTA 17,6. *Je-li každá z orientovaných přímek $\vec{p}$ a $\vec{q}$ souběžná s orientovanou přímkou $\vec{r}$, pak přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou také souběžné.*

DŮKAZ. 1. Leží-li p a q, $p \ddagger q$ (viz obr. 69) po různých stranách od r, vezměme P na p a Q na q. Každá polopřímka a úhlu $\sphericalangle QP\vec{p}$ protne přímku r, protože $\vec{p}$ a $\vec{r}$ jsou souběžné, a protne také q, protože i $\vec{q}$ a $\vec{r}$ jsou souběžné. Protože však přímky p a q se nemohou protnout a protože jsou souhlasně orientovány, jsou souběžné.

2. Leží-li p a q, $p \neq q$ na téže straně od r, označme q tu přímku, která leží mezi ostatními dvěma (viz obr. 70). Přímky p a q se nemohou



Obr. 69.



Obr. 70.

protnout, protože jinak by polopřímka přímky p za průsečíkem byla mezi q a r a protla by r. Zvolme nyní na r bod R, na q bod Q. Budiž polopřímka a současně v úhlu $\sphericalangle\, PR\vec{r}$ i $\sphericalangle\, QR\vec{r}$. Protože $\vec{p}$ i $\vec{q}$ jsou souběžné s $\vec{r}$, protne a přímku q (v bodě A) a přímku p (v bodě B). Každá polopřímka b úhlu $\sphericalangle\, RB\vec{p}$ protne přímku r v bodě C. Podle $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na $\triangle RBC$ protne b také přímku q, takže orientované přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou souběžné.

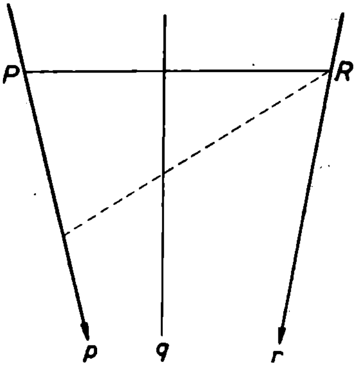
3. Jestliže je $p = q$, pak tvrzení je správné v důsledku reflexivnosti vztahu souběžnosti.

Poznámka. Důsledkem poslední věty je *transitivnost vztahu souběžnosti*. Jsou-li přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ souběžné a $\vec{q}$ a $\vec{r}$ také souběžné, pak i $\vec{p}$ a $\vec{r}$ jsou souběžné.

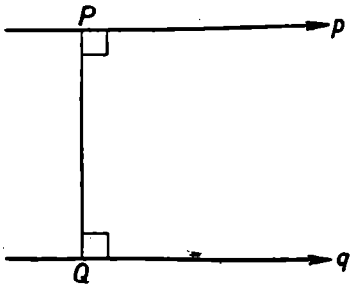
Definice. Přímka q leží *mezi nerůznoběžnými přímkami* p a r, jestliže přímky p a r leží v různých polorovinách určených přímkou q v rovině $\overline{pr}$.

Věta 17,7. *Přímka ležící mezi dvěma souběžkami je s oběma souběžná.*

Důkaz. Nechť přímka q leží mezi přímkami p a r (viz obr. 71) a nechť $\overrightarrow{p}$ a $\overrightarrow{r}$ jsou souběžné. Je-li P na p a R na r, pak každá polopřímka úhlu $\sphericalangle PR\overrightarrow{r}$ se protne s p a podle $\mathfrak{R}$, 4 se protne i s q. Jsou tedy přímky q a r souběžné.



Obr. 71.



Obr. 72.

Věta 17,8. *Dvě souběžné přímky nemají společnou kolmici (t. j. přímku kolmou k oběma zároveň).*

Důkaz. Kdyby souběžky $\overrightarrow{p}$ a $\overrightarrow{q}$ měly společnou kolmici, která by je protla v bodech P a Q (viz obr. 72), pak by každá polopřímka úhlu $\sphericalangle QP\overrightarrow{p}$ protla q a bodem P by procházela jediná nerůznoběžka k přímce q, což by bylo ve sporu s axiomem $\mathfrak{J}$, 10.

Definice. Nerůznoběžným přímkám, ležícím v rovině, které nejsou souběžné, budeme říkat *přímky rozběžné* nebo *rozběžky.*

Věta 17,9. *Dvě rozběžky mají vždy právě jednu společnou kolmici.*

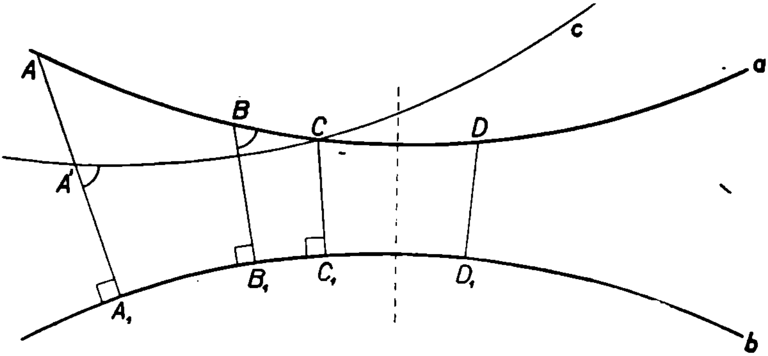
Důkaz.[21]) Jestliže $\square$ $MNPQ$ je Saccheriho čtyrúhelník, pak spojnice půlících bodů stran MN a PQ (viz obr. 59 a Větu 15,11) je společná kolmice přímek $\overline{MN}$ a $\overline{PQ}$. Při důkazu naší věty se budeme proto snažit nalézt společnou kolmici jako spojnici středů příslušných stran jistého Saccheriho čtyrúhelníka.

1. *Existence.* Buďtež a, b dvě rozběžky. Na a (viz obr. 73) zvolme body A a B a veďme jimi kolmice na b, průsečíky označme A_1 a B_1.

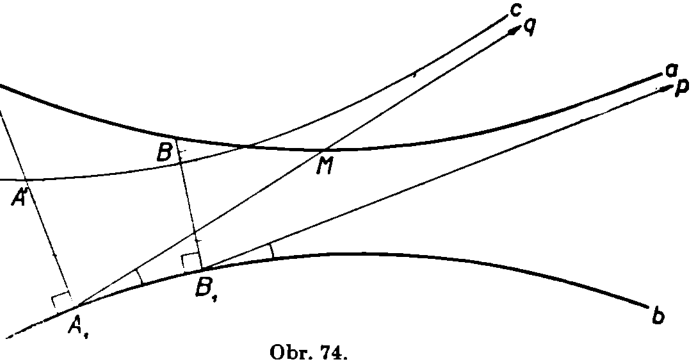
[21]) Podle Hilbert [2] str. 164—165.

Je-li $AA_1 \equiv BB_1$, je $\square\, A_1B_1BA$ Saccheriho čtyrúhelník a osa úsečky A_1B_1 je podle VĚTY 15,11 společná kolmice.

Není-li $AA_1 \equiv BB_1$, budiž na př. $AA_1 > BB_1$. Na úsečce AA_1 zvolme bod A' tak, že $A_1A' \equiv B_1B$, a bodem A' veďme přímku c tak, že s $(A'A_1)$ v polorovině $(\overline{A_1A'}, B)$ svírá týž úhel jako přímka a s (BB_1)



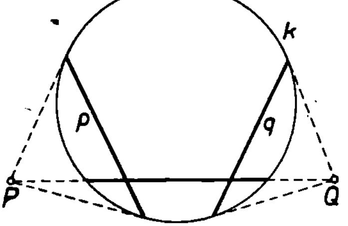
Obr. 73.



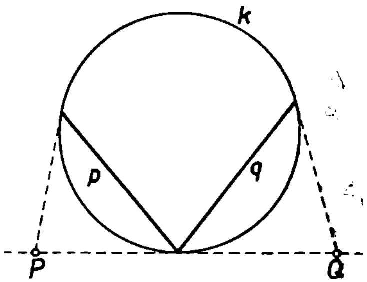
Obr. 74.

v polorovině $(\overline{BB_1}, A)$*. Přímky a a c se *protnou* (důkaz uvedeme na konci této úvahy), průsečík označme C. Kolmice bodem C vedená na b nechť b protne v C_1. Na a zvolme nyní bod D tak, že $AC \equiv BD$ a $B \prec D$, při čemž $\prec$ je dáno tak, že $A \prec C$; na b zvolme D_1 tak, že $A_1C_1 \equiv B_1D_1$ a $A_1 \prec C_1$, $B_1 \prec D_1$. Podle konstrukce je $\square\, A_1A'CC_1 \equiv$ $\equiv \square\, B_1BDD_1$, takže $\square\, C_1D_1DC$ je Saccheriho čtyrúhelník. Osa úsečky C_1D_1 je podle VĚTY 15,11 společná kolmice přímek a a b.

Zbývá ještě dokázat, že přímky a a c se protnou. Bodem B_1 (viz obr. 74) veďme přímku p souběžnou s $\overrightarrow{AB}$ a bodem A_1 přímku q, svírající v polorovině (bA) s polopřímkou (A_1B_1) týž úhel jako (B_1P) s (B_1A_1)*. Protože q není souběžné s p (VĚTA 14,2), není souběžné ani s a. Bod A_1 je mezi přímkami a a p, a protože q je s p nerůznoběžná, dokážeme podle VĚTY 17,7 nepřímo, že q protne a, průsečík označme M. Ze shodnosti útvarů pB_1Ba a $qA_1A'c$ plyne, že c a q jsou souběžné. Přímka c neprotne tedy úsečku A_1M, takže podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na $\triangle\ A_1AM$ přímka c protne úsečku AM.



Obr. 75.



Obr. 76.

2. *Jednoznačnost*: Dvě nerůznoběžky nemohou mít dvě společné kolmice, protože by pak existoval čtyrúhelník se čtyřmi pravými úhly, což by bylo ve sporu s axiomem $\mathfrak{J}$, 10 (viz VĚTU 16,4).

VĚTA 17,10. *Dvě různé přímky ležící v téže rovině jsou rozběžné tehdy a jen tehdy, jestliže mají společnou kolmici.*

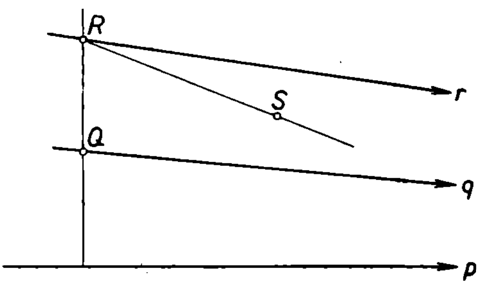
DŮKAZ. 1. Jsou-li dvě přímky rozběžné, pak mají podle VĚTY 17,9 vždy právě jednu kolmici.

2. Jestliže dvě přímky (v rovině) mají společnou kolmici, pak především musí být nerůznoběžné (VĚTY 12,17 a 12,21). Podle VĚTY 17,8 však nemohou být souběžné, takže podle definice rozběžek jsou rozběžné.

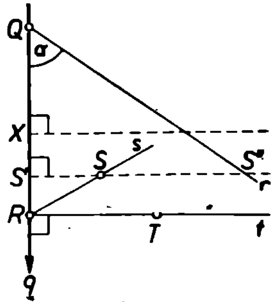
Okolnost, že přímky rozběžné mají právě jednu kolmici a že obráceně přímky, které mají společnou kolmici, jsou rozběžné, lze výstižně ilustrovat na modelu Beltrami-Kleinově. Podle toho, jak jsme u tohoto modelu definovali shodnost úhlů, jsou zde „přímky" „kolmé", jestliže náležejí přímkám polárně sdruženým vzhledem ke kružnici k (t. j. takovým, že jedna prochází pólem přímky druhé). „Rozběžky" p a q (viz obr. 75) mají společnou „kolmici" na sečně určené póly

P a Q. Jsou-li „přímky" p a q „souběžné" (viz obr. 76), pak póly P a Q leží na téže tečně kružnice k, takže neurčují žádnou „přímku". Podobně je tomu v případě „různoběžek", neboť spojnice pólů P a Q kružnici k neprotíná.

VĚTA 17,11. *Dvě přímky, které s třetí přímkou tvoří po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je $2R$, jsou rozběžné.*



Obr. 77.



Obr. 78.

DŮKAZ. Jsou-li p, q obě přímky a P, Q průsečíky s třetí přímkou, o níž mluví naše věta, pak kolmice vedená středem úsečky PQ na jednu z přímek p, q je kolmá i na druhou (podle věty o shodnosti trojúhelníků). Mají tedy přímky p, q společnou kolmici.

DEFINICE. Buďtež $\vec{p}$ a $\vec{q}$ dvě souběžky. Je-li Q bod na přímce $\vec{q}$ a P průsečík přímky p s kolmicí vedenou k ní bodem Q, pak úhel $\sphericalangle PQ\vec{q}$ nazýváme *úhlem souběžnosti bodu Q vzhledem k přímce p*. Budeme ho označovat $\Pi(pQ)$, protože závisí jen na vzdálenosti bodu Q od p.[21a]) Mají-li totiž body Q a R stejné vzdálenosti od přímky p, pak je $\Pi(pQ) \equiv \equiv \Pi(pR)$, jak se snadno dokáže nepřímo pomocí věty, že bodem lze k orientované přímce vést právě jednu souběžku.

VĚTA 17,12. *Je-li $pQ < pR$, pak $\Pi(pQ) > \Pi(pR)$.*

DŮKAZ. Nechť body Q a R leží na kolmici k přímce p (viz obr. 77) tak, že $pQ < pR$; rovnoběžky v téže orientaci vedené těmito body k p označme q a r. Kdyby bylo $\Pi(pQ) \equiv \Pi(pR)$, pak by přímky q a r tvořily s $\overline{QR}$ po jedné straně vnitřní úhly o součtu $2R$, byly by tedy rozběžné, zatím co podle VĚTY 17,6 jsou souběžné. Kdyby bylo $\Pi(pQ) < < \Pi(pR)$, potom polopřímka (RS) taková, že $\sphericalangle SRQ \equiv \Pi(pQ)$, by

[21a]) Tento symbol zavedl Lobačevskij.

padla do úhlu $\sphericalangle QR\vec{r}$ a při tom podle VĚTY 17,11 by neprotla q, což by byl spor, neboť by pak neprotla ani p.

VĚTA 17,13. *Je-li α jakýkoli ostrý úhel, pak vždy existuje k přímce p bod P tak, že je $\Pi(pP) = \alpha$.*

DŮKAZ. Budiž $\vec{q}$ orientovaná přímka, na níž leží bod Q (viz obr. 78). Určeme polopřímku r s počátkem v Q tak, že je $\sphericalangle (Q\vec{q})r \equiv \alpha$. Podle VĚTY 16,6 nemohou všechny kolmice na q (mající s q průsečík na polopřímce $(Q\vec{q})$) protnout rameno r. Podle toho můžeme nyní rozdělit body přímky q do dvou skupin S_1, S_2 takto: do skupiny S_1 dáme všechny body X, jimiž vedená kolmice na přímku q protíná rameno r, a s každým bodem X také všechny body polopřímky $(X\vec{q})$. Do skupiny S_2 dáme všechny ostatní body přímky q. Je zřejmé, že takto dostaneme Dedekindův řez a podle odstavce **13** víme, že existuje jeho vytvořující bod, který označíme R.

Nyní dokážeme, že kolmice t vedená bodem R k přímce q je souběžná s přímkou $\bar{r}$. K tomu stačí dokázat dvojí.

1. Jednak to, že t neprotíná přímku $\bar{r}$, což se sporem snadno odvodí.

2. Dále to, že každá polopřímka úhlu $\sphericalangle TRQ$ (kde T je bod na t po téže straně přímky q jako polopřímka r) protíná přímku $\bar{r}$. Je-li s taková polopřímka, potom kolmice vedená některým jejím bodem S protne přímku q v bodě S', pro který je $\mu(QS'R)$, takže s protne i přímku r; průsečík označme S''. Aplikujeme-li nyní axiom $\mathfrak{R}$, 4 na trojúhelník $\triangle QS'S''$ a přímku $\bar{s}$, pak vidíme, že s musí protnout mezi body Q a S'' přímku $\bar{r}$.

Je-li nyní dána přímka p, o níž mluví naše věta, pak stačí volit bod P tak, že je $pP \equiv Qt$, a potom bude $\Pi(pP) = \alpha$.

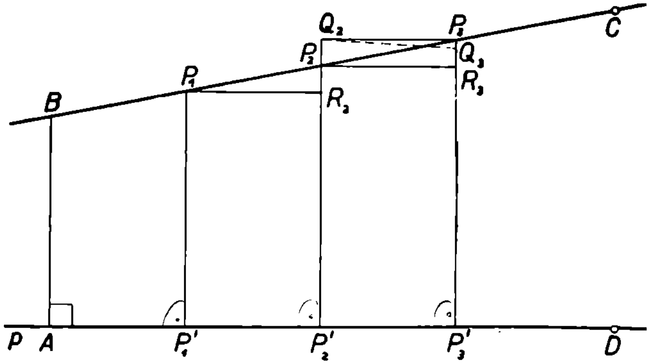
VĚTA 17,14. *Jestliže se úhel α neomezeně zmenšuje, pak*

1. *vzdálenost pP, pro kterou je $\Pi(pP) = \alpha$, se neomezeně zvětšuje,*

2. *vzdálenost pP, pro kterou je $\Pi(pP) = R - \alpha$, se neomezeně zmenšuje.*

DŮKAZ plyne okamžitě z VĚT 17,12 a 17,13.

Výsledek této věty by bylo lze říci také tak (jestliže bychom zavedli velikost úsečky a úhlu jako čísla), že úhel souběžnosti konverguje k nule, jestliže příslušná vzdálenost konverguje do ∞, a že úhel souběžnosti konverguje k R, jestliže příslušná vzdálenost konverguje k nule. Protože v eukleidovské geometrii je úhel souběžnosti pro všechny vzdálenosti roven R, vidíme, že neeukleidovská geometrie se tím více podobá eukleidovské, čím menší je část neeukleidovského prostoru, na niž tuto geometrii omezíme. Tento fakt lze vyjádřit ještě jinak. Kdyby na př. ve vesmíru platila neeukleidovská geometrie, při čemž by třeba úhel souběžnosti příslušející k vzdálenosti 10^6 světelných let měřil 10^{-6} sekund, potom by se neeukleidovská geometrie v oblasti nám dostupné prakticky nelišila od geometrie eukleidovské. Srovnej odstavec **1**, str. 13 a odstavec **3**, str. 21.



Obr. 79.

VĚTA 17,15. *Buďtež dány přímky* $\overline{AD}$ *a* $\overline{BC}$ *takové, že body* C *a* D *jsou po téže straně přímky* $\overline{AB}$, *úhel* $\sphericalangle BAD$ *je pravý, úhel* $\sphericalangle ABC$ *pravý nebo tupý. Jsou-li* P_1, P_2 *dva body polopřímky* (BC), *při čemž* $P_1 \neq B$ *a* $BP_1 < BP_2$, *potom platí, jestliže přímku* $\overline{AD}$ *označíme* p,

1. $BA < pP_1$,
2. $pP_1 < pP_2$,
3. *je-li dána jakákoli úsečka* $MN > BA$, *pak existuje na polopřímce* (BC) *bod* S *tak, že* $pS \equiv MN$.

DŮKAZ. 1.—2. Jsou-li předpoklady věty splněny a jsou-li P_1' a P_2' (viz obr. 79) průsečíky přímky $\overline{AD}$ s kolmicemi vedenými body P_1 a P_2 na přímku $\overline{AD}$, pak ve čtyrúhelníku $\square\, AP_1'P_1B$ musí být součet úhlů menší než $4R$, takže je $\sphericalangle ABC < \sphericalangle P_1'P_1C$ čili úhel $\sphericalangle P_1'P_1C$ je vždy tupý. Nechť nyní R_2 je bod na polopřímce $(P_2'P_2)$ a takový, že $P_1'P_1 \equiv$ $\equiv P_2'R_2$. V Saccheriho čtyrúhelníku $\square\, P_1'P_2'R_2P_1$ je úhel $\sphericalangle P_1$ vždy ostrý, takže polopřímka (P_1R_2) padne do úhlu $\sphericalangle P_1'P_1C$, takže R_2 leží mezi P_2' a P_2 čili $P_1P_1' < P_2P_2'$. Právě tak je vidět, že platí $BA <$ $< P_1P_1'$.

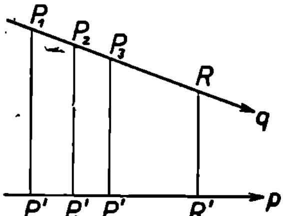
3. Budiž na $\overline{BC}$ bod P_3 takový, že je $\mu(P_1P_2P_3)$ a $P_1P_2 \equiv P_2P_3$, a budiž P'_3 průsečík $\overline{AD}$ s kolmicí vedenou bodem P_3 na $\overline{AD}$. Budiž dále R_3 bod polopřímky (P'_3P_3) takový, že $P'_3R_3 \equiv P'_2P_2$. Víme už, že R_3 padne mezi P'_3 a P_3.

Dokážeme nejdříve, že pro přírůstky R_3P_3 a R_2P_2 platí $R_2P_2 < R_3P_3$. Budiž Q_2 bod polopřímky $(P_2P'_2)^*$ takový, že $P_2Q_2 \equiv P_2R_2$. Trojúhelníky $\triangle P_1P_2R_2$ a $\triangle P_3P_2Q_2$ jsou shodné, takže $\sphericalangle P_2Q_2P_3 > R$, protože $\sphericalangle P_2R_2P_1 > R$. Jestliže na polopřímce (R_3P_3) určíme bod Q_3 tak, že $P_2Q_2 \equiv R_3Q_3$, pak v Saccheriho čtyrúhelníku $\square P_2R_3Q_3Q_2$ je $\sphericalangle Q_2 < R$, takže Q_3 leží mezi R_3 a P_3 čili $P_2Q_2 < R_3P_3$ čili $R_2P_2 < < R_3P_3$.

Je-li nyní dána úsečka MN, existuje podle Archimedova axiomu přirozené číslo n tak, že $n \,.\, R_2P_2 > MN - P_1P'_1$, takže pro bod P_{n+1}, který je určen vztahy $P_1 \prec P_2 \prec \ldots \prec P_n \prec P_{n+1}$ a $P_1P_2 \equiv P_2P_3 \equiv \equiv \ldots \equiv P_nP_{n+1}$ platí $pP_{n+1} > pP_1 + n \,.\, R_2P_2 > MN$. Rozdělíme-li nyní body úsečky P_1P_{n+1} tak, že do jedné třídy dáme ty body X, pro něž je $pX < MN$, do druhé dáme zbývající, je tím definován Dedekindův řez a vytvořující bod S má pak zřejmě tu vlastnost, že $pS \equiv \equiv MN$.

VĚTA 17,16. *Dvě rozběžky se od společné kolmice, na níž leží nejkratší spojnice jejich bodů, na obě strany od sebe neomezeně vzdalují.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 17,15 a z toho, že ve čtyrúhelníku je součet úhlů menší než $4R$.



Obr. 80.

VĚTA 17,17. *Souběžné přímky $\vec{p}$, $\vec{q}$ se sobě bez omezení (asymptoticky) blíží, t. j.*

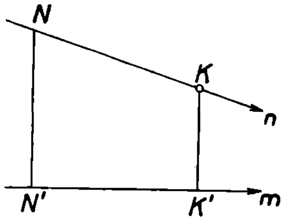
1. *jsou-li body P_1, P_2, P_3 přímky q takové, že je $P_2 \in (P_1\vec{q})$, $P_3 \in (P_2\vec{q})$, pak platí vztahy $pP_1 < pP_2 < pP_3$,*

2. *je-li dána libovolná úsečka MN, existuje na q bod S tak, že $pS < MN$.*

DŮKAZ. 1. Body P_1, P_2, P_3 veďme na p (viz obr. 80) kolmice $\overline{P_1P'_1}$, $\overline{P_2P'_2}$, $\overline{P_3P'_3}$. Úhel $\sphericalangle P'_3P_3P_1$ je vždy tupý, tedy podle VĚTY 17,15 je $pP_1 > pP_2 > pP_3$.

2. Zvolme orientovanou přímku $\vec{m}$ (viz obr. 81) a ve vzdálenosti menší než MN zvolme bod K a veďme jím souběžku $\vec{n}$. Podle VĚTY

17,15 existuje na polopřímce $(K\vec{n})$* bod N tak, že $mN \equiv pP_1$. Označíme-li N', K' průsečíky přímky m s kolmicemi vedenými body N a K k přímce m a zvolíme-li na polopřímce (P_1P_3) bod R tak, že $P_1R \equiv NK$, pak je $pR < MN$, jak plyne ze shodnosti čtyrúhelníků $\square\, P_1'R'RP_1$ a $\square\, N'K'KN$.



Obr. 81.

Nyní se budeme zabývat geometrií neeukleidovského prostoru, zavedeme vztah různoběžnosti, souběžnosti a rozběžnosti pro přímky a roviny a odvodíme vlastnosti těchto vztahů.

Definice. Dvě přímky v prostoru, kterými nelze proložit rovinu, nazýváme *mimoběžné*. Dvě přímky v prostoru, kterými lze proložit rovinu, nazýváme tak, jak se chovají ve společné rovině.

Víme tedy, co to znamená, že dvě přímky v prostoru jsou různoběžné, souběžné nebo rozběžné.

Věta 17,18. *Dvě rozběžky mají právě jednu společnou kolmou rovinu.*

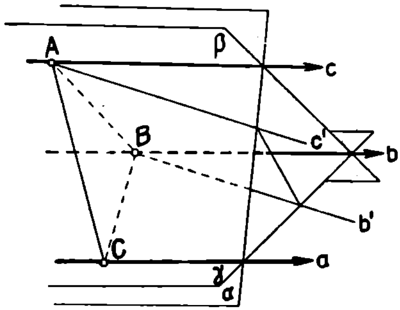
Důkaz. Vedeme-li společnou kolmici k oběma přímkám ve společné rovině a jsou-li P a Q její průsečíky s oběma přímkami a vedeme-li body P a Q kolmice na rovinu rozběžek, pak podle Věty 12,44 lze oběma kolmicemi proložit právě jednu rovinu a ta je kolmá na obě přímky a je jediná této vlastnosti.

Věta 17,19. *Buďtež dány v prostoru dvě souběžné přímky. Průsečnice dvou rovin* (různých od roviny obou souběžek), *z nichž každá prochází jednou z obou souběžek, je s oběma přímkami souběžná.*

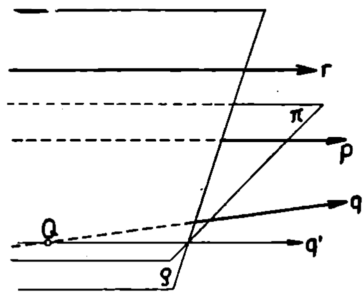
Důkaz. Buďtež $\vec{a}$, $\vec{b}$ dvě souběžky (viz obr. 82), α resp. β rovina incidentní s a resp. b a c průsečnice rovin α a β. Rovinu přímek a a b označme γ. Dokážeme nejdříve, že přímky a a c jsou souběžné. Je jasné, že jsou nerůznoběžné, protože jinak by jejich společný průsečík byl průsečíkem rovin α, β, γ a tedy by se i přímky a a b protly, což je proti předpokladu. Na přímkách a, b, c zvolme postupně body A, B, C. Přímku c orientujme tak, aby polopřímky $(A\vec{a})$, $(B\vec{b})$, $(C\vec{c})$ ležely vždy v téže polorovině určené přímkou $\overline{AC}$ resp. $\overline{BC}$ resp. $\overline{AB}$ na rovině α resp. β resp. γ. Každá polopřímka úhlu $\sphericalangle AC\vec{c}$ protne přímku a. Neboť je-li c' taková polopřímka, potom průsečnice b' rovin γ a $\overline{Bc'}$ leží uvnitř úhlu $\sphericalangle AB\vec{b}$, takže podle předpokladu protne přímku a. Roviny α, γ a $\overline{Bc'}$ se tedy protnou v jednom bodě, takže c' protne přímku a.

Analogicky se dokáže, že přímky b a c jsou souběžné.

VĚTA 17,20. *Je-li každá z orientovaných přímek $\vec{p}$ a $\vec{q}$ souběžná s orientovanou přímkou $\vec{r}$, pak také přímky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou souběžné.*



Obr. 82.



Obr. 83.

DŮKAZ. Jsou-li všechny tři přímky v jedné rovině, byla věta dokázána již dříve (17,6). Nechť tedy přímky p, q, r neleží v jedné rovině. Na q zvolme bod Q (viz obr. 83) a označme písmenem π rovinu $\overline{pQ}$ a písmenem ϱ rovinu $\overline{rQ}$. Protože $\vec{p}$ a $\vec{r}$ jsou souběžné, bude s nimi souběžná průsečnice $\vec{q}'$ rovin π a ϱ. Budou tedy souběžné dvojice přímek $\vec{r}$, $\vec{q}$ i $\vec{r}$, $\vec{q}'$. Protože ale bodem Q lze k $\vec{r}$ vést právě jednu souběžku, přímky q a q' splývají a tedy q a p jsou souběžné.

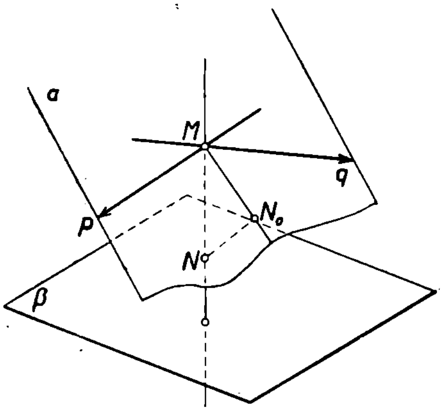
VĚTA 17,21. *Jsou-li dány dvě rozběžky a každou rozběžkou prochází rovina různá od roviny obou rozběžek, pak průsečnice obou rovin je rozběžná s oběma přímkami.*

DŮKAZ. Zmíněná průsečnice nemůže s nimi být různoběžná, protože by se pak dané přímky musely protnout. Podle VĚTY 17,19 nemohou být ani souběžné.

VĚTA 17,22. *Budiž dána přímka p a rovina α, při čemž $p \overline{\nabla} \alpha$. Přímky v rovině α, které leží s přímkou p v téže rovině (které nejsou tedy s p mimoběžné), jsou mezi sebou i s přímkou p buď různoběžné nebo souběžné nebo rozběžné a to podle toho, je-li p alespoň s jednou přímkou roviny α různoběžná nebo souběžná nebo rozběžná.*

DŮKAZ. Případ, kdy přímka p je různoběžná alespoň s jednou přímkou roviny α, je jasný. V obou ostatních případech naši větu snadno dokážeme pomocí VĚT 17,19 a 17,21.

DEFINICE. *Přímka je různoběžná* resp. *souběžná* resp. *rozběžná s rovinou,* jestliže není s touto rovinou incidentní a jestliže je různoběžná resp. souběžná resp. rozběžná alespoň s jednou její přímkou.



Obr. 84.

Je zřejmé, že když přímka je různoběžná s rovinou, pak s ní má právě jeden společný bod. Dále je podle předcházející věty patrné, že přímka nemůže být s rovinou současně souběžná i rozběžná.

VĚTA 17,23. *Jestliže přímka a rovina jsou rozběžné, pak mají společnou právě jednu kolmici.*

DŮKAZ. Danou rozběžkou vedeme k rovině rovinu kolmou. Podle VĚT 17,21 a 17,22 je průsečnice obou těchto rovin rozběžná s danou rozběžkou. Závěr plyne z toho, že dvě rozběžky mají vždy právě jednu společnou kolmici.

DEFINICE. Dvě různé roviny nazýváme *různoběžné,* jestliže mají alespoň jeden společný bod. Podle VĚTY 10,8 víme, že pak mají společnou přímku, které říkáme *průsečnice* obou rovin.

VĚTA 17,24. *Dvě roviny jsou různoběžné tehdy a jen tehdy, lze-li každým bodem jedné vést k druhé dvě souběžky.*

DŮKAZ. 1. Jsou-li dvě roviny různoběžné, zvolme v jedné z nich bod mimo průsečnici a veďme jím v této rovině obě souběžky k průsečnici. Podle definice jsou obě tyto souběžky zároveň souběžné s druhou rovinou.

2. Buďtež dány dvě roviny α a β a nechť bodem M prochází v rovině α dvě souběžky p, q k rovině β. Dokážeme, že roviny α a β mají společný bod.

Bodem M veďme kolmici $\overline{MN}$ (viz obr. 84) na β. Budiž N_0 průsečík roviny α s kolmicí vedenou k ní bodem N. Bod N_0 neleží podle VĚTY

12,46 na žádné z přímek p, q, protože přímky p, q svírají s $\overline{MN}$ stejné úhly a jsou různé. Podle VĚTY 12,46 platí $\sphericalangle NMN_0 < \sphericalangle NM\vec{p}$. Úhel $\sphericalangle NM\vec{p}$ je však úhel souběžnosti, tedy přímka $\overline{MN_0}$ protíná průsečnici rovin β a $\overline{MN_0N}$. Průsečík je společným bodem rovin α a β.

VĚTA 17,25. *Jestliže jedním bodem roviny β lze vést právě jednu v rovině β ležící souběžku s rovinou α, pak tuto vlastnost má každý bod roviny β.*

DŮKAZ. Budiž M bod roviny β, jímž prochází právě jedna v rovině β ležící souběžka p roviny α. Kdyby některým bodem roviny β procházely v rovině β dvě souběžky $\vec{p}$ a $\vec{q}$ k rovině α, pak by bodem M k přímkám $\vec{p}$, $\vec{q}$ vedené orientované souběžky musely být podle transitivnosti souběžnosti souběžné s α, což je proti předpokladu. Zbývá dokázat, že každým bodem roviny β lze (za předpokladu vytčeného na počátku našeho důkazu) v této rovině vést alespoň jednu souběžku s rovinou α. To je však zřejmé, neboť souběžka s přímkou p vedená tímto bodem v rovině β je v důsledku transitivnosti vztahu souběžnosti souběžná i s rovinou α.

DEFINICE. Roviny α a β jsou *souběžné*, jestliže alespoň jedním bodem roviny α lze vést právě jednu v rovině α ležící souběžku s rovinou β. Dvě roviny jsou *rozběžné*, jestliže žádná z nich neobsahuje přímky souběžné s druhou.

VĚTA 17,26. *Průsečnice roviny s dvěma rozběžnými rovinami jsou rozběžné přímky.*

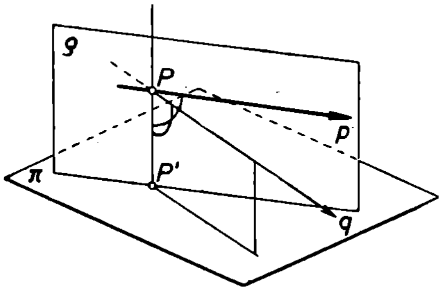
DŮKAZ. To je zřejmé, protože obě průsečnice nemohou být ani různoběžné, ani souběžné.

VĚTA 17,27. *Dvě rozběžné roviny mají vždy právě jednu společnou kolmici.*

DŮKAZ. Buďtež roviny α a β rozběžné. Zvolme v rovině α bod M a veďme jím kolmici na rovinu β a budiž N průsečík. Jestliže $\overline{MN}$ je kolmá na α, jsme hotovi. Jinak veďme bodem N kolmici $\overline{NP}$ na α. Rovina $\overline{MNP}$ je zároveň kolmá na α i na β a přitom protíná α a β ve dvou rozběžkách. Společná kolmice těchto rozběžek je společná kolmice rovin α a β. Tím je důkaz existence hotov. Tvrzení, že dvě rozběžné roviny mají nejvýše jednu společnou kolmici, lze snadno dokázat sporem.

VĚTA 17,28. *Je-li p souběžka k rovině π, pak přímkou p lze proložit právě jednu rovinu souběžnou s π.*

DŮKAZ. 1. *Existence*: Budiž P bod na p (viz obr. 85) a P' budiž průsečík π s kolmicí vedenou na π bodem P. Je-li ϱ rovina procházející přímkou p a bodem P', pak lze ukázat, že rovina δ procházející přímkou p kolmo na ϱ je souběžná s π. K tomu stačí vzhledem k VĚTĚ 17,25 dokázat, že bodem P nelze v rovině δ vést mimo $\vec{p}$ jinou souběžku k π. To je ale zřejmé, neboť je-li $\vec{q}$ nějaká souběžka vedená bodem P k π, pak jednak



Obr. 85.

$$\sphericalangle P'P\vec{q} \equiv \sphericalangle P'P\vec{p} \equiv \Pi(P'P),$$

jednak rovina vedená přímkou q kolmo na ϱ protne ϱ v přímce, která svírá s (PP') podle VĚTY 12,46 menší úhel než je $\Pi(P'P)$. Nemůže tedy q ležet v δ.

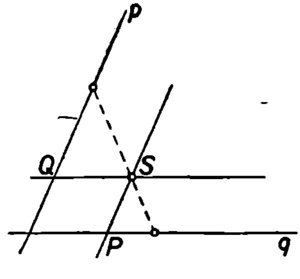
2. *Jednoznačnost*: Jestliže by rovina τ procházela přímkou p a nebyla kolmá na ϱ, pak průsečík P'' roviny τ a kolmice vedené k τ bodem P' padne mimo p, takže podle VĚTY 12,45 je $\sphericalangle P'PP'' < \sphericalangle P'P\vec{p} \equiv \Pi(P'P)$, takže $\overline{PP''}$ protíná π.

18. Svazek a trs přímek; cykl a sféra.

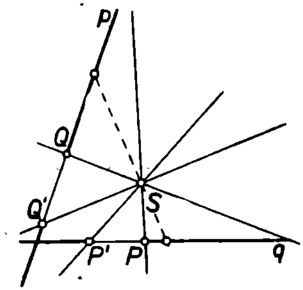
Pod vlivem rozvoje perspektivy v malířství (Leonardo da Vinci 1452—1519, A. Dürer 1471—1528, matematik G. Ubaldi 1545—1607) se v eukleidovské geometrii vytvořilo pojetí t. zv. *bodu v nekonečnu* a to jakožto bodu společného dvěma rovnoběžkám (tak to formuloval okolo 1640 G. Desargues). Často se takový bod nazývá také bod nevlastní nebo úběžný. K zavedení pojmu nevlastního bodu jsme v geometrii vedeni úvahami o centrální projekci, jestliže nechceme rozeznávat různé případy, ale naopak docílit jednotnosti v úvahách. Při vhodné centrální projekci dvou rovin na sebe mohou totiž, jak známo, rovnoběžkám v jedné rovině odpovídat různoběžky v druhé rovině, takže průsečíku různoběžek neodpovídá v původní rovině žádný bod.

Tento zjev můžeme sledovat také při centrální projekci v rovině. Jsou-li p a q dvě různoběžky a promítáme-li v eukleidovské rovině p na q ze středu S (který leží mimo obě přímky — viz obr. 86), pak každému bodu na p je přiřazen právě jeden bod na q s výjimkou bodu Q (pro který platí $QS \parallel q$), jemuž není na q přiřazen žádný bod. Na druhé straně však zbývá na přímce q bod P (pro který je $PS \parallel p$), k němuž neexistuje na přímce p bod, jemuž by mohl být přiřazen.

Jestliže přímku p orientujeme a budeme si myslit na ní bod pohybující se v jednom či druhém smyslu tak, že se bude neustále vzdalovat (od nějakého pevného bodu), potom jemu přiřazený bod na přímce q se bude stále blížit z té či oné strany bodu P. Okolí bodu P na přímce q nám zobrazuje tedy body přímky p, které jsou na př. od bodu Q na obě strany nad pomyšlení vzdáleny. Proto bod, který přidáváme přímce p a o kterém říkáme, že mu je přiřazen na q bod Q, nazýváme bodem v nekonečnu.



Obr. 86.

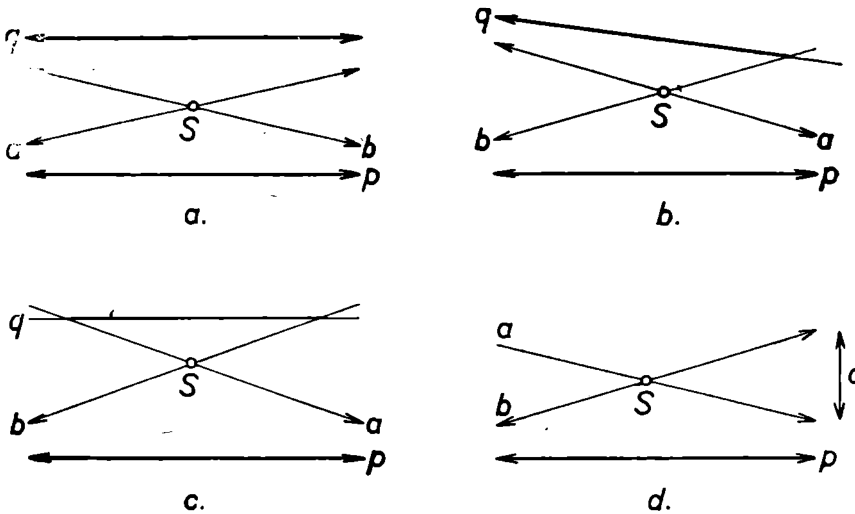


Obr. 87.

Okolí bodu P na přímce q nám také ukazuje, že z téhož důvodu, proč vůbec zavádíme nevlastní bod, je nutné, abychom zavedli pro přímku takový bod jen jeden, zatím co naivní představa by nám vnucovala nevlastní body dva, každý na jednom „konci" přímky. Protože tedy každá přímka má jen jeden nevlastní bod, má každá přímka roviny s geometrickým místem nevlastních bodů této roviny společný právě jeden bod. Odtud lze snadno pochopit, proč se toto geometrické místo pojímá jakožto *přímka*, t. zv. *přímka v nekonečnu* neboli přímka úběžná čili nevlastní (v geometrii se tento pojem vytvořil kolem r. 1750 a je spojen se jmény B. Taylora a J. H. Lamberta).

Zavedením nevlastních bodů bylo možno zobecnit pojem svazku přímek. Při vhodné centrální projekci dvou rovin na sebe odpovídá svazku různoběžek jedné roviny množina přímek, které jsou všechny navzájem rovnoběžné. Pojem nevlastního bodu nás vede k tomu, abychom takovou množinu rovnoběžek pojímali opět jako svazek, t. j. množinu všech přímek roviny, incidentních s jedním bodem — tentokráte incidentních s nevlastním bodem. V eukleidovské rovině, k jejímž bodům jsme přidali nevlastní body, máme tedy dva druhy svazků přímek: svazek různoběžek se společným bodem v konečnu a svazek rovnoběžek se společným bodem v nekonečnu.

Obraťme se nyní na Lobačevského neeukleidovskou geometrii. Budeme-li promítat na sebe body různoběžek p a q ze středu S (ležícího v rovině přímek p, q, avšak mimo tyto přímky — viz obr. 87), pak místo bodů P a Q obrázku 86 nastoupí úsečky PP' a QQ', jestliže žádná z přímek bodem nebude současně souběžná i k p i ke q. Jestliže při centrální projekci přímek v eukleidovské geometrii se přímka zobrazovala na útvar, který vznikl z přímky vyjmutím jediného bodu, zobrazuje se celá přímka v neeukleidovské geometrii na útvar vzniklý z přímky vyjmutím jisté množiny bodů, která je buď *prázdná* (obr. 88a, přímky p a q se neprotínají, přímky $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou obě orientované souběžky bodem S k p; přímka q je souběžná s $\vec{a}^*$ i s $\vec{b}^*$) nebo je to *polopřímka* (obr. 88b, disposice táž, jako na obr. 88a, až na přímku q, která je souběžná s $\vec{a}^*$ a protíná b) nebo jsou to *dvě*



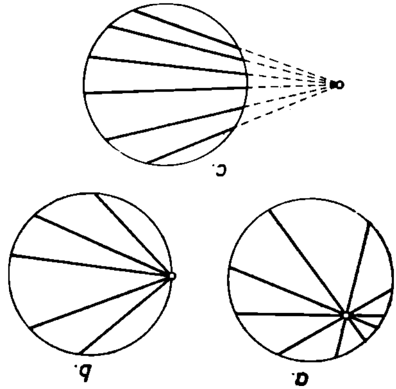
Obr. 88.

polopřímky bez společného bodu (obr. 88c, totéž jako na obr. 88a, až na přímku q, která protíná a i b) nebo konečně to je *celá přímka* (obr. 88d, disposice táž jako na obr. 88a, až na přímku q, která je souběžná s oběma přímkami $\vec{a}$, $\vec{b}^*$).

Podobně jako v eukleidovské rovině, tak také v rovině neeukleidovské bychom mohli zavedením nových bodů rozšířit pojem dosavadního bodu (který bychom mohli nazývat vlastním bodem) na pojem bodu jakožto „průsečíku“ jakýchkoli dvou přímek v rovině, i nerůznoběžných. Zde by však musely být nevlastní body dvojího druhu. Bod prvého druhu by náležel dvěma souběžným přímkám a mohli bychom ho nazývat *limitním nevlastním bodem.* Potom by každá přímka měla dva různé limitní nevlastní body. V modelu Beltrami-Kleinově by mu odpovídal bod základní kružnice k. Nevlastní bod druhého druhu by náležel dvěma rozběžkám a mohli bychom jej nazývat *vnějším nevlastním bodem.* Ve zmíněném modelu by mu odpovídal společný bod na prodloužení dvou nerůznoběžných přímek neboli vnější bod vzhledem ke kružnici k.

Odtud můžeme tušit, že v neeukleidovské geometrii budeme mít tři druhy svazků: *svazek různoběžek,* t. j. množinu všech přímek incidentních s určitým vlastním bodem (obr. 89a), *svazek souběžek* (v němž každé dvě přímky jsou souběžné), který bychom mohli pojímat jako množinu přímek incidentních s určitým limitním nevlastním bodem (obr. 89b), a *svazek rozběžek* (v němž každé dvě přímky jsou rozběžné), který by bylo možno chápat jako množinu všech bodů incidentních s určitým vnějším nevlastním bodem (obr. 89c).

V této knížce pojem nevlastního bodu zavádět nebudeme a k definici svazků použijeme jiného jednotícího hlediska, totiž centrálního promítání svazku různoběžek. Mimochodem ještě poznamenáváme, že jak eukleidovská přímka s nevlastním bodem, tak i neeukleidovská přímka se všemi nevlastními body se chová jako uzavřená čára. Vedle nevlastních bodů bychom mohli v neeukleidovské geometrii zavést také pojem nevlastní přímky a nevlastní roviny[22]) a pak ukázat, že vlastní i nevlastní elementy společně vyhovují všem incidenčním axiomům $\mathfrak{I}$. Pro tyto elementy platí navíc ještě na př., že každé dvě přímky v rovině se protínají, každé dvě roviny mají společnou přímku. Takto bychom dostali t. zv. *projektivní geometrii* a to obdobným způsobem, jako k ní lze zavedením nevlastních elementů dospět z geometrie eukleidovské (o tomto způsobu viz podrobněji M. Pasch [3], §§ 5, 6, 7, 8).



Obr. 89.

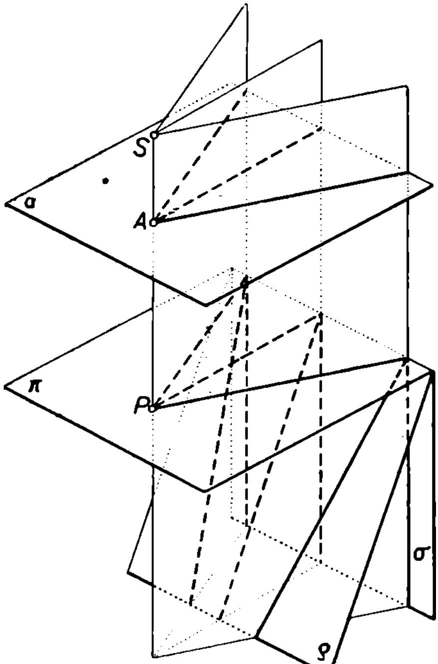
DEFINICE. *Svazek přímek* je množina všech přímek roviny, procházejících jedním bodem, který nazýváme *střed svazku.*

Svazek rovin je množina všech rovin, procházejících jednou přímkou, kterou nazýváme *osou svazku.*

OZNAČENÍ. Protože svazek přímek je určen středem a rovinou, svazek rovin osou, budeme svazky označovat tak, že symboly prvků, které svazek určují, napíšeme do hranatých závorek, na př. $[A,\alpha]$, $[p]$, $[\overline{AB}]$.

[22]) Při tom bychom museli rozlišovat dva druhy nevlastních přímek: s přímkou prvého druhu by byly incidentní pouze vnější nevlastní body, zatím co přímka druhého druhu by obsahovala vedle vnějších nevlastních bodů ještě právě jeden nevlastní bod limitní. Přímka, jež by vedle vnějších nevlastních bodů obsahovala právě dva nevlastní body limitní, by byla již vlastní (a incidentní ještě s nekonečně mnoha body vlastními). To vše lze názorně sledovat na modelu Beltrami-Kleinově. Současně je vidět, že geometrické místo limitních nevlastních bodů roviny bychom nemohli pojímat jako přímku, ale byla by to čára druhého stupně. Všechny tyto poznámky bychom mohli nyní přenést na roviny neeukleidovského (hyperbolického) prostoru.

DEFINICE. Buďtež dány roviny α a β a bod C mimo ně. Říkáme, že *rovinu α promítáme centrálně z bodu C do roviny β*, jestliže každému bodu A roviny α přiřadíme bod A' roviny β jakožto průsečík roviny β s přímkou $\overline{CA}$ (pokud průsečík A' existuje) a jestliže podobně každé přímce a roviny α přiřadíme přímku a' roviny β jakožto průsečnici roviny β s rovinou $\overline{aC}$. Stručně říkáme, že bod A resp. přímka a se z bodu C promítá na rovinu β jako bod A' resp. přímka a', nebo ještě stručněji, že bod A resp. přímka a se centrálně promítají jako bod A' resp. přímka a'.



Obr. 90.

POZNÁMKA. Mohlo by se zdát, že když už jsme definovali centrální průmět bodu, pak bychom průmět přímky mohli definovat jako množinu průmětů jejích bodů. Takový průmět by však nemusel být vždy přímkou, jak nás o tom poučuje obr. 88. Naproti tomu naše definice průmětu přímky je taková, že průmět, jestliže vůbec existuje, je vždy přímkou.

VĚTA 18,1. *Daný svazek přímek se centrálně promítá buď jako svazek nebo jako množina přímek, v níž kterékoli dvě přímky jsou souběžné (při souhlasné orientaci všech přímek množiny) nebo jako množina přímek, v níž kterékoli dvě přímky jsou rozběžné a při tom mají všechny společnou kolmici.*

DŮKAZ. Budiž dán svazek $[A, \alpha]$. Mimo rovinu α zvolme libovolně bod S. Ten s každou přímkou svazku $[A, \alpha]$ určí rovinu, při čemž množina všech takových rovin bude tvořit svazek rovin $[\overline{SA}]$.

1. Zvolíme-li rovinu π (viz obr. 90) nepatřící svazku $[\overline{SA}]$, ale *protínající přímku $\overline{SA}$* v bodě P, pak rovina π protne každou rovinu svazku $[\overline{SA}]$, všechny průsečnice mají společný bod P, takže tvoří svazek $[P, \pi]$.

2. Zvolíme-li rovinu ϱ *souběžnou s orientovanou přímkou* $\overrightarrow{SA}$, pak všechny průsečnice roviny ϱ s rovinami svazku $[\overline{SA}]$ jsou podle VĚTY 17,21 souběžné s přímkou $\overline{SA}$ a tedy podle VĚTY 17,19 i mezi sebou.

3. Zvolíme-li rovinu σ *rozběžnou s přímkou* $\overline{SA}$, pak průsečnice roviny σ s rovinami svazku $[\overline{SA}]$ jsou s přímkou $\overline{SA}$ (VĚTA 17,22) i mezi sebou rozběžné. Zbývá dokázat, že mají společnou kolmici. Zvolme jednu rovinu svazku $[\overline{SA}]$ a určeme její průsečnici s rovinou σ. Podle VĚTY 17,17 existuje právě jedna rovina φ kolmá na tuto průsečnici a zároveň na přímku $\overline{SA}$. Rovina φ je kolmá na rovinu σ (protože je kolmá alespoň na jednu její přímku) a na každou rovinu svazku $[\overline{SA}]$ (z téhož důvodu), je tedy kolmá na průsečnici roviny σ s každou rovinou svazku $[\overline{SA}]$. Její průsečnice s rovinou σ je společná kolmice všech našich rozběžek.

Vzhledem k předcházející větě můžeme nyní rozšířit pojem svazku přímek.

DEFINICE. Svazek přímek, který jsme výše definovali, budeme určitěji nazývat *svazkem různoběžek*. Je jednoznačně určen svým středem a rovinou (incidentní se středem), v níž leží přímky svazku.

Svazek souběžek je množina všech přímek roviny, souběžných s danou orientovanou přímkou. Tento svazek je jednoznačně určen kteroukoli orientovanou přímkou do něho patřící a s ní incidentní rovinou, v níž leží přímky svazku.

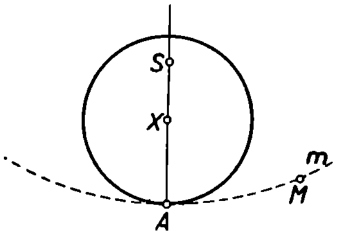
Svazek rozběžek je množina všech přímek kolmých na danou přímku, která se nazývá *básí svazku*. Basí a s ní incidentní rovinou, v níž leží přímky svazku, je svazek jednoznačně určen.

Obecně můžeme říci, že dvě přímky určují právě jeden svazek, jemuž obě patří. Svazek má tu vlastnost, že každým bodem roviny, v níž svazek leží (různým od středu svazku, jde-li o různoběžky), prochází právě jedna jeho přímka.

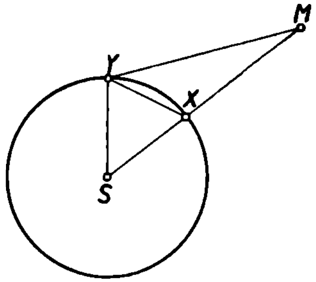
DEFINICE. *Kružnice* je množina všech bodů roviny, které mají od pevného bodu roviny touž vzdálenost. Tento pevný bod se nazývá *střed kružnice* a vzdálenost bodů od středu *poloměr kružnice*. Kružnici, která má střed S a obsahuje bod A, budeme symbolicky značit $\mathfrak{K}(S, A)$.

V dalším ukážeme, že pojem kružnice úzce souvisí s pojmem svazku přímek, jehož zobecnění nás vede i k obecnějšímu pojmu kružnice, kterému zde budeme říkat *cykl*. S obecnějším pojmem kružnice se setkáváme již v eukleidovské geometrii, ve které se někdy na *přímku* díváme jako na *limitní případ kružnice,* jejíž poloměr se bez omezení zvětšuje.

Definice. Jestliže střed X kružnic $\mathfrak{K}(X, A)$ probíhá polopřímku (AS) tak, že se neomezeně vzdaluje od bodu A (viz obr. 91), potom čára m je *limitní čarou kružnic* $\mathfrak{K}(X, A)$, jestliže pro každý bod M na čáře m a k libovolně zvolené vzdálenosti d lze určit na polopřímce (AS) bod C tak, že pro všechny body Y polopřímky $(CA)^*$ má kružnice



Obr. 91.



Obr. 92.

$\mathfrak{K}(Y, A)$ od bodu M vzdálenost menší než d. Při tom *vzdáleností bodu M od kružnice k* rozumíme infimum (viz odstavec **6**) všech vzdáleností MZ, kde Z probíhá všechny body kružnice k (pomocí infima jsme podobně již dříve definovali vzdálenost bodu od přímky, viz str. 76, pozn. [17])).

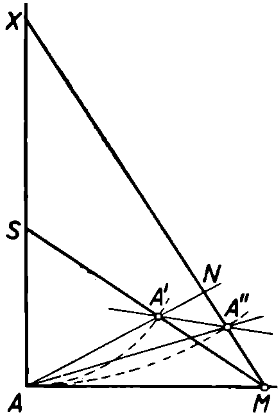
V eukleidovské geometrii lze dokázat, že limitní čára kružnic s neomezeně rostoucím poloměrem je přímka. Toto tvrzení je přímo *ekvivalentní* s Eukleidovým postulátem o rovnoběžkách, jak nyní dokážeme. Nejdříve však odvodíme dvě pomocné věty.

Věta 18,2. *Budiž dána kružnice $k = \mathfrak{K}(S, A)$ a nechť pro bod M platí $SM > SA$. Pak existuje společný bod X kružnice k a úsečky SM a vzdálenost bodu M od kružnice k je úsečka MX.*

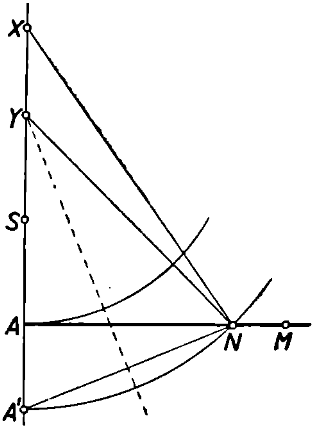
Důkaz. Na polopřímce (SM) (viz obr. 92) vždy existuje bod X tak, že je $SX \equiv SA$. Protože je $SM > SA$, je zřejmě $\mu(SXM)$. Budiž nyní $Y \neq X$ libovolný bod kružnice k. Jsou-li body Y, M, X kolineární, pak zřejmě $YM > XM$. Nejsou-li Y, M, X kolineární, pak úhel $\sphericalangle YXM$ je vždy tupý, protože je vedlejší k úhlu při základně rovnoramenného trojúhelníka $\triangle YSX$, který je vždy ostrý. V trojúhelníku $\triangle YXM$ je tedy $YM > XM$, takže XM je skutečně infimum (dokonce minimum) vzdáleností MY pro všechny body Y kružnice k.

VĚTA 18,3. *Budiž úhel* $\sphericalangle SAM$ *pravý. Je-li* X *jakýkoli bod polopřímky* $(SA)^*$, *pak bod* M *má od kružnice* $\mathfrak{K}(X, A)$ *vzdálenost menší než od kružnice* $\mathfrak{K}(S, A)$.

DŮKAZ. Budiž A' resp. A'' (viz obr. 93) bod na polopřímce (SM) resp. (XM) takový, že je $SA' \equiv SA$ a $XA'' \equiv XA$. Protože podle VĚTY 12,26 platí $XA' < XS + SA' \equiv XA''$, jest $\sphericalangle XA''A' < \sphericalangle XA'A''$



Obr. 93.



Obr. 94.

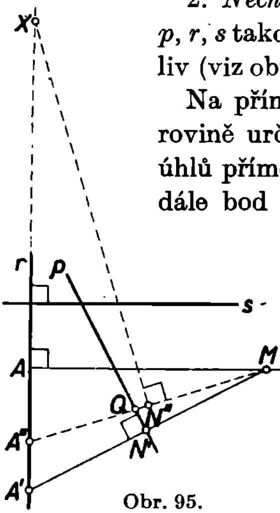
čili také $2R - \sphericalangle XA''A' > 2R - \sphericalangle XA'A''$. Protože body X a A'' leží po téže straně přímky $\overline{SM}$, leží polopřímka $(A'M)$ uvnitř úhlu $\sphericalangle (A'A'')(A'X)^*$, takže je $\sphericalangle MA'A'' < 2R - \sphericalangle XA'A''$. Protože je $\sphericalangle A'A''M \equiv 2R - \sphericalangle XA''A'$, je splněn vztah $\sphericalangle MA''A' > > \sphericalangle A''A'M$, takže v trojúhelníku $\triangle MA''A'$ platí $MA' > MA''$. Podle VĚTY 18,2 je důkaz hotov.

VĚTA 18,4. *Rovina má vlastnost* I *tehdy a jen tehdy, jestliže limitní čára kružnic, procházejících bodem* A *a jejichž střed* X *se neomezeně vzdaluje od bodu* A *po polopřímce* (AS), *je přímka.*

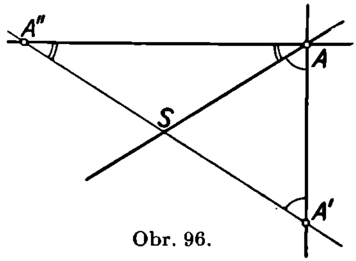
DŮKAZ. 1. *Nechť nejdříve rovina má vlastnost* I. Je-li dána jakákoli úsečka d, pak zvolme na přímce $\overline{SA}$ bod A' (viz obr. 94) tak, že je $\mu(SAA')$, $AA' \equiv d$. Budiž nyní N jakýkoli bod polopřímky (AM), pro kterou je $\sphericalangle SAM \equiv R$. Osa úsečky $A'N$ nestojí na $\overline{AM}$ nikdy kolmo, protíná tedy přímku $\overline{SA}$, průsečík označme Y. Tento průsečík leží vzhledem k větě o součtu dvou úhlů trojúhelníka na polopřímce $(A'S)$ a je-li d dosti malé, dokonce na (AS). Kružnice $\mathfrak{K}(Y, A)$ prochází bodem A a má od bodu N vzdálenost d. Pro všechna X polopřímky $(YA)^*$ má bod N podle VĚTY 18,3 od kružnice $\mathfrak{K}(X, A)$ vzdálenost menší než d, takže přímka $\overline{AM}$ je limitní čára kružnic $\mathfrak{K}(X, A)$.

2. *Nechť limitní čára kružnic je přímka.* Buďtež přímky p, r, s takové, že přímka r je kolmá na s a přímka p nikoliv (viz obr. 95). Dokážeme, že přímky p a r se protínají.

Na přímce r zvolme bod A' tak, aby ležel v té polorovině určené přímkou s, ve které je součet vnitřních úhlů přímek r a p s přímkou s větší než $2R$. Určeme dále bod M tak, že $A'M$ protíná přímku p v bodě



Obr. 95.

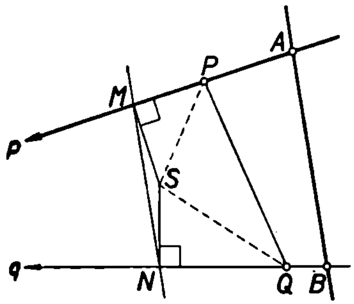


Obr. 96.

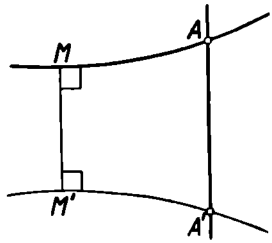
N', při čemž $A'M \perp p$, $A'N' \equiv N'M$. Vedeme-li bodem M kolmici na přímku r, která ji protne v bodě A, pak ke vzdálenosti AA', existuje bod C na r tak, že kružnice $\mathfrak{K}(X, A)$, jejíž střed X leží na polopřímce $(CA)^*$, má od bodu M vzdálenost menší než AA'. Kružnice $\mathfrak{K}(X, M)$ má podle VĚTY 18,2 s úsečkou AA' společný bod, označme jej A''; je tedy $\mu(AA''A')$. Je-li N'' půlící bod úsečky $A''M$, pak osa q této úsečky prochází jednak bodem N'', jednak bodem X.

Přímka p protíná stranu $A'M$ trojúhelníka $\triangle A'A''M$, protíná tedy ještě buď stranu $A'A''$, buď $A''M$. V prvém případě (nehledě na to, může-li skutečně nastat nebo ne) bychom byli s důkazem naší věty hotovi. V druhém platí pro průsečík Q se stranou $A''M$ dokonce $\mu(A''QN'')$, neboť ze vztahu $\mu(AA''A')$ plyne $A''M < A'M$ čili $N''M < N'M$, a protože $\triangle QN'M$ má při vrcholu N' pravý úhel, je $N'M < QM$, takže je $\mu(QN''M)$ a tedy také $\mu(A''QN'')$. Přímka p protíná tedy stranu

$A''N''$ trojúhelníka $\triangle A''N''X$. Stranu $N''X$ protnout nemůže, protože neprotíná ani polopřímku $(N''X)$. Kdyby totiž T byl průsečík, pak by úhel $\sphericalangle N'QM$, který je ostrý, byl vnějším úhlem trojúhelníka $\triangle QN''T$, tedy menší než $\sphericalangle QN''T \equiv R$, což by byl spor. Z toho plyne, že přímka p protíná stranu $A''X$ čili přímku r, což jsme měli dokázat.



Obr. 97.



Obr. 98.

Z VĚTY 18,4 plyne, že v Lobačevského geometrii není limitní čarou kružnice s neomezeně rostoucím poloměrem přímka, nýbrž nějaká zvláštní křivka. Tu lze však zavést také bez limitních přechodů, jestliže vhodně modifikujeme definici kružnice tak, aby nová definice nezávisela již na poloměru nebo na středu kružnice. Taková definice je skutečně možná a spočívá na tom, že spojnice koncových bodů dvou různých průměrů kružnice svírá s těmito průměry shodné úhly.

DEFINICE. Přímka $\overline{AC}$ se nazývá *isogonální k přímkám* $\overline{AB}$ *a* $\overline{CD}$, jestliže platí (v případě, že B a D leží po téže straně od $\overline{AC}$) $\sphericalangle BAC \equiv$ $\equiv \sphericalangle DCA$.

VĚTA 18,5. *Ke dvěma přímkám svazku lze bodem na jedné z nich vždy vést přímku k oběma isogonální. Ta je v případě svazku souběžek a rozběžek jednoznačně určena.*

DŮKAZ. 1. *Existence.* Daný bod přímky svazku označme A.

a) Jde-li o svazek různoběžek se středem S, pak nemá smysl uvažovat, že je $S = A$. Je-li $S \neq A$, pak přímka $\overline{AA'}$ (viz obr. 96) je isogonální k přímkám $\overline{SA}$ a $\overline{SA'}$, jestliže je $SA \equiv SA'$ (na SA' existuje ještě bod $A'' \neq A'$ tak, že $SA' \equiv SA''$).

b) Jde-li o rozběžky, jež mají společnou kolmici $\overline{MM'}$ (viz obr. 97), pak AA' je isogonální k přímkám $\overline{MA}$ a $\overline{MA'}$, jestliže je $MA \equiv M'A'$ a body A a A' leží po téže straně od $\overline{MM'}$ (Saccheriho čtyrúhelník).

c) Jde-li o svazek souběžek, zvolme na obou souběžkách $\vec{p}, \vec{q}$ po jednom bodu P, Q (viz obr. 98). Půlící polopřímky úhlů $\sphericalangle PQ\vec{q}$ a $\sphericalangle QP\vec{p}$ se protnou (neboť p a q jsou souběžné) v bodě S, který podle VĚTY 12,31 je stejně vzdálen od přímek p a q. Je-li M průsečík přímky p s kolmicí vedenou na ni bodem S a podobně N bod s analogickou vlastností na přímce q, je trojúhelník $\triangle MNS$ rovnoramenný a přímka $\overline{MN}$ isogonální k přímkám p, q. Zvolíme-li nyní na q bod B tak, že A a B jsou po téže straně od $\overline{MN}$ a $MA \equiv NB$, pak přímka $\overline{AB}$ je hledaná isogonální přímka vedená bodem A k přímkám p, q, neboť platí vztah $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ a tedy také $\triangle CDA \equiv \triangle DCB$.

2. *Jednoznačnost* v případě svazku souběžek a rozběžek dokážeme snadno sporem pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníka (VĚTA 12,23).

DEFINICE. Dva body na dvou různých přímkách p, q se nazývají *korespondující vzhledem k přímkám* p, q nebo krátce *korespondující*, jestliže jejich spojnice je k oběma přímkám p, q isogonální.

VĚTA 18,6. *Body A a A' na dvou různých přímkách svazku jsou korespondující tehdy a jen tehdy, je-li osa úsečky AA' přímka svazku.*

DŮKAZ. 1. *Body A a A' buďtež korespondující.* Pro svazek různoběžek je tvrzení zřejmé. U svazku rozběžek buďtež B a B' průsečíky base s oběma přímkami. V Saccheriho čtyrúhelníku $\square\, BB'A'A$ mají strany BB' a AA' společnou kolmici, která je půlí (VĚTA 15,11).

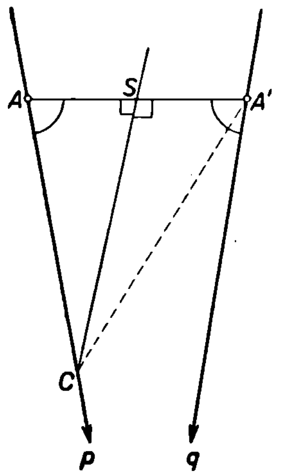
Jsou-li $p, \vec{q}$ souběžky, procházející body A a A' (viz obr. 99), a S je střed úsečky, pak osa úsečky AA' nemůže protnout žádnou z obou přímek p, q, neboť kdyby průsečík s jednou byl C, potom by bylo $\triangle ASC \equiv \triangle A'SC$ $(AS \equiv A'S,\ \sphericalangle ASC \equiv \sphericalangle A'SC \equiv R)$. Platilo by tedy $\sphericalangle SA'C \equiv \sphericalangle SA'\vec{q}$, což by byl spor. Leží tedy osa úsečky AA' mezi souběžkami, takže podle VĚTY 17,7 je s nimi souběžná.

2. *Nechť osa úsečky AA' je přímka svazku.* Pro svazek různoběžek a rozběžek je tvrzení zřejmé, protože jde o rovnoramenný trojúhelník resp. o Saccheriho čtyrúhelník. Jde-li o svazek souběžek, pak AA' je k oběma přímkám isogonální, protože úhly $\sphericalangle SA\vec{p} \equiv \Pi(\frac{1}{2}AA') \equiv$ $\equiv \sphericalangle SA'\vec{q}$.

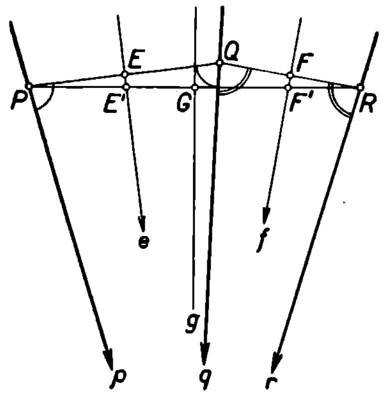
VĚTA 18,7. *Body A a A' na dvou různých přímkách svazku různoběžek resp. rozběžek jsou korespondující tehdy a jen tehdy, jestliže mají od středu resp. base svazku touž vzdálenost.*

DŮKAZ. Nechť oba body mají od středu resp. base svazku touž vzdálenost. Pak je věta zřejmá, neboť pak oba body tvoří se středem resp. s průsečíky base s přímkami svazku, incidentními s oběma body, rovnoramenný trojúhelník resp. Saccheriho čtyrúhelník.

Nechť spojnice $\overline{AA'}$ je isogonální k oběma přímkám svazku incidentními s body A, A'. Jsou-li to různoběžky s průsečíkem S, pak je $SA \equiv SA'$ podle VĚTY 12,25. Jsou-li obě přímky rozběžky a M a M'



Obr. 99.



Obr. 100.

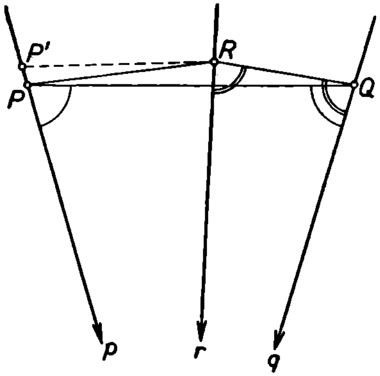
průsečíky s jejich společnou kolmicí (při čemž A a M resp. A' a M' leží na téže přímce), je-li H půlící bod úsečky AA' a je-li K průsečík osy úsečky AA' s přímkou $\overline{MM'}$, pak je $\triangle KHA \equiv \triangle KHA'$, a protože platí $\sphericalangle KAM \equiv \sphericalangle KA'M'$, je podle VĚTY 12,24 $\triangle KMA \equiv \triangle K'M'A$ a tedy také $MA \equiv M'A'$.

VĚTA 18,8. *Buďtež p, q, r tři přímky náležející témuž svazku a nechť bod P leží na p, Q na q a R na r. Jsou-li body P a Q korespondující a Q a R také, pak i body P a R jsou korespondující.*

DŮKAZ. Věta je zřejmá pro svazek různoběžek nebo rozběžek, protože v tom případě korespondující body mají stejné vzdálenosti od středu resp. base svazku.

Pro svazek souběžek dokážeme větu takto: Podle VĚTY 18,6 osa e úsečky PQ (viz obr. 100) a osa f úsečky QR jsou souběžné. Patří totiž do téhož svazku se souběžkami p, q, r. Vzhledem k VĚTĚ 18,6 stačí dokázat, že osa g úsečky PR je souběžná s e nebo f.

Předpokládejme nejprve, že q leží mezi p a r. Protože průsečík E' úsečky PR s e neleží mezi q a r, je $\sphericalangle RQE' > \sphericalangle RQ\vec{q} \equiv \sphericalangle QR\vec{r} > \sphericalangle QRE'$, takže je $PE' \equiv E'Q < E'R$. Podobně je $F'R < F'P$, takže střed G úsečky PR leží mezi E' a F'. Osa g úsečky PR nemůže protnout ani přímku e ani f. Kdyby totiž některou z nich protla, byl by průsečík stejně vzdálen od všech tří bodů P, Q, R, takže by jím procházely obě přímky e a f, což není možné, protože jsou souběžné. Přímka g leží tedy mezi souběžkami e a f a je tedy s nimi souběžná podle VĚTY 17,7.



Obr. 101.

Předpokládejme nyní, že na př. přímka r leží mezi p a q (viz obr. 101). Kdyby P a R nebyly korespondující, mohli bychom vést bodem R isogonální přímku k p a r a dostali bychom tak na p bod $P' \neq P$, korespondující bodu R. Podle předcházející úvahy by body P' a Q byly korespondující, tedy by $\overline{P'Q}$ byla isogonální přímka k p a q. Přímky $\overline{PQ}$ a $\overline{P'Q}$ jsou různé, procházející týmž bodem, a obě by byly isogonální k přímkám p, q, což není možné (VĚTA 18,5).

DEFINICE. *Cykl* určený svazkem přímek a bodem A je množina bodů, která má tyto vlastnosti:

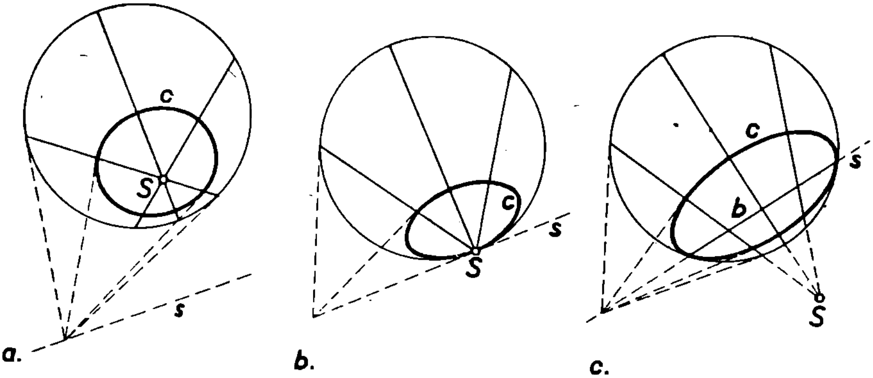
1. patří do ní bod A,

2. patří-li do ní bod X na přímce x svazku, pak do ní patří každý bod Y, který leží na některé přímce y svazku, při čemž body X, Y jsou korespondující vzhledem k přímkám x a y.

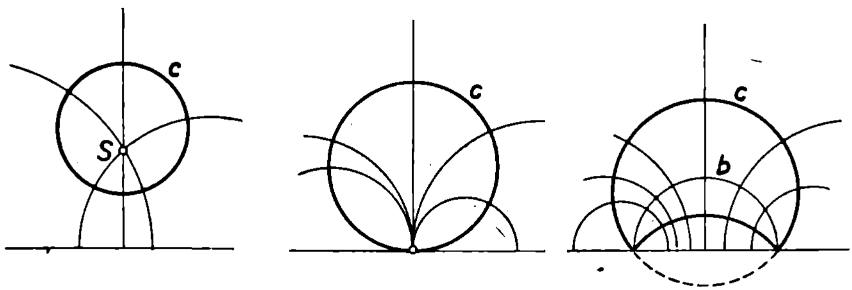
Klasifikace svazků nám dovoluje provést klasifikaci cyklů následujícím způsobem:

cykl určený svazkem různoběžek je *kružnice*, jejíž střed leží ve středu svazku, cykl určený svazkem souběžek se nazývá *horocykl* a můžeme jej pojímat jako limitní případ kružnice, jejíž poloměr se bez omezení zvětšuje,

cykl určený svazkem rozběžek se nazývá *ekvidistanta*, protože jeho body mají od base svazku konstantní vzdálenost. Je zřejmé, že mezi ekvidistanty patří i přímka.[23])



Obr. 102.



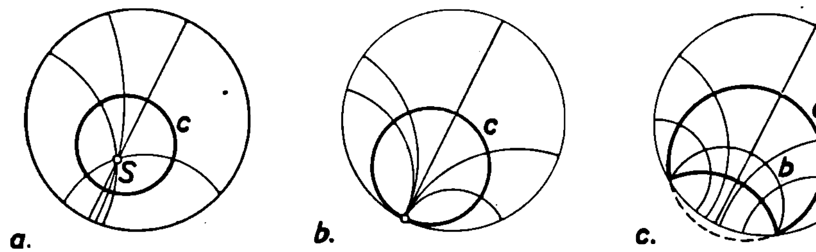
Obr. 103.

Uvedené tři druhy cyklů můžeme jednoduchým způsobem znázornit na našich modelech. Toto znázornění se zakládá na tom, že cykl určený svazkem je orthogonální trajektorie přímek tohoto svazku. Při tom orthogonální tra-

---

[23]) Místo *ekvidistanta* se také říká *hypercykl* (podle Gausse). Slovo *horocykl* znamená limitní kružnici, protože řecké slovo ὅρος značí hranici, mez. V témž duchu se někdy místo kružnice říká *endocykl* (ἔνδον — uvnitř) a místo ekvidistanta *exocykl* (ἔξω — vně, mimo). (Gauss používal pro horocykl názvu *paracykl*.)

jektorií nějaké množiny přímek se rozumí čára, jež je na každou přímku množiny kolmá, t. j. taková, že tečna v průsečíku křivky s přímkou svírá s touto přímkou pravý úhel. Uvedená vlastnost by se dala odvodit z naší definice cyklu limitními úvahami. V modelu Beltrami-Kleinově (viz obr. 102) se cykl zobrazuje jako *elipsa*, která má k základní kružnici modelu jisté polární vlastnosti, jež se dají odvodit z toho, že „přímky" v tomto modelu jsou „kolmé", jestliže náleží přímkám polárně sdruženým vzhledem k základní kružnici (srv. str. 115). Na obr. je bod S pólem přímky s jak vzhledem k základní kružnici, tak vzhledem k „cyklu"



Obr. 104.

c. Na obr. c je b base svazku rozběžek a příslušná elipsa zobrazuje ekvidistanty po obou stranách přímky b.

U obou modelů Poincaréových (viz obr. 103 a 104) se cykly znázorňují jako *kružnice* (u „ekvidistanty" jsou to dva oblouky kružnic), jež jsou orthogonální ke kružnicím znázorňujícím „přímky" svazku, protože v Poincaréových modelech se úhly zobrazují v pravé velikosti. Zde o označení na obrázcích platí táž poznámka jako u obr. 102.

VĚTA 18,9. *Třemi různými body prochází právě jeden cykl.*

DŮKAZ. Leží-li všechny tři body na přímce, je tato přímka cyklem, o němž mluví naše věta, a je jednoznačně určena. Neleží-li všechny tři body P, Q, R na přímce, pak osy úseček PQ a QR určují svazek přímek, vzhledem k jehož přímkám jsou body P, Q, R korespondující (podle VĚTY 18,6). Svazkem a některým z bodů P, Q, R je jednoznačně určen cykl, procházející body P, Q, R.

Jako analogické pojmy svazku a cyklu definujeme v prostorové geometrii trs a sféru.

DEFINICE. *Trs různoběžek* je množina všech přímek v prostoru, jež procházejí jedním bodem, který nazýváme *střed trsu.*

Trs souběžek je množina všech přímek prostoru souběžných s danou orientovanou přímkou. Za tuto přímku můžeme vzít jakoukoli orientovanou přímku svazku.

Trs rozběžek je množina všech přímek kolmých na danou rovinu, která se nazývá *basí trsu.*

Obecně má trs tu vlastnost, že každým bodem prostoru prochází právě jedna jeho přímka (výjimku činí bod, který splývá se středem trsu, jde-li o různoběžky). Dále je zřejmé, že kterýmikoli dvěma přímkami trsu lze proložit rovinu. Můžeme tedy hovořit o přímce isogonální ke dvěma přímkám trsu a právě tak o korespondujících bodech vzhledem k přímkám trsu.

DEFINICE. *Sféra* určená trsem přímek a bodem A je množina bodů, která má tyto vlastnosti:

1. patří do ní bod A,
2. patří-li do ní bod X na přímce x trsu, pak do ní patří každý bod Y, který leží na některé přímce y trsu, při čemž body X, Y jsou korespondující vzhledem k přímkám x a y.

Podle trsů můžeme jimi vytvořené sféry roztřídit takto:

sféra určená trsem různoběžek je *koule*, jejíž střed je totožný se středem trsu;

sféra určená trsem souběžek se nazývá *horosféra* a můžeme ji pojímat jako limitní případ koule, jejíž poloměr se bez omezení zvětšuje;

sféra určená trsem rozběžek se nazývá *ekvidistantní plocha*, protože její body mají od base trsu konstantní vzdálenost. Je zřejmé, že mezi ekvidistantní plochy patří také rovina.[24])

VĚTA 18,10. *Rovina, která prochází alespoň jednou přímkou trsu, který určuje kouli resp. horosféru resp. ekvidistantní plochu, protíná tuto sféru v kružnici, resp. horocyklu resp. ekvidistantě.*

DŮKAZ je zřejmý z toho, že množina všech přímek společných trsu a rovině, jež prochází alespoň jednou jeho přímkou, je svazek, a to téhož druhu jako trs.

DEFINICE. *Elementární čarou na sféře* budeme rozumět každou průsečnici sféry s rovinou procházející alespoň jednou přímkou trsu, určujícího sféru, tedy každou z křivek, o nichž mluví VĚTA 18,10.

---

[24]) Podobně jako u cyklů užívá se i pro sféry názvů *horosféra* (*parasféra*), *endosféra* a *exosféra* (*hypersféra*).

Kdybychom měli definován pojem *délky křivé čáry*, pak bychom pomocí limitních úvah mohli dokázat, že elementární čára na sféře má tu vlastnost, že *její oblouk mezi jakýmikoli dvěma jejími body A, B nemá větší délku než oblouk omezený body A, B na jakékoli jiné čáře plochy* (jde-li o čáru uzavřenou, rozumíme jejím obloukem mezi body A, B ten z obou oblouků, na něž dvojice bodů A, B čáru rozděluje, který nemá větší délku než oblouk druhý). Krátce bychom to mohli říci také tak, že elementární čára na sféře je *nejkratší spojnicí dvou bodů.*

Elementární čarou na rovině je podle definice každá její přímka. Výše zmíněnou vlastnost přímky jakožto nejkratší spojnice dvou bodů dokazuje částečně naše VĚTA 12,32, podle níž je úsečka AB kratší než jakákoli *lomená* čára, která spojuje body A a B.

O jedné vlastnosti elementárních čar na sférách, která připomíná ještě jinou vlastnost přímek, mluví následující věta.

VĚTA 18,11. *Jsou-li dány dva body na sféře, jež jsou různé (a jde-li o kouli, neleží na téže přímce, jdoucí středem), pak na ní existuje právě jedna elementární čára, jež oběma body prochází.*

DŮKAZ. Tato elementární čára je průsek sféry s rovinou, určenou přímkami trsu sféry, které procházejí oběma danými body. Každým bodem prochází však právě jedna přímka trsu a každé dvě přímky trsu, pokud nesplývají, leží právě v jedné rovině. Odtud plyne jednoznačné určení elementární čáry.

Každá sféra se svými elementárními čarami jakožto „přímkami" může být v určitém smyslu považována za jakýsi zvláštní případ roviny, a proto můžeme hovořit o geometrii této sféry podobně, jako u koule mluvíme o geometrii sférické.

Protože každý druh sfér eukleidovského prostoru (totiž rovina a koule) má jinou geometrii, je nasnadě otázka, zda každá ze tří sfér různého druhu, jež poskytuje Lobačevského prostor, nemá svou vlastní geometrii. Odpověď na tuto otázku je kladná:

na kouli platí *geometrie sférická*, zcela tak jako na kouli eukleidovské;

na ekvidistantní ploše platí táž *rovinná geometrie Lobačevského* jako na rovině Lobačevského prostoru, což je patrné z toho, že mezi ekvidistantní plochy patří také všechny roviny;

na horosféře platí *geometrie eukleidovská*, neboť máme-li na horosféře elementární čáru g a mimo ni bod A, pak bodem A lze na sféře vést právě jednu elementární čáru, neprotínající g. Je-li totiž γ rovina čáry g a a přímka trsu incidentní s bodem A, pak přímka a je souběžná s rovinou γ. Máme-li nyní určit elementární čáru neprotínající g, musí ležet v rovině souběžné s γ a incidentní s A. Podle VĚTY 17,28 lze však přímkou a vést takovou rovinu právě jednu.

Výsledek, že na horosféře platí geometrie eukleidovská, je jistě velmi překvapující. V geometrii eukleidovské nemá obdoby, neboť v eukleidovském prostoru neexistuje plocha, na které by platila Lobačevského rovinná geometrie. Existují v něm pouze plochy (na př. pseudosféra Beltramiho, srv. odstavec **19**, str. 143), na nichž platí toliko geometrie *části* Lobačevského roviny, nikoli však geometrie Lobačevského *celé* roviny.

Vidíme, že ačkoli jsme při budování Lobačevského geometrie vyšli z předpokladu, že geometrie eukleidovská neplatí, přece však se nám Eukleidova geometrie znovu objevila, i když na místě, kde bychom to nejméně čekali. Tato zvláštnost utvrdila Lobačevského v tom, že jeho nová geometrie je právě tak logicky bezesporná jako geometrie Eukleidova.

ČÁST II

HISTORICKÝ VÝVOJ

ÚVOD

19. Objevitelé neeukleidovské geometrie a jejich předchůdci. První prací o neeukleidovské geometrii publikovanou tiskem byla jednak Lobačevského kniha *O načalach geometrii*, vydaná v Kazani r. 1829, jednak spis Jana Bolyaie *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, který vyšel (1832 v Maros-Vásárhély) jako dodatek ke knize Bolyaiova otce, věnované základům matematiky. Ačkoliv oba tyto spisy jdou ve výkladu nové geometrie dosti daleko a dostatečným způsobem mohly prokázat vážnost a důležitost nového objevu, přesto zůstaly dlouhou dobu bez povšimnutí. Zatím co J. Bolyai nepublikoval již jiné spisy, snažil se Lobačevskij ve svých dalších pracích, vydaných jak v Rusku, tak i v západní Evropě, upoutat na nový objev pozornost, avšak marně.

Tento osud neeukleidovské geometrie lze konec konců částečně vysvětlit tím, že velkou překážkou, která zde stála v cestě, bylo přesvědčení o jedinečnosti geometrie eukleidovské a o její naprosté shodě se skutečností; přesvědčení, podporované tou dobou všeobecně uznávaným kantovským falešným pojetím, že prostor je vrozená nazírací forma, která je nám jednou provždy dána nezávisle na jakékoli zkušenosti a o které nemá smysl bádat, proč je právě taková, jaká je. Vedle toho zůstaly oba spisy nepovšimnuty jistě i proto, že jména obou autorů byla matematickému světu úplně neznámá.

Situace se změnila, když několik let po smrti velikého matematika C. F. Gausse vyšel r. 1860 druhý svazek jeho korespondence. V něm byly uveřejněny dopisy, ve kterých Gauss vysoko cenil práce Lobačevského a Bolyaie a ze kterých bylo vidět, že i Gauss sám dospěl k podobným výsledkům jako oni. Neeukleidovská geometrie se hned stala předmětem velkého zájmu. R. 1866 vychází francouzský překlad Lobačevského spisu *Geometrische Untersuchungen* a o rok později překlad Bolyaiova *Appendixu*, oba dva od francouzského matematika J. Houëla.

Krátce nato vycházejí také překlady do italštiny a angličtiny. Současně se objevují v italských a francouzských matematických žurnálech historicko-kritické články o Lobačevském a Bolyaiovi i první samostatné stati o neeukleidovské geometrii. Mezi nejznámější jejich autory patří J. Houël, G. Battaglini, E. Beltrami.

Významný krok vpřed učinil 1868 Beltrami, když ukázal, že v eukleidovském prostoru existuje plocha, t. zv. pseudosféra, která se se svými geodetickými čarami chová podobně jako rovina Lobačevského. O tento výsledek se opřel Helmholtz, který ještě téhož roku 1868 publikoval práci *Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, ve které navazoval také na významnou Riemannovu stať *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854) a ve které uvedl problém rovnoběžek do širší souvislosti s obecnými prostory, jaké studuje diferenciální geometrie.

Nebudeme nyní dále líčit vítězný postup neeukleidovské geometrie a její další rozvoj. Již dříve jsme řekli, že její plné uznání porazilo mylné názory o jedinečnosti geometrie eukleidovské i mylné Kantovo učení o apriornosti našeho prostorového nazírání, takže její vítězství přesáhlo rámec samotné matematiky.

Uznání neeukleidovské geometrie ukázalo dále v pravém světle geniálnost obou jejích tvůrců Lobačevského a Bolyaie a vydobylo jim slávu objevitelů nového, do té doby úplně neznámého myšlenkového světa. Proto bylo velkým překvapením, když r. 1889 Beltrami zjistil, že již r. 1733 Ital Girolamo Saccheri došel při pokusu dokázat V. Eukleidův postulát k některým větám, které byly připisovány Lobačevskému a Bolyaiovi. Vedle toho se zakrátko ukázalo, že Saccheri není zjev ojedinělý: r. 1893 objevil P. Stäckel v málo známém časopise *Magazin für die reine und angewandte Mathematik*, čítajícím všeho všudy jen tři ročníky, práci J. H. Lamberta o rovnoběžkách (napsanou r. 1766), při jejímž bližším rozboru zjistil, že Lambert je vlastně dalším dotud neznámým předchůdcem Lobačevského a Bolyaie.

Povzbuzen tímto objevem začal Stäckel podrobněji studovat vývoj theorie rovnoběžek od dob Eukleidových. Seznal, že údobí od Eukleida až do Lobačevského představuje v tomto ohledu rušný vývojový proces, dotud takřka neznámý. Jestliže na jeho počátku matematikové při svých pokusech dokázat V. postulát odhalovali jen tvrzení, ekvivalentní s tímto postulátem, pak ke konci dochází řada matematiků k závěrům, jež přesahují již hranice eukleidovské geometrie. Tyto závěry byly u nich však jen isolovanými větami a k tomu, aby bylo možno mezi nimi odhalit hlubší souvislost, jich bylo příliš málo. Matematikové, kteří k takovým větám došli, si proto neuvědomili jejich dosah a zůstávali cele v zajetí eukleidovské geometrie, o níž byli přesvědčeni, že je jedinou možnou geometrií, a ani v nejmenším jim nepřipadla na mysl možnost, že by mohla existovat také ještě geometrie jiná (jakousi výjimkou v tomto ohledu byl, zdá se, pouze J. H. Lambert, viz odst. **22**). Tito matematikové byli zároveň přesvědčeni, že se V. Eukleidův postulát dokázat dá, a každý z nich se domníval, že důkaz tohoto postulátu skutečně podal. Z toho, co jsme řekli, vyplývá, že žádný z těchto matematiků nemůže být označen jako objevitel neeukleidovské geometrie, ačkoliv při pokusu sporem dokázat V. postulát někteří z nich docházejí k větám, které dnes počítáme do neeukleidovské geometrie. Všechny tyto okolnosti vedly P. Stäckela k tomu, že nazval období před Lobačevským *předhistorií neeukleidovské geometrie.*

Jestliže podrobné studium historického vývoje neeukleidovské geometrie ukázalo na jedné straně, že k jejímu objevu nedošlo přes noc, nýbrž že tento objev byl připravován dlouhým obdobím tápání a někdy, možno říci, i namáhavým bojem, pak na druhé straně vyjasnilo i otázku, komu patří zásluha za tento objev. V tom nebyli totiž matematikové zajedno. Někteří z nich ji připisovali Lobačevskému a J. Bolyaiovi, jiní ji připisovali C. F. Gaussovi a někteří dokonce tvrdili, že Gauss svým objevem ovlivnil jak Lobačevského, tak Bolyaie, takže tito dva nemohou být považováni za samostatné objevitele nové geometrie. Avšak již sám P. Stäckel dokázal neopodstatněnost podobných tvrzení. Ukázalo se naopak, že velká sláva, která provázela Gausse jakožto velmi významného matematika, zavinila, že byl za neeukleidovskou geometrii chválen víc, než ve skutečnosti zasluhoval. Ukázalo se také, že došel sice k nové geometrii dřív než ostatní, avšak neunesl celou tíhu zodpovědnosti, která tím na něm jako na velkém vědci spočinula, a tak koruna za vítězství v boji o pokrok vědy patří těm, kteří došli k nové geometrii sice později než on, avšak publikací svých prací se rozhodli vydobýt nové geometrii to místo, které jí náleží.

Lobačevskij i Bolyai se odhodlali k zápasu o uznání neeukleidovské geometrie bez ohledu na to, že to bylo v době ovládané takovými předsudky, že hájit tuto novou vědeckou pravdu znamenalo, jak se Gauss sám vyjádřil, *píchat do vosího hnízda a vydávat se nebezpečí, že začnou nebezpečně dorážet kolem hlavy.* Naproti tomu Gauss se zařekl vůbec něco ze svých myšlenek publikovat, protože se, jak sám napsal, bál křiku Boiotů,[25]) který by se zdvihl, kdyby vyslovil naplno svoje názory. Nepublikoval nic, ačkoliv byl o to nejednou žádán přáteli. Neučinil tak přesto, že se těšil nesmírné autoritě, která se projevila také v tom, jak jsme před chvílí viděli, že teprve několik poznámek v jeho dopisech přinutilo matematiky číst Lobačevského i Bolyaiovy práce.

Gauss se neodhodlal ani k tomu, aby povzbudil oba objevitele nové geometrie nebo jim vyslovil svoje uznání. Ani na výslovnou žádost Bolyaiova otce, který byl Gaussovým přítelem z mládí, nedovedl göttingenský „princeps mathematicorum" napsat povzbuzující slovo tak nadanému člověku, jako byl Jan Bolyai, který ve věku 23 let se dopracoval k začátkům neeukleidovské geometrie. Jan Bolyai, kterému se přes skvělé nadání nedostalo matematického vzdělání na universitě, žil po svém objevu v ústraní, zlomen jednak tím, že Gauss, ke kterému vzhlížel s velkou úctou, se zachoval k jeho práci a vůbec k objevu nové geometrie tak chladně, jednak tím, že viděl, že priorita objevu nové geometrie nepatří jen jemu.

Lobačevskij vedl svůj boj o neeukleidovskou geometrii úplně osamocen. Za celý svůj život se nedozvěděl, zda vůbec někdo čte s porozuměním jeho práce, neměl s kým si o nich pohovořit a také se nikdy nedozvěděl, že jiní docházejí k podobným výsledkům jako on. Přesto však na svém objevu stále pracoval. Když viděl, že jeho spisům není v Rusku věnována pozornost, publikoval svoje práce francouzsky v Crellově žurnálu a později vydal v Berlíně německy psaný spis *Geometrische Untersuchungen.* Při tom se stále snažil o přístupnější a lepší výklad, aby novému objevu byla věnována ta pozornost, kterou zasluhoval.

U Lobačevského je nutno zejména ocenit nebojácnost, s kterou šel za svým cílem, i když se mu stavěly v cestu překážky. Ačkoliv byl

---

[25]) *Boiotové,* jeden ze starořeckých kmenů, byli od svých kulturně vyspělejších sousedů attických považováni za nevzdělané. Proto boiotský znamená totéž jako hrubý a ignorantský.

v Kazani všeobecně váženým člověkem, protože jako dlouholetý rektor se velice zasloužil o kazaňskou universitu, které zasvětil celý svůj život, přesto byly v regionálním časopise uveřejněny jako „recense" jeho prací o nové geometrii posměšné články, namířené proti němu s neslýchaným cynismem. Ani ve vědeckém světě se nesetkal s porozuměním: na půdě petrohradské Akademie vystoupil proti jeho pracím matematik Ostrogradskij [26]), který se nedovedl přenést přes rozdíly a rozpory mezi starou a novou geometrií.

Podrobnějšímu vylíčení Lobačevského i Bolyaiovy a Gaussovy objevitelské práce, jakož i rozboru výsledků matematiků „předhistorického" období v oboru theorie rovnoběžek budou věnovány následující odstavce.

---

[26]) M. V. Ostrogradskij (1801—1861) byl významný ruský matematik, který se zabýval různými partiemi matematické analysy a jejími aplikacemi. Jeho jménem je nazvána formule integrálního počtu, převádějící objemový integrál na integrál plošný. Tato formule někdy také nese jméno Gaussovo nebo Greenovo (podle anglického matematika G. Greena, 1793—1841).

PŘEDHISTORIE NEEUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE

20. Poseidonios, Aganis, Proklos, Nasîr-Eddîn, Vitale, Wallis. Již na začátku této knížky jsme řekli, že objev neeukleidovské geometrie má kořeny v době Eukleidově, kdy někteří z řeckých matematiků vážně pochybovali, že by se V. postulát nedal dokázat z ostatních a pokoušeli se podat důkaz tohoto postulátu. Takových matematiků byla celá řada. Nejstarší z nich, které známe podle jména, byli Poseidonios a Aganis (I. st. př. Kr.). Domnívali se, že k důkazu stačí zaměnit Eukleidovu definici rovnoběžek definicí jinou. Jak známo, Eukleides nazývá rovnoběžkami přímky, ležící v rovině, které se neprotínají. Má tedy gramaticky negativní tvar, a proto ji někteří považovali za vadnou.

Poseidonios a Aganis definovali rovnoběžky *jako přímky v rovině, které mají od sebe stále touž vzdálenost.* My však víme, že již pouhý předpoklad, že existují ekvidistantní přímky, je ekvivalentní s Eukleidovým V. postulátem (viz naši VĚTU 15,10). Ostatně již někteří Řekové viděli slabinu podobného důkazu a namítali, že Poseidoniova a Eukleidova definice rovnoběžek nemusí vždy vyjadřovat totéž. Geminos (I. st. př. Kr.) uváděl hyperbolu s její asymptotou jako příklad čar, které jsou rovnoběžné ve smyslu Eukleidově (neprotínají se, jakkoli daleko je prodloužíme), nejsou však rovnoběžné ve smyslu Poseidoniově.

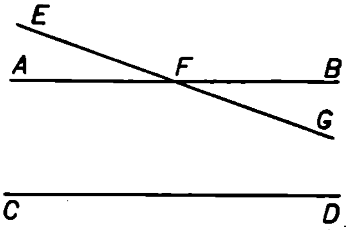
O několik století později si řecký matematik Proklos (410—485) povšiml, že obrácení V. Eukleidova postulátu (t. j. obrácení implikace v něm obsažené) dává větu „*součet dvou vnitřních úhlů trojúhelníka je menší dvou pravých*“, která se dá dokázat nezávisle na V. postulátu (u nás je to VĚTA 12,28). Při tom mu připadalo nemožné, že by se z týchž předpokladů nedala odvodit věta, jejíž obrat lze dokázat.

Sám pak dokazuje V. postulát na základě pomocné věty (věta i její důkaz uveden podle Bonola-Liebmann [17], str. 5):

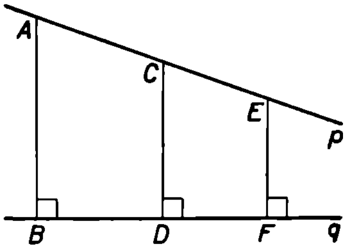
Přímka, která protíná jednu ze dvou neprotínajících se přímek, protíná i druhou přímku.

Důkaz této věty podává následujícím způsobem: Buďtež $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ dvě neprotínající se přímky (viz obr. 105), $\overline{EG}$ přímka, která v bodě F protíná přímku $\overline{AB}$. Vzdálenost přímky $\overline{AB}$ od bodu, pohybujícího se po přímce $\overline{EG}$ směrem od bodu F přes G, roste nade všechny meze (důkaz je analogický důkazu VĚTY 15,15). Protože ale body jedné z obou neprotínajících se přímek mají od druhé konečnou vzdálenost, musí přímka $\overline{EG}$ protnout přímku $\overline{CD}$.

Zde však Proklos mlčky učinil předpoklad, že body jedné ze dvou neprotínajících se přímek mají od druhé konečnou, t. j. shora omezenou vzdálenost, což je tvrzení ekvivalentní s Eukleidovým postulátem (viz naši VĚTU 15,15).



Obr. 105.



Obr. 106.

Po zániku starověkých říší převzali řeckou učenost Arabové, kteří se velmi horlivě věnovali také matematice. Překládali a přepracovávali Eukleidovy *Základy* spolu se všemi pozdějšími komentáři a je tedy přirozené, že pokračovali v pokusech o důkaz postulátu o rovnoběžkách. Vliv na pozdější vývoj theorie rovnoběžek měl, jak se zdá, jen Nasîr-Eddîn (1201—1274),[26a]) jehož překlad a komentář Eukleida byl arabsky vydán r. 1594 v Římě.

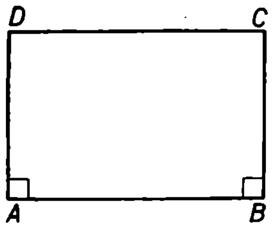
Jeho důkaz je zajímavý tím, že v něm V. postulát vystupuje po prvé ve vztahu s učením o součtu úhlů v trojúhelníku. Při tom se výslovně opírá o tvrzení, jež přijímá bez důkazu (uvedeno podle Kagan [4], str. 119—121; viz také Bonola-Liebmann [17], str. 11):

Jsou-li p a q (viz obr. 106) *takové přímky, že z bodu C na q spuštěná kolmice $\overline{CD}$ na q tvoří s přímkou p nerovné vedlejší úhly $\sphericalangle ECD <$ $< \sphericalangle ACD$, pak úsek kolmice spuštěné z bodu X přímky p na přímku q je*

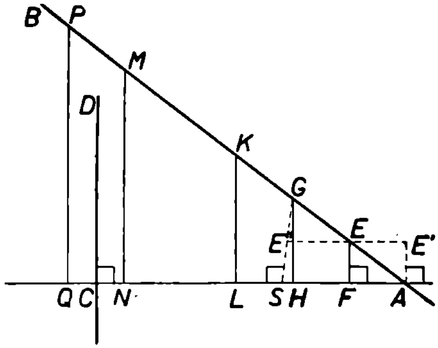
[26a]) Nasîr-Eddin at Tûsî pocházel z Chorasanu (území jižně od Turkmenské SSR), původem byl však Azerbejdžanec. Je znám také svými pracemi o sférické trigonometrii.

kratší než CD, je-li X jakýkoli bod na p na straně ostrého úhlu (t. j. na polopřímce (CE)), a větší, je-li X na p na straně tupého úhlu.

Na základě tohoto předpokladu dokazuje (sporem), že sestrojíme-li k úsečce AB kolmice v koncových bodech a naneseme na ně shodné úsečky BC a AD, pak úhly při C a D jsou pravé (viz obr. 107) a úsečky AB a CD jsou shodné. Protože čtyrúhelník má součet úhlů $4R$, plyne



Obr. 107.



Obr. 108.

odtud, že pravoúhlý trojúhelník má součet $2R$, a u obecného trojúhelníka dokážeme totéž, když ho rozdělíme výškou na dva pravoúhlé.

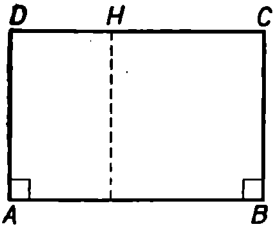
Nyní Nasîr-Eddîn dokazuje Eukleidův axiom takto: Jsou-li dvě přímky proťaty třetí, mohou nastat 3 případy: oba vnitřní úhly na téže straně jsou ostré nebo jeden z nich je tupý nebo jeden z nich je pravý. Je vidět, že první dva případy se snadno převedou na třetí, a proto předpokládejme, že $\sphericalangle\ CAB < DCA \sphericalangle \equiv R$; máme dokázat, že přímky $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ se protnou. Na úsečce AB vezměme bod E (viz obr. 108) a spusťme z něho kolmici na $\overline{AC}$, průsečík F bude po téže straně bodu A jako C, protože $\sphericalangle\ CAB$ je ostrý. Je-li C mezi F a A, jsme hotovi, protože pak $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ se musí protnout. Je-li F mezi A a C, pak na přímce $\overline{AC}$ nanášejme stále úsečky $AF \equiv FH \equiv HL \equiv \ldots \equiv NQ$ až bod Q padne za C a tolikrát pak také naneseme úsečky $AE \equiv EG \equiv \equiv CK \equiv \ldots \equiv \overline{MP}$. Potom spojnice $\overline{PQ}$ je kolmá na $\overline{AC}$, neboť všechny spojnice $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{GH}$, $\overline{KL}$, ... jsou kolmé na $\overline{AC}$, což dokážeme takto:

Bodem A veďme kolmici $\overline{AE'}$ na $\overline{AC}$, $AE' \equiv FE$, bodem G veďme kolmici $\overline{GS}$ na $\overline{AC}$ (je-li S různé od H zatím nevíme), na $\overline{GS}$ budiž bod E'' tak, že $SE'' \equiv FE$. Potom podle výše již dokázané věty o čtyrúhelníku je $AF \equiv E'E$, $SF \equiv E''E$, $\sphericalangle AE'E \equiv \sphericalangle FEE' \equiv \sphericalangle SE''E \equiv \equiv \sphericalangle FEE' \equiv R$. Leží tedy body E, E', E'' na přímce a úhly $\sphericalangle E''EG$ a $\sphericalangle E'EA$ jsou vrcholové; tedy trojúhelníky $\triangle AEE'$ a $\triangle GEE''$ jsou shodné, čili $EE' \equiv EE''$, takže $AF \equiv FS$ čili body H a S splynou a GH je kolmice na $\overline{AC}$. Analogicky se to dokáže i pro $KL, \ldots, PQ$.

Protože $\overline{CD}$ neprotne $\overline{PQ}$, musí protnout $\overline{AB}$, což bylo dokázat.

Z našeho výkladu geometrie víme, že Nasîr-Eddînem učiněný předpoklad je opět ekvivalentní s V. postulátem, neboť s axiomy absolutní geometrie je slučitelný případ, že bod X je na ramenu (CE) (obr. 106) ostrého úhlu $\sphericalangle ECA$ a přesto je jeho vzdálenost od přímky q větší než CD (viz rozběžné přímky v neeukleidovské rovině, Věta 17,15).

Na počátku novověku přechází matematika od Arabů do jihozápadní Evropy a mezi prvními to jsou Italové, kteří přinášejí v matematice nové výsledky, jak o tom svědčí jména Scipio del Ferro, Tartaglia, Cardano a j. V 16. a 17. stol. se Italové také živě zúčastnili řešení problému rovnoběžek, jako na př. C. Clavio, P. A. Cataldi, G. A. Borelli, abychom jmenovali alespoň některé. Nepřišli však v podstatě na nic nového. Setkáváme se u nich s týmiž myšlenkami jako u starých Řeků nebo Arabů, s důkazem na základě definice rovnoběžek jako ekvidistantních přímek a pod. S novou ideou, zdá se, přišel teprve G. Vitale (1633—1711), který se snažil dokázat existenci ekvidistantních přímek tak, že zkoumal čtyrúhelník $\square ABCD$ s pravými úhly A a B a shodnými stranami AD a BC (viz obr. 109). Dochází k tomu, že důkaz se redukuje na to, jak prokázat existenci bodu H uvnitř úsečky CD, který by měl od přímky $\overline{AB}$ vzdálenost rovnou úsečce AD. Ačkoli Vitale při dalším dokazování upadá do starých omylů, je jeho důkaz pozoruhodný tím, že se při něm objevuje speciální čtyrúhelník, se kterým jsme se již setkali u Nasîr-Eddîna a který o půl století později klade do středu svých úvah Saccheri, jenž učinil první podstatný krok vpřed.



Obr. 109.

V 17. století se zvýšil zájem o Eukleida natolik, že r. 1619 byla založena na oxfordské universitě stolice, jejíž držitel měl povinnost vést každý rok alespoň jednu přednášku o Eukleidových *Základech*. Jedním z prvních profesorů této stolice byl známý matematik J. Wallis (1616—1703), který se zasloužil také o algebru a analysu (od něho pochází také známá formule pro π). Správně poznal společný nedostatek důkazů V. Eukleidova postulátu, které byly do té doby podány, že totiž zakrytě zaměňují tento axiom jiným tvrzením.

R. 1663 podal J. Wallis důkaz, ve kterém se vědomě opírá o předpoklad, že *v rovině existují podobné útvary*. Tím osvětlil důležitý bod v theorii rovnoběžek, neboť jak víme, již pouhý předpoklad, že existují dva podobné trojúhelníky, t. j. trojúhelníky, které mají odpovídající úhly shodné, avšak strany nikoliv, je ekvivalentní s Eukleidovým postulátem o rovnoběžkách (srv. VĚTU 15,17).

21. Girolamo Saccheri. Zatím co matematikové, o nichž jsme dosud mluvili, dokazovali V. postulát tak, že aniž si to uvědomovali, vycházeli z nějakého předpokladu, o němž dnes víme, že je s V. postulátem ekvivalentní, italský jesuita Girolamo Saccheri šel při důkazu úplně novou cestou: snažil se totiž dokázat Eukleidův postulát *nepřímo.* Měl dobré matematické vzdělání a znal také důkazy V. postulátu řeckých i arabských matematiků, jejichž nedostatky správně odhalil a komentoval. Svoje nové výsledky publikoval r. 1733 ve spise *Euclides ab omni naevo vindicatus.*[27]) Způsob, jak postupoval ve svých dedukcích, zasluhuje, aby byl podrobněji vypsán. Nebudeme citovat Saccheriho doslova, nýbrž jeho výklad podáme v poněkud zhuštěné formě, při čemž zachováme jeho původní myšlenky (Saccheriho spis v německém překladu je otištěn v knize Stäckel-Engel [15], str. 41 až 136). Saccheriho „důkaz" Eukleidova postulátu lze shrnout do následujících 18 vět:

Věta 1. *Jestliže ve čtyrúhelníku* $\square$ *ABCD jsou úhly A, B pravé a strany AD a BC shodné, pak jsou také úhly C a D shodné.* (Takový čtyrúhelník se dnes nazývá Saccheriho čtyrúhelníkem.)

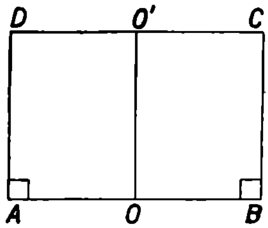
Věta 2. *Jestliže ve čtyrúhelníku* $\square$ *ABCD s pravými úhly A a B strany AD a BC nejsou shodné, pak z obou úhlů C a D je větší ten, který leží proti menší straně, a naopak.*

---

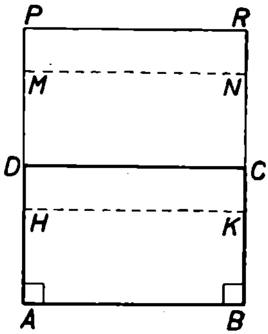
[27]) *Eukleides vší poskvrny zbavený.*

Důkazy obou vět jsou snadné. V druhé větě rozumí Saccheri úhlem ležícím proti straně AD resp. BC samozřejmě úhel C resp. D.

Saccheri byl přesvědčen o tom, že lze dokázat Eukleidův axiom o rovnoběžkách, a ve svém důkazu se snažil dovodit, že ve čtyřúhelníku, o němž je řeč ve větě 1, jsou úhly C a D pravé. A priori jsou tři možnosti: buď jsou úhly C a D *tupé* nebo *pravé* nebo *ostré*. Podle toho mluvíme o *hypothese tupého*, *pravého* nebo *ostrého úhlu*.



Obr. 110.



Obr. 111.

Aby Saccheri dokázal, že platí hypothesa pravého úhlu, snažil se obě zbývající hypothesy přivést ad absurdum. Sledujme dále Saccheriho:

Věta 3. *Podle toho, platí-li v Saccheriho čtyrúhelníku* $\square$ $ABCD$ *hypothesa tupého, pravého nebo ostrého úhlu, platí v něm vztahy* $AB > CD$, $AB = CD$, $AB < CD$.

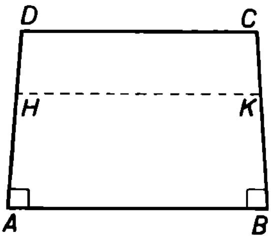
Důkaz. Pro hypothesu pravého úhlu to plyne z věty 2. Budiž nyní O resp. O' půlící bod úsečky AB resp. DC, takže je $\overline{OO'} \perp \overline{AB}$ a $\overline{OO'} \perp \perp \overline{DC}$. Je-li $\sphericalangle D > R$ (viz obr. 110), pak podle věty 2 je $AO > DO'$ čili $AB > DC$. Pro hypothesu ostrého úhlu dostáváme podobně $AB < DC$.

Věta 4. *Podle toho, platí-li pro Saccheriho čtyrúhelník* $\square$ $ABCD$ *vztah* $AB > CD$, $AB = CD$ *nebo* $AB < CD$, *platí pro něj hypothesa tupého, pravého nebo ostrého úhlu.*

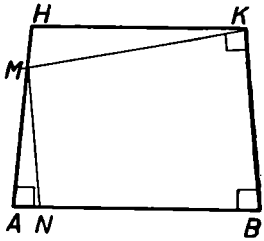
Důkaz lze snadno podat nepřímo.

Věta 5. *Je-li hypothesa pravého úhlu splněna alespoň pro jeden Saccheriho čtyrúhelník, je splněna pro každý.*

Důkaz. Nechť v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABCD$ platí hypothesa pravého úhlu. Je tedy $AB \equiv CD$. Budiž H (viz obr. 111) bod úsečky AD a K bod úsečky BC, při čemž $AH \equiv BK$. Kdyby byl $\sphericalangle\ AHK < R$, pak by podle věty 3 bylo $AB < HK$. Při tom by $\sphericalangle\ DHK > R$, takže podle věty 3 by bylo $HK < DC$. Tedy by platilo $AB < DC$, což je spor, neboť je $AB \equiv DC$. Podobně nemůže být $\sphericalangle\ AHK > R$, takže v. Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABKH$ platí hypothesa pravého úhlu.



Obr. 112.



Obr. 113.

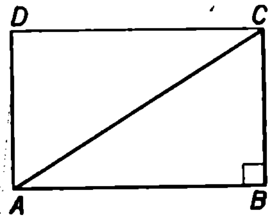
Je-li M bod na prodloužení úsečky AD za bod D a bod N na prodloužení BC za C a při tom $AM \equiv BN$, pak v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABNM$ platí hypothesa pravého úhlu. To je zřejmé, je-li AM celistvý násobek úsečky AD. Jestliže tomu tak není, dokazujeme dál pomocí Archimedova axiomu. Máme-li nyní dokázat, že v libovolném Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ STUV$ platí hypothesa pravého úhlu, naneseme úsečku ST na přímku $\overline{AD}$ od bodu A a důkaz pokračuje analogicky.

Věta 6. *Je-li hypothesa tupého úhlu splněna alespoň pro jeden Saccheriho čtyrúhelník, je splněna pro každý.*

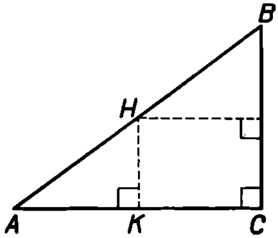
Důkaz. Nechť v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABCD$ je splněna hypothesa tupého úhlu. Budiž H (viz obr. 112) bod úsečky AD a K bod úsečky BC tak, že $AH \equiv BK$. Úhel $\sphericalangle\ KHA$ nemůže být pravý, neboť by pak v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABKH$ a následkem toho i v $\square\ ABCD$ platila hypothesa pravého úhlu.

Kdyby $\sphericalangle\ KHA$ byl ostrý, pak by bylo $HK > AB$ (věta 3). Protože v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\ ABCD$ platí hypothesa tupého úhlu, je $AB > DC$, takže by bylo $HK > AB > DC$.

Pohybuje-li se nyní bod H po přímce $\overline{AD}$ směrem k D, a tedy také bod K po přímce $\overline{BC}$ směrem k C, přejde úsečka HK, která byla na začátku větší než AB, nakonec v úsečku CD, která je menší než AB. V důsledku spojitosti této změny existuje na HD takový bod H', že $H'K' \equiv AB$. Potom by však v čtyrúhelníku $\square\, ABK'H'$ platila hypothesa pravého úhlu (věta 4) a tedy by nemohla v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\, ABCD$ platit hypothesa tupého úhlu (podle věty 5).



Obr. 114.



Obr. 115.

Budiž nyní dán Saccheriho čtyrúhelník s libovolnou základnou, na př. BK (viz obr. 113). Protože úhel K v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\, ABKH$ je tupý, protne kolmice na $\overline{BK}$ vedená bodem K přímku $\overline{AH}$ mezi body A a H v bodě M. Podle věty o vnějším úhlu trojúhelníka je $\sphericalangle\, AMK > \sphericalangle\, AHK$, takže $\sphericalangle\, AMK$ je tupý. Podle věty 3 ve čtyřúhelníku $\square\, ABKM$ je $AB > KM$, takže existuje mezi A a B bod N tak, že $MK \equiv NB$. Podle věty o vnějším úhlu v trojúhelníku je $\sphericalangle\, MNB > \sphericalangle\, MAB$, takže úhel $\sphericalangle\, MNB$ je tupý a v Saccheriho čtyrúhelníku $\square\, BKMN$ platí hypothesa tupého úhlu.

Věta 7. *Je-li hypothesa ostrého úhlu splněna alespoň pro jeden Saccheriho čtyrúhelník, je splněna pro každý.*

Důkaz lze provést nepřímo na základě vět 5 a 6.

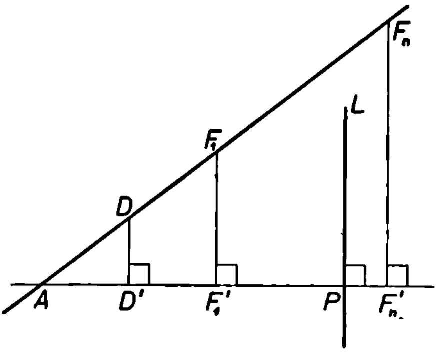
Věta 8. *Podle toho, platí-li hypothesa tupého, pravého nebo ostrého úhlu, je součet úhlů v trojúhelníku větší, rovný nebo menší než 2R.*

Důkaz. Budiž dán pravoúhlý trojúhelník $\triangle\, ABC$ s pravým úhlem u vrcholu B. Budiž bod D (obr. 114) na téže straně od $\overline{AB}$ jako C a takový, že $\sphericalangle\, DAB \equiv R$ a $DA \equiv BC$, takže $\square\, ABCD$ je Saccheriho čtyrúhelník. Platí-li hypothesa pravého úhlu, je $\triangle\, ABC \equiv \triangle\, CDA$ a součet úhlů trojúhelníka $\triangle\, ABC$ je $2R$.

Platí-li hypothesa tupého úhlu, je $AB > DC$, takže $\sphericalangle ACB > \sphericalangle DAC$. Odtud plyne, že součet úhlů trojúhelníka $\triangle ABC$ je větší než $2R$.

Platí-li hypothesa ostrého úhlu, je $AB < DC$, takže $\sphericalangle ACB < \sphericalangle DAC$, a odtud součet úhlů trojúhelníka $\triangle ABC$ je menší než $2R$.

Je-li dán obecný trojúhelník, můžeme ho výškou rozdělit na dva pravoúhlé a tím převést vyšetřování na předcházející případy.



Obr. 116.

Věta 9. *Budiž $\triangle ABC$ (viz obr. 115) trojúhelník pravoúhlý ve vrcholu C a budiž K průsečík strany AC s kolmicí vedenou středem H strany AB na $\overline{AC}$. Podle toho, platí-li hypothesa tupého, pravého nebo ostrého úhlu, je $AK < KC$, $AK \equiv KC$, $AK > KC$.*

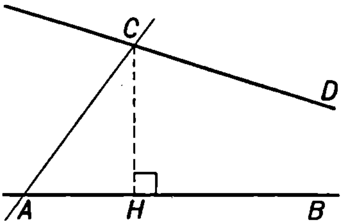
Důkaz. Budiž L průsečík strany BC s kolmicí vedenou bodem H na stranu BC. Platí-li hypothesa pravého úhlu, je tvrzení zřejmé. Platí-li hypothesa tupého úhlu, pak bude $\sphericalangle AHK < \sphericalangle HBC$, neboť součet úhlů čtyrúhelníka $\square\ KCBH$ je větší než $4R$; v trojúhelnících $\triangle AHK$ a $\triangle HBL$ je tedy $AK < HL$. Ve čtyrúhelníku $\square\ KCLH$ je úhel L pravý, úhel H tupý (hyp. tupého úhlu), tedy $HL < KC$, takže je $AK < KC$. Podobně dokážeme větu pro hypothesu ostrého úhlu.

Věta 10. *Platí-li hypothesa tupého resp. pravého úhlu, pak kolmice a nekolmice k téže přímce se vždy protínají.*

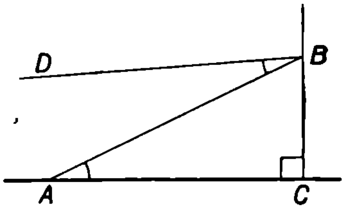
Důkaz. Nechť $\overline{LP}$ (obr. 116) je přímka kolmá na $\overline{AP}$ a přímka $\overline{AD}$ nechť svírá s $\overline{AP}$ ostrý úhel $\sphericalangle DAP$. Na přímce $\overline{AD}$ určeme body $F_1, F_2, \ldots$ tak, že D je mezi A a F_1, F_1 mezi D a F_2, F_2 mezi F_1 a F_3 atd. a při tom $AD \equiv DF_1$, $AF_1 \equiv F_1F_2, \ldots$ atd. Jsou-li $D'_1\ F'_1, F'_2, \ldots$ atd. průsečíky přímky $\overline{AP}$ s kolmicemi vedenými body $D, F_1, F_2, \ldots$ atd. na $\overline{AP}$, pak podle předcházející věty je $AF'_k \geq 2^k.AD'$. Podle Archimedova axiomu existuje n tak, že $2^n.AD' > AP$ čili $AF'_n > AP$. Protože přímka $\overline{PL}$ protíná AF'_n a neprotíná $F_nF'_n$, musí protnout AF_n.

Věta 11. *Platí-li hypothesa pravého resp. tupého úhlu, pak platí V. Eukleidův postulát.*

Důkaz. Buďtež $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ (viz obr. 117) dvě přímky, při čemž body B a D jsou na téže straně od $\overline{AC}$ a při tom $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD < 2R$. Pak je jeden z obou úhlů ostrý, budiž to $\sphericalangle BAC$. Budiž H průsečík přímky $\overline{AB}$ s kolmicí vedenou bodem C na $\overline{AB}$. Podle předpokladu je $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACH + \sphericalangle HCD + \sphericalangle CHA + \sphericalangle CHB < 4R$. V troj-



Obr. 117.



Obr. 118.

úhelníku $\triangle AHC$ platí podle předpokladu ve větě vztah $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACH + \sphericalangle CHA \geqq 2R$, takže $\sphericalangle HCD + \sphericalangle CHB < 2R$. Úhel $\sphericalangle CHB$ je pravý, podle věty 10 se tedy AB a CD protnou.

Věta 12. *Hypothesa tupého úhlu je falešná.*

Důkaz. Z hypothesy tupého úhlu plyne V. Eukleidův postulát a z něho plyne správnost hypothesy pravého úhlu. To však je spor, neboť obě hypothesy nemohou platit současně.

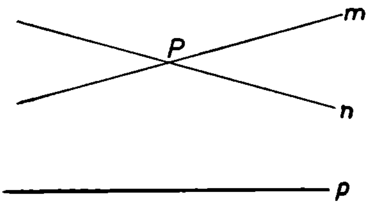
V této větě přivedl Saccheri hypothesu tupého úhlu ke sporu. Aby mohl dokázat V. Eukleidův axiom, bude se nyní snažit přivést ke sporu i hypothesu ostrého úhlu. Proto se v dalším stále předpokládá platnost této hypothesy, což nebudeme již znovu připomínat.

Věta 13. *Platí-li hypothesa ostrého úhlu, pak kolmice a nekolmice k téže přímce se nemusí protnout.*

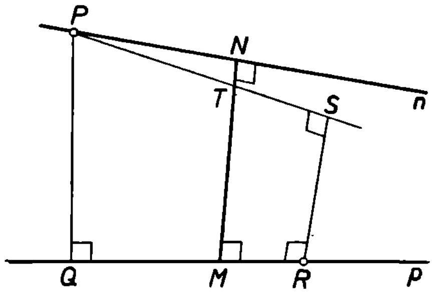
Důkaz. Budiž $\triangle ABC$ ve vrcholu C pravoúhlý trojúhelník (viz obr. 118). Určeme bod D tak, že A a D jsou na téže straně od $\overline{BC}$ a D a C na různých stranách od $\overline{AB}$ a při tom $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DBA$. Přímky $\overline{AC}$ a $\overline{DB}$ se neprotnou (srv. naši Větu 14,2) a při tom $\sphericalangle ACB$ je pravý a podle hypothesy ostrého úhlu je úhel $\sphericalangle DBC$ ostrý.

Věta 14. *Dvě přímky mají buď společnou kolmici nebo se protínají, nebo se k sobě stále blíží.*[28])

Důkaz. *Část 1.* Budiž bod P mimo přímku p (viz obr. 119). Přímky svazku P mohou být vzhledem k přímce p rozděleny na přímky, které protínají p, a na přímky, které mají s p společnou kolmici. Na základě vlastností spojitosti existují přímky m a n, které rozdělují svazek na dvě části: do jedné patří přímky neprotínající p a do druhé ty, které



Obr. 119.



Obr. 120.

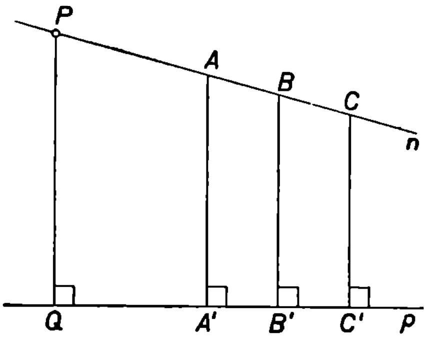
mají s p společnou kolmici. Dokážeme, že přímky m a n nepatří do žádné z obou skupin.

Je zřejmé, že n a p se neprotnou. Předpokládejme nyní, že n a p mají společnou kolmici NM (viz obr. 120). Budiž $\overline{PQ}$ kolmice na p a R bod na p takový, že M je mezi Q a R. Budiž $\overline{RS}$ kolmice na p a $\overline{PS}$ kolmice na $\overline{SR}$. Budiž T průsečík $\overline{PS}$ a $\overline{MN}$. Ve čtyřúhelníku $\square\ MRST$ jsou tři pravé úhly, tedy $\sphericalangle\ MTS$ je ostrý, takže $\sphericalangle\ PTM$ je tupý, což má za následek, že polopřímka (PS) padne do úhlu $\sphericalangle\ QPN$, takže přímka $\overline{PS}$ protíná p. Na druhé straně $\overline{PS}$ a p mají společnou kolmici, což je spor. Tedy n a p nemohou mít společnou kolmici.

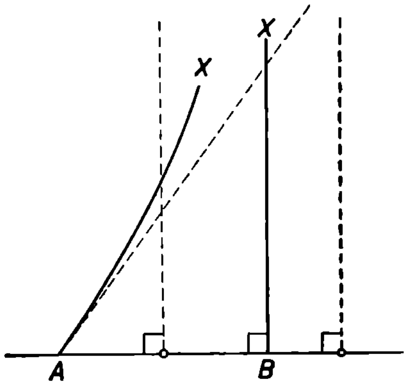
Část 2. V této části zbývá dokázat, že dvě přímky, které se neprotínají a nemají společnou kolmici, se k sobě stále blíží. Uvažujme tedy přímky n a p z 1. části důkazu a budiž $\overline{PQ}$ kolmice na p (viz obr. 121).

[28]) Saccheriho rčení, že dvě přímky se k sobě stále blíží, znamená, že na první přímce nelze nalézt bod, který by měl ze všech bodů této přímky nejmenší vzdálenost od přímky druhé (speciálně také žádný z těchto bodů nemá od druhé přímky vzdálenost nulovou, t. j. obě přímky se neprotínají). Roli přímek lze ovšem zaměnit.

Zvolme na n body A, B, C v pořadí P, A, B, C na straně ostrého úhlu $\sphericalangle\, QPA$ a nechť AA', BB', CC' jsou kolmice na p. Z úhlů $\sphericalangle\, PAA'$, $\sphericalangle\, PBB'$, $\sphericalangle\, PCC'$ není žádný pravý úhel, ale také ne ostrý, neboť z předpokladu, že by tomu tak nebylo, a z toho, že úhel $\sphericalangle\, QPA$ je ostrý, by se na základě vlastností spojitosti dokázalo, že existuje společná kolmice přímek n a p. Ve čtyrúhelníku $\square\, QA'AP$ jsou úhly Q a A'



Obr. 121.



Obr. 122.

pravé, úhel A tupý a P ostrý. Tedy podle věty 3 je $PQ > AA'$. Podobně dokazujeme dále, že $PQ > AA' > BB' > CC'$.

Další Saccheriho věty uvedeme bez důkazů:

Věta 15. *Dvě přímky, které se k sobě stále blíží, blíží se dokonce asymptoticky* (*t. j. je-li dána libovolná úsečka, pak vždy na jedné z obou přímek lze určit bod, který má od druhé přímky vzdálenost menší než daná úsečka*).

Takovéto přímky nazývá Saccheri asymptotickými a vyjadřuje se o nich také, že se setkají (ne však protnou) „teprve v nekonečnu“, a „bod v nekonečnu“ u obou asymptotických přímek označuje týmž písmenem, takže říká na př. „asymptotické přímky AX a BX“.

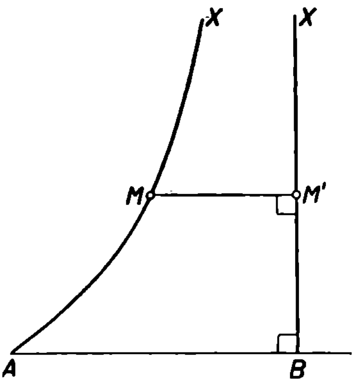
Je pozoruhodné, že Saccheri odvozuje také některé klasické věty neeukleidovské geometrie. Nesouvisí přímo s řetězem vět, které podle Saccheriho vedou k cíli vyvrátit hypothesu ostrého úhlu, a proto je uvedeme jen mimochodem.

Věta A. *Jsou-li AX a BX dvě asymptotické přímky, úhel $\sphericalangle\, ABX$ pravý* (viz obr. 122), *pak*:

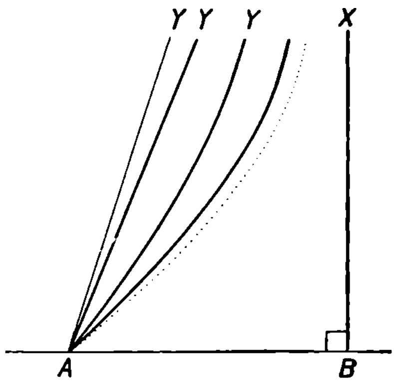
1. *každá kolmice na* $\overline{AB}$ *vedená bodem úsečky* AB *protne přímku* AX,

2. *kolmice na* AB *vedená bodem* C, *pro který je* B *mezi* A *a* C, *neprotne* AX,

3. *každá přímka, vedená bodem* A *pod menším úhlem než* $\sphericalangle BAX$, *protne přímku* BX.



Obr. 123.



Obr. 124.

Věta B. *Máme-li libovolný úhel* $\sphericalangle BAX$, *pak nemůže každá kolmice na rameno* (AB) *protnout rameno* (AX).

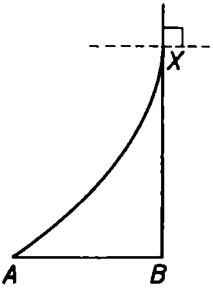
Cestu k vyvrácení hypothesy ostrého úhlu vede Saccheri ještě přes tyto dvě věty (důkazy jsou vynechány):

Věta 16. *Jestliže přímky* $\overline{AX}$ *a* $\overline{BX}$ *se blíží asymptoticky a je-li* M (viz obr. 123) *bod na* $\overline{AX}$ *a* $\overline{MM'}$ *je kolmice na* $\overline{BX}$, *pak úhel* $\sphericalangle AMM'$ *je vždy tupý. Pohybuje-li se* M *od bodu* A *k* X, *pak se úhel* $\sphericalangle AMM'$ *zmenšuje a to tak, že rozdíl mezi ním a pravým úhlem může být učiněn libovolně malý.*

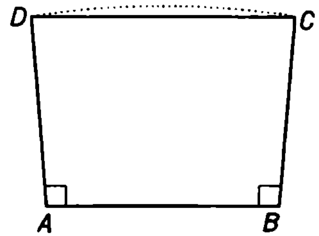
Věta 17. 1. *Mezi přímkami* AY *vedenými bodem* A, *které mají s* BX (viz obr. 124) *společnou kolmici, neexistuje přímka, která by svírala nejmenší úhel s polopřímkou* (AB) (*t. j. ke každé z přímek* AY *lze vždy mezi přímkami* AY *najít takovou, která s* (AB) *svírá úhel menší než* $\sphericalangle BAY$).

2. *Úhel* $\sphericalangle BAY$ *můžeme však volit vždy tak (malý), že společná kolmice přímek* AY *a* BX *má s oběma přímkami průsečíky o vzdálenosti menší než libovolně daná úsečka.*

Obě věty 16 a 17 jsou podivuhodně přesné, uvážíme-li, že cílem úvah Saccheriho je „přechod k limitě"; Saccheri z nich však činí závěr, že dvě asymptotické přímky v bodě, v němž se setkají v nekonečnu, „mají společnou kolmici" a že tam tudíž splynou (snad tu má Saccheri představu, že „v nekonečnu" vypadají obě asymptotické přímky AX a BX se společnou kolmicí tak, jak to ukazuje obr. 125).



Obr. 125.



Obr. 126.

Uveďme nyní doslovné znění Saccheriho závěru!

„*Hypothesa ostrého úhlu je veskrze falešná, neboť odporuje přirozenosti přímky.*

Důkaz. Jak jsme na předcházejících theoremech viděli, vede Eukleidově geometrii se příčící hypothesa ostrého úhlu nakonec k tomu, že musíme připustit v téže rovině existenci dvou přímek AX a BX, které směrem k bodu do nekonečna prodlouženy, nakonec splynou v jednu a tutéž přímku, protože totiž v nekonečně vzdáleném bodě mají společnou kolmici, která leží v téže rovině jako obě přímky samy." (Stäckel-Engel, [15], str. 109.)

Tento důkaz spočívá na mylném pojetí „nekonečně vzdáleného bodu", s nímž Saccheri nakládá jako s obyčejným bodem „v konečnu". To je vidět zvlášť dobře, když za větou 15 ukazuje, že se asymptotické přímky „*nemohou protnout ani v nekonečnu*". Kdyby se prý totiž asymptotické přímky $\overline{AX}$ a $\overline{BX}$ protly v bodě X (úhel $\sphericalangle ABX$ pravý), pak by bodem Z na přímce $\overline{AX}$ „*za bodem* X" (!) vedená kolmice na $\overline{AB}$ padla mimo úsečku AB za bod B, což není možné (podle bodu 2, věty A).

Po tomto důkazu uvádí Saccheri důkaz ještě jeden, nebyl tedy s prvním asi příliš spokojen. Druhý důkaz se zakládá na této myšlence: Úsečka AB a úsek DC ekvidistanty přímky $\overline{AB}$ mezi kolmicemi $\overline{DA}$ a $\overline{CB}$ k přímce $\overline{AB}$ (viz obr. 126) mají stejnou délku (jak tvrdí Saccheri).

Za předpokladu hypothesy ostrého úhlu je však ekvidistanta křivá čára, a proto oblouk DC ekvidistanty je větší než úsečka DC a úsečka DC je podle věty 3 větší než AB, takže máme spor.

Pracovat s délkou křivé čáry předpokládá úvahy o infinitesimálních veličinách a zde se Saccheri dopustil omylů, když třemi různými způsoby (a po každé chybně) dokazoval, že úsek DC ekvidistanty je stejně dlouhý jako úsečka AB.

Saccheri je si plně vědom hlubokého rozdílu mezi jeho vyvrácením hypothesy tupého úhlu a hypothesy úhlu ostrého. Na konci svého pojednání Saccheri píše:

„U hypothesy tupého úhlu je věc jasnější než slunce v poledne, neboť přijmeme-li ji za správnou, lze z ní odvodit plnou a obecnou platnost diskutovaného Eukleidova axiomu, z něhož lze pak dokázat nesprávnost hypothesy tupého úhlu.

Naproti tomu se mi nepodařilo ukázat nesprávnost hypothesy ostrého úhlu, aniž bych před tím ukázal, že čára, jejíž všechny body leží stejně daleko od dané přímky a leží s ní v téže rovině, je právě s touto přímkou stejně dlouhá."

(Stäckel-Engel [15], str. 132.)

Přes chyby, kterých se Saccheri dopustil na konci svých úvah, je jeho dílo velice významné a pozoruhodné. Jsou v něm po prvé vysloveny některé věty neeukleidovské geometrie.

22. L. Bertrand, J. H. Lambert. V předcházejícím odstavci jsme viděli, že Saccheri v obou důkazech, jimiž chtěl vyvrátit hypothesu ostrého úhlu, operoval s nekonečnem. 18. století bylo obdobím úpadku úvah o nekonečně velkém i nekonečně malém. Na druhé straně byly tyto úvahy tehdy velice v módě, což se projevilo i na důkazech Eukleidova axiomu té doby.

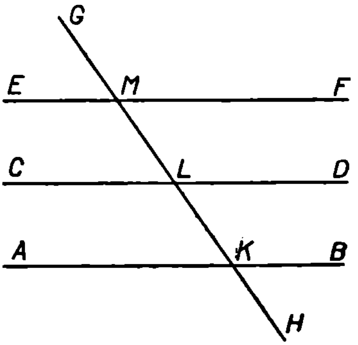
Důmyslný důkaz toho druhu, který svého času byl dlouho pokládán za správný, podal švýcarský matematik L. Bertrand (1731 —1812) ve spisech *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques* (1778) a *Eléments de géometrie* (1812). Jeho důkaz se redukuje na následující dvě tvrzení.

„*Jestliže dvě přímky AB a CD* [(viz obr. 127)] *ležící v téže rovině tvoří s přímkou HG vnitřní úhly BKL a DLK, jejichž součet je roven dvěma pravým, pak část roviny, kterou obě přímky ohraničují, je vzhledem k celé rovině tak malá, že je v ní obsažena nekonečněkrát.*" (Kagan [4], str. 128.)

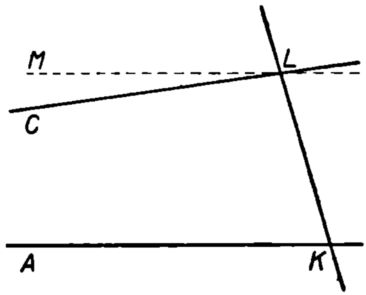
Toto tvrzení odůvodňuje Bertrand tak, že lze na přímku $\overline{GH}$ bez omezení nanášet za sebou úsečky shodné s úsečkou KL a každým bodem M vést přímku $\overline{EF}$ tak, že $\sphericalangle LMF$ je shodný s $\sphericalangle KLD$.

„Jestliže součet vnitřních úhlů dvou přímek s příčkou je po jedné straně této příčky menší než 2R, pak se obě přímky na této straně protínají.

Předpokládejme, že přímky LC a KA [(obr. 128)] svírají s příčkou KL vnitřní úhly AKL a CLK, jejichž součet je menší dvou pravých; pak existuje



Obr. 127.



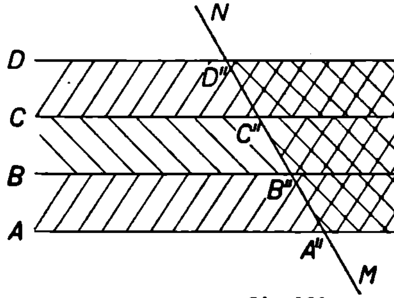
Obr. 128.

přímka LM, svírající s LC takový úhel, že platí $AKL + KLC + CLM = AKL + KLM = 2R$. Odtud plyne, že úhel MLC by byl cele obsažen uvnitř pásu $MLKA$, jestliže by přímka LC neprotínala KA. Tento pás je však obsažen v rovině nekonečněkrát, zatím co úhel MLC je v ní obsažen pouze tolikrát, kolikrát se oblouk MC dá nanést na obvod kružnice opsané kolem bodu L poloměrem ML. Tedy úhel MLC není cele obsažen uvnitř pásu $MLKA$, a proto jeho rameno LC vychází ven z pásu a protíná přímku KA."

(Kagan [4], str. 128—129.)

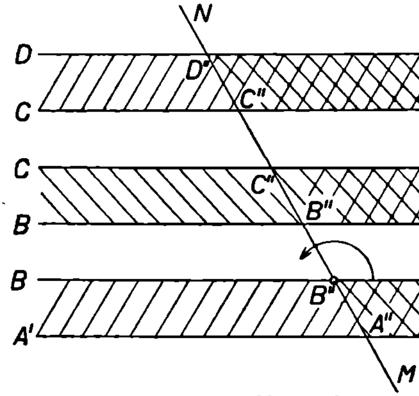
Bertrandův důkaz spočívá, jak je vidět, na předpokladu, že není možné, aby jednou byla celá rovina pokryta konečným počtem útvarů (zde jde o úhly — pro větší názornost si je mysleme, jako by byly vystřiženy z papíru) a po druhé, při jiném způsobu rozmístění týchž útvarů, nestačil rovinu pokrýt sebevětší jejich počet. Takový předpoklad je však neopodstatněný a v tom je slabina Bertrandova důkazu.

Je totiž chybné jen tak beze všeho přenášet na pokrývání celé roviny vlastnosti týkající se pokrývání omezené její části. Je na příklad jasné, že když rozložíme daný omezený rovinný útvar (na př. vnitřek kružnice nebo čtverce) na konečný počet částí, pak nelze všechny tyto části nějakým jiným způsobem složit tak, aby zůstala pokryta jen část tohoto útvaru (a při tom se tyto části nepřekrývaly, t. j. neměly mimo



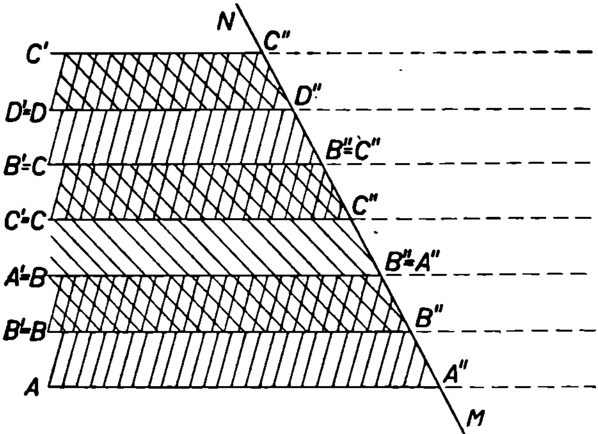
Obr. 129a.

hranici společný bod). Naproti tomu lze nekonečný počet útvarů, které pokrývají celou eukleidovskou rovinu, přeskupit tak, že vzniká pokrytí pouze její části.



Obr. 129b.

Uvažujme na př. pokrytí eukleidovské roviny vytvořené obdobně jako na obr. 127 (viz obr. 129a); zde přímky $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ atd. jsou mezi sebou rovnoběžné a úsečka délky $A''B''$ je nanášena na přímce $\overline{MN}$ v obou smyslech její orientace. Mysleme si, že jednotlivé pásy, omezené polopřímkami a úsečkou (jako na př. $(A''A)$, $(B''B)$, $A''B''$ — takový pás budeme stručně označovat $AA''B''B$), jsou pohyblivé (jako by byly vystřiženy z papíru). Nejdříve oddělíme jednotlivé pásy $AA'BB'$ atd. od sebe posuvem podél přímky $\overline{MN}$ vždy o jistý celistvý násobek šířky pásu (viz obr. 129b), a potom pásy ležící napravo od přímky $\overline{MN}$ přemístíme otočením vždy okolo určitého bodu na přímce $\overline{MN}$, abychom zaplnili všechny mezery nalevo od přímky $\overline{MN}$ (na př. pás $AA''B''B'$



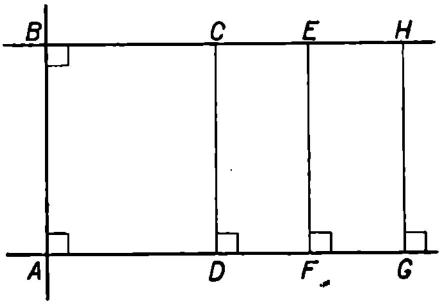
Obr. 129c.

okolo bodu B'' do polohy pásu $BB''B''B$). Tím dosáhneme toho, že všechny pásy z obr. 129a pokryjí celou polorovinu po levé straně přímky $\overline{MN}$, jak to ukazuje obr. 129c.

Nyní se obrátíme na švýcarského matematika J. H. Lamberta (1728—1777), který při pokusu o důkaz V. Eukleidova postulátu o rovnoběžkách došel podobně jako Saccheri k některým větám neeukleidovské geometrie. Lambert pravděpodobně znal Saccheriho práci, ale pouze z disertace G. S. Klügela *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (1763), která rozebírala všechny do té doby podané důkazy a byla vlastně prvním spisem o dějinném vývoji theorie rovnoběžek.

Roku 1766 napsal Lambert práci *Theorie der Parallellinien*, kterou však nepublikoval (pravděpodobně s ní nebyl spokojen), takže vyšla až po jeho smrti přičiněním J. Bernoulliho. Byla však vytištěna v málo známém časopise *Magazin für die reine und angewandte Mathematik*, kde zůstala práce zapomenuta, až ji r. 1893 náhodou objevil P. Stäckel, historik neeukleidovské geometrie. Otisk této práce je dnes snadno přístupný v knize Stäckel-Engel [15], str. 152—206.

Ve svých úvahách vycházel Lambert ze čtyrúhelníka, který má tři pravé úhly (je to jeden z obou čtyrúhelníků, na které rozděluje spojnice půlících bodů základen čtyrúhelník Saccheriho). Kdyby se podařilo dokázat, že i čtvrtý úhel je pravý, byl by tím dokázán Eukleidův axiom. Lambert proto staví o tomto úhlu *tři hypothesy*: hypothesu úhlu 1. pravého, 2. tupého, 3. ostrého, a snaží se poslední dvě přivést ke sporu.



Obr. 130.

Lambertovo pojednání znamená proti práci Saccheriho pokrok: všechny tři hypothesy projednává odděleně, hypothesu tupého úhlu přivádí ke sporu nezávisle na větě o vnějším úhlu trojúhelníka, která není již pro tuto hypothesu platná, a důsledky hypothesy tupého a ostrého úhlu rozvíjí více než Saccheri.

Když Lambert ukázal, že hypothesa pravého úhlu je ekvivalentní s Eukleidovým postulátem, obrací se na hypothesu tupého úhlu. Jeho úvahy se dají shrnout takto (originál viz Stäckel-Engel [15], str. 186 až 192):

Buďtež $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ (viz obr. 130) dvě přímky v rovině, obě kolmé k přímce $\overline{AB}$, a body C, E, H na přímce $\overline{BH}$ veďme kolmice $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{HG}$ na $\overline{AG}$. Úsečky CD, EF, HG se zmenšují, vzdalují-li se od $\overline{AB}$; jsou-li vzdálenosti DF a FG atd. stejné, zmenšují se stále více, t. j. platí $EF - HG > CD - EF$ (důkazy nebudeme uvádět).

Podle Archimedova axiomu při dostatečném počtu kolmých úseček bude součet úbytků větší než AB, takže $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ se protnou na téže straně od bodu A, jako jsou body D, F, G. Podle věty o shodnosti trojúhelníků se však přímky $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ protnou také na druhé straně od bodu A. Tedy přímky $\overline{BH}$ a $\overline{AG}$ se protínají po obou stranách kolmice. To však je spor, protože „dvě přímky místa neomezují.“[29])

Lambert neodvozuje spor z toho, že by se bodem daly vést k přímce dvě kolmice, protože toto tvrzení plyne z věty o vnějším úhlu trojúhelníka, jež za hypothesy tupého úhlu není již správná. Formulace, že dvě přímky omezují část roviny, je tak sugestivní, že není vyloučeno, že Lambert si již zde uvědomil souvislost geometrie hypothesy tupého úhlu s geometrií na kouli (na které platí geometrie, odpovídající hypothese tupého úhlu, a na které také skutečně existují dvojúhelníky), ačkoliv o této souvislosti výslovně mluví až později u obsahu trojúhelníků.

Když přivedl druhou hypothesu ad absurdum, uvažuje Lambert o poslední hypothese (originál viz Stäckel-Engel [15], str. 192—196):

Mějme zase jako u předešlé úvahy přímky $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ (viz obr. 130) v rovině, obě kolmé k přímce $\overline{AB}$, a kolmice $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ na $\overline{AG}$. Zde se úsečky CD, EF, HG zvětšují, a jsou-li vzdálenosti DF, FG atd. stejné, zvětšují se stále více, t. j. platí $HG - EF > EF - CD$ a pro úhly platí, že se $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle BEF$, $\sphericalangle BHG$ stále zmenšují (důkazy opět vynecháváme). To však zde nevede ke sporu, takže chceme-li vyvrátit hypothesu ostrého úhlu, musíme hledat jinou cestu.

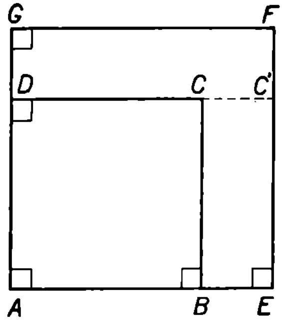
Lambert obrací proto svoji pozornost na trojúhelníky a dokazuje, že v trojúhelníku je součet úhlů menší než $2R$. Dodává pak, že odtud marně odvozoval další důsledky, aby došel ke sporu. Poznal jen, že hypothesa ostrého úhlu se nedá tak snadno vyvrátit jako hypothesa úhlu tupého. Jako jeden z nejvíce zarážejících důsledků uvádí Lambert to, že za předpokladu hypothesy ostrého úhlu mají délky úseček *„absolutní míru“*.

Pojem absolutní míry vysvětlíme čtenáři na příkladě *úhlů*, které mají jak v Lobačevského, tak i v Eukleidově geometrii absolutní míru. Tomu je rozumět takto: lze udat konstrukci úhlu určité velikosti, která se opírá výhradně jen o axiomy geometrie, takže ať prvky, které se mají během konstrukce volit, zvolíme jakkoli, sestrojené úhly budou

[29]) Axiom „*Dvě přímky místa neomezují*“, uvedený v Eukleidových Základech, nepochází od Eukleida, nýbrž z pozdější doby. Chce se jím říci, že dvě přímky nemohou tvořit „*dvojúhelník*“. Dnes tento fakt vystihujeme slovy „*dvě různé přímky mají nejvýše jeden průsečík*“.

vždy mezi sebou shodné. Takovou konstrukci lze udat na příklad pro pravý úhel.

V Eukleidově geometrii nemůžeme naproti tomu udat konstrukci *úsečky* určité velikosti, která by se opírala výhradně jen o axiomy geometrie. Takovou konstrukci můžeme udat pouze tehdy, jestliže je dána k disposici ještě určitá úsečka jako *měřítko* (*etalon*). Ryze prakticky bychom rozdíl mezi mírou úseček a mírou úhlů mohli vyjádřit tak, že zatím co v Bureau international des Poids et Mesures v Sèvres u Paříže je chován etalon délkové míry jako vzdálenost mezi jistými vrypy na platino-iridiové tyči, není zde žádného etalonu pro míru úhlovou.



Obr. 131.

Na rozdíl od geometrie Eukleidovy mají však v Lobačevského geometrii také úsečky absolutní míru. Podle toho, co jsme řekli v prvé části naší knížky, může se výhradně pomocí axiomů geometrie konstruovat jednoduchým způsobem úsečka určité velikosti na př. takto: vezmeme úhel velikosti $\frac{1}{2}R$ a na jedno jeho rameno vedeme kolmici, která by byla souběžná s druhým ramenem. Pata této kolmice spolu s vrcholem úhlu určí hledanou úsečku. V Lobačevského geometrii lze dokonce získat tímto způsobem jednoznačné přiřazení úhlů a úseček (úsečce d bude přiřazen úhel souběžnosti $\Pi(d)$), takže měření úseček lze převést na měření úhlů, jejichž míra je, jak už jsme řekli, absolutní.

Lambert, který neznal pojem souběžných přímek, uváděl jednoznačný vztah úhlů a přímek takovýmto způsobem (originál viz Stäckel-Engel [15], str. 200): jsou-li $\square\, ABCD$ a $\square\, AEFG$ dva čtyrúhelníky s pravými úhly $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle E$, $\sphericalangle G$ (viz obr. 131), pak úhly $\sphericalangle C$ a $\sphericalangle F$ jsou ostré. Je-li při tom na př. $AB \equiv AD < AE \equiv AG$, pak $\sphericalangle C > \sphericalangle F$. Protože dvěma různým úsečkám odpovídají různé úhly, lze každé úsečce AB tímto způsobem jednoznačně přiřadit úhel $\sphericalangle DCB$.

K tomu, že délky za předpokladu hypothesy ostrého úhlu mají absolutní míru, Lambert poznamenává:

„Tento důsledek má v sobě cosi vábného, co lehko vzbuzuje přání, aby třetí hypothesa byla přece jen pravdivá.“ (Stäckel-Engel [15], str. 200.)

Ani zde nenalezl Lambert spor, a proto pokračuje ve svých úvahách dále. Dokazuje, že úchylka součtu úhlů trojúhelníka od $2R$ je přímo úměrná velikosti jeho plochy, a poznamenává k tomu, že analogická vlastnost plyne i z hypothesy tupého úhlu. Lambert k tomu píše:

„Při tom se mi zdá zvláštní, že druhá hypothesa platí, když místo rovinných trojúhelníků vezmeme *sférické*, neboť u těchto je jak součet úhlů větší než 180°, tak také exces úměrný ploše trojúhelníka.

Ještě pozoruhodnější je, že to, co říkám o sférických trojúhelnících, se dá prokázat bez ohledu na potíže s theorií rovnoběžek a neopírá se o jinou základní větu než tu, že každá rovina procházející středem koule ji rozděluje na dvě stejné části.

Z toho bych měl činit takřka závěr, že třetí hypothesa platí pro imaginární kulovou plochu. Jistě v tom musí něco být, že ji nelze pro rovinu zdaleka tak snadno vyvrátit, jako se to podařilo s druhou hypothesou."

(Stäckel-Engel [15], str. 202-203)

Je pravděpodobné, že tato poznámka byla motivována tím, že když do vzorce

$$r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

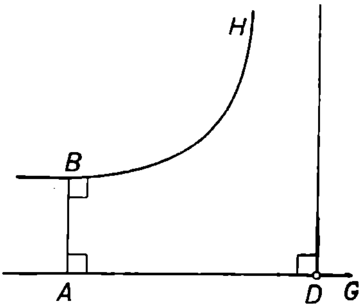
pro obsah sférického trojúhelníka s úhly α, β, γ dosadíme za r imaginární poloměr ir, dostáváme

$$r^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma),$$

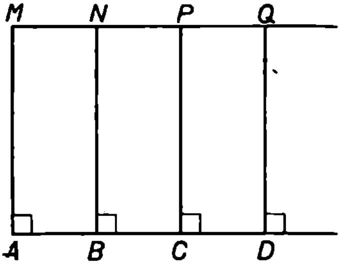
z čehož je vidět, že na imaginární kouli je plocha trojúhelníka také úměrná úchylce a že součet úhlů v trojúhelníku nemůže být větší než $2R$.

V každém případě je Lambertova poznámka pozoruhodná. Myšlenka srovnávat geometrii roviny s geometrií na kouli nabyla později rozhodujícího významu (na př. v úvahách Riemannových). Při tom Lambert uvažoval o imaginární kouli v době, kdy ještě tak mnozí matematikové měli před imaginárními čísly strach. Patrně v souvislosti s těmito úvahami začal Lambert přemýšlet o hodnotách trigonometrických funkcí, jestliže je argument imaginární; tak vzniklo pojednání *Sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*, které r. 1767 Lambert četl před berlínskou akademií. V této práci je ukázáno, že goniometrické funkce nabývají pro *ryze imaginární* argumenty hodnot ryze imaginárních nebo dokonce reálných;[29a]) místo kružnice, dovolující sledovat průběh goniometrické funkce, nastupuje pak rovnoosá hyperbola a funkce goniometrické přejdou v hyperbolické.

Ve svém pojednání o theorii rovnoběžek pokračuje Lambert zkoumáním důsledků věty, že součet úhlů ve čtyrúhelníku je menší než $4R$, a dochází k závěru, že hypothesa ostrého úhlu by se dala vyvrátit, kdyby se podařilo odvodit ať už z ní samé nebo jen z ostatních axiomů,



Obr. 132.



Obr. 133.

že jsou-li přímky $\overline{AG}$ a $\overline{BH}$ kolmé na $\overline{AB}$ (viz obr. 132), pak kolmice na přímku $\overline{AG}$ vedená libovolným bodem D této přímky protíná přímku $\overline{HB}$. Ani zde však, jak říká, nenalezl nic, co by ho uspokojilo.

Je skoro podivné a násilné, že po všech těchto správných úvahách Lambert končí svoji práci tím, že přece jen vyvrací hypothesu ostrého úhlu. Citujme zde poslední paragraf jeho práce:

„Z toho všeho je vidět, že zatím co se druhá hypothesa dala snadno vyvrátit, třetí je zcela naopak daleko tvrdošíjnější.

Pominu nyní několik dalších pokusů. Položme $AB = BC = CD =$ atd. [(viz obr. 133)], úhly při A, B, C, D atd. buďtež pravé a $AM = BN = CP =$

[29a]) Platí totiž
$$\cos ia = \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \cosh a,$$
neboť $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Naproti tomu je
$$\sin ia = i\,\frac{e^a - e^{-a}}{2} = i \sinh a,$$
neboť $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

$= DQ =$ atd. Potom úhly $AMN = MNB = BNP = NPC = CPQ =$ $= PQD =$ atd. jsou v důsledku třetí hypothesy všechny ostré a $MN =$ $= NP = PQ =$ atd. To však znamená, že $MNPQ\ldots$ není přímka, ale část pravidelného mnohoúhelníka, který lze vepsat do kružnice, jejíž střed leží pod M na každé z přímek MA, NB, PC, QD atd. Protože však následkem toho úhly B, C, D atd. nemohou být pravé, je tak vyvrácen předpoklad a s ním i třetí hypothesa.“ (Stäckel-Engel [15]), str. 206—207.)

Víme, kde je nedostatek tohoto důkazu: předpoklad, že každými třemi nekolineárními body lze vést kružnici, je ekvivalentní s Eukleidovým axiomem (srv. VĚTU 15,13).

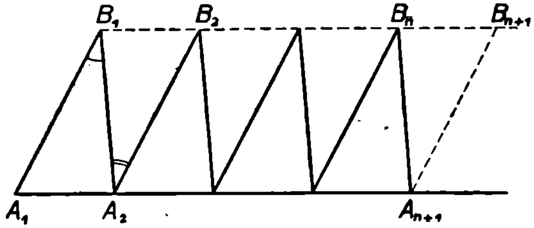
23. A. M. Légendre, F. Bolyai. Lambertovo pojednání spolu se spisem Saccheriho byly ty nejvýznamnější práce, jež byly napsány v oboru theorie rovnoběžek do doby Lobačevského, Bolyaie a Gausse. Přesto neměly na její další rozvoj žádný vliv, protože upadly v zapomenutí. Zcela jinak tomu bylo s dílem francouzského matematika Légendra (1752—1833).

V době kolem revoluce se ve Francii mění názory na sociální a ekonomické vztahy, což se projevuje i v oblasti školství a osvěty, kde vedoucí úlohu hráli tehdy encyklopedisté. Podle revolucionisující stati d' Alemberta v Encyklopedii o tom, jak vykládat začátky geometrie, píší Bézout, Légendre a Lacroix každý svoje „Základy“, které mají nahradit tehdy tolik rozšířené školní vydání Eukleida. Nejvíce se ujaly Légendrovy *Eléments de géométrie*, jež vyšly ještě za života Légendrova celkem ve 14 vydáních (první vyd. 1794), takže někteří nazývají poněkud přehnaně Légendra „Eukleidem nového věku“.

Sestavováním svých *Eléments* byl Légendre přiveden k systematickému přemýšlení o theorii rovnoběžek. V prvních osmi vydáních neklade Légendre mezi axiomy postulát o rovnoběžkách, nýbrž ho dokazuje. Tento důkaz mění od vydání k vydání. Některý důkaz se mu zdál příliš těžký pro začátečníky, s jiným nebyl zase příliš spokojen. Ve vydáních 9 a 11 uvádí proto raději tvrzení o rovnoběžkách jako axiom, ale již ve 12. vydání se pokouší upřesnit jeden z dřívějších pokusů a tato nová varianta se objevuje i ve 13. a 14. vydání.

R. 1833, v roce své smrti, shrnul Légendre svoje úvahy o rovnoběžkách do spisu *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du* *triangle.* Na konci tohoto pojednání poznamenává, že jeho bádání konečně uspokojivě ukončila dvoutisícileté marné snažení v oboru theorie rovnoběžek.

Mýlil se. Ani jeho výsledky, ani methody, jimiž k nim došel, nemohou být označeny jako pokrok vzhledem k výsledkům Wallisovým a Saccheriho, nedošel ani tak daleko jako Lambert. Jeho dílo se však, jak jsme už jednou řekli, značně rozšířilo ve Francii i v Německu a v tom spočívá jeho velký význam, neboť tak svého času podněcovalo zájem o theorii rovnoběžek.



Obr. 134.

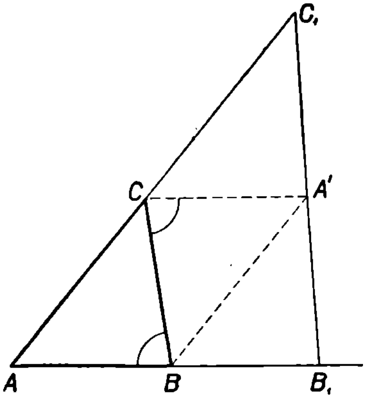
Podívejme se nyní, jak Légendre při svých důkazech postupoval. K problému se postavil tak, že chtěl dokázat, že součet úhlů v trojúhelníku činí $2R$, protože věděl, že toto tvrzení je ekvivalentní s Eukleidovým axiomem o rovnoběžkách.

Nejprve dokázal správně větu, že *v trojúhelníku je součet úhlů menší nebo roven dvěma pravým* (srv. naši VĚTU 13,6). Tato věta se obvykle nazývá *první Légendrova věta,* ačkoliv ji skoro o sto let dříve dokázal již Saccheri.

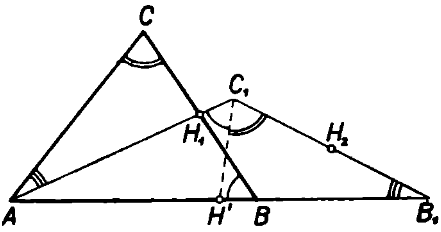
Jednoduchý a elegantní důkaz podává Légendre ve 3. vydání *Eléments* takto (podle Bonola-Liebmann [17], str. 59—60):

Budiž na přímce n shodných úseček $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ a nad nimi po téže straně n shodných trojúhelníků s protilehlými vrcholy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (viz obr. 134). Trojúhelníky $\triangle\, B_1A_2B_2$, $\triangle\, B_2A_3B_3, \ldots,$ $\triangle\, B_{n-1}A_nB_n$ budou také shodné. Zvolme ještě bod B_{n+1} tak, aby i trojúhelník $\triangle\, B_nA_{n+1}B_{n+1}$ byl s nimi shodný.

Je nyní $\sphericalangle\, A_1B_1A_2 \leqq \sphericalangle\, B_1A_2B_2$. Kdyby zde totiž platil vztah $>$, pak srovnáním trojúhelníků $\triangle\, A_1B_1A_2$ a $\triangle\, B_2A_2B_1$, které se shodují ve dvou stranách ($A_1B_1 \equiv A_2B_2$, strana B_1A_2 je společná), by vyplynulo, že je $A_1A_2 > B_1B_2$. Protože úsečka je nejkratší spojnice dvou bodů (srv. naši VĚTU 3,32) platil by vztah $A_1B_1 + n . B_1B_2 + A_{n+1}B_{n+1} > n . A_1A_2$, který lze psát také $2 . A_1B_1 > n . d$, kde d je rozdíl $A_1A_2 - B_1B_2$. Poslední vztah by platil pro libovolné n (A_1B_1 a d jsou zde pevné), ale to by bylo ve sporu s Archimedovým axiomem. Je tedy $\sphericalangle A_1B_1A_2 \leqq \sphericalangle B_1A_2B_2$, takže součet úhlů v trojúhelníku $\triangle A_1B_1A_2$ je menší nebo roven dvěma pravým.



Obr. 135.



Obr. 136.

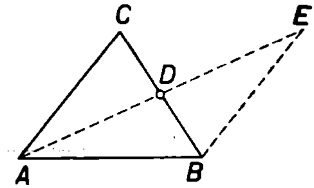
Druhou Légendrovou větou se rozumí věta: *Je-li v jednom trojúhelníku součet úhlů menší resp. roven 2R, pak je tomu tak v každém trojúhelníku.* Také tuto větu dokázal již Saccheri. Légendrův důkaz zde uvádět nebudeme, protože se neliší podstatně od důkazu Saccheriho.

Podívejme se nyní na Légendrovy důkazy věty, že součet úhlů v trojúhelníku je roven dvěma pravým.

V 1. vydání svých *Eléments* ji Légendre dokazuje analyticky. Vychází však z toho, že „na volbě jednotky délky nezávisí správnost dokazované poučky“, takže činí vlastně předpoklad, že existují podobné útvary, což je, jak jsme již viděli, ekvivalentní s Eukleidovým axiomem o rovnoběžkách. Protože Légendre usoudil, že analytický důkaz je pro začátečníky obtížný, nahradil jej v dalším vydání tímto geometrickým důkazem (podle Bonola-Liebmann [17], str. 61—62):

Vzhledem k první větě Légendrově stačí dokázat, že součet úhlů v trojúhelníku nemůže být menší dvou pravých. Budiž tedy $\triangle ABC$

trojúhelník, v němž součet úhlů je menší než $2R$, a budiž α defekt trojúhelníka, t. j. úhel daný vztahem $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \alpha \equiv 2R$. Zvolme bod A' (viz obr. 135) na druhé straně od přímky $\overline{CB}$ tak, že $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'CB$ a $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$. Trojúhelník $\triangle A'BC$ má také defekt α. Vedeme-li nyní bodem A' přímku, která protne přímku $\overline{AC}$ v bodě C_1 a přímku $\overline{AB}$ v bodě B_1, pak trojúhelník $\triangle AB_1C_1$ má součet úhlů opět menší než $2R$ a při tom jeho defekt je roven součtu defektů čtyř trojúhelníků, z nichž je složen, tedy je větší než 2α. Opakujeme-li nyní s trojúhelníkem $\triangle AB_1C_1$ totéž, co jsme dělali s trojúhelníkem $\triangle ABC$, dostáváme po n krocích trojúhelník, jehož defekt je větší než $2^n\alpha$. Protože můžeme n volit tak, že $2^n\alpha > 2R$, dostáváme se ke sporu, takže součet úhlů v trojúhelníku nemůže být menší dvou pravých.



Obr. 137.

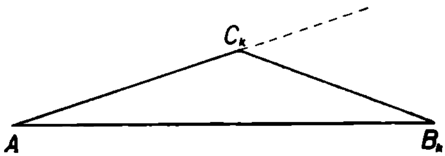
Tento důkaz spočívá, jak je vidět, na skrytém předpokladu, že každým bodem uvnitř úhlu lze vést přímku, jež protíná obě jeho ramena, kterýžto předpoklad je ekvivalentní s Eukleidovým postulátem (viz VĚTU 15,9).

Jiný důkaz podává Légendre takto (podle Kagan [4], str. 136—138): V trojúhelníku $\triangle ABC$ budiž $AB \geqq AC \geqq BC$. Je-li H střed strany BC (viz obr. 136) a na polopřímku $\overline{AH}$ naneseme $AC_1 \equiv AB$ a na (AB) úsečku $AB_1 \equiv 2 \,.\, AH$, pak trojúhelník $\triangle AB_1C_1$ má týž součet úhlů jako $\triangle ABC$ (neboť je-li $AH' \equiv H'B_1$ ($\equiv AH$), pak z $\triangle AHB \equiv \equiv \triangle AH'C_1$ plyne $\sphericalangle AC_1H' \equiv \sphericalangle B$ a $\triangle H'C_1B_1 \equiv \triangle HCA$, odkudž $\sphericalangle H'C_1B_1 \equiv \sphericalangle C$, $\sphericalangle AB_1C_1 \equiv \sphericalangle HAC$; přitom úhel $\sphericalangle HAB$ je oběma trojúhelníkům společný).

Pro úhel $\sphericalangle C_1AB_1$ platí vztah $\sphericalangle C_1AB_1 \leqq \frac{1}{2} \sphericalangle A$, což plyne odtud, že když v trojúhelníku $\triangle ABC$ je $AC \leqq AB$ a přitom D je půlící bod strany BC (viz obr. 137), $AD \equiv DE$, pak $\triangle ADC \equiv \triangle EDB$, takže $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle BED$. Protože v $\triangle ABE$ je $AB \geqq BE$ ($\equiv AC$), je $\sphericalangle BED \geqq \sphericalangle DAB$.

V trojúhelníku $\triangle AB_1C_1$ platí opět $AB_1 \geqq AC_1 \geqq B_1C_1$, neboť především z $AC_1 \equiv AB$ a z $C_1B_1 \equiv AC$ plyne $AC_1 \geqq C_1B_1$. Dokázat, že $AB_1 \geqq AC_1$, je totéž, jako dokázat, že $AE \geqq AB$ (viz obr. 137), ovšem za předpokladu, že $AB \geqq AC \geqq BC$. Pak je však mimo jiné $\sphericalangle C \geqq \sphericalangle A$. Při tom platí $\sphericalangle ABE > \sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle C$ a současně $\sphericalangle A > \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle AEB$, takže pro $\triangle ABE$ platí $\sphericalangle ABE > > \sphericalangle AEB$, čili skutečně $AE > AB$.

Můžeme tedy pro trojúhelník $\triangle AB_1C_1$ opakovat totéž, co jsme dělali s $\triangle ABC$, a podobně pokračujeme s trojúhelníky $\triangle AB_2C_2$, $\triangle AB_3C_3$ atd. Dostaneme tak trojúhelník $\triangle AB_kC_k$, jehož součet úhlů je stejný jako součet úhlů trojúhelníka $\triangle ABC$, a přitom lze k volit tak, že úhly při vrcholech A a B_k jsou menší než libovolně daný malý úhel.



Obr. 138.

(Úvaha dosud provedená může sloužit jako jiný důkaz první věty Légendrovy. Srovnej s naším důkazem VĚTY 13,6!).

Légendre nyní uzavírá důkaz asi takto: vezmeme-li k tak velké, že každý z úhlů $\sphericalangle A$ a $\sphericalangle B_k$ bude menší než libovolně daný úhel, bude součet těchto úhlů konvergovat (při $k \to \infty$) k nule, takže součet úhlů v trojúhelníku $\triangle AB_kC_k$ (viz obr. 138), který je stejný jako v $\triangle ABC$, bude mít touž limitu jako úhel $\sphericalangle AC_kB_k$. Vezmeme-li vnější úhel při C_k, vidíme, že při $k \to \infty$ konverguje k nule, takže úhel C_k konverguje ke $2R$ a součet úhlů v $\triangle ABC$ je tedy roven dvěma pravým.

Légendre sice správně ukázal, že úhly $\sphericalangle A$ a $\sphericalangle B_k$ konvergují k nule, dopustil se však chyby, když jen tak beze všeho tvrdil, že i vnější úhel při $\sphericalangle C_k$ konverguje k nule. Lobačevskij v kritice tohoto důkazu poznamenal (Lobačevskij [6], str. 150 a n.), že lze připustit, že limita úhlu $\sphericalangle C_k$ je menší než $2R$, neboť zatím co s rostoucím k se úhly $\sphericalangle A$ a $\sphericalangle B_k$ zmenšují, současně se strany trojúhelníka $\triangle AB_kC_k$ bez omezení zvětšují.

Další Légendrův nepřímý důkaz věty, že součet úhlů trojúhelníka je roven dvěma pravým, vedl k závěru, se kterým jsme se již dříve setkali, že by totiž existovala absolutní míra délek. Když Légendre došel ve svých úvahách k tomu, že by délka byla dána pouhým číslem bez volby jednotky, viděl v tom spor a pokládal důkaz za skončený.

Závěrem můžeme o Légendrovi říci, že na všech úskalích, která se mu vyskytla v cestě, ztroskotal, a to proto, že se nedovedl odpoutat od vžitých představ eukleidovské geometrie.

Dříve, než skončíme líčení úspěchů a neúspěchů matematiků v „předhistorickém období" neeukleidovské geometrie, musíme se na chvíli zastavit ještě u maďarského matematika Farkase Bolyaie (1775—1856). Zabýval se po dlouhou dobu důkazy V. postulátu a jeho život je úzce spjat s objevem neeukleidovské geometrie, neboť jeho syn Jan patří mezi první, kteří odhalili novou kapitolu geometrie.

F. Bolyai pocházel ze starého maďarského šlechtického rodu a říká se, že jím začínají dějiny matematické činnosti v Maďarsku. Sklon k matematice se u něho jevil již v mládí. Svoje universitní studia konal v Göttingách (1796—1799) — proto je často uváděn také jako Wolfgang Bolyai — a tam se seznámil s Gaussem, o dva roky mladším. Společné zájmy sblížily oba studenty tak, že se stali nejlepšími přáteli svých mladých let. Svědčí o tom jejich korespondence z doby, kdy F. Bolyai žil již opět v Maďarsku, kde se po několika letech stal profesorem matematiky a fysiky na evangelickém reformovaném gymnasiu v Maros-Vásárhély.

F. Bolyai se zabýval důkazem V. postulátu ještě před příchodem do Götting a ve svých pokusech pokračoval v Göttingách. Göttingenská universita byla tehdy zastoupena několika jmény na hnutí, vzniklém okolo theorie rovnoběžek.

Profesor matematiky A. G. Kaestner pilně sledoval a shromažďoval literaturu o theorii rovnoběžek a dal G. S. Klügelovi podnět k sepsání disertační práce *Recensio conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi* (1763), první to práci o historii tohoto bolavého místa matematiky vůbec, o které jsme mluvili již výše. Kaestner ve svých pozdějších přednáškách pochyboval o tom, že by se V. postulát dal vůbec dokázat. Profesor astronomie S. F. Seyffer, který se také zabýval theorií rovnoběžek, projevoval podobnou resignaci, jak můžeme vidět z tohoto jeho výroku:

„...zdá se nanejvýš pochybné, že by se jedenáctý axiom dal vůbec dokázat, aniž by se přibral nějaký další axiom." (P. Stäckel [10], str. 41.)

Toto ovzduší resignace nebylo založeno na konkretních výsledcích; šlo jen o hypothesy, které se samy nabízely tomu, kdo sledoval již tak dlouhou historii neúspěšných důkazů V. postulátu. Proto snad také nemělo toto ovzduší žádný vliv ani na F. Bolyaie, ani na Gausse, takže se oba pokoušeli dokázat Eukleidův postulát a později si o svých úvahách vyměnili několik dopisů.

Ačkoliv se F. Bolyai zabýval theorií rovnoběžek takřka celý život, nepřinesl nic podstatně nového. Ukázal pouze na příklad to, že V. postulát je ekvivalentní s tvrzením, že každými čtyřmi body neležícími v rovině možno vést kulovou plochu čili jinými slovy, že každými třemi body neležícími v přímce lze vést kružnici. Sám o svém úsilí píše:

> „Protože jsem však nebyl spokojen se svými pokusy dokázat XI. postulát a nenalezl jsem klidu, ani když jsem v těchto pokusech šel až po samy meze možnosti, hasl po určité době můj zápal pro matematiku a vrhl jsem se na poesii." (P. Stäckel [10], str. 18.)

F. Bolyai byl nadaným matematikem, avšak trpěl jednak velkou roztříštěností svých zájmů, jednak tím, že zůstal ve svých snahách osamocen. V jeho vlasti nebylo žádné matematické tradice, takže se neměl o koho opřít, a s ostatním světem neměl žádného styku. Vedle několika knížek o elementech matematiky a fysiky pro posluchače gymnasia, na němž učil, vydal latinský spis *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae... introducendi...* (1832—34), který je jeho životním dílem. Jako dodatek k tomuto spisu byla přidána stať mladého Jana Bolyaie *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens,* ve které jsou vyloženy základy neeukleidovské geometrie a o které budeme mluvit ještě později.

Předmětem vlastního spisu F. Bolyaie jsou snahy charakteristické pro 19. století, totiž budování základů geometrie a vůbec celé matematiky. Byl však psán v době, kdy nebyly ještě v matematice mnohé ze základních otázek vyjasněny: nebyl na př. ještě podán důkaz t. zv. *fundamentální věty algebry* (která říká, že každá algebraická rovnice má, připouštíme-li komplexní čísla, alespoň jeden kořen), nebyla ještě přesně definována *spojitost*, nebyl zaveden pojem *množiny* (učinil tak teprve r. 1895 G. Cantor). F. Bolyai si položil úkol příliš obtížný, než aby ho mohl cele splnit, a proto jeho spis nenašel žádného ohlasu ani v době, kdy byl psán, a tedy tím spíše ani v době pozdější. Přesto některými svými myšlenkami anticipoval pojmy později zavedené.

KAPITOLA II

OBJEVITELÉ NEEUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE

24. N. I. Lobačevskij (1792—1856).[30]) Již v úvodu této knížky jsme se zmínili o tom, že Lobačevského objev neeukleidovské geometrie je těsně spjat s jeho činností na universitě. Jako mladý docent měl Lobačevskij za úkol přednášet o elementární matematice a geometrii s vyššího hlediska, a právě zde si uvědomil, jak velkým nedostatkem geometrie je neuspokojivě fundovaná theorie rovnoběžek. Dříve, než se budeme zabývat objevitelskou prací Lobačevského, bude užitečné říci několik poznámek o jeho činnosti na universitě vůbec.

Kazaňská universita, na které Lobačevskij vystudoval (v letech 1807 až 1811) a které zasvětil pak celý svůj život, byla založena teprve 1804 až 1805, tedy několik let před tím, než na ni Lobačevskij vstoupil. V té době byla Kazaň hlavním kulturním střediskem východní části Ruska, na vzdáleném okraji rusko-evropského východu, uprostřed takřka nedotknuté přírody. Historik kazaňské university N. P. Zagoskin píše, že zde byly pro rozvoj university podmínky krajně nepříznivé.

Problém sestavit profesorský sbor se rozřešil tak, že jednak byly vybráni schopní profesoři kazaňského gymnasia, s nímž ostatně v prvních letech byla universita úzce spjata, jednak byli povoláni profesoři z ciziny. Na fysikálně-matematické fakultě byli vedle ruských profesorů G. J. Kartaševského (katedra vyšší matematiky) a J. J. Zapolského (katedra aplikované matematiky a exper. fysiky) cizinci J. M. C. Bartels (čistá matematika), K. F. Renner (aplikovaná matematika), J. J. Littrow (astronomie) a F. X. Bronner (fysika).

To, že universita byla založena teprve nedávno a že si musela vychovat dorost vědeckých sil, dalo velkou příležitost Lobačevskému, aby po ukončení studií rozvinul svůj talent. R. 1811 dosáhl titulu magistra matematických a fysikálních věd. Titul magistra dostávali mladí lidé, kteří vzhledem k úspěchům při studiu měli zůstat na universitě jednak jako pomocníci profesorů, jednak aby se připravovali na vě-

---

[30]) Dříve se uváděl r. 1793 jako rok narození Lobačevského. R. 1943 byly však objeveny dokumenty, podle nichž se Lobačevskij narodil 20. listopadu (1. prosince) 1792. Podrobněji o tom viz Kagan [9], str. 14.

deckou a profesorskou činnost. Roku 1814 byl Lobačevskij jmenován docentem, 1816 mimořádným a 1822 řádným profesorem kazaňské university.

Je pozoruhodné, jakého širokého matematického vzdělání nabyl Lobačevskij za dobu svých studií, o čemž svědčí to, že vedle elementární matematiky, kterou přednášel na začátku své činnosti na universitě, přednášel zakrátko nejrůznější matematické discipliny: algebru, analysu, geometrii, theorii čísel. Čteme o něm, že z talentovaného a nadějného studenta se vypracoval vážný profesor, samostatně myslící, mnoho pracující a neustále promýšlející svoje přednášky.

Když kolem r. 1820 opustili profesoři - cizinci universitu v důsledku dusné reakční atmosféry, kterou vytvořil nový carský úředník ministerstva Magnickij, pověřený provedením revise university a její pozdější samovládce, padla veškerá zodpovědnost za vyučování matematiky a fysiky na mladého Lobačevského.

Zvláštním rysem Lobačevského bylo, že vedle nadání pro matematiku měl skvělé organisační schopnosti. Při vší tak velké pedagogické činnosti byl vázán nemalými administrativními úkoly. Ačkoli byl teprve mimořádným profesorem, stal se r. 1820 děkanem fysikálně-matematické fakulty. Vedle toho zastával ještě celou řadu drobných úkolů. Bylo nutno založit universitní knihovnu — vedení bylo svěřeno Lobačevskému; byl zřízen komitét pro stavbu universitních budov — Lobačevskij je zvolen za jeho člena a později se stává předsedou a spolupracuje na návrzích nebo dokonce sám projektuje stavby; uvažuje se o vydávání učených spisů *Učenyje zapisky* — za redaktora je určen Lobačevskij; organisuje se fysikální kabinet — organisací je pověřen Lobačevskij; plánuje se zřízení universitní astronomické observatoře — Lobačevskij se zajímá o toto dílo a aktivně se účastní. Za všechny organisační úspěchy se dostává Lobačevskému čestného uznání: po odvolání Magnického, kdy se opět po dlouhé době volí r. 1827 nový rektor kazaňské university, je zvolen a stále volen Lobačevskij a zůstává v této funkci plných 19 let.

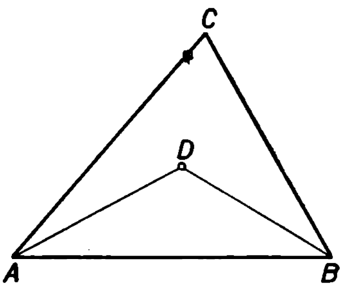
V. F. Kagan, známý sovětský geometr, píše ve své knize *Lobačevskij*:

„Mnozí vědci, obdaření velkým talentem, se vyznačovali podivuhodnou schopností spojit tvůrčí vědeckou práci s velkou činností administrativní a veřejnou. Leibniz publikoval četná filosofická i matematická pojednání během své rozsáhlé politické, administrativní a diplomatické činnosti. Monge se věnoval vědecké práci, ačkoliv byl vázán složitými povinnostmi, spojenými s organisováním vojska v době revolučních bojů. U nás dovedl také M. V. Lomonosov spojit vědeckou tvořivost s velkou činností administrativní a s tímže se setkáváme u Lobačevského. Když se podrobně seznamujeme s činností Lobačevského v prvním období, kdy řídil universitu, nebo i když jen čteme jeho dopisy Musin-Puškinovi,[31]) tu stěží chápeme, že se Lobačevskij mohl uprostřed všelijakých spletitých povinností věnovat hluboké badatelské práci. Při tom právě tou dobou napsal svoje nejdůležitější spisy.“

(Kagan [9], str. 218.)

Obraťme se nyní k Lobačevského práci a objevům v theorii rovnoběžek.

Jak jsme již řekli, byl Lobačevskij pověřen hned na začátku své činnosti na universitě přednáškami z elementární matematiky a geometrie. Byla nalezena skripta přednášek z doby 1815—1817, z nichž je vidět, že Lobačevskij se pokoušel třemi různými způsoby fundovati theorii rovnoběžek. Nejdříve chce definicí rovnoběžek jakožto přímek stejného směru obejít V. Eukleidův axiom, ve druhém se obírá nekonečně velkými částmi roviny podobně jako Bertrand. Třetí pokus ukazuje, že Lobačevskij se podrobně zabýval Légendrovými pracemi z theorie rovnoběžek. Zná obě věty Légendrovy a pokouší se dokázat, že existuje alespoň jeden trojúhelník se součtem úhlů $2R$. Zná již také některé věty o trojúhelnících se součtem úhlů menším než $2R$, na př.: je-li bod D uvnitř trojúhelníka $\triangle ABC$ (viz obr. 139), pak součet úhlů v trojúhelníku $\triangle ABD$ je větší než v trojúhelníku $\triangle ABC$. V této době byl mladý Lobačevskij ještě cele v zajetí přesvědčení, kterého se Légendre nemohl zbavit po celý život, že totiž je možné dokázat Eukleidův axiom o rovnoběžkách.



Obr. 139.

Když kurátor kazaňské university vyzval profesory, aby každý

[31]) [M. N. Musin-Puškin byl kurátorem kazaňské university po Magnickém a velice se zasloužil o její rozkvět.]

z nich napsal pro tisk učební text nebo učebnici, Lobačevskij jako jeden z nemnohých, kteří vyhověli, předložil r. 1823 rukopis, nadepsaný krátce *Geometrija*. K vytištění jeho knížky však nedošlo, protože podle mínění recensenta se spis za učebnici nehodil. Skutečně, v této knize, jejíž rukopis se zachoval a byl vytištěn až později r. 1909, nešlo o nějaký systematický výklad geometrie, rozhodně ne o výklad podle tradice Eukleidových Základů, které tou dobou stále ještě byly v čele vyučování geometrie. Lobačevského výklad byl určen pro pokročilejší a rozváděl blíže některé partie elementární geometrie. Ze třinácti kapitol je deset věnováno měření (měření délek, úhlů, stěnových úhlů, trojúhelníků, hranolů atd.), ostatní se zabývají kolmostí, shodností trojúhelníků a rovnoběžností přímek.

Z toho, co zde Lobačevskij říká o rovnoběžkách, je zřejmé, že pronikl hlouběji do jejich theorie. Je mu jasné, že všechny dosavadní pokusy dokázat V. postulát selhaly a že ani předpoklad, že úhly trojúhelníka závisí jen na poměru stran a ne na absolutních jejich délkách, se netýká podstaty otázky, protože je svým způsobem konvencí. Lobačevského spis je pozoruhodný také ještě tím, že v prvních pěti kapitolách je soustředěna ta část geometrie, která nezávisí na postulátu o rovnoběžkách, tedy část patřící t. zv. absolutní geometrii.

Pro dobu, ve které Lobačevskij žil, je charakteristické, že recensent rukopisu knihy *Geometrija* zvláště upozornil na okolnost, která byla zřejmě okolností přitěžující, že totiž autor zavádí metrický systém: za jednotku délky bere *metr* a za jednotku úhlu stý díl kvadrantu pod názvem *grad*. Recensent k tomu poznamenává:

> „Je známo, že tato dělení byla vymyšlena za francouzské revoluce, kdy vášeň národa ničit vše dřívější pronikla dokonce i do kalendáře a dělení kruhu. Avšak tato novota nikde nebyla přijata a v samotné Francii dávno už byla opuštěna pro svou zjevnou nepohodlnost.“ (Kagan [9], str. 112.)

Rukopis knihy *Geometrija* ukazuje, že r. 1823 nenašel ještě Lobačevskij řešení problému rovnoběžek. Teprve po dalším tříletém usilovném bádání, totiž r. 1826, předložil fysikálně-matematické fakultě kazaňské university práci, ve které rozřešil dvoutisíciletý spor o Eukleidově axiomu o rovnoběžkách. Práce byla psána francouzsky, jak bylo tehdy zvykem, a nesla název *Exposition succinte des principes de la*

Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.[32]) K jejímu vytištění opět nedošlo, tentokráte pro nepochopení se strany kolegů na universitě, kteří neměli pro základy geometrie smysl. Komise, která měla o vytištění práce rozhodnout, rukopis fakultě nevrátila a veškeré pátrání po něm skončilo nezdarem. Přesto jeho obsah přibližně známe, protože první tištěná práce Lobačevského obsahuje výtah z tohoto rukopisu, jak sám Lobačevskij poznamenává v předmluvě.

Touto první tištěnou prací je spis *O načalach geometrii*, který vycházel po částech v universitním časopise *Kazaňskij vestnik* v letech 1829—1830. Zde se Lobačevskij věnoval nejdříve nedostatkům v počátcích budování geometrie (viz citát uvedený na str. 20) a pokoušel se na prvních dvaceti stránkách tyto nedostatky odstranit. Definuje zde pomocí pojmu vzdálenosti základní geometrické útvary tak, jak jsme se o tom zmínili již v odstavci 7. Dále zavádí pojem úhlu a zabývá se vlastnostmi sférických mnohoúhelníků a srovnává věty o shodnosti rovinných a sférických trojúhelníků. Dále pak pokračuje slovy:

„Viděli jsme, že součet úhlů trojúhelníka nemůže být $> \pi$. Zbývá tedy připustit, že je buď $= \pi$ nebo $< \pi$. Jedno i druhé můžeme připustit, aniž bychom kdy došli ke sporu; odtud vycházejí dvě geometrie: jedna, *běžně užívaná*[33]) pro svoji jednoduchost, je v souladu se všemi skutečnými měřeními; druhá, *pomyslná*,[34]) obecnější a proto ve výpočtech složitější, připouští závislost délek na úhlech.

Chceme-li pro jeden trojúhelník připustit, že má součet úhlů roven π, bude mít součet tuto hodnotu pro každý trojúhelník. Jestliže naproti tomu pro jeden jediný připustíme, že je menší než π, pak se snadno dokáže, že s rostoucími stranami tento součet klesá.

Za žádných okolností se tedy nemohou protnout přímky, které s třetí tvoří úhly, jejichž součet je π. Je však možné, že se také neprotnou, i když tento součet je $< \pi$, pokud chceme připustit, že součet úhlů v trojúhelníku je $< \pi$.

---

[32]) *Krátký výklad základů geometrie s přesným důkazem theorie rovnoběžek.*

[33]) [употребительная].

[34]) [воображаемая; toto slovo v době Lobačevského bylo užíváno také ve smyslu *imaginární* (komplexní). Cizí překlady zde mají výrazy *„imaginäre Geometrie“*, *„géométrie imaginaire“* a pod. Ve skutečnosti zde však nejde o nějakou „komplexní“ geometrii. Lobačevskij chtěl názvem pouze naznačit, že jde o geometrii pomyslnou, smyšlenou.]

Vzhledem k jedné přímce mohou proto všechny přímky roviny být rozděleny na *protínající* a *neprotínající*. Z těchto posledních budeme nazývat *rovnoběžnými* ty, které mezi všemi přímkami, vycházejícími z jednoho bodu, tvoří hranici nebo jinak řečeno, přechod od jedněch k druhým."

(Lobačevskij [5], str. 194.)

Proč Lobačevskij říká, že jeho nová geometrie je obecnější než naše běžně užívaná? O tom pokračuje již o stránku dále:

„Předpoklad, že součet úhlů v trojúhelníku je $< \pi$, má ten následek, že se kružnice s rostoucím poloměrem neblíží přímce, ale zvláštní křivce, kterou budeme nazývat *limitní kružnicí*. Také koule se v takovém případě bude blížit ploše, kterou podobně budeme nazývat *limitní koulí*. Rovinný řez této plochy je buď kružnice nebo limitní kružnice.

Geometrie na limitní kouli je úplně stejná jako ta, kterou známe v rovině.[35]) Limitní kružnice nahrazuje v ní přímku a úhly mezi rovinami, v nichž leží limitní kružnice, nahrazují úhly mezi přímkami.

Limitní kružnice se přímce blíží tím více, čím menší je její oblouk, takže rozdíl v poměru k délce oblouku může být učiněn libovolně malý. Proto všechno, co platí o jednom, platí i o druhém, jen když obojí bereme hodně malé.

Jestliže tedy v přírodě platící geometrie je taková, že dvě rovnoběžky svírají s třetí přímkou úhly, jichž součet je menší než π, potom běžně užívaná geometrie by byla geometrií čar zvlášť malých délek ve srovnání s čarami, které tvoří trojúhelníky se součtem menším než π." (Lobačevskij [5], str. 195.)

Ve čtyřiceti paragrafech pak Lobačevskij rozvíjí svoji „pomyslnou" geometrii. Odvozuje její trigonometrii a analytickou geometrii, pracuje s rovnicemi přímek, kružnic a limitních kružnic, stanoví délky křivek, plošné obsahy a objemy různých těles.

Pokouší se také přesvědčit čtenáře o „bezespornosti nové geometrie", jak bychom to řekli dnes. Ukazuje, jak trigonometrie jeho nové geometrie je v úzké souvislosti se sférickou trigonometrií; stačí jen místo stran a, b, c dosadit $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$. Ukazuje, že analysa a nová geometrie spolu harmonují, a to tak, že řešení některých integrálů pomocí nové geometrie je totéž jako řešení klasickými prostředky. Lobačevskij také předhazuje otázku, jak by se změnila mechanika v prostoru ovládaném novou geometrií. V důsledku závislosti velikosti součtu úhlů trojúhelníka na jeho stranách zkoumá součet pro trojúhelník, jehož vrcholy jsou stálice *Rigel* — *Sirius* — 29 *Eridani*, a zjišťuje, že rozdíl od π je ještě příliš malý, totiž v mezích pozorovacích chyb.

---

[35]) [Rozumí se, že v eukleidovské rovině.]

Jaký ohlas měla tak významná práce, jako je stať *O načalach geometrii*, jak bylo přijato první pojednání o neeukleidovské geometrii? S výsměchem a urážkami. R. 1834 se objevuje v časopise *Syn otečestva* recense pod značkou *S. S.* Uvedeme z ní dva citáty:

„Jsou lidé, kteří si někdy po přečtení knihy postěžují: byla příliš prostá, příliš obyčejná, nebylo v ní ani, nad čím by se člověk mohl zamyslet. Takovým milovníkům přemýšlení doporučuji, aby si přečetli geometrii p. Lobačevského. Zde už je opravdu o čem přemýšlet. Mnozí z našich prvotřídních matematiků ji četli, dumali nad ní, ale ničemu neporozuměli; proto považuji za zbytečné podotknout, že i já, ačkoliv jsem nad ní dlouho rozvažoval, ničeho jsem se nedomyslel, t. j. neporozuměl jsem ani jedné myšlence. Bylo by těžké pochopit třebas jen to, jak p. Lobačevskij z nejsnadnější a nejjasnější matematické nauky, jakou je geometrie, mohl udělat tak těžkou, tak temnou a nepronikutelnou nauku, jestliže by nám sám částečně nenapověděl tím, když říká, že jeho geometrie se liší od *běžně užívané*, které jsme se všichni učili a které se už podle všeho neodnaučíme, ale že je jen *pomyslná*. Ano, teď je vše jasné. Avšak co všechno nám nemůže obrazotvornost dát, obzvláště obrazotvornost živá a přitom nestvůrná! Proč si nepředstavit na příklad černé jako bílé, kulaté jako čtyřhranné, součet úhlů trojúhelníka menší dvou pravých a jeden a týž omezený integrál rovný jednou $\frac{1}{4}\pi$ a po druhé ∞? Velice, velice dobře je to možné, i když rozumem je to nepochopitelné.

Ale může se někdo zeptat: nač psát a dokonce ještě tisknout takové nejapné fantasie. Přiznávám se, na tuto otázku těžko odpovědět. Autor nikde nedal na srozuměnou, za jakým účelem vydal svůj spis, a proto se musíme uchýlit k domněnkám. Pravda, na jednom místě autor říká jasně, že určité nedostatky, jichž si všiml na dosud užívané geometrii, ho přiměly k tomu, sepsat a vydat tuto novou geometrii, ale to je zřejmě naprosto nesprávné a se vší pravděpodobností řečeno jen proto, aby se ještě více ukryl pravý cíl spisu. Předně to odporuje tomu, co sám autor řekl o své geometrii, že je pomyslná, t. j. že ve skutečnosti vůbec neexistuje a může existovat pouze v jeho představách a pro měření se ve skutečnosti vůbec nehodí; za druhé to odporuje obsahu nové geometrie, podle něhož se dá spíše říci, že není vymyšlena proto, aby doplnila, ale popřela naši obvyklou geometrii. Přitom nám budiž dovoleno dotknout se autorovy osoby. Jak možno pomyslit, že by p. Lobačevskij, řádný profesor matematiky, napsal s vážným úmyslem knihu, která by nepřinesla mnoho cti ani poslednímu farnímu učiteli. Jestliže ne učeností, tedy alespoň zdravým rozumem musí být obdařen každý učitel; ale v nové geometrii nezřídka i ten chybí.

Uváživ všechno toto, docházím k závěru, že p. Lobačevskij nejpravděpodobněji napsal a vydal svoji Geometrii jen za tím účelem, aby si tropil žerty nebo lépe řečeno, aby napsal satiru na učence-matematiky, a snad vůbec na učence-spisovatele současné doby. Avšak nyní již ne s pravděpodobností, ale s naprostou jistotou tvrdím, že dva nedostatky, totiž bezesmyslná vášeň psát nezvyklým a nesrozumitelným způsobem, kterou lze časem pozorovat u mnohých našich spisovatelů, a nepředložená touha objevovat nové, se kterou se setkáváme u talentů, postačujících sotva na to, aby si řádně osvojili staré, opakuji, tyto dva nedostatky autor hodlal zobrazit a zobrazil je, jak lépe ani není možné...

Avšak jsa si vědom ceny spisu p. Lobačevského, nemohu mu nevytknout to, že tím, že nedal své knize patřičný titul, nechal nás dlouho přemýšlet nadarmo. Proč nenapsat místo titulu „*O načalach geometrii*" na příklad „*Satira na geometrii*", „*Karikatura na geometrii*" nebo něco podobného? Potom by každý na první pohled viděl, o jakou knihu jde, a autor by byl ušetřen mnoha nepříznivých o něm úsudků a mínění. Štěstí, že se mi podařilo proniknout ke skutečnému cíli, pro který byla napsána tato kniha — a bůh ví, co jsem se o ní i o jejím autoru napřemýšlel. Nyní doufám a věřím, že ctěný p. autor se bude cítit mně zavázán za to, že jsem ukázal skutečné hledisko, s něhož nutno posuzovat jeho spis.

S. S." (Kagan [9], str. 245—248.)

O této fejetonistické recensi napsal Lobačevskij na začátku svého spisu *Voobražaemaja geometrija*, který vyšel r. 1835, tuto poznámku:

„Časopis Syn Otěčestva otiskl v čísle 41 ročníku 1834 vůči mně velmi urážlivou kritiku, a jak jsem přesvědčen, naprosto nespravedlivou. Recensent založil svůj posudek jen na tom, že mé theorii neporozuměl, a považuje ji za chybnou proto, že v příkladech nalezl jeden *nejapný* integrál. Nenacházím však takového integrálu ve svém pojednání. V listopadu minulého roku jsem zaslal vydavateli odpověď, která nebyla z neznámých mi příčin dosud, během pěti měsíců, ještě otištěna." (Lobačevskij [5], str. 408.)

Na žádost Lobačevského zaslal senát Kazaňské university práci *O načalach geometrii* petrohradské Akademii věd. Spis byl dán k recensi akademiku Ostrogradskému, který napsal do posudku mimo jiné:

„Autor, jak se zdá, si postavil jako cíl psát tak, aby mu nebylo vůbec rozumět...

O tom, co jsem pročetl, považuji za povinnost sdělit Akademii toto:

1. Ze dvou omezených integrálů, které p. Lobačevskij považuje za svůj objev, jeden je už známý. Je možné ho vyčíslit pomocí nejelementárnějších method integrálního počtu. Výpočet druhého integrálu, uvedeného na straně 120, je skutečně něco nového. Patří cele p. kazaňskému rektorovi. Na neštěstí je nesprávný.

2. Vše, co jsem pochopil z geometrie p. Lobačevského, je více než podprůměrné.

3. Všechno, co jsem nepochopil, bylo zřejmě špatně vyloženo a lze tudíž těžko luštit.

Z toho jsem učinil závěr, že kniha p. rektora Lobačevského je poskvrněna chybou, je nedbale napsána a nezasluhuje tudíž pozornosti Akademie."

(Kagan [9], str. 254.)

Ostrý výpad Ostrogradského proti Lobačevskému není podložen žádnými objektivními důvody. Pokud jde o druhý integrál, byl Lobačevského výpočet správný a ostatně proveditelný i elementárními prostředky. Mimo to, Lobačevskij nechtěl nikterak objevovat nové integrály; v tom však, že řešení některých integrálů pomocí nové geometrie bylo v souhlase s řešením klasickým, viděl, jak jsme už poznamenali výše, potvrzení logické pravdivosti nové geometrie.

To, co Ostrogradskij z práce ještě chápal, bylo asi prvních sedm paragrafů, kde jsou vyloženy logické základy geometrie. Pro úvahy o logickém budování geometrie však Ostrogradskij neměl pochopení, takže mu musely připadat příliš triviální.

Pokud jde o to, že se výklad nové geometrie dal špatně číst — na tom snad něco bylo. Každý objev, s nímž nejsme seznámeni, je temný, ať je vyložen jakkoli jasně. Na druhé straně objevitel nemá čas všechno říci a není to ostatně také jeho věc, rozhlašovat na všechny strany pomocí nejtriviálnějších obrazů, co vytvořil a uvedl na svět. Jeho úkolem především je otevřít cestu nástupcům, kteří by mohli přivést dál jeho myšlenky a přiblížit je nové generaci.

U Lobačevského bylo zapotřebí úžasné energie, jestliže se nezalekl křiku Boiotů a nenechal se odradit ani výsměchem, ani nepochopením. Rozvíjel svoji geometrii dál, shromažďoval další argumenty, aby ukázal, že nová geometrie je právě tak logicky pravdivá jako geometrie obyčejná, běžně užívaná, a snažil se psát srozumitelnější výklad. Tak vyšla r. 1835 v serii *Učenyje zapisky Kazaňskogo universiteta* kniha pod titulem *Voobražaemaja geometrija* a r. 1836 vychází tamtéž spis *Primenenije voobražaemoj geometrii k nekotorym integralam.* Obě tyto práce napsal Lobačevskij původně francouzsky pro Crellův žurnál v Německu, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, kde skutečně r. 1836 vycházejí pod názvem *Application de la géométrie imaginaire à quelques intégrales*, a r. 1837 jako *Géométrie imaginaire.*

Ve *Voobražaemoj geometrii* postupuje Lobačevskij tak, že do čela staví trigonometrické rovnice vyjadřující vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka v nové geometrii jakožto něco daného a z nich odvozuje celou novou geometrii. Důkazem, že rovnice tvoří bezesporný systém a že pro trojúhelníky s nekonečně malými stranami tento systém přechází v rovnice eukleidovské geometrie, se snaží prokázat logickou rovnocennost *běžné* i *pomyslné* geometrie. Ukazuje tím také, že obyčejná geometrie je jen speciálním případem jeho nové geometrie.

Jestliže obě práce *O načalach geometrii* i *Voobražaemaja geometrija* se navzájem doplňují tak, že jedna nemůže stát bez druhé,[36]) Lobačevskij se snažil nyní podat samostatný výklad nové geometrie od samých jejích počátků, a to synthetickou methodou. Proto v letech 1835 až 1838 vydával v *Učenych zapiskach* stať *Novye načala geometrii s polnoj teoriej paralelnych*, která zabrala celkem čtyři čísla a je nejrozsáhlejším spisem Lobačevského vůbec.

V úvodu ukazuje na nedostatky Eukleidovy theorie rovnoběžek a různých pokusů dokázat Eukleidův postulát, odhaluje chyby Bertrandova důkazu a nedostatky v důkazu Légendrově i v jeho úvahách, které platily tehdy za poslední slovo v oboru theorie rovnoběžek. V prvních šesti kapitolách pak vyložil absolutní geometrii, v zbývajících pěti svoji novou geometrii. Toto pojednání bylo už napsáno tak, že mu mohl rozumět každý hloubavý člověk s obecným matematickým vzděláním. Přesto nikdo toto dílo nečetl.

Proto se Lobačevskij rozhodl napsat zcela krátké a pokud možno snadno přístupné pojednání a vydal je tentokráte německy r. 1840 v Berlíně pod názvem *Geometrische Untersuchungen*. Tato velice jasně psaná malá knížka byla předposledním spisem Lobačevského. Po ní napsal nebo přesněji řečeno nadiktoval napolo oslepý Lobačevskij již jen jednu práci, rok před svou smrtí. Byla věnována nové geometrii a byla určena pro sborník chystaný k padesátiletému jubileu kazaňské university. Sepsána byla francouzsky pod názvem *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles* a r. 1855 vyšla také samostatně rusky jako *Pangeometrija* v *Učenych zapiskach*.[37])

---

[36]) Výklad v *Načalach*, bez důkazů a velice stručný, je rozveden ve spise *Voobražaemaja Geometrija*. Protože zde se však začíná systémem rovnic, aniž by se objasnilo, jak se k nim došlo, předpokládá tento spis znalost *Načal*.

[37]) Lobačevskij v pozdější době místo méně vhodného názvu *pomyslná geometrie* začal užívat slova *pangeometrie*, neboť ona zahrnovala také geometrii eukleidovskou.

Lobačevskij si byl dobře vědom toho, jak závažný objev učinil; když nenalezl pochopení doma v Rusku, obrátil se na širší, můžeme říci světové forum: publikoval, jak jsme viděli, svoje výsledky jednak v Crellově žurnálu, jednak v berlínském nakladatelství. Vzniká přirozená otázka, jakou měly nyní jeho výsledky odezvu.

Krátce řečeno, současná doba nepochopila Lobačevského objev ani jeho dalekosáhlý význam. Vinu na tom neslo, jak jsme již v úvodu naznačili, přesvědčení, utvrzené tehdejšími filosofickými a ideologickými názory ve formě Kantova učení o apriorních nazíracích formách, že eukleidovská geometrie plně vystihuje metrické vlastnosti skutečného prostoru. Pod tlakem oficiálních názorů lidé nechápali, oč v geometrii Lobačevského běží, a dívali se na ni asi jako na nesmyslnou theorii.

Názorně to ilustruje recense Lobačevského knížky *Geometrische Untersuchungen*, uveřejněná v bibliografickém časopise *Repertorium der gesammten deutschen Literatur* v čísle 2 r. 1840, která v úplnosti zní takto:

> „Podle autorova tvrzení můžeme připustit, aniž bychom se dostali ke sporu, že daným bodem lze k dané přímce vést dvě nesplývající rovnoběžky (srv. p. 10); mezi těmito dvěma rovnoběžkami mohou prý ležet přímky procházející tímto bodem, které danou přímku neprotínají, a ačkoliv s ní leží v téže rovině, nejsou s ní rovnoběžné. Na takovémto základě chce autor založit vlastní theorii s názvem „imaginární geometrie“. Její základy jsou vyloženy v tomto spisku, avšak zmíněný princip a jím dokazovaná věta na p. 21 „čím více se rovnoběžky v orientaci jejich rovnoběžnosti prodlužují, tím více se vzájemně přibližují“ spisek dostatečně charakterisují a zprošťují tak referenta dalšího posuzování“. (Engel [8], str. 434.)

Přesto však víme o člověku, který četl Lobačevského spisy — upozorněn byl na ně snad právě touto recensí — a dokonale jim rozuměl: byl to C. F. Gauss.

Gauss se během své velmi bohaté matematické činnosti zabýval také theorií rovnoběžek. Čteme, že již od dob svých studií myslel na tento problém. Později se dopracoval k systému neeukleidovské geometrie — ostatně sám tento název pochází od něho, on po prvé užil slov „*antieuklidische Geometrie*“.

Gaussův poměr k tomuto objevu však byl zvláštní. Bude nejlépe, když se o Gaussovi v této souvislosti podrobněji rozepíšeme.

25. C. F. Gauss (1777—1855). Nedostatků v budování theorie rovnoběžek a zároveň i celé geometrie si Gauss povšiml již někdy kolem r. 1792, kdy jako patnáctiletý student göttingenské university diskutoval o rovnoběžkách s některými profesory, nejvíce však se svým starším přítelem F. Bolyaiem, který, jak jsme se již zmínili, studoval dva roky v Göttingách. Gauss si s ním také o věci dopisoval, když se F. Bolyai vrátil domů do Maďarska. Podle dopisů můžeme soudit, že se Gauss pokoušel různými způsoby dokázat Eukleidův postulát. Gauss ostatně znal spisy Saccheriho a Lamberta, takže se také zabýval dedukcemi z předpokladu, že Eukleidův axiom není splněn. Ve všech svých úvahách, ať již při důkazu přímém či nepřímém, narážel však na obtíže, které, jak se sám vyjádřil, patřily stále témuž úskalí, o něž se všechny jeho pokusy rozbíjely. R. 1804 však píše v jednom dopise, že stále ještě má naději, že těmito úskalími šťastně propluje. Nemůžeme s určitostí tvrdit, kdy se s touto nadějí rozešel. Nejstarší dokument, který svědčí o jis ém obratu v jeho myšlení, pochází z r. 1816. Tehdy uveřejnil Gauss anonymně v časopise *Göttingische gelehrte Anzeigen* recense dvou publikací jakýchsi naivních *důkazů* V. postulátu. Z této recense uvedeme první odstavec:

„Je málo záležitostí v matematice, o kterých by se tolik psalo, jako o trhlině v základech geometrie při budování theorie rovnoběžek. Zřídka přejde rok, který by nepřinesl nějaký nový pokus tuto trhlinu zacelit, a přece nemůžeme říci, chceme-li mluvit poctivě, že bychom se v podstatě dostali dál než Eukleides před 2000 lety. Takovéto upřímné a přímočaré přiznání se nám zdá být důstojnosti vědy přiměřenější, než marné snažení neudržitelnou sítí zdánlivých důkazů zakrýt trhlinu, kterou nelze zacelit." (Gauss [12], str. 170.)

Další dokument z r. 1816 je Gaussův dopis příteli Gerlingovi, kde můžeme číst komentář k Légendrovu „důkazu" V. postulátu, založenému na argumentu, že *absolutní míra* pro délky není možná. Gauss zde zdůrazňuje, jak je neoprávněné jen tak beze všeho se opírat o takový předpoklad, a pokračuje:

„Je to poněkud paradoxní, že by mohla existovat a priori konstantní délka; já v tom však nenalézám žádného sporu."

A žertem dodává:

„Bylo by si dokonce přát, aby Eukleidova geometrie neplatila, protože bychom pak měli obecnou apriorní míru." (Gauss [12], str. 169.)

Podle obou těchto citátů se dá soudit, že Gauss již někdy krátce před r. 1816 zastával stanovisko, že dokázat V. postulát není možné, protože existuje geometrický systém, v němž tento postulát není splněn. Jak dalece znal a rozvinul Gauss tento systém, nemůžeme s určitostí tvrdit, protože sám ze svých úvah nic nepublikoval a ani v pozůstalosti nezanechal žádného rukopisného pojednání kromě několika stránek s nahozenými poznámkami, jichž si blíže všimneme až později. Vedle těchto málo poznámek jsme proto odkázáni na různé připomínky a poznámky, roztroušené v jeho dopisech.

Z Gaussových dopisů můžeme vedle toho také vidět, jak dalece znal výsledky jiných matematiků, kteří se úspěšně zabývali problémem rovnoběžek, jak reagoval na jejich podněty a jaký sám osobně zaujal k celé věci postoj. To všechno bude nyní předmětem několika příštích stránek.

Viděli jsme již, že Lobačevskij, který neznal dílo Saccheriho ani Lamberta, pracoval na problému rovnoběžek úplně sám a po celý život se nedověděl, že také jiní docházejí k podobným výsledkům jako on, a neměl nikoho, s kým by si o svém objevu mohl pohovořit. Naproti tomu Gauss znal všechny, kteří se tou dobou úspěšně zabývali theorií rovnoběžek, a znal i jejich výsledky. Velkou příležitost k seznámení s nimi mu poskytovalo jeho působení na významné německé universitě v Göttingách. Vedle toho se těšil neobyčejné autoritě, takže se k němu lidé hlásili sami, aby od něho slyšeli dobrozdání o svých výsledcích. Gauss se tímto způsobem stal mimoděk svědkem tvůrčí činnosti v oboru theorie rovnoběžek u celé řady významných i méně významných lidí. Byli to Schweikart, Taurinus, Jan Bolyai a Lobačevskij (jsou uvedeni v pořadí, jak se s nimi Gauss seznamoval).

F. K. Schweikart (1780—1859) nebyl vlastně matematikem (později se stal profesorem práv na universitě v Královci); zabýval se však matematikou ze záliby, zejména theorií rovnoběžek, o které publikoval několik prací. Znal určitě Klügelovu dissertaci o historickém rozvoji theorie rovnoběžek i práci Lambertovu. V letech 1812—1816 hlouběji promyslel geometrický systém nezávislý na V. Eukleidově postulátu a tento systém nazval *astralickou geometrií*.[38]) Když se od svého přítele

[38]) *Astralische Geometrie* — tento název měl napovědět, že tato zvláštní geometrie se uplatní teprve při měření velkých vzdáleností (při astronomických pozorováních).

Gerlinga dozvěděl, že také Gauss dospěl k jistým závěrům v theorii rovnoběžek, poslal mu (r. 1818) po Gerlingovi list, ve kterém stručně shrnul svoje názory a žádal, aby se Gauss o nich vyjádřil.

Bude jistě zajímavé přečíst si toto shrnutí Schweikartových myšlenek:

„Máme celkem dvojí geometrii: geometrii v užším smyslu, totiž Eukleidovu, a pak astralickou geometrii.

Trojúhelníky této druhé geometrie se vyznačují tím, že součet jejich úhlů není roven dvěma pravým.

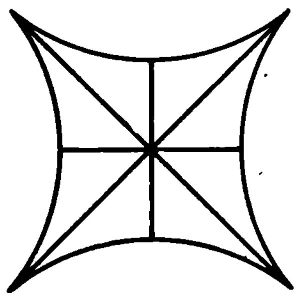
Z toho se dá logicky důsledně odvodit,

a) že součet tří úhlů v trojúhelníku je *menší* než dva pravé,

b) že tento součet bude stále tím menší, čím větší bude jeho obsah,

c) že výška rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka při zvětšování ramen sice stále roste, nepřekročí však určitou délku, kterou nazývám *konstantou*.[39])

Čtverce[40]) proto mají tuto podobu:



Kdyby pro *nás* tato konstanta byla poloměr zemský (takže by každá přímka vesmírného prostoru, která spojuje stálice vzdálené od sebe o 90°, byla tečnou zemského globu), pak by v poměru k rozměrům vyskytujícím se v denním životě byla nekonečně veliká.

Eukleidovská geometrie platí jen za předpokladu, že tato konstanta je nekonečně veliká. Jen tehdy bude platit věta, že součet tří úhlů každého trojúhelníka je roven dvěma pravým; toto lze z předpokladu, že konstanta je nekonečně velká, skutečně také snadno dokázat.“ (Gauss [12], str. 180.)

---

[39]) [Jde o výšku spuštěnou na přeponu. Podle toho, co již víme o úhlu souběžnosti, nemůže tato výška překročit délku, pro kterou je $\Pi(d) = \frac{1}{2}R$.]

[40]) [Schweikart zde má na mysli čtyřúhelníky se shodnými všemi stranami a úhly.]

Gauss napsal Gerlingovi o Schweikartových poznámkách toto:

„...Poznámka p. prof. Schweikarta mě neobyčejně potěšila a prosím, abyste mu o tom ode mne řekl mnoho krásného. Skoro všechno je to jakoby z mé duše napsáno... Ačkoli mohu docela dobře připustit nesprávnost eukleidovské geometrie, musela by podle našich astronomických pozorování být zmíněná konstanta nepoměrně větší než poloměr Země.“

(Gauss [12], str. 181.)

Schweikart nepublikoval však o *astralické geometrii* nic a ani svoje myšlenky blíže nerozvedl, takže citovaný list obsahoval asi vše, co Schweikart v nové geometrii udělal. Protože jeho publikované práce z dřívější doby se nové geometrie ještě netýkaly, lze říci, že Schweikartovo dílo patří ještě do předhistorie neeukleidovské geometrie, při čemž je jistě pozoruhodné, že jako neprofesionální matematik došel k tak krásným výsledkům.

Schweikart zasvětil do problému rovnoběžek svého synovce F. A. Taurina (1794—1874; byl také právníkem), který se po čase obrátil na Gausse se svými výsledky a zaslal mu svůj první pokus o důkaz V. postulátu. Gauss již z toho, jak se Taurinus k problému stavěl, poznal v Taurinovi *myslící matematickou hlavu* a odepsal mu dlouhým dopisem, který zde uvedeme v doslovném znění:

„Vaše blahorodí,

Váš milý dopis ze dne 30. října spolu s připojeným pojednáním jsem přečetl ne bez potěšení, tím spíše, že jsem zvyklý na to, že většina lidí, kteří se zabývají novými pokusy o t. zv. theorii rovnoběžek, nemá ani špetku geometrického ducha. Proti Vašemu důkazu nemám nic (nebo ne mnoho), co bych poznamenal, než to, že není úplný. Váš důkaz, že součet tří úhlů rovinného trojúhelníka nemůže být větší než 180°, by sice potřeboval, pokud jde o geometrickou přesnost, ještě doplnit, avšak to by se dalo snadno provést a je mimo vši pochybnost, že tuto vlastnost lze zcela rigorosně dokázat. Zcela jinak tomu však je s druhou částí, že totiž součet úhlů nemůže být menší než 180°; toto je vlastní uzel, úskalí, o které vše ztroskotává. Zdá se mi, že jste se tímto předmětem ještě dlouho nezabýval. U mne tomu tak již je přes 30 let a nevěřím, že by se kdo touto druhou částí mohl ještě víc zabývat než já, ačkoli jsem o tom nikdy nic neuveřejnil. Předpoklad, že součet tří úhlů je menší než 180°, vede ke zvláštní geometrii, od naší (eukleidovské) zcela odlišné, která je sama v sobě veskrze bezesporná a kterou jsem si sám pro sebe zcela uspokojivě rozvinul, takže v ní mohu řešit každou úlohu až na určení jisté konstanty, která se nedá stanovit a priori. Čím větší bude tato konstanta, tím více se přiblížíme eukleidovské geometrii a při nekonečné její hodnotě obě geometrie splynou. Některé věty této geometrie jsou paradoxní a nezasvěcenci připadají nesmyslné; přesnějším a pozornějším rozborem však zjistíme, že na nich není nic nemožného. Tak na př. mohou všechny tři úhly trojúhelníka být libovolně malé, jen když zvolíme strany dostatečně velké, a přesto nemůže plošný obsah trojúhelníka, ať jeho strany jsou již jakkoli velké, překročit určitou mez ani jí dosáhnout. Všechno mé snažení nalézt spor nebo nedůslednost v této neeukleidovské[40a]) geometrii zůstalo marné. Jediné, co odporuje našemu rozumu je, že kdyby skutečně platila, pak by v prostoru musela existovat jistá *sama o sobě určená* (i když nám neznámá) délka. Mně se však zdá, že navzdory nic neříkající slovní moudrosti metafysiků toho vlastně o pravé podstatě prostoru víme příliš málo nebo dokonce vůbec nic, než abychom mohli něco pro nás nepřirozeného pokládat za *absolutně nemožné.* Kdyby platila neeukleidovská geometrie a ona konstanta byla v určitých vztazích k těm veličinám, které se vyskytují v oblasti našeho měření na zemi nebo na obloze, pak by se dala určit a posteriori. Proto jsem kdysi žertem vyslovil přání, aby neplatila geometrie eukleidovská, protože bychom pak měli absolutní délku a priori.

Neobávám se nijak, že člověk, který se mi ukázal jako myslící matematická hlava, by všemu tomu, co jsem napsal, neporozuměl: v každém případě to ale považujte za soukromé sdělení, kterého žádným způsobem neužijete veřejně nebo způsobem, který by vedl k uveřejnění. Snad někdy v budoucnu, až budu mít více kdy než nyní, sám uveřejním svoje výsledky.

V hluboké úctě zůstávám — Vašemu blahorodí

Göttingen 8. listopadu 1824. — nejoddanější služebník C F Gauss."

(Gauss [12], str. 186.)

Gaussův dopis byl pro Taurina velkým povzbuzením. Pokračoval dál ve studiu theorie rovnoběžek a r. 1825 vydal spisek *Theorie der Parallellinien,* ve kterém sice nepřestává být přesvědčen o bezpodmínečné platnosti Eukleidova axiomu, odvozuje zde však již první věty neeukleidovské geometrie. O rok později vydal vlastním nákladem spis *Geometriae prima elementa,* ve kterém se dopracoval k základům hyperbolické trigonometrie. Ačkoliv Taurinus stál neeukleidovské geometrii blíže než na př. Saccheri nebo Lambert, přesto nemůžeme o něm říci více, než že patří podobně jako Schweikart mezi předchůdce objevitelů nové geometrie; nepřestal být totiž přesvědčen o výlučné platnosti Eukleidovy geometrie.

40a) [in dieser Nicht-Euklidischen Geometrie]

Je podivné, že vztah mezi Gaussem a Taurinem se vyvinul tak, že göttingenský *princeps mathematicorum* nereagoval na Taurinovy spisy ani slovem. Snad to bylo proto, že Taurinus nevyhověl Gaussovu přání a v předmluvách obou svých spisů se výslovně zmiňuje o Gaussovi. V předmluvě k druhému spisu je to tato poznámka:

„Zaslal jsem některé ze svých důkazů samotnému Gaussovi. Ihned mi velmi přátelsky odpověděl a připojil řadu poznámek, ze kterých jsem ovšem nemohl úplně pochopit jeho názor na tuto věc. Bylo by si tedy přát, aby tento vynikající muž uveřejnil svoje myšlenky týkající se celé otázky co nejdříve, neboť názory takového člověka budou mít jistě nedocenitelnou hodnotu. O tuto věc ho budou se mnou žádat všichni matematikové stále znovu a co nejnaléhavěji.“ (Stäckel-Engel [15], str. 248.)

Taurinovy spisy a myšlenky zůstaly však bez povšimnutí a proto Taurinus rozdal po čase několik exemplářů svých *Geometriae prima elementa* přátelům a matematikům a v zoufalství nad tím, že se jeho snažení nedostalo žádného uznání, spálil zbytek nákladu a zanechal dalšího bádání o theorii rovnoběžek.

O několik let později (r. 1832) se Gauss seznámil s pracemi Jana Bolyaie. O tom však budeme mluvit až v příštím odstavci, ve kterém se budeme zabývat tímto matematikem podrobněji.

O Lobačevském se Gauss dozvěděl až r. 1840, kdy vyšly v Berlíně, jak už víme, jeho *Geometrische Untersuchungen*. Jaký dojem učinil na Gausse tento spis, můžeme poznat z následujících dvou citátů z jeho dopisů (z r. 1841 a 1846):

„Začínám číst rusky již s určitou obratností a působí mi to potěšení. P. Knorre mi zaslal malou rusky psanou knížku od Lobačevského (z Kazaně), která spolu s jeho německým spisem o rovnoběžkách (o kterém vyšla velmi pošetilá recense v Gerdorfs Repertorium[40b]) mě zaujala natolik, že jsem velmi dychtiv číst další práce tohoto ostrovtipného matematika. Jak mi pan Knorre sdělil, obsahují (rusky psané) Rozpravy kazaňské university několik jeho statí...“ (Gauss [12], str. 232.)

„Před krátkým časem jsem znovu prohlížel Lobačevského spisek (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parrallellinien, Berlin 1840, vydal G. Fincke, 4 archy). Obsahuje základy té geometrie, která by platila a také důsledně mohla platit, jestliže by eukleidovská nebyla pravdivá. Jistý

[40b]) [V této knížce je uvedena na str. 187.]

Schweikart nazval takovou geometrii astralickou, Lobačevskij ji nazývá imaginární geometrií. Vy víte, že já již 54 let (od r. 1792) jsem téhož přesvědčení (s určitým pozdějším doplněním, o němž se teď nechci zmiňovat); v Lobačevského práci jsem tedy pro sebe něco věcně nového nenašel, avšak při odvozování a výkladu jde Lobačevskij jinou cestou, než kterou jsem sám nastoupil, totiž v pravém geometrickém duchu a mistrným způsobem. Upozorňuji Vás na jeho knihu, jejíž četba bude pro Vás velkým požitkem..."

(Gauss [12], str. 238.)

Z jiných dopisů se dovídáme, že si Gauss během doby opatřil všechny Lobačevského práce; ruské četl přímo v originále, ačkoliv se rusky začal učit teprve před krátkým časem.

Z obou právě uvedených citátů vidíme, že Gauss vysoko cenil Lobačevského, a tu se můžeme právem ptát, co Gauss učinil, aby seznámil ostatní matematiky s jeho objevem, jak se přičinil, aby uvedl význam Lobačevského na pravou míru, jak obhájil Lobačevského před recensí, kterou v soukromém dopise nazval pošetilou. Odpověď na to vše je taková, že neučinil nic. Gauss se omezil pouze na to, že v listopadu 1842 navrhl Lobačevského jako *jednoho z nejlepších matematiků ruské říše* za člena göttingenské učené společnosti, která měla charakter akademie. Lobačevskij byl zvolen a obdržel diplom podepsaný Gaussem jakožto předsedou, při čemž mu bylo oznámeno, že *v uznání jeho vynikajících zásluh o vědu byl zvolen dopisujícím členem společnosti*. Jaké zásluhy o vědu to byly, Gauss neuvedl.

U Gausse se setkáváme ještě s jinou zvláštností. Nejen že neměl slova povzbuzení pro ty, o nichž věděl, že se úspěšně zabývali theorií rovnoběžek, nejen že se jich nezastal, když byli napadáni; Gauss se ani jinak nepřičinil, aby pomohl věci kupředu. Ze svých myšlenek neuveřejnil nic, i když o to byl žádán, takže mohl být předem jist, že by ho alespoň někteří četli s porozuměním. Jediné, co publikoval, byly dvě recense o důkazech V. postulátu, ale i ty publikoval anonymně. Uvážíme-li, že ve vědě jsme často svědky toho, jak učenci bojují o prioritu svých objevů a dovedou ji často vášnivě hájit před ostatními, je tím podivnější, že Gauss, ačkoliv mohl být prvním, kdo publikoval něco o nové geometrii, tak neučinil.

Tuto zvláštnost vysvětlují snad některá místa Gaussových dopisů, kde je řečeno zcela otevřeně, že nepublikoval nic z jakéhosi strachu, ze strachu před tím, že by nové názory o geometrii působily příliš revolučně, že by nebyl pochopen, nebo také ze strachu, že by musel ztrácet čas vysvětlováním věci zvídavým nezasvěcencům. Již r. 1829 napsal v dopise Besselovi:

„Také nad jiným thematem, které je pro mne již skoro 40 let staré, jsem se občas ve volných hodinách znovu zamýšlel, totiž nad samými základy geometrie; nevím, zda jsem Vám již řekl něco o svých názorech na tuto věc. Také zde jsem mnohé ještě více upevnil a moje přesvědčení, že nemůžeme vybudovat geometrii zcela a priori, se ještě, pokud to bylo možné, posílilo. Bude však trvat ještě dlouho, než se dostanu k tomu, abych zpracoval svoje velmi rozsáhlá vyšetřování této věci k publikaci, a snad k tomu za mého života ani nikdy nedojde, protože se bojím křiku Boiotů, který by se zdvihl, kdybych chtěl svoje názory říci naplno.“ (Gauss [12], str. 200.)

Podobně psal Gauss před deseti lety (1818) v dopise Gerlingovi:

„Těší mne, že máte odvahu vyjádřit se tak, jako byste uznával možnost, že naše theorie rovnoběžek a s ní i celá geometrie je falešná. Avšak vosy, jejichž hnízdo dráždíte, vám začnou létat kolem hlavy.“ (Gauss [12], str. 179.)

Jestliže jsme se dotkli toho, jak se Gauss podivně zachoval k objevu nové geometrie, a jestliže právě uvedené citáty z dopisů nám měly pomoci najít vysvětlení, pak se musíme zde zmínit ještě o jedné věci, totiž o tom, že se Gauss takovýmto zvláštním způsobem choval i při jiných příležitostech. Gauss měl neobyčejně široký rozhled po matematice a jeho přínos v matematice je mnohostranný. Nejednou však učinil objev mlčky, aniž by komu o tom co řekl. Teprve po letech, když už se jiní sami dopracovali k témuž objevu a publikovali svoje výsledky, Gauss psal svým přátelům, že on na tyto věci přišel již před mnoha lety.

Snad nebude vadit, když se na konci odstavce o Gaussovi pokusíme tento zvláštní rys jeho povahy demonstrovat ještě na jiném případě, přestože se základy geometrie a s theorií rovnoběžek přímo nesouvisí.

Tentokráte šlo o theorii eliptických funkcí. První práci o ní napsal čtyřiadvacetiletý norský matematik N. H. Abel (1802—1829) r. 1826 pro pařížskou Akademii. Vyšla však teprve mnohem později, takže první tištěnou prací o této theorii je jiná Abelova práce, totiž *Recherches sur les fonctiona elliptiques*, která vyšla r. 1828 v Crellově žurnálu. Tehdy (r. 1828) napsal Gauss Besselovi v dopise toto:

„Ke zpracování svých úvah z dávných let (1798) o transcendentních funkcích se ještě nedostanu, protože se ještě musím zabývat mnohými jinými věcmi. P. Abel mě nyní, jak vidím, předešel a zprostil mne této povinnosti vzhledem asi tak k jedné třetině celé látky, zvláště když jeho výklad je tak koncisní a elegantní. Nastoupil právě tutéž cestu jako já v r. 1798, takže velká shoda výsledků není ničím zvláštním.“ (Gauss [13], str. 248.)

Veřejně však svoje pochvalné mínění Gauss neprojevil, ačkoliv pro Abela mohlo tehdy znamenat mnoho.

Abel byl ještě studentem, když ve věku 22 let dokázal, že algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého nelze řešit algebraicky, a tím první zodpověděl tuto starou otázku algebry. Aby se zmenšily výlohy za tisk, musela být jeho práce (*Mémoire sur les équations algébriques*, 1824), ve které byl zmíněný důkaz podán, natolik zkrácena, že některé pomocné věty byly vůbec vynechány a celek byl pak těžko srozumitelný. Ostatně po několika pokusech znamenitých matematiků současnosti i minulosti zodpovědět starý problém bylo řešení neznámého norského studenta přijímáno s nedůvěrou a vážní učení matematikové mu nevěnovali pozornosti.

Z dopisu Schumachera Gaussovi z r. 1824 vyplývá, že Gaussovi se dostala Abelova práce do rukou — byla ostatně nalezena také v jeho knihovně. Mimo tento dopis není v Gaussově korespondenci nikde zmínka ani o práci, ani o tom, zda Gauss zjistil nebo nezjistil správnost Abelova důkazu. Zdá se, že toto absolutní mlčení znamená, že důkaz přijal s nevraživostí.[41])

V každém případě však Gauss poznal Abelovy schopnosti z jeho prací o eliptických funkcích. Stačilo slovo a Abelovi byly všude otevřeny dveře. A zatím Abel, kterého chudá norská universita vyslala na studijní cestu do Německa a Francie, prochází nepoznán mimo hlavní centra matematického světa. Věhlasné matematiky může pozorovat jen z dálky jako divák; nepřijali ho mezi sebe, ačkoliv byl jedním z nich.

Zmíněnou již práci *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes*, kterou podal r. 1826 pařížské Akademii, měli posoudit Cauchy a osmdesátiletý Légendre. Légendre si stěžoval, že nemůže dobře číst drobné Abelovo písmo, a Cauchy byl

---

41) Gauss se prý totiž hodlal sám tímto problémem zabývat.

plně zaujat vydáváním svých vlastních prací (Abelovu práci vydala Akademie teprve po patnácti letech). Pravá velikost Abelova zjevu byla pochopena až r. 1829. V uznání jeho zásluh byl Abel toho roku jmenován profesorem berlínské university — avšak tato pocta přišla už pozdě. Abel dostal zprávu o svém jmenování na smrtelném loži; ještě téhož roku zemřel v Norsku na souchotiny ve věku 27 let. Když se Gauss dozvěděl o jeho smrti, napsal v dopise Schumacherovi:

„Abelova smrt... znamená velkou ztrátu pro vědu. Kdyby se náhodou tisklo nebo mělo tisknout něco o životě této eminentně nadané hlavy a přišlo Vám to do rukou, prosím Vás naléhavě, abyste mi to zaslal. Chtěl bych také mít jeho portrét, lze-li si ho opatřit. Humboldt, se kterým jsem o Abelovi mluvil, se snažil udělat vše, aby ho získal pro Berlín."

(Bjerkness [16], str. 242.)

Vraťme se však ke Gaussovi. O jeho zvláštním chování poznamenává Bjerkness, Abelův životopisec, toto:

„Klid, s kterým Gauss pozoruje vpád Abela a Jacobiho do oblasti svých výzkumů a zříká se tak velké části své práce, a zvyk uchovat dlouho tajemství o důležitých objevech, tvoří zjev tak zvláštní, že jedině podrobnější biografická studie by ho mohla vysvětlit.

Pokud víme, Gauss se spokojil a posteriori dokázat, že byl cele obeznámen s novými principy: jeho výsledky dovolovaly usoudit, že musel tyto principy znát, a vedle toho zanechal jako svědectví svoje papíry s daty a různé poznámky v dopisech." (Bjerkness [16], str. 112.)

Podobné počínání však bylo vůči mladým matematikům kruté. Dlouho a s nadšením pracovali na svém objevu, byli přesvědčeni, že tvoří novou věc, a pak se jim nejen nedostalo zaslouženého uznání, ale museli slyšet, že Gauss objevil již před mnoha lety totéž co oni. Je přirozené, že je to nepovzbuzovalo nikterak v jejich další činnosti. To se zvlášť ostře projevilo na dalším objeviteli neeukleidovské geometrie, na mladém maďarském matematikovi Janu Bolyaiovi.

26. Jan Bolyai. Vedle Lobačevského a Gausse došel k neeukleidovské geometrii také János (Jan) Bolyai (1802—1860), o jehož otci Farkasovi jsme mluvili v závěru předešlé kapitoly.

Již v době, kdy mladý Jan studoval na gymnasiu, jevilo se u něho vysoké nadání pro matematiku. Jeho otec choval odedávna úmysl poslat ho studovat matematiku ke Gaussovi. Proto se r. 1816 obrátil na Gausse s dopisem, ve kterém vylíčil synovo matematické nadání a svůj úmysl dát ho na dva roky na studium do Götting. Přitom prosil Gausse jako dávného přítele, aby vzal na tyto dva roky Jana k sobě, protože nechtěl nechat patnáctiletého syna úplně samotného a poslat s ním vychovatele, jak bylo tehdy zvykem, by bývalo bylo nad jeho prostředky.

Otec se synem čekal týdny a měsíce, ale Gaussova odpověď nepřicházela. Je snadné si představit, jaké to pro oba, ale hlavně pro Jana, znamenalo zklamání. Otec nebyl tak zámožný, aby syna mohl poslat na některou jinou německou universitu, a ve Vídni nebo v Pešti neviděl žádného schopného matematika. Na druhé straně nechtěl syna vystavit nebezpečí volného akademického života. Tak se stalo, že mladý Jan nastoupil vojenskou dráhu, a to ve Vídni, kde v letech 1818 do 1823 studoval na vojenské inženýrské akademii. To ovšem neznamenalo, že se Jan neměl již věnovat matematice: naopak, otec počítal s tím, že synovi zbude ještě dosti času, aby se jí mohl náležitě zabývat.

Na akademii se mladý Jan ukázal znovu jako vynikající žák, který překvapoval svým nadáním. Současně se však začala projevovat jeho prchlá a popudlivá povaha a jeho nevalné zdraví mu jistě klidu nepřidávalo. Tak se stalo, že po deseti letech vojenské služby byl dán do pense.

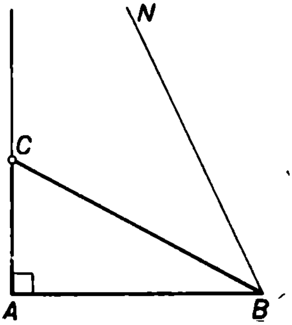
Eukleidovým postulátem se Jan Bolyai zabýval již v době svých studií a v poměrně krátké době dosáhl úspěšně cíle. První popud ke studiu theorie rovnoběžek dostal Jan zřejmě od otce, který ho sám učil matematice a upozornil ho jistě na vážné nedostatky této partie geometrie.

Jan se nejdříve pokoušel dokázat, že ekvidistanta k přímce je opět přímka, a zkoumal proto vlastnosti ekvidistanty za předpokladu, že je to křivka. Speciálně se pokoušel dojít ke sporu důkazem, že pravidelná lomená čára, jejíž všechny vrcholy jsou stejně vzdáleny od dané přímky, musí tuto danou přímku protnout.

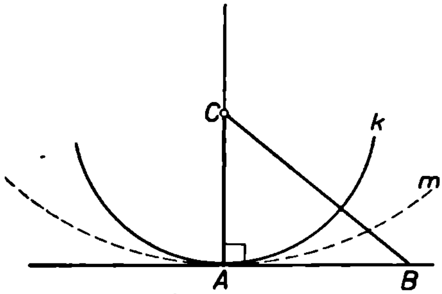
Když Jan r. 1820 psal otci o svých pokusech dokázat Eukleidův postulát, vyděsil ho tím na nejvyšší míru. Starý Bolyai syna prosil a zapřísahal, aby zanechal těchto důkazů:

„Nesmíš bádat o rovnoběžkách touto cestou; znám ji až na sám její konec — také já jsem prošel tuto bezednou noc, každé světlo, každá radost mého života byla v ní uhašena — zapřísáhám Tě skrze Boha!, nech theorii rovnoběžek na pokoji... může tě připravit o všechen Tvůj čas, o Tvoje zdraví, o Tvůj klid a všechno Tvoje životní štěstí." (Stäckel [10], str. 76.)

Otcovo napomínání nemělo však na syna žádný vliv; jeho touha a odhodlání pohnout za každou cenu problémem naopak jen stoupaly. Úvah o lomené čáře Jan brzy zanechal, zato však ještě r. 1820 nastoupil cestu, která ho později dovedla k cíli, to je k vybudování abso-



Obr. 140.



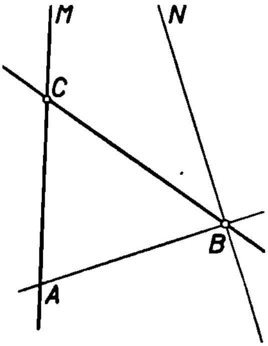
Obr. 141.

lutní geometrie a k přesvědčení, že Eukleidův postulát je na této geometrii nezávislý.

Šlo o tuto myšlenku (podle Stäckela [10], str. 79—80): mějme trojúhelník $\triangle\, ABC$ s pravým úhlem v A (viz obr. 140) a mysleme si, že se vrchol C bez omezení vzdaluje po přímce $\overline{AC}$. Přímka $\overline{BC}$ má při tom za limitu jakousi přímku $\overline{BN}$. Nechceme-li se opírat o Eukleidův axiom, nemůžeme o úhlu $\sphericalangle\, ABN$ říci nic více, než že nemůže být $\sphericalangle\, CAB + \sphericalangle\, ABN > 2R$.

V souvislosti s touto úvahou byl Jan už blízko pojmu limitní kružnice. Uvažoval totiž dále takto: myslíme-li si, že okolo bodu C jakožto středu je opsán oblouk kružnice k procházející bodem A, při čemž bod C se opět vzdaluje bez omezení po přímce $\overline{AC}$ (viz obr. 141), potom všechny kružnice budou mít za limitu jakousi křivku m, o které opět nemůžeme jen tak beze všeho tvrdit, že je to přímka $\overline{AB}$. Zde Jan Bolyai správně tušil, že z předpokladu, že křivka m je totožná s přímkou $\overline{AB}$, by se dal dokázat Eukleidův postulát (viz naši Větu 18,4).

K těmto důležitým a plodným myšlenkám došel Jan za častých debat se svým přítelem K. Szászem, který s ním studoval na vojenské akademii. Oba přátelé věnovali theorii rovnoběžek každou volnou chvíli. Při jedné takové rozmluvě přišli na šťastnou myšlenku: jestliže se přímka $\overline{BC}$ otáčí okolo bodu B, při čemž C je bod na přímce $\overline{AM}$ (viz obr. 142), pak přímka $\overline{BC}$ po určitou dobu stále protíná přímku $\overline{AM}$, až pojednou od ní, jak se K. Szász vyjádřil, „*odskočí*" a v této poloze $\overline{BN}$ ji lze nazvat „*nejbližší neprotínající přímkou*". Jan ji později nazval *asymptotickou rovnoběžkou* nebo krátce *asymptotou.*



Obr. 142.

Byl to skromný, ale přece jen významný krok vpřed. O geometrii nezávislé na XI. axiomu ovšem neměli tehdy ještě oba přátelé ani potuchy. Proniknout tak daleko stálo Jana Bolyaie ještě mnoho námahy. Někdy na rozhraní let 1820—21 opustil Szász Vídeň, takže Jan už neměl s kým o svých myšlenkách diskutovat.

Ani na otce se nemohl se svými nápady obrátit, protože F. Bolyai se choval k synovým pokusům odmítavě. V jednom dopise píše:

„Přiznávám se, že ani od ‚odskočení' tvých přímek si nic neslibuji. Zdá se mi, že jsem se již také octl v těchto končinách; plavil jsem se ke každému úskalí tohoto pekelného mrtvého moře, ale vždy jsem se vracel s roztříštěným stěžněm a potrhanými plachtami a od té doby se datuje ztráta mého humoru a můj pád." (Stäckel [10], str. 82.)

O nepřemožitelné touze řešit problém rovnoběžek, který ho tolik přitahoval, píše F. Bolyai:

„...Je to skutečná nemoc, jistý druh šílenství, tyranská myšlenka. Je stejná jako kvadratura kruhu, hledání kamene mudrců, transmutace prvků, hledání pokladu." (Stäckel [10], str. 82.)

Čím více pronikal Jan do problému, tím menšího uznání se mu dostávalo se strany otcovy, který již nebyl s to sledovat myšlenky svého geniálního syna. R. 1823 byl Jan už tak daleko, že psal otci:

„Jsem pevně rozhodnut vydat spis o rovnoběžkách, jen co si uspořádám látku a dovolí mi to okolnosti. Dosud jsem tak neučinil, ale cesta, kterou jsem nastoupil, slibuje téměř se vší určitostí dosáhnout cíle, je-li to vůbec možné; cíle jsem ještě nedošel, ale objevil jsem tak důležité věci, že jsem byl sám překvapen, a byla by to věčná škoda, kdyby se měly ztratit; až je, drahý otče, uvidíte, pak to uznáte sám; nyní nemohu víc říci než tolik, že jsem z ničeho stvořil nový svět." (Stäckel [10], str. 85.)

V odpověď napsal F. Bolyai synovi, aby si pospíšil ve spisování, je-li vše tak, jak píše, a aby práci publikoval co nejdříve:

„...a to z dvojího důvodu; jednak proto, že myšlenky snadno přejdou s jednoho člověka na druhého, který je pak může dřív publikovat, jednak proto, že je něco pravdy na tom, že každá věc má svoji dobu, kdy se objevuje současně na různých místech, asi tak jako fialky porůznu vyrážejí na jaře na světlo." (Stäckel [10], str. 85.)

Otec tehdy ovšem sám netušil, jak těsně se těmito prorockými slovy dotýká skutečnosti, neboť tou dobou se opravdu na různých místech Evropy rodila neeukleidovská geometrie.

Nový svět, o kterém se Jan zmiňuje, byla nová geometrie, která před ním vyrostla z pozměněného axiomu o rovnoběžkách. Protože dlouho nedocházel ke sporu, tušil již, že vchází do nové říše geometrických vět a pojmů. Nevíme přesně, kdy přišel k přesvědčení, že nové věty tvoří bezesporný celek, bylo to však někdy krátce kolem počátku r. 1825, tedy když Jan byl sotva třiadvacetiletý. Ještě téhož roku dokončil svůj spis a dohodl se s otcem, že vyjde jako dodatek k jeho knize *Tentamen* pod názvem *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, kde také skutečně r. 1832 vyšel.

Protože však Jan nenalezl u otce uznání ani pochopení, hledal obojí jinde. Na synovo naléhání zaslal r. 1831 F. Bolyai Janův spis ve formě zvláštního otisku (separátu), pořízeného téhož roku, Gaussovi současně s dopisem, ze kterého vyjímáme tuto poznámku:

„Na jeho [Janovo] naléhání zasílám Ti tento spisek: buď tak dobrý, posuď ho svým přísným a vše prohlédajícím okem a v odpovědi, na niž toužebně čekám, napiš o něm bez jakýchkoli ohledů své mínění."
(Stäckel [10], str. 91.)

Gauss dopis sice dostal, ale Janův spis na neštěstí nikoliv: ztratil se ve zmatku, který způsobila tehdy vypuknuvší cholera. R. 1832 zaslal F. Bolyai Gaussovi synův spisek znovu.

„...můj syn dá na Tvůj posudek víc než na mínění kohokoli jiného v celé Evropě." (Stäckel [10], str. 91.)

Tentokráte Janův spisek Gaussovi došel. Gauss ho celý přečetl a svému příteli Gerlingovi napsal:

„Poznamenávám ještě, že mně tyto dny přišel z Maďarska malý spis o neeukleidovské geometrii, ve kterém opět nalézám všechny svoje myšlenky a výsledky. Jsou zde velmi elegantně vyloženy, i když pro nezasvěcence příliš stručně a tudíž poněkud těžko přístupnou formou. Autorem je velmi mladý rakouský důstojník... Považuji tohoto mladého matematika Bolyaie za genia prvého řádu.“ (Gauss [12], str. 221.)

Na rozdíl od tohoto dopisu psal Gauss v odpovědi F. Bolyaiovi víc o sobě než o mladém Janovi.

„Nyní ještě něco o práci Tvého syna.

Jistě se na okamžik zarazíš, jestliže začnu tím, *že ji nemohu chválit,* ale nemohu jinak. Chválit ji by znamenalo chválit sebe samotného: neboť celý obsah spisu, cesta, kterou se Tvůj syn dal, i výsledky, k nimž došel, se téměř všude shodují s mými úvahami, z nichž některé jsem provedl již před 30—35 lety. Skutečně jsem tím nanejvýš překvapen. Měl jsem v úmyslu nepublikovat za svého života vůbec nic ze svých výsledků, z nichž jsem ostatně dosud jen velmi málo zachytil na papír. Mnozí nemají totiž vůbec pravého pochopení pro věc, o kterou zde běží, a já sám jsem našel jen velmi málo lidí, kteří chápali s náležitým zájmem to, co jsem jim sděloval. Aby to mohl někdo chápat, musí si nejdříve dobře uvědomit, co zde vlastně není v pořádku, a v tom většina lidí nemá jasno. Naproti tomu jsem však chtěl časem své úvahy a výsledky sepsat, aby neodešly se mnou do hrobu.

Velmi jsem tedy překvapen, že jsem nyní této práce ušetřen, a velmi mě těší, že právě syn mého starého přítele mě tak zvláštním způsobem předešel...“ (Gauss [12], str. 220.)

F. Bolyai byl Gaussovou odpovědí velmi potěšen, neboť viděl, že jeho syn problém rovnoběžek skutečně rozřešil. Dopis zaslal synovi s poznámkou:

„Gaussova odpověď o Tvé práci je velmi krásná a je naší vlasti a národu ke cti.“ (Stäckel [14], str. 36.)

Zcela jinak však na odpověď reagoval Jan. Zprvu nechtěl vůbec věřit, že Gauss nezávisle na něm a již dlouho před ním dospěl k neeukleidovské geometrii. Odvolával se při tom na Gaussův dopis poslaný otci 1804, ve kterém Gauss ještě doufá, že se mu podaří proplout mezi četnými úskalími marných důkazů. Nějaký čas měl také ošklivé podezření, že otec předčasně sdělil Gaussovi jeho myšlenky a že ho nyní Gauss chce připravit o prioritu. I když se přesvědčil o bezdůvodnosti takového podezření, nemohl pochopit Gaussovo chování. Nemohl pochopit, že Gauss neuznal za nutné tak důležitý objev uveřejnit nebo se o něm alespoň zmínit v tisku.

V Janově pozůstalosti je několik listů, které ukazují, jak pln hořkosti meditoval nad Gaussovým divným chováním. Z nich budiž uvedeno jen toto:

„Podle mého názoru, a jak jsem přesvědčen, také podle názoru každého nepředpojatého člověka, se jeví všechny Gaussem uvedené důvody, proč nechtěl ze svých prací o tomto thematu za svého života nic publikovat, jako chatrné a nicotné. Vždyť ve vědě právě tak jako ve skutečném životě samém se vždy jedná o to, aby nutné a obecně prospěšné, i když ještě ne dosti jasné věci, byly náležitě vysvětlovány a aby chybějící nebo spíše dřímající smysl pro pravdu a právo byl burcován, náležitě utvrzován a podporován. Pochopení pro matematiku je k všeobecné škodě a neštěstí jen u mála lidí živé... Okolnost, že bohužel i mezi matematiky a přitom i mezi nejslavnějšími je mnoho povrchních lidí, nemůže být pro rozumného člověka důvodem, aby pracoval povrchně a průměrně a ponechával vědu v lethargii a v zděděném zastaralém stavu. Takové chování může být nazváno jedině jako protipřirozené a nanejvýš nesmyslné; proto tím hůř, jestliže místo aby psal o způsobu, jak dobré věci proklestit širokou cestu, Gauss se tomu naopak vyhýbá a přitom v pobožných přáních a projevech zármutku vylévá své stížnosti nad nedostatkem náležitého vzdělání lidí. V tom věru nespočívá život ani účinná zásluha..."

(Stäckel [10], str. 96.)

V životě Jana Bolyaie nastal po jeho objevu neeukleidovské geometrie jakýsi zlom: nedostalo se mu oprávněného ocenění jeho práce a stále měl dojem, že ho někdo chce připravit o prioritu jeho objevu. Když se později dozvěděl o Lobačevském, nechtěl věřit, že by věc byla jinak, než že Gauss, který se nechtěl ze strachu před křikem Boiotů exponovat, podnítil k tomu tohoto ruského matematika a sdělil mu Janovy myšlenky. Jeho předrážděná mysl se obírala tímto přesvědčením natolik, že když se mu (r. 1848) dostal do rukou výtisk Lobačevského spisu *Geometrische Untersuchungen*, začal dokazovat, že autor spisu znal *Appendix* a že jim nemohl být konec konců nikdo jiný, než sám Gauss.

Teprve po delší době se J. Bolyai vzchopil z neplodného života, do kterého po svém velkém objevu na čas upadl, a jako by se chtěl mstít za krutou nespravedlnost, snil o dílech, která, jak to sám u sebe myslel, by se mohla postavit vedle děl „göttingenského kolosa", aby Gauss poznal, jak těžce se prohřešil na synovi svého přítele z mládí. A tak kolem r. 1848 začal pro Jana nový úsek jeho života. Vrhal se na velké a těžké problémy matematiky v přesvědčení, že zde dosáhne týchž úspěchů jako v theorii rovnoběžek. Jeho nedostatečný kontakt se současným stavem vědy způsobil, že se s prostou naivností pouštěl do problémů, o jejichž obtížnosti neměl pravou představu. Chtěl na příklad dokázat, že se každá algebraická rovnice dá algebraicky řešit, nebo že každá elementární funkce může být integrována pomocí elementárních funkcí[42]) a pod. Těmto problémům věnoval mnoho bezodddeché a takřka horečné práce, kterou neúnavně vedl, dokud mu těžká nemoc nevyrazila pero z ruky. Zbytek života prožil pak v bídě a opuštěnosti.

27. Zhodnocení. Na konci této kapitoly věnované objevitelům neeukleidovské geometrie nám ještě zbývá podívat se blíže, do jaké míry rozvedl každý z nich tuto disciplinu ve svých spisech, a zhodnotit tak zásluhy těchto matematiků o novou geometrii.

---

[42]) Elementární funkce je název pro jistý obor reálných funkcí, který se dá vymezit takto (Haupt-Aumann: *Differential- und Integralrechnung,* díl II, Berlin 1938, str. 51—52):

1. Mezi elementární funkce patří konstanty (t. j. všechna reálná čísla) a identická funkce ($y = x$).

2. Je-li $f(x)$ elementární funkce, pak také $e^{f(x)}$, $\ln|f(x)|$ (pro ta x, pro něž je $f(x) \neq 0$), $\sin f(x)$, $\arcsin f(x)$ (v posledním případě pro ta x, pro něž je $|f(x)| \leq 1$) a $R(f(x))$ (kde R znamená racionální funkci) jsou elementární funkce.

3. Každá funkce, která se dá složit z konstant a funkce $y = x$ aplikací konečného počtu operací uvedených pod bodem 2, je elementární funkce.

Z uvedené definice plyne, že mezi elementární funkce patří také

a) funkce, jež se dají vyjádřit pomocí odmocnin, neboť na př. $g(x) = \sqrt[n]{f(x)} = e^{\frac{1}{n}\ln|f(x)|}$ (při čemž definici funkce $g(x)$ můžeme doplnit tak, že pro c, pro které je $f(c) = 0$, jest $g(c) = \lim\limits_{x\to c} e^{\frac{1}{n}\ln|f(x)|} = 0$);

b) všechny funkce goniometrické a cyklometrické, neboť na př. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, a také všechny funkce hyperbolické a hyperbolometrické, neboť lze psát na př. $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ a $\operatorname{argsh} x = \ln|x + \sqrt{c^2 + 1}|$ a podobně také $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ a $\operatorname{argch} x = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$.

Elementární funkce mají tu vlastnost, že jejich derivace jsou opět elementární funkce. Naproti tomu funkce, jejíž derivace je elementární funkce, není vždy elementární funkcí.

Zmínili jsme se již o tom, že pokud jde o prioritu objevu nové geometrie, byly zde nejasnosti, které vznikly spíše na základě dohadů nebo nacionálních tužeb než na základě historických fakt. Vyskytly se názory, že Gaussovi připadá nejen priorita, ale že teprve jeho objevy inspirovaly Lobačevského a Bolyaie k vlastním úvahám. Byl to na př. známý matematik Felix Klein, který ve svých *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie* (1889—90) napsal:

„Je mimo veškerou pochybnost, že Gaussův vliv podnítil Lobačevského i Bolyaie k jejich bádáním.“ (1. vydání 1892, str. 175.)

Tomuto závěru se zdály nasvědčovat některé okolnosti: otec J. Bolyaie a Gauss spolu přece studovali v Göttingách, oba se již tehdy zabývali základy geometrie a důkazy V. postulátu a později si o této věci dopisovali. Pokud jde o Lobačevského, byl mezi jeho učiteli na kazaňské universitě Bartels, Gaussův přítel z mládí, který i po odchodu z vlasti byl s Gaussem v písemném styku.

Na příslušném místě jsme se již zmínili, že podrobnější historické zkoumání ukázalo neopodstatněnost této argumentace. Bartels totiž od r. 1808 nedostal až do svého odchodu z Ruska r. 1820 od Gausse žádný dopis. Při tom Gausse opustila víra v jedinečnost eukleidovské geometrie teprve někdy kolem r. 1816. Naproti tomu Lobačevskij ještě r. 1815—16 stál pevně na půdě Eukleidovy geometrie a pokoušel se o různé důkazy V. postulátu až do r. 1823, aniž by měl již podezření, že takový důkaz není možný; tento fakt sám ukazuje, že Lobačevskij nezvěděl nic o Gaussovi od Bartelse, věděl-li vůbec sám Bartels něco o Gaussových výzkumech. Teprve po usilovném bádání v letech 1823 až 1826, jak jsme již řekli, se Lobačevskému podařilo rozetnout gordický uzel, když ukázal, že axiom o rovnoběžkách není k vybudování geometrie nutný. Že Lobačevskij došel ke svému objevu, aniž byl Gaussem nějak ovlivněn, potvrzuje ostatně sám Gauss v některých svých dopisech.

Pokud jde o J. Bolyaie, ukazuje se podobně, že došel k neeukleidovské geometrii úplně samostatně. Jeho otec a Gauss se sice spolu jako studenti göttingenské university zabývali základy geometrie, avšak v těchto otázkách byli úplně rovnocenní. V dopise z r. 1799 píše na příklad Gauss F. Bolyaiovi:

„Velmi mě mrzí, že jsem našich někdejších úzkých styků nevyužil, abych více zvěděl o Tvých pracích v základech geometrie; byl bych si tím byl jistě ušetřil mnoho zbytečné námahy..." (Gauss [12], str. 159.)

Protože žádný z Gaussových dopisů, zaslaných F. Bolyaiovi mezi 1804 až 1832 (kdy Jan vydal svůj *Appendix*), se theorie rovnoběžek vůbec netýkal, nemohl Jan zvědět od otce nic o Gaussových myšlenkách zrodivších se po r. 1804, tedy nic z toho, co by ho snad přivedlo na novou cestu. Podnět k celé Janově práci nevzešel nikterak od Gausse, nýbrž spíše od otce, jehož všechny snahy podat důkaz V. postulátu zůstaly bez úspěchů. Viděli jsme také, že později F. Bolyai zakázal synovi zabývat se theorií rovnoběžek, takže Jan, který se nenechal odradit, byl odkázán sám na sebe.

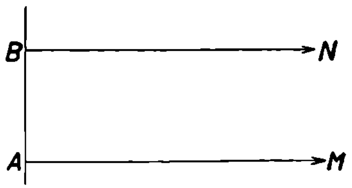
Nyní se postupně podíváme, co všechno každý ze tří objevitelů neeukleidovské geometrie z této nauky znal a kterých věcí z ní si hlavně všímal, tak jak nám o tom svědčí jejich vlastní publikované práce, pozůstalost, dopisy a pod.

O Gaussovi nemáme mnoho zpráv, protože nic nepublikoval. V jeho pozůstalosti bylo nalezeno několik listů papíru, na nichž příležitostně zaznamenal některé svoje myšlenky. Listy nejsou datovány, bylo však možno určit přibližnou dobu jejich vzniku. Týkají se těchto tří themat: rovnoběžek (z doby asi 1831), úměrnosti plochy trojúhelníka a úchylky součtu jeho úhlů od $2R$ (kolem 1832) a objemu jehlanu (kolem 1840).

Rovnoběžky definuje v podstatě týmž způsobem jako Lobačevskij a jako jsme to učinili my v odstavci **17**, kde jsme tyto přímky nazvali souběžkami.

„Jestliže přímky $AM\ldots$, $BN\ldots$ se neprotínají, naproti tomu však každá přímka procházející bodem A a ležící mezi $AM\ldots$ a AB protíná přímku $BN\ldots$, pak se přímka $AM\ldots$ nazývá rovnoběžná s přímkou $BN\ldots$"

(Gauss [12], str. 202.)



Nato nejdříve Gauss dokazuje, že tato definice je nezávislá na volbě bodů A a B, že rovnoběžnost je vztah symetrický (že také $\overline{BN}$ je rovnoběžná s $\overline{AN}$) a transitivní, a posléze, že přímky v tomto smyslu rovnoběžné se neprotínají. Dále zavádí pojem korespondujících bodů na dvou rovnoběžkách (viz náš odstavec **18**, kde jsme tento pojem rozšířili také na přímky různoběžné a rozběžné), dokazuje, že jsou-li A, B, resp. A', B' korespondující body vzhledem ke dvěma rovnoběžkám, pak je vždy $AA' \equiv BB'$ a jsou-li dále body A, B, C na třech různých rovnoběžkách a při tom A a B, jakož i B a C jsou korespondující, pak také body A a C jsou korespondující. Nakonec nazývá slovem „*Trope*“ křivku, jež se skládá z korespondujících bodů na všech rovnoběžkách vedených k dané přímce. Jinde nazval tuto křivku *paracykl*. Je zřejmé, že tu jde o limitní kružnici.

Gauss dále zjistil, že t. zv. limitní trojúhelník, t. j. trojúhelník, jehož strany jsou po dvou souběžné, má konečně velký plošný obsah a stanovil výraz pro tento obsah. Věděl dále, že jeho velikost je při tom supremum plošných obsahů všech trojúhelníků neeukleidovského prostoru, a pomocí velikosti tohoto limitního trojúhelníka vyjádřil pak plošný obsah libovolného trojúhelníka. Pokud se týče stanovení objemu čtyřstěnu, odvodil Gauss jeho analytické vyjádření jen ve speciálním případě, kdy totiž každá stěna čtyřstěnu je pravoúhlý trojúhelník.

O objemu obecného čtyřstěnu se zmiňuje v dopise F. Bolyaiovi (psaném r. 1832 současně s posudkem Janovy práce), kde píše, že jeho stanovení není zdaleka tak snadné jako stanovení plošného obsahu obecného trojúhelníka, a předkládá tento problém mladému Bolyaiovi.

Toto je vše, co nalézáme v Gaussově pozůstalosti, kromě drobných poznámek o absolutní míře délek, o součtu úhlů v trojúhelníku a o sférických trojúhelnících, jež jsou roztroušeny v jeho dopisech.

Nyní se obrátíme k Lobačevskému. Ve svých spisech rozvinul novou geometrii jak syntheticky, tak analyticky; k nejzávažnějším výsledkům došel však analyticky.

Po rozboru chybných důkazů Légendrových a Bertrandových se pokusil odstranit vážné nedostatky v budování samých logických základů geometrie a proto některé jeho spisy (*O načalach geometrii*, *Novyje načala geometrii*) počínají výkladem těchto základů, ovšem ještě ne přísně axiomatickým. Po výkladu absolutní geometrie zavádí předpoklad, že součet úhlů trojúhelníka není roven π, a odvozuje hlavní důsledek — existenci asymptotických přímek (souběžek), které nazývá rovnoběžkami. Jejich pomocí zavádí pak limitní kružnici a limitní kouli a ukazuje, že na ní platí eukleidovská geometrie.

Tato vlastnost dovoluje Lobačevskému zavést na limitní kouli trigonometrii, kterou pak převádí na neeukleidovskou rovinu pomocí jím zavedené funkce $\Pi(x)$ (úhel souběžnosti). Studiem závislosti stran a úhlů rovinného trojúhelníka a rozvinutím *trigonometrie neeukleidovské roviny* opouští synthetickou methodu.

V dalším odvozuje analytické vyjádření funkce $\Pi(x)$, totiž

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Pi(x) = a^{-x},$$ [43])

a její vlastnosti, jako na př.

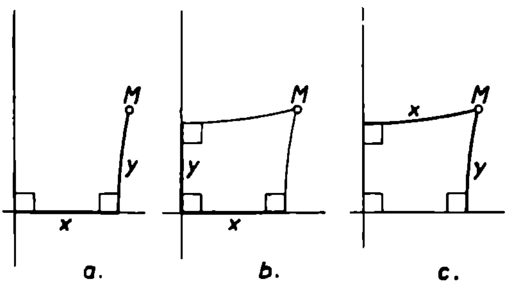
$$\lim_{x\to 0}\Pi(x) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\lim_{x\to\infty}\Pi(x) = 0,$$

$$\Pi(a + b) + \Pi(a - b) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\sin\Pi(x + y) = \frac{\sin\Pi(x)\,.\,\sin\Pi(y)}{1 + \cos\Pi(x)\,.\,\cos\Pi(y)}.$$

Dále ukazuje, že volíme-li strany trojúhelníků velmi malé, takže můžeme v analytických výrazech zanedbat jejich vyšší mocniny, dostáváme se k obyčejné eukleidovské geometrii.



Obr. 143.

Po trigonometrii se věnuje *neeukleidovské analytické geometrii*. Přitom vedle polárních souřadnic užívá ještě tří různých souřadných systémů, které v eukleidovské rovině splývají v systém jediný — systém kartézský.

První systém, který můžeme nazvat *pravoúhlý* (viz obr. 143a), bere za první souřadnici úsek na první ose a za druhou příslušnou úsečku na kolmici spuštěné na tuto osu z vyšetřovaného bodu.

Druhý systém, který se dnes označuje jménem *Beltramiho* (viz obr. 143b) bere za souřadnice úseky na obou osách, zatím co třetí systém,

[43]) Konstanta $a > 0$ je zde libovolná, podobně jako ve sférické geometrii můžeme libovolně volit poloměr koule, na níž tuto geometrii uvažujeme.

t. zv. *systém ekvidistantních souřadnic* (viz obr. 143c) bere za souřadnice příslušné úsečky na obou kolmicích spuštěných na osy. V první soustavě jsou křivky $x =$ const. kolmice na osu x a $y =$ const. jsou ekvidistanty osy x. V druhé soustavě jsou $x =$ const., resp. $y =$ const. kolmice na osu y, resp. x, kdežto ve třetí jsou to ekvidistanty příslušných os.

V těchto různých souřadných soustavách odvozuje rovnice přímek, kružnic a limitních kružnic. Je zajímavé podotknout, že Lobačevskij ve svých spisech nikde nestudoval ekvidistantní křivku ani plochu.

V dalším se pak zabývá výpočty délek úseček a oblouků, na př. kružnice a limitní kružnice, a výpočty plošných obsahů. Ukazuje, že trojúhelníky s týmž součtem úhlů mají týž obsah, že obsah trojúhelníka je přímo úměrný jeho defektu (t. j. rozdílu součtu jeho úhlů od π), a stanoví formule pro obsah pravoúhlého, později pak obecného trojúhelníka, pro obsah kruhu,[44]) pro útvar omezený obloukem limitní kružnice a dvěma jejími osami, pro kulový pás atd. Dále počítá objem různých prostorových útvarů, jako na př. objem limitního trojbokého jehlanu, jehož ramena jsou souběžná a jedno z nich kolmé na rovinu podstavy tvaru pravoúhlého trojúhelníka, a objem limitního kužele (s povrchovými přímkami souběžnými), jejichž pomocí pak stanoví objem rotačních těles, úseče limitní koule a později objem jakéhokoli jehlanu a kužele.

Ačkoli Lobačevskij nechtěl objevovat nová řešení omezených integrálů, jak mu to vytýkal Ostrogradskij, přece se velmi zajímal o aplikace nové geometrie na analysu, zejména na integrální počet. Jak jsme již řekli, viděl Lobačevskij v tom, že pomocí své geometrie znovu a jiným způsobem odvodil známé již integrály, jako na př. integrál *Légendrův*

$$\int_r^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x \cos x \, dx}{\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 r}} = \tfrac{1}{2}\pi \ln(1 + \cos r),$$

důkaz, že jeho nová geometrie je logicky bezesporná a současně také, že jest aplikovatelná uvnitř samé matematiky. Tato jeho řešení

---

[44]) V Lobačevského rovině není poměr obvodu kružnice k jejímu průměru týž pro všechny kružnice, jako tomu je v rovině Eukleidově.

přinesla však přece něco nového. Objem každého tělesa Lobačevského prostoru se dá stanovit integrálem řešitelným elementárními funkcemi[45]) a Lobačevským zavedenou transcendentní funkcí $L(x)$

$$L(x) = x \ln 2 - \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \sin 2kx,$$

pro kterou platí

$$L(x) = -\int_0^x \ln \cos t \, dt$$

jestliže je

$$-\tfrac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

To, že objem jednoho a téhož tělesa bylo lze pomocí nové geometrie stanovit různým rozkladem na elementární části a v různých souřadných soustavách, umožnilo Lobačevskému převádět některé integrály na jednodušší a tímto způsobem Lobačevskij skutečně našel nová řešení integrálů. Při tom se mu mnohdy podařilo naznačit, jakým způsobem lze k uvedenému řešení dojít také čistě analyticky, i když nejčastěji nesrovnatelně obtížnější cestou.

Těmto otázkám věnoval zvláštní spis, totiž *Primenenije voobražaemoj geometrii k nekotorym integralam*, který v sebraných spisech zabírá přes 100 stránek. Je dost málo známo, že integrály, které Lobačevskij spočítal pomocí nové geometrie, jsou pojaty do mnohých sbírek a tabulek omezených integrálů, určených pro potřebu fysiků a inženýrů.

Většina z nich se totiž opírá o tabulky Bierens de Haana,[46]) prvních to tabulek podobného druhu. V jejich prvním vydání jsou bibliografické odkazy na prameny, z nichž Bierens de Haan čerpal, a z nich je patrno, že přes 200 integrálů bylo převzato od Lobačevského, z největší části z jeho spisů *Voobražaemaja geometrija* a *Primenenija voobražaemoj geometrii k nekotorym integralam*, vedle toho však také z dalších dvou spisů, totiž *Sposob uverjatsja v isčezanii beskonečnych strok i peč* (1835) a *Sur la probabilité des résultats moyens* (1842).

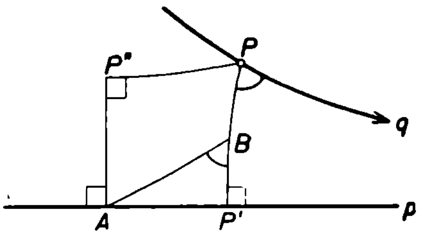
Nakonec shrneme ještě výsledky Jana Bolyaie. Jeho *Appendix* začíná pojmem souběžných přímek a odvozováním jejich základ-

---

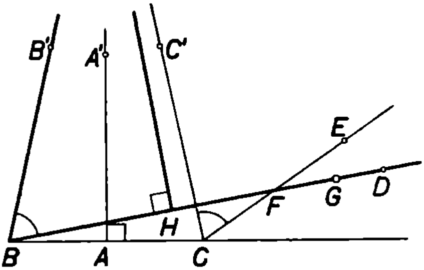
[45]) Viz pozn. [42]), str. 204.

[46]) Bierens de Haan: Tables d'intégrales définies. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Amsterdam), Deal IV, 1858.

ních vlastností. Dále Jan Bolyai ukazuje, že ke dvěma souběžkám existuje vždy isogonální úsečka (s koncovými body na souběžkách) a že její osa je s oběma přímkami souběžná, a podobně jako Gauss zavádí pomocí korespondujících bodů na souběžkách pojem limitní kružnice a limitní koule (J. Bolyai je označuje jako L-křivku, resp. F-plochu). Dále dokazuje, že když alespoň v jednom případě mají souběžné přímky součet vnitřních úhlů po jedné straně příčky rovný $2R$,



Obr. 144.



Obr. 145.

pak je tomu tak v každém případě a není tomu tak nikdy, jestliže tomu tak není alespoň v jednom případě. Touto cestou nachází rozdíl mezi eukleidovskou a novou geometrií a zavádí t. zv. *absolutní geometrii*[47]) (jako společnou část obou těchto geometrií). Ukazuje, že v eukleidovské geometrii přechází L-křivka v přímku a že v nové geometrii určují každé dva body na F-ploše právě jednu na ní ležící L-křivku a že F-plocha s těmito L-křivkami jako přímkami se řídí eukleidovskou geometrií. Nato odvozuje základní trigonometrické vztahy neeukleidovské roviny a ukazuje, že sférická trigonometrie se dá vybudovat nezávisle na Eukleidově axiomu o rovnoběžkách. Odvozuje také základní formule analytické a diferenciální geometrie, formule pro délky oblouků, obvod kružnice a pod. Zjišťuje dále, že trojúhelníky téhož plošného obsahu mají týž součet úhlů a že plochy trojúhelníků se mají k sobě jako jejich defekty.

Ve svém výkladu se věnuje také konstruktivním úlohám. Uvedeme zde dvě Bolyaiova řešení takových úloh (originál viz Stäckel [11], str. 209—210, §§ 34, 35).

[47]) Název absolutní geometrie pochází od J. Bolyaie.

Máme-li bodem P k přímce p vést souběžku (viz obr. 144), pak spustíme z P na p kolmici, mimo patu P' zvolíme libovolně bod A a na kolmici k p vedenou bodem A spustíme kolmici PP''. Protože je $P''P > AP'$, protne kružnice opsaná kolem bodu A poloměrem $P''P$ přímku $\overline{PP'}$ ve dvou bodech, jeden z nich označme B. Nyní je již $\sphericalangle ABP' \equiv \Pi(PP')$ (používáme Lobačevského symboliky).

Druhá úloha: Máme-li vést kolmici na rameno ostrého úhlu tak, aby byla souběžná s druhým ramenem, čili máme-li obráceně k předcházející úloze nalézt k úhlu α délku a tak, že $\Pi(a) \equiv \alpha$, pak postupujeme takto:

Zvolíme úsečku AB (viz obr. 145) tak, že $\Pi(AB) > \alpha$ (užijeme předchozí konstrukce), na $(AB)^*$ určíme bod C tak, že $AB \equiv AC$, body B a C vedeme souběžky $\overline{BB'}$ a $\overline{CC'}$ k $\overline{AA'} \perp \overline{AB}$. Dovnitř úhlu $\sphericalangle B'BA$ naneseme úhel $\sphericalangle B'BD \equiv \alpha$ a dovnitř úhlu $\sphericalangle (CC')(CA)^*$ úhel $\sphericalangle C'CE \equiv \alpha$. Přímky $\overline{BD}$ a $\overline{CE}$ se vždy protnou. Je-li F jejich průsečík, nanesme na polopřímku $(FB)^*$ úsečku $FG \equiv CF$. Půlící bod H úsečky GB má tu vlastnost, že $\Pi(BH) \equiv \alpha$. (Důkazy obou konstrukcí zde neuvádíme.)

Nakonec J. Bolyai udává konstrukci čtverce, jehož plošný obsah je stejně veliký jako obsah limitního trojúhelníka. Ukazuje, že se dá také sestrojit kružnice s týmž obsahem, takže dochází k překvapujícímu závěru, že v neeukleidovské geometrii existují kružnice, k nimž lze *pomocí pravítka a kružítka* sestrojit čtverec o stejném obsahu. Tuto vlastnost nemají však všechny kružnice neeukleidovské roviny.

ZÁVĚREM

Jak jsme již řekli v úvodu, bylo hlavním úkolem této knížky zabývat se neeukleidovskou geometrií Lobačevského po matematické stránce. Vymykalo se proto rámci této knížky rozebrat podrobněji význam Lobačevského geometrie pro mechaniku a fysiku nebo filosofii, ačkoliv nejzávažnějších věcí jsme se dotkli na několika místech našeho výkladu.

Přesto však, že jsme se zabývali neeukleidovskou geometrií Lobačevského pouze po matematické stránce, mnoho z toho, co by se dalo ještě říci, zůstalo naší knížkou nedotčeno. V tomto ohledu jsme podali skutečně jen základy neeukleidovské geometrie. Omezili jsme se pouze na to, abychom ukázali na logickou strukturu základních pojmů, a pokusili jsme se vytknout všechno to, co má geometrie Eukleidova společného s geometrií Lobačevského. Při té příležitosti jsme hleděli čtenáře seznámit s axiomatickou methodou, která má tak velký význam pro dnešní matematiku a k jejímuž plnému rozvinutí dal snad prvý podnět právě objev neeukleidovské geometrie. Doufáme, že poměrně snadná látka elementární geometrie čtenáři přístup k axiomatické methodě jen usnadnila.

Lobačevského geometrie nalezla široké uplatnění uvnitř samé matematiky, zejména v theorii funkcí komplexní proměnné. Uvážíme-li ještě aplikace nové geometrie na integrální počet, jak je podal sám Lobačevskij, vidíme, jak hluboká byla slova tohoto geniálního matematika: „*Ať je tomu jakkoli, nová geometrie, jejíž základy jsou zde položeny… a jíž nelze užít k praktickým měřením, odkrývá nové a široké pole vzájemných působení geometrie na analysu a naopak.*“[48]) Tato předpověď se plně potvrdila celým dalším vývojem matematiky. Geometrie se rozvinula a pronikla matematikou takovou měrou, že se dnes mluví o období geometrisace matematiky, zatím co minulé století bylo plně ve znamení její aritmetisace.

Neeukleidovská geometrie znovu ukázala, že ačkoli se velké matematické ideje rodí v hlubinách abstraktní mysli člověka, jakoby odříznuty od bezprostřední reality materiálního, konkretního světa, ve skutečnosti jsou s ním spojeny tisícerými svazky. Právě tímto spoje-

[48]) Lobačevskij [5], str. 209—210.

ním, které tvoří z tvůrčího rozletu abstraktní matematické fantasie konkretní poznávání materiálního světa, liší se plodné matematické ideje od prázdných logických spekulací.

Dnes máme již celou řadu různých geometrií. Jestliže geometrie eukleidovská je idealisací našich prostorových představ získaných zkušenostmi v měřítku naší zeměkoule nebo sluneční soustavy, pak nemůže tato geometrie příliš přesahovat dané měřítko na tu neb onu stranu, t. j. nemůže se vztahovat plně na hlubiny vesmíru ani na pochody odehrávající se v mikrosvětě atomů a molekul.

Jestliže vyjdeme z těchto mezí, potom musíme, jak to ukazuje soudobá fysika, aplikovat daleko složitější systém, než je Lobačevského geometrie. Tím spíše pak nelze mluvit o jediné neproměnné geometrii, jednou pro vždy vystihující celou rozmanitost prostorových vztahů, které naše poznávání odvozuje z obklopujícího nás materiálního světa.

DOPORUČENÁ LITERATURA

Nakonec uvedeme ještě literaturu, kterou bychom mohli doporučit čtenářům, kteří by chtěli podrobněji prostudovat neeukleidovskou geometrii nebo se zabývat otázkami, kterých jsme se mohli jen letmo dotknout. Vedle knih uvedených v seznamu citované literatury to mohou být tyto spisy:

1. H. Liebmann: Nichteuklidische Geometrie. Leipzig 1883, 3. vyd. Berlin-Leipzig 1923.
2. J. L. Coolidge: The elements of non-euclidean geometry. Oxford 1909.
3. Н. М. Несторович: Геометрические построения в плоскости Лобачевского. Москва-Ленинград 1951.
4. F. Klein: Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. Berlin 1928.
5. Б. А. Фукс: Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений. Москва-Ленинград 1951.
6. Ж. Адамар: Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций. Москва-Ленинград 1951 (ruský překlad francouzské knihy J. Hadamarda).
7. А. П. Котельников-В. А. Фок: Некоторые применения геометрии Лобачевского к механике и физике. Москва-Ленинград 1950.

Bohatá bibliografie je uvedena v knize Каган [9].

CITOVANÁ LITERATURA

[1] R. Baldus: Nichteuklidische Geometrie. Berlin-Leipzig 1927.

[2] D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie. 7. vyd., Wissenschaft und Hypothese VII, Leipzig-Berlin 1930.

[3] M. Pasch: Verlesungen über neuere Geometrie. Berlin 1926.

[4] В. Ф. Каган: Основания геометрии. Часть первая: Геометрия Лобачевского и ее предистория. Москва-Ленинград 1947.

[5] Н. И. Лобачевский: Полное собрание сочинений. Том первый: Геометрические исследования по теории параллельных линий. О началах геометрии. Москва-Ленинград 1946.

[6] Н. И. Лобачевский: Totéž. Том второй: Новые начала геометрии. Москва-Ленинград 1949.

[7] Н. И. Лобачевский. Totéž. Том третий: Воображаемая геометрия. Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам. Пангеометрия. Москва-Ленинград 1951.

[8] F. Engel: Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen. Leipzig 1898.

[9] В. Ф. Каган: Лобачевский. Издание второе. Москва- Ленинград 1948.

[10] P. Stäckel: Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. Erster Theil. Leben und Schriften der beiden Bolyai. Leipzig-Berlin 1913.

[11] P. Stäckel: Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. Zweiter Theil. Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. Leipzig-Berlin 1913.

[12] C. F. Gauss: Werke VIII. Göttingen 1900.

[13] C. F. Gauss: Werke X. 1. Göttingen 1917.

[14] P. Stäckel: Gauss als Geometer. Gauss: Werke X. 2. Göttingen 1922—1933.

[15] P. Stäckel-F. Engel: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nicht-euklidischen Geometrie. Leipzig 1895.

[16] C. A. Bjerkness: Niels-Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique. Paris 1885.

[17] R. Bonola-H. Liebmann: Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Wissenschaft und Hypothese IV. Leipzig-Berlin 1908.

SEZNAM SYMBOLŮ

(Značka k^i resp. k_i znamená i-tý řádek shora resp. zdola na k-té stránce.)

SEZNAM JMEN

SEZNAM TERMÍNŮ

(Značka k^i resp. k_i znamená i-tý řádek shora resp. zdola na k-té stránce.)

KRUH

svazek 43

Jan B. Pavlíček

ZÁKLADY NEEUKLEIDOVSKÉ GEOMETRIE LOBAČEVSKÉHO

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953.

Hlavní redaktor Dr Milan Skalník, redaktorka Zora Knichalová, odborně přehlédl Dr Zbyněk Nádeník, technický redaktor František Končický, literární redaktorka Marta Střídová — Z nové sazby písmem Extended vytiskly Pražské tiskárny, n. p., provozovna 05, Praha VIII — I. vydání, náklad 2200 výtisků (1—2200) — 30103/2 — 58159/51/5/III/1 — 219 — Sazba 4. IV. 1952, tisk 12. III. 1953 — 14,00 plánovacích archů, 12,45 autorských archů, 12,85 vydavatelských archů, 224 stran, 145 obrazců — Papír 222.17, formát 61 × 86 cm, 79 g.

Cena brož. 136 Kčs

DT 513.81