KRUH

svazek

18

DR EDUARD ČECH

ZÁKLADY
ANALYTICKÉ GEOMETRIE
I

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

PRAHA 1951

Grafická úprava a obálka podle návrhu Petra Tučného

PŘEDMLUVA

Analytická geometrie ve svém klasickém pojetí si klade za úkol pomocí souřadnic vyjadřovat geometrické veličiny početně, nahrazovat geometrické problémy s nimi ekvivalentními problémy početními, tyto řešit pomocí algebry a výsledky interpretovat geometricky. Běžné elementární učebnice analytické geometrie se zpravidla ve svých základech opírají velmi podstatně o školské studium intuitivní geometrie a ani se nesnaží o přesnou formulaci studovaných pojmů. Mimo to dávají tyto učebnice při volbě látky výrazně přednost takovým úlohám, jejichž formulace je dána rovnicemi. V novější době vyšlo však několik učebnic analytické geometrie psaných pro matematiky specialisty, ve kterých se u studovaných pojmů vychází od přesné algebraické formulace jejich definic a výsledky se odvozují přesnými algebraickými úvahami. Výběr látky je však i v těchto knihách veden jednak tradicí, jednak systematikou algebraických formulací studovaných problémů.

V této knize, jejímž cílem je elementární, ale logicky přesný výklad základů analytické geometrie, užívá se souřadnic v prvé řadě k přesné definici prostoru, ale později se souřadnice jen výjimečně vyskytují explicitně a pracuje se přímo s geometrickými objekty. Výběr látky je dán ne tak algebraickou, jako spíše geometrickou systematikou. Místo dvojí řeči, geometrické a algebraické a místo překládání z jedné řeči do druhé jsem se snažil o úplnou identifikaci geometrických a algebraických pojmů. Neopírám se nikde o znalost geometrie a z algebry předpokládám pouze znalost prvých elementů, včetně nejjednodušších vět o determinantech.

Kniha je rozpočtena na dva svazky. V prvém svazku vycházím od definice eukleidovského prostoru postulovanou existencí kartézské formule pro vzdálenost dvou bodů. Na základě této formule v kap. I definuji vektor, sčítání vektorů, násobení vektoru číslem a skalární součin. Důkazy inva-

riance provádím tak, že prokazuji ekvivalenci aritmetické definice s definicí geometrickou založenou výhradně na pojmu vzdálenosti.

V následujících třech kapitolách probírám základy afinní geometrie. Po přípravné kap. I podávám v kap. II elementární theorii lineární závislosti vektorů, kterou aplikuji v kap. III na theorii incidence lineárních podprostorů. Výsledky obou kapitol jsou správné i v komplexní geometrii, o které bude však explicitně řeč až ve druhém svazku. Naproti tomu v kap. IV, věnované pojmu úsečky, hrají základní roli nerovnosti a výsledky této kapitoly platí pouze v reálné geometrii. Počátky metrické geometrie jsou předmětem kap. V, věnované pojmu kolmosti.

Následující dvě kapitoly jsou podstatným doplňkem k předchozím. Kap. VI má za předmět afinní a shodné transformace, ale pravý význam transformačních grup v geometrii bude vyjasněn až ve druhém svazku. Předmětem kap. VII je vyjádření lineárních podprostorů lineárními rovnicemi, které v mém podání zaujímá mnohem skromnější místo než je obvyklé.

Mezi základními pojmy elementární geometrie je jeden, jehož algebraická theorie je logicky podstatně složitější než u ostatních elementárně geometrických pojmů. Je to pojem úhlu, jemuž jsou věnovány poslední dvě kapitoly svazku. V kap. VIII jsou odvozeny základní formule pro úhly včetně rovinné a sférické trigonometrie, kdežto kap. IX má za předmět vlastní studium geometrického pojmu úhlu.

Pro znalce budiž poznamenáno, že v celém svazku všecky prováděné úvahy zůstávají správné, rozumíme-li „reálnými čísly" prvky libovolného uspořádaného tělesa, ve kterém rovnice $x^2 = a$ při kladném a má kořen. Jedinou výjimku tvoří poslední článek prvého svazku.

I

KARTÉZSKÁ FORMULE PRO VZDÁLENOST DVOU BODŮ

1. NÁZORNÝ POPIS KARTÉZSKÝCH SOUŘADNIC NA PŘÍMCE, V ROVINĚ A V PROSTORU. V analytické geometrii vyjadřujeme geometrické pojmy pomocí aritmetických pojmů a na tomto základě řešíme geometrické úlohy pomocí algebry. Výchozím základním pojmem bude pro nás pojem *vzdálenosti dvou bodů*. Body budeme značit velkými písmeny; vzdálenost bodů A, B budeme značit $\overline{AB}$. Jednou pro vždy budiž poznamenáno, že si myslíme zvolenu určitou *délkovou jednotku*, takže všecky vzdálenosti budeme vyjadřovat *nepojmenovanými čísly*.

Předpokládejme nejprve, že všecky vyšetřované body leží na určité přímce p. Zvolíme si na přímce p určitý bod, který nazveme *počátek*. Je-li X kterýkoli jiný bod na přímce p, je vzdálenost $\overline{PX}$ rovna určitému základnímu číslu ξ. Známe-li číslo ξ, není poloha bodu X určena jednoznačně, neboť pro každé kladné číslo ξ existují na přímce p *dva body* X takové, že $\overline{PX} = \xi$. Každému čtenáři je jistě známo, jak docílíme jednoznačnosti. Počátek P rozdělí naši přímku na dvě části (polopřímky); zvolíme jednu z obou částí a nazveme ji *kladnou* a druhou nazveme *zápornou*. Budiž nyní X libovolný bod přímky p různý od počátku P a budiž opět $\xi = \overline{PX}$. Leží-li bod X v kladné části přímky p, položíme $x = \xi$, leží-li však X v záporné části přímky p, položíme $x = -\xi$, v dosud vyloučeném případě, že bod X splyne s počátkem P, položíme $x = 0$. Bude tedy bez výjimky každému bodu X přiřazeno určité reálné číslo x tak, že

$$x = \pm \overline{PX}.$$

Číslo x se jmenuje *souřadnice* bodu X. Obráceně, zvolíme-li libovolné reálné číslo x, je na naší přímce p právě jeden bod, jehož souřadnice je rovna danému číslu x; tento bod označíme $[x]$ nebo X. Podobně na př. $[a]$ nebo A bude znamenat bod, jehož souřadnice je rovna reálnému číslu a, t. j. souřadnici bodu označíme malým písmenem a bod sám označíme buďto tak, že jeho souřadnici uzavřeme do lomené závorky nebo označíme bod příslušným velkým písmenem. Jsou-li

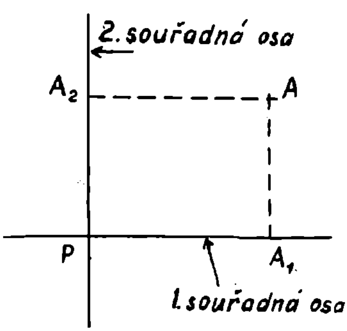
$$A = [a],\ B = [b]$$

kterékoli dva body naší přímky p, je jejich vzdálenost v každém případě dána známým vzorcem

$$\overline{AB} = |b - a|, \tag{1.1}$$

kde svislé příčky znamenají absolutní hodnotu. Právě popsaný způsob, který každému bodu X naší přímky p přiřazuje určitou souřadnici x; při čemž obráceně každé reálné číslo je souřadnicí právě jednoho bodu X a vzdálenost dvou bodů A, B je dána vzorcem (1.1), nazývá se *kartézská soustava souřadnic na přímce p.*

Dosud jsme předpokládali, že všecky vyšetřované body leží na určité přímce. Přistupme k případu, že všecky vyšetřované body leží v určité rovině ϱ. V rovině ϱ zvolíme dvě navzájem kolmé přímky, kterým říkáme *prvá a druhá osa souřadnic* a které se protnou v bodě P zvaném *počátek.* Každá osa souřadnic rozdělí rovinu ϱ na dvě části (poloroviny), z nichž jednu zvolíme za kladnou a druhou za zápornou. V praxi se obyčejně volí první osa souřadnic vodorovně, druhá svisle; vzhledem k vodorovné ose se za kladnou volívá ta část roviny, která je nahoře nad ní, vzhledem ke svislé ose ta část roviny, která je od ní napravo. Souřadnicemi bodu A jsou dvě reálná čísla a_1, a_2 určená takto (viz obr. 1). Bodem A vedeme kolmice na obě souřadnicové osy a jejich paty označíme A_1, A_2. Potom jest



Obr. 1.

$$a_1 = \pm \overline{PA_1}, \tag{1.2}$$

$$a_2 = \pm \overline{PA_2}. \tag{1.3}$$

Při tom ve vzorci (1.2) platí znamení plus nebo minus podle toho, zdali bod A (tedy také bod A_1) leží vzhledem ke druhé ose souřadnic v kladné či záporné části roviny; leží-li bod A na druhé ose souřadnic, splyne bod A_1 s počátkem P, jest $a_1 = 0$ a na znamení v (1.2) nezáleží. Podobně ve vzorci (1.3) platí znamení plus nebo minus podle toho, zdali bod A (tedy také bod A_2) leží vzhledem k první ose souřadnic v kladné či záporné části roviny; leží-li bod A na první ose souřadnic, splyne bod A_2 s počátkem P, jest $a_2 = 0$ a na znamení v (1.3) nezáleží. Jestliže bod A splyne s počátkem P, splynou s P také oba body A_1, A_2 a jest $a_1 = 0, a_2 = 0$.

Obě právě definovaná reálná čísla a_1, a_2 jsou *souřadnice* bodu A a popsané pravidlo se jmenuje *kartézská soustava souřadnic v rovině* ϱ. Taková soustava souřadnic je tedy určena, zvolíme-li v rovině dvě navzájem kolmé přímky (první a druhou osu souřadnic) a vzhledem ke každé z nich kladnou část roviny. Každý bod A roviny ϱ má potom určité dvě souřadnice a_1, a_2, které označíme příslušným malým písmenem a navzájem rozlišíme indexy 1, 2. Obráceně jsou při zvolené kartézské soustavě souřadnic v rovině ϱ libovolná dvě reálná čísla a_1, a_2 souřadnicemi právě jednoho bodu A, který můžeme označit $[a_1, a_2]$, t. j. bod daný souřadnicemi zapíšeme tak, že obě souřadnice zapíšeme jednu po druhé a uzavřeme je do lomené závorky. Zejména máme tedy $P = [0, 0]$ pro počátek P. Jsou-li

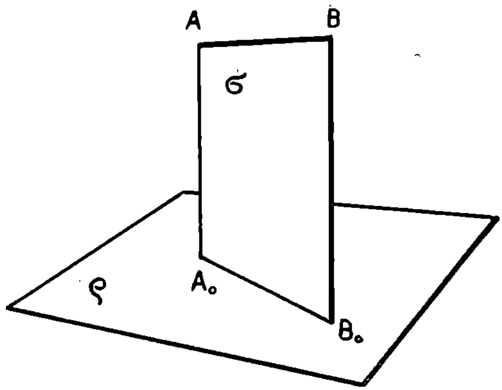
$$A = [a_1, a_2], \; B = [b_1, b_2]$$

kterékoli dva body naší roviny ϱ, odvodí se snadno z Pythagorovy věty známý vzorec pro vzdálenost:

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{1.4}$$

V prostoru má každý bod tři souřadnice, ke kterým se v elementárním vyučování dospívá takto. Nejprve se zvolí v prostoru určitá rovina ϱ, kterou můžeme nazvat *půdorysnou*. V půdorysně zvolíme právě popsaným způsobem kartézskou soustavu souřadnic složenou ze dvou navzájem kolmých os souřadnic, které se protnou v počátku P, a ze dvou znaménkových pravidel. Připojíme ještě třetí osu souřadnic, jíž je přímka vedená počátkem P kolmo na rovinu ϱ, takže všechny tři osy souřadnic jsou navzájem kolmé. Půdorysna rozdělí prostor na dvě části (poloprostory), z nichž jednu zvolíme za kladnou a druhou za zápornou. V praxi se obyčejně volí půdorysna ve vodorovné poloze a kladná část prostoru nad půdorysnou. Souřadnice a_1, a_2, a_3 libovolného bodu A jsou určeny takto (viz obr. 2). Bodem A vedeme přímku kolmou k půdorysně ϱ a její patu označíme A_0. Čísla a_1, a_2 jsou souřadnice bodu A_0 vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic zvolené v rovině ϱ. Mimo to je

$$a_3 = \pm \overline{AA_0}$$



Obr. 2.

se znamením plus, leží-li bod A v kladné části prostoru, se znamením minus, leží-li bod A v záporné části prostoru; leží-li A v půdorysně ϱ, jest $a_3 = 0$. Opět jsou libovolná tři čísla a_1, a_2, a_3 souřadnicemi právě jednoho bodu A, který můžeme označit $[a_1, a_2, a_3]$. Jsou-li nyní dány dva body

$$A = [a_1, a_2, a_3],\ B = [b_1, b_2, b_3],$$

potom pro jejich vzdálenost platí vzorec:

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}, \tag{1.5}$$

ke kterému můžeme dospěti takto (viz opět obr. 2). Přímkou AA_0 vedeme rovinu σ tak, aby procházela bodem B; rovina σ je kolmá na rovinu ϱ a obsahuje tudíž také kolmici k rovině ϱ vedenou bodem B i patu B_0 této kolmice. V rovině σ můžeme zavést kartézskou soustavu souřadnic s počátkem A_0 tak, že první osa souřadnic prochází bodem B_0, druhá bodem A, a se znaménkovými pravidly tak volenými, že bod A má v rovině σ souřadnice $0, a_3$, bod B souřadnice $\overline{A_0B_0}, b_3$. Podle vzorce (1.4) bude potom

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{A_0B_0}^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Podle téhož vzorce je však také

$$\overline{A_0B_0} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2},$$

takže dospíváme pro vzdálenost $\overline{AB}$ ke vzorci (1.5).

Vzorce (1.4) a (1.5) pro vzdálenost dvou bodů A, B v rovině a v prostoru jsou si velmi podobné; vzorec (1.1) pro vzdálenost dvou bodů na přímce má zdánlivě jiný tvar. Je to skutečně jenom zdánlivé, neboť vzorec (1.1) se dá psáti ve tvaru

$$\overline{AB} = \sqrt{(b - a)^2} \tag{1.6}$$

zcela obdobném vzorcům (1.4) a (1.5).

2. OBECNÝ POJEM EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. V článku 1 jsme zavedli na základě názoru pojem kartézské soustavy souřadnic na přímce, v rovině a v prostoru a připomenuli jsme známé vzorce (1.4), (1.5) a (1.6) pro vzdálenost dvou bodů daných svými souřadnicemi. Tyto vzorce pro vzdálenost mají pro nás fundamentální význam, neboť v následujícím se už nikde nebudeme opírat o názor, nýbrž zavedeme všecky základní pojmy elementární geometrie a odvodíme jejich základní vlastnosti algebraickou cestou opírajíce se výhradně o vzorec pro vzdálenost dvou bodů.

Analytická geometrie se tradičně dělí na tři části: analytickou geometrii na přímce (každý bod má jedinou souřadnici), analytickou geometrii v rovině (každý bod má dvě souřadnice), analytickou geometrii v prostoru (každý bod má tři souřadnice). Tyto tři části mají mnoho společného a bude účelné postupovati tak, aby to, co je všem částem společné, probíralo se společně. Při tom je výhodné míti pro společné pojmy také společné názvy, především tedy míti společný název pro přímku, rovinu a prostor. Slova prostor jsme v článku 1 užívali pro *obyčejný prostor* elementární geometrie. V této knize budeme užívati slova prostor v řadě rozmanitých významů. Obyčejný prostor budeme v dalším nazývat *trojrozměrný eukleidovský prostor* a budeme jej značit $\mathbf{E}_3$. Rovinu budeme nazývat *dvojrozměrný eukleidovský prostor* a budeme ji značit $\mathbf{E}_2$. Přímku budeme nazývat *jednorozměrný eukleidovský prostor* a budeme ji značit $\mathbf{E}_1$. Ale všude, kde je to účelné, budeme i nadále užívat také obvyklých výrazů rovina a přímka a také budeme občas užívat názvu obyčejný prostor.

Shrňme si nyní v novém označení to, co víme z článku 1 o přímce, rovině a obyčejném prostoru. Víme, že $\mathbf{E}_m$ pro $m = 1$ znamená *přímku*, pro $m = 2$ *rovinu*, pro $m = 3$ *obyčejný prostor*. $\mathbf{E}_m$ se skládá z *bodů*; každým dvěma bodům A, B prostoru $\mathbf{E}_m$ je přiřazeno určité reálné číslo $\overline{AB}$, jejich *vzdálenost*. Podstatnou vlastností prostoru $\mathbf{E}_m$ jest, že v něm lze zavésti (a to rozmanitými způsoby) *kartézskou soustavu souřadnic*. Taková soustava přiřazuje každému bodu m reálných čísel, která se jmenují *souřadnice* tohoto bodu a to tak, že každá uspořádaná skupina m reálných čísel dává souřadnice určitého bodu. Body značíme velkými písmeny a jejich souřadnice příslušnými malými písmeny, při čemž jednotlivé souřadnice od sebe rozlišujeme indexy. Bod A bude tedy míti v prostoru $\mathbf{E}_1$ jedinou souřadnici, kterou označíme a_1, v prostoru $\mathbf{E}_2$ dvě souřadnice, které označíme a_1, a_2, v prostoru $\mathbf{E}_3$ tři souřadnice, které označíme a_1, a_2, a_3. Je-li v prostoru $\mathbf{E}_m$ zavedena určitá kartézská soustava souřadnic, můžeme každý bod početně vyjádřiti tak, že zapíšeme po pořádku za sebou všecky jeho souřadnice a uzavřeme je do *lomené závorky*. Bude tedy

$$
\begin{aligned}
&A = [a_1] &&\text{pro } m = 1,\\
(2.1)\qquad &A = [a_1, a_2] &&\text{pro } m = 2,\\
&A = [a_1, a_2, a_3] &&\text{pro } m = 3.
\end{aligned}
$$

Znamení rovnosti má ten smysl, že oba symboly (nalevo i napravo od značky =) znamenají týž bod. Je-li B další bod, máme podobně

$$
\begin{aligned}
&B = [b_1] &&\text{pro } m = 1,\\
(2.2)\qquad &B = [b_1, b_2] &&\text{pro } m = 2,\\
&B = [b_1, b_2, b_3] &&\text{pro } m = 3.
\end{aligned}
$$

Vzdálenost $\overline{AB}$ obou bodů A, B je podle článku 1 dána vzorcem

$$
\begin{aligned}
&AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2} &&\text{pro } m = 1,\\
(2.3)\qquad &AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} &&\text{pro } m = 2,\\
&AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} &&\text{pro } m = 3.
\end{aligned}
$$

Abychom mohli všecky tři případy $m = 1, m = 2, m = 3$ vyšetřovat najednou, učiníme dohodu o užívání teček. Často se nám vyskytnou výrazy složené z m členů, při čemž jednotlivé členy se budou od sebe lišit pouze indexem, který nabývá hodnot od 1 do m. V takových případech budeme občejně psát pouze první člen a ostatní členy naznačíme tečkou. Podle této dohody budeme tedy psáti

$$A = [a_1, \bullet] \tag{2.1'}$$

místo (2.1),

$$B = [b_1, \bullet] \tag{2.2'}$$

místo (2.2),

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \bullet} \tag{2.3'}$$

místo (2.3).

Klasickým úkolem analytické geometrie jest nahradit geometrické problémy problémy početními a řešit takové problémy pomocí algebry. V tomto smyslu *aritmetisace geometrie* jest analytická geometrie matematickou naukou starou přes 300 let, která historicky znamenala velký pokrok ve výstavbě geometrie, protože umožnila využití výsledků jiných odvětví matematiky k řešení geometrických problémů, na které nestačily přímé geometrické úvahy, na př. k důkazu nemožnosti eukleidovské trisekce úhlu a eukleidovské kvadratury kruhu. Ve druhé polovině 19. století však počínala nabývat významu opačná tendence *geometrisace matematiky*, která je dnes jedním z nejvýznamnějších rysů moderní matematiky. Geometrisace matematiky spočívá v dalekosáhlém zobecnění pojmu prostoru. Název *prostor* se dnes dává množinám objektů nejrozmanitějšího druhu a název bod jednotlivým prvkům množiny. Tím se mnohdy docílí, že se výsledky jednoduchých názorných geometrických úvah dají přenést na velmi obecné kategorie důležitých matematických objektů, před tím studované mnohem složitějšími methodami. Tato kniha má za svůj hlavní cíl soustavné poučení o aritmetisaci geometrie, zároveň však má sloužit aspoň jako úvod k pochopení moderní geometrisace matematiky.

V duchu geometrisace matematiky rozumíme pro libovolné $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ výrazem *m-rozměrný eukleidovský prostor*, který značíme $\mathbf{E}_m$, množinu jakýchkoli matematických objektů, které nazýváme *body* prostoru $\mathbf{E}_m$, předpokládajíce toto. Každým dvěma „bodům" prostoru $\mathbf{E}_m$ je podle nějakého pravidla přiřazeno určité reálné číslo zvané *vzdáleností* obou bodů. Při tom je možné zavésti do prostoru $\mathbf{E}_m$ *kartézskou soustavu souřadnic*, t. j. popsati každý bod

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$$

skupinou m reálných čísel, zvaných *souřadnicemi* bodu A, a to tak, že vzdálenost libovolných dvou bodů (2.1′), (2.2′) je dána vzorcem (2.3′). Při tom se předpokládá, že libovolná skupina m reálných čísel a_1, $a_2, \ldots, a_m$ dává souřadnice právě jednoho bodu A. Je-li v prostoru $\mathbf{E}_m$ zavedena určitá kartézská soustava souřadnic, nazveme jejím *počátkem* a označíme P ten bod, jehož všecky souřadnice jsou rovny nule.

V následujících článcích studujeme eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ pro libovolné m. Čtenář začátečník nechť z počátku provede každou úvahu zvlášť pro $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$. Brzy si uvědomí, že postup v textu, kde m zůstává libovolné, nikterak nekomplikuje úsudky a je přehlednější než kdybychom, omezujíce se na elementární případy $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, prováděli každou úvahu třikrát.

3. TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST. Jsou-li

$$A = [a_1, \bullet], \; B = [b_1, \bullet] \tag{3.1}$$

libovolné dva body prostoru $\mathbf{E}_m$, je jejich vzdálenost dána vzorcem

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \bullet}. \tag{3.2}$$

Z tohoto základního vzorce okamžitě plynou tyto vlastnosti vzdálenosti libovolných dvou bodů:

$$\overline{AB} = \overline{BA}, \tag{3.3}$$

$$\overline{AB} = 0, \text{ jestliže } A = B, \tag{3.4}$$

$$\overline{AB} > 0, \text{ jestliže } A \neq B. \tag{3.5}$$

Je-li vedle bodů A, B dán ještě třetí bod

$$C = [c_1, \bullet], \tag{3.6}$$

potom platí důležitá nerovnost

$$\overline{AC} + \overline{BC} \geqq \overline{AB}, \tag{3.7}$$

která se jmenuje *trojúhelníková nerovnost*. Její důkaz je hlavním úkolem tohoto článku. Jestliže $A = B$, je správnost nerovnosti (3.7) zřejmá. Budiž tedy

$$A \neq B. \tag{3.8}$$

Určeme reálné číslo t z rovnice

$$t[(b_1 - a_1)^2 + \bullet] = (c_1 - a_1)(b_1 - a_1) + \bullet. \tag{3.9}$$

Koeficient při neznámé t v rovnici (3.9) je roven $\overline{AB}^2$, je tedy různý od nuly podle (3.5) a (3.8). Lze tudíž určiti t tak, aby platilo (3.9). Definujme nyní pomocný bod

$$D = [d_1, \bullet] \tag{3.10}$$

rovnicemi

$$d_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \bullet, \tag{3.11}$$

ze kterých plyne jednak

$$d_1 - a_1 = t(b_1 - a_1), \bullet, \tag{3.12}$$

jednak

$$d_1 - b_1 = -(1 - t)(b_1 - a_1), \bullet. \tag{3.13}$$

Ze (3.12) plyne

$$(d_1 - a_1)(b_1 - a_1) + \bullet = t[(b_1 - a_1)^2 + \bullet];$$

porovnáme-li se (3.9), dostaneme

$$(d_1 - a_1)(b_1 - a_1) + \bullet = (c_1 - a_1)(b_1 - a_1) + \bullet$$

neboli

$$(c_1 - d_1)(b_1 - a_1) + \bullet = 0. \tag{3.14}$$

Ze (3.14) plyne jednak podle (3.12)

$$(c_1 - d_1)(d_1 - a_1) + \bullet = 0, \tag{3.15}$$

jednak podle (3.13)

$$(c_1 - d_1)(d_1 - b_1) + \bullet = 0. \tag{3.16}$$

Avšak

$$(c_1 - a_1)^2 = [(c_1 - d_1) + (d_1 - a_1)]^2$$

neboli

$$(c_1 - a_1)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (d_1 - a_1)^2 + 2(c_1 - d_1)(d_1 - a_1)$$

a stejně pro ostatní indexy, takže podle (3.15) jest

$$(c_1 - a_1)^2 + \bullet = [(c_1 - d_1)^2 + \bullet] + [(d_1 - a_1)^2 + \bullet]$$

neboli

$$\overline{AC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AD}^2. \tag{3.17}$$

Podobně máme

$$(c_1 - b_1)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (d_1 - b_1)^2 + 2(c_1 - d_1)(d_1 - b_1),$$

a tedy podle (3.16)

$$\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2. \tag{3.18}$$

Mimo to ze (3.12) a (3.13) plyne

$$\overline{AD}^2 = t^2 \,.\, \overline{AB}^2,\quad \overline{BD}^2 = (1 - t)^2 \,.\, \overline{AB}^2,$$

tudíž, ježto vzdálenost nikdy není záporná,

$$\overline{AD} = |t| \,.\, \overline{AB},\quad \overline{BD} = |1 - t| \,.\, \overline{AB}. \tag{3.19}$$

Snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} &|t| + |1 - t| = 1, \text{ jestliže } 0 \leqq t \leqq 1,\\ &|t| + |1 - t| > 1, \text{ jestliže } t < 0 \text{ nebo } t > 1. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Mimo to podle (3.5) a (3.8) jest $\overline{AB} > 0$, takže ze (3.19) a (3.20) plyne

$$\overline{AD} + \overline{BD} \geqq \overline{AB}, \tag{3.21}$$

při čemž rovnost nastane tehdy a jenom tehdy, jestliže $0 \leqq t \leqq 1$. Ze (3.17) a (3.18) však plyne

$$\overline{AC} \geqq \overline{AD},\quad \overline{BC} \geqq \overline{BD}, \tag{3.22}$$

při čemž v obou případech nastane rovnost tehdy a jenom tehdy, jestliže $\overline{DC} = 0$, t. j. jestliže $C = D$. Ze (3.21) a (3.22) plyne žádaná nerovnost (3.7).

Z provedeného důkazu plyne, že za předpokladu $A \neq B$ platí v trojúhelníkové nerovnosti (3.7) znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže existuje reálné číslo t tak, že

$$0 \leqq t \leqq 1, \tag{3.23}$$

$$C = A + t(B - A); \tag{3.24}$$

při tom symbolická rovnost (3.24) zastupuje m rovností

$$c_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \bullet.$$

Splynou-li oba body A, B, platí ve (3.7) znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže s nimi splyne také bod C.)

4. STŘED DVOJICE BODŮ. V analytické geometrii prostoru $\mathbf{E}_m$ zavádíme nové pojmy aritmeticky, t. j. užívajíce souřadnic ve zvolené kartézské soustavě. Při tom je však míti na paměti, že v $\mathbf{E}_m$ je možno zavésti kartézskou soustavu souřadnic různými způsoby. Pouze ty pojmy, které jsou nezávislé na volbě kartézské soustavy souřadnic, jsou *geometrické pojmy* v prostoru $\mathbf{E}_m$. U každého pojmu zavedeného pomocí kartézské soustavy souřadnic musíme tudíž prokázati jeho *invarianci*, t. j. prokázati, že se nezmění (že zůstane *invariantní*) při přechodu od jedné soustavy kartézských souřadnic k soustavě jiné. Důkazy invariance je možné provádět na základě vzorců, které popisují přechod od jedné kartézské soustavy souřadnic ke kterékoli jiné takové soustavě. Takové vzorce pro *transformaci souřadnic* si později v této knize skutečně odvodíme. Nebudeme jich však užívat k důkazům invariance, nýbrž budeme tyto důkazy provádět jinak. Místo *aritmetické definice*, ve které se užívá určité kartézské soustavy souřadnic, a která tudíž vyžaduje důkazu invariance, je totiž možné zavésti nový pojem také *geometrickou definicí*, ve které se vůbec neužívá souřadnic, nýbrž ve které se nový pojem převede na pojem vzdálenosti, jehož invariance je zřejmá, po případě i na jiné pojmy, jejichž invariance byla již dříve dokázána. Budeme často postupovati tak, že pro nově zaváděný pojem zavedeme dvě definice, jednu aritmetickou a druhou geometrickou, při čemž ovšem bude třeba v každém případě se přesvědčit, že obě definice skutečně popisují týž pojem. Sama o sobě bude každá z obou definic míti určitou nevýhodu, která teprve spojením obou definic se odstraní. Nevýhoda aritmetické definice je v tom, že sama o sobě vyžaduje důkazu invariance; tato nevýhoda je odstraněna geometrickou definicí. Naproti tomu geometrické definice samy o sobě zase budou míti určité nevýhody, na které poukážeme od případu k případu, a které jsou odstraněny aritmetickou definicí.

Tyto obecné zásady si v tomto článku objasníme na konkretním příkladě pojmu *středu dvojice bodů*. Buďtež

(4.1) $$A = [a_1, \bullet],\ B = [b_1, \bullet]$$

libovolné dva body prostoru $\mathbf{E}_m$. Středem dvojice A, B nazveme bod

(4.2) $$C = \tfrac{1}{2}(A + B),$$

kde symbolická rovnost (4.2) zastupuje m rovností

$$c_1 = \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1), \bullet.$$

Právě jsme vyslovili *aritmetickou definici* středu dvojice A, B. Ze vzorce pro vzdálenost dvou bodů snadno plyne, že bod (4.2) má vlastnosti:

(4.3) $$\overline{AC} = \overline{BC} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}.$$

Dokážeme, že (při daných bodech A, B) je C *jediný* bod prostoru $\mathbf{E}_m$ s vlastnostmi (4.3), které tudíž dávají *geometrickou definici* středu dvojice A, B.

Nechť tedy platí (4.3); máme dokázati, že platí (4.2). Jestliže $A = B$, je $\overline{AB} = 0$, tedy podle (4.3) také $\overline{AC} = 0$, tedy $C = A = B$, takže platí (4.2). Jestliže však $A \neq B$, uvažme, že podle (4.3) je $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$, takže podle konce článku 3 existuje reálné číslo t tak, že platí (3.23) a (3.24). Ze (3.23) vypočteme snadno, že $\overline{AC} = |t| \,.\, \overline{AB}$; ježto $\overline{AB} > 0$, soudíme ze (4.3), že $|t| = \frac{1}{2}$. Avšak $t \geqq 0$ podle (3.23), tedy $t = \frac{1}{2}$, načež ze (3.24) snadno plyne (4.2).

Poznamenejme výslovně, že jestliže bod B splyne s bodem A, také střed C dvojice A, B splyne s A; naproti tomu pro $A \neq B$ jsou všecky tři body A, B, C navzájem různé. Správnost této poznámky plyne stejně snadno i z aritmetické definice (4.2) i z geometrické definice (4.3).

Sama o sobě má geometrická definice (4.3) středu dvojice bodů tu nevýhodu, že z ní není patrné, že při daných bodech A, B existuje *právě jeden* bod C tak, že platí vztahy (4.3).

Na konec uveďme ještě zřejmý fakt, že střed dvojice A, B splyne se středem dvojice B, A.

5. POJEM VEKTORU. V tomto článku budeme definovat pojem *vektoru*, který je jedním z nejdůležitějších pojmů geometrie prostorů $\mathbf{E}_m$. Než přistoupíme k věci, bude účelná obecná úvaha o *zavádění* *pojmů abstrakcí.* Abstrakce pozůstává v tom, že shrneme pod jediný širší pojem řadu pojmů, jejichž vzájemné rozdíly jsou s určitého hlediska nepodstatné. Abstrakcí se zavádí již na národní škole m. j. pojem *nepojmenovaného čísla*: shrnutím pojmů tří žáků, tří jablek, tří sešitů, tří kuliček atd. se dochází k pojmu nepojmenovaného čísla tři. Na trochu vyšším stupni dospíváme na př. k pojmu zlomku abstrakcí z pojmu dvojice čísel (čitatele a jmenovatele); na př.

$$\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{6}, \tfrac{6}{9}, \tfrac{8}{12} \text{ atd.}$$

jsou různá konkretní vyjádření téhož abstraktního zlomku.

Podobnou abstrakcí dospějeme od pojmu *dvojice bodů* k pojmu *vektoru*. Podle programu nastíněného v článku 4 uvedeme nejprve *aritmetickou definici* vektoru. Budiž v prostoru $\mathbf{E}_m$

$$(5.1) \qquad A = [a_1, \bullet], \; B = [b_1, \bullet]$$

libovolná dvojice bodů. Budiž dále

$$(5.1') \qquad A' = [a_1', \bullet], \; B' = [b_1', \bullet]$$

kterákoli jiná dvojice bodů. Pravíme, že obě dvojice (5.1) a (5.1′) *určují týž vektor*, platí-li m rovnic

$$(5.2) \qquad b_1 - a_1 = b_1' - a_1', \bullet.$$

Každá z obou dvojic (5.1), (5.1′) tvoří jedno *umístění vektoru*; vektor sám (pojem vzniklý abstrakcí) nemá ovšem určité umístění. Při daném umístění, na př. (5.1), nazveme A *počátečním bodem*, B *koncovým bodem*; při umístění (5.1′) je ovšem A' počátečním bodem, B' koncovým bodem. Položme

$$(5.3) \qquad u_1 = b_1 - a_1, \ldots, u_m = b_m - a_m;$$

podle (5.2) je potom také

$$u_1 = b_1' - a_1', \ldots, u_m = b_m' - a_m',$$

t. j. čísla $u_1, \ldots, u_m$ jsou nezávislá na umístění vektoru. Čísla $u_1, \ldots, u_m$ nazveme (při dané volbě kartézské soustavy souřadnic) *souřadnicemi vektoru*. Vektor je svými souřadnicemi (stále při dané volbě kartézské soustavy souřadnic) úplně určen. Vektor, jehož souřadnicemi jsou čísla $u_1, \ldots, u_m$, označíme $\boldsymbol{u}$; značíme tedy vektor tučným písmenem a jeho souřadnice příslušnými písmeny obyčejného typu, při čemž jednotlivé souřadnice rozlišujeme indexy.

Souřadnice $u_1, \ldots, u_m$ vektoru jsou zcela libovolná reálná čísla. Vektor daný svými souřadnicemi je mnohdy účelné zapsati tak, že napíšeme po pořádku za sebou všecky jeho souřadnice a uzavřeme je do *okrouhlé závorky*. Bude tedy

$$\mathbf{u} = (u_1, \bullet), \ \mathbf{v} = (v_1, \bullet) \text{ a pod.}$$

Vektor, který při určitém umístění má počáteční bod A a koncový bod B, označíme $B - A$, takže symbolická rovnice

$$\mathbf{u} = B - A \tag{5.4}$$

znamená totéž jako m obyčejných rovnic (5.3).

Je-li dán vektor $\mathbf{u}$ a bod A, má $\mathbf{u}$ právě jedno umístění, při kterém je A počátečním bodem. Koncový bod B tohoto umístění je dán symbolickou rovnicí

$$B = A + \mathbf{u}, \tag{5.5}$$

která znamená totéž jako m obyčejných rovnic

$$b_1 = a_1 + u_1, \bullet.$$

Obě rovnice (5.4) a (5.5) znamenají totéž.

K pojmu vektoru jsme došli v tomto článku abstrakcí založenou na aritmetické definici (5.2). Za účelem důkazu invariance je nutné nahradit (5.2) geometrickou definicí, která zní takto: Obě dvojice

$$A, B'; B, A' \tag{5.6}$$

mají týž střed. Neboť to znamená, že

$$\tfrac{1}{2}(a_1 + b_1') = \tfrac{1}{2}(b_1 + a_1'), \bullet,$$

což je zřejmě pouze jiný tvar rovnic (5.2).

Abychom si uvědomili, jakou nevýhodu má geometrická definice sama o sobě, předpokládejme, že obě dvojice A, B; A', B' určují týž vektor. Podle geometrické definice to znamená, že obě dvojice (5.6) mají týž střed. Je-li nyní A'', B'' třetí dvojice bodů, potom dvojice A, B; A'', B'' určují týž vektor, jestliže dvojice

$$A, B''; B, A'' \tag{5.6'}$$

mají týž střed. Zároveň však dvojice $A', B'; A'', B''$ určují týž vektor, jestliže dvojice

$$(5.6'') \qquad A', B''; \; B', A''$$

mají týž střed. Z geometrické definice není nikterak zřejmé, že rovnost středů dvojic (5.6′) má za následek rovnost středů dvojic (5.6″). Že tomu tak je — za předpokladu rovností středů dvojic (5.6) — je ovšem důsledkem aritmetické definice.

6. NULOVÝ VEKTOR, OPAČNÉ VEKTORY, VELIKOST VEKTORU, SČÍTÁNÍ VEKTORŮ. Označíme $\boldsymbol{o}$ a nazveme *nulovým vektorem* ten vektor, jehož každá souřadnice je rovna nule (aritmetická definice). Zřejmě při každém umístění nulového vektoru splyne počáteční a koncový bod, kdežto při žádném umístění nenulového vektoru nesplyne počáteční a koncový bod. V tom jest obsažena geometrická definice nulového vektoru, která sama o sobě má tu nevýhodu, že z ní není bezprostředně patrné, že jestliže při jednom umístění vektoru splyne počáteční a koncový bod, platí totéž o každém jiném umístění.

Je-li $\boldsymbol{u} = (u_1, \bullet)$ libovolný vektor, označíme $-\boldsymbol{u}$ a nazveme *vektorem opačným* k vektoru $\boldsymbol{u}$ vektor $(-u_1, \bullet)$. Jestliže $\boldsymbol{u} = B - A$, t. j. jestliže A je počáteční a B koncový bod určitého umístění vektoru $\boldsymbol{u}$, zřejmě je $-\boldsymbol{u} = A - B$, t. j. B je počáteční, A koncový bod určitého umístění opačného vektoru. V tom je obsažena geometrická definice pojmu opačného vektoru, která sama o sobě opět má tu nevýhodu, že z ní není patrné, že jestliže okolnost v ní uvedená platí při jednom umístění vektoru $\boldsymbol{u}$, zůstává v platnosti při každém umístění tohoto vektoru.

Nazveme *velikostí vektoru* $\boldsymbol{u} = (u_1, \bullet)$ a označíme $|\boldsymbol{u}|$ číslo

$$(6.0) \qquad |\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + \bullet}.$$

Je-li $\boldsymbol{u} = B - A$, jest

$$(6.1) \qquad |B - A| = \overline{AB},$$

t. j. při každém umístění je velikost vektoru rovna vzdálenosti počátečního a koncového bodu. To je geometrická definice velikosti vektoru se stejnou nevýhodou jako při definici nulového a opačného vektoru.

Jak z aritmetické, tak i z geometrické definice velikosti vektoru je patrné, že

(6.2) $$|\mathbf{u}| = 0, \text{ jestliže } \mathbf{u} = \mathbf{o},$$

(6.3) $$|\mathbf{u}| > 0, \text{ jestliže } \mathbf{u} \neq \mathbf{o},$$

(6.4) $$|-\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|.$$

Jsou-li $\mathbf{u} = (u_1, \bullet)$, $\mathbf{v} = (v_1, \bullet)$ dva vektory, nazveme *součtem obou vektorů* a označíme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ vektor $(u_1 + v_1, \bullet)$. Zvolme libovolný bod A a umístěme vektor $\mathbf{u}$ tak, aby A byl počátečním bodem; je-li B koncový bod tohoto umístění, jest $\mathbf{u} = B - A$. Umístěme vektor $\mathbf{v}$ tak, aby B byl počátečním bodem; je-li C koncový bod tohoto umístění, jest $\mathbf{v} = C - B$. Z toho plyne ihned, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} = C - A$, t. j. vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ má takové umístění, při kterém je A počátečním bodem, C koncovým bodem. To dává geometrickou definici součtu dvou vektorů se stejnou nevýhodou, kterou mají všecky geometrické definice tohoto článku.

Zřejmě pro sčítání vektorů platí *komutativní zákon*

(6.5) $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

a *asociativní zákon*

(6.6) $$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Dále je zřejmé, že

(6.7) $$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{o}$$

a že rovnice

(6.8) $$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$$

s danými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a s neznámým vektorem $\mathbf{x}$ má právě jedno řešení

(6.9) $$\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}).$$

V asociativním zákonu (6.6) se vyskytují tři vektory; vedle toho platí zřejmě také asociativní zákon

(6.10) $$A + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (A + \mathbf{u}) + \mathbf{v},$$

ve kterém se vyskytuje bod A a dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Poznamenejme si také zřejmý vzorec

(6.11) $$A + \mathbf{o} = A.$$

Dosud jsme mluvili pouze o součtu dvou vektorů; součet více než dvou vektorů můžeme definovat rekurentně vzorcem

(6.12) $$\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n) + \mathbf{u}_{n+1}.$$

Rekurentní definice (6.12) je geometrická definice, jejíž invariance je tudíž zřejmá. Ze známých vlastností součtu čísel okamžitě plynou obdobné vlastnosti součtu vektorů. Je to nejprve *obecný komutativní zákon*, který praví, že součet několika vektorů je nezávislý na jejich pořádku. Za druhé je to *obecný asociativní zákon*, který praví, že součet několika vektorů můžeme vypočísti tak, že rozdělíme sčítance na skupiny, vypočteme částečné součty vektorů jednotlivých skupin a tyto částečné součty sečteme; při tom může některá skupina obsahovat jediný vektor, který jest potom považovat za příslušný „částečný součet".

7. SKALÁRNÍ SOUČIN. V prostoru $\mathbf{E}_m$ buďtež dány dva vektory

(7.1) $$\mathbf{u} = (u_1, \bullet), \ \mathbf{v} = (v_1, \bullet).$$

Označíme $\mathbf{uv}$ nebo $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}$ a nazveme jejich *skalárním součinem* číslo

(7.2) $$\mathbf{uv} = u_1 v_1 + \bullet.$$

Tedy *skalární součin dvou vektorů není vektor, nýbrž číslo.* Invariance skalárního součinu plyne z geometrické definice, kterou podáme na konci tohoto článku.

Ze známých vlastností součinu čísel plynou obdobné vlastnosti skalárního součinu. Je to především *komutativní zákon*

(7.3) $$\mathbf{uv} = \mathbf{vu},$$

za druhé to jsou *distributivní zákony*

(7.4) $$(\mathbf{u} + \mathbf{u}')\,\mathbf{v} = \mathbf{uv} + \mathbf{u}'\mathbf{v},$$

(7.4') $$\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{uv} + \mathbf{uv}',$$

ze kterých plyne snadno obecný distributivní zákon: *Máme-li součet několika vektorů skalárně znásobit součtem několika vektorů, můžeme* *to provésti tak, že každý vektor prvého součtu skalárně znásobíme každým vektorem druhého součtu a všecky takto obdržené skalární součiny sečteme.*

Zřejmě jest

$$(7.5) \qquad \mathbf{uo} = \mathbf{ou} = 0,$$

t. j. skalární součin dvou vektorů je roven nule, jakmile aspoň jeden činitel je nulový vektor. Je však důležité si všimnout, že *pro* $m > 1$ *skalární součin dvou vektorů může býti roven nule, i když žádný činitel není nulový vektor*; na př. pro $m = 2$, $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$ je $\mathbf{uv} = 0$.

Z definice (7.2) plyne, že

$$(7.6) \qquad \mathbf{uu} = |\mathbf{u}|^2,$$

t. j. *skalární součin vektoru s ním samým je roven druhé mocnině velikosti vektoru.*

Jsou-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ libovolné dva vektory, máme podle obecného distributivního zákona

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{uu} + \mathbf{uv} + \mathbf{vu} + \mathbf{vv}$$

neboli podle (7.3) a (7.6)

$$(7.7) \qquad |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{uv}.$$

Píšeme-li (7.7) ve tvaru

$$(7.7') \qquad \mathbf{uv} = \tfrac{1}{2}(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2),$$

dospíváme ke geometrické definici skalárního součinu, neboť pojem součtu dvou vektorů a pojem velikosti vektoru jsou invariantní pojmy.

8. SOUČIN ČÍSLA A VEKTORU. Budiž a libovolné reálné číslo, budiž $\mathbf{u} = (u_1, \bullet)$ libovolný vektor. Označíme $a\mathbf{u}$ nebo $a \,.\, \mathbf{u}$ a *nazveme součinem čísla a a vektoru* $\mathbf{u}$ *vektor*

$$(8.0) \qquad a\mathbf{u} = (au_1, \bullet).$$

Z této aritmetické definice plynou jednoduché vlastnosti součinu čísla a vektoru:

(8.1) Je-li $a = 0$, je $a\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

(8.2) Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, je $a\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

(8.3) Je-li $au = o$, je buďto $a = 0$ nebo $u = o$.

(8.4) Je-li $a = 1$, je $au = u$.

(8.5) Je-li $a = -1$, je $au = -u$.

(8.6) $$a \,.\, (bu) = (ab) \,.\, u,$$

pročež bez obavy z nedorozumění můžeme psáti stručně abu.

(8.7) $$(a + b)\, u = au + bu.$$

(8.8) $$a(u + v) = au + av.$$

Z (8.7) a (8.8) plyne obecný distributivní zákon pro součin čísla a vektoru: *Součet čísel a součet vektorů můžeme znásobit tak, že každé dané číslo znásobíme každým daným vektorem a všecky tyto součiny sečteme.*

Z definice součinu čísla a vektoru a z definice (7.2) skalárního součinu plyne vzorec

(8.9) $$(au) \,.\, v = u \,.\, (av) = a \,.\, (uv);$$

obecněji jest

(8.10) $$(au) \,.\, (bv) = (ab) \,.\, (uv).$$

Z definice součinu čísla a vektoru a z definice velikosti vektoru (viz článek 6) snadno plyne vzorec

(8.11) $$|au| = |a| \,.\, |u|.$$

Zbývá prokázati geometrickou definicí invarianci součinu au. Za tím účelem poznamenejme nejprve, že jestliže mezi dvěma vektory u, v platí vztah

(8.12) $$v = au,$$

potom podle (8.9) platí také vztahy

(8.13) $$uv = a \,.\, uu, \quad vv = a \,.\, uv,$$

jejichž invariance je nám již známa. Stačí tedy dokázati, že obráceně z platnosti vztahů (8.13) plyne platnost vztahu (8.12). Nechť tedy platí (8.13). Potom jest

$$uv - a \,.\, uu = 0, \quad vv - a \,.\, uv = 0,$$

tedy také

$$(\boldsymbol{vv} - a \,.\, \boldsymbol{uv}) - a(\boldsymbol{uv} - a \,.\, \boldsymbol{uu}) = 0$$

neboli

$$(\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{u}) = 0,$$

takže podle (7.6) je $|\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{u}| = 0$, což by podle (6.3) bylo nemožné, kdyby neplatilo (8.12).

9. DVĚ NEROVNOSTI. VĚTA 9.1. *Jsou-li* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ *dva vektory, platí nerovnost*

$$(9.1) \qquad |\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| \leqq |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|;$$

při tom v (9.1) *platí znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže buďto* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ *nebo* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ *nebo existuje kladné číslo* k *tak, že* $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$.

DŮKAZ. Zvolme libovolně bod A a určeme body B, C tak, aby bylo $\boldsymbol{u} = C - A$, $\boldsymbol{v} = B - C$, tedy $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = B - A$. Potom nerovnost (9.1) nabude podle (6.1) tvaru

$$\overline{AB} \leqq \overline{AC} + \overline{BC}$$

a v tomto tvaru již byla dokázána v článku 3, kde jsme také poznali, že znamení rovnosti platí tehdy a jenom tehdy, jestliže buďto

$$A = B = C$$

nebo

$$A \neq B,\ C = A + t(B - A),\ 0 \leqq t \leqq 1.$$

V prvém případě je $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$. Ve druhém případě je

$$(9.2) \qquad \boldsymbol{u} = t(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}),\ 0 \leqq t \leqq 1,\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}.$$

Je-li $t = 0$, potom podle (9.2) je $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ a obráceně pro $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ platí (9.2), při čemž $t = 0$. Je-li $t = 1$, potom podle (9.2) je $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ a obráceně pro $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ platí (9.2), při čemž $t = 1$. Je-li $0 < t < 1$, potom podle (9.2) je $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$, kde $k = (1 - t) : t$, tedy $k > 0$.

Obráceně, je-li $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$, $k > 0$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, platí (9.2), položíme-li $t = 1 : (1 + k)$, takže $0 < t < 1$.

VĚTA 9.2. *Jsou-li* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ *dva vektory, platí nerovnost*

$$(9.3) \qquad \boldsymbol{uv} \leqq |\boldsymbol{u}| \,.\, |\boldsymbol{v}|;$$

při tom v (9.3) *platí znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže buďto* $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ *nebo* $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ *nebo existuje kladné číslo* k *tak, že* $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$.

DŮKAZ. Z nerovností (9.1) plyne

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 \leqq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2 \,.\, |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}| \tag{9.4}$$

a obráceně z (9.4) plyne (9.1). Avšak podle (7.7) z (9.4) plyne (9.3) a obráceně z (9.3) plyne (9.4). Tedy věta 2 plyne z věty 1.

Dosadíme-li $-\mathbf{u}$ na místo $\mathbf{u}$ do (9.3), dostaneme

$$-\mathbf{u}\mathbf{v} \leqq |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}|. \tag{9.5}$$

Obě nerovnosti (9.3) a (9.5) dohromady praví, že

$$|\mathbf{u}\mathbf{v}| \leqq |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}|, \tag{9.6}$$

při čemž rovnost nastane tehdy a jenom tehdy, jestliže buďto $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ nebo $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ nebo existuje reálné číslo k tak, že $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$.

II

VEKTOROVÉ PROSTORY

10. VEKTOROVÝ PROSTOR. Pro další bude účelné shrnouti vlastnosti součtu vektorů a součinu reálného čísla s vektorem. (Skalární součin ponecháváme prozatím stranou.) Stále značíme vektory tučnými písmeny, reálná čísla písmeny obyčejného typu. Základními vlastnostmi zkoumaných početních výkonů jsou následující vlastnosti (10.1) až (10.7):

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}. \tag{10.1}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}). \tag{10.2}$$

(10.3) Existuje *nulový vektor*, který značíme $\mathbf{o}$ a pro který platí $0\mathbf{u} = \mathbf{o}$ pro libovolný vektor $\mathbf{u}$.

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}. \tag{10.4}$$

$$(a + b)\,\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}. \tag{10.5}$$

$$a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}. \tag{10.6}$$

$$1\,.\,\mathbf{u} = \mathbf{u}. \tag{10.7}$$

Zaujmeme nyní abstraktní stanovisko, které se později ukáže velmi užitečným. Budiž dána množina jakýchkoli matematických objektů, které nazveme *vektory*; celou množinu nazveme *vektorový prostor*. Těchto názvů budeme užívati, budou-li definovány dva početní výkony:

(a) sčítání vektorů (součet je opět vektor),

(b) násobení reálného čísla s vektorem (součin je vektor); mimo to předpokládáme, že jsou splněny právě vyjmenované vlastnosti (10.1) až (10.7), ze kterých nyní odvodíme několik jednoduchých důsledků, které pro vektory prostoru $\mathbf{E}_m$ jsou nám z předcházejícího známy.

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}. \tag{10.8}$$

Důkaz. Podle (10.7), (10.3), (10.5), (10.7) jest

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = 1 \,.\, \boldsymbol{u} + 0 \,.\, \boldsymbol{u} = (1 + 0)\, \boldsymbol{u} = 1 \,.\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u};$$

podle (10.1) je také $\boldsymbol{o} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

(10.9) Ke každému vektoru $\boldsymbol{u}$ definujeme *opačný vektor* $-\boldsymbol{u} = (-1) \,.\, \boldsymbol{u}$. Potom jest $(-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$.

Důkaz. Podle definice opačného vektoru a podle (10.7), (10.5) a (10.3) jest

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = 1 \,.\, \boldsymbol{u} + (-1) \,.\, \boldsymbol{u} = (1 - 1) \,.\, \boldsymbol{u} = 0 \,.\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o};$$

podle (10.1) je také $(-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$.

(10.10) $-(-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$. To plyne z definice opačného vektoru, z (10.6) a (10.7).

(10.11) Rovnice

$$(*) \qquad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \text{ nebo } \boldsymbol{u} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$$

($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ dané vektory, $\boldsymbol{x}$ hledaný vektor) má právě jedno řešení

$$(**) \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \text{ t. j. } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{u}).$$

Důkaz. Platí-li (*), potom podle (10.2), (10.9) a (10.8) jest

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{x}.$$

Platí-li (**), potom podle (10.2), (10.9) a (10.8) jest

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{v}.$$

(10.12) Je-li $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$, jest $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

Důkaz. Podle (10.8), (10.2), (10.9) a (10.8) jest

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}.$$

(10.13) $a \,.\, \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ pro každé reálné číslo a.

Důkaz. Zvolme libovolně vektor $\boldsymbol{u}$. Potom podle (10.3), (10.6) a (10.3) jest

$$a \,.\, \boldsymbol{o} = a \,.\, (0 \,.\, \boldsymbol{u}) = (a \,.\, 0) \,.\, \boldsymbol{u} = 0 \,.\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}.$$

(10.14). Je-li $a\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, je buďto $a = 0$ nebo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$.

Důkaz. Je-li $a \neq 0$, je podle (10.7), (10.6) a (10.13)

$$\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)\mathbf{u} = \frac{1}{a}(a\mathbf{u}) = \frac{1}{a} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}.$$

(10.15) Je-li $a\mathbf{u} = a\mathbf{v}$, je buďto $a = 0$ nebo $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Důkaz. Podle (10.9) a (10.4) jest

$$\mathbf{o} = a\mathbf{u} - a\mathbf{v} = a(\mathbf{u} - \mathbf{v}),$$

takže podle (10.14) je buďto $a = 0$ nebo $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{o}$. Ve druhém případě $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ podle (10.12).

(10.16). Je-li $a\mathbf{u} = b\mathbf{u}$, je buďto $a = b$ nebo $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Důkaz. Podle (10.9) a (10.5) je

$$\mathbf{o} = a\mathbf{u} - b\mathbf{u} = (a - b)\,\mathbf{u},$$

takže podle (10.14) je buďto $a - b = 0$, t. j. $a = b$, nebo $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

(10.17). Součet libovolného počtu vektorů můžeme definovat rekurentně:

$$\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}) + \mathbf{u}_{n+1}.$$

Potom z (10.1) a (10.2) se odvodí jednak obecný zákon komutativní (součet libovolného počtu vektorů je nezávislý na pořádku sčítanců), jednak obecný zákon asociativní (součet libovolného počtu vektorů můžeme počítati tak, že rozdělíme sčítance na skupiny, utvoříme částečné součty jednotlivých skupin a tyto částečné součty sečteme; je-li v některé skupině jen jeden sčítanec, je příslušný částečný součet roven tomuto sčítanci).

•(10.18). Z (10.4) a (10.5) se odvodí indukcí:

$$a(\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_k) = a\mathbf{u}_1 + \ldots + a\mathbf{u}_k,$$
$$(a_1 + \ldots + a_k)\,\mathbf{u} = a_1\mathbf{u} + \ldots + a_k\mathbf{u}.$$

Kombinováním těchto dvou pravidel dospějeme k obecnému distributivnímu zákonu: Součet libovolného počtu čísel znásobíme součtem libovolného počtu vektorů, jestliže každé dané číslo znásobíme každým daným vektorem a všecky tyto součiny sečteme.

11. LINEÁRNÍ ZÁVISLOST VEKTORŮ. Budiž nyní dán libovolný vektorový prostor $\mathbf{V}$. Může se stát, že celý prostor $\mathbf{V}$ se skládá z jediného vektoru $\mathbf{o}$; potom pravíme, že $\mathbf{V}$ je *triviální*. V následujícím však předpokládáme, že $\mathbf{V}$ je netriviální. Potom $\mathbf{V}$ obsahuje nekonečně mnoho vektorů, neboť je-li $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ a probíhá-li x všecka reálná čísla, jsou všecky vektory $x\mathbf{u}$ navzájem různé podle (10.16).

Je-li $\mathbf{W}$ část vektorového prostoru $\mathbf{V}$, pravíme, že $\mathbf{W}$ je *lineární soustava*, jestliže jsou splněny dvě vlastnosti:

(a) jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dva vektory náležející do $\mathbf{W}$, potom také vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ náleží do $\mathbf{W}$;

(b) jestliže vektor $\mathbf{u}$ náleží do $\mathbf{W}$, potom pro každé reálné číslo x platí, že také vektor $x\mathbf{u}$ náleží do $\mathbf{W}$; z toho plyne podle (10.3), že *vektor* $\mathbf{o}$ *náleží do každé lineární soustavy* $\mathbf{W}$.

Zřejmě *vektor* $\mathbf{o}$ *sám o sobě tvoří lineární soustavu, kterou nazveme triviální*; *každá netriviální lineární soustava obsahuje nekonečně mnoho vektorů.*

Je-li $\mathbf{W}$ libovolná lineární soustava, je zřejmé, že vlastnosti (10.1) až (10.7) zůstanou zachovány, jestliže se omezíme na vektory náležející do $\mathbf{W}$. To znamená, že *lineární soustava* $\mathbf{W}$ *vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *sama o sobě tvoří vektorový prostor.* Z tohoto důvodu nazýváme lineární soustavu také *vektorovým podprostorem vektorového prostoru* $\mathbf{V}$.

Budiž nyní dán konečný počet vektorů

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k. \tag{11.1}$$

Nazveme *lineární kombinací vektorů* (11.1) každý vektor tvaru

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k; \tag{11.2}$$

reálná čísla $a_1, \ldots, a_k$ jsou *koeficienty lineární kombinace* (11.2). Jsou-li všecky koeficienty v (11.2) rovny nule, máme *triviální lineární kombinaci*, která je rovna $\mathbf{o}$. Výrok, že *vektor* $\mathbf{v}$ *je lineárně závislý na vektorech* (11.1), znamená totéž jako výrok, že $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů (11.1).

Podle (10.17) a (10.5) jest

$$\begin{aligned}(a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k) + (b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_k\mathbf{u}_k) = \\ = (a_1 + b_1)\,\mathbf{u}_1 + \ldots + (a_k + b_k)\,\mathbf{u}_k;\end{aligned}$$

podle (10.18) a (10.6) jest

$$x(a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k) = xa_1 \,.\, \mathbf{u}_1 + \ldots + xa_k \,.\, \mathbf{u}_k.$$

Z toho plyne, že *množina všech lineárních kombinací vektorů* (11.1) *je lineární soustava*, kterou označíme

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}. \tag{11.3}$$

Jestliže při určitém $r(1 \leqq r \leqq k)$ v (11.2) volíme $a_r = 1$ a všecky ostatní koeficienty rovny nule, potom lineární kombinace (11.2) bude rovná vektoru $\mathbf{u}_r$. Tudíž *lineární soustava* (11.3) *obsahuje* mimo jiné *všecky vektory* (11.1). Je patrné, že *lineární soustava* (11.3) *je triviální tehdy a jenom tehdy, jestliže všecky vektory* (11.1) *jsou rovny* $\mathbf{o}$.

O lineární soustavě (11.3) pravíme, že je *vytvořena konečným počtem vektorů* (11.1). V následujícím má základní důležitost ten případ, že celý vektorový prostor $\mathbf{V}$ je vytvořen konečným počtem vektorů; je-li tomu tak, potom uvidíme, že platí totéž o každé lineární soustavě vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Zatím však ještě nečiníme tento předpoklad.

Pravíme, že vektory (11.1) jsou *mezi sebou lineárně závislé*, jestliže některá jejich netriviální lineární kombinace je rovna $\mathbf{o}$, t. j. existují-li reálná čísla $c_1, \ldots, c_k$ tak, že nejsou vesměs rovna nule a že

$$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}; \tag{11.4}$$

v opačném případě pravíme, že vektory (10.1) jsou *mezi sebou lineárně nezávislé*. Tedy vektory (11.1) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, jestliže z platnosti vztahu (11.4) plyne, že všecky koeficienty $c_1, \ldots, c_k$ jsou rovny nule.

Všimněme si toho případu, že v (11.1) je $k = 1$, t. j. že je dán jediný vektor $\mathbf{u}_1$. Podle (10.13) a (10.14) máme:

(11.5) „vektor $\mathbf{u}_1$ je mezi sebou lineárně závislý" znamená $\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$; „vektor $\mathbf{u}_1$ je mezi sebou lineárně nezávislý" znamená $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$.

Vraťme se k případu libovolného k v (11.1); možnost $k = 1$ není však nikterak vyloučena.

Věta 11.1. *Jsou-li vektory* (11.1) *mezi sebou lineárně nezávislé a náleží-li vektor* $\mathbf{v}$ *do* (11.3), *potom koeficienty v* (11.2) *jsou jednoznačně stanoveny.*

Důkaz. Je-li

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k, \quad \mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_k\mathbf{u}_k,$$

jest

$$\mathbf{o} = (b_1 - a_1)\,\mathbf{u}_1 + \ldots + (b_k - a_k)\,\mathbf{u}_k.$$

Ježto vektory (11.1) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, jest $b_1 - a_1 = 0, \ldots, b_k - a_k = 0$ neboli $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$.

VĚTA 11.2. *Jestliže mezi vektory* (11.1) *je aspoň jeden rovný* $\mathbf{o}$, *jsou tyto vektory mezi sebou lineárně závislé.*

DŮKAZ. Je-li $\mathbf{u}_r = \mathbf{o}$ $(1 \leqq r \leqq k)$, platí (11.4), volíme-li $c_r = 1$ a ostatní koeficienty rovny nule.

VĚTA 11.3. *Jestliže mezi vektory* (11.1) *se některý opakuje, jsou tyto vektory mezi sebou lineárně závislé.*

DŮKAZ. Je-li $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_s$ $(1 \leqq r < s \leqq k)$, platí (11.4), volíme-li $c_r = 1$, $c_s = -1$ a ostatní koeficienty rovny nule.

VĚTA 11.4. *Jsou-li vektory* (11.1) *mezi sebou lineárně nezávislé, jsou navzájem různé a všecky jsou různé od* $\mathbf{o}$.

To plyne z vět 11.2 a 11.3.

VĚTA 11.5. *Platí-li vztah* (11.4) *a je-li* $c_r \neq 0$ *pro určité* r $(1 \leqq r \leqq k)$, *potom pro* $k = 1$ *je* $\mathbf{u}_r = \mathbf{o}$, *pro* $k > 1$ *je vektor* $\mathbf{u}_r$ *lineárně závislý na ostatních vektorech* (11.1).

DŮKAZ pro $k = 1$ je obsažen v (11.5). Je-li $k > 1$, stačí provésti důkaz za předpokladu, že $r = k$. Potom v (11.4) je $c_k \neq 0$, a položíme-li

$$a_r = \frac{c_r}{c_k} \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq k - 1,$$

jest

$$a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_k = \mathbf{o},$$

tedy

$$\mathbf{u}_k = -a_1\mathbf{u}_1 - \ldots - a_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}.$$

12. BASE LINEÁRNÍCH SOUSTAV. Budiž dán netriviální vektorový prostor $\mathbf{V}$ a v něm netriviální lineární soustava $\mathbf{W}$ vytvořená konečně mnoha vektory

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \tag{12.1}$$

takže

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}. \tag{12.2}$$

V případě, že vektory (12.1) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, pravíme, že (12.1) je *base lineární soustavy* W. Pojem base je tedy definován pouze pro lineární netriviální soustavy vytvořitelné konečným počtem vektorů.

Ať již vektory (12.1) jsou či nejsou lineárně nezávislé, budiž

(12.3) $$v_1, \ldots, v_h$$

konečný počet vektorů náležejících do lineární soustavy W. Protože W je lineární soustava, náleží do W také každá lineární kombinace vektorů (12.3), t. j. platí:

VĚTA 12.1. *Jsou-li vektory* (12.3) *lineárně závislé na vektorech* (12.1), *potom lineární soustava*

(12.4) $$\{v_1, \ldots, v_h\}$$

je částí lineární soustavy (12.2).

Z toho plyne dále:

VĚTA 12.2. *Jestliže nejen vektory* (12.3) *jsou lineárně závislé na vektorech* (12.1), *nýbrž také obráceně vektory* (12.1) *jsou lineárně závislé na vektorech* (12.3), *potom splynou obě lineární soustavy* (12.2), (12.4).

Předpokládejme, že vektory (12.1), které vytvořují netriviální lineární soustavu (12.2), jsou mezi sebou lineárně závislé. Potom existuje vztah (11.4), ve kterém aspoň jeden koeficient c_r ($1 \leqq r \leqq k$) je různý od nuly. Ježto (12.2) je netriviální, plyne z věty 11.5, že je $k > 1$ a že vektor u_r je lineární kombinací vektorů

(12.5) $u_1, \ldots, u_k$ s vynecháním vektoru u_r.

Zřejmě potom každý z vektorů (12.1) je lineární kombinací vektorů (12.5) a obráceně, takže podle věty 12.2 lineární soustava (12.2) se dá vytvořit vektory (12.5). Tedy jestliže netriviální lineární soustava (12.2) je vytvořena mezi sebou lineárně závislými vektory (12.1), musí býti $k > 1$ a aspoň jeden z vektorů (12.1) musí býti lineární kombinací ostatních; škrtnutí takového vektoru nemá vlivu na lineární soustavu (12.2). Z toho plyne, že jsou-li vektory (12.1) mezi sebou lineárně závislé, je možné škrtnutím několika z nich dospěti k vektorům mezi sebou lineárně nezávislým vytvořujícím touž lineární soustavu (12.2). Z toho plyne dále:

VĚTA 12.3. *Každá netriviální lineární soustava* $\mathbf{W}$ *vytvořená konečně mnoha vektory má aspoň jednu basi.*

DŮKAZ. Jsou-li vektory (12.1) mezi sebou lineárně nezávislé, tvoří samy basi pro (12.2); v opačném případě podle předchozího vznikne škrtnutím některých z nich base pro (12.2).

Z (11.5) plyne:

VĚTA 12.4. *Libovolný vektor* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *vytvořuje netriviální lineární soustavu* $\{\mathbf{u}\}$ *a je basí této lineární soustavy.*

Dále platí:

VĚTA 12.5. *Je-li* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, *potom každý vektor* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ *náležející do* $\{\mathbf{u}\}$ *je basí pro* $\{\mathbf{u}\}$.

Neboť $\mathbf{v} = a\mathbf{u}$, $a \neq 0$, tedy $\mathbf{u} = \frac{1}{a}\mathbf{v}$, takže věta plyne z věty 12.2.

Lineární soustava $\{\mathbf{u}\}$ vytvořená jediným vektorem nemůže míti žádnou basi složenou z více než jednoho vektoru. K tomu cíli stačí dokázati, že je-li $k > 1$ a jestliže vektory (12.1) náležejí do $\{\mathbf{u}\}$, potom jsou (12.1) mezi sebou lineárně závislé. To plyne z věty 11.2, je-li $\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$. Je-li však $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{o}$, budiž $\mathbf{u}_1 = a_1\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2 = a_2\mathbf{u}$, tedy $a_1 \neq 0$. Potom jest

$$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o},$$

volíme-li $c_1 = a_2$, $c_2 = -a_1$ a všecky ostatní koeficienty rovny nule; při tom je $c_2 \neq 0$.

Jedním z hlavních úkolů tohoto článku je dokázat, že platí:

VĚTA 12.6. *Jestliže* (12.1) *je base lineární soustavy* $\mathbf{W}$, *potom každá base pro* $\mathbf{W}$ *se skládá z téhož počtu* k *vektorů*. V případě $k = 1$ jsme již důkaz právě provedli. Budiž tedy $k \geq 2$.

Důsledkem věty 12.2 jest, že každá z následujících změn vektorů (12.1) vede k nové basi lineární soustavy (12.2):

(a) změníme pořádek vektorů (12.1);

(b) jeden vektor $\mathbf{u}_r$ $(1 \leq r \leq k)$ nahradíme vektorem $a\mathbf{u}_r$, kde $a \neq 0$;

(c) jeden vektor $\mathbf{u}_r$ $(1 \leq r \leq k)$ nahradíme vektorem $\mathbf{u}_r + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w}$ je lineární kombinace ostatních vektorů (12.1).

Změny base tvaru (a), (b), (c) nazveme *elementární změny base.* V následujícím dokážeme m. j., že platí:

VĚTA 12.7. *Každá změna base netriviální lineární soustavy se dá rozložit na konečný počet elementárních změn.* Ve větě 12.7 je ovšem obsažena věta 12.6.

Abychom mohli dokázat větu 12.7, proveďme nejprve *přípravnou úvahu.* Budiž dán vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ náležející do lineární soustavy (12.2). Je tedy

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k,$$

při čemž aspoň jeden koeficient je různý od nuly; budiž $a_r \neq 0$ $(1 \leqq r \leqq k)$. Potom jest

$$\mathbf{v} = a_r\mathbf{u}_r + \mathbf{w},$$

kde $\mathbf{w}$ je lineární kombinace vektorů (12.5). Vyjděme od base (12.1) lineární soustavy (12.2) a proveďme nejprve elementární změnu typu (b), při které se vektor $\mathbf{u}_r$ nahradí vektorem $a_r\mathbf{u}_r$, potom elementární změnu typu (c), při které se vektor $a_r\mathbf{u}_r$ nahradí vektorem $\mathbf{v}$. Provedeme-li ještě vhodnou elementární změnu typu (a), dospějeme k basi tvaru

$$\mathbf{v}, \mathbf{u}_2', \ldots, \mathbf{u}_k',$$

kde vektory $\mathbf{u}_2', \ldots, \mathbf{u}_k'$ se liší pouze pořádkem od vektorů (12.5).

Nyní dokážeme, že platí:

VĚTA 12.8. *Budiž* (12.1) *base lineární soustavy* $\mathbf{W}$. *Buďtež*

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \tag{12.6}$$

mezi sebou lineárně nezávislé vektory náležející do $\mathbf{W}$ *v počtu* $s < k$. *Potom je možné pomocí konečného počtu elementárních změn přejít od base* (12.1) *k nové basi pro* $\mathbf{W}$ *tvaru:*

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s, \mathbf{u}_{s+1}', \ldots, \mathbf{u}_k', \tag{12.7}$$

kde vektory $\mathbf{u}_{s+1}', \ldots, \mathbf{u}_k'$ *jsou totožné s některými z vektorů* (12.1).

DŮKAZ. Pro $s = 1$ platí věta 12.8 podle přípravné úvahy. Obecný důkaz dokončíme indukcí, t. j. provedeme důkaz za předpokladu, že $s > 1$ a že je nám již známo, že lze pomocí konečného počtu elementárních změn přejít od base (12.1) k nové basi pro $\mathbf{W}$ tvaru

(12.8) $$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{s-1}, \mathbf{u}'_s, \ldots, \mathbf{u}'_k,$$

kde vektory $\mathbf{u}'_s, \ldots, \mathbf{u}'_k$ jsou totožné s některými z vektorů (12.1). Protože (12.8) je base lineární soustavy $\mathbf{W}$, do které náleží vektor $\mathbf{v}_s$, je tento vektor lineární kombinací vektorů (12.7):

$$\mathbf{v}_s = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{s-1}\mathbf{v}_{s-1} + b_s\mathbf{u}'_s + \ldots + b_k\mathbf{u}'_k.$$

Ježto vektory (12.6) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, není možné, aby všecky koeficienty $b_s, \ldots, b_k$ byly rovny nule a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládati, že $b_s \neq 0$. Potom je však možné podle přípravné úvahy několika elementárními změnami dospět od base (12.8) k nové basi, která se od (12.8) liší pouze tím, že vektor $\mathbf{u}'_s$ je nahrazen vektorem $\mathbf{v}_s$, t. j. k basi žádaného tvaru (12.7).

VĚTA 12.9. *Budiž $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ base lineární soustavy $\mathbf{W}$. Jestliže vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ v témž počtu k jsou mezi sebou lineárně nezávislé a náležejí do $\mathbf{W}$, potom $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ je base pro $\mathbf{W}$ a od base* (12.1) *lze přejít k této nové basi konečným počtem elementárních změn.*

DŮKAZ je velmi podobný důkazu věty 12.8. Podle této věty je možné konečným počtem elementárních změn dospět od base (12.1) k basi tvaru

(12.9) $$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}',$$

kde $\mathbf{u}'$ je jeden z vektorů (12.1). Protože vektor $\mathbf{v}_s$ náleží do $\mathbf{W}$ a protože (12.9) je base pro $\mathbf{W}$, máme relaci tvaru

$$\mathbf{v}_k = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + b\mathbf{u}'.$$

Ježto vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé, je nutně $b \neq 0$ a tudíž podle přípravné úvahy lze několika elementárními změnami dospět od base (12.9) k nové basi, která se liší od (12.9) pouze záměnou vektoru $\mathbf{u}'$ za vektor $\mathbf{v}_k$, t. j. k basi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.

DŮKAZ věty 12.6. Máme dokázat, že není možné, aby jedna a táž lineární soustava $\mathbf{W}$ měla dvě base o nestejném počtu vektorů. Předpokládejme naopak, že $\mathbf{W}$ má jednak basi (12.1) složenou z k vektorů, jednak basi (12.6) složenou z $s < k$ vektorů. Potom jsou vektory (12.6) v počtu $s < k$ mezi sebou lineárně nezávislé a náležejí do lineární soustavy $\mathbf{W}$ s basí (12.1), takže podle věty 12.8 má $\mathbf{W}$ také basi tvaru

(12.7). Vektor u'_k náleží do W a W má basi (12.6); proto je u'_k lineární kombinací vektorů (12.6), což je nemožné, neboť vektory (12.7) musí býti mezi sebou lineárně nezávislé.

Věta 12.7 zřejmě plyne z vět 12.6 a 12.9. Dokážeme ještě, že platí:

VĚTA 12.10. *Budiž $u_1, \ldots, u_k$ base lineární soustavy W. Jestliže vektory* (12.6) *v počtu $s > k$ náležejí do W, potom vektory* (12.6) *jsou mezi sebou lineárně závislé.*

DŮKAZ. Předpokládejme naopak, že vektory (12.6) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Potom totéž platí i o vektorech $v_1, \ldots, v_k$, které tudíž podle věty 12.9 tvoří basi pro W. Ježto vektor v_s náleží do W, jest

$$v_s = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k,$$

což je spor proti předpokládané lineární nezávislosti vektorů (12.6).

13. POJEM DIMENSE. Budiž opět dán netriviální vektorový prostor V a v něm netriviální lineární soustava W vytvořená konečným počtem vektorů. V článku 12 jsme poznali, že W má basi a že všecky base soustavy W jsou složeny z téhož konečného počtu k vektorů; číslo k nazveme *dimensí lineární soustavy* W. Doplníme tuto definici jednak tím, že dimensí triviální lineární soustavy $\{o\}$ rozumíme číslo 0 a že o lineární soustavě, která se nedá vytvořiti konečně mnoha vektory, pravíme, že má nekonečně velkou dimensi.

VĚTA 13.1. *Budiž W netriviální lineární soustava konečné dimense k a buďtež*

$$v_1, \ldots, v_s \tag{13.1}$$

mezi sebou lineárně nezávislé vektory náležející do W. Potom jest $s \leqq k$. Je-li $s = k$, tvoří vektory (13.1) *basi pro W. Je-li $s < k$, je možné připojit k vektorům* (13.1) *dalších $k - s$ vektorů tak, že vznikne base pro W.*

DŮKAZ. První tvrzení plyne z věty 12.10, druhé z věty 12.9, třetí z věty 12.8.

VĚTA 13.2. *Jestliže lineární soustava W^* je částí lineární soustavy W která má konečnou dimensi k, potom také W^* má konečnou dimensi s. Při tom je $s \leqq k$ a rovnost nastane pouze, jestliže $W^* = W$.*

DůKAZ. Věta je zřejmá, je-li W^* triviální. Není-li W^* triviální, potom ani W není triviální. Ve W^* existuje vektor $v \neq o$, který podle (11.5) je mezi sebou lineárně nezávislý. Ježto však W^* je částí W, nelze ve W^* udat více než k mezi sebou lineárně nezávislých vektorů. Tedy existuje takové číslo $s \geqq 1$, $s \leqq k$, že ve W^* lze udat s mezi sebou lineárně nezávislých vektorů (13.1), že však ve W^* nelze udat více než s mezi sebou lineárně nezávislých vektorů. Ukážeme, že vektory (13.1) tvoří basi pro W^*. Ježto vektory (13.1) náležejí do W^* a jsou mezi sebou lineárně nezávislé, stačí ukázati, že každý vektor náležející do W^* je lineární kombinací vektorů (13.1). Budiž tedy w libovolný vektor ze W^*. Ježto vektory $v_1, \ldots, v_s, w$ v počtu větším než s náležejí do W^*, jsou mezi sebou lineárně závislé a máme netriviální relaci tvaru

$$a_1 v_1 + \ldots + a_s v_s + bw = o. \tag{13.2}$$

Kdyby bylo $b = 0$, byla by (13.2) netriviální relace mezi vektory (13.1), což je nemožné. Tedy $b \neq 0$ a podle věty 11.5 je vektor w lineární kombinací vektorů (13.1). Tím je ukázáno, že vektory (13.1) tvoří basi pro W^*. Je-li $s = k$, potom podle věty 13.1 tvoří tytéž vektory basi pro W, takže v tomto případě je $W^* = W$.

Zvláštním případem lineární soustavy je celý daný vektorový prostor V. Proto je v předcházejícím obsažena definice dimense vektorového prostoru. Označíme V_k vektorový prostor s konečnou dimensí k; V_0 bude tedy triviální vektorový prostor. Podle věty 13.2 mají lineární soustavy obsažené ve V_k vesměs konečnou dimensi, která pro celý prostor V_k je rovna k, ale pro každou jinou lineární soustavu je menší než k.

Důležitým příkladem vektorového prostoru V_k je *aritmetický* V_k; tento název dáme množině všech uspořádaných skupin k reálných čísel

$$(u_1, \ldots, u_k); \tag{13.1}$$

takové skupiny jsou vektory aritmetického V_k (*aritmetické vektory*). Sčítání aritmetických vektorů a součin reálného čísla s aritmetickým vektorem jsou definovány takto:

$$(u_1, \ldots, u_k) + (v_1, \ldots, v_k) = (u_1 + v_1, \ldots, u_k + v_k),$$
$$a(u_1, \ldots, u_k) = (au_1, \ldots, au_k).$$

Čísla $u_1, \ldots, u_k$ nazveme *souřadnicemi* aritmetického vektoru (13.3). Pro aritmetické vektory jsou zřejmě splněna základní pravidla (10.1) až (10.7), při čemž nulový vektor $\mathbf{o}$ má všecky souřadnice rovny nule.

Pro $1 \leqq r \leqq k$ označme $\mathbf{e}_r$ aritmetický vektor, jehož r-tá souřadnice je rovna 1 a všecky ostatní souřadnice jsou rovny nule. Zřejmě

$$(u_1, \ldots, u_k) = u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_k\mathbf{e}_k$$

a zejména

$$u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_k\mathbf{e}_k = \mathbf{o}$$

pouze tehdy, jestliže $u_1 = \ldots = u_k = 0$. Z toho plyne, že vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ tvoří basi aritmetického $\mathbf{V}_k$, který tedy je vskutku vektorovým prostorem dimense k.

14. ISOMORFISMUS VEKTOROVÝCH PROSTORŮ. V článku 5 jsme definovali pojem vektoru eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ jako pojem vzniklý abstrakcí z pojmu dvojice bodů. Později zavedeme jiné geometrické objekty, kterým rovněž dáme jméno vektory. Abychom různé druhy vektorů mohli studovat současně, zavedli jsme v článku 10 obecný pojem vektorového prostoru; tento název jsme se rozhodli dát množině jakýchkoli matematických objektů, zvaných vektory, jestliže je v této množině definováno sčítání vektorů a násobení vektoru číslem tak, aby platila početní pravidla (10.1) až (10.7) a tedy také jejich důsledky, z nichž mnohé jsme již odvodili a kterých užijeme ke studiu eukleidovských prostorů.

Mnohdy je důležité zdůraznit, že při studiu vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nezáleží na tom, jakými matematickými objekty jsou vektory náležející do $\mathbf{V}$. To se děje pomocí pojmu *isomorfismu*, který si nyní vysvětlíme. Buďtež dány dva vektorové prostory $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ a předpokládejme, že je dán vztah, který každému vektoru $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{V}$ přiřazuje zcela určitý vektor prostoru $\mathbf{V}'$, který nazveme *obrazem* vektoru $\mathbf{u}$ a označíme čárkou, tedy $\mathbf{u}'$. Při tom předpokládejme, že běží o vztah *vzájemně jednoznačný*, t. j. že každý vektor prostoru $\mathbf{V}'$ jest obrazem právě jednoho vektoru prostoru $\mathbf{V}$. Mimo to předpokládejme ještě dvě věci:

(a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$, t. j. obraz součtu $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ dvou libovolných vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{V}$ je součtem obrazů vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$;

(b) $(a\mathbf{u})' = a\mathbf{u}'$, t. j. je-li a libovolné reálné číslo a je-li $\mathbf{u}$ libovolný vektor prostoru $\mathbf{V}$, potom obraz součinu $a\mathbf{u}$ je roven součinu čísla a s obrazem vektoru $\mathbf{u}$.

Vzájemně jednoznačný vztah mezi vektorovými prostory $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$, který má vlastnosti (a), (b), jmenuje se *isomorfismus*; existuje-li takový isomorfismus, pravíme, že vektorové prostory $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ jsou navzájem *isomorfní*. Je patrné, že dva isomorfní vektorové prostory $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$ mají společné všecky ty vlastnosti, které se dají odvodit ze základních vlastností (10.1) až (10.7), t. j. všecky takové vlastnosti, které jsou nezávislé na povaze jednotlivých objektů zvaných vektory a jsou závislé pouze na vlastnostech součtu vektorů a součinu čísla s vektorem. Poznamenejme, že *obraz* $\mathbf{o}'$ *nulového vektoru* $\mathbf{o}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *je nulovým vektorem prostoru* $\mathbf{V}'$. Neboť zvolíme-li libovolně vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{V}$, jest $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$ podle (10.8), takže $\mathbf{u}' + \mathbf{o}' = \mathbf{u}'$ podle vlastnosti (a) isomorfismu, t. j. v prostoru $\mathbf{V}'$ má rovnice $\mathbf{u}' + \mathbf{x} = \mathbf{u}'$ řešení $\mathbf{x} = \mathbf{o}'$ a toto řešení je podle (10.11) jediné, takže $\mathbf{o}'$ je nulový vektor prostoru $\mathbf{V}'$ podle (10.8).

Mezi vlastnostmi společnými všem navzájem isomorfním vektorovým prostorům si všimněme zejména pojmu dimense definovaného v článku 13. *Jestliže vektorový prostor* $\mathbf{V}_k$ *má konečnou dimensi* k, *potom také každý s* $\mathbf{V}_k$ *isomorfní prostor* $\mathbf{V}'$ *má touž dimensi* k. To je zřejmé, je-li $\mathbf{V}_k$ triviální, neboť potom také $\mathbf{V}'$ je triviální. Jestliže $\mathbf{V}_k$ není triviální, potom existuje pro $\mathbf{V}_k$ base $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ složená z k vektorů. Libovolný vektor $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{V}_k$ má tvar $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k$ a jeho obraz má tedy tvar $\mathbf{v}' = a_1\mathbf{u}_1' + \ldots + a_k\mathbf{u}_k'$, takže $\mathbf{V}' = \{\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_k'\}$. Jestliže $c_1\mathbf{u}_1' + \ldots + c_k\mathbf{u}_k' = \mathbf{o}'$, tu ježto

$$c_1\mathbf{u}_1' + \ldots + c_k\mathbf{u}_k' = (c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k)'$$

a ježto $\mathbf{o}'$ jest obrazem $\mathbf{o}$ a žádného jiného vektoru z $\mathbf{V}_k$, jest $c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, tedy $c_1 = \ldots = c_k = 0$, takže vektory $\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_k'$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Ježto $\mathbf{V}' = \{\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_k'\}$, je tím dokázáno, že $\mathbf{V}'$ má dimensi k.

Obráceně budiž $\mathbf{V}_k$ netriviální vektorový prostor dimense k a budiž $\mathbf{W}_k$ aritmetický vektorový prostor téže dimense. Zvolme basi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru $\mathbf{V}_k$. Podle věty (11.1) lze každý vektor $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{V}_k$ právě jedním způsobem napsati ve tvaru

$$(14.1) \qquad \mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k.$$

Jestliže vektoru (14.1) přiřadíme aritmetický vektor $(a_1, \ldots, a_k)$, dospějeme zřejmě k isomorfismu mezi $\mathbf{V}_k$ a $\mathbf{W}_k$. Obecněji *jsou dva vektorové prostory $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}'_k$ téže konečné dimense k mezi sebou isomorfní.* Je-li opět $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ libovolně zvolená base prostoru $\mathbf{V}_k$ a je-li $\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_k$ libovolně zvolená base prostoru $\mathbf{V}'_k$, dostaneme isomorfismus mezi $\mathbf{V}_k$ a $\mathbf{V}'_k$, jestliže vektoru (14.1) přiřadíme vektor

$$\mathbf{v}' = a_1\mathbf{u}'_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}'_k.$$

Ježto basí je nekonečně mnoho, je také isomorfismů mezi $\mathbf{V}_k$ a $\mathbf{V}'_k$ nekonečně mnoho.

15. ORTHONORMÁLNÍ VEKTORY. V článcích 10—14 jsme se zabývali vektory libovolného vektorového prostoru $\mathbf{V}$, pro které je sice definován součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a součin $a\mathbf{u}$, nemusí však býti definován skalární součin $\mathbf{uv}$. V tomto článku předpokládáme, že běží o vektory eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ definované v článku 5. Pro takové vektory má velký význam pojem skalárního součinu zavedený v článku 7.

Dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nazveme *orthogonální*, jestliže $\mathbf{uv} = 0$. Slovo orthogonální je řeckého původu a znamená kolmý; o souvislosti zde zavedeného pojmu orthogonality s geometrickým pojmem kolmosti přímek bude řeč později v článku 31. Podle (7.5) dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou jistě orthogonální, je-li aspoň jeden z nich roven $\mathbf{o}$. V případě $m = 1$ dva vektory $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ nemohou býti orthogonální; to však není pravda pro $m \geqq 2$.

Na pojem skalárního součinu byl převeden pojem velikosti vektoru vzorcem (7.6), který znovu přepišme ve tvaru

$$(15.1) \qquad |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{uu}}.$$

Nulový vektor $\mathbf{o}$ je podle (7.5) orthogonální ke *každému* vektoru $\mathbf{u}$. Tuto vlastnost má *pouze* nulový vektor, neboť pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ je $|\mathbf{u}| > 0$, tedy $\mathbf{uu} > 0$, t. j. vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ nemůže býti sám k sobě orthogonální.

Pravíme, že vektory

$$(15.2) \qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$$

jsou *orthonormální*, jestliže předně $|\mathbf{u}_r| = 1$ pro $1 \leqq r \leqq k$ a za druhé $\mathbf{u}_r\mathbf{u}_s = 0$ pro $1 \leqq r < s \leqq k$. Je-li $k = 1$, potom orthonormalita znamená pouze, že $|\mathbf{u}_1| = 1$.

VĚTA 15.1. *Jsou-li vektory* (15.2) *orthonormální, jsou mezi sebou lineárně nezávislé.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že

$$c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o} \tag{15.3}$$

a zvolme index r $(1 \leqq r \leqq k)$; máme dokázati, že $c_r = 0$. Uvážíme-li, že vektor $\mathbf{u}_r$ je orthogonální ke všem vektorům (15.2) mimo sebe sama, dostaneme ze (7.4) a (8.9)

$$(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_r = c_r\mathbf{u}_r\mathbf{u}_r,$$

takže podle (7.5), (15.1) a (15.3) $c_r|\mathbf{u}_r|^2 = 0$. Ježto $|\mathbf{u}_r| = 1$, je $c_r = 0$.

VĚTA 15.2. *Každá netriviální lineární soustava* $\mathbf{W}$ *vytvořená konečně mnoha vektory má orthonormální basi.*

DŮKAZ. Podle věty 12.3 má $\mathbf{W}$ aspoň jednu basi

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k. \tag{15.4}$$

Stačí dokázati, že lze udat orthonormální vektory

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \tag{15.5}$$

v počtu k náležející do $\mathbf{W}$, neboť potom vektory (15.5) jsou mezi sebou lineárně nezávislé podle věty 15.1, takže tvoří basi pro $\mathbf{W}$ podle věty 12.9.

Pro $k = 1$ je věc zřejmá, neboť jediný daný vektor $\mathbf{u}_1$ je $\neq \mathbf{o}$ podle (11.5), takže $|\mathbf{u}_1| > 0$ a stačí položit.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{|\mathbf{u}_1|} \cdot \mathbf{u}_1.$$

Obecný důkaz dokončíme indukcí, t. j. předpokládáme, že při určitém k je věc dokázána a rozšíříme platnost důkazu na $k + 1$. Buďtež tedy dány mezi sebou lineárně nezávislé vektory

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}, \tag{15.6}$$

takže také vektory (15.4) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Dále již buďtež nalezeny orthonormální vektory (15.5), které jsou lineárními kombinacemi vektorů (15.4). Máme určit vektor $\mathbf{v}_{k+1}$ lineárně závislý na vektorech (15.6) tak, aby vektory

$$(15.7) \qquad \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$$

byly orthonormální. Ježto vektory (15.5) jsou podle věty 15.1 mezi sebou lineárně nezávislé a jsou lineárními kombinacemi vektorů (15.4), podle věty 12.9 jest

$$(15.8) \qquad \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Položme nyní

$$(15.9) \qquad \mathbf{v}_1\mathbf{u}_{k+1} = a_1, \ldots, \mathbf{v}_k\mathbf{u}_{k+1} = a_k,$$

$$(15.10) \qquad \mathbf{w} = \mathbf{u}_{k+1} - (a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k).$$

Podle (15.8) je vektor $\mathbf{w}$ lineárně závislý na vektorech (15.6); mimo to je $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$, neboť jinak by $\mathbf{u}_{k+1}$ náležel do (15.8), což je nemožné, ježto vektory (15.6) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Ježto vektory (15.5) jsou orthonormální, spočteme snadno z (15.9) a (15.10), že

$$\mathbf{v}_1\mathbf{w} = 0, \ldots, \mathbf{v}_k\mathbf{w} = 0.$$

Ježto $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$, můžeme položit

$$\mathbf{v}_{k+1} = \frac{1}{|\mathbf{w}|} \cdot \mathbf{w},$$

při čemž také $\mathbf{v}_{k+1}$ je lineární kombinací vektorů (15.6) a jest

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_{k+1} = 0, \ldots, \mathbf{v}_k\mathbf{v}_{k+1} = 0, \ |\mathbf{v}_{k+1}| = 1.$$

Ježto vektory (15.5) jsou orthonormální, platí totéž o vektorech (15.7).

Z právě provedeného důkazu je patrné, že jestliže orthonormální vektory (15.5) náležejí do lineární soustavy $\mathbf{W}$, potom buďto vektory (15.5) tvoří basi pro $\mathbf{W}$ nebo lze ve $\mathbf{W}$ nalézti další vektor $\mathbf{v}_{k+1}$ tak, že také vektory (15.7) jsou orthonormální. Z toho plyne dále:

VĚTA 15.3. *Jestliže lineární soustava* $\mathbf{W}$ *se dá vytvořit konečně mnoha vektory a jestliže jsou dány orthonormální vektory* (15.5) *náležející do* $\mathbf{W}$, *potom buďto vektory* (15.5) *samy tvoří basi pro* $\mathbf{W}$, *nebo k nim lze připojiti další vektory v konečném počtu tak, aby vznikla orthonormální base pro* $\mathbf{W}$.

16. KARTÉZSKÉ A LINEÁRNÍ SOUŘADNICE v $\mathbf{E}_m$. Vektory eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$, definované v článku 5, tvoří vektorový prostor $\mathbf{V}$, který budeme nazývat *zaměřením* prostoru $\mathbf{E}_m$. Zaveďme v $\mathbf{E}_m$ určitou kartézskou soustavu souřadnic s počátkem P. Pro $1 \leq r \leq m$ označme $\mathbf{e}_r$ vektor, jehož r-tá souřadnice je rovna 1, kdežto všecky ostatní souřadnice vektoru $\mathbf{e}_r$ jsou rovny nule. Vektory

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \tag{16.1}$$

nazveme *základními vektory* zvolené kartézské soustavy souřadnic.

Je-li

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$$

libovolný vektor, je zřejmě

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_m\mathbf{e}_m. \tag{16.2}$$

Z toho plyne snadno, že vektory (16.1) tvoří *basi prostoru* $\mathbf{E}_m$, což znamená ovšem, že tvoří basi pro zaměření $\mathbf{V}$. Tudíž $\mathbf{V}$ má dimensi m a proto zaměření $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ budeme zpravidla značit určitěji $\mathbf{V}_m$; dimensi m zaměření $\mathbf{V}_m$ nazýváme také *dimensí prostoru* $\mathbf{E}_m$.

Pro každý bod

$$X = [x_1, \ldots, x_m]$$

prostoru $\mathbf{E}_m$ platí zřejmě

$$X = P + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}_m; \tag{16.3}$$

z toho plyne, že zvolená kartézská soustava souřadnic je jednoznačně určena, známe-li její počátek P a její základní vektory (16.1). O těchto vektorech je patrné z definice, že jsou *orthonormální*; mimo to jsme si už všimli, že tvoří basi pro $\mathbf{E}_m$.

Obráceně zvolme v prostoru $\mathbf{E}_m$ libovolně bod P a orthonormální vektory (16.1) v počtu m, které podle věty 15.1 jsou mezi sebou lineárně nezávislé a tudíž podle věty 13.1 tvoří basi pro $\mathbf{E}_m$, t. j. tvoří basi vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$. Každý vektor našeho prostoru je lineární kombinací vektorů (16.1) a koeficienty této lineární kombinace jsou podle věty 11.1 jednoznačně určeny. Jelikož ke každému bodu X prostoru $\mathbf{E}_m$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{u}$ tak, že platí $X = P + \mathbf{u}$, je možné každému bodu X prostoru $\mathbf{E}_m$ jednoznačně přiřadit reálná čísla

$$x_1, \ldots, x_m \tag{16.4}$$

tak, že platí (16.3). Obráceně libovolně zvolená reálná čísla (16.4) určují podle (16.3) jednoznačně bod X prostoru E_m. Je-li

$$Y = P + y_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + y_m \mathbf{e}_m$$

druhý bod prostoru E_m, jest

$$Y - X = (y_1 - x_1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (y_m - x_m)\,\mathbf{e}_m.$$

a z orthonormality vektorů (16.1) plyne, že

$$(Y - X)(Y - X) = (y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2,$$

takže podle (15.1)

$$\overline{XY} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2}.$$

Dospěli jsme tudíž ke *kartézské soustavě souřadnic* v E_m a je snadno patrné, že P je její počátek a že (16.1) jsou její základní vektory. Tuto kartézskou soustavu souřadnic označme

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle. \tag{16.5}$$

Obecněji zvolme v prostoru E_m mezi sebou lineárně nezávislé vektory (16.1), u kterých však nyní nepředpokládáme orthonormalitu. Opět vektory (16.1) tvoří basi pro E_m, t. j. basi pro V_m, a proto zvolíme-li ještě libovolně určitý bod P, je možné každému bodu X prostoru E_m jednoznačně přiřadit čísla (16.4) tak, že platí (16.3), a obráceně libovolně zvolená čísla (16.4) určují podle (16.3) jednoznačně bod X prostoru E_m. Čísla (16.4) nazveme *souřadnicemi* bodu (16.3) a píšeme

$$X = [x_1, \ldots, x_m].$$

Takto zavedené souřadnice nemusí býti kartézské; pravíme, že jsme v E_m zavedli *lineární soustavu souřadnic*. Bod P je *počátek* soustavy; jeho souřadnice jsou vesměs rovny nule. Zároveň se souřadnicemi bodu zavádíme také souřadnice vektoru pomocí (16.2) a píšeme

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m).$$

Vektory (16.1) opět nazveme *základními vektory* zavedené lineární soustavy souřadnic, pro kterou zavedeme značku (16.5).

V takto definované lineární soustavě souřadnic platí známý vzorec

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, \ldots)$$

pro součet dvou vektorů i vzorec

$$au = (au_1, \bullet)$$

pro součin reálného čísla a s vektorem $\mathbf{u}$. Naproti tomu vzorec (7.2) pro skalární součin, vzorec (6.0) pro velikost vektoru a vzorec (3.2) pro vzdálenost dvou bodů platí pouze pro *kartézské* soustavy souřadnic.

17. TRANSFORMACE SOUŘADNIC. V prostoru $\mathbf{E}_m$ mějme dvě lineární soustavy souřadnic:

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle, \tag{17.1}$$

$$\langle P'; \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m \rangle. \tag{17.2}$$

Souřadnice libovolného bodu X v soustavě (17.1) buďtež $x_1, \ldots, x_m$, souřadnice téhož bodu v soustavě (17.2) buďtež $x'_1, \ldots, x'_m$. Je tedy

$$P + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}_m = P' + x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_m\mathbf{e}'_m. \tag{17.3}$$

Položme

$$P' = P + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m, \tag{17.4}$$

$$\mathbf{e}'_r = \alpha_{r1}\,\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_{rm}\,\mathbf{e}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m, \tag{17.5}$$

t. j. označme $a_1, \ldots, a_m$ souřadnice bodu P' v soustavě (17.1), $\alpha_{r1}, \ldots, \alpha_{rm}$ souřadnice vektoru $\mathbf{e}'_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$ v téže soustavě.

Podle (17.4) a (17.5) je při libovolné volbě čísel $x'_1, \ldots, x'_m$:

$$P' + x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_m\mathbf{e}'_m =$$

$$= P + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m + \sum_{r=1}^{m} x'_r\,(\alpha_{r1}\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_{rm}\mathbf{e}_m) =$$

$$= P + \sum_{s=1}^{m} (\alpha_{1s}x'_1 + \ldots + \alpha_{ms}x'_m + a_s)\,\mathbf{e}_s.$$

Porovnáme-li se (17.3), dostaneme vzorce

$$x_s = \alpha_{1s}x'_1 + \ldots + \alpha_{ms}x'_m + a_s \text{ pro } 1 \leqq s \leqq m, \tag{17.6}$$

které vyjadřují souřadnice $x_1, \ldots, x_m$ bodu X v soustavě (17.1) pomocí souřadnic $x'_1, \ldots, x'_m$ téhož bodu v soustavě (17.2). Poněkud jednodušší, ale zcela obdobný tvar mají vzorce, které vyjadřují souřadnice $u_1, \ldots, u_m$ vektoru $\mathbf{u}$ v soustavě (17.1) pomocí souřadnic $u'_1, \ldots, u'_m$ téhož vektoru v soustavě (17.2). Nyní jest

$$u_1\mathbf{e}_1 + \ldots + u_m\mathbf{e}_m = u'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + u'_m\mathbf{e}'_m$$

a pomocí (17.5) dostaneme

(17.7) $$u_s = \alpha_{1s}u'_1 + \ldots + \alpha_{ms}u'_m \text{ pro } 1 \leqq s \leqq m.$$

V (17.6) jsou prosté členy $a_1, \ldots, a_m$ souřadnicemi bodu P' v soustavě (17.1), jsou to tedy zcela libovolná reálná čísla. Naproti tomu jsou koeficienty

(17.8) $$\alpha_{1s}, \ldots, \alpha_{ms} \ (1 \leqq s \leqq m)$$

podrobeny té podmínce, že vektory $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé, platí-li totéž o vektorech $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$. Tato podmínka znamená, že vztah

$$c_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + c_m\mathbf{e}'_m = \mathbf{o}$$

je možný pouze pro $c_1 = \ldots = c_m = 0$. Dosadíme-li ze (17.5), dostaneme podmínku, že rovnice

$$\alpha_{1s}c_1 + \ldots + \alpha_{ms}c_m = 0 \ (1 \leqq s \leqq m)$$

s neznámými $c_1, \ldots, c_m$ mají pouze triviální řešení $c_1 = \ldots = c_m = 0$. Tuto podmínku lze, jak známo, napsat ve tvaru

(17.9) $$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1}, & \ldots, & \alpha_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dosud jsme mluvili o transformaci lineárních souřadnic. Ve zvláštním případě transformace *kartézských* souřadnic musí vektory

(17.10) $$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m,$$

jakož i vektory

(17.11) $$\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$$

býti orthonormální. Jsou-li však vektory (17.10) orthonormální, potom podle (17.5) je

$$|\mathbf{e}'_r|^2 = \alpha_{r1}^2 + \ldots + \alpha_{rm}^2 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,$$
$$\mathbf{e}'_r\mathbf{e}'_s = \alpha_{r1}\alpha_{s1} + \ldots + \alpha_{rm}\alpha_{sm} \text{ pro } 1 \leqq r < s \leqq m.$$

Tedy v případě transformace kartézských souřadnic jsou koeficienty (17.8) podrobeny podmínkám

$$(17.12)\qquad \begin{aligned} &\alpha_{r1}^2 + \ldots + \alpha_{rm}^2 = 1 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m, \\ &\alpha_{r1}\alpha_{s1} + \ldots + \alpha_{rm}\alpha_{sm} = 0 \text{ pro } 1 \leqq r < s \leqq m. \end{aligned}$$

Podmínka (17.9) je důsledkem podmínek (17.12), jak je patrné z věty 15.1.

Transformace souřadnic se užívá jednak k důkazům invariance, jednak ke zjednodušení rovnic. V této knize však provádíme zápisy výpočtů většinou ve tvaru nezávislém na volbě soustavy souřadnic a proto transformace souřadnic je pro nás v celku bezvýznamná.

Transformační vzorce jsou velmi jednoduché v prostoru $\boldsymbol{E}_1$ (na přímce). Pro transformaci lineárních souřadnic bodu na přímce máme vzorec

$$(17.13)\qquad x = \alpha x' + a,$$

kde α, a jsou reálná čísla podrobená pouze podmínce $\alpha \neq 0$. Pro transformaci kartézských souřadnic bodu na přímce máme vzorec

$$(17.14)\qquad x = \pm x' + a,$$

kde a je libovolné reálné číslo. Pro transformaci souřadnic vektorů na přímce máme vzorec

$$(17.15)\qquad u = \alpha u' \quad (\alpha \neq 0)$$

v případě lineárních souřadnic,

$$(17.16)\qquad u = \pm u'$$

v případě kartézských souřadnic.

III

PROSTORY VNOŘENÉ DO $\mathbf{E}_m$

18. LINEÁRNÍ PODPROSTORY EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Pravíme, že eukleidovský prostor $\mathbf{E}_k$ je *vnořen* do eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ nebo také, že $\mathbf{E}_k$ je *lineární podprostor* prostoru $\mathbf{E}_m$, jestliže každý bod prostoru $\mathbf{E}_k$ je zároveň bodem prostoru $\mathbf{E}_m$ a jestliže mimo to libovolné dva body prostoru $\mathbf{E}_k$ mají v tomto prostoru touž vzdálenost, jakou mají v prostoru $\mathbf{E}_m$. Vzhledem k této podmínce můžeme při daných bodech A, B prostoru $\mathbf{E}_k$ označit $\overline{AB}$ jejich vzdálenost: nezáleží na tom, míníme-li vzdálenost v $\mathbf{E}_k$ či vzdálenost v $\mathbf{E}_m$.

VĚTA 18.1. *Jsou-li A, B dva body prostoru $\mathbf{E}_k$ vnořeného do $\mathbf{E}_m$, potom střed C dvojice A, B v prostoru $\mathbf{E}_k$ je zároveň středem téže dvojice v prostoru $\mathbf{E}_m$.* To plyne z geometrické definice (4.3) středu C.

VĚTA 18.2. *Jsou-li*

$$A, B;\ A', B' \tag{18.1}$$

dvě dvojice bodů prostoru $\mathbf{E}_k$ vnořeného do $\mathbf{E}_m$, potom obě dvojice (18.1) *určují týž vektor prostoru $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, určují-li týž vektor prostoru $\mathbf{E}_m$.* Neboť v obou případech jest podmínkou, aby obě dvojice (5.6) měly týž střed, a to má podle věty 18.1 týž význam pro $\mathbf{E}_k$ jako pro $\mathbf{E}_m$.

Z věty 18.1 učiníme důležité důsledky. Plyne z ní, že zvolíme-li v $\mathbf{E}_k$ libovolně vektor $\mathbf{u}$, existuje v prostoru $\mathbf{E}_m$ jednoznačně určený vektor $f(\mathbf{u})$ tak, že každé umístění vektoru $\mathbf{u}$ v prostoru $\mathbf{E}_k$ je zároveň umístěním vektoru $f(\mathbf{u})$ v prostoru $\mathbf{E}_m$.

Učiníme proto velmi užitečnou dohodu, že budeme psáti prostě $\mathbf{u}$ místo $f(\mathbf{u})$, t. j. *každý vektor $\mathbf{u}$ vnořeného prostoru $\mathbf{E}_k$ považujeme zároveň za vektor prostoru $\mathbf{E}_m$.* Obráceně ovšem není pravda (ačli prostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}_m$ nesplynou), že by bylo možné každý vektor prostoru $\mathbf{E}_m$ považovat za vektor prostoru $\boldsymbol{E}_k$. O vektoru prostoru $\boldsymbol{E}_m$, který lze považovat za vektor prostoru $\boldsymbol{E}_k$, pravíme, že *leží v* $\boldsymbol{E}_k$. Jestliže u vektoru $\boldsymbol{u}$ prostoru $\boldsymbol{E}_m$ známe jedno umístění, při kterém i počáteční i koncový bod leží v $\boldsymbol{E}_k$, už můžeme tvrdit, že $\boldsymbol{u}$ leží v $\boldsymbol{E}_k$; při každém takovém umístění vektoru $\boldsymbol{u}$ (ležícího v $\boldsymbol{E}_k$) v prostoru $\boldsymbol{E}_m$, při kterém počáteční bod leží v $\boldsymbol{E}_k$, musí také koncový bod ležet v $\boldsymbol{E}_k$. Vedle takových *umístění v prostoru* $\boldsymbol{E}_k$ má ovšem vektor $\boldsymbol{u}$ (opět ačli $\boldsymbol{E}_k$, $\boldsymbol{E}_m$ nesplynou), v prostoru $\boldsymbol{E}_m$ ještě další umístění, při kterých ani počáteční ani koncový bod neleží v $\boldsymbol{E}_k$.

Z geometrických definic článku 6 plyne nyní, že nulový vektor prostoru $\boldsymbol{E}_k$ je zároveň nulovým vektorem prostoru $\boldsymbol{E}_m$, dále, že pro každý v $\boldsymbol{E}_k$ ležící vektor $\boldsymbol{u}$ má pojem opačného vektoru $-\boldsymbol{u}$ týž význam v prostoru $\boldsymbol{E}_k$ jako v prostoru $\boldsymbol{E}_m$ a že totéž platí o velikosti $|\boldsymbol{u}|$, posléze, že jestliže oba vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ leží v $\boldsymbol{E}_k$, má součet $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ týž význam v $\boldsymbol{E}_k$ jako v $\boldsymbol{E}_m$. Ze (7.7′) plyne nyní, že jestliže oba vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ leží v $\boldsymbol{E}_k$, má skalární součin $\boldsymbol{uv}$ týž význam v prostoru $\boldsymbol{E}_k$ jako v prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Posléze z geometrické definice součinu $a\boldsymbol{u}$ vyslovené ke konci článku 8 vyplývá, že leží-li $\boldsymbol{u}$ v $\boldsymbol{E}_k$, potom pro každé reálné číslo a má součin $a\boldsymbol{u}$ týž význam v $\boldsymbol{E}_k$ jako v $\boldsymbol{E}_m$. V těchto výsledcích je zahrnuto:

VĚTA 18.3. *Je-li $\boldsymbol{E}_k$ vnořen do $\boldsymbol{E}_m$, potom zaměření $\boldsymbol{V}_k$ prostoru $\boldsymbol{E}_k$ je lineární soustava obsažená v zaměření $\boldsymbol{V}_m$ prostoru $\boldsymbol{E}_m$.*

VĚTA 18.4. *Je-li $\boldsymbol{E}_k$ vnořen do $\boldsymbol{E}_m$, jest $k \leqq m$, při čemž rovnost nastane pouze pro $\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{E}_m$.*

DůKAZ. Z věty 13.2 plyne, že $k \leqq m$. Je-li $k = m$, plyne z téže věty, že každý vektor prostoru $\boldsymbol{E}_m$ leží v $\boldsymbol{E}_k$. Zvolme nyní určitý bod A prostoru $\boldsymbol{E}_k$. Je-li X libovolný bod prostoru $\boldsymbol{E}_m$, musí vektor $X - A$ (jako každý vektor) ležet v $\boldsymbol{E}_k$ a protože počáteční bod A je v $\boldsymbol{E}_k$, je také koncový bod X v $\boldsymbol{E}_k$.

Množina všech vektorů prostoru $\boldsymbol{E}_m$ tvoří vektorový prostor dimense m, který jsme v článku 16 označili $\boldsymbol{V}_m$ a nazvali zaměřením prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Pro $1 \leqq k \leqq m$ jsou ve $\boldsymbol{V}_m$ obsaženy lineární soustavy dimense k; každou takovou lineární soustavu nazveme *k-směrem* prostoru $\boldsymbol{E}_m$; speciálně celé $\boldsymbol{V}_m$ je m-směr a je to jediný m-směr obsažený ve $\boldsymbol{V}_m$. Pro $1 \leqq k \leqq m - 1$ existuje ve $\boldsymbol{V}_m$ nekonečně mnoho k-směrů. Pro $k = 1$ mluvíme jednoduše o *směru* místo o jednosměru.

Je-li $\mathbf{E}_k$ vnořen do $\mathbf{E}_m$, potom podle věty 18.3 zaměření $\mathbf{V}_k$ prostoru $\mathbf{E}_k$ je určitý k-směr obsažený ve $\mathbf{V}_m$. *Lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ daného $\mathbf{E}_m$ je jednoznačně určen, známe-li jeho zaměření $\mathbf{V}_k$ a jeden jeho bod A.* Neboť $\mathbf{E}_k$ se skládá ze všech bodů tvaru $A + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je libovolný vektor náležející do $\mathbf{V}_k$. Z tohoto důvodu budeme psáti

$$\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{V}_k\}. \tag{18.2}$$

Je-li

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \tag{18.3}$$

libovolná base lineární soustavy $\mathbf{V}_k$, skládá se $\mathbf{E}_k$ ze všech bodů tvaru

$$X = A + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k \tag{18.4}$$

a proto místo (18.2) můžeme psáti

$$\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}. \tag{18.5}$$

Zaměření $\mathbf{V}_k$ prostoru $\mathbf{E}_k$ vnořeného do $\mathbf{E}_m$ je k-směr obsažený ve $\mathbf{V}_m$. Obráceně platí:

VĚTA 18.5. *Je-li A libovolný bod prostoru $\mathbf{E}_m$ a je-li $\mathbf{V}_k$ libovolný k-směr prostoru $\mathbf{E}_m$, potom* (18.2) *je lineární podprostor dimense k.*

DŮKAZ. Podle věty 15.2 existuje orthonormální base (18.3) lineární soustavy $\mathbf{V}_k$. Je-li vedle bodu (18.4) dán bod

$$Y = A + y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_k\mathbf{u}_k,$$

plyne z orthonormality base (18.3), že

$$\overline{XY} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_k - x_k)^2},$$

takže $\mathbf{E}_k$ je eukleidovský prostor dimense k, ve kterém

$$\langle A; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\rangle$$

je kartézská soustava souřadnic.

Buďtež

$$A_0, A_1, \ldots, A_k \tag{18.6}$$

libovolně dané body prostoru $\mathbf{E}_m$, z nichž aspoň dva jsou navzájem různé, takže aspoň jeden z vektorů

$$A_1 - A_0, \ldots, A_k - A_0 \tag{18.7}$$

je nenulový. Vektory (18.7) vytvářejí lineární soustavu $\mathbf{V}_h$, jejíž dimense h je $\leqq k$. Při tom je $k = h$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory (18.7) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Lineární podprostor $\{A_0; \mathbf{V}_h\}$ obsahuje všecky body (18.6). Obráceně, jsou-li všechny body (18.6) obsaženy v lineárním podprostoru $\mathbf{W}_l$ dimense l, potom všecky vektory (18.7) leží ve $\mathbf{W}_l$, takže lineární soustava $\mathbf{V}_h$ je částí lineární soustavy $\mathbf{W}_l$ a tudíž podle věty 13.2 je $h \leqq l$, při čemž $h = l$ pouze tehdy, jestliže $\mathbf{W}_l$ splyne s $\mathbf{V}_h$. Tedy lineární podprostor $\{A_0; \mathbf{V}_h\}$ dimense h obsahuje všecky body (18.6) a je to jediný lineární podprostor dimense h obsahující všecky body (18.6); pravíme, že body (18.6) *určují* podprostor $\{A_0; \mathbf{V}_h\}$. Je-li $\mathbf{E}_l$ libovolný lineární podprostor, potom $\mathbf{E}_l$ obsahuje všecky body (18.6) tehdy a jenom tehdy, jestliže $\mathbf{E}_l$ obsahuje jako část celý prostor $\{A_0; \mathbf{V}_h\}$. Pravíme, že body (18.6) jsou *mezi sebou lineárně závislé* nebo *nezávislé* podle toho, co platí o vektorech (18.7). Tento pojem je nezávislý na pořadí bodů (18.6), neboť podle předcházejícího body (18.6) jsou mezi sebou lineárně nezávislé tehdy a jenom tehdy, jestliže dimense jimi určeného lineárního podprostoru je rovna k. Dva různé body A, B jsou podle (11.5) vždy mezi sebou lineárně nezávislé. Proto dvěma různými body A, B vždy prochází právě jedna přímka, totiž přímka $\{A; B - A\}$, kterou nazýváme stručně přímka AB.

19. ROVNOBĚŽNOST LINEÁRNÍCH PODPROSTORŮ. Buďtež $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ dvà lineární podprostory téže dimense k základního $\mathbf{E}_m$.*) Mají-li $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ totéž zaměření, pravíme, že $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ jsou mezi sebou *rovnoběžné*. Z definice plynou snadno tyto jednoduché důsledky:

(19.1). Každý $\mathbf{E}_k$ je sám k sobě rovnoběžný.

(19.2). Jeli $\mathbf{E}_k$ rovnoběžný s $\mathbf{E}'_k$ a zároveň $\mathbf{E}'_k$ rovnoběžný s $\mathbf{E}''_k$, je také $\mathbf{E}_k$ rovnoběžný s $\mathbf{E}''_k$.

(19.3). Dva rovnoběžné lineární podprostory téže dimense buďto splynou nebo nemají žádný společný bod.

(19.4). Je-li dán lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ a bod B, potom bodem B prochází právě jeden lineární podprostor téže dimense k rovnoběžný s $\mathbf{E}_k$.

---

*) Podle věty 18.4 nemá $\mathbf{E}_1$ jiného lineárního podprostoru než sama sebe. Proto předpokládáme, že $m \geqq 2$.

Podle definice dva lineární podprostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ téže dimense k jsou mezi sebou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, jestliže jejich zaměření $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}'_k$ splynou. Víme-li však o zaměřeních $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}'_k$ pouze tolik, že na př. $\mathbf{V}'_k$ je částí $\mathbf{V}_k$, už můžeme soudit, že $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ jsou mezi sebou rovnoběžné. Neboť ježto lineární soustava $\mathbf{V}'_k$ dimense k je částí lineární soustavy $\mathbf{V}_k$ téže dimense k, je $\mathbf{V}'_k = \mathbf{V}_k$ podle věty 13.2. To nás vede k následující definici: Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ dva lineární podprostory různých dimensí, při čemž třeba $h < k$, nazýváme je *rovnoběžné,* jestliže zaměření prostoru $\mathbf{E}_h$ je částí zaměření prostoru $\mathbf{E}_k$. Z definice je patrné:

(19.5). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné, jsou-li také $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}_l$ rovnoběžné a je-li $h < k < l$, jsou též $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_l$ rovnoběžné.

(19.6). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné, jsou-li dále $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}'_h$ rovnoběžné, jsou-li posléze $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ rovnoběžné, jsou také $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}'_k$ rovnoběžné.

(19.7). Je-li $\mathbf{E}_h$ částí $\mathbf{E}_k$, jsou $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné.

(19.8). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné a je-li $h < k$, potom buďto $\mathbf{E}_h$ je částí $\mathbf{E}_k$ nebo $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ nemají žádný společný bod.

(19.9). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}'_h$ rovnoběžné a je-li $\mathbf{E}'_h$ částí $\mathbf{E}_k$, potom $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ jsou rovnoběžné.

(19.10). Jsou-li $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}_k$ rovnoběžné a je-li $h < k$, potom vedeme-li bodem B libovolně zvoleným v $\mathbf{E}_k$ prostor $\mathbf{E}'_h$ rovnoběžně s $\mathbf{E}_h$, jest $\mathbf{E}'_h$ částí $\mathbf{E}_k$.

Čtenář nechť si jasně uvědomí názorný smysl těchto vět pro $m = 3$, $h = 1$, $k = 2$; v tomto speciálním případě dostane dobře známé věty z elementární stereometrie.

Speciálně dvě *přímky* (lineární podprostory dimense 1) jsou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, mají-li týž směr. O směru $\{\mathbf{u}\}$ pravíme, že *leží v lineárním podprostoru* $\mathbf{E}_k$, jestliže $\{\mathbf{u}\}$ je částí zaměření prostoru $\mathbf{E}_k$, což nastane tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{u}$ leží v $\mathbf{E}_k$. O směrech $\{\mathbf{u}_1\}, \ldots, \{\mathbf{u}_k\}$ pravíme, že jsou *mezi sebou lineárně závislé* nebo *nezávislé* podle toho, co platí o vektorech $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. K této definici jsme oprávněni, ježto

$$\{\mathbf{u}_1\} = \{\mathbf{v}_1\}, \ldots, \{\mathbf{u}_k\} = \{\mathbf{v}_k\}$$

tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$(*)\qquad \mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{v}_k = a_k\mathbf{u}_k,\ a_1 \ldots a_k \neq 0,$$

neboť za předpokladu (*) z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ plyne totéž o vektorech $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ a obráceně.

Speciálně dva směry $\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{u}_2\}$ jsou mezi sebou lineárně závislé tehdy a jenom tehdy, jestliže splynou. O přímkách $p_1, \ldots, p_k$ pravíme, že jsou *mezi sebou lineárně závislé* nebo *nezávislé* podle toho, co platí o jejich směrech. Speciálně dvě přímky p, q jsou mezi sebou lineárně závislé tehdy a jenom tehdy, jestliže jsou rovnoběžné.

Z předcházejícího plynou snadno tyto výsledky:

(19.11). Dvě přímky jsou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, mají-li týž směr. Dvě mezi sebou rovnoběžné přímky nazýváme stručně *rovnoběžky*.

(19.12). Přímka p je rovnoběžná s lineárním podprostorem $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže směr přímky p leží v $\mathbf{E}_k$.

(19.13). Je-li přímka p rovnoběžná s lineárním podprostorem $\mathbf{E}_k$, potom rovnoběžka s přímkou p procházející bodem libovolně zvoleným v $\mathbf{E}_k$ leží v $\mathbf{E}_k$, t. j. je částí $\mathbf{E}_k$. Obráceně:

(19.14). Jestliže přímka p je rovnoběžná s některou přímkou ležící v $\mathbf{E}_k$, potom p je rovnoběžná s $\mathbf{E}_k$.

(19.15). Lineární podprostory $\mathbf{E}_h$, $\mathbf{E}'_k$ $(h \leq k)$ jsou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, jestliže každá přímka, která leží v $\mathbf{E}_h$, je rovnoběžná s $\mathbf{E}'_k$. Obráceně:

(19.16). Jestliže v prostoru $\mathbf{E}_h$ leží h mezi sebou lineárně nezávislých přímek, z nichž každá je rovnoběžná s prostorem $\mathbf{E}'_k$ $(h \leq k)$, potom také prostor $\mathbf{E}_h$ je rovnoběžný s $\mathbf{E}'_k$.

20. DVOJICE PŘÍMEK. Dvě přímky $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{u}\}$ téhož směru $\{\mathbf{u}\}$ jsme v článku 19 nazvali rovnoběžné, takže dvě splývající přímky jsou rovnoběžné.

VĚTA 20.1. *Dvě rovnoběžné přímky $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{u}\}$ splynou tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $B - A$ je lineárně závislý na vektoru $\mathbf{u}$.*

DŮKAZ. Splynou-li obě přímky, potom vektor $B - A$ leží v přímce $\{A; \mathbf{u}\}$ a je tudíž lineárně závislý na $\mathbf{u}$. Obráceně, je-li $B - A = c\mathbf{u}$, potom bod $B = A + c\mathbf{u}$ je společný oběma rovnoběžkám, které tedy splynou podle (19.3).

VĚTA 20.2. *Dvě různé rovnoběžky leží v jednoznačně určené rovině.*

DŮKAZ. Jsou-li $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B, \mathbf{u}\}$ dvě různé rovnoběžky, jest $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ a podle věty 20.1 vektor $B - A$ není lineárně závislý na vektoru $\mathbf{u}$, z něhož plyne snadno, že vektory $\mathbf{u}$, $B - A$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Tudíž existuje rovina $\{A; \mathbf{u}, B - A\}$, která zřejmě obsahuje obě dané rovnoběžky. Obráceně je patrné, že $\{A; \mathbf{u}, B - A\}$ je jediná taková rovina.

Ježto dvěma různými body prochází jediná přímka, mají dvě různé přímky nejvýše jeden společný bod. Jestliže dvě přímky p, q jsou navzájem různé a mají společný bod A, pravíme, že p, q jsou dvě *různoběžné přímky*, krátce *různoběžky*; bod A nazýváme jejich *průsečík*. Rovnoběžnost a různoběžnost se navzájem vylučují. Výrok, že přímky p, q se *protínají* v bodě A, znamená, že p, q jsou různoběžné a že A je jejich průsečík. Posléze p, q jsou dvě *mimoběžné přímky*, krátce *mimoběžky*, nejsou-li ani rovnoběžné ani různoběžné.

Vyšetřujme vzájemnou polohu dvou daných přímek $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{v}\}$. Z předcházejícího je patrné, že *dané přímky jsou rovnoběžné tehdy a jenom tehdy, jestliže lineární soustava* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ *má dimensi* 1, *a splynou tehdy a jenom tehdy, jestliže lineární soustava* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, B - A\}$ *má dimensi* 1. Zbývá vyšetřit případ lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Přímky $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{v}\}$ jsou v tomto případě různoběžné nebo mimoběžné podle toho, zdali mají či nemají společný bod. Je-li však C společný bod obou přímek (průsečík), existují čísla c_1, c_2 tak, že

$$C = A + c_1\mathbf{u}, \quad C = B + c_2\mathbf{v}, \tag{20.1}$$

z čehož plyne

$$B - A = c_1\mathbf{u} - c_2\mathbf{v}, \tag{20.2}$$

t. j. vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Obráceně, je-li vektor $B - A$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, existují čísla c_1, c_2 tak, že platí (20.2). Potom však obě rovnice (20.1) definují týž bod C, který je průsečíkem obou přímek. Tím jsou dokázány věty:

VĚTA 20.3. *Dvě přímky* $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{v}\}$ *jsou různoběžné tehdy a jenom tehdy, jestliže jsou vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *mezi sebou lineárně nezávislé a je-li vektor* $B - A$ *na nich lineárně závislý.*

VĚTA 20.4. *Dvě přímky* $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{v}\}$ *jsou mimoběžné tehdy a jenom tehdy, jsou-li vektory* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $B - A$ *mezi sebou lineárně nezávislé.*

Z těchto vět plyne dále:

VĚTA 20.5. *Dvě různoběžné přímky* $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{v}\}$ *leží v jednoznačně určené rovině,* totiž v rovině $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

VĚTA 20.6. *Dvě mimoběžné přímky* $\{A; \mathbf{u}\}$, $\{B; \mathbf{v}\}$ *leží v jednoznačně určeném* $\mathbf{E}_3$, *totiž v* $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}, B - A\}$.

VĚTA 20.7. *Dvě přímky, které leží obě v téže rovině, jsou buďto různoběžné nebo ~~mimoběžné~~.*

21. PŘÍČKY DVOU MIMOBĚŽEK. Buďtež dány dvě mimoběžky p, q; p budiž přímka $\{A; \mathbf{u}\}$, q budiž přímka $\{B; \mathbf{v}\}$. Podle věty 20.6 leží p, q v prostoru $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}, B - A\}$, který označíme prostě $\mathbf{E}_3$. Přímky p, q nemají žádný společný bod. Je-li X libovolný bod přímky p, Y libovolný bod přímky q, potom přímku XY nazveme *příčkou mimoběžek p, q*. Jest

$$X = A + x\mathbf{u}, \quad Y = B + y\mathbf{v}. \tag{21.1}$$

Každá příčka mimoběžek p, q leží ovšem v právě definovaném $\mathbf{E}_3$.

Naším prvým úkolem bude určit příčku mimoběžek p, q, která má daný směr $\{\mathbf{w}\}$. Směr $\{\mathbf{w}\}$ musí ovšem ležeti v $\mathbf{E}_3$, takže existují čísla a, b, c tak, že

$$\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c(B - A). \tag{21.2}$$

Hledaná příčka bude přímka XY, při čemž čísla x, y ve (21.1) máme určit. Podmínka, které jsou podrobena tato čísla x, y, jest, aby směr $\{Y - X\}$ splynul s daným směrem $\{\mathbf{w}\}$, t. j. aby existovalo číslo z tak, že

$$Y - X = z\mathbf{w}. \tag{21.3}$$

Máme tedy určit čísla x, y, z tak, aby platilo (21.1) a (21.3). Dosadíme-li ze (21.1) do (21.3), dostaneme

$$B - A + y\mathbf{v} - x\mathbf{u} = z\mathbf{w}$$

neboli podle (21.2)

$$(az + x)\,\mathbf{u} + (bz - y)\,\mathbf{v} + (cz - 1)(B - A) = \mathbf{o}. \tag{21.4}$$

Ježto vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $B - A$ jsou lineárně nezávislé, bude vektorová rovnice (21.4) splněna tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$cz = 1, \tag{21.5}$$

$$-az = x, \; bz = y. \tag{21.6}$$

Rovnici (21.5) nelze vyhověti, je-li $c = 0$, t. j. podle (21.2), jestliže směr $\{\mathbf{w}\}$ náleží do dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Zvolíme-li libovolně bod C, můžeme říci, že aby žádaná příčka existovala, nesmí její směr ležet ve dvojsměru, který je zaměřením roviny $\{C; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ rovnoběžné s oběma přímkami p, q. Je-li tato podmínka splněna, potom ve (21.2) je $c \neq 0$ a můžeme jednoznačně určit nejprve z z rovnice (21.5), potom x a y z rovnic (21.6). Výsledek:

Věta 21.1. *Chceme-li ke dvěma daným mimoběžkám p, q určit příčku daného směru $\{\mathbf{w}\}$, musí daný směr ležet v trojrozměrném prostoru $\mathbf{E}_3$ obsahujícím obě přímky p, q, avšak $\{\mathbf{w}\}$ nesmí ležet ve dvojsměru obsahujícím směry obou přímek p, q. Jsou-li tyto dvě podmínky splněny, existuje právě jedna příčka mimoběžek p, q mající daný směr $\{\mathbf{w}\}$.*

Zvolme nyní v prostoru $\mathbf{E}_3$ bod M tak, aby neležel na žádné z obou daných mimoběžek p, q, a hledejme příčku mimoběžek p, q procházející bodem M. Ježto vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, B - A$ tvoří basi prostoru $\mathbf{E}_3$, existují čísla a, b, c tak, že

$$M = A + a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c(B - A). \tag{21.7}$$

Žádaná příčka protne p v bodě tvaru $A + x\mathbf{u}$, q v bodě tvaru $B + y\mathbf{v}$ a její směr je tudíž určen vektorem

$$(B + y\mathbf{v}) - (A + x\mathbf{u}) = -x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + (B - A).$$

Čísla x, y máme určit tak, aby příčka procházela bodem M, t. j. tak, aby existovalo číslo z, pro něž

$$M = A + x\mathbf{u} + z(-x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + B - A).$$

Porovnáme-li s (21.7), dostaneme podmínku

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c(B - A) = x(1 - z)\,\mathbf{u} + yz\mathbf{v} + z(B - A),$$

která vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $B - A$ je splněna tehdy a jenom tehdy, jestliže předně $z = c$ a za druhé

$$(1 - c)\,x = a, \; cy = b. \tag{21.8}$$

Je-li $c \neq 0$, $c \neq 1$, určíme x, y jednoznačně ze (21.8), takže existuje právě jedna příčka mimoběžek p, q procházející bodem M. Je-li však $c = 0$ nebo $c = 1$, dokážeme snadno, že žádná taková příčka neexistuje.

Budiž nejprve $c = 0$. To znamená, že (21.7) zní

$$M = A + a\mathbf{u} + b\mathbf{v},$$

t. j. bod M leží v rovině vedené přímkou p rovnoběžně s přímkou q. Ježto bod M neleží na přímce p, je $b \neq 0$, avšak $c = 0$, takže druhé rovnici (21.8) nelze vyhověti.

Budiž za druhé $c = 1$. To znamená, že (21.7) zní

$$M = B + a\mathbf{u} + b\mathbf{v},$$

t. j. bod M leží v rovině vedené přímkou q rovnoběžně s přímkou p. Ježto bod M neleží na přímce q, je $a \neq 0$, avšak $c = 1$, takže prvé rovnici (21.8) nelze vyhověti. Výsledek:

VĚTA 21.2. *Chceme-li ke dvěma daným mimoběžkám p, q určit příčku procházející daným bodem M, který neleží ani na přímce p ani na přímce q, musí bod M ležet v trojrozměrném prostoru $\mathbf{E}_3$ obsahujícím obě přímky p, q, avšak M nesmí ležet ani v rovině vedené přímkou p rovnoběžně s přímkou q, ani v rovině vedené přímkou q rovnoběžně s přímkou p. Jsou-li tyto tři podmínky splněny, existuje právě jedna příčka mimoběžek p, q procházející bodem M.*

22. PŘÍMKA A LINEÁRNÍ PODPROSTOR. V eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$ budiž dána jednak přímka $\{A; \mathbf{u}\}$, kterou označíme p, jednak lineární podprostor

$$\mathbf{E}_k = \{B; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

dimense k. Případ $k = 1$ byl probrán v článku 20; budiž tedy $k \geqq 2$. Ježto $k \leqq m - 1$, jest $m \geqq 3$.

Jestliže vektor $\mathbf{u}$ náleží do k-směru

$$\mathbf{V}_k = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\},$$

je přímka *p rovnoběžná s prostorem $\mathbf{E}_k$*. Tento případ nastane mimo jiné, jestliže p leží v $\mathbf{E}_k$. Při tom p leží v $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže nejen $\mathbf{u}$, nýbrž i $B - A$ náleží do $\mathbf{V}_k$. Jestliže p neleží v $\mathbf{E}_k$, potom existuje jediný $\mathbf{E}_{k+1}$, který obsahuje jak p, tak i $\mathbf{E}_k$, totiž

$$\mathbf{E}_{k+1} = \{A; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, B - A\}.$$

Zbývá případ, že $\mathbf{u}$ nenáleží do $\mathbf{V}_k$, takže vektory

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \tag{22.1}$$

jsou lineárně nezávislé. V tomto případě přímka p se nazývá *různoběžná* nebo *mimoběžná s prostorem* $\mathbf{E}_k$ podle toho, zda p má či nemá s $\mathbf{E}_k$ společný bod. V prvém případě společný bod P (který je zřejmě jediný) se jmenuje *průsečík* přímky p s prostorem $\mathbf{E}_k$; také pravíme, že p a $\mathbf{E}_k$ se *protínají* v bodě P. V tomto případě existují čísla $a, b_1, \ldots, b_k$ tak, že

$$P = A + a\mathbf{u}, \quad P = B + b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_k\mathbf{v}_k, \tag{22.2}$$

z čehož plyne

$$B - A = a\mathbf{u} - b_1\mathbf{v}_1 - \ldots - b_k\mathbf{v}_k, \tag{22.3}$$

t. j. vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů (22.1). Obráceně, je-li vektor $B - A$ lineární kombinací vektorů (22.1), existují čísla $a, b_1, \ldots, b_k$ tak, že platí (22.3). Potom však obě rovnice (22.2) definují týž bod P, který je průsečíkem přímky p s prostorem $\mathbf{E}_k$.

Celkem jsme poznali, že:

(a) přímka p leží v prostoru $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jsou-li oba vektory $\mathbf{u}$, $B - A$ lineárně závislé na vektorech $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$;

(b) přímka p je rovnoběžná s prostorem $\mathbf{E}_k$, neleží však v $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{u}$ jest a vektor $B - A$ není lineárně závislý na vektorech $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$;

(c) přímka p je různoběžná s prostorem $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé a vektor $B - A$ je na nich lineárně závislý;

(d) přímka p je mimoběžná s prostorem $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, $B - A$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé.

Všimli jsme si již, že v případě (b) leží p a $\mathbf{E}_k$ v jednoznačně určeném $\mathbf{E}_{k+1}$. Také v případě (c) leží p a $\mathbf{E}_k$ v jednoznačně určeném

$$\mathbf{E}_{k+1} = \{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Naproti tomu v případě (d) nemohou p a $\mathbf{E}_k$ ležet v témž $\mathbf{E}_{k+1}$, protože $\mathbf{E}_{k+1}$ nemůže obsahovat $k+2$ lineárně nezávislé vektory. V případě (d) leží p a $\mathbf{E}_k$ v jednoznačně určeném

$$\mathbf{E}_{k+2} = \{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, B - A\}.$$

Zřejmě případ (d) nemůže nastat pro $k = m - 1$, takže *jestliže přímka p a prostor $\mathbf{E}_{m-1}$ nejsou rovnoběžné, jsou různoběžné.*

23. DVOJICE ROVIN. Budiž $m \geqq 3$. Dvě roviny $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ s týmž zaměřením $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ jsme v článku 19 nazvali *rovnoběžné.* Snadno se dokáže, že dvě rovnoběžné roviny $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ splynou tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, takže jsou-li naše dvě roviny různé, jsou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, B - A$ mezi sebou lineárně nezávislé. Dvě různé rovnoběžné roviny $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ leží tedy v jednoznačně určeném

$$\mathbf{E}_3 = \{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, B - A\}.$$

Dvě roviny ϱ, σ se jmenují *různoběžné,* jestliže jejich společné body tvoří přímku, která se jmenuje jejich *průsečnice.* Výrok, že dvě roviny ϱ, σ se *protínají* v přímce p, znamená, že roviny ϱ, σ jsou různoběžné a že p je jejich průsečnice. Dvě rovnoběžné roviny nemohou býti různoběžné, neboť dvě rovnoběžné roviny buďto splynou nebo nemají žádný společný bod.

V trojrozměrném prostoru $\mathbf{E}_3$ platí, že jestliže roviny ϱ, σ nejsou rovnoběžné, potom jsou různoběžné. Neboť budiž ϱ rovina $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, σ rovina $\{B; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Čtyři vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ prostoru $\mathbf{E}_3$ musí býti mezi sebou lineárně závislé. Tedy existují čísla a_1, a_2, b_1, b_2 tak, že

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 \tag{23.1}$$

a že nejsou všecka čtyři čísla a_1, a_2, b_1, b_2 současně rovna nule. Ježto však vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé a ježto totéž platí o vektorech $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, jest vektor (23.1) různý od $\mathbf{o}$. Označíme-li $\mathbf{w}_0$ vektor (23.1), plyne z věty 13.1, že lze určiti vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ tak, že

$$\{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}; \{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_2\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}. \tag{23.2}$$

(Podle věty 12.8 lze dokonce za $\mathbf{w}_1$ volit jeden z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, za $\mathbf{w}_2$ jeden z vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.) Potom ϱ je rovina $\{A; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1\}$, σ je rovina

$\{B; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_2\}$. Vektory $\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{w}_1$ jsou ovšem mezi sebou lineárně nezávislé; vektor $\boldsymbol{w}_2$ není jejich lineární kombinací, neboť jinak by roviny ϱ, σ zřejmě byly rovnoběžné. Proto vektory

$$(23.3) \qquad \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$$

jsou mezi sebou lineárně nezávislé a tvoří tudíž basi prostoru $\boldsymbol{E}_3$. Z toho plyne, že vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů (23.3), t. j., že existují čísla a_0, a_1, a_2 tak, že

$$(23.4) \qquad B - A = a_0\boldsymbol{w}_0 + a_1\boldsymbol{w}_1 + a_2\boldsymbol{w}_2.$$

Existuje tudíž bod

$$C = A + a_1\boldsymbol{w}_1 = B - a_0\boldsymbol{w}_0 - a_2\boldsymbol{w}_2,$$

který leží v obou rovinách ϱ, σ. Z toho plyne dále, že přímka $\{C; \boldsymbol{w}_0\}$ je částí obou rovin ϱ, σ. Mimo přímku $\{C; \boldsymbol{w}_0\}$ nemohou míti roviny ϱ, σ další společný bod, neboť jinak by splynuly, což nelze, ježto nejsou rovnoběžné. Tedy roviny ϱ, σ jsou různoběžné a přímka $\{C; \boldsymbol{w}_0\}$ je jejich průsečnice.

Obráceně platí, že dvě různoběžné roviny ϱ, σ leží v jednoznačně určeném $\boldsymbol{E}_3$. Neboť budiž $\{C; \boldsymbol{w}_0\}$ průsečnice obou rovin. Z věty 13.1 plyne, že existují vektory $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ tak, že zaměření roviny ϱ je $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1\}$, zaměření roviny σ je $\{\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_2\}$. Ježto roviny ϱ, σ nejsou rovnoběžné, opět se snadno odůvodní, že vektory (23.3) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Avšak zřejmě ϱ je rovina $\{C; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1\}$, σ je rovina $\{C; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_2\}$ a tudíž obě roviny leží v trojrozměrném $\{C; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, který je zřejmě jediným $\boldsymbol{E}_3$ obsahujícím obě roviny ϱ, σ.

Budiž nyní $m \geq 4$ a opět budiž ϱ rovina $\{A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, σ rovina $\{B; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$. Dimense lineární soustavy

$$(23.5) \qquad \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$$

je zřejmě rovna jednomu z čísel 2, 3, 4. Jestliže dimense lineární soustavy (23.5) je rovna dvěma, dokáže se snadno, že roviny ϱ, σ jsou rovnoběžné.

Předpokládejme, že dimense lineární soustavy (23.5) je rovna třem. Opakujíce úvahu provedenou výše, dospějeme opět k vektoru různému od $\boldsymbol{o}$, který má tvar (23.1). Označíme-li $\boldsymbol{w}_0$ vektor (23.1), určíme opět vektory $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ tak, že platí (23.2), takže ϱ je rovina $\{A; \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_1\}$, σ je rovina $\{B; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_2\}$. Mají-li roviny ϱ, σ společný nějaký bod C, mají společnou přímku $\{C; \mathbf{w}_0\}$ a jsou různoběžné. K tomuto výsledku dojdeme — viz (23.4) — jestliže vektor $B - A$ je lineární kombinací vektorů (23.3) nebo, což jest zřejmě totéž, jestliže vektor $B - A$ náleží do (23.5). Ježto však $m \geqq 4$, je možný také případ, že vektor $B - A$ není lineární kombinací vektorů (23.3), takže vektory

$$\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, B - A$$

jsou lineárně nezávislé. V tomto případě podle předcházejícího roviny ϱ, σ nemají žádný společný bod, mají však společný směr $\{\mathbf{w}_0\}$. Zřejmě $\{\mathbf{w}_0\}$ je jediný společný směr obou rovin ϱ, σ, neboť jinak by se snadno dokázalo, že by roviny ϱ, σ byly rovnoběžné. Mimo to je patrné, že obě roviny ϱ, σ leží ve čtyřrozměrném $\{A; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, B - A\}$, který je zřejmě jediným $\mathbf{E}_4$ obsahujícím obě roviny ϱ, σ.

Zbývá případ, že dimense lineární soustavy (23.5) je rovna čtyřem. V tomto případě roviny ϱ, σ nemohou míti žádný společný směr, neboť jinak bychom opět měli netriviální vztah tvaru (23.1) a dimense lineární soustavy (23.5) by byla menší než 4. Jinak se uvažovaný případ štěpí na dva podpřípady. Předně předpokládejme — což musí nastat, je-li $m = 4$ — že vektor $B - A$ náleží do lineární soustavy (23.5). Potom existují čísla a_1, a_2, b_1, b_2 tak, že

$$B - A = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 \tag{23.6}$$

a můžeme zavésti bod

$$C = A + a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = B - b_1\mathbf{v}_1 - b_2\mathbf{v}_2, \tag{23.7}$$

který leží v obou rovinách ϱ, σ. Bod C je jediný společný bod obou rovin ϱ, σ, neboť jinak by obě roviny měly společný směr, což je nemožné. Snadno se dokáže, že roviny ϱ, σ leží v tomto případě ve čtyřrozměrném $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, který je jediným $\mathbf{E}_4$ obsahujícím obě roviny ϱ, σ.

Posléze je ještě možné, že dimense lineární soustavy (23.5) je rovna čtyřem a že vektor $B - A$ nenáleží do této soustavy. V tomto případě, který může nastati pouze pro $m \geqq 5$, jsou vektory

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, B - A$$

mezi sebou lineárně nezávislé. O rovinách ϱ, σ víme, že nemají žádný společný směr. Nemají však také žádný společný bod, neboť z existence společného bodu (23.7) by plynul vztah (23.6), který je nyní nemožný. Obě roviny ϱ, σ leží v daném případě v jednoznačně určeném pětirozměrném $\{A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, B - A\}$.

24. SPOJENÍ A PRŮNIK DVOU LINEÁRNÍCH SOUSTAV. V předcházejících článcích jsme probírali v několika zvláštních případech vzájemnou polohu dvou lineárních podprostorů eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$. Docílené výsledky jsou obsaženy ve výsledcích článku 25. Napřed však bude účelné provésti obecnou úvahu, která je předmětem tohoto článku. Budiž dán libovolný vektorový prostor $\mathbf{V}$ ve smyslu článku 10. Ve $\mathbf{V}$ buďtež dány dvě lineární soustavy $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$. Budiž $\mathbf{S}$ množina všech vektorů tvaru

$$\mathbf{u}' + \mathbf{u}'',$$

kde $\mathbf{u}'$ je libovolný vektor náležející do $\mathbf{W}'$, $\mathbf{u}''$ libovolný vektor náležející do $\mathbf{W}''$. Jest

$$(\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_1'') + (\mathbf{u}_2' + \mathbf{u}_2'') = (\mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_2') + (\mathbf{u}_1'' + \mathbf{u}_2''), \tag{24.1}$$

$$a(\mathbf{u}' + \mathbf{u}'') = a\mathbf{u}' + a\mathbf{u}''. \tag{24.2}$$

Ze (24.1) plyne, že součet dvou vektorů náležejících do $\mathbf{S}$ sám náleží do $\mathbf{S}$; ze (24.2) plyne, že také součin libovolného reálného čísla s vektorem náležejícím do $\mathbf{S}$ náleží do $\mathbf{S}$. Je tudíž $\mathbf{S}$ lineární soustava, kterou nazveme *spojením lineárních soustav* $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$. Dále budiž $\mathbf{P}$ množina všech vektorů, které náležejí zároveň do $\mathbf{W}'$ i do $\mathbf{W}''$; zřejmě také $\mathbf{P}$ je lineární soustava, která se jmenuje *průnik lineárních soustav* $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$.

Nás bude zajímat ten případ, že $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$ jsou netriviální lineární soustavy vytvořené konečným počtem vektorů. Budiž

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h \tag{24.3}$$

base pro $\mathbf{W}'$;

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \tag{24.4}$$

base pro $\mathbf{W}''$, takže $\mathbf{W}'$ má dimensi h, $\mathbf{W}''$ má dimensi k. Snadno se nahlédne, že vektory (24.3) a (24.4) dohromady vytvoří lineární soustavu $\mathbf{S}$, která tudíž také má konečnou dimensi, kterou označíme s. Lineární soustava $\boldsymbol{P}$ má podle věty 13.2 rovněž konečnou dimensi, kterou označíme p. Cílem tohoto článku je důkaz obecného vzorce

$$h + k = s + p. \tag{24.5}$$

Uvažme napřed, že nulový vektor $\boldsymbol{o}$ rozhodně náleží do $\boldsymbol{P}$. Vyšetřme nejprve ten případ, že pouze vektor $\boldsymbol{o}$ náleží do $\boldsymbol{P}$. V tomto případě je $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{o}\}$, $p = 0$ a máme dokázati, že $s = h + k$. Že tomu tak skutečně jest, plyne z toho, že v případě $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{o}\}$ vektory (24.3) a (24.4) dohromady jsou lineárně nezávislé. Je-li totiž

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_h\boldsymbol{u}_h + b_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + b_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}, \tag{24.6}$$

jest

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_h\boldsymbol{u}_h = -(b_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + b_k\boldsymbol{v}_k). \tag{24.7}$$

Potom však vektor (24.7) náleží do $\boldsymbol{P}$, je tedy roven $\boldsymbol{o}$, takže všecky koeficienty ve (24.6) jsou rovny nule.

Přistupme k obecnému důkazu vzorce (24.5), který je již dokázán pro $p = 0$. Je-li $p > 0$, budiž

$$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_p \tag{24.8}$$

base pro $\boldsymbol{P}$. Podle věty 13.1 můžeme base (24.3), (24.4) lineárních soustav $\boldsymbol{W}'$, $\boldsymbol{W}''$ voliti tak, že

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p = \boldsymbol{w}_p; \quad \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{w}_p.$$

Lineární soustava $\boldsymbol{S}$ se dá vytvořiti vektory (24.8), (24.9), (24.10), kde vektory

$$\boldsymbol{u}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_h \tag{24.9}$$

odpadnou pro $p = h$, vektory

$$\boldsymbol{v}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k \tag{24.10}$$

odpadnou pro $p = k$. Je-li s celkový počet vektorů (24.8), (24.9), (24.10), splňuje číslo s rovnici (24.5). Je tudíž třeba pouze ukázati, že vektory (24.8), (24.9), (24.10) dohromady jsou lineárně nezávislé.

Budiž

$$\begin{aligned}(c_1\boldsymbol{w}_1 + \ldots + c_p\boldsymbol{w}_p) + (a_{p+1}\boldsymbol{u}_{p+1} + \ldots + a_h\boldsymbol{u}_h) + \\ + (b_{p+1}\boldsymbol{v}_{p+1} + \ldots + b_k\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{o},\end{aligned} \tag{24.11}$$

kde opět druhá nebo třetí závorka může odpadnout. Rovnici (24.11) můžeme napsat ve tvaru

$$(24.12)\qquad \begin{aligned}(c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_p\mathbf{w}_p) + (a_{p+1}\mathbf{u}_{p+1} + \ldots + a_h\mathbf{u}_h) = \\ = -(b_{p+1}\mathbf{v}_{p+1} + \ldots + b_k\mathbf{v}_k).\end{aligned}$$

Obě strany ve (24.12) znamenají vektor, který náleží jak do $\mathbf{W}'$ tak i do $\mathbf{W}''$ a tudíž do $\mathbf{P}$. Z toho plyne nejprve, že všecky koeficienty a i všecky koeficienty b jsou rovny nule, načež také všecky koeficienty c ve (24.12) jsou rovny nule.

25. DVOJICE LINEÁRNÍCH PODPROSTORŮ EUKLEIDOVSKÉHO $\mathbf{E}_m$. Buďtež nyní dány v eukleidovském $\mathbf{E}_m$ dva lineární podprostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$. Budiž $\mathbf{W}'$ zaměření prostoru $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{W}''$ zaměření prostoru $\mathbf{E}''_k$. Platí vzorec (24.5), ve kterém h, k, s, p jsou dimense lineárních soustav $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$; $\mathbf{S}$ je spojení a $\mathbf{P}$ průnik lineárních soustav $\mathbf{W}'$, $\mathbf{W}''$. Při tom je ovšem

$$(25.1)\qquad 0 \leqq p \leqq h,\ 0 \leqq p \leqq k$$

a mimo to $s \leqq m$, takže podle (24.5) je

$$(25.2)\qquad p \geqq h + k - m.$$

Je-li $p = 0$, neexistuje žádný směr, který by ležel zároveň v $\mathbf{E}_h$ i v $\mathbf{E}''_h$; tento případ podle (25.2) může nastati pouze tehdy, jestliže $h + k \leqq m$. Je-li $p > 0$, potom existují směry obsažené v prostoru $\mathbf{P}$. Prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ jsou rovnoběžné, platí-li buďto $p = h$ nebo $p = k$ (nebo oboje).

Jestliže prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ mají nějaký společný bod C, jest $\mathbf{E}'_h = \{C; \mathbf{W}'\}$, $\mathbf{E}''_k = \{C; \mathbf{W}''\}$ a pro $p > 0$ všecky společné body vyplní lineární prostor $\{C; \mathbf{P}\}$ dimense p; pro $p = 0$ je zřejmě C *jediný* společný bod obou prostorů $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$. Dále je patrné, že existuje-li společný bod, leží oba prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ v jednoznačně určeném lineárním podprostoru $\{C; \mathbf{S}\}$ dimense $s = h + k - p$ a neleží v žádném lineárním podprostoru dimense menší než s.

Obecně zvolme bod A v prostoru $\mathbf{E}'_h$, bod B v prostoru $\mathbf{E}''_k$, takže $\mathbf{E}'_h = \{A; \mathbf{W}'\}$, $\mathbf{E}''_k = \{B; \mathbf{W}''\}$. Existuje-li společný bod C, jest

$$(25.3)\qquad C = A + \mathbf{u},\ C = B - \mathbf{v},$$

takže vektor $\mathbf{u}$ náleží do $\mathbf{W}'$, vektor $\mathbf{v}$ do $\mathbf{W}''$.

Potom jest

$$B - A = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \tag{25.4}$$

takže vektor $B - A$ náleží do lineární soustavy $\mathbf{S}$. Obráceně jestliže vektor $B - A$ náleží do $\mathbf{S}$, lze určit vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tak, že $\mathbf{u}$ náleží do $\mathbf{W}'$, $\mathbf{v}$ do $\mathbf{W}''$ a že platí (25.4). Potom však obě rovnice (25.3) definují týž bod C, který je společný oběma prostorům $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$.

Jestliže prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ nemají žádný společný bod, t. j. jestliže vektor $B - A$ nenáleží do $\mathbf{S}$, existuje jednoznačně určená lineární soustava $\mathbf{T}$ dimense $s + 1$, jejíž částí je $\mathbf{S}$ a která mimo to obsahuje také vektor $B - A$. Zřejmě potom oba prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_k$ leží v jednoznačně určeném lineárním podprostoru $\{C; \mathbf{T}\}$ dimense $s + 1 = h + k + 1 - p$ a neleží v žádném lineárním podprostoru dimense menší než $s + 1$. Ježto dimense prostoru $\{C; \mathbf{T}\}$ je nejvýše rovna m, je tento případ možný pouze tehdy, je-li $h + k + 1 - p \leqq m$.

Nadrovinou eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ rozumíme lineární podprostor dimense $m - 1$. Tedy v prostoru $\mathbf{E}_2$ (v rovině) slovo nadrovina znamená *přímku*, v prostoru $\mathbf{E}_3$ (v obyčejném prostoru) slovo nadrovina znamená *rovinu*. V prostoru $\mathbf{E}_1$ (na přímce) slovem nadrovina rozumíme *bod*; nyní však předpokládejme, že $m \geqq 2$.

Jestliže $k = m - 1$, t. j. jestliže $\mathbf{E}''_k = \mathbf{E}''_{m-1}$ je nadrovina, potom podle (25.2) jest $p \geqq h - 1$, takže podle (25.1) je buďto $p = h$ nebo $p = h - 1$. V případě $p = h$ zřejmě lineární soustava $\mathbf{P}$ splyne s lineární soustavou $\mathbf{W}'$, což podle definice $\mathbf{P}$ znamená, že lineární soustava $\mathbf{W}'$ je částí lineární soustavy $\mathbf{W}''$ neboli, že prostor $\mathbf{E}'_h$ je rovnoběžný s nadrovinou $\mathbf{E}''_{m-1}$. Je-li $p = h - 1$, potom podle (24.5) [ježto nyní $k = m - 1$] jest $s = m$, t. j. $\mathbf{S}$ je celé zaměření prostoru $\mathbf{E}_m$, takže každý vektor vůbec a speciálně vektor $B - A$ náleží do lineární soustavy $\mathbf{S}$, takže podle předcházejícího prostory $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}''_{m-1}$ mají společný lineární podprostor dimense $p = h - 1$. Tedy: *jestliže lineární podprostor* $\mathbf{E}'_h$ $(2 \leqq h \leqq m - 1)$ *není rovnoběžný s nadrovinou* $\mathbf{E}''_{m-1}$, *potom* $\mathbf{E}'_h$ a $\mathbf{E}''_{m-1}$ *mají společné body, které vyplní lineární podprostor dimense* $h - 1$. Je-li $h = 1$, potom vyjde, že přímka, která není rovnoběžná s nadrovinou $\mathbf{E}''_{m-1}$, má s $\mathbf{E}''_{m-1}$ společný právě jeden bod, což víme už z článku 22.

IV

ÚSEČKY, POLOPROSTORY, ORIENTACE

26. USPOŘÁDANÉ MNOŽINY. Budiž $\mathbf{M}$ libovolná množina, o které budeme předpokládat, že obsahuje aspoň dva různé prvky. *Uspořádat množinu* $\mathbf{M}$ znamená udat pravidlo, podle kterého se rozhodne, zda prvek A je či není *před* prvkem B. Toto pravidlo je libovolné až na to, že musí splňovat tři podmínky:

(a) je-li prvek A před prvkem B, potom není prvek B před prvkem A;

(b) není-li ani prvek A před prvkem B ani prvek B před prvkem A, jest $A = B$, t. j. oba symboly A, B znamenají týž prvek množiny $\mathbf{M}$;

(c) je-li prvek A před prvkem B a zároveň prvek B před prvkem C, je také prvek A před prvkem C.

Z vlastnosti (a) plyne, že je-li prvek A před prvkem B, je nutně $A \neq B$. Je-li však $A \neq B$, potom podle vlastnosti (b) nastane právě jedna ze dvou možností: „A je před B", „B je před A".

Jestliže prvek A je před prvkem B, pravíme, že prvek B je *za* prvkem A.

Pravíme, že A je *první* prvek množiny $\mathbf{M}$, jestliže pro každý prvek $X \neq A$ množiny $\mathbf{M}$ platí, že A je před X. Pravíme, že A je *poslední* prvek množiny $\mathbf{M}$, jestliže pro každý prvek $X \neq A$ množiny $\mathbf{M}$ platí, že X je před A. Je zřejmé, že uspořádaná množina $\mathbf{M}$ má buďto jediný nebo nemá vůbec žádný první prvek, a že rovněž $\mathbf{M}$ má buďto jediný nebo nemá vůbec žádný poslední prvek.

Množina $\mathbf{M}$ může býti uspořádána různými způsoby. Je-li uspořádána podle jednoho pravidla, obdržíme — jak se snadno dokáže — nové uspořádání, řekneme-li, že v novém smyslu je A před B tehdy a jenom tehdy, jestliže v původním smyslu je A za B. Nové uspořádání se nazývá *inversní* k původnímu; obě uspořádání jsou *navzájem* inversní.

Budiž **M** libovolná množina a **N** libovolná její část, při čemž **N** (a tím spíše **M**) má aspoň dva prvky. Každé pravidlo, které uspořádává množinu **M**, uspořádává zároveň i množinu **N**; mluvíme-li v následujícím o uspořádání části **N** uspořádané množiny **M**, máme vždy na mysli právě ono uspořádání množiny **N**, které je určeno daným uspořádáním množiny **M**.

Je-li **M** uspořádaná množina, je účelné přiřadit každé dvojici A, B prvků množiny **M** určité číslo rovné 0 nebo 1 nebo -1, které nazveme *znamením* dvojice A, B a označíme $\operatorname{sgn}(A, B)$:*)

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(A, B) &= 0, && \text{je-li } A = B; \\ \operatorname{sgn}(A, B) &= 1, && \text{je-li } A \text{ před } B; \\ \operatorname{sgn}(A, B) &= -1, && \text{je-li } A \text{ za } B. \end{aligned}$$

Snadno se přesvědčíme, že číslo $\operatorname{sgn}(A, B)$ má následující tři vlastnosti:

(α) $\operatorname{sgn}(A, B) = 0$ pro $A = B$,
$\operatorname{sgn}(A, B) = \pm 1$ pro $A \neq B$;

(β) $\operatorname{sgn}(B, A) = -\operatorname{sgn}(A, B)$;

(γ) je-li $\operatorname{sgn}(A, B) = 1$ a zároveň $\operatorname{sgn}(B, C) = 1$, je také $\operatorname{sgn}(A, C) = 1$.

Obráceně se snadno přesvědčíme, že je-li každé dvojici A, B prvků množiny **M** přiřazeno číslo $\operatorname{sgn}(A, B)$ tak, že platí (α), (β), (γ), obdržíme uspořádání množiny **M**, definujeme-li, že „A před B" znamená $\operatorname{sgn}(A, B) = 1$.

Velmi důležitým příkladem uspořádané množiny je množina **R** všech reálných čísel. Jsou-li a, b reálná čísla, definujeme, že „a před b" znamená $a < b$ neboli $b > a$. Dospíváme takto k určitému uspořádání množiny **R**, které můžeme nazvat jejím *vzestupným uspořádáním.* Při inversním uspořádání množiny **R**, které můžeme nazvat jejím *sestupným uspořádáním*, „a před b" znamená naopak $a > b$ neboli $b < a$. Při vzestupném uspořádání je zřejmě

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(a, b) &= 0 && \text{tehdy a jenom tehdy, je-li } b - a = 0; \\ \operatorname{sgn}(a, b) &= 1 && \text{tehdy a jenom tehdy, je-li } b - a > 0; \\ \operatorname{sgn}(a, b) &= -1 && \text{tehdy a jenom tehdy, je-li } b - a < 0. \end{aligned}$$

*) Latinské slovo signum značí česky znamení.

Vše, co bylo právě řečeno, vztahuje se ovšem nejen na množinu $\mathbf{R}$ *všech* reálných čísel, nýbrž i na libovolnou část $\mathbf{M}$ množiny $\mathbf{R}$ (obsahující aspoň dva různé prvky), t. j. na množinu $\mathbf{M}$ složenou z reálných čísel (ale ne nutně ze všech reálných čísel) obsahující aspoň dvě reálná čísla, na př. na množinu všech racionálních čísel.

Budiž $\mathbf{M}$ libovolná uspořádaná množina a buďtež A, B dva různé dané její prvky. O prvku X množiny $\mathbf{M}$ pravíme, že leží *mezi* A a B, jestliže buďto je A před X a zároveň X před B (tedy A před B) nebo je B před X a zároveň X před A (tedy B před A). Je zřejmé, že leží-li X mezi A a B vzhledem k danému uspořádání množiny $\mathbf{M}$, leží X mezi A a B také vzhledem k inversnímu uspořádání množiny $\mathbf{M}$. Jestliže mezi dvěma různými prvky A, B množiny $\mathbf{M}$ neleží žádný prvek množiny $\mathbf{M}$, pravíme, že dvojice A, B tvoří *skok* uspořádané množiny $\mathbf{M}$. Pravíme, že množina $\mathbf{M}$ je *hustě uspořádaná*, nejsou-li v ní žádné skoky. Vzestupně (nebo sestupně) uspořádaná množina všech reálných čísel nemá žádné skoky; rovněž vzestupně (nebo sestupně) uspořádaná množina všech racionálních čísel nemá žádné skoky.

Budiž opět $\mathbf{M}$ libovolná uspořádaná množina. Budiž dáno rozdělení množiny $\mathbf{M}$ na dvě neprázdné části $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, tak, že každý prvek množiny $\mathbf{M}_1$ leží před každým prvkem množiny $\mathbf{M}_2$, při čemž množina $\mathbf{M}_1$ nemá žádný poslední prvek a množina $\mathbf{M}_2$ nemá žádný první prvek. Takové rozdělení množiny $\mathbf{M}$ se nazývá *mezera* v uspořádané množině $\mathbf{M}$. Budiž na př. $\mathbf{M}$ vzestupně uspořádaná množina všech racionálních čísel a budiž α určité iracionální číslo, na př. $\alpha = \sqrt{2}$. Budiž $\mathbf{M}_1$ množina všech racionálních čísel menších než α, $\mathbf{M}_2$ množina všech racionálních čísel větších než α. Vznikne mezera v množině $\mathbf{M}$ všech racionálních čísel a dá se ukázati, že takovým způsobem vznikne *každá* mezera ve vzestupně uspořádané množině všech racionálních čísel. Je-li však $\mathbf{M}$ vzestupně uspořádaná množina všech reálných čísel, dá se ukázati, že v $\mathbf{M}$ neexistuje vůbec žádná mezera.

27. ORIENTACE PŘÍMKY. Z nejelementárnější geometrie je známo, že bod může přímku probíhat ve dvou navzájem opačných smyslech (viz obr. 3, ve kterém jeden z obou smyslů je naznačen šipkou). Tento názorný fakt budeme nyní formulovat algebraicky.

Obr. 3.

Budiž dána přímka $\mathbf{E}_1$. Zvolme v $\mathbf{E}_1$ libovolnou lineární soustavu souřadnic. Jsou-li $\mathbf{u} = (u)$, $\mathbf{v} = (v)$ dva nenulové vektory na naší přímce, jsou obě čísla u, v různá od nuly a jsou možné dva případy. Jestliže čísla u, v mají totéž znamení (obě jsou kladná nebo obě jsou záporná), řekneme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou *souhlasné*. Jestliže však čísla u, v mají opačná znamení (jedno z nich je kladné a druhé záporné), řekneme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou *nesouhlasné*. Zřejmě existuje reálné číslo $c \neq 0$ tak, že $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$; je patrné, že $c > 0$, jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ souhlasné, $c < 0$, jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nesouhlasné. Z toho plyne, že pojem souhlasnosti a nesouhlasnosti vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je nezávislý na volbě soustavy souřadnic.

Zřejmě můžeme všechny nenulové vektory na přímce $\mathbf{E}_1$ rozdělit na dvě třídy tak, že dva vektory téže třídy jsou vždy navzájem souhlasné, dva vektory různých tříd jsou vždy navzájem nesouhlasné. *Orientovat přímku* $\mathbf{E}_1$ znamená vybrat vektory jedné z obou tříd a nazvat je *kladné vektory*; vektory druhé z obou tříd jsou potom *záporné vektory*. Zřejmě jsou možné právě dvě různé orientace přímky $\mathbf{E}_1$; pravíme, že jsou navzájem *opačné*. Orientace přímky $\mathbf{E}_1$ je jednoznačně určena, jestliže zvolíme libovolně vektor $\mathbf{e} \neq \mathbf{o}$ a rozhodneme, zdali $\mathbf{e}$ je kladný či záporný vektor. Rozhodneme-li, že $\mathbf{e}$ je kladný vektor, mluvíme o *orientaci určené vektorem* $\mathbf{e}$; opačná orientace je určena vektorem $-\mathbf{e}$. Je-li $\langle P; \mathbf{e} \rangle$ lineární soustava souřadnic na přímce $\mathbf{E}_1$, potom při orientaci určené vektorem $\mathbf{e}$ kladné vektory mají kladné souřadnice (a záporné vektory záporné souřadnice); pravíme, že tato orientace je *příslušná* dané lineární soustavě souřadnic.

Budiž dána *orientovaná přímka* $\mathbf{E}_1$, t. j. budiž dána přímka $\mathbf{E}_1$ a určitá její orientace. Jsou-li A, B dva různé body přímky $\mathbf{E}_1$, budiž $\operatorname{sgn}(A, B) = 1$, je-li vektor $B - A$ kladný, $\operatorname{sgn}(A, B) = -1$, je-li vektor $B - A$ záporný; splynou-li oba body A, B, je $B - A = \mathbf{o}$ a položíme $\operatorname{sgn}(A, B) = 0$. Snadno se přesvědčíme, že jsou splněny vlastnosti (α), (β), (γ) vyslovené v článku 26 na str. 69, takže máme definováno určité uspořádání, které nazveme *příslušným* dané orientaci přímky $\mathbf{E}_1$. Ježto přímku $\mathbf{E}_1$ lze orientovat dvěma navzájem opačnými způsoby, jsou dvě uspořádání přímky $\mathbf{E}_1$ jím příslušná; nazýváme je *přirozená uspořádání přímky* $\mathbf{E}_1$; obě přirozená uspořádání přímky $\mathbf{E}_1$ zřejmě jsou navzájem *opačná*.

Orientovaná přímka $\mathbf{E}_1$ má jediné přirozené uspořádání, totiž to, které je příslušné dané orientaci. Je-li $\langle P; \mathbf{e} \rangle$ lineární soustava souřadnic na přímce $\mathbf{E}_1$, potom přirozené uspořádání přímky $\mathbf{E}_1$ příslušné té její orientaci, která je příslušná soustavě $\langle P; \mathbf{e} \rangle$, nazveme krátce přirozeným uspořádáním příslušným soustavě $\langle P; \mathbf{e} \rangle$. Snadno se dokáže, že při tomto uspořádání *bod* $[x]$ *leží před bodem* $[y]$ *tehdy a jenom tehdy, jestliže souřadnice* x *je menší než souřadnice* y.

Je-li přímka $\mathbf{E}_1$ jedním z obou možných způsobů orientována, můžeme zavésti pojem *orientované vzdálenosti* dvou bodů A, B, kterou označíme $\overrightarrow{AB}$. Orientovaná vzdálenost je definována vzorcem

$$\overrightarrow{AB} = \pm \overline{AB}, \tag{27.1}$$

kde pro $A \neq B$ platí znamení plus nebo minus podle toho, zda vektor $B - A$ je kladný či záporný; je-li $A = B$, je $\overline{AB} = 0$ a na znamení ve (27.1) nezáleží.

Je-li na přímce $\mathbf{E}_1$ zavedena lineární soustava souřadnic $\langle P; \mathbf{e} \rangle$, potom při orientaci příslušné soustavě $\langle P; \mathbf{e} \rangle$ je zřejmě pro $A = [a]$, $B = [b]$:

$$\overrightarrow{AB} = (b - a) \,.\, |\mathbf{e}|, \tag{27.2}$$

speciálně pro *kartézskou* soustavu souřadnic:

$$\overrightarrow{AB} = b - a. \tag{27.2'}$$

Ze vzorce (27.2) snadno odvodíme, že pro libovolné tři body A, B, C na přímce $\mathbf{E}_1$ platí:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{27.3}$$

Obecněji platí pro libovolně velký počet bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na orientované přímce p:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}. \tag{27.4}$$

Poznamenejme ještě, že vždy jest

$$\overrightarrow{BA} = - \overrightarrow{AB}. \tag{27.5}$$

Je třeba míti dobře na paměti, že pojem orientované vzdálenosti dvou bodů na přímce je definován pouze pro *orientovanou* přímku.

Přejdeme-li k opačné orientaci přímky, potom orientovaná vzdálenost změní znamení.

Jsou-li A, B, C tři různé body na přímce $\mathbf{E}_1$, potom číslo

$$(27.6)\qquad \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$$

je zřejmě nezávislé na volbě orientace přímky $\mathbf{E}_1$; číslo (27.6) nazveme *dělicím poměrem* bodů A, C, B (v tomto pořadí) a označíme je

$$(27.7)\qquad (A; C, B).$$

Tedy dělicí poměr (27.7) je definován tehdy a jenom tehdy, jsou-li A, B, C tři různé body ležící na téže přímce a je dán vzorcem (27.6), ve kterém nezáleží na volbě orientace přímky.

Poznámka 1. Je-li $A \neq B$, $C = A + t(B - A)$, $0 \neq t \neq 1$, jsou A, B, C tři různé body, které leží na přímce. V lineární soustavě souřadnic $\langle A; B - A\rangle$ je $A = [0]$, $B = [1]$, $C = [t]$, takže podle (27.2) jest

$$(27.8)\qquad (A; C, B) = t.$$

Poznámka 2. Je-li $A \neq B$, je zřejmě C střed dvojice A, B tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$(27.9)\qquad (A; C, B) = \tfrac{1}{2}.$$

28. ÚSEČKY, POLOPŘÍMKY, POLOPROSTORY. Jsou-li dány v eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$ dva různé body A, B, nazveme *úsečkou* AB neboli *úsečkou* BA tu část přímky AB, která se skládá z bodu A, z bodu B a z těch dalších bodů X přímky AB, které při jejím přirozeném uspořádání leží mezi body A a B. Jsou sice dvě přirozená uspořádání přímky AB, ale jsou navzájem opačná, takže definice úsečky AB je nezávislá na tom, kterého z obou užijeme. Pravíme, že A, B jsou *krajní body* úsečky AB; každý jiný bod úsečky AB je *vnitřní* bod úsečky AB. Je-li na přímce AB zavedena lineární soustava souřadnic, ve které $A = [a]$, $B = [b]$, potom úsečka AB v případě $a < b$ je množina těch bodů $[x]$ přímky AB, pro něž $a \leqq x \leqq b$; v případě $a > b$ je úsečka AB množina těch $[x]$, pro něž $b \leqq x \leqq a$. Z toho je patrné, že jestliže dvě úsečky splynou, musí krajní body jedné splynout s krajními body druhé. Dále je patrné, že je-li C vnitřní bod úsečky AB, potom úsečka AB se skládá z obou úseček AC, BC, které mimo společný krajní bod C nemají jiného společného bodu.

Snadno najdeme početní vyjádření úsečky AB, jsou-li A, B dva různé body eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$. Částí prostoru $\mathbf{E}_m$ je přímka AB, na které je $\langle A; B - A\rangle$ lineární soustava souřadnic. V této soustavě je $X = [t]$, je-li

(28.1) $X = A + t(B - A)$. Speciálně je $A = [0]$, $B = [1]$ a tudíž

úsečka AB je množina těch bodů (28.1), pro něž ve (28.1) jest

$$0 \leqq t \leqq 1. \tag{28.2}$$

Tedy *střed dvojice A, B leží na úsečce AB*; obdržíme jej ve tvaru (28.1) pro $t = \frac{1}{2}$.

Jsou-li A, B, C tři body prostoru $\mathbf{E}_m$, víme z článku 3, že platí trojúhelníková nerovnost

$$\overline{AC} + \overline{BC} \geqq \overline{AB}; \tag{28.3}$$

porovnáme-li (3.24) a (3.23) se (28.1) a (28.2), vidíme, že *pro $A \neq B$ platí v trojúhelníkové nerovnosti* (28.3) *znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, je-li C bod úsečky AB.*

Zvolme nyní na dané přímce $\mathbf{E}_1$ libovolně bod C. Jsou-li $A \neq C$, $B \neq C$ dva další body přímky $\mathbf{E}_1$, řekneme, že *body A, B jsou na přímce $\mathbf{E}_1$ od sebe odděleny bodem C*, jestliže je $A \neq B$ a mimo to bod C náleží do úsečky AB. (Ježto $A \neq C$, $B \neq C$, je potom C vnitřním bodem úsečky AB.) Z definice úsečky AB je patrné, že body A, B jsou na přímce $\mathbf{E}_1$ od sebe odděleny bodem C tehdy a jenom tehdy, jestliže bod C leží mezi body A, B, což opět znamená, že oba vektory

$$C - A,\ C - B$$

jsou nenulové a navzájem nesouhlasné. Z toho plyne, že všecky body $X \neq C$ naší přímky $\mathbf{E}_1$ můžeme rozdělit na dvě třídy tak, že dva body téže třídy nejsou a dva body různých tříd jsou na přímce $\mathbf{E}_1$ od sebe odděleny bodem C. *Polopřímkou s počátkem C* nazveme tu část přímky $\mathbf{E}_1$, která se skládá z bodu C a ze všech bodů jedné z obou právě popsaných tříd; každý bod $X \neq C$ polopřímky s počátkem C nazveme *vnitřním bodem* této polopřímky. Máme tedy na přímce E_1 právě dvě polopřímky s počátkem C, které dohromady vyplní celou přímku E_1, a které mimo bod C nemají jiného společného bodu. Takové dvě polopřímky se společným počátkem se jmenují navzájem *opačné*. Jsou-li C, A dva různé body přímky E_1, potom *polopřímka* CA je ta polopřímka, která má počátek C a která mimo to obsahuje bod A. Je-li B kterýkoli jiný bod polopřímky CA, potom polopřímka CA splyne s polopřímkou CB.

Jsou-li C, A dva různé body eukleidovského prostoru E_m, potom přímka CA se skládá ze všech bodů X prostoru E_m, které jsou tvaru

$$X = C + t(A - C). \tag{28.4}$$

Je tedy $X - C = t(A - C)$ a vektory $X - C$, $A - C$ jsou souhlasné tehdy a jenom tehdy, jestliže číslo t je kladné. Tedy polopřímka CA je množina všech těch bodů tvaru (28.4), pro něž je $t \geqq 0$; opačná polopřímka je množina všech těch bodů tvaru (28.4), pro něž je $t \leqq 0$.

Je-li CA libovolná polopřímka s počátkem C, potom zřejmě máme právě jedno přirozené uspořádání přímky CA, při kterém je C *prvním* bodem polopřímky CA; polopřímka CA se skládá z bodu C a ze všech těch dalších bodů přímky CA, které jsou za bodem C. O tomto přirozeném uspořádání přímky CA pravíme, že je *určeno* polopřímkou CA. Také o orientaci přímky CA, ke které je příslušné toto přirozené uspořádání, pravíme, že je *určena* polopřímkou CA. Zřejmě orientace přímky CA určená polopřímkou CA jest orientace určená vektorem $A - C$.

Budiž nyní v eukleidovském prostoru E_m dána nadrovina E_{m-1}. Jsou-li A, B dva body prostoru E_m, z nichž žádný neleží v nadrovině E_{m-1}, pravíme, že *body A, B jsou od sebe odděleny nadrovinou* E_{m-1}, jestliže je $A \neq B$ a mimo to úsečka AB protne nadrovinu E_{m-1}, t. j. má s ní společný bod, který je nutně vnitřním bodem úsečky AB, protože ani A ani B nenáleží do E_{m-1}. Dokážeme, že množinu všech bodů prostoru E_m, které nenáležejí do nadroviny E_{m-1}, můžeme rozdělit na dvě třídy tak, že dva body téže třídy nejsou a dva body různých tříd jsou od sebe odděleny nadrovinou E_{m-1}. Je-li $m = 1$, potom nadrovina E_{m-1} je bod a správnost učiněného tvrzení je nám již známa. Budiž tedy $m \geqq 2$. Označme V_m zaměření prostoru E_m, V_{m-1} zaměření prostoru E_{m-1}. Podle věty 13.1 můžeme udat vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$, $\mathbf{u}$ tak, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$ tvoří basi pro $\mathbf{V}_{m-1}$, vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$, $\mathbf{u}$ basi pro $\mathbf{V}_m$. Zvolme ještě libovolně bod C v nadrovině $\mathbf{E}_{m-1}$. Potom každý bod X prostoru $\mathbf{E}_m$ lze právě jedním způsobem napsat ve tvaru

$$X = C + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_{m-1}\mathbf{u}_{m-1} + x\mathbf{u}, \tag{28.5}$$

při čemž bod X náleží do $\mathbf{E}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $x = 0$. Ty body (28.5), které nenáležejí do $\mathbf{E}_{m-1}$, t. j. ty, pro něž je $x \neq 0$, rozdělme do dvou tříd tak, že v prvé třídě je $x > 0$, ve druhé $x < 0$. Dokážeme, že takto definované třídy mají žádanou vlastnost. Budiž tedy

$$A = C + a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{m-1}\mathbf{u}_{m-1} + a\mathbf{u},$$
$$B = C + b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_{m-1}\mathbf{u}_{m-1} + b\mathbf{u},$$

kde $A \neq B$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Máme dokázati, že úsečka AB protne nadrovinu $\mathbf{E}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $ab < 0$. Avšak úsečka AB je množina všech bodů tvaru

$$X = A + t(B - A), \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

a bod tohoto tvaru náleží do $\mathbf{E}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$a + t(b - a) = 0, \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{28.6}$$

Ježto $a \neq 0$, $b \neq 0$, lze položit $b = ka$, kde $k \neq 0$ a napsat (28.6) ve tvaru

$$1 + t(k - 1) = 0, \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{28.6'}$$

Máme dokázat, že tehdy a jenom tehdy, je-li $k < 0$, lze určit t tak, aby platilo (28.6'). Je-li $k < 0$, je $1 - k > 1$ a (28.6') platí pro $t = 1 : (1 - k)$. Není-li $k < 0$, je buďto $k = 1$ nebo $k > 1$ nebo $0 < k < 1$. Je-li $k = 1$, je zřejmě (28.6') nemožné. Je-li $k > 1$, potom pro $t \geqq 0$ je $1 + t(k - 1) \geqq 1$ a (28.6') je opět nemožné. Je-li $0 < k < 1$, potom $1 + t(k - 1) = 0$ platí pouze pro $t = 1 : (1 - k) > 1$ a (28.6') je zase nemožné.

Dokázali jsme, že množinu všech bodů prostoru $\mathbf{E}_m$, které nenáležejí do nadroviny $\mathbf{E}_{m-1}$, lze rozdělit na dvě třídy tak, že dva body A, B, z nichž žádný nenáleží do $\mathbf{E}_{m-1}$, jsou od sebe odděleny nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, je-li každý z nich v jiné z obou tříd. Nazveme *poloprostorem vyťatým nadrovinou* $\mathbf{E}_{m-1}$ množinu složenou ze všech bodů nadroviny $\mathbf{E}_{m-1}$ a ze všech bodů jedné z obou našich tříd. Jsou tedy právě dva poloprostory vyťaté nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$, které dohromady vyplní celý prostor $\mathbf{E}_m$. Body společné oběma poloprostorům vyplní nadrovinu $\mathbf{E}_{m-1}$, kterou nazveme *hranicí* obou poloprostorů. Bod, který neleží v $\mathbf{E}_{m-1}$, náleží do právě jednoho z obou poloprostorů; pravíme, že je jeho *vnitřním bodem.*

Z předcházejícího je patrné, že jestliže vektor $\mathbf{u}$ neleží v $\mathbf{E}_{m-1}$, potom každý bod X prostoru $\mathbf{E}_m$ se dá právě jedním způsobem napsat ve tvaru

$$X = X_0 + x\mathbf{u}, \tag{28.7}$$

kde X_0 je bod nadroviny $\mathbf{E}_{m-1}$. Jeden z obou poloprostorů vyťatých nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$ je množina všech těch bodů tvaru (28.7), pro něž je $x \geqq 0$, druhý množina těch, pro něž $x \leqq 0$.

Pro $m = 1$ pojem poloprostoru vyťatého nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$ splývá s pojmem polopřímky s počátkem v bodě $\mathbf{E}_{m-1}$. Pro $m = 2$ nadrovina $\mathbf{E}_{m-1}$ je přímkou a místo slova poloprostor užíváme slova *polorovina.* Pro $m = 3$ nadrovina $\mathbf{E}_{m-1}$ je rovinou.

29. DETERMINANT PŘECHODU. Pojem orientace přímky jsme zavedli v článku 27; nyní provedeme přípravu, na jejímž základě zavedeme v článku 30 pojem orientace prostoru $\mathbf{E}_m$ pro $m \geqq 2$. Při tom budeme předpokládati, že čtenář zná z algebry definici a nejjednodušší vlastnosti determinantů, ačkoli pojem orientace by se dal zavésti také nezávisle na pojmu determinantu, který je však i jinak v analytické geometrii důležitý.

Předpokládejme nejprve, že v prostoru $\mathbf{E}_m$ je dána určitá base

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \tag{29.1}$$

kterou stručně označme $\mathbf{B}$. Je-li dáno libovolných m vektorů

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \tag{29.2}$$

potom existují a jsou jednoznačně určena reálná čísla $a_{11}, \ldots, a_{1m}, \ldots, a_{mm}$ tak, že

$$\mathbf{v}_r = a_{r1}\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{rm}\mathbf{u}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m. \tag{29.3}$$

Sestavíme determinant

$$(29.4) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, \ldots, a_{mm} \end{vmatrix}$$

a označíme jej

$$(29.5) \qquad [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]^{\mathbf{B}}.$$

Pro $m = 1$ je (29.3) jediná rovnice $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u}_1$ a symbol (29.5) pro $m = 1$ znamená číslo a. V dalším textu článku předpokládáme $m \geqq 2$.

Předpokládajíce, že base $\mathbf{B}$ je pevně zvolena, vyslovíme čtyři jednoduché věty o závislosti čísla (29.5) na vektorech (29.2), které jsou bezprostředním důsledkem nejjednodušších vlastností determinantů:

VĚTA 29.1. *Při permutaci vektorů* (29.2) *číslo* (29.5) *zůstane nezměněno nebo se znásobí číslem* -1 *podle toho, zda provedená permutace je sudá či lichá.*

VĚTA 29.2. *Jestliže jeden z vektorů* (29.2) *znásobíme číslem* a, *také číslo* (29.5) *se znásobí číslem* a.

VĚTA 29.3. *Budiž* $\mathbf{v}_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$ jeden z vektorů (29.2). *Je-li*

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r' + \mathbf{v}_r'' + \ldots,$$

potom číslo (29.5) *je rovné součtu těch čísel, která vzniknou, nahradíme-li vektor* $\mathbf{v}_r$ *postupně jednotlivými vektory* $\mathbf{v}_r', \mathbf{v}_r'', \ldots$

VĚTA 29.4. *Číslo* (29.5) *je rovné nule tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory* (29.2) *jsou mezi sebou lineárně závislé.*

Dosud jsme předpokládali, že base (29.1) byla pevně zvolena. Přistoupíme ke studiu otázky, jak se změní výraz (29.5) při změně base $\mathbf{B}$.

VĚTA 29.5. *Jsou-li* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ *dvě base prostoru* $\mathbf{E}_m$, *existuje reálné číslo* c [závislé na basích $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$, ale ne na vektorech (29.2)] *tak, že pro každou volbu vektorů* (29.2) *jest*

$$(29.6) \qquad [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]^{\mathbf{B}} = c \,.\, [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]^{\mathbf{B}'}.$$

DŮKAZ. Přechod od jedné base ke druhé se dá podle věty 12.7 vždy rozložit na několik elementárních změn. Tyto elementární změny base jsou tří typů (a), (b), (c) vyjmenovaných na str. 35. Stačí tedy dokázat, že (29.6) platí pro každou elementární změnu base. Že tomu tak je, plyne opět z nejjednodušších vlastností determinantů. Elementární změna typu (a) je permutace vektorů (29.1), která se projeví v permutaci sloupců determinantů (29.4), takže platí (29.6), při čemž $c = 1$ pro sudou permutaci, $c = -1$ pro lichou permutaci. Při elementární změně typu (b) je mezi vektory (29.1) jeden $\boldsymbol{u}_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$, který se nahradí vektorem $\boldsymbol{u}'_r = a\boldsymbol{u}_r$, kde $a \neq 0$. V determinantu (29.4) je potom třeba r-tý sloupec znásobit číslem $1 : a$, takže platí (29.6), při čemž $c = a$. Při elementární změně typu (c) je mezi vektory (29.1) jeden $\boldsymbol{u}_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$, který se nahradí vektorem $\boldsymbol{u}'_r = \boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{w}$, kde $\boldsymbol{w}$ je lineární kombinace vektorů (29.1); v determinantu (29.4) zůstane r-tý sloupec beze změny a ke každému jinému sloupci se přičte určitý násobek r-ho sloupce, takže platí (29.6), při čemž $c = 1$.

V definici výrazu (29.5) se předpokládá, že vektory (29.1) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, kdežto o vektorech (29.2) jsme takový předpoklad neučinili. Jsou-li však vektory (29.2) mezi sebou lineárně závislé, je výraz (29.5) podle věty 29.4 vždy roven nule. Proto se omezíme na ten případ, že nejen vektory (29.1), nýbrž i vektory (29.2) jsou mezi sebou lineárně nezávislé. Výraz (29.5) nazveme potom *determinantem přechodu od base* (29.1) *k basi* (29.2). Z věty 29.4 plyne:

VĚTA 29.6. *Determinant přechodu je vždy různý od nuly.*

Z definice je zřejmé:

VĚTA 29.7. *Determinant přechodu od base k téže basi je vždy roven jedné.*

VĚTA 29.8. *Jsou-li $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$ tři base prostoru $\mathbf{E}_m$, je determinant přechodu od base $\mathbf{B}$ k basi $\mathbf{B}''$ roven součinu determinantu přechodu od base $\mathbf{B}$ k basi $\mathbf{B}'$ s determinantem přechodu od base $\mathbf{B}'$ k basi $\mathbf{B}''$.*

DŮKAZ. Budiž (29.1) base $\mathbf{B}$, (29.2) base $\mathbf{B}'$,

$$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m \tag{29.7}$$

base $\mathbf{B}''$. Podle věty 29.5 existuje takové c, že

$$[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]^{\mathbf{B}} = c \,.\, [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]^{\mathbf{B}'},$$
$$[\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m]^{\mathbf{B}} = c \,.\, [\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m]^{\mathbf{B}'}.$$

Avšak podle věty 29.7 je $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]^{\mathbf{B}'} = 1$, takže $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]^{\mathbf{B}} = c$, tedy

$$[\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]^B = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]^B \cdot [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]^{B'},$$

což jsme měli dokázat.

30. ORIENTACE EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Budiž zvolena pomocná base $\mathbf{B}$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Zaveďme tuto definici: Dvě base (29.2), (29.7) nazveme *souhlasné*, jestliže determinanty přechodu

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]^B, \ [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]^B, \tag{30.1}$$

které jsou podle věty 29.6 různé od nuly, jsou buďto oba kladné nebo oba záporné; base (29.2), (29.7) nazveme *nesouhlasné*, jestliže z obou determinantů přechodu (30.1) je jeden kladný a druhý záporný. Při tom nezáleží na volbě pomocné base $\mathbf{B}$, neboť z věty 29.8 plyne:

VĚTA 30.1. *Base $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$ jsou souhlasné, jestliže determinant přechodu od base $\mathbf{B}'$ k basi $\mathbf{B}''$ je kladný, nesouhlasné, je-li tento determinant záporný.*

Z definice je patrné, že všecky base prostoru $\mathbf{E}_m$ můžeme rozdělit na dvě třídy tak, že dvě base téže třídy jsou vždy navzájem souhlasné, dvě base různých tříd navzájem nesouhlasné. Pro $m = 1$ base se skládá z jediného nenulového vektoru, takže pro $m = 1$ se vracíme k definici souhlasnosti a nesouhlasnosti dvou nenulových vektorů na přímce vyslovené již v článku 27. Pro $m \geqq 2$ je třeba míti na paměti, že podle věty 29.1 třída base závisí na pořadí vektorů, z nichž je base složena. Nyní definujeme dále (pro $m = 1$ v souhlase s definicí článku 27): *Orientovat prostor* $\mathbf{E}_m$ znamená vybrat jednu z obou tříd a base této třídy nazvat *kladné base* prostoru $\mathbf{E}_m$; base druhé třídy jsou potom *záporné base*. Existují tedy právě dvě orientace prostoru $\mathbf{E}_m$; pravíme, že jsou navzájem *opačné*. Orientace prostoru $\mathbf{E}_m$ je jednoznačně určena, jestliže zvolíme libovolně jednu basi

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \tag{30.2}$$

a rozhodneme, zda je kladná či záporná. Rozhodneme-li, že base (30.2) je kladná, mluvíme o *orientaci určené basí* (30.2). Je-li

$$\langle P; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle \tag{30.3}$$

lineární soustava souřadnic, potom při dané orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$ ji nazveme *kladnou* nebo *zápornou* podle toho, zda base (30.2) je kladná či záporná. Orientace *příslušná* soustavě (30.3) je ta orientace, při které base (30.2) je kladná, t. j. je to orientace určená basí (30.2)

Poznámka 1. Pojem orientace a všecky úvahy článku 29 je zřejmě možné přenésti na libovolný vektorový prostor $\mathbf{V}_m$ konečné dimense $m > 0$.

Poznámka 2. Buďtež dány tři base: base (30.2), kterou označíme $\mathbf{B}$, base (29.2), kterou označíme $\mathbf{B}'$, base (29.7), kterou označíme $\mathbf{B}''$. Určeme čísla $a_{11}, \ldots, a_{mm}$ tak, že platí (29.3); potom (29.4) je determinant přechodu od base $\mathbf{B}$ k basi $\mathbf{B}'$. Dále určeme čísla $b_{11}, \ldots, b_{mm}$ tak, že platí

$$\mathbf{w}_r = b_{r1}\mathbf{v}_1 + \ldots + b_{rm}\mathbf{v}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m; \tag{30.4}$$

potom

$$\begin{vmatrix} b_{11}, & \ldots, & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1}, & \ldots, & b_{mm} \end{vmatrix} \tag{30.5}$$

je determinant přechodu od base $\mathbf{B}'$ k basi $\mathbf{B}''$. Nyní zaveďme čísla c_{rs} tak, že

$$c_{rs} = b_{r1}a_{1s} + \ldots + b_{rm}a_{ms} \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,\ 1 \leqq s \leqq m. \tag{30.6}$$

Podle (29.3), (30.4) a (30.6) je

$$\mathbf{w}_r = c_{r1}\mathbf{u}_1 + \ldots + c_{rm}\mathbf{u}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m, \tag{30.7}$$

takže

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & \ldots, & c_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1}, & \ldots, & c_{mm} \end{vmatrix} \tag{30.8}$$

je determinant přechodu od base $\mathbf{B}$ k basi $\mathbf{B}''$. Podle věty 29.8 je tedy determinant (30.8) součinem determinantů (29.4) a (30.5). V algebře se dokazuje věta o násobení determinantů, podle které, zvolíme-li libovolně čísla $a_{11}, \ldots, a_{mm}$, $b_{11}, \ldots, b_{mm}$ a definujeme-li čísla $c_{11}, \ldots, c_{mm}$ pomocí (30.6), je determinant (30.8) roven součinu determinantů (29.4) a (30.5). Náš důkaz věty o násobení determinantů není úplný, protože jsme při důkazu učinili předpoklad, že determinanty (29.4) a (30.5) jsou různé od nuly; bylo by snadné tuto neúplnost odstranit.

Buďtež nyní v prostoru $\mathbf{E}_m$ dány dva různé navzájem rovnoběžné lineární podprostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ téže dimense k. Oba podprostory $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ mají totéž zaměření $\mathbf{V}_k$. Jelikož orientace eukleidovského prostoru závisí pouze na jeho zaměření, odpovídá každé orientaci prostoru $\mathbf{E}_k$ určitá orientace prostoru $\mathbf{E}'_k$, kterou nazveme *souhlasnou* s danou orientací prostoru $\mathbf{E}_k$.

V případě $k = 1$ platí:

VĚTA 30.2. *Buďtež AB, $A'B'$ dvě různé rovnoběžky. Orientace přímky AB určená vektorem $B - A$ a orientace přímky $A'B'$ určená vektorem $B' - A'$ jsou souhlasné tehdy a jenom tehdy, jestliže úsečky AB', BA' se protnou.*

DŮKAZ. Budiž

$$B' - A' = c(B - A), \tag{30.9}$$

takže $c \neq 0$ a obě orientace jsou souhlasné pro $c > 0$, nesouhlasné pro $c < 0$. Máme dokázati, že $c > 0$ je nutná a postačující podmínka, aby úsečky AB', BA' měly společný bod, t. j. aby existovala taková čísla x, y, že

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \tag{30.10}$$

$$A + x(B' - A) = B + y(A' - B). \tag{30.11}$$

Podmínku (30.11) můžeme upravit na tvar

$$B - A - x(B' - A) + y(A' - B) = \mathbf{o}.$$

Sem můžeme dosadit jednak

$$A' - B = (A' - A) - (B - A),$$

jednak podle (30.9)

$$B' - A = (A' - A) + c(B - A)$$

a dostaneme

$$(1 - cx - y)(B - A) + (y - x)(A' - A) = \mathbf{o}. \tag{30.11'}$$

Ježto rovnoběžky AB, $A'B'$ jsou různé, jsou vektory $B - A$, $A' - A$ mezi sebou lineárně nezávislé, takže (30.11'), tedy (30.11), platí tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$x = y, \quad (1 + c)\,x = 1. \tag{30.12}$$

Ježto $c \neq 0$, lze splnit (30.10) a (30.12) tehdy a jenom tehdy, jestliže $c > 0$.

Budiž nyní v prostoru $\mathbf{E}_m$ ($m \geqq 2$) dána nadrovina ϱ. Zvolme bod P v nadrovině ϱ a basi

$$(30.13) \qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$$

nadroviny ϱ. Připojením dalšího vektoru $\mathbf{u}_m$ dostaneme basi

$$(30.14) \qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$$

prostoru $\mathbf{E}_m$. Libovolný bod má tvar

$$(30.15) \qquad X = P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m,$$

při čemž $x_m \geqq 0$ v jednom a $x_m \leqq 0$ ve druhém z obou poloprostorů vyťatých nadrovinou ϱ.

Předpokládejme nyní, že *jak nadrovina ϱ tak i celý prostor $\mathbf{E}_m$ jsou určitým způsobem orientovány*. Potom můžeme předpokládat, že (30.13) je kladná base nadroviny ϱ, (30.14) kladná base prostoru $\mathbf{E}_m$. [Kdyby (30.14) byla záporná base pro $\mathbf{E}_m$, stačilo by zaměnit $\mathbf{u}_m$ za $-\mathbf{u}_m$.] Za těchto předpokladů nazveme *kladným poloprostorem vyťatým nadrovinou ϱ* ten, ve kterém je $x_m \geqq 0$, *záporným* ten, ve kterém je $x_m \leqq 0$. Je třeba se přesvědčit, že při daných orientacích nadroviny ϱ a prostoru $\mathbf{E}_m$ je pojem kladného poloprostoru vyťatého nadrovinou ϱ určen jednoznačně, t. j., že nezávisí na bližší volbě basí (30.13) pro ϱ, (30.14) pro $\mathbf{E}_m$. Za tím účelem zvolme pomocnou kladnou basi $\mathbf{B}$ pro $\mathbf{E}_m$. Ježto base (30.14) je kladná, jest

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]^{\mathbf{B}} > 0.$$

Podle vět 29.2 až 29.4 plyne ze (30.15), že

$$(30.16) \qquad [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, X - P]^{\mathbf{B}} = x_m \,.\, [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]^{\mathbf{B}},$$

tedy

$$(30.17) \qquad [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, X - P]^{\mathbf{B}} \geqq 0$$

tehdy a jenom tehdy, leží-li bod X v kladném poloprostoru vyťatém nadrovinou ϱ. V podmínce (30.17) se už nevyskytuje base (30.14) prostoru $\mathbf{E}_m$, nýbrž pouze base (30.13) nadroviny ϱ. Budiž

$$(30.18) \qquad \mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_{m-1}$$

jiná kladná base nadroviny ϱ a budiž D determinant přechodu od base (30.18) k basi (30.13), takže $D > 0$.

Zřejmě

$$(30.19) \qquad \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_{m-1}, \boldsymbol{u}_m$$

je base prostoru $\mathbf{E}_m$ a z definice determinantu přechodu a z nejjednodušších vlastností determinantů plyne, že D je zároveň determinant přechodu od base (30.19) k basi (30.14). Ježto $D > 0$, je také (30.19) kladná base pro $\mathbf{E}_m$. Z věty 29.8 [ve které místo basí $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{B}''$ vezmeme base $\boldsymbol{B}$, (30.19), (30.14)] plyne, že

$$(30.20) \qquad [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m]^{\boldsymbol{B}} = D[\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_{m-1}, \boldsymbol{u}_m]^{\boldsymbol{B}}.$$

Vedle (30.16) platí ovšem také obdobný vztah

$$(30.16') \qquad [\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_{m-1}, X - P]^{\boldsymbol{B}} = x_m \,.\, [\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_{m-1}, \boldsymbol{u}_m]^{\boldsymbol{B}};$$

zde je třeba si uvědomit, že při přechodu od base (30.19) k basi (30.14) koeficient x_m zůstane beze změny. Ze (30.16), (30.16′) a (30.20) plyne, že

$$[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{m-1}, X - P]^{\boldsymbol{B}} = D[\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_{m-1}, X - P]^{\boldsymbol{B}};$$

ježto $D > 0$, smysl nerovností (30.17) se nezmění při přechodu od base (30.18) k basi (30.13).

Pojem kladného poloprostoru vyťatého nadrovinou ϱ závisí jednak na orientaci nadroviny ϱ, jednak na orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$.

Ponecháme-li orientaci nadroviny ϱ beze změny, ale změníme-li orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$, přejde kladný poloprostor v záporný. Neboť potom zůstane (30.13) kladnou basí pro ϱ, ale ve (30.14) zaměníme $\boldsymbol{u}_m$ za $-\boldsymbol{u}_m$, abychom dostali basi pro $\mathbf{E}_m$ kladnou při nové orientaci, a záměně $\boldsymbol{u}_m$ za $-\boldsymbol{u}_m$ podle (30.15) odpovídá záměna x_m za $-x_m$.

Ponecháme-li orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$ beze změny, ale změníme-li orientaci nadroviny ϱ, přejde kladný poloprostor v záporný. Neboť nyní můžeme $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_m$ zaměnit za $-\boldsymbol{u}_1$, $-\boldsymbol{u}_m$, čemuž opět (vedle záměny x_1 za $-x_1$, na které nezáleží) odpovídá záměna x_m za $-x_m$.

Změníme-li jak orientaci nadroviny ϱ tak i orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$, zůstane kladný poloprostor beze změny; to je už nyní zřejmé.

V elementárních případech roviny ($m = 2$) a obyčejného prostoru ($m = 3$) pojem orientace těsně souvisí s názorným pojmem *levé* *a pravé strany*. Jestliže v rovině (v názorném slova smyslu rovina) zavedeme způsobem popsaným v článku 1 kartézskou soustavu souřadnic tak, aby pozorovatel jdoucí po prvé ose souřadnic ve smyslu rostoucí prvé souřadnice měl po levé ruce body s kladnou druhou souřadnicí, a jestliže zavedeme orientaci roviny příslušnou této soustavě souřadnic, dá se dokázati, že pozorovatel, jdoucí po kterékoli orientované přímce p ve smyslu daném příslušným přirozeným uspořádáním přímky p, má po levé ruce kladnou polorovinu vyťatou přímkou p. V obyčejném prostoru zaveďme kartézskou soustavu souřadnic způsobem popsaným v článku 1, při čemž půdorysna nechť je vodorovná. V půdorysně zvolíme opět kartézskou soustavu souřadnic tak, aby pozorovatel kráčející nad půdorysnou po prvé ose souřadnic ve smyslu rostoucí prvé souřadnice měl po levé ruce body půdorysny s kladnou druhou souřadnicí; třetí souřadnice budiž kladná pro body nad půdorysnou. Zavedeme-li orientaci prostoru příslušnou zvolené kartézské soustavě souřadnic a pozorujeme-li orientovanou rovinu ϱ z kladného jí vyťatého poloprostoru, potom jsou-li A, B, C tři body roviny ϱ takové, že $B - A$, $C - A$ je kladná base pro ϱ, vidíme bod C nalevo od cesty vedoucí v rovině ϱ od bodu A k bodu B. Odůvodnění těchto fakt zde nebudeme probírat.

V

KOLMOST

31. KOLMOST SMĚRŮ. Budiž dán prostor $\boldsymbol{E}_m$, $m \geqq 2$. O dvou směrech $\{\boldsymbol{u}\}$, $\{\boldsymbol{v}\}$ pravíme, že jsou navzájem *kolmé*, je-li $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = 0$. K této definici jsme oprávněni, neboť je-li $\{\boldsymbol{u}'\} = \{\boldsymbol{u}\}$, $\{\boldsymbol{v}'\} = \{\boldsymbol{v}\}$, jest $\boldsymbol{u}' = a\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}' = b\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}' = ab \,.\, \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$, $ab \neq 0$, takže $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}' = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = 0$. Zřejmě:

VĚTA 31.1. *Žádný směr není sám k sobě kolmý.*

Ze (7.4) a (8.9) plyne:

VĚTA 31.2. *Je-li směr $\{\boldsymbol{v}\}$ kolmý na každý ze směrů*

$$\{\boldsymbol{u}_1\}, \ldots, \{\boldsymbol{u}_k\}, \tag{31.1}$$

je $\{\boldsymbol{v}\}$ také kolmý na každý směr obsažený v lineární soustavě $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$.

VĚTA 31.3. *Ke každému směru $\{\boldsymbol{u}\}$ existuje $(m-1)$-směr $\boldsymbol{W}_{m-1}$ tak, že směr $\{\boldsymbol{v}\}$ je kolmý na $\{\boldsymbol{u}\}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\{\boldsymbol{v}\}$ je obsažen ve* $\boldsymbol{W}_{m-1}$. Tato věta je zvláštním případem věty následující.

VĚTA 31.4. *Jsou-li směry* (31.1) *lineárně nezávislé* $(1 \leqq k \leqq m-1)$, *potom množina všech směrů kolmých na každý ze směrů* (31.1) *tvoří $(m-k)$-směr.*

DŮKAZ. Podle věty 15.2 můžeme najít orthonormální vektory

$$\boldsymbol{u}_1', \ldots, \boldsymbol{u}_k' \tag{31.2}$$

tak, že

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\} = \{\boldsymbol{u}_1', \ldots, \boldsymbol{u}_k'\}.$$

Podle věty 31.2 směr $\{\boldsymbol{w}\}$ je kolmý na všecky směry (31.1) tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}_r' = 0 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq k. \tag{31.3}$$

Podle věty 15.3 můžeme najít vektory

(31.4) $$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-k}$$

tak, že vektory (31.2) a (31.4) dohromady tvoří orthonormální basi pro $\mathbf{E}_m$. Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-k}$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé podle věty 15.1, takže stačí dokázati, že (31.3) platí tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{w}$ je lineární kombinací vektorů (31.4). Avšak ke každému vektoru $\mathbf{w}$ existují čísla $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{m-k}$ tak, že

(31.5) $$\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1' + \ldots + a_k\mathbf{u}_k' + b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_{m-k}\mathbf{v}_{m-k}.$$

Ježto vektory (31.2) a (31.4) dohromady jsou orthonormální, plyne ze (31.5), že

$$\mathbf{w}\mathbf{u}_r' = a_r \text{ pro } 1 \leqq r \leqq k,$$

čímž je vše dokázáno.

Z vět 31.2 a 31.4 plyne: *Ke každému k-směru* $\mathbf{W}_k$ $(1 \leqq k \leqq m - 1)$ *existuje* $(m - k)$*-směr* $\mathbf{W}_{m-k}'$ *tak, že směr* $\{\mathbf{v}\}$ *je kolmý na každý směr obsažený ve* $\mathbf{W}_k$ *tehdy a jenom tehdy, jestliže* $\{\mathbf{v}\}$ *náleží do* $\mathbf{W}_{m-k}'$. Tento $(m - k)$-směr $\mathbf{W}_{m-k}'$ nazveme *totálně kolmý* na k-směr $\mathbf{W}_{m-k}$. Ježto $m - (m - k) = k$, máme k $\mathbf{W}_{m-k}'$ opět totálně kolmý $\mathbf{W}_k^*$. Jestliže však směr $\{\mathbf{v}\}$ je obsažen ve $\mathbf{W}_k$, je $\{\mathbf{v}\}$ kolmý na každý směr obsažený ve $\mathbf{W}_{m-k}'$, t. j. $\mathbf{W}_k$ je částí $\mathbf{W}_k^*$ a podle věty 13.2 je $\mathbf{W}_k^* = \mathbf{W}_k$. Tedy:

VĚTA 31.5. *Je-li* $(m - k)$*-směr* $\mathbf{W}_{m-k}'$ *totálně kolmý na k-směr* $\mathbf{W}_k$, *je také obráceně* $\mathbf{W}_k$ *totálně kolmý na* $\mathbf{W}_{m-k}'$. Můžeme tedy říci, že $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}_{m-k}'$ jsou *navzájem* totálně kolmé.

Pravíme, že k-směr $\mathbf{W}_k$ a h-směr $\mathbf{W}_h'$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže jejich průnik obsahuje pouze $\mathbf{o}$; pravíme, že $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}_k'$ jsou *lineárně závislé*, jestliže jejich průnik má dimensi větší než 0, t. j. existuje-li aspoň jeden směr obsažený zároveň ve $\mathbf{W}_k$ i ve $\mathbf{W}_k'$. Speciálně k-směr $\mathbf{W}_k$ a směr $\{\mathbf{u}\}$ jsou lineárně závislé tehdy a jenom tehdy, jestliže $\{\mathbf{u}\}$ jest obsažen ve $\mathbf{W}_k$. Dva směry $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$ jsou lineárně závislé tehdy a jenom tehdy, jestliže splynou; tak jsme definovali již v článku 19 (str. 54). Podle článku 24 jsou k-směr $\mathbf{W}_k$ a h-směr $\mathbf{W}_h'$ lineárně nezávislé tehdy a jenom tehdy, jestliže jejich spojení má dimensi $k + h$, takže v prostoru $\mathbf{E}_m$ může tento případ nastati pouze tehdy, jestliže $k + h \leqq m$. Z věty 31.1 plyne, že jsou-li $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}_{m-k}'$ totálně kolmé, jsou lineárně nezávislé.

V prostoru $\mathbf{E}_2$ (v rovině) existuje ke každému směru $\{\mathbf{u}\}$ právě jeden kolmý směr, který je zároveň totálně kolmý na $\{\mathbf{u}\}$.

V prostoru $\mathbf{E}_3$ existuje ke každému směru $\{\mathbf{u}\}$ právě jeden totálně kolmý dvojsměr $\mathbf{W}_2$, který obyčejně nazýváme stručně kolmý na $\{\mathbf{u}\}$. Směr $\{\mathbf{v}\}$ je kolmý na směr $\{\mathbf{u}\}$ tehdy a jenom tehdy, je-li $\{\mathbf{v}\}$ obsažen ve dvojsměru $\mathbf{W}_2$ (totálně) kolmém na $\{\mathbf{u}\}$. K danému dvojsměru $\mathbf{W}_2$ existuje jediný kolmý směr $\{\mathbf{u}\}$, t. j. směr totálně kolmý na $\mathbf{W}_2$. Pravíme, že dvojsměr $\mathbf{W}'_2$ je kolmý na dvojsměr $\mathbf{W}_2$, jestliže směr $\{\mathbf{u}\}$ kolmý na $\mathbf{W}_2$ jest obsažen ve $\mathbf{W}'_2$, takže k danému dvojsměru $\mathbf{W}_2$ existuje nekonečně mnoho dvojsměrů k němu kolmých. Jestliže dvojsměr $\mathbf{W}'_2$ je kolmý na dvojsměr $\mathbf{W}_2$, potom je také obráceně $\mathbf{W}_2$ kolmý na $\mathbf{W}'_2$. Neboť podle předpokladu $\mathbf{W}'_2$ obsahuje směr $\{\mathbf{u}\}$ totálně kolmý na $\mathbf{W}_2$; máme dokázati, že směr $\{\mathbf{v}\}$ totálně kolmý na $\mathbf{W}'_2$ jest obsažen ve $\mathbf{W}_2$. To je však zřejmé, neboť směr $\{\mathbf{v}\}$ je podle své definice kolmý na každý směr obsažený ve $\mathbf{W}'_2$, takže $\{\mathbf{v}\}$ je zejména kolmý na $\{\mathbf{u}\}$ a z toho plyne, že $\{\mathbf{v}\}$ náleží do dvojsměru totálně kolmého na $\{\mathbf{u}\}$, t. j. do $\mathbf{W}_2$.

Vraťme se k případu libovolného m. Budiž dán k-směr $\mathbf{W}_k$ ($1 \leqq k \leqq m - 1$). Pravíme, že *směr* $\{\mathbf{u}\}$ *je kolmý na* $\mathbf{W}_k$, je-li $\{\mathbf{u}\}$ kolmý na každý směr obsažený ve $\mathbf{W}_k$, t. j. jestliže $\{\mathbf{u}\}$ náleží do $(m - k)$-směru totálně kolmého na $\mathbf{W}_k$. Je-li $1 \leqq h \leqq m - k$, pravíme, že *h-směr* $\mathbf{W}'_h$ *je kolmý na* $\mathbf{W}_k$, jestliže každý směr obsažený ve $\mathbf{W}'_h$ je kolmý na $\mathbf{W}_k$ neboli jestliže $\mathbf{W}'_h$ je částí $(m - k)$-směru totálně kolmého na $\mathbf{W}_k$. Je-li $h = m - k$, existuje k danému $\mathbf{W}_k$ jediný kolmý h-směr, totiž totálně kolmý $\mathbf{W}'_{m-k}$; je-li však $h < m - k$, existuje k danému $\mathbf{W}_k$ nekonečně mnoho kolmých h-směrů: jsou to právě ty h-směry, které jsou obsaženy v totálně kolmém $\mathbf{W}'_{m-k}$. V každém případě, je-li $\mathbf{W}'_h$ kolmý na $\mathbf{W}_k$ a je-li $h + k \leqq m$, ježto $\mathbf{W}'_h$ musí býti obsažen v $(m - k)$-směru totálně kolmém na $\mathbf{W}_k$, je každý směr obsažený ve $\mathbf{W}_k$ kolmý na $\mathbf{W}'_h$, t. j. nejen $\mathbf{W}'_h$ je kolmý na $\mathbf{W}_k$, nýbrž také $\mathbf{W}_k$ je kolmý na $\mathbf{W}'_h$, neboli právě definovaná kolmost je vztah vzájemný. Z definice plyne snadno, že jestliže $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_h$ jsou v prostoru $\mathbf{E}_m$ navzájem kolmé, při čemž $h + k \leqq m$, a jestliže $\mathbf{E}_m$ je vnořen do $\mathbf{E}_n$ (tedy $m \leqq n$), jsou $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_h$ navzájem kolmé také v prostoru $\mathbf{E}_n$.

Budiž dán k-směr $\mathbf{W}_k$ ($1 \leqq k \leqq m - 1$), ale budiž nyní $h + k > m$. Pravíme, že *h-směr* $\mathbf{W}'_h$ *je kolmý na* $\mathbf{W}_k$ *v prostoru* $\mathbf{E}_m$, jestliže každý směr $\{u\}$ prostoru E_m kolmý na W_k náleží do W'_h, t. j. jestliže W'_h obsahuje celý $(m - k)$-směr W''_{m-k} totálně kolmý na W_k. Je-li tomu tak a je-li $\{v\}$ směr kolmý na W'_h, potom $\{v\}$ je kolmý na každý směr obsažený ve W'_h a ježto W''_{m-k} je částí W'_h, je $\{v\}$ kolmý na W''_{m-k} a tedy $\{v\}$ náleží do k-směru totálně kolmého na W''_{m-k}, t. j. do W_k. Tím je dokázáno, že každý směr $\{v\}$ kolmý na W'_h náleží do W_k, t. j. je-li W'_h kolmý na W_k, je též W_k kolmý na W'_h. Tedy také v případě $h + k > m$ kolmost mezi W_k a W'_h je vztah vzájemný.

Jsou-li W_k, W'_h navzájem kolmé v prostoru E_m a je-li $h + k > m$, potom W'_h obsahuje celý $(m - k)$-směr W''_{m-k} totálně kolmý na W_k. Avšak W_k a W''_{m-k} jsou lineárně nezávislé, t. j. jejich průník obsahuje pouze o, takže jejich spojení má podle článku 24 dimensi m, což je ostatně patrné i z důkazu věty 31.4; tím spíše má spojení lineárních soustav W_k a W'_h dimensi m, takže *průnik* W_k a W'_h podle článku 24 *má dimensi* $h + k - m > 0$. Z toho plyne, že W_k a W'_h jsou lineárně závislé.

Jsou-li W_k, W'_h navzájem kolmé v prostoru E_m a je-li $h + k > m$, potom jestliže E_m je vnořen do E_n $(m < n)$, *nemohou býti* W_k, W'_h *navzájem kolmé v prostoru* E_n. Při důkaze rozeznávejme dva případy. Je-li předně $h + k \leq n$, nejsou W_k, W'_h navzájem kolmé v prostoru E_n proto, že jsou lineárně závislé. Je-li za druhé $h + k > n$, uvažme, že průnik W_k, W'_h má podle předcházejícího dimensi $h + k - m$, kdežto kdyby W_k, W'_h byly kolmé v E_n, musil by tento průnik míti dimensi $h + k - n$.

32. KOLMOST PŘÍMEK. O dvou přímkách p, q pravíme, že jsou navzájem *kolmé*, jsou-li jejich směry navzájem kolmé. Ježto tedy kolmost přímek závisí pouze na jejich směrech, platí:

VĚTA 32.1. *Jsou-li přímky p, q navzájem kolmé, jsou-li p, p' rovnoběžky a jsou-li q, q' rovnoběžky, jsou také přímky p', q' navzájem kolmé.*

Z věty 31.1 plyne:

VĚTA 32.2. *Dvě přímky navzájem kolmé nemohou býti rovnoběžné a tedy nemohou splynout.*

Jsou-li E_k, E'_h dva lineární podprostory eukleidovského prostoru E_m a je-li W_k zaměření E_k, W'_h zaměření E'_h, pravíme, že E_k a E'_h jsou navzájem *kolmé v prostoru* $\mathbf{E}_m$, jestliže $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_h$ jsou navzájem kolmé v prostoru $\mathbf{E}_m$ ve smyslu definic článku 31. V případě $k + h = m$ jsou $\mathbf{W}_k$ a $\mathbf{W}'_{m-k}$ totálně kolmé a pravíme také, že $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}'_{m-k}$ jsou *totálně kolmé.* Jsou-li lineární podprostory $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}'_h$ eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ navzájem kolmé v $\mathbf{E}_m$, potom jestliže $\mathbf{E}_m$ je vnořen do $\mathbf{E}_n$, jsou v případě $h + k \leqq m$ prostory $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}'_h$ také v prostoru $\mathbf{E}_n$ navzájem kolmé, ale v případě $h + k > m$ nemohou $\mathbf{E}_k$ a $\mathbf{E}'_h$ býti v prostoru $\mathbf{E}_n$ navzájem kolmé. Na př. dvě roviny ($h = k = 2$), které jsou navzájem kolmé v obyčejném prostoru $\mathbf{E}_3$, přestanou býti navzájem kolmé, vnoříme-li $\mathbf{E}_3$ do eukleidovského prostoru vyšší dimense.

V každém případě následuje z naší definice, že jsou-li $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_h$ navzájem kolmé, jsou-li $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}^*_k$, rovnoběžné a jsou-li $\mathbf{E}'_h$, $\mathbf{E}'^*_h$ rovnoběžné, jsou také $\mathbf{E}^*_k$, $\mathbf{E}'^*_h$ navzájem kolmé.

Je-li dán v prostoru $\mathbf{E}_m$ lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ a mimo to libovolný bod B, potom zřejmě bodem B prochází právě jeden lineární podprostor $\mathbf{E}'_{m-k}$ totálně kolmý na $\mathbf{E}_k$. Mimo tento $\mathbf{E}'_{m-k}$ procházejí bodem B ještě další lineární podprostory kolmé na $\mathbf{E}_k$: Předně všecky lineární podprostory $\mathbf{E}'_h$ dimensí $h \geqq 1, h < m - k$ procházející bodem B a obsažené v $\mathbf{E}'_{m-k}$ (tyto podprostory odpadnou, je-li $k = m - 1$, t. j. je-li $\mathbf{E}_k$ nadrovina). Za druhé všecky lineární podprostory $\mathbf{E}'_h$ dimensí $h \leqq \leqq m - 1$, $h > m - k$ procházející bodem B a obsahující $\mathbf{E}'_{m-k}$ jako část (tyto podprostory odpadnou, je-li $k = 1$, t. j. je-li $\mathbf{E}_k$ přímka, a tyto podprostory přestanou býti kolmé na $\mathbf{E}_k$, vnoříme-li $\mathbf{E}_m$ do $\mathbf{E}_n$) ($m < n$).

Kolmost libovolných lineárních podprostorů se dá převésti na kolmost přímek. Je-li dán lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ ($1 \leqq k \leqq m - 1$), potom přímky kolmé na $\mathbf{E}_k$ jsou ty přímky, které jsou kolmé na každou přímku obsaženou v $\mathbf{E}_k$; ostatně každá přímka, která je kolmá na k lineárně nezávislých přímek obsažených v $\mathbf{E}_k$, je kolmá na $\mathbf{E}_k$. Je-li dán libovolný bod B, potom všecky přímky jdoucí bodem B a kolmé na $\mathbf{E}_k$ vyplní lineární podprostor $\mathbf{E}'_{m-k}$ totálně kolmý na $\mathbf{E}_k$. Lineární podprostor $\mathbf{E}'_h$ ($h \neq m - k$) jdoucí bodem B je kolmý na $\mathbf{E}_k$: (1) v případě $h < m - k$ tehdy a jenom tehdy, je-li $\mathbf{E}'_h$ obsažen v $\mathbf{E}'_{m-k}$; (2) v případě $h > m - k$ tehdy a jenom tehdy, je-li $\mathbf{E}'_{m-k}$ obsažen v $\mathbf{E}'_h$; v případě (2) se kolmost poruší, vnoříme-li $\mathbf{E}_m$ do $\mathbf{E}_n$ ($m < n$).

33. VZDÁLENOST BODU OD LINEÁRNÍHO PODPROSTORU. Budiž $\{A; \boldsymbol{u}\}$ daná přímka p a budiž B daný bod v prostoru $\mathbf{E}_m$, $m \geqq 2$. Ke směru $\{\boldsymbol{u}\}$ přímky p máme v prostoru $\mathbf{E}_m$ totálně kolmý $(m - 1)$-směr $\mathbf{W}_{m-1}$; vektor $\boldsymbol{v}$ náleží do $\mathbf{W}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\boldsymbol{uv} = 0$. Přímka q jdoucí bodem B je kolmá na p tehdy a jenom tehdy, jestliže její směr $\{\boldsymbol{v}\}$ náleží do $\mathbf{W}_{m-1}$. Je-li $m = 2$, je směr $\{\boldsymbol{v}\}$ jednoznačně určen, bodem B prochází jediná přímka q kolmá na přímku p, která protíná přímku p v určitém bodě P, zvaném *pata kolmice*. (Leží-li bod B na přímce p, splyne bod P s bodem B.) Je-li $m \geqq 3$, potom bodem B prochází nekonečně mnoho přímek kolmých na přímku p, ale jestliže bod B neleží na přímce p, potom *jediná* z těchto přímek je různoběžná s přímkou p; o takové přímce pravíme, že *kolmo protíná* přímku p a její průsečík P s přímkou p opět nazveme *patou kolmice.* Abychom dokázali učiněná tvrzení, uvažme, že ježto p je přímka $\{A; \boldsymbol{u}\}$, musí býti

$$P = A + x\boldsymbol{u}.$$

Číslo x je třeba určiti tak, aby směr $\{B - P\}$ přímky q byl kolmý na směr $\{\boldsymbol{u}\}$. Avšak

$$B - P = B - A - x\boldsymbol{u}$$

a podmínka kolmosti zní podle (7.6)

$$\boldsymbol{u}(B - A) = x \,.\, |\boldsymbol{u}|^2,$$

čímž je číslo x jednoznačně určeno.

Předpokládejme opět, že bod B neleží na přímce p. Potom platí:

VĚTA 33.1. *Pata P kolmice na přímku p vedené bodem B má od bodu B menší vzdálenost než kterýkoli jiný bod přímky p.* Z tohoto důvodu se vzdálenost $\overline{BP}$ nazývá *vzdáleností bodu B od přímky p* (nebo přímky p od bodu B). Při důkaze můžeme předpokládati, že bod P splyne s bodem A (který jsme mohli na přímce p zvolit libovolně). Potom je $(B - A) \,.\, \boldsymbol{u} = 0$. Je-li nyní $C = A + x\boldsymbol{u}$ bod naší přímky různý od bodu A, takže $x \neq 0$, jest

$$|C - B|^2 = (B - A - x\boldsymbol{u})(B - A - x\boldsymbol{u}) = |B - A|^2 + |x\boldsymbol{u}|^2,$$

neboť $(B - A)\, \boldsymbol{u} = 0$. Ježto $x\boldsymbol{u} = C - A$, jest

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2, \tag{33.1}$$

při čemž $\overline{CA} > 0$, takže vskutku $\overline{BC} > \overline{BA}$. Rovnice (33.1) obsahuje známou *Pythagorovu větu.*

VĚTA 33.2. *Je-li d vzdálenost bodu B od přímky $\{A; \boldsymbol{u}\}$ a je-li $e > d$, potom existují na přímce $\{A; \boldsymbol{u}\}$ právě dva body C_1, C_2 ve vzdálenosti e od bodu B; pata kolmice vedené bodem B k přímce $\{A; \boldsymbol{u}\}$ je středem dvojice C_1, C_2.* Při důkaze můžeme opět předpokládati, že A je pata kolmice vedené bodem B k přímce $\{A; \boldsymbol{u}\}$, takže $d = \overline{AB}$; mimo to můžeme předpokládati, že $|\boldsymbol{u}| = 1$. Je-li $C = A + x\boldsymbol{u}$ bod naší přímky, je potom [viz (33.1)] $\overline{BC}^2 = d^2 + x^2$, takže ve vzdálenosti e od bodu B jsou na naší přímce body

$$C_1 = A + f\boldsymbol{u}, \quad C_2 = A - f\boldsymbol{u},$$

kde $f = \sqrt{e^2 - d^2}$; zřejmě A je střed dvojice C_1, C_2. Dále platí:

VĚTA 33.3. *Nechť platí předpoklady a označení věty* 33.2. *Leží-li bod C uvnitř úsečky C_1C_2, jest $\overline{BC} < e$; jestliže však bod C přímky C_1C_2 nenáleží do úsečky C_1C_2, jest $\overline{BC} > e$.* Neboť pro $C = A + x\boldsymbol{u}$ je opět $\overline{BC}^2 = d^2 + x^2$; leží-li C uvnitř úsečky C_1C_2, je $|x| < f$, tedy $\overline{BC}^2 < d^2 + f^2 = e^2$; jestliže však C nenáleží do úsečky C_1C_2, je $|x| > f$, tedy $\overline{BC}^2 > e^2$.

Obecněji budiž dán v prostoru $\mathbf{E}_m$ bod B a lineární podprostor $\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{W}_k\}$. Je-li nejprve $k = m - 1$, t. j. je-li $\mathbf{E}_k$ nadrovina, potom existuje v prostoru $\mathbf{E}_m$ jediný směr $\{\boldsymbol{v}\}$ kolmý na k-směr $\mathbf{W}_k$ a bodem B prochází jediná přímka $\{B; \boldsymbol{v}\}$ kolmá na $\mathbf{E}_k$, která podle konce článku 22 protne $\mathbf{E}_k$ v určitém bodě P zvaném *pata kolmice*. Je-li však $k \leq m - 2$, potom existuje v prostoru $\mathbf{E}_m$ nekonečně mnoho směrů kolmých na $\mathbf{W}_k$, které vyplní $(m - k)$-směr totálně kolmý na $\mathbf{W}_k$; je-li $\{\boldsymbol{v}\}$ kterýkoli z těchto směrů, potom přímka $\{B; \boldsymbol{v}\}$ prochází bodem B a je kolmá na $\mathbf{E}_k$. Jestliže bod B neleží v prostoru $\mathbf{E}_k$, potom všecky tyto přímky jsou mimoběžné s $\mathbf{E}_k$ až na jedinou z nich, která *kolmo protíná* prostor $\mathbf{E}_k$ v určitém bodě P zvaném opět *pata kolmice.* Abychom dokázali učiněné tvrzení, stačí uvážiti, že zřejmě existuje v prostoru $\mathbf{E}_m$ jediný $\mathbf{E}_{k+1}$ obsahující jak daný $\mathbf{E}_k$ tak i bod B; tento $\mathbf{E}_{k+1}$ musí obsahovat každou přímku procházející bodem B a různoběžnou s $\mathbf{E}_k$, a v prostoru $\mathbf{E}_{k+1}$ leží jediná přímka procházející bodem B a kolmá na $\mathbf{E}_k$.

Je-li opět P pata kolmice na prostor $\mathbf{E}_k$ vedené bodem B, potom vzdálenost $\overline{BP}$ se jmenuje *vzdálenost bodu B od prostoru $\mathbf{E}_k$* (nebo prostoru $\mathbf{E}_k$ od bodu B), protože je-li Q kterýkoli jiný bod prostoru $\mathbf{E}_k$, je $\overline{BP} < \overline{BQ}$, neboť P je zřejmě pata kolmice na přímku PQ vedené bodem B.

Jsou-li $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$ dva různé rovnoběžné lineární podprostory téže dimense k (na př. dvě rovnoběžné přímky), potom vzdálenost kteréhokoli bodu prostoru $\mathbf{E}_k$ od prostoru $\mathbf{E}'_k$ a vzdálenost kteréhokoli bodu prostoru $\mathbf{E}'_k$ od prostoru $\mathbf{E}_k$ jsou si rovny; jejich společná hodnota se jmenuje *vzdálenost obou rovnoběžných podprostorů* $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_k$. Budiž $\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{W}_k\}$, $\mathbf{E}'_k = \{B; \mathbf{W}_k\}$. Při libovolné volbě bodu A v prostoru $\mathbf{E}_k$ můžeme zvolit bod B v prostoru $\mathbf{E}'_k$ tak, že přímka AB je kolmá na $\mathbf{E}_k$ a tedy též na $\mathbf{E}'_k$. Je-li $\mathbf{u}$ libovolný vektor náležející do $\mathbf{W}_k$, je potom $(B - A)\,\mathbf{u} = 0$. Avšak při libovolném x je

$$(B + x\mathbf{u}) - (A + x\mathbf{u}) = B - A,$$

tudíž také přímka, která spojuje bod $A + x\mathbf{u}$ s bodem $B + x\mathbf{u}$ je kolmá na $\mathbf{E}_k$ i na $\mathbf{E}'_k$, takže vzdálenost bodu $A + x\mathbf{u}$ od prostoru $\mathbf{E}'_k$ i vzdálenost bodu $B + x\mathbf{u}$ od prostoru $\mathbf{E}_k$ jsou rovny vzdálenosti $\overline{AB}$.

Buďtež nyní p, q dvě mimoběžky. Podle článku 20 jsou obě mimoběžky obsaženy v jednoznačně určeném $\mathbf{E}_3$. Budiž $\{\mathbf{u}\}$ směr přímky p, $\{\mathbf{v}\}$ směr přímky q. Podle věty 31.4 existuje v prostoru $\mathbf{E}_3$ jediný směr $\{\mathbf{n}\}$ kolmý zároveň na $\{\mathbf{u}\}$ i na $\{\mathbf{v}\}$. Podle věty 21.1 existuje v $\mathbf{E}_3$ jediná příčka mimoběžek p, q se směrem $\{\mathbf{w}\}$; tato příčka se jmenuje *osa mimoběžek* p, q. Osa mimoběžek p, q protne p v bodě A, q v bodě B. Vzdálenost $\overline{AB}$ se jmenuje *vzdálenost mimoběžek* p, q, protože je menší než kterákoli jiná vzdálenost $\overline{XY}$, kde X leží na p, Y leží na q. Neboť budiž

$$X = A + x\mathbf{u}, \quad Y = B + y\mathbf{v}, \tag{33.2}$$

kde aspoň jedno z obou čísel x, y je různé od nuly. Ježto přímka AB je kolmá jak na p tak i na q, jest

$$(B - A)\,\mathbf{u} = 0, \quad (B - A)\,\mathbf{v} = 0. \tag{33.3}$$

Podle (33.2) je však

$$Y - X = (B - A) - x\mathbf{u} + y\mathbf{v},$$

takže podle (33.3)

$$\overline{XY}^2 = \overline{AB}^2 + x^2 \cdot |\mathbf{u}|^2 + y^2 \cdot |\mathbf{v}|^2.$$

Ježto není zároveň $x = 0$, $y = 0$, jest $\overline{XY} > \overline{AB}$.

Čtenář sám nechť definuje a vyšetří vzdálenost libovolných dvou neprotínajících se lineárních podprostorů $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{E}'_h$ prostoru $\mathbf{E}_m$.

34. VNĚJŠÍ SOUČIN. Budiž dána base

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \tag{34.1}$$

prostoru $\mathbf{E}_m$ ($m \geqq 2$), kterou označíme $\mathbf{B}$. Jsou-li

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \tag{34.2}$$

libovolné vektory v počtu m, zavedli jsme v článku 29 číslo

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]^{\mathbf{B}}, \tag{34.3}$$

které je rovné determinantu

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & \ldots, & u_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m1}, & \ldots, & u_{mm} \end{vmatrix}, \tag{34.4}$$

jestliže

$$\mathbf{u}_r = u_{r1}\mathbf{e}_1 + \ldots + u_{rm}\mathbf{e}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m. \tag{34.5}$$

Předpokládejme nyní, že base $\mathbf{B}$ je orthonormální. Potom je

$$\mathbf{u}_r\mathbf{u}_s = u_{r1}u_{s1} + \ldots + u_{rm}u_{sm} \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,\ 1 \leqq s \leqq m. \tag{34.6}$$

Užijme nyní věty o násobení determinantů podle řádků. (Tato věta vznikne z věty připomenuté v poznámce 2 na str. 81 překlopením determinantu (29.4) kolem hlavní diagonály, které, jak známo, nemá vlivu na hodnotu determinantu.) Podle této věty plyne ze (34.6), že druhá mocnina determinantu (34.4) je rovna determinantu

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1, & \ldots, & \mathbf{u}_1\mathbf{u}_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{u}_m\mathbf{u}_1, & \ldots, & \mathbf{u}_m\mathbf{u}_m \end{vmatrix}. \tag{34.7}$$

Tím je dokázáno, že *druhá mocnina čísla* (34.3) *má též hodnotu pro všecky orthonormální base* $\mathbf{B}$.

Zvolme nyní *určitou orientaci prostoru* $\mathbf{E}_m$ a omezme $\mathbf{B}$ na *kladné orthonormální base.* Potom víme, že číslo (34.3) je rovné nule, jsou-li vektory (34.2) mezi sebou lineárně závislé, je kladné, tvoří-li vektory (34.2) kladnou basi pro $\mathbf{E}_m$, a je záporné, tvoří-li vektory (34.2) zápornou basí pro $\mathbf{E}_m$. Tedy za učiněných předpokladů je číslo (34.3) nezávislé na bližší volbě base $\mathbf{B}$ a proto je označíme jednodušeji

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m] \tag{34.8}$$

a nazveme je *vnějším součinem* vektorů (34.2). Vnější součin má vlastnosti formulované ve větách 29.1 až 29.4, které si znovu vyslovíme:

VĚTA 34.1. *Jsou-li vektory* (34.2) *mezi sebou lineárně závislé, je vnější součin* (34.8) *roven nule a obráceně.*

VĚTA 34.2. *Při permutaci vektorů* (34.2) *vnější součin* (34.8) *zůstane nezměněn nebo se znásobí číslem* -1 *podle toho, zda provedená permutace je sudá či lichá.*

VĚTA 34.3. *Jestliže jeden z vektorů* (34.2) *znásobíme číslem* a, *potom také vnější součin* (34.8) *se znásobí číslem* a.

VĚTA 34.4. *Budiž* $\mathbf{u}_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$ *jeden z vektorů* (34.2). *Je-li*

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r' + \mathbf{u}_r'' + \ldots,$$

potom vnější součin (34.8) *je roven součtu těch vnějších součinů, které z něho vzniknou, nahradíme-li vektor* $\mathbf{u}_r$ *postupně jednotlivými vektory* $\mathbf{u}_r', \mathbf{u}_r'', \ldots$

VĚTA 34.5. *Vnější součin* (34.8) *je kladný, tvoří-li vektory* (34.2) *kladnou basi pro* $\mathbf{E}_m$, *záporný, tvoří-li vektory* (34.2) *zápornou basi pro* $\mathbf{E}_m$.

VĚTA 34.6. *Jest*

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m] \,.\, [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m] = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{u}_1\mathbf{v}_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{u}_m\mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{u}_m\mathbf{v}_m \end{vmatrix}.$$

Tuto větu jsme dokázali pro $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m$. Obecný důkaz je však úplně stejný.

Jest mítí na paměti, že vnější součin (34.8) je závislý na volbě orientace prostoru $\mathbf{E}_m$:

VĚTA 34.7. *Při změně orientace prostoru* $\mathbf{E}_m$ *každý vnější součin se znásobí číslem* -1.

Důkaz plyne snadno na př. z věty 29.5.

35. ORTHOGONÁLNÍ DOPLNĚK; VEKTOROVÝ SOUČIN. V orientovaném prostoru $\mathbf{E}_m$ ($m \geqq 2$) budiž dáno $m - 1$ vektorů

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}. \tag{35.1}$$

Předpokládáme-li na okamžik, že je v $\mathbf{E}_m$ dána kladná kartézská soustava souřadnic, ve které

$$\mathbf{u}_r = (u_{r1}, \ldots, u_{rm}) \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,$$

potom podle známé Laplaceovy věty o determinantech existují čísla $a_1, \ldots, a_m$ tak, že

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & \ldots, & u_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m-1,1}, & \ldots, & u_{m-1,m} \\ x_1, & \ldots, & x_m \end{vmatrix} = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m \tag{35.2}$$

identicky v $x_1, \ldots, x_m$. Položme

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$$

a nazveme vektor $\mathbf{a}$ *orthogonálním doplňkem* vektorů (35.1); budeme psáti

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}]. \tag{35.3}$$

Definice vektoru $\mathbf{a}$ je pouze zdánlivě závislá na volbě soustavy souřadnic, neboť rovnice (35.2) můžeme napsat v invariantním tvaru

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}\mathbf{x}] = \mathbf{a}\mathbf{x}. \tag{35.2'}$$

Zřejmě však orthogonální doplněk $\mathbf{a}$ vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}$ je závislý na orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$, neboť z věty 34.7 plyne podle (35.2′):

VĚTA 35.1. *Při změně orientace prostoru $\mathbf{E}_m$ orthogonální doplněk vektorů* (35.1) *se znásobí číslem* -1.

Zřejmě platí:

VĚTA 35.2. *V prostoru $\mathbf{E}_2$ orthogonální doplněk vektoru (u_1, u_2) je vektor $(-u_2, u_1)$.*

VĚTA 35.3. *V prostoru $\mathbf{E}_3$ orthogonální doplněk vektorů (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) je vektor*

$$(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Ve větách 35.2 a 35.3 se předpokládá kladná kartézská soustava souřadnic. Z věty 35.2 následuje:

VĚTA 35.4. *V prostoru* $\mathbf{E}_2$ *orthogonální doplněk orthogonálního doplňku vektoru* $\mathbf{u}$ *je vektor* $-\mathbf{u}$.

VĚTA 35.5. *Jsou-li vektory* (35.1) *mezi sebou lineárně závislé, je jejich orthogonální doplněk roven* $\mathbf{o}$ *a obráceně.*

DŮKAZ. Jsou-li vektory (35.1) mezi sebou lineárně závislé, potom podle věty 34.1 plyne ze (35.2′), že $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$ pro každý vektor $\mathbf{x}$, takže $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. Jsou-li však vektory (35.1) mezi sebou lineárně nezávislé, lze k nim podle věty 13.1 připojit vektor $\mathbf{x}$ tak, že vznikne base pro $\mathbf{E}_m$, načež podle (35.2′) je $\mathbf{a}\mathbf{x} \neq 0$, tedy $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$.

Následující tři věty plynou z vět 34.2 až 34.4:

VĚTA 35.6. *Při permutaci vektorů* (35.1) *orthogonální doplněk* (35.3) *zůstane nezměněn nebo se znásobí číslem* -1 *podle toho, zda provedená permutace je sudá či lichá.*

VĚTA 35.7. *Jestliže jeden z vektorů* (35.1) *znásobíme číslem* a, *potom také orthogonální doplněk* (35.3) *se znásobí číslem* a.

VĚTA 35.8. *Budiž* $\mathbf{u}_r$ $(1 \leqq r \leqq m - 1)$ *jeden z vektorů* (35.1). *Je-li*

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r' + \mathbf{u}_r'' + \ldots,$$

potom orthogonální doplněk (35.3) *je roven součtu orthogonálních doplňků těch vektorů, které vzniknou ze* (35.1), *nahradíme-li vektor* $\mathbf{u}_r$ *postupně jednotlivými vektory* $\mathbf{u}_r'$, $\mathbf{u}_r''$, ...

Dosadíme-li do (35.2′) za $\mathbf{x}$ jeden z vektorů (35.1), vyjde:

VĚTA 35.9. *Orthogonální doplněk vektorů* (35.1) *je orthogonální ke všem vektorům* (35.1), t. j.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_r = 0 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m.$$

VĚTA 35.10. *Jsou-li vektory* (35.1) *mezi sebou lineárně nezávislé a je-li* $\mathbf{a}$ *jejich orthogonální doplněk, potom vektory*

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{a}$$

tvoří kladnou basi prostoru $\mathbf{E}_m$.

DŮKAZ. Dosadíme-li $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ do (35.2′), vyjde

$$(35.4) \qquad [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{a}] = |\mathbf{a}|^2$$

a ježto $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ podle věty 35.5, jest $|\mathbf{a}|^2 > 0$.

VĚTA 35.11. *Leží-li vektory* (35.1) *v nadrovině ϱ prostoru $\mathbf{E}_m$, potom velikost jejich orthogonálního doplňku jest — až snad na znamení — rovna vnějšímu součinu vektorů* (35.1) *utvořenému v prostoru ϱ.*

DŮKAZ. Zvolme v $\mathbf{E}_m$ kladnou kartézskou soustavu souřadnic

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle$$

tak, aby

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{m-1} \rangle$$

byla kladná kartézská soustava souřadnic pro ϱ (což lze podle vět 15.2 a 15.3). Potom vektory (35.1) mají poslední souřadnici rovnou nule, vektor $\mathbf{a} = (0, \ldots, 0, a_m)$ má všecky souřadnice až na poslední rovny nule a (35.4) zní

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & \ldots, & u_{1,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m-1,1}, & \ldots, & u_{m-1,m-1} \end{vmatrix} . \, a_m = a_m^2;$$

mimo to je $|\mathbf{a}| = \pm a_m$.

Orthogonální doplněk je — jak se snadno dokáže — jednoznačně charakterisován vlastnostmi vyslovenými ve větách 35.5, 35.9, 35.10 a 35.11.

V prostoru $\mathbf{E}_3$ máme orthogonální doplněk *dvou vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, jehož početní vyjádření v kladné kartézské soustavě souřadnic je popsáno ve větě 35.3. Pro orthogonální doplněk $[\mathbf{uv}]$ dvou vektorů v $\mathbf{E}_3$ zavedeme označení $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a název *vektorový součin* vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Vyslovme znovu pro $m = 3$ vlastnosti výše formulované pro obecné m:

I. *Při změně orientace prostoru $\mathbf{E}_3$ vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ změní znamení.*

II. *Jest $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou mezi sebou lineárně závislé.*

III. *Jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ mezi sebou lineárně nezávislé, potom vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tvoří kladnou basi prostoru $\mathbf{E}_3$.*

IV. *Leží-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ v rovině ϱ a je-li c jejich vnější součin vypočtený v rovině ϱ, jest*

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |c|.$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{u} = -(\mathbf{u}\times\mathbf{v}); \tag{35.5}$$

$$(a\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(a\mathbf{v}) = a\,.\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}); \tag{35.6}$$

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}\times\mathbf{v}_2); \tag{35.7}$$

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\times\mathbf{v} = (\mathbf{u}_1\times\mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2\times\mathbf{v}). \tag{35.8}$$

Pro tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ prostoru $\mathbf{E}_3$ máme podle (35.2'):

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,.\,\mathbf{w} = [\mathbf{uvw}]. \tag{35.9}$$

Dokažme ještě dva další vzorce (35.10) a (35.11):

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{uw}\,.\,\mathbf{v} - \mathbf{vw}\,.\,\mathbf{u}; \tag{35.10}$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,.\,(\mathbf{u}'\times\mathbf{v}') = \begin{vmatrix} \mathbf{uu}', \mathbf{uv}' \\ \mathbf{vu}', \mathbf{vv}' \end{vmatrix}. \tag{35.11}$$

Oba vzorce jsou nezávislé na volbě kartézské soustavy souřadnic, pokud tato soustava je kladná. Můžeme ji zvolit tak, že

$$\mathbf{u} = (u_1, 0, 0),\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, 0), \tag{35.12}$$

načež podle věty 35.3 jest

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (0, 0, u_1v_2). \tag{35.13}$$

Opětným užitím věty 35.3 vyjde dále, že levá strana ve (35.10) je rovna

$$\begin{aligned} &(-u_1v_2w_2, u_1v_2w_1, 0) = \\ &= (u_1v_1w_1, u_1v_2w_1, 0) - (u_1v_1w_1 + u_1v_2w_2, 0, 0) = \\ &= u_1w_1\,.\,(v_1, v_2, 0) - (v_1w_1 + v_2w_2)\,.\,(u_1, 0, 0), \end{aligned}$$

což je rovné pravé straně ve (35.10), ježto podle (35.12)

$$\mathbf{uw} = u_1w_1,\ \mathbf{vw} = v_1w_1 + v_2w_2.$$

Pravá strana ve (35.11) podle (35.12) je rovna

$$\begin{vmatrix} u_1u_1', & u_1v_1' \\ v_1u_1' + v_2u_2', & v_1v_1' + v_2v_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1u_1', & u_1v_1' \\ v_2u_2', & v_2v_2' \end{vmatrix} =$$
$$= u_1u_1'v_2v_2' - u_1u_2'v_1'v_2 = u_1v_2(u_1'v_2' - u_2'v_1'),$$

což podle (35.13) je rovné levé straně ve (35.11), ježto podle věty 35.3 třetí souřadnice vektoru $\mathbf{u}'\times\mathbf{v}'$ je rovna $u_1'v_2' - u_2'v_1'$.

VI

SHODNÉ, PODOBNÉ A AFINNÍ TRANSFORMACE

36. ZOBRAZENÍ A TRANSFORMACE. Buďtež dány množiny $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}^*$ složené z libovolných prvků. *Zobrazením množiny* $\boldsymbol{M}$ *do množiny* $\boldsymbol{M}^*$ nazýváme jakékoliv pravidlo f, které každému prvku x množiny $\boldsymbol{M}$ přiřazuje určitý prvek množiny $\boldsymbol{M}^*$, který označíme $f(x)$ a nazveme *obrazem* prvku x. Je-li $\boldsymbol{C}$ jakákoliv část množiny $\boldsymbol{M}$, nazveme jejím *obrazem* a označíme $f(\boldsymbol{C})$ množinu obrazů všech prvků množiny $\boldsymbol{C}$. Zejména tedy $f(\boldsymbol{M})$ znamená množinu obrazů všech prvků celé množiny $\boldsymbol{M}$. Jestliže $f(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}^*$, t. j. jestliže každý prvek množiny $\boldsymbol{M}^*$ je obrazem aspoň jednoho prvku množiny $\boldsymbol{M}$, pravíme, že f je zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ na množinu $\boldsymbol{M}^*$.

Jsou-li $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}^*$, $\boldsymbol{M}^{**}$ tři množiny, je-li f zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ do množiny $\boldsymbol{M}^*$ a je-li g zobrazení množiny $\boldsymbol{M}^*$ do množiny $\boldsymbol{M}^{**}$, označíme $f \circ g$ a nazveme *zobrazením složeným* ze zobrazení f a g (v tomto pořadí!) to zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ do množiny $\boldsymbol{M}^{**}$, při kterém

$$h(x) = g[f(x)]$$

pro každý prvek x množiny $\boldsymbol{M}$. Podrobněji řečeno, je-li x libovolný prvek množiny $\boldsymbol{M}$, je-li $y = f(x)$ obraz prvku x při zobrazení f, je-li $z = g(y)$ obraz prvku y při zobrazení g, potom z je obraz prvku x při zobrazení $f \circ g$.

Je-li f zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ do množiny $\boldsymbol{M}^*$ a je-li $\boldsymbol{C}$ libovolná část množiny $\boldsymbol{M}$, nazveme *parciálním zobrazením* omezeným na $\boldsymbol{C}$ a označíme $f \mid \boldsymbol{C}$ to zobrazení množiny $\boldsymbol{C}$ do množiny $\boldsymbol{M}^*$, pro které každý prvek množiny $\boldsymbol{C}$ má týž obraz jako při zobrazení f. Tedy původní zobrazení f a parciální zobrazení $\varphi = f \mid \boldsymbol{C}$ se liší pouze tím, že obraz $f(x)$ je definován pro všecky prvky x množiny $\boldsymbol{M}$, kdežto obraz $\varphi(x)$ je definován pouze pro ty prvky množiny $\boldsymbol{M}$, které náležejí do její dané části $\boldsymbol{C}$; pro ta x, pro něž je definován $\varphi(x)$, je definován také $f(x)$ a jest $\varphi(x) = f(x)$.

Budiž f zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ *na množinu* $\boldsymbol{M}^*$. Jestliže dva různé prvky x_1, x_2 množiny $\boldsymbol{M}$ mají vždy také různé obrazy, pravíme, že f je *prosté zobrazení* množiny $\boldsymbol{M}$ na množinu $\boldsymbol{M}^*$. Libovolný prvek y množiny $\boldsymbol{M}^*$ je tedy obrazem právě jednoho prvku x množiny $\boldsymbol{M}$; přiřadíme-li prvku y prvek x, obdržíme zobrazení g množiny $\boldsymbol{M}^*$ na množinu $\boldsymbol{M}$. Je tudíž $f(x) = y$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $g(y) = x$; při tom je x prvek množiny $\boldsymbol{M}$, y prvek množiny $\boldsymbol{M}^*$. Zobrazení g nazveme *inversním* k zobrazení f; zřejmě g je prosté zobrazení množiny $\boldsymbol{M}^*$ na množinu $\boldsymbol{M}$ a zobrazení k němu inversní splyne s původním zobrazením f.

Jestliže každému prvku x dané množiny $\boldsymbol{M}$ přiřadíme týž prvek x, dostaneme prosté zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ na množinu $\boldsymbol{M}$, které nazveme *identickým zobrazením* množiny $\boldsymbol{M}$. Je-li f prosté zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ na množinu $\boldsymbol{M}^*$ a je-li g inversní zobrazení množiny $\boldsymbol{M}^*$ na množinu $\boldsymbol{M}$, potom složené zobrazení $f \circ g$ je identické zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$, zobrazení $g \circ f$ pak jest identické zobrazení množiny $\boldsymbol{M}^*$.

Budiž f libovolné zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ na množinu $\boldsymbol{M}^*$. Je-li y libovolný bod množiny $\boldsymbol{M}^*$, nazveme jeho *vzorem* při zobrazení f a označíme $f^{-1}(y)$ množinu všech těch prvků x množiny $\boldsymbol{M}$, jejichž obrazem je prvek y, t. j. pro které platí $f(x) = y$. Je-li $\boldsymbol{C}^*$ libovolná část množiny $\boldsymbol{M}^*$, nazveme jejím *vzorem* a označíme $f^{-1}(\boldsymbol{C}^*)$ množinu všech těch prvků množiny $\boldsymbol{M}$, jejichž obrazy náležejí do $\boldsymbol{C}^*$. Jestliže f je *prosté zobrazení* množiny $\boldsymbol{M}$ na množinu $\boldsymbol{M}^*$, potom pro každý prvek y množiny $\boldsymbol{M}^*$ znamená $f^{-1}(y)$ jediný prvek množiny $\boldsymbol{M}$, který je obrazem prvku y při zobrazení inversním k zobrazení f.

Zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ do téže množiny $\boldsymbol{M}$ se jmenuje *transformace množiny* $\boldsymbol{M}$. Prosté zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$ na celou množinu $\boldsymbol{M}$ se jmenuje *regulární transformace* množiny $\boldsymbol{M}$. Jednoduchým příkladem regulární transformace množiny $\boldsymbol{M}$ jest identické zobrazení množiny $\boldsymbol{M}$, kterému říkáme také *identická transformace množiny* $\boldsymbol{M}$. Je-li f regulární transformace množiny $\boldsymbol{M}$, potom také zobrazení inversní k f je regulární transformace množiny $\boldsymbol{M}$.

Soustava Φ transformací množiny $\boldsymbol{M}$ se nazývá *transformační grupa* množiny $\boldsymbol{M}$, má-li tyto tři vlastnosti:

(a) každá transformace soustavy Φ je regulární;

(b) jestliže obě transformace f, g náležejí do soustavy Φ, potom také složená transformace $f \circ g$ náleží do Φ;

(c) jestliže transformace f náleží do soustavy Φ, potom také transformace inversní ke transformaci f náleží do soustavy Φ.

Je-li f libovolná regulární transformace množiny $\mathbf{M}$ a je-li g transformace k ní inversní, potom $f \circ g$ jest identická transformace množiny $\mathbf{M}$. Z toho plyne, že *každá transformační grupa* množiny $\mathbf{M}$ *obsahuje identickou transformaci množiny* $\mathbf{M}$. Jednoduchý příklad transformační grupy množiny $\mathbf{M}$ tvoří její *triviální transformační grupa*, která obsahuje *pouze* identickou transformaci množiny $\mathbf{M}$. Jiný jednoduchý příklad transformační grupy množiny $\mathbf{M}$ dává soustava *všech možných* transformací množiny $\mathbf{M}$.

Jsou-li Φ, Ψ dvě transformační grupy množiny $\mathbf{M}$ a jestliže každá transformace náležející do Ψ zároveň náleží do Φ, pravíme, že transformační grupa Ψ je *podgrupou* transformační grupy Φ.

37. AFINNÍ ZOBRAZENÍ EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Buďtež dány dva eukleidovské prostory $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}'_n$ a zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Pravíme, že f je *afinní zobrazení*, má-li tuto vlastnost:

(37.1) Jsou-li A, B, C tři různé body prostoru $\mathbf{E}_m$, které leží na přímce, potom buďto splynou všecky tři body $f(A), f(B), f(C)$ nebo jsou tyto tři body navzájem různé, leží také na přímce a dělící poměry [viz článek 27, (27.6) a (27.7)]

$$(A; C, B); \quad (f(A); f(C), f(B))$$

jsou si rovny.

Afinní zobrazení f se jmenuje *regulární*, jestliže obrazy $f(X), f(Y)$ dvou různých bodů X, Y prostoru $\mathbf{E}_m$ jsou vždy navzájem různé; f se jmenuje *singulární*, jestliže existují dva různé body A, B prostoru $\mathbf{E}_m$, jejichž obrazy $f(A), f(B)$ splynou. Speciální případ singulárního afinního zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$ obdržíme, jestliže obrazy *všech bodů* prostoru $\mathbf{E}_m$ splynou; potom mluvíme o *totálně singulárním* afinním zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$.

Každé afinní zobrazení f (regulární nebo singulární) prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$ má především tuto vlastnost:

VĚTA 37.1. *Je-li v prostoru* $\mathbf{E}_m$ *bod* Z *středem dvojice bodů* X, Y, *potom je v prostoru* $\mathbf{E}'_n$ *bod* $f(Z)$ *středem dvojice bodů* $f(X), f(Y)$.

DŮKAZ. To je zřejmé, je-li $X = Y$; je-li však $X \neq Y$, potom X, Y, Z jsou tři různé body ležící na přímce a podle (37.1) buďto splynou všecky tři body $f(X), f(Y), f(Z)$, načež opět tvrzení je zřejmé, nebo jsou body $f(X), f(Y), f(Z)$ navzájem různé a leží na přímce. Potom je však podle (27.9)

$$(X; Z, Y) = \tfrac{1}{2}, \quad (f(X); f(Z), f(Y)) = \tfrac{1}{2}$$

a bod $f(Z)$ je středem dvojice $f(X), f(Y)$.

Stejně jako z věty 18.1 plyne věta 18.2, plyne z věty 37.1:

VĚTA 37.2. *Jestliže v prostoru* $\mathbf{E}_m$ *obě dvojice* X, Y; X', Y' *určují týž vektor, potom také v prostoru* $\mathbf{E}'_n$ obě dvojice $f(X), f(Y)$; $f(X'), f(Y')$ *určují týž vektor.*

V důsledku věty 37.2 můžeme každému vektoru $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ jednoznačně přiřadit vektor $f(\mathbf{u})$ prostoru $\mathbf{E}'_n$ tak, že obrazem kteréhokoliv umístění vektoru $\mathbf{u}$ je vždy určité umístění vektoru $f(\mathbf{u})$.

Následující tři věty jsou zřejmé:

VĚTA 37.3. $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$.

VĚTA 37.4. *Při regulárním afinním zobrazení prostoru* $\mathbf{E}_m$ *do prostoru* $\mathbf{E}'_n$ *pro každý vektor* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *prostoru* $\mathbf{E}_m$ je také $f(\mathbf{u}) \neq \mathbf{o}$.

VĚTA 37.5. *Při regulárním afinním zobrazení prostoru* $\mathbf{E}_m$ *do prostoru* $\mathbf{E}'_n$ *pro každé dva vektory* $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ je také $f(\mathbf{u}) \neq f(\mathbf{v})$.

VĚTA 37.4 a 37.5 neplatí pro singulární afinní zobrazení. Ať již f je regulární či singulární, platí zřejmě:

VĚTA 37.6. $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$.

VĚTA 37.7. $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.

Mimo to platí pro libovolné reálné číslo a a pro libovolný vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$:

VĚTA 37.8. $f(a\mathbf{u}) = a \,.\, f(\mathbf{u})$.

DŮKAZ. To je zřejmé pro $a = 1$ a plyne z věty 37.3, jestliže $a = 0$ nebo $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Budiž tedy $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, $0 \neq a \neq 1$. Zvolme v prostoru $\mathbf{E}_m$ body

A, B tak, že $B - A = \mathbf{u}$ a položme $C = A + a\mathbf{u}$, takže $C - A = a\mathbf{u}$; tedy $f(B) - f(A) = f(\mathbf{u})$, $f(C) - f(A) = f(a\mathbf{u})$. Ježto $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, jest $A \neq B$, ježto $C = A + a\mathbf{u}$, $0 \neq a \neq 1$, jest $A \neq C \neq B$. Tedy A, B, C jsou tři různé body prostoru E_m, které leží na přímce. Potom buďto splynou všecky tři body $f(A), f(B), f(C)$, načež je $f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, $f(a\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, tudíž skutečně $f(a\mathbf{u}) = a \,.\, f(\mathbf{u})$, nebo jsou $f(A), f(B), f(C)$ tři různé body, které leží na přímce, načež

$$(f(A); f(C), f(B)) = (A; C, B). \tag{37.2}$$

Ježto $C = A + a(B - A)$, soudíme ze (37.2) podle (27.8), že $f(C) = f(A) + a(f(B) - f(A))$, t. j., že $f(C) - f(A) = a(f(B) - f(A))$ neboli $f(a\mathbf{u}) = a \,.\, f(\mathbf{u})$.

Z vět 37.7 a 37.8 plyne:

VĚTA 37.9. *Jestliže v prostoru E_m vektor $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, potom v prostoru E_m vektor $f(\mathbf{v})$ je lineární kombinací vektorů $f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_k)$, a to s týmiž koeficienty.*

Z vět 37.3, 37.4 a 37.9 plyne dále:

VĚTA 37.10. *Je-li f regulární afinní zobrazení prostoru E_m do prostoru E'_n a jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru E_m mezi sebou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé, potom platí totéž o vektorech $f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_k)$ prostoru E'_n.*

VĚTA 37.11. *Budiž $\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\rangle$ daná lineární soustava souřadnic v eukleidovském prostoru E_m. V eukleidovském prostoru E'_n zvolme libovolně bod P' a vektory $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$. Je-li*

$$X = P + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}_m \tag{37.3}$$

libovolný bod prostoru E_m, položme

$$f(X) = P' + x_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}'_m.$$

Potom je f afinní zobrazení prostoru E_m do prostoru E'_n. Zobrazení f je regulární tehdy a jenom tehdy, jestliže vektory $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé.

DŮKAZ. Buďtež A, B, C tři různé body prostoru E_m, které leží na přímce, takže $C = A + t(B - A)$, kde $t = (A; C, B)$ podle (27.8). Je-li $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, verifikuje se snadno, že je $C' =$

$= A' + t(B' - A')$; mimo to je zřejmě $0 \neq t \neq 1$. Je-li $A' = B'$, je také $C' = A'$; je-li však $A' \neq B'$, jsou A', B', C' tři různé body, které leží na přímce a jest $(A'; C', B') = t$ podle (27.8). Tudíž f je afinní zobrazení. Jsou-li (37.3) a

$$Y = P + y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_m\mathbf{e}_m$$

dva různé body prostoru $\mathbf{E}_m$, jest

$$f(Y) - f(X) = (y_1 - x_1)\,\mathbf{e}_1' + \ldots + (y_m - x_m)\,\mathbf{e}_m'.$$

Jsou-li vektory $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_m'$ mezi sebou lineárně nezávislé, je nutně $f(X) \neq f(Y)$, t. j. zobrazení f je regulární. Jsou-li však vektory $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_m'$ mezi sebou lineárně závislé, lze udat čísla $a_1, \ldots, a_m$ tak, že aspoň jedno z nich je různé od nuly a že $a_1\mathbf{e}_1' + \ldots + a_m\mathbf{e}_m' = \mathbf{o}$. Je-li potom

$$Q = P + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m,$$

jest $Q \neq P$, $f(Q) = P' = f(P)$, takže zobrazení f je singulární.

VĚTA 37.12. *Každé afinní zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}_n'$ se dá vytvořit způsobem popsaným ve větě* 37.11, *při čemž lineární soustavu souřadnic*

$$\langle P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle \tag{37.4}$$

v prostoru $\mathbf{E}_m$ můžeme libovolně zvolit.

DŮKAZ. Podle věty 37.2 můžeme položit $\mathbf{e}_1' = f(\mathbf{e}_1), \ldots, \mathbf{e}_m' = f(\mathbf{e}_m)$, načež se důkaz dokončí podle věty 37.9.

Z vět 37.11 a 37.12 plyne

VĚTA 37.13. *Je-li f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}_n'$, jest $f(\mathbf{E}_m)$ lineární podprostor prostoru $\mathbf{E}_n'$, jehož dimense k je $\leq m$. Při tom je $k = m$ tehdy a jenom tehdy, jestliže zobrazení f je regulární.* Dále platí:

VĚTA 37.14. *Afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}_n'$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže $n \leq m$. Regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}_n'$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže $n = m$.* Mimo to je patrné, že počet afinních, resp. regulárních afinních zobrazení je nekonečně velký, neboť při dané lineární soustavě souřadnic (37.4) je jistě možné ve větě 37.11 zvolit bod P' nekonečně mnoha způsoby, nehledě na libovůli ve volbě vektorů $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_m'$.

Následující tři věty jsou zřejmé z definice:

VĚTA 37.15. *Je-li f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$ a je-li g afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_n$ do prostoru $\mathbf{E}''_k$, potom $f \circ g$ je afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ do $\mathbf{E}''_k$.*

VĚTA 37.16. *Je-li f regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a je-li g regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$, potom $f \circ g$ je regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$.*

VĚTA 37.17. *Je-li f regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a je-li g zobrazení k němu inversní, potom g je regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}_m$.*

Buďtež

(37.5) $\qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m;$

(37.6) $\qquad \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$

dvě base prostoru $\mathbf{E}_m$. Je-li nyní f regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$, potom podle věty 37.9 jsou

(37.5′) $\qquad f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_m);$

(37.6′) $\qquad f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_m)$

dvě base prostoru $\mathbf{E}'_m$. Z věty 37.9 plyne pro determinant přechodu definovaný na str. 79:

VĚTA 37.18. *Je-li f regulární afinní* ~~*transformace*~~ zobrazení *prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a jsou-li* (37.5), (37.6) *dvě base prostoru $\mathbf{E}_n$ a tudíž* (37.5′), (37.6′) *dvě base prostoru $\mathbf{E}'_m$, je determinant přechodu od* (37.5) *ke* (37.6) *roven determinantu přechodu od* (37.5′) *ke* (37.6′).

Z toho plyne, že base (37.5′), (37.6′) prostoru $\mathbf{E}'_m$ jsou souhlasné nebo nesouhlasné podle toho, co platí o basích (37.5), (37.6) prostoru $\mathbf{E}_m$. Je-li nyní zvolena určitá orientace prostoru $\mathbf{E}_m$, je patrné, že existuje právě jedna orientace prostoru $\mathbf{E}'_m$ tak, že pro každou kladnou basi (37.5) prostoru $\mathbf{E}_m$ je také (37.5′) kladná base prostoru $\mathbf{E}'_m$. Pravíme stručně, že *při regulární afinní transformaci prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ přísluší dané orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$ určitá orientace prostoru $\mathbf{E}'_m$.*

38. SHODNÁ A PODOBNÁ ZOBRAZENÍ EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Buďtež dány dva eukleidovské prostory $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}'_n$ a zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Pravíme, že f je *shodné zobrazení* prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$, jestliže vzdálenost $\overline{XY}$ dvou libovolných bodů X, Y prostoru $\mathbf{E}_m$ je rovna vzdálenosti $\overline{f(X)\,f(Y)}$ jejich obrazů.

VĚTA 38.1. *Budiž f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Zobrazení f je shodné tehdy a jenom tehdy, jestliže skalární součin $\mathbf{uv}$ libovolných dvou vektorů prostoru $\mathbf{E}_m$ je roven skalárnímu součinu $f(\mathbf{u})$ . . $f(\mathbf{v})$ jejich obrazů.*

DŮKAZ. Jestliže předně zobrazení f je shodné, je zřejmě $|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$ pro libovolný vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$; z toho však plyne podle (7.7'), že $\mathbf{uv} = f(\mathbf{u}) \,.\, f(\mathbf{v})$. Obráceně předpokládejme, že tato podmínka je splněna; pro $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ z ní plyne, že $|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$ neboli $|f(B) - f(A)| = |B - A|$, t. j. $\overline{f(A)\,f(B)} = \overline{AB}$, takže zobrazení f je shodné.

VĚTA 38.2. *Shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ je regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $f(\mathbf{E}_m)$.*

DŮKAZ. V článcích 4 až 8 jsme podali geometrické definice, založené výhradně na pojmu vzdálenosti, pro pojem vektoru, pojem součtu vektorů a pojem součinu čísla s vektorem. Z toho plyne snadno, že pro f jsou splněna tvrzení vět 37.2 a 37.9, z čehož plyne, že f se dá vytvořit způsobem popsaným ve větě 37.11, takže f je afinní podle věty 37.12. Že f je regulární, plyne ze (3.4) a (3.5).

Následující dvě věty jsou zřejmé z definice:

VĚTA 38.3. *Je-li f shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a je-li g shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$, potom $f \circ g$ je shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$.*

VĚTA 38.4. *Je-li f shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ a je-li g zobrazení k němu inversní, potom g je shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}_m$.*

Z věty 38.1 plyne:

VĚTA 38.5. *Budiž f shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Jsou-li v prostoru $\mathbf{E}_m$ vektory*

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$$

orthonormální, potom v prostoru $\mathbf{E}'_n$ vektory

$$f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_k)$$

jsou také orthonormální.

Obecně platí:

Věta 38.6. *Budiž f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$ a budiž $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ daná orthonormální base prostoru $\mathbf{E}_m$. Jestliže také vektory*

$$\mathbf{u}'_1 = f(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{u}'_m = f(\mathbf{u}_m)$$

jsou orthonormální, potom f je shodné zobrazení.

Důkaz. Je-li

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m, \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_m\mathbf{u}_m,$$

jest

$$f(\mathbf{u}) = x_1\mathbf{u}'_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}'_m, \quad f(\mathbf{v}) = y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_m\mathbf{u}'_m$$

a z orthonormality plyne

$$\mathbf{uv} = x_1y_1 + \ldots + x_my_m = f(\mathbf{u}) \, . \, f(\mathbf{v}),$$

takže věta následuje z věty 38.1.

Zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$ nazveme *podobné*, existuje-li kladné číslo k tak, že

$$\overline{f(X)\,f(Y)} = k \, . \, \overline{XY} \tag{38.1}$$

pro libovolné dva body X, Y prostoru $\mathbf{E}_m$. Číslo k nazveme *faktorem podobnosti* zobrazení f. Zřejmě platí:

Věta 38.7. *Podobné zobrazení s faktorem podobnosti rovným jedné je shodné zobrazení a obráceně.*

Věta 38.8. *Budiž f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ do prostoru $\mathbf{E}'_n$. Zobrazení f je podobné tehdy a jenom tehdy, jestliže existuje kladné číslo k tak, že pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ platí*

$$f(\mathbf{u}) \, . \, f(\mathbf{v}) = k \, . \, \mathbf{uv}. \tag{38.2}$$

Číslo k je potom faktorem podobnosti zobrazení f.

Důkaz. Jestliže předně zobrazení f je podobné s faktorem podobnosti k, je zřejmé $|f(\mathbf{u})| = k|\mathbf{u}|$ pro libovolný vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$; z toho plyne podle (7.7′), že platí (38.2). Obráceně, platí-li (38.2), při čemž $k > 0$, plyne ze (38.2) pro $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, že $|f(\mathbf{u})| = k\mathbf{u}$ neboli $|f(Y) - f(X)| = k \, . \, |Y - X|$, t. j. platí (38.1).

VĚTA 38.9. *Podobné zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_m$ je regulární afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $f(\mathbf{E}_m)$.*

DůKAZ. Budiž k faktor podobnosti zobrazení f. Zvolme libovolně bod P v prostoru $\mathbf{E}_m$ a definujme zobrazení g, h prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}_m$ tím, že

$$g(P + \mathbf{u}) = P + k\mathbf{u},\ h(P + \mathbf{u}) = P + \frac{1}{k} \cdot \mathbf{u}$$

pro každý vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Podle věty 38.8 jsou g, h podobná zobrazení $\mathbf{E}_m$ na $\mathbf{E}_m$, jejichž faktory podobnosti jsou: k pro g, $\frac{1}{k}$ pro h. Zřejmě složené zobrazení $\varphi = h \circ f$ je shodné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$, takže podle věty 38.2 φ je regulární afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ na $f(\mathbf{E}_m)$. Na druhé straně je zřejmě $f = g \circ \varphi$, takže podle věty 37.16 také f je regulární afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ na $f(\mathbf{E}_m)$.

Následující dvě věty jsou zřejmé:

VĚTA 38.10. *Je-li f podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ s faktorem podobnosti k_1 a je-li g podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$ s faktorem podobnosti k_2, je $f \circ g$ podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}''_m$ s faktorem podobnosti k_1k_2.*

VĚTA 38.11. *Je-li f podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}_m$ na prostor $\mathbf{E}'_m$ s faktorem podobnosti k a je-li g zobrazení k němu inversní, potom g je podobné zobrazení prostoru $\mathbf{E}'_m$ na prostor $\mathbf{E}_m$ s faktorem podobnosti $1/k$.*

39. AFINNÍ TRANSFORMACE. Afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ je afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ do $\mathbf{E}_m$; *regulární afinní transformace* prostoru $\mathbf{E}_m$ je regulární afinní zobrazení $\mathbf{E}_m$ na $\mathbf{E}_m$.

Z vět 37.16 a 37.17 plyne:

VĚTA 39.1. *Množina všech regulárních afinních transformací prostoru $\mathbf{E}_m$ je transformační grupa.*

Budiž f afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$. Je-li

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \tag{39.1}$$

libovolná base prostoru $\mathbf{E}_m$, existují čísla $a_{11}, \ldots, a_{mm}$ tak, že

$$f(\mathbf{u}_r) = a_{r1}\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{rm}\mathbf{u}_m \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m. \tag{39.2}$$

Položme

$$(39.3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Z věty 29.4 plyne (viz též větu 37.11), že $\Delta = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže zobrazení f je singulární, takže platnost rovnice $\Delta = 0$ je nezávislá na volbě base (39.1). Snadno však zjistíme, že obecně hodnota determinantu Δ je nezávislá na volbě base (39.1), což stačí dokázati pro regulární f.

Budiž tedy

$$(39.4) \qquad \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$$

jiná base prostoru $\mathbf{E}_m$. Číslo Δ je determinant přechodu od base (39.1) k basi

$$(39.1') \qquad f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_m);$$

máme dokázati, že $\Delta = \Delta'$, kde Δ' je determinant přechodu od base (39.4) k basi

$$(39.4') \qquad f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_m).$$

Označme D determinant přechodu od base (39.1) k basi (39.4); na konci článku 37 jsme viděli, že D je také determinant přechodu od base (39.1') k basi (39.4'). Avšak od base (39.1) můžeme přejít k basi (39.4') buďto tak, že přejdeme napřed od (39.1) ke (39.4) a potom od (39.4) ke (39.4'), nebo tak, že přejdeme napřed od (39.1) ke (39.1') a potom od (39.1') ke (39.4'). Tudíž determinant přechodu od (39.1) ke (39.4') je podle věty 29.8 roven jednak $D\Delta'$, jednak ΔD. Je tudíž $D\Delta' = \Delta D$ a ježto $D \neq 0$ podle věty 29.6, je $\Delta = \Delta'$. Tím je dokázáno, že číslo (39.3) nezávisí na volbě base (39.1), nýbrž pouze na afinní transformaci f; pravíme, že (39.3) je *determinant afinní transformace* f. Víme již, že platí:

VĚTA 39.2. *Determinant afinní transformace f je různý od nuly tehdy a jenom tehdy, je-li f regulární.*

Zřejmá je:

VĚTA 39.3. *Determinant identické transformace je roven jedné.*

Z věty 29.8 plyne:

VĚTA 39.4. *Buďtež Δ_1, Δ_2 determinanty afinních transformací f, g prostoru $\mathbf{E}_m$. Potom je $\Delta_1\Delta_2$ determinant afinní transformace $f \circ g$.*

VĚTA 39.5. *Budiž f regulární afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ s determinantem Δ a budiž g transformace inversní k f. Potom determinant transformace g je roven Δ^{-1}.* To plyne z vět 39.3 a 39.4, neboť zřejmě $f \circ g$ je identická transformace prostoru $\mathbf{E}_m$.

Je-li f regulární afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$, potom podle konce článku 37 zvolené orientaci prostoru $\mathbf{E}_m$ přísluší určitá orientace téhož prostoru, která buďto splyne s orientací původní nebo je k ní opačná. V prvém případě pravíme, že f je *přímá afinní transformace* prostoru $\mathbf{E}_m$, ve druhém, že f je *nepřímá afinní transformace* prostoru $\mathbf{E}_m$. Zřejmě je tato definice nezávislá na volbě původní orientace prostoru $\mathbf{E}_m$, což plyne také snadno z toho, že jak je snadno patrné, platí:

VĚTA 39.6. *Determinant regulární afinní transformace f je kladný nebo záporný podle toho, zda je f přímá či nepřímá.*

Afinní transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$ nazveme *unimodulární*, jestliže její determinant Δ je roven ± 1; je tedy $\Delta = 1$ pro přímé unimodulární afinní transformace, $\Delta = -1$ pro nepřímé unimodulární afinní transformace.

Velmi jednoduchým zvláštním případem afinní transformace je *translace*. To je taková afinní transformace f prostoru $\mathbf{E}_m$, při které obraz $f(\mathbf{u})$ libovolného vektoru $\mathbf{u}$ je totožný s původním vektorem $\mathbf{u}$. *Jsou-li P, Q dva dané body prostoru $\mathbf{E}_m$, existuje právě jedna translace f, při které $f(P) = Q$.* Neboť ke každému bodu X existuje právě jeden vektor $\mathbf{v}$ tak, že

$$X = P + \mathbf{v} \tag{39.5}$$

a při uvažované translaci musí býti

$$f(X) = Q + \mathbf{v}; \tag{39.5'}$$

obráceně je patrné, že rovnice (39.5), (39.5') definují translaci f prostoru $\mathbf{E}_m$. Z definice je zřejmé, že platí:

VĚTA 39.7. *Každá translace prostoru $\mathbf{E}_m$ je přímá unimodulární afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$.*

Následující věta jednak plyne z vět 39.4 a 39.5, jednak je zřejmá:

VĚTA 39.8. *Následující druhy afinních transformací prostoru* $\mathbf{E}_m$ *tvoří podgrupy transformační grupy všech regulárních afinních transformací prostoru* $\mathbf{E}_m$:

(a) *množina všech přímých afinních transformací*;
(b) *množina všech unimodulárních afinních transformací*;
(c) *množina všech přímých unimodulárních afinních transformací*;
(d) *množina všech translací.*

Při tom množina (d) *je podgrupou grupy* (c), *která je opět podgrupou jak grupy* (b) *tak i grupy* (a).

Všimněme si, že zvláštním případem translace je *identická transformace* prostoru $\mathbf{E}_m$. Translaci různou od identické transformace nazveme *vlastní translací.* Definujeme-li *samodružný bod* S transformace f rovnicí

$$f(S) = S, \tag{39.6}$$

je patrné, že platí:

VĚTA 39.9. *Vlastní translace nemá žádný samodružný bod.*

Zobecnění pojmu samodružného bodu je pojem *samodružné množiny.* Je-li f libovolná transformace libovolné množiny $\boldsymbol{M}$ a je-li $\boldsymbol{C}$ část množiny $\boldsymbol{M}$, pravíme, že $\boldsymbol{C}$ je samodružná množina, jestliže

$$f(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}. \tag{39.6'}$$

Zřejmě množina, jejíž každý bod je samodružný, je samodružná množina, ale opak neplatí už proto, že při transformaci $\boldsymbol{M}$ na $\boldsymbol{M}$ celá množina $\boldsymbol{M}$ je samodružná, ale nemusí existovat žádný samodružný bod; příklad podává věta 39.9.

40. INVOLUTORNÍ AFINNÍ TRANSFORMACE. Zvolme v prostoru $\mathbf{E}_m$ bod S. Pro každý bod X prostoru $\mathbf{E}_m$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v}$ tak, že

$$X = S + \mathbf{v}. \tag{40.1}$$

Položme

$$f(X) = S - \mathbf{v} \tag{40.1'}$$

a máme definovánu transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$ s jediným samodružným bodem S; nazveme f *středovou souměrností* a bod S *středem souměrnosti*. Zřejmě f je afinní transformace, která libovolnou basi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ převádí v basi $-\mathbf{u}_1, \ldots, -\mathbf{u}_m$, takže determinant transformace f je roven $(-1)^m$. Tedy platí:

VĚTA 40.1. *Středová souměrnost prostoru $\mathbf{E}_m$ je unimodulární afinní transformace, která je přímá pro sudé m, nepřímá pro liché m.*

Ze (40.1) a (40.1′) platí:

VĚTA 40.2. *Je-li f středová souměrnost prostoru $\mathbf{E}_m$ se středem souměrnosti S, potom pro každý bod X prostoru $\mathbf{E}_m$ je bod S středem souměrnosti dvojice X, $f(X)$.*

Z definice (40.1), (40.1′) je patrné, že jestliže při středové souměrnosti f je $B = f(A)$, je také $A = f(B)$. Nazveme obecně *involutorní afinní transformací* prostoru $\mathbf{E}_m$ takovou afinní transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$, která má tu vlastnost, že kdykoli $B = f(A)$, vždy je také $A = f(B)$. Identická transformace, jakož i každá středová souměrnost jsou tudíž zvláštní případy involutorních afinních transformací. Hlavním úkolem tohoto článku je určení všech involutorních afinních transformací. Napřed si dokažme jednoduchou pomocnou větu:

VĚTA 40.3. *Budiž f involutorní afinní transformace a budiž X libovolný bod. Je-li $Y = f(X)$, potom střed S dvojice X, Y je samodružný bod při transformaci f.* Neboť obraz $f(S)$ středu dvojice X, Y je podle věty 37.1 středem dvojice $f(X)$, $f(Y)$, t. j. dvojice Y, X, která má týž střed jako dvojice X, Y.

Budiž nyní f afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$. Označme $\mathbf{W}_h^+$ množinu všech vektorů $\mathbf{u}$, pro něž $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$; zřejmě $\mathbf{W}_h^+$ je lineární soustava, jejíž dimense budiž h. Označme dále $\mathbf{W}_k^-$ množinu všech vektorů $\mathbf{v}$, pro něž $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$; také $\mathbf{W}_k^-$ je lineární soustava, jejíž dimense budiž k. Zřejmě průnik lineárních soustav $\mathbf{W}_h^+, \mathbf{W}_k^-$ obsahuje pouze $\mathbf{o}$, takže podle článku 24 spojení obou lineárních soustav má dimensi $h + k$. Dokážeme však, že toto spojení pro involutorní f je rovné soustavě $\mathbf{V}_m$ všech vektorů prostoru $\mathbf{E}_m$, takže bude

$$h + k = m. \tag{40.2}$$

Neboť budiž $\boldsymbol{w} = B - A$ libovolný vektor a budiž $\boldsymbol{w}' = f(B) - f(A)$. Ježto f je involutorní, je nejen $\boldsymbol{w}' = f(\boldsymbol{w})$, nýbrž také $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{w}')$. Položíme-li

$$\boldsymbol{u} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}'), \quad \boldsymbol{v} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}'),$$

jest $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, $f(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, z čehož plyne správnost učiněného tvrzení a tedy i správnost vzorce (40.2).

Jestliže $k = 0$, jest $h = m$ a máme $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ pro každý vektor $\boldsymbol{u}$, t. j. f je translace a je zřejmé, že f je involutorní tehdy a jenom tehdy, je-li f identická transformace. Jestliže $h = 0$, jest $k = m$ a máme $f(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$ pro každý vektor $\boldsymbol{v}$; podle věty 40.3 existuje aspoň jeden samodružný bod; je-li však S samodružný bod, platí (40.1), (40.1′), t. j. f je středová souměrnost, která, jak víme, je vždy involutorní.

Zbývá případ, že je $h > 0$, $k > 0$ a ovšem platí (40.2). Je-li

$$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_h \tag{40.3}$$

base pro $\boldsymbol{W}_h^+$,

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \tag{40.4}$$

base pro $\boldsymbol{W}_k^-$, potom vektory (40.3) a (40.4) dohromady tvoří basi pro $\boldsymbol{V}_m$. Podle věty 40.3 má f aspoň jeden samodružný bod. Zvolíme-li samodružný bod P, dostáváme lineární soustavu souřadnic

$$\langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle. \tag{40.5}$$

Každý bod X má tvar

$$X = P + (x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_h\boldsymbol{u}_h) + (y_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + y_k\boldsymbol{v}_k), \tag{40.6}$$

$$f(X) = P + (x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_h\boldsymbol{u}_h) - (y_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + y_k\boldsymbol{v}_k). \tag{40.6′}$$

Obráceně, je-li (40.5) lineární soustava souřadnic a je-li transformace f definována pomocí (40.6), (40.6′), zřejmě f je involutorní afinní transformace, jejíž samodružné body vyplní lineární podprostor

$$\{P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_h\} \tag{40.7}$$

dimense h.

41. SHODNÉ A PODOBNÉ TRANSFORMACE PROSTORU $\boldsymbol{E}_m$.

Shodná nebo podobná transformace prostoru $\boldsymbol{E}_m$ je shodné nebo podobné zobrazení $\boldsymbol{E}_m$ do $\boldsymbol{E}_m$. Podle 38.2 a 38.9 jsou tyto transformace zvláštnimi případy regulárních afinních zobrazení. Obráceně je ve větách 38.1 a 38.8 obsaženo kriterium, kdy regulární afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ je shodnou nebo podobnou transformací. Podle věty 38.1 (viz též věty 39.7 a 40.1) platí:

VĚTA 41.1. *Každá translace prostoru $\mathbf{E}_m$ je přímá shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$.*

VĚTA 41.2. *Každá středová souměrnost prostoru $\mathbf{E}_m$ je shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$, a to přímá pro sudé m, nepřímá pro liché m.*

Dále platí:

VĚTA 41.3. *Shodná transformace f prostoru $\mathbf{E}_m$ je unimodulární.*

DŮKAZ. Budiž $\mathbf{B}$ orthonormální base prostoru $\mathbf{E}_m$ a budiž $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ její obraz při f. Determinant transformace f je (34.3) a jeho druhá mocnina je rovna determinantu (34.7), je tedy rovna jedné, neboť vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ jsou orthonormální podle věty 38.5.

Budiž nyní dáno reálné číslo $c \neq 0$, $c \neq 1$. Nazveme *homothetickou transformací* prostoru $\mathbf{E}_m$ s *koeficientem homothetie* rovným c takovou afinní transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$, při které

$$f(\mathbf{u}) = c \, . \, \mathbf{u} \tag{41.1}$$

pro každý vektor $\mathbf{u}$. Zřejmě platí:

VĚTA 41.4. *Středová souměrnost je homothetická transformace s koeficientem homothetie rovným -1 a obráceně.*

Je-li f homothetická transformace s koeficientem homothetie c a jsou-li X, Y libovolné dva body, potom podle (41.1) je $f(Y) - f(X) = c(Y - X)$ a tudíž

$$\overline{f(X)\, f(Y)} = |c| \, . \, \overline{XY}.$$

Z toho plyne

VĚTA 41.5. *Homothetická transformace s koeficientem homothetie c je podobná transformace s faktorem podobnosti $|c|$.*

Ze (41.1) plyne snadno:

VĚTA 41.6. *Je-li f homothetická transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ s koeficientem homothetie c, potom determinant transformace f je roven c^m. Při sudém* *m každá homothetie je přímá podobná transformace, při lichém m je f přímá nebo nepřímá podle toho, zda $c > 0$ či $c < 0$.*

VĚTA 41.7. *Homothetická transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ má právě jeden samodružný bod.* Nazýváme jej *středem homothetie.*

DŮKAZ. Budiž φ homothetická transformace s koeficientem homothetie c. Zvolme libovolný bod P a položme $Q = \varphi(P)$. Pro každý bod X existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{u}$ tak, že

(41.2) $$X = P + \boldsymbol{u}$$

a podle (41.1) je

(41.2') $$\varphi(X) = Q + c\boldsymbol{u}.$$

Bod X je samodružný tehdy a jenom tehdy, jestliže $X = \varphi(X)$, t. j. jestliže $P + \boldsymbol{u} = Q + c\boldsymbol{u}$ neboli (ježto $c \neq 1$) jestliže

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{1 - c}(Q - P).$$

VĚTA 41.8. *Budiž f podobná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ s faktorem podobnosti k. Determinant transformace f je roven $\pm k^m$.* Při tom ovšem platí znamení plus nebo minus podle toho, zda f je přímá či nepřímá.

DŮKAZ. Pro $k = 1$ je nám to známo podle věty 41.3 (viz též větu 38.7); budiž tedy $k \neq 1$. Zvolme c tak, že $|c| = k$; ježto $k \neq 1$, je zřejmě $c \neq 1$. Zvolme libovolně body P, Q a definujme transformaci φ pomocí (41.2) a (41.2'). Zřejmě φ je homothetická transformace s koeficientem homothetie c; podle věty 41.4 je φ podobná transformace s faktorem podobnosti k. Je-li ψ transformace inversní k φ a je-li $g = \psi \circ f$, je zřejmě ψ podobná transformace s faktorem podobnosti $1 : k$, takže podle vět 38.7 a 38.10 je g shodná transformace, takže determinant transformace g podle věty 41.3 je roven ± 1. Na druhé straně je zřejmě $f = \varphi \circ g$ a determinant transformace φ je podle věty 41.6 roven c^m. Podle věty 39.4 je tudíž determinant transformace f roven $\pm c^m$, t. j. roven $\pm k^m$.

V definici (41.1) homothetické transformace máme vedle podmínky $c \neq 0$ podmínku $c \neq 1$, víme však, že pro $c = 1$ podmínka (41.1) charakterisuje translaci. Jestliže nyní máme dvě transformace f_1, f_2 prostoru $\mathbf{E}_m$, při čemž pro každý vektor $\boldsymbol{u}$ jest

$$f_1(\mathbf{u}) = c_1 \,.\, \mathbf{u}, \ f_2(\mathbf{u}) = c_2 \,.\, \mathbf{u},$$

kde $c_1 \neq 0 \neq c_2$, a položíme-li $g = f_1 \circ f_2$, je zřejmě

$$g(\mathbf{u}) = c_1 c_2 \,.\, \mathbf{u}.$$

Mimo to, jestliže afinní transformace f splňuje podmínku (41.1), kde $c \neq 0$, potom transformace h inversní k f splňuje podmínku

$$h(\mathbf{u}) = \frac{1}{c} \,.\, \mathbf{u}.$$

Z toho plyne:

VĚTA 41.9. *Všecky translace a homothetické transformace prostoru* $\mathbf{E}_m$ *dohromady tvoří transformační grupu, která je podgrupou transformační grupy všech podobných transformací prostoru* $\mathbf{E}_m$.

Souměrnou transformací prostoru $\mathbf{E}_m$ nazveme každou involutorní afinní transformaci, která je zároveň shodnou transformací. Snadno určíme všecky takové souměrné transformace. Z věty 38.2 plyne, že *identická transformace a všecky středové souměrnosti patří mezi souměrné transformace prostoru* $\mathbf{E}_m$. Zbývají transformace f definované rovnicemi (40.6), (40.6′), kde $h > 0$, $k > 0$, $h + k = m$. Tu platí:

VĚTA 41.10. *Mají-li* $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ *týž význam jako v článku* 40, *potom transformace f definovaná rovnicemi* (40.6), (40.6′) *je shodná* (je to tedy souměrná transformace) *tehdy a jenom tehdy, jestliže lineární soustavy* $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ *jsou navzájem totálně kolmé.*

DůKAZ. Je-li f shodná transformace, jest $f(\mathbf{u}) \,.\, f(\mathbf{v}) = \mathbf{uv}$. Patří-li však $\mathbf{u}$ do $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{v}$ do $\mathbf{W}_k^-$, je $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$, takže $\mathbf{uv} = -\mathbf{uv}$, tedy $\mathbf{uv} = 0$, t. j. lineární soustavy $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ jsou navzájem totálně kolmé. Obráceně předpokládejme, že lineární soustavy $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ jsou totálně kolmé. Můžeme vektory (40.3) volit orthonormální a rovněž i vektory (40.4). Ježto $\mathbf{W}_h^+$, $\mathbf{W}_k^-$ jsou totálně kolmé, jsou také vektory

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$$

orthonormální a totéž platí o vektorech

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, -\mathbf{v}_1 \ldots, -\mathbf{v}_k,$$

takže transformace f je shodná podle věty 38.6.

Budiž f souměrná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ definovaná rovnicemi (40.6), (40.6') a označme ϱ prostor (40.7) jejích samodružných bodů. V krajním případě $h = m - 1$ je ϱ nadrovinou, f se nazývá *nadrovinová souměrnost*, ϱ její *nadrovina souměrnosti*. Ve druhém krajním případě $h = 1$ je ϱ přímkou, f se nazývá *osová souměrnost*, ϱ její *osa souměrnosti*. Pro $m = 2$ oba typy splynou. Pro $m = 3$, $h = 2$ mluvíme o *rovinové souměrnosti* a o její *rovině souměrnosti*.

Jsou-li A, B dva různé body, nazýváme *nadrovinou souměrnosti úsečky* AB (pro $m = 2$ *osou souměrnosti úsečky* AB, pro $m = 3$ *rovinou souměrnosti úsečky* AB) nadrovinu procházející středem dvojice A, B kolmo na přímku AB. Následující dvě užitečné věty se dají snadno dokázat:

VĚTA 41.11. *Jsou-li A, B dva různé body prostoru $\mathbf{E}_m$, potom nadrovina souměrnosti úsečky AB je množina právě těch bodů prostoru $\mathbf{E}_m$, jejichž vzdálenost od bodu A je rovna vzdálenosti od bodu B.*

VĚTA 41.12. *Jsou-li A, B dva různé body prostoru $\mathbf{E}_m$, potom existuje právě jedna nadrovinová souměrnost f prostoru $\mathbf{E}_m$, pro kterou je $f(A) = B$; nadrovinou souměrnosti transformace f je nadrovina souměrnosti úsečky AB.*

Vraťme se k případu obecné souměrné transformace f prostoru $\mathbf{E}_m$ definované rovnicemi (40.6) a (40.6') a označme opět ϱ prostor (40.7). Jestliže bod A nenáleží do ϱ, t. j. není samodružným při f, existuje právě jeden $\mathbf{E}_{h+1}$ obsahující jak A tak i ϱ. V tomto $\mathbf{E}_{h+1}$ leží také $B = f(A)$ a snadno se dokáže, že v prostoru $\mathbf{E}_{h+1}$ je ϱ nadrovinou souměrnosti úsečky AB.

Poznamenejme ještě, že involutorní afinní transformace definovaná rovnicemi (40.6), (40.6') má determinant rovný $(-1)^k$, je tedy přímá pro sudé k, nepřímá pro liché k; to platí i v krajních případech $k = 0$ (identická transformace) a $h = 0$ (středová souměrnost). Zejména nadrovinová souměrnost ($k = 1$) je vždy nepřímá shodnost; osová souměrnost ($h = 1$, tedy $k = m - 1$) je přímá shodnost pro liché m (zejména tedy v obyčejném prostoru $\mathbf{E}_3$), nepřímá pro sudé m (zejména tedy v rovině).

42. SHODNÉ TRANSFORMACE ROVINY. Budiž dána *orientovaná* rovina $\mathbf{E}_2$ a v $\mathbf{E}_2$ budiž zvolena kladná *kartézská* soustava souřadnic

$$(42.1) \qquad \langle P;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle.$$

VĚTA 42.1. *Dvojice vektorů* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *jest orthonormální tehdy a jenom tehdy, jestliže existují reálná čísla* u_1, u_2 *a číslo* $\varepsilon = \pm 1$ *tak, že*

$$(42.2) \qquad \mathbf{u} = (u_1, u_2),\ \mathbf{v} = (-\varepsilon u_2, \varepsilon u_1),$$

$$(42.3) \qquad u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

Při tom dvojice (42.2) *tvoří kladnou basi pro* $\mathbf{E}_2$ *tehdy a jenom tehdy, jestliže* $\varepsilon = +1$.

DŮKAZ. Podmínky orthonormálnosti jsou

$$(42.4) \qquad |\mathbf{u}| = 1,\ \mathbf{uv} = 0,\ |\mathbf{v}| = 1.$$

Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, potom prvá podmínka (42.4) je vyjádřena rovnicí (42.3). Je-li $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, potom druhá podmínka (42.4) je vyjádřena rovnicí $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$, která (ježto $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$) znamená, že existuje reálné číslo ε tak, že platí druhá rovnice (42.2). Posléze třetí podmínka (42.4) znamená, že $\varepsilon = \pm 1$. Podle (42.2) jest

$$[\mathbf{uv}] = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ -\varepsilon u_2, & \varepsilon u_1 \end{vmatrix} = \varepsilon(u_1^2 + u_2^2) = \varepsilon,$$

takže $[\mathbf{uv}] > 0$ pro $\varepsilon = 1$, $[\mathbf{uv}] < 0$ pro $\varepsilon = -1$. Připomeňme si, že vektor $(-u_2, u_1)$ je orthogonální doplněk vektoru (u_1, u_2) ve smyslu článku 35 (viz větu 35.2).

VĚTA 42.2. *Je-li* f *shodná transformace roviny, existují reálná čísla* $a_1, a_2, c_1, c_2, \varepsilon$ *tak, že*

$$(42.5) \qquad c_1^2 + c_2^2 = 1,\ \varepsilon = \pm 1$$

a že obrazem libovolného bodu

$$(42.6) \qquad X = [x_1, x_2]$$

je bod

$$(42.6') \qquad f(X) = [x_1', x_2'],$$

kde

$$(42.7) \qquad x_1' = c_1x_1 - c_2x_2 + a_1,\ x_2' = \varepsilon(c_2x_1 + c_1x_2) + a_2.$$

Obráceně, jestliže reálná čísla a_1, a_2, c_1, c_2 splňují podmínky (42.5), *potom rovnice* (42.6), (42.6′) a (42.7) *definují shodnou transformaci roviny, která je přímá pro $\varepsilon = 1$, nepřímá pro $\varepsilon = -1$.*

DŮKAZ. Při dané kladné kartézské soustavě souřadnic (42.1) lze (42.6) psáti ve tvaru

$$X = P + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

Je-li $f(P) = P + \boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, potom podle vět 38.5 a 38.6 shodná transformace roviny převádí bod X v bod

$$f(X) = P + x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}, \tag{42.8}$$

kde $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je libovolná pevně daná orthonormální dvojice vektorů, takže lze předpokládati, že platí (42.2), při čemž je splněno (42.3) a pro přímou f je $\varepsilon = 1$, pro nepřímou f je $\varepsilon = -1$. Podle (42.2) a (42.6′) lze však psáti (42.8) ve tvaru

$$x_1' = u_1x_1 - \varepsilon u_2x_2 + a_1,\ x_2' = u_2x_1 + \varepsilon u_1x_2 + a_2$$

a stačí položit $c_1 = u_1$, $c_2 = \varepsilon u_2$, abychom přešli ke tvaru (42.7).

VĚTA 42.3. *Je-li f přímá shodná transformace roviny, takže ve větě* 42.2 *je $\varepsilon = 1$, potom dvojice reálných čísel (c_1, c_2) z věty* 42.2 *je nezávislá na volbě kladné kartézské soustavy souřadnic* (42.1). *Při změně orientace roviny dvojice (c_1, c_2) přejde ve dvojici $(c_1, -c_2)$.*

DŮKAZ. Rovnice (42.7) definují obraz (42.6′) bodu (42.6) při shodné transformaci f. Je-li

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \tag{42.9}$$

libovolný vektor; je tudíž

$$f(\boldsymbol{u}) = (u_1', u_2'), \tag{42.9′}$$

kde

$$u_1' = c_1u_1 - c_2u_2,\ u_2' = \varepsilon(c_2u_1 + c_1u_2). \tag{42.10}$$

Je-li shodná transformace f přímá, jest $\varepsilon = 1$, takže rovnice (42.10) mají tvar

$$u_1' = c_1u_1 - c_2u_2,\ u_2' = c_2u_1 + c_1u_2. \tag{42.11}$$

Při tom podle (42.5) je

$$(42.5') \qquad c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

Ze (42.9), (42.9'), (42.11) a (42.5') plyne jednak

$$(42.12) \qquad \mathbf{u} \,.\, f(\mathbf{u}) = u_1 u_1' + u_2 u_2' = c_1,$$

jednak

$$(42.13) \qquad [\mathbf{u}, f(\mathbf{u})] = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ u_1', & u_2' \end{vmatrix} = c_2.$$

Avšak skalární součin (42.12) je nezávislý na volbě kartézské soustavy souřadnic (42.1), a pokud tato soustava je kladná, platí totéž o vnějším součinu (42.13), který podle věty 34.7 se znásobí číslem -1 při změně orientace roviny. Tím je vše dokázáno.

Místo dvojice reálných čísel (c_1, c_2), o které je řeč ve větě (42.3), je výhodné zavésti *komplexní číslo*

$$(42.14) \qquad c = c_1 + ic_2,$$

které se jmenuje *komplexní míra* přímé shodné transformace f. *Při dané orientaci roviny* má tedy komplexní míra (42.14) jednoznačně určenou hodnotu. Naproti tomu *při změně orientace roviny komplexní míra c přímé shodné transformace f se podle věty* 42.3 *nahradí komplexním číslem*

$$(42.14') \qquad c^* = c_1 - ic_2$$

komplexně sdruženým s číslem (42.14).

Absolutní hodnotou komplexního čísla $c_1 + ic_2$ rozumíme, jak známo, číslo

$$|c_1 + ic_2| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Komplexní jednotkou nazveme komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné. Z věty 42.2 snadno plyne:

VĚTA 42.4. *Komplexní míra přímé shodné transformace roviny je komplexní jednotka. Obráceně zvolíme-li libovolně komplexní jednotku j a dva body P, Q v rovině, existuje právě jedna přímá shodná transformace f roviny, při které $f(P) = Q$ a jejíž komplexní míra je rovna j.*

VĚTA 42.5. *Jsou-li f', f'' dvě přímé shodné transformace roviny, je také $f' \circ f''$ přímá shodná transformace roviny, jejíž komplexní míra je rovna součinu komplexních měr transformací f', f''.*

DŮKAZ. Buďtež

$$c' = c_1' + ic_2', \ c'' = c_1'' + ic_2''$$

komplexní míry transformací f', f''. Z vět 39.4 a 39.6 následuje, že také $g = f' \circ f''$ je přímá shodná transformace roviny $\mathbf{E}_2$. Podle věty 42.2 a podle (42.9′) a (42.11) máme

$$f'(\mathbf{e}_1) = (c_1', c_2'), \ f'(\mathbf{e}_2) = (-c_2', c_1'),$$
$$f''(c_1', c_2') = (c_1''c_1' - c_2''c_2', c_2''c_1' + c_1''c_2'),$$

tedy

$$g(\mathbf{e}_1) = (c_1''c_1' - c_2''c_2', c_2''c_1' + c_1''c_2'). \tag{42.15}$$

Na druhé straně, je-li $c_1 + ic_2$ komplexní míra transformace g, je podle (42.9′) a (42.11)

$$g(\mathbf{e}_1) = (c_1, c_2). \tag{42.15'}$$

Podle (42.15) a (42.15′) je

$$c_1 = c_1''c_1' - c_2''c_2', \ c_2 = c_2''c_1' + c_1''c_2'$$

neboli

$$c_1 + ic_2 = (c_1' + ic_2')(c_1'' + ic_2'').$$

VĚTA 42.6. *Přímá shodná transformace roviny s komplexní měrou rovnou jedné je translace a obráceně.*

DŮKAZ. f je translace tehdy a jenom tehdy, jestliže $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ pro každý vektor $\mathbf{u}$, tedy podle (42.9), (42.9′) a (42.10) tehdy a jenom tehdy, jestliže $\varepsilon = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ neboli jestliže $\varepsilon = 1$, $c_1 + ic_2 = 1$.

Přímá shodná transformace roviny, jejíž komplexní míra je různá od jedné, se jmenuje *rotace*. Podle věty 42.6 *jsou právě dva druhy přímých shodných transformací roviny: translace a rotace.*

VĚTA 42.7. *Každá rotace roviny má právě jeden samodružný bod.* Tento bod se jmenuje *střed rotace.*

DŮKAZ. Podle (42.7), kde nyní $\varepsilon = 1$, je bod (42.6) samodružný tehdy a jenom tehdy, jestliže

$$x_1 = c_1x_1 - c_2x_2 + a_1, \ x_2 = c_2x_1 + c_1x_2 + a_2. \tag{42.16}$$

Rovnice (42.16) lze shrnout v jedinou komplexní rovnici

$$x_1 + ix_2 = (c_1 + ic_2)(x_1 + ix_2) + (a_1 + ia_2). \tag{42.16'}$$

Ježto $c_1 + ic_2 \neq 1$, má (42.16') právě jedno řešení

$$x_1 + ix_2 = \frac{a_1 + ia_2}{1 - (c_1 + ic_2)}.$$

VĚTA 42.8. *Přímá shodná transformace roviny s komplexní měrou rovnou minus jedné je středová souměrnost a obráceně.* Jsou tedy středové souměrnosti v rovině zvláštním případem rotace roviny.

DŮKAZ. f je středová souměrnost tehdy a jenom tehdy, jestliže $f(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ pro každý vektor $\mathbf{u}$, tedy podle (42.9), (42.9') a (42.10) tehdy a jenom tehdy, jestliže $\varepsilon = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ neboli $\varepsilon = 1$, $c_1 + ic_2 = -1$.

VĚTA 42.9. *Je-li f nepřímá shodná transformace roviny, existují dva orthonormální vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tak, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.*

DŮKAZ. Rovnice (42.10), ve kterých nyní $\varepsilon = -1$, definují obraz (42.9') vektoru (42.9) při f. V poněkud jiném označení máme, že pro

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2),\ f(\mathbf{w}) = (w_1', w_2')$$

jest

$$w_1' = c_1w_1 - c_2w_2,\quad -w_2' = c_2w_1 + c_1w_2$$

neboli

$$w_1' - iw_2' = (c_1 + ic_2)(w_1 + iw_2). \tag{42.17}$$

Určeme nyní komplexní číslo $u_1 + iu_2$ tak, aby byla splněna komplexní rovnice

$$(u_1 + iu_2)^2 = c_1 - ic_2. \tag{42.18}$$

Ježto $|c_1 - ic_2| = 1$, jest $|u_1 + iu_2| = 1$ neboli

$$u_1^2 + u_2^2 = 1, \tag{42.19}$$

což lze též psáti

$$(u_1 + iu_2)(u_1 - iu_2) = 1.$$

Tudíž

$$u_1 - iu_2 = \frac{u_1 + iu_2}{(u_1 + iu_2)^2} = \frac{u_1 + iu_2}{c_1 - ic_2}.$$

Ježto však $|c_1 + ic_2| = 1$, je $(c_1 - ic_2)(c_1 + ic_2) = 1$, takže

$$u_1 - iu_2 = (c_1 + ic_2)(u_1 + iu_2). \tag{42.20}$$

Znásobíme-li obě strany číslem i, dostaneme ještě

$$(42.20') \qquad u_2 + iu_1 = (c_1 + ic_2)(-u_2 + iu_1).$$

Položíme-li

$$(42.21) \qquad \mathbf{u} = (u_1, u_2), \ \mathbf{v} = (-u_2, u_1)$$

a porovnáme-li (42.20), (42.20') se (42.17), dostaneme, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Mimo to podle (42.19) a (42.21) je $|\mathbf{u}| = 1$, $|\mathbf{v}| = 1$, $\mathbf{uv} = 0$.

Ke konci článku 41 jsme si povšimlí m. j. toho, že *mezi nepřímé shodné transformace roviny patří zejména všecky osové souměrnosti v rovině.* Je-li f taková osová souměrnost a p její osa souměrnosti, je zřejmě každý bod přímky p samodružný při f a obráceně každý při f samodružný bod leží na p. Obráceně platí:

VĚTA 42.10. *Jestliže nepřímá shodná transformace f roviny má aspoň jeden samodružný bod P, potom f je osová souměrnost.*

DŮKAZ. Podle věty 42.9 lze určit orthonormální vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tak, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$. Ježto $f(P) = P$, vidíme, že pro libovolný bod

$$X = P + x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$$

jest

$$f(X) = P + x_1\mathbf{u} - x_2\mathbf{v}.$$

Tedy f je osová souměrnost s osou v přímce $\{P; \mathbf{u}\}$.

43. PŘÍMÉ PODOBNÉ TRANSFORMACE ROVINY. Jako v článku 42 budiž dána orientovaná rovina $\mathbf{E}_2$ a v ní kladná kartézská soustava souřadnic (42.1).

VĚTA 43.1. *Je-li f podobná transformace roviny, existují reálná čísla $a_1, a_2, c_1, c_2, \varepsilon$ tak, že*

$$(43.1) \qquad \varepsilon = \pm 1, \ |c_1| + |c_2| > 0$$

a že obrazem libovolného bodu

$$(43.2) \qquad X = [x_1, x_2]$$

je bod

$$(43.2') \qquad f(X) = [x_1', x_2'],$$

kde

$$(43.3) \qquad x_1' = c_1x_1 - c_2x_2 + a_1, \ x_2' = \varepsilon(c_2x_1 + c_1x_2) + a_2.$$

Obráceně, jestliže reálná čísla $a_1, a_2, c_1, c_2, \varepsilon$ splňují podmínky (43.1), *potom rovnice* (43.2), (43.2′) *a* (43.3) *definují podobnou transformaci roviny, jejímž faktorem podobnosti je číslo*

$$k = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \tag{43.4}$$

a která je přímá pro $\varepsilon = 1$, nepřímá pro $\varepsilon = -1$.

DŮKAZ. Budiž g homothetie roviny se středem P a s koeficientem homothetie rovným faktoru podobnosti k dané podobné transformace f; budiž h homothetie roviny s týmž středem P a s koeficientem homothetie rovným $1 : k$. Budiž $\varphi = h \circ f$; ježto zřejmě g, h jsou navzájem inversní, je $f = g \circ \varphi$. Podle vět 38.7, 38.10 a 41.5 je φ shodná transformace roviny, podle vět 39.4 a 41.6 je φ přímá nebo nepřímá stejně jako f. Obrazem bodu (43.2) při g je bod

$$[kx_1, kx_2]. \tag{43.5}$$

Ježto $f = g \circ \varphi$, je obraz (43.2′) bodu (43.2) při f totožný s obrazem bodu (43.5) při φ; tudíž podle věty 42.2 existují reálná čísla $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ tak, že

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 \tag{43.6}$$

a že

$$x_1' = \gamma_1 . kx_1 - \gamma_2 . kx_2 + a_1, \quad x_2' = \varepsilon(\gamma_2 . kx_1 + \gamma_1 . kx_2) + a_2,$$

při čemž $\varepsilon = 1$, je-li f přímá, $\varepsilon = -1$, je-li f nepřímá. Položíme-li $c_1 = \gamma_1 k$, $c_2 = \gamma_2 k$, dostaneme (43.3) a (43.4).

Obráceně, jestliže obrazem bodu (43.2) při f je bod (43.2′), pro který platí (43.3), při čemž je splněno (43.1), definujme k pomocí (43.4) a určeme γ_1, γ_2 tak, že $c_1 = k\gamma_1$, $c_2 = k\gamma_2$, takže podle (43.4) platí (43.6). Označme φ transformaci, která bod (43.2) převádí v bod $[x_1'', x_2'']$, kde

$$x_1'' = \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 + a_1, \quad x_2'' = \varepsilon(\gamma_2 x_1 + \gamma_1 x_2) + a_2.$$

Podle věty 42.2 je φ shodná transformace roviny, přímá pro $\varepsilon = 1$, nepřímá pro $\varepsilon = -1$. Zřejmě však $f = g \circ \varphi$, jestliže opět g je homothetie roviny se středem P a s koeficientem homothetie rovným k, takže podle vět 38.7, 38.10 a 41.5 f je podobná transformace s faktorem podobnosti k, která podle vět 39.4 a 41.6 je přímá nebo nepřímá stejně jako φ, t. j. je přímá pro $\varepsilon = 1$, nepřímá pro $\varepsilon = -1$.

VĚTA 43.2. *Je-li f přímá podobná transformace roviny, takže ve větě* 43.1 je $\varepsilon = 1$, *potom dvojice reálných čísel* (c_1, c_2) *z věty* 43.1 *je nezávislá na volbě kladné kartézské soustavy souřadnic* (42.1). *Při změně orientace roviny dvojice* (c_1, c_2) *přejde ve dvojici* $(c_1, -c_2)$. Tato věta se odvodí z věty 43.1 stejně jako jsme odvodili větu 42.3 z věty 42.2. Místo dvojice reálných čísel (c_1, c_2) zavedeme opět komplexní číslo

$$c = c_1 + ic_2, \tag{43.7}$$

které zase nazveme *komplexní měrou* přímé podobné transformace f. Zřejmě platí:

VĚTA 43.3. *Je-li c komplexní míra přímé podobné transformace roviny, potom $|c|$ je její faktor podobnosti.*

Z věty 43.1 snadno plyne:

VĚTA 43.4. *Zvolíme-li libovolně komplexní číslo $c \neq 0$ a dva body P, Q v rovině, existuje právě jedna přímá podobná transformace f roviny, při které $f(P) = Q$ a jejíž komplexní míra je rovna c.*

VĚTA 43.5. *Jsou-li f', f'' dvě přímé podobné transformace roviny, je také $f' \circ f''$ přímá podobná transformace roviny, jejíž komplexní míra je rovna součinu komplexních měr transformací f', f''.* Tato věta se odvodí z věty 43.1 stejně jako jsme odvodili větu 42.5 z věty 42.2.

VĚTA 43.6. *Každá přímá podobná transformace roviny, která není translací, má právě jeden samodružný bod,* který se jmenuje *střed podobnosti*. Důkaz je stejný jako u věty 42.7.

VĚTA 43.7. *Je-li f přímá podobná transformace roviny s faktorem podobnosti $k \neq 1$ a středem podobnosti P, jest $f = g \circ \varphi$, při čemž g je homothetie se středem P a s koeficientem k, φ je rotace se středem P.* Důkaz je obsažen v začátku důkazu věty 43.1. Ježto P je nyní samodružný bod, je φ rotace se středem P.

44. SHODNÉ TRANSFORMACE PROSTORU E_m PŘI LIBOVOLNÉM m. V článku 36 jsme definovali transformaci $f \circ g$ množiny $\boldsymbol{M}$ složenou ze dvou transformací f, g téže množiny. Obecněji můžeme definovat *transformaci*

$$f_1 \circ \ldots \circ f_k \tag{44.1}$$

složenou z libovolného počtu k transformací $f_1, \ldots, f_k$ pomocí rekurentního vzorce

$$f_1 \circ \ldots \circ f_{k+1} = (f_1 \circ \ldots \circ f_k) \circ f_{k+1}.$$

Pro $k = 1$ (44.1) znamená prostě f. Pro skládání transformací zřejmě platí asociativní zákon. V tomto článku dokážeme mimo jiné, že každá shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$ se dá vytvořit skládáním nadrovinových souměrností. Je-li ϱ libovolná nadrovina, označíme v tomto článku symbolem

$$s(\varrho) \tag{44.2}$$

tu nadrovinovou souměrnost prostoru $\mathbf{E}_m$, jejíž nadrovinou souměrnosti je nadrovina ϱ.

VĚTA 44.1. *Budiž f taková shodná transformace, že existuje nadrovina ϱ, jejíž každý bod je samodružný při f. Potom buďto f je identická transformace nebo f je nadrovinová souměrnost* (44.2).

DŮKAZ. Předpokládejme, že existuje bod, který není samodružný při f. Je-li A kterýkoli takový bod, máme dokázati, že jeho obraz B je zároveň jeho obrazem při (44.2), t. j. [viz též větu 41.12], že ϱ je nadrovina souměrnosti úsečky AB. Označme P patu kolmice na nadrovinu ϱ vedenou bodem A. Podle článku 33 P je ten bod nadroviny ϱ, jehož vzdálenost od bodu A je nejmenší; ježto všechny body nadroviny ϱ jsou samodružné, ježto $B = f(A)$ a ježto vzdálenosti se nemění při transformaci f, je P také ten bod nadroviny ϱ, jehož vzdálenost od bodu B je nejmenší, t. j. P je pata kolmice na nadrovinu ϱ vedené bodem B. Jsou tedy obě přímky PA, PB kolmé na ϱ a musí tudíž splynout, t. j. přímka AB je kolmá na nadrovinu ϱ. Mimo to je $\overline{AP} = \overline{BP}$, takže P je střed dvojice A, B. Tudíž ϱ je nadrovina souměrnosti úsečky AB, což jsme měli dokázat.

VĚTA 44.2. *Jestliže shodná transformace f prostoru $\mathbf{E}_m$ má více než jeden samodružný bod, potom množina všech samodružných bodů je lineární podprostor.*

DŮKAZ. Zvolme samodružný bod P. Je-li X samodružný bod a je-li

$$X = P + \boldsymbol{u}, \tag{44.3}$$

je zřejmě $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Obráceně, je-li $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, je (44.3) samodružný bod. Označme $\mathbf{W}$ množinu těch vektorů $\mathbf{u}$, pro něž $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Z vět 37.7 a 37.8 plyne snadno, že $\mathbf{W}$ je (zřejmě netriviální) lineární soustava; množinou všech samodružných bodů je zřejmě lineární podprostor $\{P; \mathbf{W}\}$.

VĚTA 44.3. *Budiž f shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$. Potom existuje nadrovina ϱ tak, že*

$$f = s(\varrho) \circ \varphi, \tag{44.4}$$

při čemž φ je shodná transformace prostoru $\mathbf{E}_m$, která má aspoň jeden samodružný bod. Má-li f sama samodružný bod P, lze volit φ tak, aby existovala přímka samodružných bodů pro φ obsahující bod P. Existuje-li lineární podprostor $\mathbf{E}_h$ $(1 \leqq h \leqq m - 2)$, jehož všecky body jsou samodružné pro f, lze volit φ tak, aby existoval $\mathbf{E}_{h+1}$ složený z bodů samodružných pro φ a obsahující daný $\mathbf{E}_h$ jako část.

DŮKAZ. Věta je sice správná i pro případ, že f je identická transformace, ale důkaz provedeme pouze pro ten případ, že existuje bod A, jehož obraz $B = f(A)$ je různý od A. Budiž ϱ nadrovina souměrnosti úsečky AB. Je-li X samodružný bod pro f, je zřejmě $\overline{AX} = \overline{BX}$, takže X leží v ϱ podle věty 41.11. Položme

$$\varphi = f \circ s(\varrho). \tag{44.5}$$

Ježto $s(\varrho)$ je involutorní transformace, odvodí se snadno ze (44.5), že platí (44.4). Je-li bod X samodružný pro f, leží X v ϱ a je tudíž samodružný i pro $s(\varrho)$ a tedy podle (44.5) také pro φ. Mimo to je však podle věty 41.12 také bod A samodružný pro φ, čímž je vše dokázáno, všimneme-li si věty 44.2.

VĚTA 44.4. *Každou shodnou transformaci f prostoru $\mathbf{E}_m$ lze napsati ve tvaru*

$$f = s(\varrho_1) \circ \ldots \circ s(\varrho_k),$$

při čemž je $k \leqq m + 1$. Má-li f samodružný bod, lze předpokládati $k \leqq m$. Existuje-li lineární podprostor $\mathbf{E}_h$ $(1 \leqq h \leqq m - 1)$, jehož všechny body jsou samodružné, lze předpokládati $k \leqq m - h$.

DŮKAZ. Identickou transformaci lze napsat ve tvaru $s(\varrho) \circ s(\varrho)$ při libovolné volbě nadroviny ϱ. Tento případ je v dalším vyloučen. Existuje-li lineární podprostor E_{m-1} složený ze samodružných bodů, je naše věta správná podle věty 44.1. Předpokládáme-li však, že naše věta je správná za předpokladu, že existuje E_{h+1} ($1 \leqq h \leqq m - 2$) složený ze samodružných bodů, plyne z věty 44.3, že zůstane správná i za předpokladu, že existuje E_h složený ze samodružných bodů. Z toho plyne indukcí, že věta je správná za předpokladu, že existuje více než jeden samodružný bod (viz větu 44.2). Novým užitím věty 44.3 plyne potom, že naše věta je správná i v případě jediného samodružného bodu a další užití věty 44.3 vede posléze ke správnosti naší věty i pro případ, že neexistuje samodružný bod. Z provedeného důkazu je patrné, že je správný ještě tento dodatek:

VĚTA 44.5. *Jestliže f není identická transformace, ale má aspoň jeden samodružný bod, zůstane věta 44.4 v platnosti, připojíme-li požadavek, aby nadroviny $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ procházely všemi samodružnými body.*

Všimneme si případu $m = 3$ obyčejného prostoru. Každá shodná transformace f prostoru E_3 se dá podle věty 44.4 složit z nejvýše čtyř rovinových souměrností a má-li f aspoň jeden samodružný bod, dá se f složit z nejvýše tří rovinových souměrností, při čemž podle věty 44.5 lze docíliti toho, aby příslušné roviny souměrnosti obsahovaly každý samodružný bod. Nyní rovinová souměrnost je nepřímá shodná transformace a z věty 39.4 (viz též větu 39.6) soudíme snadno, že totéž platí i o transformaci složené ze tří rovinových souměrností. Tudíž *každá shodná přímá transformace f obyčejného prostoru E_3, která má samodružný bod P, se dá psát ve tvaru*

$$f = s(\varrho_1) \circ s(\varrho_2),$$

při čemž roviny ϱ_1, ϱ_2 obě procházejí bodem P. To platí i v případě identické transformace, ve kterém je $\varrho_1 = \varrho_2$. Jinak je však $\varrho_1 \neq \varrho_2$ a obě roviny ϱ_1, ϱ_2, majíce společný bod P, se protnou v přímce p. Každý bod přímky p je samodružný jak při $s(\varrho_1)$ tak i při $s(\varrho_2)$ a tudíž také při f. Na druhé straně plyne z vět 44.1 a 44.2, že přímka p vyčerpává celou množinu samodružných bodů. Nazveme-li *rotací v prostoru* E_3 přímou shodnou transformaci f prostoru E_3, která není identickou a má aspoň jeden samodružný bod, vidíme, že množina samodružných bodů rotace v prostoru E_3 je přímka, která se nazývá *osa rotace.*

45. AFINNÍ A METRICKÁ GEOMETRIE EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. V kapitole I jsme provedli studium prostoru E_m vycházejíce od pojmu vzdálenosti dvou bodů. Na tento pojem vzdálenosti jsme převedli řadu dalších základních pojmů, zejména pojem vektoru, pojem sčítání vektorů, pojem součinu čísla s vektorem a pojem skalárního součinu dvou vektorů. Jelikož tyto pojmy jsou definovatelné pomocí pouhého pojmu vzdálenosti, je patrné, že to jsou pojmy *invariantní při shodných transformacích*, neboť shodné transformace byly právě definovány tou vlastností, že vzdálenost dvou bodů se při nich nemění. Shodné transformace jsou však zvláštními případy regulárních afinních transformací a ukazuje se, že velká řada námi studovaných pojmů jsou pojmy *invariantní při všech regulárních afinních transformacích*, netoliko při transformacích shodných.

Studium takových pojmů v prostoru E_m, které jsou invariantní při regulárních afinních transformacích tvoří t. zv. *afinní geometrii* prostoru E_m. Skoro celý obsah naší kapitoly III náleží do afinní geometrie prostoru E_m. Naproti tomu studium takových pojmů v prostoru E_m, které nejsou invariantní při všech regulárních afinních transformacích, nýbrž pouze při shodných transformacích, tvoří t. zv. *metrickou geometrii* prostoru E_m. Celý obsah naší kapitoly V náleží do metrické geometrie prostoru E_m.

Základními pojmy afinní geometrie prostoru E_m jsou pojem vektoru, pojem sčítání vektorů a pojem součinu čísla s vektorem. Na tyto základní pojmy jsme převáděli všecky ostatní pojmy z afinní geometrie prostoru E_m. Při studiu afinní geometrie jsme užívali obecných lineárních soustav souřadnic, protože pojem takových soustav souřadnic je invariantní při všech regulárních afinních transformacích. V metrické geometrii přistupuje k uvedeným základním pojmům jako další ještě pojem skalárního součinu dvou vektorů a při studiu metrické geometrie je výhodné užívat kartézských soustav souřadnic, ve kterých má skalární součin zvláště jednoduchý tvar.

Do afinní geometrie řadíme také studium těch pojmů, které jsou invariantní pouze při *přímých* afinních transformacích. Nejdůležitější z takových pojmů je pojem orientace eukleidovského prostoru. Podobně řadíme do metrické geometrie také studium těch pojmů, které jsou invariantní pouze při přímých shodných transformacích. Sem patří zejména v obyčejném prostoru pojem vnějšího součinu tří vektorů a pojem vektorového součinu dvou vektorů. Ve skutečnosti je ovšem pojem vnějšího součinu tří vektorů v $\boldsymbol{E}_3$ a obecněji pojem vnějšího součinu m vektorů v $\boldsymbol{E}_m$ invariantní nejen při přímých shodných transformacích, nýbrž při všech přímých unimodulárních afinních transformacích a dá se tudíž jeho studium řadit do afinní geometrie.

VII

LINEÁRNÍ ROVNICE

46. LINEÁRNÍ FUNKCE VEKTORU. Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$. Zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$ je vektorový prostor dimense m. Je-li zvolena base

(46.1) $$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m,$$

lze každý vektor $\mathbf{v}$ právě jedním způsobem psáti ve tvaru

(46.2) $$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m.$$

Zvolme libovolně reálná čísla $a_1, \ldots, a_m$ a přiřaďme každému vektoru (46.2) reálné číslo

(46.3) $$f(\mathbf{v}) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m.$$

Pravíme, že f je *lineární funkce vektoru* v prostoru $\mathbf{E}_m$. Z definice plyne předně, že jsou-li $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ libovolné dva vektory, jest

(46.4) $$f(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}')$$

a za druhé, že je-li c libovolné reálné číslo a je-li $\mathbf{v}$ libovolný vektor, jest

(46.5) $$f(c\mathbf{v}) = c \,.\, f(\mathbf{v}).$$

Pojem lineární funkce vektoru jsme zavedli na základě zvolené base (46.1) vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$. Je třeba ukázati, že tato závislost na basi (46.1) je pouze zdánlivá. K tomu cíli nejprve poznamenejme, že vlastnosti (46.4) a (46.5) lineární funkce vektoru jsou nezávislé na volbě base (46.1). Stačí tedy dokázati, že jestliže každému vektoru $\mathbf{v}$ přiřadíme číslo $f(\mathbf{v})$ tak, že jsou splněny vlastnosti (46.4) a (46.5), existují čísla $a_1, \ldots, a_m$ tak, že pro každý vektor (46.2) platí (46.3). Avšak k tomu cíli stačí položit

(46.6) $$f(\mathbf{u}_r) = a_r \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m,$$

neboť za (46.4) a (46.5) plyne, že

$$f(x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m) = x_1 \,.\, f(\mathbf{u}_1) + \ldots + x_m \,.\, f(\mathbf{u}_m),$$

takže pro vektor (46.2) máme (46.3).

Mezi lineárními funkcemi vektoru je jedna, jejíž hodnota v každém vektoru je rovna nule; označíme ji $\bar{\mathbf{o}}$ a nazveme ji *nulovou funkcí vektoru.* Pro nulovou funkci vektoru máme ve (46.3)

$$a_1 = 0, \ldots, a_m = 0.$$

Označme $\mathbf{F}$ množinu všech lineárních funkcí vektoru. Jestliže f i g náležejí do $\mathbf{F}$, označme $f + g$ funkci, která každému vektoru $\mathbf{v}$ přiřazuje číslo $f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$. Jestliže je zvolena určitá base (46.1) pro $\mathbf{V}_m$ a jestliže platí (46.3) a

$$g(\mathbf{v}) = b_1x_1 + \ldots + b_mx_m,$$

potom funkce $f + g$ přiřazuje každému vektoru (46.2) číslo

$$(a_1 + b_1)\,x_1 + \ldots + (a_m + b_m)\,x_m,$$

z čehož je patrné, že $f + g$ je lineární funkce vektoru. Jestliže f náleží do $\mathbf{F}$ a jestliže c je reálné číslo, označme cf funkci, která každému vektoru $\mathbf{v}$ přiřazuje číslo $c \,.\, f(\mathbf{v})$. Jestliže při zvolené basi (46.1) pro $\mathbf{V}_m$ platí (46.3), potom funkce cf přiřazuje každému vektoru (46.2) číslo

$$ca_1x_1 + \ldots + ca_mx_m,$$

z čehož je patrné, že cf je lineární funkcí vektoru.

Právě jsme definovali součet $f + g$ dvou lineárních funkcí vektoru a součin cf reálného čísla c s lineární funkcí vektoru. Na základě těchto definic zřejmě *množina* $\mathbf{F}$ *všech lineárních funkcí vektoru je vektorový prostor ve smyslu obecné definice článku* 10, při čemž nulovým vektorem v $\mathbf{F}$ je nulová funkce vektoru $\bar{\mathbf{o}}$. Ježto $\mathbf{F}$ je vektorový prostor, můžeme mluvit o lineárních kombinacích lineárních funkcí vektoru, o jejich lineární nezávislosti a pod.

Mluvili jsme dosud o lineárních funkcích vektoru se stanoviska afinní geometrie. Theorie lineárních funkcí vektoru je však jednodušší se stanoviska metrické geometrie, které nyní zaujmeme. Je-li $\mathbf{a}$ daný vektor a přiřadíme-li každému vektoru $\mathbf{v}$ skalární součin

(46.7) $$f(\mathbf{v}) = \mathbf{av},$$

potom podle (7.4) a (8.9) je f lineární funkce vektoru. *Každá lineární funkce vektoru je tvaru* (46.7). Neboť je-li (46.1) orthonormální base pro $\mathbf{V}_m$ a je-li $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, potom zřejmě (46.3) splyne se (46.7). Platí-li (46.6), pravíme, že lineární funkce vektoru f je *metricky vytvořena vektorem* $\mathbf{a}$.

Jestliže každému vektoru $\mathbf{a}$ přiřadíme lineární funkci vektoru f podle pravidla (46.7), dostaneme vzájemně jednoznačný vztah mezi množinou $\mathbf{V}_m$ všech vektorů $\mathbf{a}$ a množinou $\mathbf{F}$ všech lineárních funkcí vektoru f. Speciálně nulovému vektoru $\mathbf{o}$ je přiřazena nulová funkce vektoru $\bar{o}$. Tento vztah je *isomorfismus mezi* $\mathbf{V}_m$ a $\mathbf{F}$, neboť jestliže vektorům $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ odpovídají lineární funkce vektoru f a g, zřejmě vektoru $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ odpovídá $f + g$, a je-li c reálné číslo, potom vektoru $c\mathbf{a}$ odpovídá cf.

VĚTA 46.1. *Budiž f nenulová lineární funkce vektoru $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Potom existuje $(m - 1)$-směr $\mathbf{W}_{m-1}$ tak, že $f(\mathbf{v}) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{v}$ náleží do $\mathbf{W}_{m-1}$.* Pravíme, že $\mathbf{W}_{m-1}$ je *nulový* $(m - 1)$-*směr funkce f*. Obráceně, *je-li $\mathbf{W}_{m-1}$ libovolný $(m - 1)$-směr, existuje nenulová lineární funkce vektoru f, jejíž nulový $(m - 1)$-směr je právě $\mathbf{W}_{m-1}$ a všecky takové funkce f jsou mezi sebou lineárně závislé.*

Věta 46.1 je zřejmě větou z afinní geometrie a lze ji dokázati methodami afinní geometrie, t. j. bez užití skalárního součinu. Dokážeme ji však velmi jednoduše methodou metrické geometrie. Jestliže f je metricky vytvořena vektorem $\mathbf{a}$, platí (46.7), takže $f(\mathbf{v}) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jsou-li vektory $\mathbf{a}, \mathbf{v}$ orthogonální, t. j. jestliže $\mathbf{v}$ náleží do $(m - 1)$-směru $\mathbf{W}_{m-1}$ totálně kolmého na směr $\{\mathbf{a}\}$. Obráceně k danému $(m - 1)$-směru $\mathbf{W}_{m-1}$ existuje totálně kolmý směr $\{\mathbf{u}\}$ a platí-li (46.7), jest $f(\mathbf{v}) = 0$ pro každý vektor náležející do $\mathbf{W}_{m-1}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže směry $\{\mathbf{a}\}, \{\mathbf{u}\}$ splynou, t. j. jestliže vektory $\mathbf{a}, \mathbf{u}$ jsou mezi sebou lineárně závislé.

VĚTA 46.2. *Buďtež $f, f_1, \ldots, f_k$ nenulové lineární funkce vektoru. Jestliže f je lineární kombinací funkcí $f_1, \ldots, f_k$, potom každý směr náležející do nulových $(m - 1)$-směrů funkcí $f_1, \ldots, f_k$ náleží také do nulového $(m - 1)$-směru funkce f.*

DŮKAZ. Buďtež $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektory, které metricky vytvořují funkce $f, f_1, \ldots, f_k$. Potom vektor $\mathbf{a}$ je lineární kombinací vektorů

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Jestliže vektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ náleží do nulových $(m-1)$-směrů všech funkcí $f_1, \ldots, f_k$, potom směr $\{\boldsymbol{v}\}$ je kolmý na všecky směry $\{\boldsymbol{a}_1\}, \ldots, \{\boldsymbol{a}_k\}$. Podle věty 31.2 směr $\{\boldsymbol{v}\}$ je také kolmý na $\{\boldsymbol{a}\}$, takže vektor $\boldsymbol{v}$ náleží do nulového $(m-1)$-směru funkce f.

VĚTA 46.3. *Jsou-li lineární funkce vektoru $f_1, \ldots, f_k$ $(1 \leq k \leq m-1)$ mezi sebou lináerně nezávislé, potom množina všech těch vektorů, které náležejí do nulových $(m-1)$-směrů všech funkcí $f_1, \ldots, f_k$, tvoří $(m-k)$-směr.* Obráceně, *je-li dán libovolný $(m-k)$-směr $\boldsymbol{W}_{m-k}$, potom všecky ty lineární funkce vektoru, jejichž nulové $(m-1)$-směry obsahují $\boldsymbol{W}_{m-k}$ jako část, vyplní lineární soustavu $\{f_1, \ldots, f_k\}$ dimense k obsaženou ve vektorovém prostoru $\boldsymbol{F}$.*

DŮKAZ. Buďtež $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ vektory, které metricky vytvořují funkce $f_1, \ldots, f_k$. Tyto vektory jsou mezi sebou lineárně nezávislé a definují tudíž lineární soustavu $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ dimense k, k níž je totálně kolmá lineární soustava $\boldsymbol{W}_{m-k}$ dimense $m-k$ obsahující právě ty vektory, které jsou orthogonální ke všem vektorům $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Obráceně, je-li dána lineární soustava $\boldsymbol{W}_{m-k}$, budiž $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ k ní totálně kolmá; vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ potom metricky vytvořují lineární funkce vektoru $f_1, \ldots, f_k$ mající žádanou vlastnost.

47. LINEÁRNÍ FUNKCE BODU. Budiž opět $\boldsymbol{E}_m$ eukleidovský prostor, $\boldsymbol{V}_m$ jeho zaměření. Zvolme v $\boldsymbol{E}_m$ lineární soustavu souřadnic

$$\langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle, \tag{47.1}$$

takže každý bod X lze psáti právě jedním způsobem ve tvaru

$$X = P + x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{u}_m. \tag{47.2}$$

Zvolíme-li reálná čísla $a_1, \ldots, a_m, a_0$ a přiřadíme-li každému bodu (47.2) reálné číslo

$$\varphi(X) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0, \tag{47.3}$$

řekneme, že φ je *lineární funkce bodu* v prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Zvláštním případem lineární funkce bodu je libovolná *konstanta* a_0; dostaneme ji, jestliže $a_1 = 0, \ldots, a_m = 0$. Konstantu 0 nazveme *nulovou funkcí bodu*. Pro konstanty zavedeme druhý název *nevlastní lineární funkce bodu*; ostatní lineární funkce bodu nazveme *vlastní*.

Ke každé lineární funkci bodu (47.3) patří určitá lineární funkce vektoru f, kterou nazveme *odvozenou* z funkce φ a která má tu vlastnost, že

$$f(Y - X) = \varphi(Y) - \varphi(X) \tag{47.4}$$

pro každou dvojici bodů X, Y prostoru $\mathbf{E}_m$. Funkce f přiřazuje vektoru (46.2) číslo (46.3). Zřejmě $f = \bar{\mathbf{o}}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže φ je konstanta; jinak řečeno:

$$(47.5)\qquad \begin{aligned} f &\neq \bar{\mathbf{o}}, \text{ je-li } \varphi \text{ vlastní,} \\ f &= \bar{\mathbf{o}}, \text{ je-li } \varphi \text{ nevlastní.} \end{aligned}$$

Pojem lineární funkce bodu jsme zavedli na základě zvolené lineární soustavy souřadnic (47.1) a je třeba ukázati, že tato závislost na soustavě souřadnic je pouze zdánlivá. K tomu cíli uvažme, že vztah (47.4) je nezávislý na volbě soustavy souřadnic a že totéž platí o pojmu lineární funkce vektoru. Stačí tedy ukázati, že jestliže každému bodu X přiřadíme číslo $\varphi(X)$ tak, že existuje taková lineární funkce vektoru f, pro kterou je splněno (47.4) při libovolné volbě bodů X a Y, potom lze určit čísla $a_1, \ldots, a_m, a_0$ tak, že pro každý bod (47.2) platí (47.3). Za tím účelem položme $\varphi(P) = a_0$ a určeme čísla $a_1, \ldots, a_m$ tak, aby pro každý vektor (46.2) platilo (46.3). Ježto podle (47.4) je $\varphi(X) = f(X - P) + \varphi(P)$, dostaneme vskutku, že pro bod (47.2) platí (47.3).

Označme Φ množinu všech lineárních funkcí bodu. Jestliže φ i ψ náležejí do Φ, označme $\varphi + \psi$ funkci, která každému bodu X přiřazuje číslo $\varphi(X) + \psi(X)$. Jestliže je zvolena určitá lineární soustava souřadnic (47.1) a jestliže pro libovolný bod (47.2) platí (47.3) a

$$\psi(X) = b_1 x_1 + \ldots + b_m x_m + b_0,$$

potom $\varphi + \psi$ přiřazuje bodu (47.2) číslo

$$(a_1 + b_1)\, x_1 + \ldots + (a_m + b_m)\, x_m + (a_0 + b_0),$$

z čehož plyne, že $\varphi + \psi$ je lineární funkce bodu. Jestliže φ náleží do Φ a jestliže c je reálné číslo, označme $c\varphi$ funkci, která každému bodu X přiřazuje číslo $c \,.\, \varphi(X)$. Jestliže při určité volbě lineární soustavy souřadnic (47.1) pro libovolný bod (47.2) platí (47.3), potom $c\varphi$ přiřazuje bodu (47.2) číslo

$$ca_1 \,.\, x_1 + \ldots + ca_m \,.\, x_m + ca_0,$$

z čehož plyne, že $c\varphi$ je lineární funkce bodu.

Právě jsme definovali součet $\varphi + \psi$ dvou lineárních funkcí bodu a součin $c\varphi$ reálného čísla s lineární funkcí bodu. Na základě těchto definic *množina Φ všech lineárních funkcí bodu tvoří vektorový prostor ve smyslu obecné definice článku* 10, při čemž nulovým vektorem ve Φ je nulová funkce bodu. Je-li dána určitá lineární soustava souřadnic (47.1), potom existují lineární funkce bodu

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi_0 \tag{47.6}$$

tak, že pro libovolný bod (47.2) platí

$$\varphi_r(X) = x_r \text{ pro } 1 \leqq r \leqq m; \ \varphi_0(X) = 1.$$

Je-li φ lineární funkce bodu, která bodu (47.2) přiřazuje číslo (47.3), jest

$$\varphi = a_1\varphi_1 + \ldots + a_m\varphi_m + a_0\varphi_0;$$

z toho je patrné, že (47.6) je base pro Φ, takže *vektorový prostor Φ má dimensi $m + 1$*. Zřejmě *konstanty tvoří lineární soustavu dimense* 1 *obsaženou ve Φ.*

VĚTA 47.1. *Budiž φ vlastní lineární funkce bodu v prostoru $\mathbf{E}_m$. Potom existuje nadrovina ϱ tak, že $\varphi(X) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže bod X náleží do ϱ. Zaměření $\mathbf{W}_{m-1}$ nadroviny ϱ je nulový $(m - 1)$-směr lineární funkce vektoru f odvozené z φ.* Pravíme, že ϱ je *nulová nadrovina funkce φ.*

DŮKAZ. Nechť φ přiřazuje bodu (47.2) číslo (47.3). Ježto φ je vlastní, lze zvolit index r $(1 \leqq r \leqq m)$ tak, že $a_r \neq 0$. Budiž A bod, jehož r-tá souřadnice je rovna číslu $-a_0 : a_r$ a jehož ostatní souřadnice jsou rovny nule; podle (47.3) je $\varphi(A) = 0$. Je-li $\mathbf{W}_{m-1}$ nulový $(m - 1)$-směr lineární funkce vektoru f odvozené z φ, je $f(\mathbf{v}) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{v}$ náleží do $\mathbf{W}_{m-1}$. Ježto $\varphi(A) = 0$, podle (47.4) je $\varphi(A + \mathbf{v}) = f(\mathbf{v})$, takže $\varphi(A + \mathbf{v}) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže vektor $\mathbf{v}$ náleží do $\mathbf{W}_{m-1}$, t. j. $\varphi(X) = 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže bod X náleží do nadroviny $\{A; \mathbf{W}_{m-1}\}$.

VĚTA 47.2. *Budiž ϱ libovolně daná nadrovina. Potom existuje vlastní lineární funkce bodu φ tak, že ϱ je její nulová nadrovina. Množina všech takových φ spolu s nulovou funkcí bodu tvoří lineární soustavu dimense* 1 *obsaženou ve Φ.*

DŮKAZ. Lineární soustavu souřadnic (47.1) můžeme zvolit tak, že ϱ je nadrovina $\{P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}\}$. Potom pro lineární funkci bodu φ platí

$\varphi(X) = 0$ pro všechny body X nadroviny ϱ tehdy a jenom tehdy, jestliže φ přiřazuje každému bodu X prostoru $\mathbf{E}_m$ číslo $\varphi(X) = a \,.\, x_m$, kde a je libovolně zvolené reálné číslo. Z toho plyne snadno správnost věty.

Smysl věty 47.2 jest, že je-li zvolena lineární soustava souřadnic (47.1), *dá se každá nadrovina ϱ početně definovat lineární rovnicí tvaru*

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0 = 0, \tag{47.7}$$

při čemž aritmetický vektor

$$(a_1, \ldots, a_m) \tag{47.8}$$

je nenulový. Je-li dána nadrovina ϱ, je rovnice (47.7) určena jednoznačně až na to, že můžeme všecka čísla $a_1, \ldots, a_m, a_0$ znásobit týmž číslem $c \neq 0$. Podle věty 47.1 obráceně každá rovnice tvaru (47.7), kde aritmetický vektor (47.8) je $\neq \mathbf{o}$, je rovnicí určité nadroviny ϱ.

Ve zbytku tohoto článku předpokládáme, že $m \geqq 2$. Budiž opět φ vlastní lineární funkce bodu, f z ní odvozená lineární funkce vektoru, ϱ nulová nadrovina funkce φ. Nadrovina ϱ je početně vyjádřena rovnicí $\varphi(X) = 0$ neboli rovnicí (47.7). Její zaměření $\mathbf{W}_{m-1}$ se skládá ze všech vektorů (46.2), pro něž platí rovnice $f(\mathbf{v}) = 0$ neboli rovnice

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = 0, \tag{47,7'}$$

která se liší od rovnice (47.7) pouze tím, že „prostý člen“ a_0 je nahrazen číslem 0. Jestliže nyní od funkce φ přejdeme k funkci $\varphi + c$, kde c je libovolná konstanta, zůstane odvozená funkce f beze změny, takže zaměření $\mathbf{W}_{m-1}$ se nezmění, t. j. *nulová nadrovina σ funkce $\varphi + c$ je rovnoběžná s nulovou nadrovinou ϱ funkce φ.* Obráceně, je-li dána nadrovina σ rovnoběžná s ϱ, zvolme v σ libovolný bod B a určeme c tak, aby bylo $\varphi(B) + c = 0$. Potom je σ nulovou nadrovinou funkce $\varphi + c$. *Při přechodu od nadroviny ϱ k rovnoběžným nadrovinám se v rovnici* (47.7) *změní pouze prostý člen a_0.*

VĚTA 47.3. *Budiž ϱ nulová nadrovina vlastní lineární funkce bodu φ. Nadrovina ϱ vytíná v prostoru $\mathbf{E}_m$ dva poloprostory; jeden z nich se skládá z těch bodů X, pro něž je $\varphi(X) \geqq 0$, druhý z těch bodů X, pro něž je $\varphi(X) \leqq 0$.*

DŮKAZ. Víme, že nadrovina ϱ se skládá z těch bodů X, pro něž je $\varphi(X) = 0$. Podle článku 28 potřebujeme pouze dokázati, že jsou-li

X_1, X_2 dva různé body a je-li $\varphi(X_1) \neq 0$, $\varphi(X_2) \neq 0$, potom úsečka X_1X_2 protne nadrovínu ϱ tehdy a jenom tehdy, jestliže čísla $\varphi(X_1)$, $\varphi(X_2)$ mají opačná znamení. Ježto $\varphi(X_1) \neq 0$, $\varphi(X_2) \neq 0$, máme jednoznačně určené reálné číslo k, pro něž

$$\varphi(X_2) = k \,.\, \varphi(X_1). \tag{47.9}$$

Zřejmě $k \neq 0$; máme dokázati, že $k < 0$ tehdy a jenom tehdy, jestliže úsečka X_1X_2 protne nadrovínu ϱ. Úsečka X_1X_2 podle článku 28 se skládá z těch bodů X, pro něž

$$X = X_1 + t(X_2 - X_1),\ 0 \leqq t \leqq 1.$$

Je-li f lineární funkce vektoru odvozená z funkce φ, jest $f(X - X_1) = t \,.\, f(X_2 - X_1)$ a podle (47.4) jest

$$\varphi(X) = \varphi(X_1) + f(X - X_1),$$

tedy

$$\varphi(X) = \varphi(X_1) + t \,.\, f(X_2 - X_1),$$

při čemž

$$f(X_2 - X_1) = \varphi(X_2) - \varphi(X_1),$$

takže podle (47.9)

$$\varphi(X) = [1 + t(k - 1)]\, \varphi(X_1).$$

Máme tudíž dokázati, že rovnice

$$1 + t(k - 1) = 0$$

má řešení t podrobené podmínce $0 \leqq t \leqq 1$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $k < 0$. To jsme však dokázali již v článku 28 [viz (28.6')].

VĚTA 47.4. *Budiž* (47.1) *kartézská soustava souřadnic. Budiž* (47.7) *rovnice libovolné nadroviny* ϱ. *Potom vzdálenost* d *bodu* (47.2) *od nadroviny* ϱ *je dána vzorcem*

$$d = \frac{|a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0|}{|\boldsymbol{a}|}, \tag{47.10}$$

kde $\boldsymbol{a}$ *znamená vektor* (47.8).

DŮKAZ. Budiž $Q = [q_1, \bullet]$ pata kolmice vedené bodem X na nadrovinu ϱ, takže

(47.11) $$d = \overline{QX}.$$

Ježto bod Q leží v nadrovině ϱ, jest $a_1q_1 + \bullet + a_0 = 0$, z čehož plyne snadno

(47.12) $$a_1x_1 + \bullet + a_0 = \mathbf{a}(X - Q).$$

Mimo to směr $\{X - Q\}$ je kolmý na ϱ, takže existuje reálné číslo r tak, že

(47.13) $$X - Q = r\mathbf{a}.$$

Podle (47.11) a (47.13) je

(47.14) $$d = |r| \,.\, |\mathbf{a}|.$$

Podle (47.12) je $\mathbf{a}(X - Q) = r \,.\, \mathbf{a}\mathbf{a}$, tedy

(47.15) $$|\mathbf{a}(X - Q)| = |r| \,.\, |\mathbf{a}|^2.$$

Podle (47.14) a (47.15) jest

$$d = \frac{|\mathbf{a}(X - Q)|}{|\mathbf{a}|},$$

z čehož podle (47.12) plyne (47.10).

Předpokládejme i nadále, že (47.1) je kartézská soustava souřadnic. Mimo to předpokládejme, že byla zvolena určitá orientace jak pro prostor $\mathbf{E}_m$ tak i pro nadrovinu $\varrho \equiv [Q; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}]$. Označme $\mathbf{a} = (a_1, \bullet)$ orthogonální doplněk vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}$. Rovnici (47.7) naší nadroviny dostaneme, určíme-li a_0 tak, aby bylo této rovnici vyhověno souřadnicemi bodu Q. Na základě věty 35.10 se snadno odvodí, že jest

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0 \geqq 0$$

v *kladném poloprostoru* vyťatém orientovanou nadrovinou ϱ.

48. LINEÁRNÍ SOUSTAVY NADROVIN. Budiž opět Φ množina všech lineárních funkcí bodu v prostoru $\mathbf{E}_m$. Víme, že Φ je vektorový prostor dimense $m + 1$, ve kterém je obsažena lineární soustava dimense 1 složená ze všech konstant. Tuto lineární soustavu konstant označme $\mathbf{K}$. O lineární soustavě Ψ obsažené ve Φ řekneme, že je *prvního druhu*, jestliže v ní není obsažena soustava $\mathbf{K}$, že je *druhého druhu*, jestliže je v ní obsažena soustava $\mathbf{K}$. Dále označme $\mathbf{N}(\Psi)$ množinu všech nulových nadrovin jednotlivých vlastních lineárních funkcí bodu φ náležejících do Ψ. Je-li dimense lineární soustavy Ψ rovna jedné, víme z článku 47, že pro $\Psi \neq \mathbf{K}$ obsahuje $\mathbf{N}(\Psi)$ jedinou nadrovinu, pro $\Psi = \mathbf{K}$ ovšem vůbec žádnou.

Budiž nyní Ψ_k $(2 \leqq k \leqq m)$ lineární soustava dimense k obsažená ve Φ. Potom pravíme, že $\mathbf{N}(\Psi_k)$ je *lineární soustava dimense* $k - 1$, a to *prvního* nebo *druhého druhu* podle toho, kterého druhu je Ψ_k. Lineární soustavu nadrovin dimense 1 nazýváme krátce *svazek nadrovin*.

Pro každou lineární funkci bodu φ označme nyní φ^* z ní odvozenou lineární funkci vektoru. Zřejmě

$$(48.1) \qquad (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*; \; (a\varphi)^* = a \, . \, \varphi^*;$$

mimo to $\varphi^* = \bar{\mathbf{o}}$ tehdy a jenom tehdy, jestliže φ je konstanta.

V následujícím $\mathbf{E}_0$ znamená bod.

VĚTA 48.1. *Budiž $\mathbf{N}(\Psi_k)$ $(2 \leqq k \leqq m)$ lineární soustava nadrovin dimense $k - 1$ prvního druhu. Potom existuje lineární podprostor $\mathbf{E}_{m-k}$ (pro $m = k$ tedy bod) tak, že nadrovina ϱ náleží do $\mathbf{N}(\Psi_k)$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\mathbf{E}_{m-k}$ je částí ϱ.*

DŮKAZ. Věta je zřejmě správná i pro $k = 1$. Můžeme ji tedy dokázati indukcí, t. j. dokazujíce ji pro $2 \leqq k \leqq m$, můžeme předpokládat správnost obdobné věty, ve které místo k je $k - 1$. Budiž Ψ_{k-1} lineární soustava dimense $k - 1$ obsažená ve Ψ_k. Ježto Ψ_k je prvního druhu, zřejmě také Ψ_{k-1} je prvního druhu. Tedy podle indukčního předpokladu existuje lineární podprostor $\mathbf{E}_{m-k+1}$ tak, že nadrovina ϱ náleží do $\mathbf{N}(\Psi_{k-1})$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\mathbf{E}_{m-k+1}$ je částí ϱ. Zvolme lineární funkci bodu ψ tak, aby náležela do Ψ_k, nikoli však do Ψ_{k-1}. Zvolme lineární soustavu souřadnic

$$(48.2) \qquad \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$$

tak, aby bylo

$$(48.3) \qquad \mathbf{E}_{m-k+1} = \{P; \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_m\}.$$

Pro $1 \leqq r \leqq m$ budiž φ_r ta lineární funkce bodu, která bodu

$$X = P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$$

přiřazuje číslo $\varphi_r(X) \doteq x_r$; mimo budiž φ_0 konstanta 1, takže $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$. Ježto $\mathbf{N}(\Psi_{k-1})$ obsahuje právě ty nadroviny, které procházejí prostorem (48.3), zřejmě $\Psi_{k-1} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\}$, tedy $\Psi_k = \{\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\}$. Budiž

$$\psi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_m\varphi_m.$$

Ježto ψ nenáleží do Ψ_{k-1}, nejsou všecka čísla $a_0, a_k, \ldots, a_m$ rovná nule; kdyby byla všecka čísla $a_k, \ldots, a_m$ rovná nule, byla by $\psi - (a_1\varphi_1 + \ldots + a_{k-1}\varphi_{k-1})$ konstanta různá od nuly, což je také nemožné. Z toho plyne snadno, že nulová nadrovina σ funkce ψ není rovnoběžná s prostorem $\mathbf{E}_{m-k+1}$, takže σ protne tento prostor v určitém $\mathbf{E}_{m-k}$. Soustava souřadnic (48.2) byla však v předcházejícím podrobena pouze podmínce (48.3). Zřejmě můžeme připojit podmínku, aby bylo

$$\sigma = \{P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}\},$$

načež bude zřejmě $\psi = a_m\varphi_m$ ($a_m \neq 0$), tedy $\Psi_k = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_m\}$, z čehož plyne snadno, že $\mathbf{N}(\Psi_k)$ obsahuje právě ty nadroviny, které obsahují prostor

$$\mathbf{E}_{m-k} = \{P; \mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}\}; \tag{48.4}$$

pro $m = k$ znamená tu $\mathbf{E}_0$ bod P.

VĚTA 48.2. *Budiž $2 \leqq k \leqq m$. Budiž dán lineární podprostor $\mathbf{E}_{m-k}$ (pro $k = m$ tedy bod). Potom množina všech nadrovin procházejících prostorem $\mathbf{E}_{m-k}$ je lineární soustava nadrovin dimense $k - 1$ prvního druhu.*

DŮKAZ. Zvolme lineární soustavu souřadnic (48.2) tak, aby platilo (48.4); pro $m = k$ to znamená, aby $\mathbf{E}_0$ byl bod P. Potom zřejmě uvažovaná množina nadrovin je $\mathbf{N}(\Psi_k)$, $\Psi_k = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_m\}$, kde φ_r ($1 \leqq r \leqq m$) mají týž význam jako v předcházejícím důkaze.

VĚTA 48.3. *Budiž $\mathbf{N}(\Psi_k)$ $(2 \leqq k \leqq m)$ lineární soustava nadrovin dimense $k - 1$ druhého druhu. Potom existuje $(m - k + 1)$-směr $\mathbf{W}_{m-k+1}$ tak, že nadrovina ϱ náleží do $\mathbf{N}(\Psi_k)$ tehdy a jenom tehdy, jestliže její zaměření obsahuje $\mathbf{W}_{m-k+1}$.*

DŮKAZ. Budiž φ_0 konstanta rovná 1. Zřejmě ve Ψ_k jest obsažena $\Psi_{k-1} = \{\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}\}$ tak, že $\Psi_k = \{\varphi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1}\}$. Zřejmě $\mathbf{N}(\Psi_k)$

obsahuje právě ty nadroviny, které jsou rovnoběžné s některou nadrovinou náležející do $\mathbf{N}(\Psi_{k-1})$. Avšak podle věty 48.1 (o které jsme si všimli, že je správná i pro $k = 1$), existuje lineární podprostor $\mathbf{E}_{m-k+1} = \{P; \mathbf{W}_{m-k+1}\}$ tak, že $\mathbf{N}(\Psi_{k-1})$ obsahuje právě ty nadroviny, jejichž částí je $\mathbf{E}_{m-k+1}$. Potom však $(m - k + 1)$-směr $\mathbf{W}_{m-k+1}$ má vlastnost ve větě vyslovenou.

VĚTA 48.4. *Budiž $2 \leq k \leq m$ a budiž dán $(m - k + 1)$-směr $\mathbf{W}_{m-k+1}$. Potom množina všech nadrovin, jejichž zaměření obsahuje $\mathbf{W}_{m-k+1}$, je lineární soustava nadrovin dimense $k - 1$ druhého druhu.*

DŮKAZ. Nechť lineární funkce bodu φ_r $(0 \leq r \leq m)$ mají týž význam jako při důkaze věty 48.1. Zvolíme-li lineární soustavu souřadnic (48.2) tak, aby bylo $\mathbf{W}_{m-k+1} = \{\mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, zřejmě uvažovaná množina nadrovin je $\mathbf{N}(\Psi_k)$, kde $\Psi_k = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}\}$.

49. DUÁLNÍ VEKTOROVÉ PROSTORY. V článku 46 jsme vedle vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$ vektorů eukleidovského prostoru uvažovali ještě vektorový prostor $\mathbf{F}$ složený ze všech lineárních funkcí vektoru. Vzájemný vztah mezi těmito dvěma vektorovými prostory je užitečné formulovat v abstraktnějším tvaru; to je právě úkolem tohoto článku.

Buďtež dány dva vektorové prostory $\mathbf{V}, \overline{\mathbf{V}}$. Budeme značit vektory náležející do $\mathbf{V}$ jako obvykle tučnými písmeny, rovněž tak vektory náležející do $\overline{\mathbf{V}}$, ale na rozlišení budeme psát vodorovný pruh nad značkou každého vektoru prostoru $\overline{\mathbf{V}}$, takže na př. $\mathbf{u}$ znamená libovolný vektor prostoru $\mathbf{V}$, $\overline{\mathbf{u}}$ znamená libovolný vektor prostoru $\overline{\mathbf{V}}$. Nulový vektor prostoru $\mathbf{V}$ jako obvykle označíme $\mathbf{o}$; pro nulový vektor prostoru $\overline{\mathbf{V}}$ důsledně zavedeme označení $\overline{\mathbf{o}}$.

Pravíme, že prostory $\mathbf{V}, \overline{\mathbf{V}}$ jsou *duálně sdružené*, je-li dáno pravidlo d, které každé dvojici $\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}$ přiřazuje určité reálné číslo $d(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}})$, při čemž se předpokládá, že toto pravidlo má následující vlastnosti (49.1) až (49.6) [písmeno a ve (49.3) a (49.4) znamená libovolné reálné číslo]:

(49.1) $$d(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \overline{\mathbf{u}}) = d(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{v}, \overline{\mathbf{u}});$$

(49.2) $$d(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{v}}) = d(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{v}});$$

(49.3) $$d(a\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}) = ad(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}});$$

(49.4) $$d(\mathbf{u}, a\overline{\mathbf{u}}) = ad(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}});$$

(49.5) je-li ve $\mathbf{V}$ dán vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, existuje ve $\overline{\mathbf{V}}$ vektor $\bar{\mathbf{u}}$ tak, že $d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \neq 0$;

(49.6) je-li ve $\overline{\mathbf{V}}$ dán vektor $\bar{\mathbf{u}} \neq \bar{\mathbf{o}}$, existuje ve $\mathbf{V}$ vektor $\mathbf{u}$ tak, že $d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \neq 0$.

Jak bylo již na počátku tohoto článku vzpomenuto, prostor $\mathbf{V}_m$ všech vektorů eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ a prostor $\mathbf{F}$ všech lineárních funkcí vektoru dávají důležitý příklad dvojice duálně sdružených vektorových prostorů. Neboť jestliže pro libovolný vektor $\mathbf{v}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ a pro libovolnou lineární funkci vektoru f položíme $d(\mathbf{v}, f) = f(\mathbf{v})$, přesvědčíme se snadno, že vlastnosti (49.1) až (49.6) jsou splněny.

Přejděme nyní ke studiu důsledků vlastností (49.1) až (49.6). Nejprve poznamenejme, že v podmínkách (49.1) až (49.6) oba vektorové prostory $\mathbf{V}, \overline{\mathbf{V}}$ vystupují symetricky, takže je-li $\overline{\mathbf{V}}$ duálně sdružený k $\mathbf{V}$, je zároveň $\mathbf{V}$ duálně sdružený k $\overline{\mathbf{V}}$. Dále poznamenejme, že v podmínce (49.5) byl nutný předpoklad $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, ježto

(49.7) $$d(\mathbf{o}, \bar{\mathbf{u}}) = 0$$

pro každý $\mathbf{u}$. Neboť zvolíme-li v (49.1) $\mathbf{u}$ libovolně, $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, dostaneme $d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{o}, \bar{\mathbf{u}})$, z čehož plyne (49.7). Podobně ze (49.2) dostaneme, že

(49.8) $$d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{o}}) = 0$$

pro každý $\mathbf{u}$.

Je-li na př. $\mathbf{V}$ triviální, musí také $\overline{\mathbf{V}}$ býti triviální. Neboť kdyby $\overline{\mathbf{V}}$ nebyl triviální, existoval by $\bar{\mathbf{u}} \neq \bar{\mathbf{o}}$, takže podle (49.6) by existoval $\mathbf{u}$ tak, že $d(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) \neq 0$. To je však podle (49.7) nemožné, neboť ježto $\mathbf{V}$ je triviální, musí býti $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Věta 49.1. *Jsou-li*

(49.9) $$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$$

mezi sebou lineárně nezávislé vektory prostoru $\mathbf{V}$, *lze udat ve* $\overline{\mathbf{V}}$ *vektory*

(49.10) $$\bar{\mathbf{u}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{u}}_k$$

tak, že pro $1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k$ jest

(49.11) $$d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{u}}_s) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } r = s, \\ 0, & \text{je-li } r \neq s. \end{cases}$$

DŮKAZ. Budiž napřed $k = 1$, t. j. ve $\boldsymbol{V}$ je dán jediný vektor $\boldsymbol{u}_1 \neq \boldsymbol{o}$. Podle (49.5) existuje $\bar{\boldsymbol{u}}$ tak, že $d(\boldsymbol{u}_1, \bar{\boldsymbol{u}}) = c \neq 0$. Položíme-li $\bar{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{c} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}$, potom podle (49.4) bude $d(\boldsymbol{u}_1, \bar{\boldsymbol{u}}_1) = 1$, čímž je pro $k = 1$ vše dokázáno. Důkaz nyní dokončíme indukcí. Za předpokladu, že při určitém k je věta dokázána, buďtež ve $\boldsymbol{V}$ dány mezi sebou lineárně nezávislé vektory

$$(49.12) \qquad \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k+1}.$$

Potom jsou také vektory (49.9) mezi sebou lineárně nezávislé, takže existují ve $\bar{\boldsymbol{V}}$ vektory $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ tak, že pro $1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k$

$$(49.13) \qquad d(\boldsymbol{u}_r, \bar{\boldsymbol{v}}_s) = \begin{cases} 1 \text{ pro } r = s, \\ 0 \text{ pro } r \neq s. \end{cases}$$

Budiž

$$(49.14) \qquad d(\boldsymbol{u}_{k+1}, \bar{\boldsymbol{v}}_s) = a_s \text{ pro } 1 \leqq s \leqq k$$

a položme

$$(49.15) \qquad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_{k+1} - \sum_{r=1}^{k} a_r \boldsymbol{u}_r.$$

Podle (49.1), (49.3), (49.13) a (49.14) bude

$$(49.16) \qquad d(\boldsymbol{w}, \bar{\boldsymbol{v}}_s) = 0 \text{ pro } 1 \leqq s \leqq k.$$

Ježto vektory (49.12) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, jest $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{o}$, takže (podle již vyšetřovaného případu $k = 1$) existuje $\bar{\boldsymbol{w}}$ tak, že

$$(49.17) \qquad d(\boldsymbol{w}, \bar{\boldsymbol{w}}) = 1.$$

Budiž

$$(49.18) \qquad d(\boldsymbol{u}_r, \bar{\boldsymbol{w}}) = b_r \text{ pro } 1 \leqq r \leqq k$$

a položme

$$(49.19) \qquad \bar{\boldsymbol{u}}_{k+1} = \bar{\boldsymbol{w}} - \sum_{s=1}^{k} b_s \bar{\boldsymbol{v}}_s.$$

Podle (49.2), (49.4), (49.13), (49.18) a (49.19) jest

$$(49.20) \qquad d(\boldsymbol{u}_r, \bar{\boldsymbol{u}}_{k+1}) = 0 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq k;$$

podle (49.2), (49.4), (49.16), (49.17) a (49.19) jest

$$(49.21) \qquad d(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{u}}_{k+1}) = 1.$$

Podle (49.1), (49.3), (49.13), (49.15) a (49.16) jest

$$(49.22) \qquad d(\mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{v}}_s) = a_s \text{ pro } 1 \leqq s = k;$$

podle (49.1), (49.3), (49.15), (49.20) a (49.21) jest

$$(49.23) \qquad d(\mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{u}}_{k+1}) = 1.$$

Položme nyní

$$(49.24) \qquad \bar{\mathbf{u}}_s = \bar{\mathbf{v}}_s - a_s\bar{\mathbf{u}}_{k+1} \text{ pro } 1 \leqq s \leqq k.$$

Podle (49.2), (49.4), (49.13), (49.20) a (49.24) jest

$$(49.25) \qquad d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{u}}_s) = \begin{cases} 1 \text{ pro } r = s, \\ 0 \text{ pro } r \neq s. \end{cases}$$

Podle (49.2), (49.4), (49.22), (49.23) a (49.24) jest

$$(49.26) \qquad d(\mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{u}}_s) = 0 \text{ pro } 1 \leqq s \leqq k.$$

Podle (49.20), (49.23), (49.25) a (49.26) platí (49.11) pro $1 \leqq r \leqq k + 1$, $1 \leqq s \leqq k + 1$, čímž je důkaz dokončen.

Poznamenejme ještě, že jestliže o vektorech (49.9) prostoru $\mathbf{V}$ a o vektorech (49.10) prostoru $\bar{\mathbf{V}}$ pro $1 \leqq r = k$, $1 \leqq s \leqq k$ platí (49.11), potom jak vektory (49.9) tak i vektory (49.10) musí býti mezi sebou lineárně nezávislé. Neboť je-li na př.

$$\bar{\mathbf{v}} = a_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \ldots + a_k\bar{\mathbf{u}}_k,$$

potom podle (49.11) je $d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{v}}) = a_r$ pro $1 \leqq r \leqq k$, takže podle (49.8) je $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{o}}$ pouze tehdy, je-li $a_1 = \ldots = a_k = 0$.

Podle této poznámky soudíme z dokázané věty, že lze-li ve $\mathbf{V}$ udat $k = 1, 2, 3, \ldots$ mezi sebou lineárně nezávislých vektorů, potom totéž musí platit i o $\bar{\mathbf{V}}$ a ovšem také obráceně. Z toho soudíme, že platí:

VĚTA 49.2. *Jakmile jeden z obou duálně sdružených prostorů $\mathbf{V}$, $\bar{\mathbf{V}}$ má konečnou dimensi, platí totéž i o druhém z nich a obě dimense jsou si rovny.*

V dalším předpokládejme, že oba vektorové prostory $\mathbf{V}$, $\bar{\mathbf{V}}$ mají konečnou dimensi $m > 0$ a označme je $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$. Jsou-li $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$ duálně sdružené, lze ke každé basi

$$(49.27) \qquad \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$$

prostoru $\mathbf{V}_m$ udati basi

$$(49.28) \qquad \bar{\mathbf{u}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{u}}_m$$

prostoru $\bar{\mathbf{V}}_m$ tak, že pro $1 \leqq r \leqq m$, $1 \leqq s \leqq m$ platí (49.11). Je-li potom

$$(49.29) \qquad \mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$$

libovolný vektor prostoru $\mathbf{V}$,

$$(49.30) \qquad \bar{\mathbf{v}} = y_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \ldots + y_m\bar{\mathbf{u}}_m$$

libovolný vektor prostoru $\bar{\mathbf{V}}$, jest

$$(49.31) \qquad d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) = x_1y_1 + \ldots + x_my_m.$$

Ze (49.31) plyne snadno:

VĚTA 49.3. *K dané basi* (49.27) *prostoru* $\mathbf{E}_m$ *lze právě jedním způsobem udat basi* (49.28) *prostoru* $\bar{\mathbf{V}}_m$ *tak, aby platilo* (49.11). Nazveme *navzájem duální* takové dvě base (49.27), (49.28).

Zřejmě platí obráceně:

VĚTA 49.4. *Jsou-li dány dva vektorové prostory* $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$ *téže konečné dimense* $m > 0$, *zvolíme-li libovolně basi* (49.27) *pro* $\mathbf{V}_m$ *a basi* (49.28) *pro* $\bar{\mathbf{V}}_m$ *a definujeme-li pro každou dvojici* (49.29), (49.30) *číslo* $d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}})$ *pomocí* (49.31), *potom platí* (49.1) *až* (49.6), *t. j.* $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$ *jsou duálně sdružené.*

Jsou-li $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$ duálně sdružené a je-li $\mathbf{W}$ lineární soustava obsažená ve $\mathbf{V}_m$, označme $\bar{\mathbf{W}}$ množinu všech těch vektorů $\bar{\mathbf{v}}$ prostoru $\bar{\mathbf{V}}$, pro něž je $d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}})$ pro každý vektor $\mathbf{v}$ náležející do $\mathbf{W}$. Dokážeme, že platí:

VĚTA 49.5. *Je-li* $\mathbf{W}$ *lineární soustava dimense* k, *potom* $\bar{\mathbf{W}}$ *je lineární soustava dimense* $m - k$, *kterou nazveme duálním obrazem lineární soustavy* $\mathbf{W}$. Je-li $k = 0$, je $\mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$ a podle (49.7) je $\bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{V}}$; je-li $k = m$, je $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ a podle (49.6) je $\bar{\mathbf{W}} = \{\bar{\mathbf{o}}\}$. V obou případech učiněné tvrzení je správné. Je-li $0 < k < m$, zvolme libovolně basi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ pro $\mathbf{W}$ a připojme další vektory $\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$ tak, aby vznikla base (49.27) pro $\mathbf{V}_m$; k této basi utvořme duální basi (49.28) pro $\bar{\mathbf{V}}_m$. Je-li nyní (49.30) vektor prostoru $\bar{\mathbf{V}}_m$, potom podle (49.31) jest $d(\mathbf{u}_r, \bar{\mathbf{v}}) = y_r$ pro $1 \leqq r \leqq k$, takže jestliže $\bar{\mathbf{v}}$ náleží do $\bar{\mathbf{W}}$, jest $y_1 = 0, \ldots, y_k = 0$. Obráceně, je-li tomu tak, je $d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) = x_{k+1}\, y_{k+1} + \ldots + x_my_m$ pro každý vektor (49.29), takže $d(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) = 0$ pro každý vektor $\mathbf{v}$ náležející do $\mathbf{W}$. Tím je dokázáno, že $\overline{\boldsymbol{W}} = \{\bar{u}_{k+1}, \ldots, \bar{u}_m\}$, což je skutečně lineární soustava dimense $m-k$.

Je-li opět $\boldsymbol{W}$ lineární soustava dimense k obsažená ve $\boldsymbol{V}_m$, je její duální obraz $\overline{\boldsymbol{W}}$ lineární soustavou dimense $m - k$ obsaženou ve $\overline{\boldsymbol{V}}_m$, ke které můžeme opět utvořit duální obraz $\boldsymbol{W}^*$; $\boldsymbol{W}^*$ je lineární soustava dimense k obsažená ve $\boldsymbol{V}_m$. Snadno se však zjistí, že $\boldsymbol{W}$ je částí $\boldsymbol{W}^*$ a jelikož $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}^*$ mají touž dimensi, musí býti $\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W}$. Z toho plyne:

VĚTA 49.6. *Duální obraz duálního obrazu lineární soustavy* $\boldsymbol{W}$ (obsažené ve $\boldsymbol{V}_m$ nebo ve $\overline{\boldsymbol{V}}_m$) *splyne s* $\boldsymbol{W}$.

VIII

KOSINUS A SINUS

50. ÚHEL ORIENTOVANÝCH SMĚRŮ. Mezi nejdůležitější pojmy metrické geometrie patří pojem úhlu, který se v této knize dosud nevyskytl. Studiu tohoto pojmu jsou věnovány zbývající dvě kapitoly tohoto svazku. V této kapitole probereme řadu elementárních vzorců, ve kterých se vyskytuje vlastně pouze pojem kosinu a sinu spíše než geometrický pojem úhlu, o kterém pojednáme až v kapitole následující.

Je-li $\mathbf{u}$ nenulový vektor, nazvali jsme směrem množinu $\{\mathbf{u}\}$ všech vektorů tvaru $a\mathbf{u}$, kde a probíhá všecka reálná čísla. Nazveme nyní *orientovaným směrem* a označme $\{\mathbf{u}\}^+$ množinu všech vektorů tvaru $a\mathbf{u}$, kde a probíhá nyní pouze *kladná* reálná čísla. Místo výrazu směr užijeme někdy určitějšího výrazu *neorientovaný směr*. V každém (neorientovaném) směru $\{\mathbf{u}\}$ jsou obsaženy dva orientované směry: jednak $\{\mathbf{u}\}^+$, jednak $\{-\mathbf{u}\}^+$; pravíme, že tyto dva orientované směry jsou *navzájem opačné*. Dva orientované směry $\{\mathbf{u}\}^+$, $\{\mathbf{v}\}^+$ nazveme *lineárně nezávislé*, jestliže neorientované směry $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$ jsou mezi sebou různé neboli jestliže vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé.

V každém orientovaném směru $\{\mathbf{u}\}^+$ je obsažen právě jeden *vektor jednotkový*, t. j. takový, jehož velikost je rovna jedné.

Pojem *úhlu dvou orientovaných směrů* vznikne abstrakcí z pojmu dvojice $\{\mathbf{u}\}^+$, $\{\mathbf{v}\}^+$ orientovaných směrů. Dvě takové dvojice

$$\{\mathbf{u}_1\}^+, \{\mathbf{v}_1\}^+; \{\mathbf{u}_2\}^+, \{\mathbf{v}_2\}^+ \tag{50.1}$$

určují podle definice týž úhel, jestliže

$$\frac{\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1}{|\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{v}_1|} = \frac{\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2}{|\mathbf{u}_2| \cdot |\mathbf{v}_2|}. \tag{50.2}$$

Všimněme si, že jestliže obě dvojice (50.1) splynou, existují kladná čísla a, b tak, že $\mathbf{u}_2 = a\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2 = b\mathbf{v}_1$, takže v tomto případě platí (50.2).

Rovněž si všimněme, že *úhel dvou orientovaných směrů je nezávislý na jejich pořadí.*

Číslo (50.2) se jmenuje *kosinus úhlu.* Úhly budeme značit řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \omega$. Kosinus úhlu α značíme $\cos\alpha$. Je tedy pro úhel α orientovaných směrů $\{\mathbf{u}\}^+, \{\mathbf{v}\}^+$

$$(50.3) \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|};$$

a jest $\alpha = \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\cos\alpha = \cos\beta$. Jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *jednotkové* vektory, máme jednodušeji

$$(50.3') \qquad \cos\alpha = \mathbf{uv}.$$

Pravíme, že α, β jsou *výplňkové úhly*, jestliže

$$(50.4) \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 0.$$

Z definice je patrné, že *jestliže jeden z obou orientovaných směrů nahradíme orientovaným směrem k němu opačným, přejde jejich úhel ve výplňkový úhel.*

Úhel α nazveme *nulový*, jestliže $\cos\alpha = 1$, *přímý*, jestliže $\cos\alpha = -1$. Nulový a přímý úhel jsou tedy navzájem výplňkové.

Podle věty 9.2 máme pro každý úhel α

$$(50.5) \qquad -1 \leqq \cos\alpha \leqq 1;$$

mimo to vidíme, že *úhel dvou orientovaných směrů* $\{\mathbf{u}\}^+, \{\mathbf{v}\}^+$ *je nulový tehdy a jenom tehdy, jestliže* $\{\mathbf{u}\}^+, \{\mathbf{v}\}^+$ *splynou*, a tudíž *je přímý tehdy a jenom tehdy, jestliže* $\{\mathbf{u}\}^+, \{\mathbf{v}\}^+$ *jsou navzájem opačné.* Jsou-li tedy $\{\mathbf{u}\}^+, \{\mathbf{v}\}^+$ lineárně nezávislé, potom pro jejich úhel platí $|\cos\alpha| < 1$ a obráceně.

Úhel α nazveme *pravý*, je-li $\cos\alpha = 0$, *ostrý*, je-li $0 < \cos\alpha < 1$, *tupý*, je-li $0 > \cos\alpha > -1$. Úhel výplňkový k pravému je pravý, k ostrému tupý, k tupému ostrý. Úhel orientovaných směrů $\{\mathbf{u}\}^+, \{\mathbf{v}\}^+$ je tedy pravý tehdy a jenom tehdy, jestliže směry $\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{v}\}$ jsou navzájem kolmé; na orientaci při tom nezáleží.

Vedle čísla $\cos\alpha$ je užitečné zavésti ještě číslo $\sin\alpha$ (čteme *sinus úhlu* α) definované takto:

$$(50.6) \qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

Podle (50.5) a (50.6) máme pro každý úhel α:

$$0 \leqq \sin\alpha \leqq 1, \tag{50.7}$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \tag{50.8}$$

$$\cos\alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \tag{50.9}$$

Kdežto z rovnosti $\cos\alpha = \cos\beta$ plyne $\alpha = \beta$, z rovnosti $\sin\alpha = \sin\beta$ plyne pouze, že buďto je $\alpha = \beta$ nebo α, β jsou navzájem výplňkové. Dva výplňkové úhly mají týž sinus; zejména nulový i přímý úhel má sinus rovný nule a obráceně, je-li $\sin\alpha = 0$, je α nulový nebo přímý úhel; pravý úhel má sinus rovný jedné a obráceně, je-li $\sin\alpha = 1$, je α pravý úhel.

51. ÚHEL PŘÍMEK A POLOPŘÍMEK. Budiž $\{\boldsymbol{u}\}$ směr přímky p; každý z obou orientovaných směrů $\{\boldsymbol{u}\}^+$, $\{-\boldsymbol{u}\}^+$ přiřadíme určité orientaci přímky p a to tak, že $\{\boldsymbol{u}\}^+$ přísluší té orientaci, při které vektor $\boldsymbol{u}$ (a tudíž i každý vektor $a\boldsymbol{u}$, $a > 0$) je kladný. *Úhlem dvou orientovaných přímek* p, q rozumíme úhel příslušných orientovaných směrů. Tudíž úhel dvou souhlasně rovnoběžných orientovaných přímek je nulový a obráceně; úhel dvou nesouhlasně rovnoběžných orientovaných přímek je přímý a obráceně. Jsou-li p, q dvě navzájem kolmé přímky, potom při libovolné jejich orientaci jejich úhel je pravý a obráceně.

Jsou-li p, p' dvě souhlasně rovnoběžné orientované přímky a jsou-li také q, q' dvě souhlasně rovnoběžné orientované přímky, potom p, q určují týž úhel jako p', q'.

Každá polopřímka je částí určité přímky a určuje v této přímce určitou orientaci; *úhlem dvou polopřímek* rozumíme úhel příslušných orientovaných přímek.

Kosinus úhlu α dvou orientovaných přímek p, q můžeme definovat cestou více geometrickou než je původní definice. Je-li A libovolný bod přímky p, který neleží na přímce q, potom podle článku 33 bodem A prochází právě jedna přímka kolmo protínající přímku q; patu této kolmice označme A'; jestliže však bod A leží na přímce q, budiž $A' = A$. Bod A' nazveme *kolmý průmět bodu A na přímku q*. Budiž $B \neq A$ další bod přímky p, B' jeho kolmý průmět na přímku q. Dokážeme, že potom

$$(51.1) \qquad \overrightarrow{A'B'} = \cos\alpha \,.\, \overrightarrow{AB},$$

což je slíbená geometrická definice čísla $\cos\alpha$. Za účelem důkazu označme $\mathbf{u}$ jednotkový vektor na p, kladný při dané orientaci, a podobně $\mathbf{v}$ pro q, takže podle (50.3') je $\cos\alpha = \mathbf{uv}$. Podle definice orientované vzdálenosti jest

$$(51.2) \qquad B - A = \overrightarrow{AB} \,.\, \mathbf{u},$$

$$(51.3) \qquad B' - A' = \overrightarrow{A'B'} \,.\, \mathbf{v}.$$

Podle definice kolmých průmětů A', B' je však

$$(A - A')\,\mathbf{v} = 0, \ (B - B')\,\mathbf{v} = 0,$$

z čehož plyne

$$(B - A)\,\mathbf{v} = (B' - A')\,\mathbf{v}$$

a podle (51.3)

$$(51.4) \qquad (B - A)\,\mathbf{v} = \overrightarrow{A'B'} \,.\, |\mathbf{v}|^2 = \overrightarrow{A'B'}.$$

Ježto však $\cos\alpha = \mathbf{uv}$, podle (51.2) jest

$$(51.5) \qquad (B - A)\,\mathbf{v} = \cos\alpha \,.\, \overrightarrow{AB}$$

a z (51.4) a (51.5) plyne (51.1).

52. ÚHEL PŘÍMKY S LINEÁRNÍM PROSTOREM. V prostoru $\mathbf{E}_m$ budiž dán lineární podprostor $\mathbf{E}_k$.

Zavedeme definici, kterou jsme pro $k = 1$ zavedli již v předcházejícím článku. Jestliže bod A neleží v $\mathbf{E}_k$, potom podle článku 33 bodem A prochází právě jedna přímka, která kolmo protíná prostor $\mathbf{E}_k$; budiž A' pata této kolmice; leží-li však A v prostoru $\mathbf{E}_k$, budiž $A' = A$. Bod A' nazveme *kolmý průmět bodu A na prostor $\mathbf{E}_k$*. Budiž $\mathbf{W}_k$ zaměření prostoru $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{W}'_{m-k}$ zaměření totálně kolmé na $\mathbf{W}_k$; potom je bod A' kolmým průmětem bodu A na $\mathbf{E}_k$ tehdy a jenom tehdy, jestliže předně bod A' náleží do $\mathbf{E}_k$ a za druhé vektor $A - A'$ náleží do $\mathbf{W}'_{m-k}$. Je-li $B \neq A$ další bod a je-li přímka AB kolmá na $\mathbf{E}_k$, potom kolmé průměty A', B' splynou; neboť ježto oba vektory $B - A$, $A - A'$ náležejí do $\mathbf{W}'_{m-k}$, platí totéž o vektoru $B - A'$. Obráceně, splynou-li kolmé průměty A', B', je přímka AB kolmá na $\mathbf{E}_k$; neboť ježto oba vektory $A - A'$, $B - A'$ náležejí do $\mathbf{W}'_{m-k}$, platí totéž o vektoru $B - A$.

Budiž nyní vedle prostoru $\boldsymbol{E}_k$ dána ještě přímka p; označme p' a nazveme kolmým průmětem přímky p na prostor $\boldsymbol{E}_k$ množinu kolmých průmětů všech bodů přímky p. Jestliže přímka p je kolmá na prostor $\boldsymbol{E}_k$, potom podle předcházejícího průmět p' se redukuje na jediný bod. V tomto případě definujeme, že úhel α přímky p s prostorem $\boldsymbol{E}_k$ je úhel pravý, t. j. že $\cos\alpha = 0$. Předpokládejme nyní, že přímka p není kolmá na prostor $\boldsymbol{E}_k$, takže dva různé body přímky p mají vždy také různé kolmé průměty. Buďtež A, B dva různé body přímky p a buďtež A', B' jejich kolmé průměty na $\boldsymbol{E}_k$, takže body A', B' náležejí do $\boldsymbol{E}_k$ a vektory $A - A'$, $B - B'$ náležejí do $\boldsymbol{W}'_{m-k}$. Je-li nyní

$$C = A + t(B - A), \tag{52.1}$$

položme

$$C' = A' + t(B' - A'); \tag{52.1'}$$

bod C' náleží do $\boldsymbol{E}_k$ a vektor

$$C - C' = (1 - t)(A - A') + t(B - B')$$

náleží do $\boldsymbol{W}'_{m-k}$. Je tudíž bod (52.1') kolmým průmětem bodu (52.1), takže kolmým průmětem p' je přímka. Mimo to je patrné, že libovolně zvolené orientaci přímky p odpovídá určitá orientace jejího kolmého průmětu p'. Nazveme *úhlem přímky p s prostorem* $\boldsymbol{E}_k$ úhel α orientovaných přímek p, p'; změníme-li orientaci přímky p, změní se také orientace přímky p', takže úhel α je nezávislý na volbě orientace přímky p.

Jsou-li opět A, B dva různé body přímky p a jsou-li A', B' jejich kolmé průměty na $\boldsymbol{E}_k$, můžeme položit

$$A - A' = \boldsymbol{w}_1,\ B - B' = \boldsymbol{w}_2, \tag{52.2}$$

takže vektory $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ náležejí do $\boldsymbol{W}'_{m-k}$. Ježto vektor $B' - A'$ náleží do $\boldsymbol{W}_k$, jest

$$(B' - A') \,.\, (\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1) = 0. \tag{52.3}$$

Podle definice jest

$$\cos\alpha = \frac{(B - A)(B' - A')}{\overline{AB} \,.\, \overline{A'B'}}. \tag{52.4}$$

Avšak podle (52.2) jest

$$B - A = (B' - A') + (\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1), \tag{52.5}$$

takže podle (52.3) jest

$$(B - A)(B' - A') = \overline{A'B'}^2; \tag{52.6}$$

mimo to z (52.3) a (52.6) plyne, že

$$\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2 + |\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1|^2. \tag{52.7}$$

Podle (52.4) a (52.6) jest

$$\overline{A'B'} = \cos\alpha \,.\, \overline{AB}. \tag{52.8}$$

Všimněme si, že (52.8) platí i pro ten případ, že přímka AB je kolmá na $\boldsymbol{E}_k$, neboť v tomto případě je $\cos\alpha = 0 = \overline{A'B'}$.

Z (52.8) plyne především, že je vždy

$$\cos\alpha \geqq 0, \tag{52.9}$$

t. j. úhel α přímky p s nadrovinou je nulový, ostrý nebo pravý (nemůže býti tupý ani přímý). Mimo to je patrné, že α *je úhel pravý tehdy a jenom tehdy, jestliže přímka p je kolmá na prostor* $\boldsymbol{E}_k$. Dokážeme dále, že α je *úhel nulový tehdy a jenom tehdy, jestliže přímka p je rovnoběžná s prostorem* $\boldsymbol{E}_k$. Jestliže totiž úhel α je nulový, jest $\cos\alpha = 1$, takže podle (52.7) a (52.8) je $\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{o}$ a tedy podle (52.5) je $B - A = B' - A'$, takže vektor $B - A$ náleží do $\boldsymbol{W}_k$ a tedy přímka p je rovnoběžná s $\boldsymbol{E}_k$. Obráceně, je-li přímka p rovnoběžná s $\boldsymbol{E}_k$, potom vektor $B - A$ náleží do $\boldsymbol{W}_k$; podle (52.5) platí totéž o vektoru $\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1$, který však náleží do $\boldsymbol{W}'_{m-k}$; je tudíž $\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{o}$, takže podle (52.7) a (52.8) je $\cos\alpha = 1$, t. j. α je nulový úhel.

Z definice úhlu přímky p s prostorem $\boldsymbol{E}_k$ je patrné, že tento úhel závisí pouze na směru přímky p a na zaměření prostoru $\boldsymbol{E}_k$. Jinak řečeno, *jsou-li přímky p, p' rovnoběžné, jsou-li také prostory $\boldsymbol{E}_k$, $\boldsymbol{E}'_k$ rovnoběžné, potom úhel přímky p s prostorem $\boldsymbol{E}_k$ je roven úhlu přímky p' s prostorem $\boldsymbol{E}'_k$.*

Je-li $k = 1$, je nejen p, nýbrž i $\boldsymbol{E}_k$ přímka. Porovnáme-li (52.8) s (51.1), vidíme, že je-li α úhel dvou *neorientovaných* přímek p, q, β úhel týchž orientovaných přímek, potom platí (52.9) a

$$\cos\alpha = |\cos\beta|. \tag{52.10}$$

Budiž nyní $k = m - 1$, t. j. α je nyní *úhel přímky p s nadrovinou* $\boldsymbol{E}_{m-1}$. Je-li k přímka kolmá na $\boldsymbol{E}_{m-1}$ a je-li φ úhel přímek p, k, dokážeme, že

$$(52.11) \qquad \sin\alpha = \cos\varphi.$$

To je zřejmé pro případ, že přímka p je kolmá na $\mathbf{E}_{m-1}$, neboť potom úhel α je pravý, t. j. $\sin\alpha = 1$, úhel φ je nulový, t. j. $\cos\varphi = 1$. Není-li přímka p kolmá na $\mathbf{E}_{m-1}$, je podle předcházejícího $\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \neq \mathbf{o}$. Směr $\{\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1\}$ je kolmý na $\mathbf{E}_{m-1}$, t. j. je to směr přímky k, takže

$$\cos\varphi = \frac{(B - A)(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)}{\overline{AB} \,.\, |\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1|}.$$

Podle (52.3) a (52.5) je však

$$(B - A)(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) = |\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1|^2,$$

tedy

$$(52.12) \qquad |\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1| = \cos\varphi \,.\, \overline{AB}.$$

Ježto $A \neq B$, plyne z (52.7), (52.8) a (52.12), že $\cos^2\alpha + \cos^2\varphi = 1$, takže podle (50.8) je $\sin^2\alpha = \cos^2\varphi$ a ježto $\sin\alpha \geqq 0$ podle (50.7), $\cos\varphi \geqq 0$ podle (52.9), dostáváme (52.11).

Je-li v $\mathbf{E}_m$ zvolena kartézská soustava souřadnic a je-li

$$a_1x_1 + \bullet + a_0 = 0$$

rovnice nadroviny $\mathbf{E}_{m-1}$, potom pro $\mathbf{a} = (a_1, \bullet)$ jest $\{\mathbf{a}\}$ směr kolmý na $\mathbf{E}_{m-1}$. Je-li tudíž $\{\mathbf{b}\}$ směr přímky p, potom pro úhel α přímky p s nadrovinou $\mathbf{E}_{m-1}$ máme podle (52.11) vzorec

$$(52.13) \qquad \sin\alpha = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}|}.$$

53. ÚHLY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU. Budiž dán obyčejný prostor $\mathbf{E}_3$. Za předpokladu, že $\mathbf{E}_3$ je orientován, zavedli jsme v článku 35 vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dvou vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Pro velikost vektorového součinu máme podle (35.11)

$$(53.1) \qquad |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 \,.\, |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{uv})^2.$$

Je-li jeden z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ roven $\mathbf{o}$, je $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$ v souhlase s II. na str. 98. Je-li však $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, budiž φ úhel orientovaných směrů $\{\mathbf{u}\}^+$, $\{\mathbf{v}\}^+$, takže

$$|\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}| = \cos\varphi \,.\, \mathbf{uv}.$$

Podle (50.7), (50.8) a (53.1) jest

$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = \sin\varphi \,.\, |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}|. \tag{53.2}$$

Poznámka. Vzorcům (53.1) a (53.2) platným v $\mathbf{E}_3$ odpovídají v $\mathbf{E}_2$ (podle IV na str. 98) vzorce

$$[\mathbf{uv}]^2 = |\mathbf{u}|^2 \,.\, |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{uv})^2, \tag{53.1'}$$

$$[\mathbf{uv}] = \pm \sin\varphi \,.\, |\mathbf{u}| \,.\, |\mathbf{v}|. \tag{53.2'}$$

Poznamenejme, že při změně orientace prostoru jak φ tak i $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ zůstane beze změny.

Je-li v $\mathbf{E}_3$ dána přímka p se směrem $\{\mathbf{w}\}$ a rovina ϱ se zaměřením $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, potom podle věty 35.9 je $\{\mathbf{u}\times\mathbf{v}\}$ směr kolmý na ϱ, takže podle (35.9) a (52.11) máme pro úhel ψ přímky p a rovinou ϱ

$$\sin\psi = \frac{[\mathbf{uvw}]}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| \,.\, |\mathbf{w}|}. \tag{53.3}$$

Vedle úhlu dvou přímek a úhlu přímky s rovinou máme v prostoru $\mathbf{E}_3$ ještě *úhel dvou rovin,* který nyní budeme definovat. Obdobně by se dal definovat obecně úhel dvou nadrovin v prostoru $\mathbf{E}_m$.

Buďtež dány dvě roviny ϱ, σ v prostoru $\mathbf{E}_3$. *Úhlem rovin* ϱ, σ rozumíme úhel přímek k_1, k_2, při čemž je k_1 kolmá na ϱ, k_2 kolmá na σ. Z definice plyne, že úhel dvou rovin je závislý pouze na jejich zaměřeních. Jinak řečeno, jsou-li roviny ϱ, ϱ' rovnoběžné, jsou-li také roviny σ, σ' rovnoběžné, potom úhel rovin ϱ, σ je roven úhlu rovin ϱ', σ'.

Jestliže při zvolené kartézské soustavě souřadnic je

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0 \tag{53.4}$$

rovnice roviny ϱ,

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0 \tag{53.5}$$

rovnice roviny σ, potom pro úhel ψ obou rovin platí

$$\cos\psi = \frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}|}, \tag{53.6}$$

při čemž $\mathbf{a} = (a_1, \bullet)$, $\mathbf{b} = (b_1, \bullet)$.

Je-li $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\}$ zaměření roviny ϱ, $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\}$ zaměření roviny σ, platí (53.6) pro $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1\times\mathbf{v}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{u}_2\times\mathbf{v}_2$, takže podle (35.11) jest

$$(53.7)\qquad \cos\psi = \frac{|\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \,.\, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1\mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_1\mathbf{u}_2|}{|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1| \,.\, |\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}_2|}.$$

Dosud jsme mluvili pouze o úhlu ψ dvou *neorientovaných* rovin, pro který podle článku 52 platí vždy $\cos\psi \geqq 0$. Nyní přejdeme k definici *úhlu dvou orientovaných rovin*. Předpokládejme nejprve, že nejen roviny ϱ, σ, nýbrž i prostor $\mathbf{E}_3$ jest orientován. Je-li $\{\mathbf{a}\}$ směr kolmý na ϱ, potom o orientovaném směru $\{\mathbf{a}\}^+$ pravíme, že je *kladně kolmý na orientovanou rovinu* ϱ, jestliže pro bod P roviny ϱ a pro $t > 0$ platí, že body $P + t\mathbf{a}$ leží v kladném poloprostoru vyťatém orientovanou rovinou ϱ ve smyslu článku 30, při čemž zřejmě nezáleží na poloze bodu P v rovině ϱ. Je-li ještě orientovaný směr $\{\mathbf{b}\}^+$ kladně kolmý na orientovanou rovinu σ, potom úhel φ orientovaných rovin ϱ, σ definujeme jako úhel orientovaných směrů $\{\mathbf{a}\}^+$, $\{\mathbf{b}\}^+$, takže

$$(53.6')\qquad \cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}|}.$$

Jestliže při zvolené kartézské soustavě souřadnic jsou (53.4), (53.5) rovnice rovin ϱ, σ, při čemž

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 \geqq 0$$

v kladném poloprostoru vyťatém orientovanou rovinou ϱ,

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 \geqq 0$$

v kladném poloprostoru vyťatém orientovanou rovinou σ, platí (53.6′) pro $\mathbf{a} = (a_1, \bullet)$, $\mathbf{b} = (b_1, \bullet)$. Je-li $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$ kladná base orientované roviny ϱ, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2$ kladná base orientované roviny σ, potom (viz III na str. 98)

$$(53.7')\qquad \cos\varphi = \frac{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \,.\, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1\mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{v}_1\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2| \,.\, |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

Srovnáme-li (53.6) a (53.6′) nebo (53.7) a (53.7′), vidíme, že mezi úhlem ψ neorientovaných rovin ϱ, σ a úhlem φ týchž orientovaných rovin platí vztah

$$(53.8)\qquad \cos\psi = |\cos\varphi|.$$

Při změně orientace jedné z obou rovin ϱ, σ úhel φ přejde v úhel výplňkový, při současné změně orientace obou rovin ϱ, σ se úhel φ nemění. Rovněž tak φ se nemění při změně orientace prostoru $\boldsymbol{E}_3$. Úhel ψ dvou neorientovaných rovin ϱ, σ nemůže býti ani tupý ani přímý; úhel ψ je pravý tehdy a jenom tehdy, jsou-li roviny ϱ, σ navzájem kolmé; ψ je nulový tehdy a jenom tehdy, jsou-li ϱ, σ navzájem rovnoběžné. Úhel φ dvou navzájem rovnoběžných orientovaných rovin ϱ, σ je nulový při souhlasné rovnoběžnosti, přímý při nesouhlasné rovnoběžnosti.

S pojmem úhlu dvou orientovaných rovin těsně souvisí pojem *úhlu dvou polorovin.* Omezme se na nejdůležitější a v elementárním vyučování jedině uvažovaný případ dvou polorovin ϱ_0, σ_0, kde ϱ_0 leží v rovině ϱ, σ_0 v rovině σ a obě poloroviny jsou vyťaty touž přímkou p. Předpokládejme nejprve, že přímka p jest orientována. Potom lze právě jedním způsobem orientovat rovinu ϱ tak, aby ϱ_0 byla *kladná* polorovina vyťatá v ϱ přímkou p; podobně lze právě jedním způsobem orientovat rovinu σ tak, aby σ_0 byla kladná polorovina vyťatá v σ přímkou p. Za těchto předpokladů definujeme úhel φ polorovin ϱ_0, σ_0 jako úhel orientovaných rovin ϱ, σ. Změníme-li orientaci přímky p, změní se současně orientace obou rovin ϱ, σ a úhel φ zůstane tudíž beze změny. Snadno se dokáže, že za učiněných předpokladů úhel φ je nulový tehdy a jenom tehdy, jestliže poloroviny ϱ_0, σ_0 splynou; úhel φ je přímý tehdy a jenom tehdy, jestliže poloroviny ϱ_0, σ_0 jsou navzájem opačné (což vyžaduje splynutí rovin ϱ, σ); úhel φ je pravý tehdy a jenom tehdy, jestliže roviny ϱ, σ jsou navzájem kolmé.

Zvolme libovolně bod P na přímce p a budiž q_1 polopřímka s počátkem P obsažená v polorovině ϱ_0 a kolmá na p (což znamená ovšem, že přímka, jejíž částí je polopřímka q_1, je kolmá na p); podobně budiž q_2 polopřímka s počátkem P obsažená v polorovině σ_0 a kolmá na p. Za těchto předpokladů dokážeme, že úhel φ polorovin ϱ_0, σ_0 je roven úhlu polopřímek q_1, q_2. Při důkaze můžeme předpokládat, že byla zvolena určitá orientace jednak pro přímku p, jednak pro prostor $\boldsymbol{E}_3$. Budiž $\boldsymbol{u}$ jednotkový vektor na přímce p, kladný při dané orientaci přímky p; budiž $\boldsymbol{v}_1$ takový jednotkový vektor, že polopřímka q_1 je množina všech bodů

$$P + t\boldsymbol{v}_1, \ t \geqq 0;$$

podobně budiž $\boldsymbol{v}_2$ takový jednotkový vektor, že polopřímka q_2 je množina všech bodů

$$P + tv_2,\ t \geqq 0.$$

Vektory u, v_1 jsou orthonormální a stejně i vektory u, v_2. Tudíž existují jednotkové vektory w_1, w_2 tak, že u, v_1, w_1, jakož i u, v_2, w_2 jsou kladné orthonormální base pro E_3. Podle definice je φ úhel orientovaných směrů w_1, w_2, t. j. $\cos\varphi = w_1 . w_2$; máme dokázati, že φ je úhel orientovaných směrů v_1, v_2, t. j. že $\cos\varphi = v_1 . v_2$.

To znamená, že je třeba pouze dokázati, že $v_1 . v_2 = w_1 . w_2$. Dvojsměr $\{v_1, w_1\}$, jakož i dvojsměr $\{v_2, w_2\}$, jsou kolmé na směr $\{u\}$ a tudíž $\{v_1, w_1\} = \{v_2, w_2\}$, takže existují čísla c, s, c', s' tak, že

$$\begin{aligned} v_2 &= cv_1 + sw_1, \\ w_2 &= c'v_1 + s'w_1. \end{aligned}$$

Ježto vektory v_1, w_1 jsou orthonormální a ježto totéž platí o vektorech v_2, w_2, jest

(53.9) $$c^2 + s^2 = 1,\ c'^2 + s'^2 = 1,\ cc' + ss' = 1.$$

Ježto $(c, s) \neq (0, 0)$, plyne z poslední rovnice (53.9), že existuje číslo λ tak, že $c' = -\lambda s$, $s' = \lambda c$; podle druhé rovnice (53.9) je však $\lambda = \pm 1$.

Mimo to je

$$[u_1 v_1 w_1] > 0,\ [u_2 v_2 w_2] > 0;$$

z toho plyne, že $\lambda > 0$, takže $\lambda = 1$, tedy

$$\begin{aligned} v_2 &= cv_1 + sw_1, \\ w_2 &= -sv_1 + cw_1. \end{aligned}$$

Ježto vektory v_1, w_1 jsou orthonormální, jest $v_1 v_2 = c$, $w_1 w_2 = c$, tedy $v_1 v_2 = w_1 w_2$, což jsme měli dokázati.

54. TROJÚHELNÍK. Slovem *trojúhelník* rozumíme v této kapitole trojici bodů A, B, C, při čemž se předpokládá, že A, B, C neleží všecky tři na téže přímce, z čehož plyne, že body A, B, C jsou navzájem různé. Body A, B, C nazveme *vrcholy trojúhelníka*: trojúhelník sám označíme $\triangle ABC$. Na pořádku vrcholů při tom nezáleží. Všecky tři body A, B, C leží v jednoznačně určené rovině, totiž v rovině $E_2 = \{A; B - A, C - A\}$.

Čísla

(54.1) $$a = \overline{BC},\ b = \overline{AC},\ c = \overline{AB}$$

nazveme *stranami* $\triangle ABC$. Mimo to se v následujícím vyskytnou tři úhly α, β, γ:

α je úhel polopřímek AB; AC;
β je úhel polopřímek BA, BC;
γ je úhel polopřímek CA, CB.

Pravíme, že α, β, γ jsou *úhly* $\triangle ABC$.

Jest

$$a = |C - B|,\ b = |C - A|,\ c = |B - A|.$$

Podle definice kosinu jest

$$(B - A)(C - A) = bc \,.\, \cos\alpha; \tag{54.2}$$

podle (7.7′) je však

$$2(B - A)(C - A) = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2,$$

takže podle (54.1) jest

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha, \tag{54.3}$$

což je t. zv. *kosinová věta*. Zřejmě je ve vzorci (54.3), a stejně i v následujících vzorcích tohoto článku, dovolena libovolná permutace vrcholů A, B, C, tedy libovolná permutace symbolů a, b, c spolu se současnou příslušnou permutací symbolů α, β, γ.

Současně s (54.2) platí na př.

$$(C - B)(A - B) = ac \,.\, \cos\beta$$

neboli

$$(B - C)(B - A) = ac \,.\, \cos\beta. \tag{54.2′}$$

Avšak

$$B - A = (B - C) + (C - A),$$

takže

$$c^2 = (B - A)(B - A) = (B - A)(B - C) + (B - A)(C - A)$$

a podle (54.2) a (54.2′) jest

$$c^2 = ac\ \cos\beta + bc\ \cos\alpha$$

neboli

$$c = a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \cos\alpha, \tag{54.3}$$

což je t. zv. *věta o průmětu*.

Podle (53.2′) je

$$[A - B, B - C] = \pm\, ac\,.\, \sin\beta,$$
$$[A - B, A - C] = \pm\, bc\,.\, \sin\alpha,$$

avšak

$$A - C = (A - B) + (B - C),$$

takže

$$[A - B, B - C] = [A - B, A - C],$$

tedy

$$a \sin\beta = b \sin\alpha, \tag{54.4}$$

což je t. zv. *sinová věta*.

55. TROJHRAN. Slovem *trojhran* rozumíme v této kapitole trojici polopřímek VA_1, VA_2, VA_3 s týmž počátkem V, při čemž se předpokládá, že dané polopřímky neleží všecky tři v této rovině a jsou tudíž navzájem různé. Bod V nazveme *vrchol trojhranu*, polopřímky VA_1, VA_2, VA_3 *hrany trojhranu*; na pořadí hran nezáleží. Celý trojhran leží v jednoznačně určeném $\mathbf{E}_3 = \{V; A_1 - V, A_2 - V, A_3 - V\}$; nazveme jej trojhran $VA_1A_2A_3$.

Označme: α_1 úhel polopřímek VA_2, VA_3; α_2 úhel polopřímek VA_1, VA_3; α_3 úhel polopřímek VA_1, VA_2; úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nazveme *hranové úhly trojhranu*. Pro $1 \leqq r \leqq 3$, $1 \leqq s \leqq 3$, $r \neq s$ označme ϱ_{rs} tu polorovinu vyťatou v rovině $\{V; A_r - V, A_s - V\}$ přímkou VA_r, ve které leží bod A_s. Označme: σ_1 úhel polorovin $\varrho_{12}, \varrho_{13}$; σ_2 úhel polorovin $\varrho_{21}, \varrho_{23}$; σ_3 úhel polorovin $\varrho_{31}, \varrho_{32}$; úhly $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nazveme *stěnové úhly trojhranu*.

Je-li dán trojhran $VA_1A_2A_3$, potom existují a jsou jednoznačně určeny vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, pro které

$$|\mathbf{u}_1| = 1,\ |\mathbf{u}_2| = 1,\ |\mathbf{u}_3| = 1, \tag{55.1}$$
$$A_1 = V + x_1\mathbf{u}_1,\ A_2 = V + x_2\mathbf{u}_2,\ A_3 = V + x_3\mathbf{u}_3$$

s kladnými x_1, x_2, x_3. Obráceně je trojhran jednoznačně určen, známe-li jeho vrchol V a vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ splňující (55.1), které musí ovšem býti lineárně nezávislé, ale jinak jsou libovolné; takto určený trojhran můžeme označit $V\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3$. Pro hranové úhly platí zřejmě

$$\cos\alpha_1 = \mathbf{u}_2\mathbf{u}_3,\ \cos\alpha_2 = \mathbf{u}_3\mathbf{u}_1,\ \cos\alpha_3 = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2. \tag{55.2}$$

Je vhodné orientovati prostor $\boldsymbol{E}_3$ tak, aby bylo

$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3] > 0, \tag{55.3}$$

takže podle věty 34.2 je také

$$[\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1] > 0,\ [\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2] > 0. \tag{55.3'}$$

Všimněme si nyní vektorových součinů $\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$. Jejich velikosti jsou podle (55.1) a (53.2) $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_3$. Můžeme tedy zavésti nové vektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ tak, že

$$|\boldsymbol{v}_1| = 1,\ |\boldsymbol{v}_2| = 1,\ |\boldsymbol{v}_3| = 1, \tag{55.4}$$

$$\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 = \sin\alpha_1 \,.\, \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1 = \sin\alpha_2 \,.\, \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = \sin\alpha_3 \,.\, \boldsymbol{v}_3. \tag{55.5}$$

Podle definice vektorového součinu je na př.

$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{x}] = (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2) \,.\, \boldsymbol{x}$$

neboli

$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{x}] = \sin\alpha_3 \,.\, \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{x} \tag{55.6}$$

pro každý vektor $\boldsymbol{x}$, tedy především $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_3 = 0$, $\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_3 = 0$ a podle (55.3), ježto $\sin\alpha_3 > 0$, $\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3 > 0$. Celkem je

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1 > 0,\ \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_1 = 0,\ \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_1 = 0,\\ &\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_2 = 0,\ \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2 > 0,\ \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_2 = 0,\\ &\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_3 = 0,\ \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_3 = 0,\ \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3 > 0. \end{aligned} \tag{55.7}$$

Vektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ jsou jednoznačně určeny podmínkami (55.4) a (55.7). Všimněme si na př. vektoru $\boldsymbol{v}_3$! Ježto $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_3 = 0$, $\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_3 = 0$, je směr $\{\boldsymbol{v}_3\}$ kolmý na zaměření $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, čímž je již směr $\{\boldsymbol{v}_3\}$ jednoznačně určen. Kdyby nebylo další podmínky, mohli bychom místo vektoru $\boldsymbol{v}_3$ vzíti každý vektor tvaru $\lambda \,.\, \boldsymbol{v}_3$. Podmínka $|\boldsymbol{v}_3| = 1$ však omezuje λ na hodnoty ± 1 a podmínka $\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3 > 0$ vylučuje hodnotu $\lambda = -1$, takže vektor $\boldsymbol{v}_3$ je skutečně určen jednoznačně. Geometricky můžeme vektor $\boldsymbol{v}_3$ popsati takto. Především je směr $\{\boldsymbol{v}_3\}$ kolmý na zaměření $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ a jest $|\boldsymbol{v}_3| = 1$; tím je vektor $\boldsymbol{v}_3$ prozatím určen pouze až na znamení. Ježto však vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ jsou lineárně nezávislé, jest

$$\boldsymbol{v}_3 = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3,$$

tedy

$$[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_3] = a_3[\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3].$$

Ježto však $\sin\alpha_3 > 0$, plyne z (55.6), že $[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_3] > 0$, takže podle (55.3) je $a_3 > 0$, čímž je zřejmě také znamení vektoru $\mathbf{v}_3$ jednoznačně určeno.

Dokázali jsme prvou z nerovností

$$(55.8) \qquad [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_3] > 0, \; [\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{v}_1] > 0, \; [\mathbf{u}_3\mathbf{u}_1\mathbf{v}_2] > 0$$

a stejně se dokáží ostatní dvě. Orientujeme-li rovinu $\mathbf{E}_2' = \{V; A_1 - V, A_2 - V\}$ tak, aby $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ byla její kladná base a rovinu $\mathbf{E}_2'' = \{V; A_1 - V, A_3 - V\}$, tak, aby $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3$ byla její kladná base, potom úhel σ_1 polorovin $\varrho_{12}, \varrho_{13}$ je podle článku 53 roven úhlu orientovaných rovin $\mathbf{E}_2', \mathbf{E}_2''$, který podle téhož článku a podle (55.8) je roven úhlu orientovaných směrů $\{\mathbf{v}_3\}^+, \{-\mathbf{v}_2\}^+$, takže podle (55.4) a (50.3′) platí první ze vzorců

$$(55.9) \qquad \cos\sigma_1 = -\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3, \; \cos\sigma_2 = -\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1, \; \cos\sigma_3 = -\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$$

a stejně se dokáží ostatní dva. Všimněme si, že ze vztahů (55.7) plyne podle věty 34.6, že součin $[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3] \,.\, [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3]$ je kladný, takže podle (55.3)

$$(55.10) \qquad [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3] > 0.$$

Je-li

$$B_1 = V + y_1\mathbf{v}_1, \; B_2 = V + y_2\mathbf{v}_2, \; B_3 = V + y_3\mathbf{v}_3,$$

kde y_1, y_2, y_3 jsou kladná čísla, potom $VB_1B_2B_3$ neboli $V\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ je nový trojhran, který se nazývá *polárním trojhranem* původního trojhranu $VA_1A_2A_3$ neboli $V\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3$. Vztahy (55.1), (55.4) a (55.7) se nezmění, vyměníme-li písmeno $\mathbf{u}$ s písmenem $\mathbf{v}$. Z toho plyne, že k trojhranu $VB_1B_2B_3$ polárním trojhranem je původní trojhran $VA_1A_2A_3$. Na základě rovnic (55.2) a (55.9) soudíme, že *hranové úhly polárního trojhranu jsou výplňkové ke stěnovým úhlům původního trojhranu, stěnové úhly polárního trojhranu jsou výplňkové ke hranovým úhlům původního trojhranu.* Znamená-li čárka výplňkové úhly, jsou tedy $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ hranové úhly trojhranu $VB_1B_2B_3$, $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ stěnové úhly téhož trojhranu. Máme-li tedy nějaký vztah platný mezi hranovými úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a stěnovými úhly $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, musí platit také vztah, který vznikne z původního vztahu záměnou

$$(55.11) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

za

$$(55.11') \qquad \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3.$$

Vzorcům (55.5) platným pro trojhran $VA_1A_2A_3$ odpovídají u polárního trojhranu $VB_1B_2B_3$ vzorce

$$(55.12) \qquad \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \sin\sigma_1 \,.\, \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 = \sin\sigma_2 \,.\, \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \sin\sigma_3 \,.\, \mathbf{u}_3.$$

Podle definice vektorového součinu je na př. $[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3] = (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \,.\, \mathbf{u}_3$. Ježto však

$$[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_3\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2],$$

plyne ze (55.5), že

$$(55.13) \qquad \sin\alpha_1 \,.\, \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 = \sin\alpha_2 \,.\, \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = \sin\alpha_3 \,.\, \mathbf{u}_3\mathbf{v}_3 = [\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3].$$

Podobně plyne z (55.12), že

$$(55.14) \qquad \sin\sigma_1 \,.\, \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 = \sin\sigma_2 \,.\, \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 = \sin\sigma_3 \,.\, \mathbf{u}_3\mathbf{v}_3 = [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3].$$

Z (55.13) a (55.14) plyne [viz též (55.3) a (55.10)], že

$$(55.15) \qquad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\sigma_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\sigma_2} = \frac{\sin\alpha_3}{\sin\sigma_3},$$

což je t. zv. *sinová věta.*

Podle (35.11) jest

$$(55.16) \qquad (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \,.\, (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{u}_3, & \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2\mathbf{u}_3, & \mathbf{u}_2\mathbf{u}_1 \end{vmatrix}.$$

Levá strana v (55.16) je podle (55.5) rovná $\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \,.\, \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$, tedy rovna $-\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\sigma_1$ podle (55.9); pravá strana v (55.16) je podle (55.1) a (55.2) rovna $\cos\alpha_2 \cos\alpha_3 - \cos\alpha_1$. Tedy platí vzorec

$$(55.17) \qquad \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\sigma_1,$$

což je t. zv. *první kosinová věta.* Záměnou (55.11) za (55.11′) dostaneme t. zv. *druhou kosinovou větu*

$$(55.18) \qquad \cos\sigma_1 = -\cos\sigma_2 \cos\sigma_3 + \sin\sigma_2 \sin\sigma_3 \cos\alpha_1.$$

Ve vzorcích (55.17) a (55.18) můžeme ovšem libovolně permutovat indexy 1, 2, 3.

IX

DALŠÍ VĚTY O ÚHLECH

V celé kapitole předpokládáme, že je dána rovina E_2.

56. POJEM DUTÉHO ÚHLU. V předcházející kapitole jsme sice probírali různé vzorce pro kosinus a sinus úhlu, ale teprve nyní přistoupíme ke studiu geometrického pojmu úhlu.

Slovo úhel má v geometrii rozmanité významy, základním pojmem je však pojem dutého úhlu, který nyní budeme definovati. Buďtež dány tři různé body V, A, B, které neleží na přímce. Rovina E_2 se skládá ze všech bodů tvaru

$$V + t_1(A - V) + t_2(B - V), \tag{56.1}$$

kde t_1, t_2 jsou libovolná reálná čísla. V rovině E_2 leží polopřímka VA složená z těch bodů, u kterých $t_1 \geqq 0$, $t_2 = 0$, dále polopřímka VB složená z těch bodů, u kterých $t_1 = 0$, $t_2 \geqq 0$. Množinu těch bodů, u nichž v (56.1) je $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq 0$, označíme $\sphericalangle AVB$ nebo $\sphericalangle BVA$ a nazveme ji *dutý úhel*; bod V se jmenuje jeho *vrchol*, polopřímky VA, VB, se jmenují jeho *ramena*. Vrchol náleží do obou ramen; obě ramena jsou částí úhlu. Každý jiný bod úhlu $\sphericalangle AVB$, t. j. každý bod, pro nějž v (56.1) je $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, jmenuje se *vnitřní bod* úhlu.

Přímka VA se skládá ze všech bodů, pro něž $t_2 = 0$ a t_1 je libovolné; takový bod náleží do $\sphericalangle AVB$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $t_1 \geqq 0$. Tedy ze všech bodů přímky VA jsou to právě body polopřímky VA, které náležejí do $\sphericalangle AVB$; podobně pro přímku VB.

VĚTA 56.1. *Jestliže dva různé body X', X'' náležejí do $\sphericalangle AVB$, potom celá úsečka $X'X''$ je částí $\sphericalangle AVB$. Jestliže mimo to neleží oba body X', X'' na témž rameni úhlu $\sphericalangle AVB$* (zejména tedy, jestliže aspoň jeden z obou bodů X', X'' je vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$), *potom každý vnitřní bod úsečky $X'X''$ je vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$.*

DŮKAZ. Budiž

$$X' = V + t_1'(A - V) + t_2'(B - V),\ t_1' \geqq 0,\ t_2' \geqq 0,$$
$$X'' = V + t_1''(A - V) + t_2''(B - V),\ t_1'' \geqq 0,\ t_2'' \geqq 0,$$

při čemž není současně $t_1' = t_1''$, $t_2' = t_2''$. Bod X úsečky $X'X''$ má tvar

$$X = X' + c(X'' - X'),$$

kde $0 \leqq c \leqq 1$, takže platí (56.1), při čemž

$$t_1 = (1 - c)\, t_1' + ct_1'',\ t_2 = (1 - c)\, t_2' + ct_2'',$$

takže $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq 0$, t. j. bod X náleží do $\sphericalangle AVB$. Předpokládáme-li, že X je vnitřní bod úsečky $X'X''$, t. j., že $0 < c < 1$, bude zpravidla $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, t. j. X bude vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$. Výjimka nastane jednak pro $t_2' = t_2'' = 0$, t. j. leží-li oba body X', X'' na polopřímce VA, jednak pro $t_1' = t_1'' = 0$, t. j. leží-li oba body X', X'' na polopřímce VB.

VĚTA 56.2. *$\sphericalangle AVB$ se skládá ze všech polopřímek tvaru VC, kde C je libovolný bod úsečky AB; je-li C vnitřní bod polopřímky AB, potom celá polopřímka VC až na bod V leží uvnitř $\sphericalangle AVB$.*

DŮKAZ. Bod C úsečky AB má tvar

$$C = A + c(B - A),\ 0 \leqq c \leqq 1; \tag{56.2}$$

polopřímka VC se skládá ze všech bodů tvaru

$$X = V + t(C - V),\ t \geqq 0, \tag{56.3}$$

tedy tvaru

$$X = V + t(1 - c)(A - V) + tc(B - V).$$

Potom jest $t(1 - c) \geqq 0$, $tc \geqq 0$, t. j. X náleží do $\sphericalangle AVB$; je-li C vnitřním bodem úsečky AB a je-li $X \neq V$, jest $0 < c < 1$, $t > 0$, tedy $t(1 - c) > 0$, $tc > 0$, t. j. X je vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$. Obráceně, jestliže bod $X \neq V$ náleží do $\sphericalangle AVB$, potom X má tvar (56.1), kde $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq 0$, není však současně $t_1 = t_2 = 0$, takže $t_1 + t_2 > 0$. Položíme-li

$$t_1 + t_2 = t,\quad \frac{t_2}{t_1 + t_2} = c,$$

platí (56.2), takže bod C náleží do úsečky AB, a mimo to platí (56.3), takže bod X náleží do polopřímky VC.

Z věty 56.2 plyne:

VĚTA 56.3. *Je-li $X \neq V$ bod úhlu $\sphericalangle AVB$, potom celá polopřímka VX je částí úhlu $\sphericalangle AVB$; je-li X vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$, platí totéž o každém bodě $X' \neq V$ polopřímky VX.*

VĚTA 56.4. *Budiž ϱ_1 ta polorovina vyťatá přímkou VA, ve které leží bod B* (a tudíž celá polopřímka VB); *budiž ϱ_2 ta polorovina vyťatá přímkou VB, ve které leží bod A* (a tudíž celá polopřímka VA). *Potom $\sphericalangle AVB$ je průnik* (společná část) *polorovin ϱ_1, ϱ_2, vnitřek $\sphericalangle AVB$ je průnik vnitřků polorovin ϱ_1, ϱ_2.* Neboť polorovina ϱ_1 je množina těch bodů (56.1), pro něž je $t_2 \geqq 0$ a její vnitřek je množina těch bodů (56.1), pro něž je $t_2 > 0$, podobně $t_1 \geqq 0$ v polorovině ϱ_2, $t_1 > 0$ uvnitř poloroviny ϱ_2.

Z věty 56.4 se dá snadno znovu odvodit věta 56.1. Mimo to plyne z věty 56.4, že úhel $\sphericalangle AVB$ se nezmění, nahradíme-li bod A kterýmkoli bodem $A' \neq V$ polopřímky VA, bod B kterýmkoli bodem $B' \neq V$ polopřímky VB. Tedy:

VĚTA 56.5. *Dutý úhel je jednoznačně určen svými rameny.*

57. DVOJICE DUTÝCH ÚHLŮ. Buďtež dány dva duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ se společným ramenem VA. Označme p přímku VA, dále pB tu polorovinu vyťatou přímkou p, ve které leží bod B, podobně pC tu polorovinu vyťatou přímkou p, ve které leží bod C. (Podle definice dutého úhlu žádný z bodů B, C neleží na přímce p.)

Nyní jsou možné dva případy. Buďto poloroviny pB, pC jsou navzájem opačné, nebo obě tyto poloroviny splynou. V prvém případě pravíme, že $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ jsou *styčné*, ve druhém, že jsou v *zákrytu*.

Je zřejmé, že dva styčné duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ nemají společných bodů mimo body společného ramene. Důležitým zvláštním případem styčných úhlů jsou *úhly vedlejší*. Tak nazýváme dva duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ se společným ramenem VA tehdy, jestliže druhá ramena VB, VC leží v téže přímce, t. j. jestliže VB, VC jsou dvě navzájem opačné polopřímky. K danému dutému úhlu $\sphericalangle AVB$ existují právě dva vedlejší úhly; jsou-li polopřímky VA, VA' navzájem opačné a rovněž tak polopřímky VB, VB', potom úhlem vedlejším k $\sphericalangle AVB$ je jednak $\sphericalangle AVB'$, jednak $\sphericalangle A'VB$. Za téhož předpokladu, že polopřímky VA, VA', jakož i polopřímky VB, VB', jsou navzájem opačné, pravíme, že duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'VB'$ jsou *úhly vrcholové*. Je patrné, že oba úhly vedlejší k témuž dutému úhlu jsou navzájem dva úhly vrcholové.

Jsou-li p, q dvě různoběžky s průsečíkem V, potom bod V rozdělí každou z obou přímek p, q na dvě navzájem opačné polopřímky s počátkem V. Kterákoli z obou polopřímek obsažených v přímce p spolu s kteroukoli z obou polopřímek obsažených v přímce q dává dvojici ramen dutého úhlu. Jsou celkem čtyři takové úhly, které nazveme *úhly různoběžek* p, q. Tyto čtyři přímky se rozpadají na dvě dvojice navzájem vrcholových úhlů. Každý úhel první dvojice spolu s každým úhlem druhé dvojice jsou dva navzájem vedlejší úhly.

Jestliže polopřímky VB, VC splynou, potom splynou také $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ a jsou v zákrytu. Rovněž tak jsou oba úhly v zákrytu v tom případě, že polopřímka VC je vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVB$ nebo polopřímka VB je vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVC$.

VĚTA 57.1. *Jestliže polopřímka VC je vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVB$, potom $\sphericalangle AVB$ se skládá z obou dutých úhlů $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle BVC$, které jsou navzájem styčné* a tudíž nemají jiných společných bodů mimo polopřímku VB.

DŮKAZ plyne snadno z věty 56.2, neboť podle věty 56.5 můžeme předpokládati, že bod C leží na úsečce AB a potom úsečka AB se skládá z úseček AC, BC, které mají společný pouze bod B. Ježto úsečka AB protne přímku VC, jsou body A, B od sebe odděleny přímkou VC a proto $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle BVC$ jsou navzájem styčné. Obráceně platí:

VĚTA 57.2. *Jsou-li $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ dva různé duté úhly, které jsou navzájem v zákrytu, potom buďto je VC vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle AVC$ je částí $\sphericalangle AVB$ nebo je VB vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVC$ a $\sphericalangle AVB$ je částí $\sphericalangle AVC$.* Tyto dva případy se ovšem navzájem vylučují.

DŮKAZ. Budiž

$$C = V + t_1(A - V) + t_2(B - V).$$

Bod C podle předpokladu leží uvnitř poloroviny pB (je-li opět p přímka VA), takže $t_2 > 0$, a bod C neleží na polopřímce VB, takže $t_1 \neq 0$. Je-li $t_1 > 0$, je C vnitřní bod pro $\sphericalangle AVB$ a tudíž polopřímka VC je vnitřní pro $\sphericalangle AVB$. Je-li však $t_1 < 0$, $t_2 > 0$, jest

$$B = V - \frac{t_1}{t_2}(A - V) + \frac{1}{t_2}(C - V), \quad -\frac{t_1}{t_2} > 0, \ \frac{1}{t_2} > 0,$$

takže B je vnitřní bod pro $\sphericalangle AVC$ a tudíž polopřímka VB je vnitřní pro $\sphericalangle AVC$.

Buďtež nyní VA, VB, VC tři různé polopřímky s týmž počátkem V v naší rovině $\mathbf{E}_2$. Může se stát, že některé dvě ze tří přímek VA, VB, VC splynou. Splynou-li na př. přímky VB, VC v jedinou přímku r, potom polopřímky VB, VC jsou navzájem opačné, duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ jsou navzájem vedlejší, a polopřímky VB, VC nejsou rameny žádného dutého úhlu. Z věty 56.4 snadno plyne, že oba vedlejší úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ dohromady vyplní polorovinu rA a že body oběma společné vyplní polopřímku VA.

Předpokládejme však, že všecky tři přímky VA, VB, VC jsou navzájem různé. Potom máme tři duté úhly

$$\sphericalangle AVB, \ \sphericalangle AVC, \ \sphericalangle BVC \tag{57.1}$$

se společným vrcholem V, z nichž každé dva mají jedno společné rameno. Vektory $A - V$, $B - V$, $C - V$ roviny $\mathbf{E}_2$ jsou mezi sebou lineárně závislé, takže některá jejich netriviální lineární kombinace je rovna $\mathbf{o}$:

$$a(A - V) + b(B - V) + c(C - V) = \mathbf{o}. \tag{57.2}$$

Ježto každé dva z našich tří vektorů jsou lineárně nezávislé, je jistě $abc \neq 0$. Ve vztahu (57.2) můžeme jednak změnit znamení všech tří koeficientů, jednak změnit pořádek sčítanců. Máme tudíž v podstatě pouze dvě možnosti:

$$a > 0, \ b > 0, \ c < 0; \tag{57.3}$$

$$a > 0, \ b > 0, \ c > 0. \tag{57.4}$$

Tyto dvě možnosti jsou geometricky popsány ve větách 57.3 a 57.4.

VĚTA 57.3. *Jestliže ve vztahu* (57.2) *platí* (57.3), *potom jsou* $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle BVC$ *dva styčné úhly, které dohromady vyplní* $\sphericalangle AVB$. To plyne z věty 57.1, neboť

$$C = V - \frac{a}{c}(A - V) - \frac{b}{c}(B - V), \quad -\frac{a}{c} > 0, \quad -\frac{b}{c} > 0,$$

takže polopřímka VC je vnitřní pro $\sphericalangle AVB$.

VĚTA 57.4. *Jestliže ve vztahu* (57.2) *platí* (57.4), *potom každé dva ze tří úhlů* (57.1) *jsou navzájem styčné* (a nemají tudíž mimo společné rameno žádný další společný bod). *Všecky tři úhly* (57.1) *dohromady vyplní celou rovinu.*

DŮKAZ. Ježto ve vztahu

$$C = V - \frac{a}{c}(A - V) - \frac{b}{c}(B - V)$$

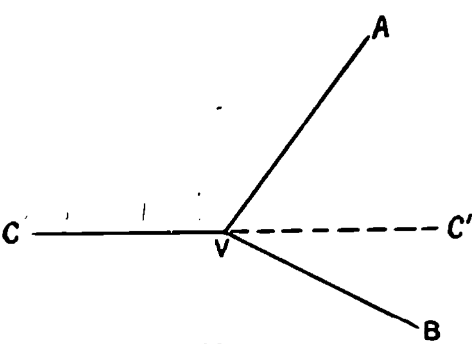
koeficient $-\frac{b}{c}$ je záporný, jsou body B, C od sebe odděleny přímkou VA, takže úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ jsou styčné; totéž plyne obdobně o kterýchkoli jiných dvou ze tří úhlů (57.1). Zaveďme bod C' rovnicí

$$C' = V - (C - V). \tag{57.5}$$

Potom z (57.2) plyne

$$a(A - V) + b(B - V) - c(C' - V) = \mathbf{o},$$

takže podle věty 57.3 $\sphericalangle AVC'$, $\sphericalangle BVC'$ dohromady vyplní $\sphericalangle AVB$. Avšak (viz obr. 4) polopřímky VC, VC' podle (57.5) jsou navzájem opačné, takže $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle AVC'$ jsou navzájem vedlejší a totéž platí o $\sphericalangle BVC$, $\sphericalangle BVC'$. Označme r přímku VC; z (57.2) a (57.4) plyne, že poloroviny rA, rB jsou navzájem opačné. Oba duté úhly $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle AVC'$ dohromady vyplní polorovinu rA; oba duté úhly $\sphericalangle BVC$, $\sphericalangle BVC'$ dohromady vyplní



Obr. 4.

opačnou polorovinu rB. Ježto, jak už víme, $\sphericalangle AVC'$, $\sphericalangle BVC'$ dohromady vyplní $\sphericalangle AVB$, vidíme, že duté úhly (57.1) dohromady vyplní celou rovinu.

58. KRUŽNICE. Zvolme v rovině bod S a číslo $r > 0$. Množina všech bodů X roviny, pro něž $\overline{SX} = r$, kterou označíme $(S; r)$, jmenuje se *kružnice* se *středem* S a s *poloměrem* r. Slovem *poloměr* se také označuje každá úsečka SX, kde X je libovolný bod kružnice. O bodu X pravíme, že leží *vně kružnice*, je-li $\overline{SX} > r$ a že leží *uvnitř kružnice*, je-li $\overline{SX} < r$; střed S leží tedy uvnitř kružnice.

Přímka p procházející středem se jmenuje *průměr* kružnice; z definice je jasné, že každý průměr protne kružnici ve dvou různých bodech A_1, A_2 tak, že S je střed dvojice A_1, A_2. [Slovem průměr se často označuje také úsečka A_1A_2, jakož i její velikost, která se rovná $2r$.]

Jestliže kružnice $(S_1; r_1)$ splyne s kružnicí $(S_2; r_2)$, musí býti $S_1 = S_2$, $r_1 = r_2$. Neboť kdyby bylo $S_1 \neq S_2$, potom by přímka S_1S_2 byla průměrem kružnice, kterou by protťala ve dvou bodech A_1, A_2 tak, že středem dvojice A_1, A_2 by byl zároveň i bod S_1 i bod S_2, což je nemožné. Je tedy $S_1 = S_2$, načež ovšem $r_1 = r_2$.

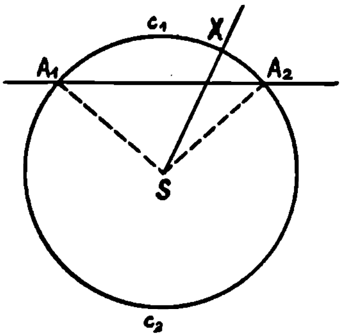
Budiž nyní p libovolná přímka. Prochází-li p středem S kružnice $(S; r)$, víme, že p protne $(S; r)$ ve dvou bodech A_1, A_2 tak, že S je středem dvojice A_1, A_2. Jestliže p neprochází středem S, budiž B pata kolmice k přímce p vedené bodem S a budiž $\overline{SB} = d$, takže d je vzdálenost středu S od přímky p. Nyní rozeznáváme tři případy podle toho, zda $d < r$, $d = r$, $d > r$.

Je-li předně $d < r$, potom podle vět 33.2 a 33.3 p protne kružnici ve dvou bodech A_1, A_2 tak, že B je střed dvojice A_1, A_2; vnitřek úsečky A_1A_2 leží uvnitř kružnice a ty body přímky p, které nenáležejí do úsečky A_1A_2, leží vně kružnice. Přímka p se jmenuje *sečna kružnice*, úsečka A_1A_2 *tětiva kružnice*. (Přímky procházející bodem S počítáme mezi sečny; bod B v tomto případě splyne s bodem S.)

Je-li za druhé $d = r$, potom přímka p má s kružnicí společný jediný bod B; všecky ostatní body přímky p leží vně kružnice. Pravíme, že p je *tečna kružnice* v bodě B, že B je její *bod dotyku*, že p se *dotýká* kružnice v bodě B.

Je-li za třetí $d > r$, potom všecky body přímky p leží vně kružnice; pravíme, že p je *nesečna kružnice.*

Zřejmě každým bodem B na kružnici $(S; r)$ prochází právě jedna tečna; je to kolmice vedená bodem B na přímku SB; bod B je jejím bodem dotyku.



Obr. 5.

Zvolme na kružnici $(S; r)$ dva různé body A_1, A_2. Jimi prochází sečna A_1A_2, která rozdělí rovinu na dvě poloroviny ϱ_1, ϱ_2; označme c_1 tu část kružnice, která leží v ϱ_1, c_2 tu část, která leží v ϱ_2. Množiny c_1, c_2 se jmenují *oblouky* naší kružnice; body A_1, A_2 se jmenují *krajní body* obou oblouků. Každý jiný bod kružnice náleží do jediného z oblouků c_1, c_2 a pravíme, že je jeho *vnitřním bodem.* Jestliže přímka A_1A_2 prochází středem S, potom oblouky c_1, c_2 se jmenují *polokružnice.*

Předpokládejme však, že přímka A_1A_2 neprochází středem S. Potom volme označení tak, že S leží v polorovině ϱ_2 (a je jejím vnitřním bodem). Potom dokážeme, *že bod X na kružnici náleží do oblouku c_1 tehdy a jenom tehdy, jestliže polopřímka SX náleží do dutého úhlu $\sphericalangle A_1SA_2$.* Stačí provésti důkaz za předpokladu, že $X \neq A_1$, $X \neq A_2$, t. j. že bod X neleží na přímce A_1A_2 (viz obr. 5). Nechť nejprve bod X náleží do oblouku c_1. Potom X leží uvnitř ϱ_1, S uvnitř ϱ_2, takže body X, S jsou od sebe odděleny přímkou A_1A_2. To znamená, že uvnitř úsečky SX leží bod B přímky A_1A_2. Zřejmě $\overline{SB} < \overline{SX}$, t. j. $\overline{SB} < r$, takže podle věty 33.3 bod B leží uvnitř úsečky A_1A_2 a tedy podle věty 56.2 polopřímka SB neboli polopřímka SX náleží do $\sphericalangle A_1SA_2$. Obráceně předpokládejme, že bod X kružnice $(S; r)$ náleží do $\sphericalangle A_1SA_2$. Podle věty 56.2 polopřímka SX obsahuje bod B úsečky A_1A_2. Ježto $A_1 \neq X \neq A_2$, jest $A_1 \neq B \neq A_2$, takže B leží uvnitř úsečky A_1A_2. Podle věty 33.3 je tedy $\overline{SB} < \overline{SA}$, t. j. $\overline{SB} < \overline{SX}$. Ježto B leží na polopřímce SX, plyne z toho, že B leží na úsečce SX, t. j. body S, X jsou od sebe odděleny přímkou A_1A_2 a bod X náleží do poloroviny ϱ_1.

Jsme nyní vedeni k zobecnění pojmu úhlu. Dosud jsme v této kapitole zavedli pouze pojem dutého úhlu. Dutý úhel $\sphericalangle A_1SA_2$ jsme v článku 56 definovali jako množinu bodů; podle věty 56.2 můžeme však dutý úhel $\sphericalangle A_1SA_2$ definovat také jako množinu polopřímek s počátkem S. Definujme nyní ke každému dutému úhlu $\sphericalangle A_1SA_2$ s vrcholem v bodě S a s rameny v polopřímkách SA_1, SA_2 *vypuklý úhel* s týmž *vrcholem* S a s týmiž *rameny* SA_1, SA_2 jako množinu těch polopřímek s počátkem S, které nejsou vnitřními polopřímkami dutého úhlu $\sphericalangle A_1SA_2$. Dutý úhel $\sphericalangle A_1SA_2$ a vypuklý úhel s týmiž rameny nemají tudíž mimo SA_1, SA_2 žádnou jinou společnou polopřímku; každá jiná polopřímka SX s počátkem S náleží tedy do jediného z obou úhlů a nazývá se *vnitřní polopřímkou* tohoto úhlu. Jsou-li A_1, A_2 dva různé body na kružnici $(S; r)$, při čemž body A_1, A_2, S neleží v téže přímce, potom máme dva různé úhly s rameny v polopřímkách SA_1, SA_2, jeden dutý a druhý vypuklý. Tyto dva úhly nazveme *středové úhly* kružnice $(S; r)$ určené dvojicí A_1, A_2. Každý z obou oblouků c_1, c_2 kružnice $(S; r)$ s krajními body A_1, A_2 se skládá z těch bodů X kružnice $(S; r)$, pro které polopřímka SX náleží do příslušného z obou úhlů.

Při tom jsme předpokládali, že body S, A_1, A_2 neleží v téže přímce. Jsou-li SA_1, SA_2 dvě opačné polopřímky s počátkem S, které tedy leží obě v téže přímce p, potom p dělí rovinu na dvě poloroviny ϱ_1, ϱ_2. *Přímým úhlem s vrcholem* v bodě S a s rameny v obou polopřímkách SA_1, SA_2 nazveme množinu těch polopřímek SX s počátkem S, které leží v jedné z obou polorovin ϱ_1, ϱ_2. Máme tudíž pro dvě opačné polopřímky SA_1, SA_2 právě dva přímé úhly s rameny v polopřímkách SA_1, SA_2; jeden z nich je částí poloroviny ϱ_1, druhý je částí poloroviny ϱ_2. Leží-li body A_1, A_2 na kružnici $(S; r)$, potom ty body X kružnice, pro které polopřímka SX náleží do jednoho z obou přímých úhlů, vyplní jednu polokružnici s krajními body A_1, A_2.

Pojem dutého, vypuklého a přímého úhlu můžeme shrnout v jediný pojem *jednoduchého úhlu*; nebudeme vyšetřovat v této knize jiné než jednoduché úhly. Dvě různé polopřímky s týmž počátkem S jsou rameny právě dvou jednoduchých úhlů; při tom je z obou úhlů buďto jeden dutý a druhý vypuklý nebo jsou oba přímé.

59. PŘIROZENÉ USPOŘÁDÁNÍ ÚHLU. Definici styčných úhlů, podanou v článku 57 pro dva duté úhly, zobecníme na jednoduché úhly takto: Dva jednoduché úhly nazýváme *styčné*, jestliže mají jedno společné rameno (tudíž i společný vrchol), ale mimo toto společné rameno nemají žádnou společnou polopřímku. Z výsledků článku 57 je totiž patrné, že pro duté úhly nová definice je v souhlase se starou.

VĚTA 59.1. *Budiž dán jednoduchý úhel s rameny v polopřímkách SA, SB a budiž SC jeho vnitřní polopřímka. Potom existuje právě jeden jednoduchý úhel s rameny SA, SC a právě jeden jednoduchý úhel s rameny SB, SC tak, že oba nové úhly jsou částí původního. Oba nové úhly jsou navzájem styčné a dohromady vyplní úhel původní. Jestliže původní úhel je dutý nebo přímý, jsou oba nové úhly duté. Jestliže však původní úhel je vypuklý, je z nových úhlů aspoň jeden dutý, kdežto druhý může býti dutý, přímý nebo vypuklý.*

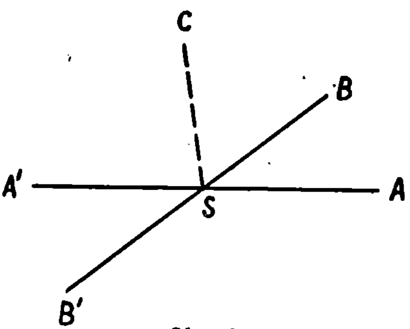
DŮKAZ. I. Dvě různé polopřímky s počátkem S jsou rameny dvou jednoduchých úhlů, které buďto jsou oba přímé nebo je jeden z nich dutý a druhý vypuklý. Tyto dva jednoduché úhly dohromady obsahují *každou* polopřímku s počátkem S a proto *nejvýš jeden* z nich může býti částí daného jednoduchého úhlu.

II. Jestliže daný úhel je dutý, plyne naše věta z věty 57.1.

III. Jestliže daný úhel je přímý, potom všecky tři body S, A, B leží v téže přímce p a existuje polorovina ϱ vyťatá přímkou p tak, že daný úhel se skládá z těch polopřímek s počátkem S, které leží v ϱ. Jsou-li σ_1, σ_2 obě poloroviny vyťaté přímkou SC, plyne naše věta z věty 56.4, při čemž jeden z obou nových úhlů se skládá z těch polopřímek s počátkem S, které leží zároveň v obou polorovinách ϱ, σ_1, druhý z těch, které leží zároveň v obou polorovinách ϱ, σ_2.

IV. Budiž posléze dán vypuklý úhel s rameny SA, SB a označme SA' polopřímku opačnou k SA, SB' polopřímku opačnou k SB. Je-li ϱ ta polorovina vyťatá přímkou SA, která neobsahuje bod B, a je-li σ ta polorovina vyťatá přímkou SB, která neobsahuje bod A, odvodíme snadno z věty 56.4, že daný úhel se skládá z dutého úhlu $\sphericalangle A'SB$ a z toho přímého úhlu s rameny SA, SA', který je částí poloroviny ϱ. Při tom oba právě zmíněné úhly jsou styčné; z toho plyne už správnost věty pro ten případ, že polopřímka SC splyne s polopřímkou SA'.

Stejně se odvodí správnost věty pro ten případ, že polopřímka SC splyne s polopřímkou SB'; v obou případech z nových úhlů jeden je dutý a druhý přímý. Jestliže polopřímka SC je různá jak od SA' tak i od SB', potom z definice daného vypuklého úhlu plyne podle věty 56.4, že SC je vnitřní polopřímkou pro aspoň jednu z polorovin ϱ, σ. Jestliže (viz obr. 6) SC je vnitřní polopřímkou pro σ, ale nikoli pro ϱ, potom podle věty 56.4 je SC vnitřní polopřímkou pro dutý úhel $\sphericalangle A'SB$, který tudíž podle věty 57.1 se skládá z obou styčných úhlů $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle A'SC'$. Při tom $\sphericalangle A'SC$ spolu s tím přímým úhlem s rameny SA, SA', který je částí poloroviny ϱ, dohromady vyplní vypuklý úhel s rameny SA, SC. Z toho plyne snadno, že věta je v daném případě správná, při čemž z obou nových úhlů jedním je dutý úhel $\sphericalangle BSC$, druhým právě zmíněný vypuklý úhel. Stejně se dokáže správnost věty pro ten případ, že SC je vnitřní polopřímkou pro ϱ, nikoli však pro σ. Zbývá ještě ten případ, že polopřímka SC je vnitřní polopřímkou jak pro ϱ tak i pro σ. V tomto případě se snadno nahlédne, že jsou splněny předpoklady věty 57.4 (viz obr. 4 na str. 170) a podle této věty je naše věta správná i v tomto případě, při čemž novými úhly jsou duté úhly $\sphericalangle ASC$, $\sphericalangle BSC$.



Obr. 6.

Budiž opět dán jednoduchý úhel s rameny SA, SB. *Orientovat jednoduchý úhel* znamená rozlišit mezi oběma rameny SA, SB tak, že jedno nazveme *počátečním* a druhé *koncovým* ramenem.

Jsou ovšem dvě různé orientace, které nazveme navzájem *opačné*. Uvažujme na př. tu orientaci, při které počátečním ramenem je SA. Budeme definovat *přirozené uspořádání* daného orientovaného jednoduchého úhlu, složeného z polopřímek se společným počátkem S. Abychom mohli toto přirozené uspořádání stručně popsat, zaveďme pomocné označení: Je-li SX libovolná vnitřní polopřímka daného jednoduchého úhlu, potom tento úhel se podle věty 59.1 skládá ze dvou styčných jednoduchých úhlů se společným ramenem SX, při čemž jeden z nich, který označíme $\alpha(X)$, má ramena v polopřímkách SA, SX, druhý, který označíme $\beta(X)$, má ramena v polopřímkách SB, SX. Jsou-li SX, SY dvě různé vnitřní polopřímky daného jednoduchého úhlu, jsou úhly $\alpha(X)$, $\alpha(Y)$ navzájem různé; dokážeme, že jeden z nich je částí druhého, při čemž je-li na př. $\alpha(X)$ částí $\alpha(Y)$, je $\beta(Y)$ částí $\beta(X)$. Důkaz plyne snadno z věty 59.1, podle níž je SY vnitřní polopřímkou jednoho z obou dutých úhlů $\alpha(X)$, $\beta(X)$. Je-li SY vnitřní polopřímkou pro jednoduchý úhel $\alpha(X)$, aplikujeme větu 59.1 na tento jednoduchý úhel a dostaneme, že existuje právě jeden jednoduchý úhel φ s rameny SA, SY, který je částí $\alpha(X)$ a tudíž také částí původního jednoduchého úhlu s rameny SA, SB, protože však $\alpha(Y)$ je *jediný* jednoduchý úhel s rameny SA, SY obsažený v původním úhlu, musí býti $\varphi = \alpha(Y)$ a z toho plyne, že $\alpha(Y)$ je částí $\alpha(X)$; avšak $\beta(X)$ se skládá z těch polopřímek s počátkem S, které nejsou vnitřními polopřímkami pro $\alpha(X)$ a podobný vztah je také mezi $\beta(Y)$ a $\alpha(Y)$; ježto $\alpha(Y)$ je částí $\alpha(X)$, vidíme, že musí býti také $\beta(X)$ částí $\beta(Y)$. Je-li SY vnitřní polopřímkou pro $\beta(X)$, postupujeme podobně; nyní vyjde nejprve, že $\beta(Y)$ je částí $\beta(X)$ a z toho, že $\alpha(X)$ je částí $\alpha(Y)$. Na základě právě dokončeného důkazu můžeme slíbenou definici přirozeného uspořádání daného orientovaného jednoduchého úhlu s počátečním ramenem SA a koncovým ramenem SB formulovati takto: Polopřímka SA je první, polopřímka SB je poslední; jsou-li SX, SY dvě různé vnitřní polopřímky, jest SX před SY tehdy a jenom tehdy, je-li $\alpha(X)$ částí $\alpha(Y)$ neboli $\beta(Y)$ částí $\beta(X)$. Z definice plyne:

VĚTA 59.2. *Přirozené uspořádání orientovaného jednoduchého úhlu a přirozené uspořádání opačně orientovaného úhlu jsou navzájem inversní.*

Je-li SX vnitřní polopřímka jednoduchého úhlu φ a rameny SA, SB, potom částí tohoto úhlu je určitý jednoduchý úhel ψ s rameny SA, SX. Každá vnitřní polopřímka SY úhlu ψ je zároveň vnitřní polopřímkou úhlu φ a jeden a týž jednoduchý úhel s rameny SA, SY je zároveň částí ψ i částí φ. Z toho plyne, že to přirozené uspořádání úhlu φ, při kterém je SA první, určuje to přirozené uspořádání úhlu ψ, při kterém je SA první. Podobně se nahlédne, že totéž přirozené uspořádání úhlu φ

určuje přirozené uspořádání ve φ obsaženého jednoduchého úhlu s rameny SX, SB, při kterém je SX první. Buďtež posléze SX, SY dvě různé vnitřní polopřímky úhlu φ, při čemž v přirozeném uspořádání úhlu φ, při kterém je SA první, SY leží před SX. Potom ve ψ je obsažen jednoduchý úhel ω s rameny SX, SY; ω je ovšem tím spíše obsažen ve φ. Přirozeným uspořádáním úhlu φ, při kterém je SA první, je určeno přirozené uspořádání úhlu ψ, při kterém je SA první, a jím opět je určeno přirozené uspořádání úhlu ω. Tedy platí:

VĚTA 59.3. *Budiž dán jednoduchý úhel φ s rameny SA, SB a buďtež SX, SY dvě různé polopřímky náležející do φ. Potom částí φ je určitý jednoduchý úhel ω s rameny SX, SY a každým z obou přirozených uspořádání úhlu φ je určeno jedno přirozené uspořádání úhlu ω.* Mluvíme potom o přirozeném uspořádání úhlu ω *souhlasném* s uvažovaným přirozeným uspořádáním úhlu φ; také příslušné orientace úhlů φ, ω nazveme navzájem *souhlasné*. Jestliže s danou orientací úhlu φ je souhlasná ta orientace úhlu ω, při které je SX počátečním ramenem, je ovšem SX před SY v přirozeném uspořádání úhlu příslušném dané jeho orientaci.

Všimněme si blíže přirozeného uspořádání dutého úhlu. Budiž dán dutý úhel $\sphericalangle ASB$. Podle věty 56.2 mají všecky jeho vnitřní polopřímky tvar SC, kde C probíhá vnitřní body úsečky AB. Jsou-li C_1, C_2 dva různé vnitřní body úsečky AB, plyne z téže věty, že $\sphericalangle ASC_1$ je částí $\sphericalangle ASC_2$ tehdy a jenom tehdy, jestliže úsečka AC_1 je částí úsečky AC_2. Platí tudíž (viz též větu 57.1), že jestliže na úsečce AB leží bod C_1 před bodem C_2 v tom přirozeném uspořádání úsečky AB, ve kterém bod A je první, potom (a ovšem také jen potom) polopřímka SC_1 leží před polopřímkou SC_2 v tom přirozeném uspořádání dutého úhlu $\sphericalangle ASB$, ve kterém polopřímka SA je první.

60. ORIENTOVANÉ JEDNODUCHÉ ÚHLY. Předpokládáme, že rovina $\mathbf{E}_2$ jest určitým způsobem *orientována*. Je-li tomu tak, potom o orientovaném dutém úhlu $\sphericalangle AVB$ s počátečním ramenem VA pravíme, že je *kladně* nebo *záporně orientován* podle toho, zda vnější součin

$$[A - V, B - V] \tag{60.1}$$

je kladný či záporný. Z obou možných orientací dutého úhlu je tedy jedna kladná a druhá záporná. Jsou-li nyní $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle BVC$ dva styčné duté úhly se společným ramenem VB, jsou podle definice body A, C od sebe odděleny přímkou VB a z toho soudíme, že oba vnější součiny (60.1) a $[B - V, C - V]$ mají totéž znamení. Tedy platí:

VĚTA 60.1. *Orientujeme-li dva styčné duté úhly tak, aby společné rameno bylo pro jeden počátečním a pro druhý koncovým, jsou oba orientovány kladně nebo oba záporně.*

Budiž nyní dán orientovaný dutý úhel $\sphericalangle AVB$ s počátečním ramenem VA a předpokládejme pro určitost, že zvolená orientace je kladná. Je-li ϱ ta polorovina vyťatá přímkou VA, ve které leží bod B, potom podle věty 56.4 celý $\sphericalangle AVB$ leží v polorovině ϱ. Z toho plyne, že pro každou vnitřní polopřímku VX našeho úhlu ta orientace v $\sphericalangle AVB$ obsaženého $\sphericalangle AVX$, při které VA je počátečním ramenem, je kladná. Podle věty 60.1 také ta orientace rovněž v $\sphericalangle AVB$ obsaženého $\sphericalangle XVB$, při které VX je počátečním ramenem, je kladná. Jsou-li nyní VX, VY dvě různé v $\sphericalangle AVB$ obsažené polopřímky, při čemž při přirozeném uspořádání $\sphericalangle AVB$ příslušném jeho dané orientaci je na př. VX před VY, soudíme dále, že ta orientace $\sphericalangle XVY$, při které je VX počátečním ramenem, je kladná. V celku tedy vidíme, že je-li dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$ v kladné orientaci, potom pro každý v něm obsažený $\sphericalangle XVY$ je kladná ta orientace, která je příslušná dané orientaci $\sphericalangle AVB$ ve smyslu věty 59.3.

Snadná úvaha, při které se stále opíráme o větu 60.1, vede k zobecnění získaného výsledku. Je-li dán jednoduchý úhel φ, potom existuje určitá jeho orientace tak, že pro každý ve φ obsažený *dutý* úhel $\sphericalangle XVY$ orientace tohoto dutého úhlu příslušná dané orientaci úhlu φ je vždy kladná. Tuto orientaci úhlu φ nazveme *kladnou*. Snadno se také zjistí, že platí:

VĚTA 60.2. *Jsou-li VA, VB dvě polopřímky se společným počátkem V, které neleží obě v téže přímce, potom orientace dutého úhlu s počátečním ramenem VA, koncovým VB je kladná tehdy a jenom tehdy, jestliže vnější součin* (60.1) *je kladný; orientace vypuklého úhlu s počátečním ramenem VA, koncovým VB je kladná tehdy a jenom tehdy, jestliže vnější součin* (60.1) *je záporný.*

Mimo to se snadno zjistí, že platí:

VĚTA 60.3. *Je-li dán kladně orientovaný jednoduchý úhel φ a v něm obsažený jednoduchý úhel ψ, potom ta orientace úhlu ψ, která přísluší dané orientaci úhlu φ* (ve smyslu věty 59.3), *je rovněž kladná*.

61. VELIKOST DUTÉHO ÚHLU. Budiž dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$. Zřejmě existují vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tak, že

$$|\mathbf{u}| = 1,\ |\mathbf{v}| = 1; \tag{61.1}$$

$$A = V + a\mathbf{u},\ a > 0;\ B = V + b\mathbf{v},\ b > 0. \tag{61.2}$$

Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nezávisejí na volbě bodů A, B na ramenech, nýbrž jsou daným dutým úhlem $\sphericalangle AVB$ jednoznačně určeny až na to, že pořadí ramen a tudíž i pořadí vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lze volit libovolně.

Vedle $\sphericalangle AVB$ budiž nyní dán druhý dutý úhel $\sphericalangle A'V'B'$, kterému obdobně přiřadíme vektory $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ tak, že

$$|\mathbf{u}'| = 1,\ |\mathbf{v}'| = 1; \tag{61.1'}$$

$$A' = V' + a'\mathbf{u}',\ a' > 0;\ B' = V' + b'\mathbf{v}',\ b' > 0. \tag{61.2'}$$

Definujme nyní abstrakcí (viz článek 5) pojem *velikosti dutého úhlu* takto: Naše dva duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$ mají touž velikost, jestliže existuje shodná transformace f roviny tak, že obrazem $\sphericalangle AVB$ při f jest $\sphericalangle A'V'B'$. O dvou dutých úhlech $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$, které mají touž velikost, pravíme také, že se *liší pouze polohou*; o vlastnostech dutých úhlů, které se nezmění, nahradíme-li je jinými dutými úhly, jež se od původních liší pouze polohou, pravíme, že jsou *nezávislé na poloze*.

VĚTA 61.1. *Duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$ mají touž velikost tehdy a jenom tehdy, jestliže*

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u}'\mathbf{v}'. \tag{61.3}$$

DŮKAZ. I. Předpokládejme nejprve, že platí (61.3). Jestliže pro libovolný bod

$$X = V + x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$$

jest

$$f(X) = V' + x_1\mathbf{u}' + x_2\mathbf{v}',$$

je f afinní transformace roviny, při které obrazem $\sphericalangle AVB$ je $\sphericalangle A'V'B'$.

Jsou-li
$$\mathbf{w}_1 = c_1\mathbf{u} + d_1\mathbf{v},\ \mathbf{w}_2 = c_2\mathbf{u} + d_2\mathbf{v}$$
libovolné dva vektory, jest
$$f(\mathbf{w}_1) = c_1\mathbf{u}' + d_1\mathbf{v}',\ f(\mathbf{w}_2) = c_2\mathbf{u}' + d_2\mathbf{v}'$$
a tedy podle (61.1) a (61.1′)
$$\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 = c_1c_2 + d_1d_2 + (c_1d_2 + c_2d_1) \,.\, \mathbf{uv},$$
$$f(\mathbf{w}_1) \,.\, f(\mathbf{w}_2) = c_1c_2 + d_1d_2 + (c_1d_2 + c_2d_1) \,.\, \mathbf{u}'\mathbf{v}',$$
takže ze (61.3) plyne podle věty 38.1, že f je shodná transformace.

II. Budiž dána shodná transformace f roviny, při které obrazem $\sphericalangle AVB$ je $\sphericalangle A'V'B'$. Máme dokázati, že platí (61.3). Z následující věty 61.5 plyne, že obrazy ramen úhlu $\sphericalangle AVB$ jsou ramena úhlu $\sphericalangle A'V'B'$. Jestliže obrazem ramene VA je rameno $V'A'$ a tedy obrazem ramene VB rameno $V'B'$, můžeme předpokládati, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$. Mimo to je $f(V) = V'$, tedy

(61.4) $$f(A - V) = A' - V',\ f(B - V) = B' - V'.$$

Ježto zobrazení f je shodné, jest $A - V = A' - V'$, $B - V = B' - V'$, takže podle (61.1) až (61.2′) jest $a' = a$, $b' = b$. Z toho plyne podle (61.4), že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$ a podle věty 38.1 platí (61.3). Jestliže obrazem ramene VA je rameno $V'B'$ a tedy obrazem ramene VB rameno $V'A'$, dostaneme týmž postupem nejprve, že $\mathbf{uv} = \mathbf{v}'\mathbf{u}'$ a podle (7.3) opět platí (61.3).

Poznámka. Ježto $\mathbf{uv} = \mathbf{vu}$, soudíme z části I předcházejícího důkazu, že pro každý dutý úhel $\sphericalangle AVB$ existuje shodná transformace roviny, při které $\sphericalangle AVB$ je svým vlastním obrazem tak, že obrazem ramene VA je rameno VB, obrazem ramene VB rameno VA. Z toho soudíme dále podle věty 38.3, že platí:

VĚTA 61.2. *Mají-li duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$ touž velikost, existuje shodná transformace roviny, která ramena prvého úhlu převede v předepsaném pořadí v ramena druhého úhlu.*

VĚTA 61.3. *Budiž dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$ a polopřímka $V'A'$. Dále budiž dána polorovina ϱ vyťatá přímkou $V'A'$. Potom existuje právě jeden dutý úhel $\sphericalangle A'V'B'$, jehož velikost je rovna velikosti $\sphericalangle AVB$, jehož jed-*

ním ramenem je polopřímka $V'A'$ a jehož druhé rameno leží v polorovině ϱ.

DŮKAZ. Existují vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}'$ tak, že

$$|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}'| = 1,$$
$$A = V + a\boldsymbol{u},\ a > 0;\ B = V + b\boldsymbol{v},\ b > 0;\ A' = V' + a'\boldsymbol{u},$$
$$a' > 0.$$

Z důkazu věty 61.1 je patrné, že stačí dokázati, že existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{v}'$ tak, že

$$(61.5) \qquad |\boldsymbol{v}'| = 1,\ \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$$

a že bod $V' + \boldsymbol{v}$ náleží do poloroviny ϱ. Určeme vektor $\boldsymbol{u}_1$ tak, aby vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_1$ byly orthonormální a aby bod $V + \boldsymbol{u}_1$ náležel do té poloroviny vyťaté přímkou VA, ve které leží bod B. Potom jest

$$\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{u}_1,\ c = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v},\ s > 0,\ c^2 + s^2 = 1.$$

Určeme vektor $\boldsymbol{u}_1'$ tak, aby vektory $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u}_1'$ byly orthonormální a aby bod $V' + \boldsymbol{u}_1'$ náležel do poloroviny ϱ'. Je-li

$$\boldsymbol{v}' = x\boldsymbol{u}' + x_1\boldsymbol{u}_1',$$

máme zjistit, že lze právě jedním způsobem určit čísla x, x_1 tak, aby bylo $x_1 > 0$ a aby platilo (61.5). Početní podmínky pro čísla x, x_1 tedy jsou

$$x^2 + x_1^2 = 1,\ x = c,\ x_1 > 0$$

a je patrné, že je jim vyhověno tehdy a jenom tehdy, jestliže $x = c$, $x_1 = s$.

Velikost dutého úhlu $\sphericalangle\, AVB$ označíme $|\sphericalangle\, AVB|$. Z věty 61.1 plyne, že nyní zavedený pojem velikosti dutého úhlu $\sphericalangle\, AVB$ se kryje s pojmem úhlu polopřímek VA, VB definovaném v kapitole VIII, kde arci nebyly vyloučeny případy (nyní vyloučené), že polopřímky VA, VB buďto splynou nebo jsou navzájem opačné. Velikosti dutých úhlů budeme značit řeckými písmeny. Je-li $|\sphericalangle\, AVB| = \alpha$, potom v souhlase s kapitolou VIII za předpokladu (61.1), (61.2) položíme

$$\cos\alpha = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}.$$

Věta 61.1 tedy praví, že *dva duté úhly mají touž velikost tehdy a jenom tehdy, mají-li týž kosinus.*

Následující věta 61.4, která mohla býti umístěna již v článku 56, je potřebná k důkazu věty 61.5, o kterou jsme se opírali v části II důkazu věty 61.1.

VĚTA 61.4. *Splynou-li dva duté úhly $\sphericalangle A_1V_1B_1$, $\sphericalangle A_2V_2B_2$, musí vrchol prvého splynout s vrcholem druhého a ramena prvého splynout s rameny druhého.*

DŮKAZ. I. Je-li $V_1 \neq V_2$, potom z přímky V_1V_2 náleží do $\sphericalangle A_1V_1B_1$ právě polopřímka V_1V_2, kdežto do $\sphericalangle A_2V_2B_2$ právě polopřímka V_2V_1 různá od předešlé, takže dané úhly nemohou splynout.

II. Mějme dva duté úhly $\sphericalangle A_1VB_1$, $\sphericalangle A_2VB_2$ se společným vrcholem V. Jestliže polopřímka VA_2 nesplyne ani s VA_1 ani s VB_1, je VA_2 vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle A_1VB_1$, který tudíž (viz větu 57.1) vnikne dovnitř obou polorovin vyťatých přímkou VA_2. Naproti tomu je $\sphericalangle A_2VB_2$ částí jediné poloroviny vyťaté přímkou VA_2 (viz větu 56.4), takže dané úhly nemohou splynout.

VĚTA 61.5. *Jestliže při afinní transformaci f roviny obrazem dutého úhlu $\sphericalangle AVB$ je dutý úhel $\sphericalangle A'V'B'$, potom obrazem vrcholu prvého úhlu je vrchol druhého a obrazy ramen prvého jsou ramena druhého.*

DŮKAZ. Je-li $f(V) = V_0$, $f(A) = A_0$, $f(B) = B_0$, takže obrazy polopřímek VA, VB jsou polopřímky V_0A_0, V_0B_0, plyne z definice dutého úhlu, že obrazem $\sphericalangle AVB$ je $\sphericalangle A_0V_0B_0$, takže $\sphericalangle A_0V_0B_0$ a $\sphericalangle A'V'B'$ splynou a naše věta plyne z věty 61.4.

62. POROVNÁVÁNÍ VELIKOSTI DUTÝCH ÚHLŮ. Buďtež dány dva duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$. Je-li

$$|\sphericalangle AVB| = \alpha, \quad |\sphericalangle A'V'B'| = \beta,$$

víme, že $\alpha = \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\cos\alpha = \cos\beta$. Je-li však $\cos\alpha \neq \cos\beta$, pravíme, že α je *menší* než β a že β je *větší* než α a píšeme $\alpha < \beta$ nebo $\beta > \alpha$, jestliže

$$\cos\alpha > \cos\beta \text{ neboli } \cos\beta < \cos\alpha.$$

Pravíme také, že $\sphericalangle AVB$ je menší než $\sphericalangle A'V'B'$, jestliže $\alpha < \beta$, t. j. jestliže velikost $\sphericalangle AVB$ je menší než velikost $\sphericalangle A'V'B'$. Tedy pro duté úhly platí: *menší úhel má větší kosinus, větší úhel má menší kosinus.*

Abychom poznali geometrický smysl nerovností

$$(62.1) \qquad \alpha < \beta,$$

zvolme libovolně polopřímku V_0A_0 a polorovinu ϱ vyťatou přímkou V_0A_0. Podle věty 61.3 lze určit právě jedním způsobem duté úhly

$$(62.2) \qquad \sphericalangle A_0V_0B_0, \ \sphericalangle A_0V_0C_0$$

tak, že

$$|\sphericalangle A_0V_0B_0| = \alpha, \ |\sphericalangle A_0V_0C_0| = \beta$$

a že obě polopřímky V_0B_0, V_0C_0 leží v polorovině ϱ. Duté úhly (62.2) jsou potom navzájem různé a jsou v zákrytu, takže podle věty 57.2 jeden z nich je částí druhého, při čemž ovšem oba úhly (62.2) jsou navzájem různé. Za těchto předpokladů platí:

VĚTA 62.1. *Nerovnost* (62.1) *znamená, že z obou dutých úhlů* (62.2) *první je částí druhého.*

DŮKAZ. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic $\langle V_0; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ s počátkem V_0 tak, aby bylo $A_0 = V_0 + a\boldsymbol{u}_1$, $a > 0$ a aby bod $V_0 + \boldsymbol{u}_2$ ležel v polorovině ϱ. Mimo to předpokládejme, což není na újmu obecnosti, že

$$\overline{V_0B_0} = |B_0 - V_0| = 1, \ \overline{V_0C_0} = |C_0 - V_0| = 1.$$

Potom jest

$$(62.3) \qquad B_0 = V_0 + c_1\boldsymbol{u}_1 + s_1\boldsymbol{u}_2, \ C_0 = V_0 + c_2\boldsymbol{u}_1 + s_2\boldsymbol{u}_2,$$
$$c_1 = \cos\alpha, \ c_2 = \cos\beta,$$

$$(62.4) \qquad s_1 = +\sqrt{1 - c_1^2}, \ s_2 = +\sqrt{1 - c_2^2}.$$

Při tom je $c_1 \neq c_2$ a budiž na př.

$$(62.5) \qquad c_1 > c_2.$$

Podle věty 57.2 stačí dokázati, že bod B_0 leží uvnitř $\sphericalangle A_0V_0C_0$. Podle (62.3) je však

$$B_0 = V_0 + \frac{c_1s_2 - c_2s_1}{s_2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{s_1}{s_2}(C_0 - V_0)$$

a ježto $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, je třeba pouze dokázati, že z (62.5) plyne

$$(62.6) \qquad c_1s_2 > c_2s_1.$$

Ježto $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, je (62.6) podle (62.5) jistě správné tehdy, jestliže jedno z čísel c_1, c_2 je rovné nule nebo jestliže $c_1 > 0$, $c_2 < 0$.

Budiž

$$c_1 > c_2 > 0. \tag{62.7}$$

Podle (62.4) je potom

$$s_2 > s_1 > 0 \tag{62.8}$$

a znásobením nerovností (62.7), (62.8) vyjde (62.6). Zbývá případ, že

$$-c_2 > -c_1 > 0; \tag{62.7'}$$

podle (62.4) je potom

$$s_1 > s_2 > 0 \tag{62.8'}$$

a znásobením nerovností (62.7'), (62.8') vyjde $-c_2s_1 > -c_1s_2$ neboli (62.6).

V souhlase s kapitolou VIII definujeme: Dutý úhel velikosti α se jmenuje

pravý, jestliže $\cos\alpha = 0$,
ostrý, jestliže $\cos\alpha > 0$,
tupý, jestliže $\cos\alpha < 0$;

o dvou dutých úhlech, jejichž velikosti jsou α, β, pravíme, že jsou *výplňkové*, jestliže $\cos\alpha + \cos\beta = 0$. Pojmy pravého, ostrého a tupého úhlu, jakož i pojem výplňkových úhlů jsou tedy pojmy nezávislé na poloze. Dále je patrné, že ke každému dutému úhlu existuje co do velikosti (ne ovšem co do polohy) právě jeden výplňkový úhel. Mimo to dva výplňkové úhly jsou buďto oba úhly pravé nebo je jeden ostrý a druhý tupý. Z předcházejícího je patrné: Všecky pravé úhly mají touž velikost. Úhel ostrý je menší než úhel tupý. Úhel ostrý je menší než pravý a obráceně úhel menší než pravý je ostrý. Úhel tupý je větší než pravý a obráceně úhel větší než pravý je tupý. Úhel ostrý je menší než úhel k němu výplňkový a obráceně úhel menší než úhel k němu výplňkový je ostrý. Úhel tupý je větší než úhel k němu výplňkový a obráceně úhel větší než úhel k němu výplňkový je tupý.

Jsou-li $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVB'$ dva vedlejší úhly a volíme-li body A, B, B' na polopřímkách VA, VB, VB' tak, že $\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VB'} = 1$, existuje patrně taková kartézská soustava souřadnic $\langle V; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$, že

$$A = V + u_1, \ B = V + cu_1 + su_2, \ B' = V - cu_1 - su_2,$$

kde

$$c^2 + s^2 = 1, \ c = \cos\alpha, \ \alpha = |\sphericalangle AVB|.$$

Potom jest $\cos|\sphericalangle AVB'| = -c = -\cos\alpha$. Tedy *vedlejší úhly jsou úhly výplňkové*. Ježto ke dvěma vrcholovým úhlům existuje dutý úhel, který je současně k oběma vedlejší, plyne z toho, že *dva vrcholové úhly mají touž velikost.*

Jsou-li dány dvě různoběžky p, q, určují p, q čtyři úhly (viz článek 57). Je-li $\sphericalangle AVB$ jeden z nich, potom z ostatních tří jsou dva k němu vedlejší a zbývající je k němu vrcholový. Jestliže p a q nejsou navzájem kolmé, máme co do velikosti dva úhly různoběžek p, q, které jsou navzájem výplňkové; jeden z nich je ostrý a druhý tupý. Jestliže však p a q jsou navzájem kolmé, potom každý ze čtyř úhlů různoběžek p, q je úhel pravý. *Velikostí úhlu dvou různoběžek* p, q rozumíme velikost α ostrého nebo pravého úhlu; jsou-li $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$ směry obou různoběžek, jest

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{uv}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}. \tag{62.9}$$

Jsou-li však různoběžky p, q *orientovány*, potom jejich úhlem rozumíme ten $\sphericalangle AVB$, pro který polopřímka VA určuje (ve smyslu článku 28) danou orientaci ji obsahující přímky p a polopřímka VB určuje danou orientaci ji obsahující přímky q. Jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ kladné vzhledem k daným orientacím přímek p, q, potom pro velikost úhlu $\sphericalangle AVB$ orientovaných různoběžek p, q platí

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}. \tag{62.9'}$$

To vše je v souladu s kapitolou VIII (viz články 51 a 52).

63. VELIKOST JEDNODUCHÝCH ÚHLŮ. V článku 60 jsme definovali abstrakcí pojem velikosti dutých úhlů. Týmž způsobem můžeme však definovati obecněji pojem *velikosti jednoduchých úhlů*: Dva jednoduché úhly mají touž velikost, jestliže existuje shodná transformace f roviny, při které obrazem prvého úhlu je úhel druhý.

Dvě různé polopřímky VA, VB se společným počátkem V jsou, jak víme, rameny právě dvou jednoduchých úhlů, které buďto jsou oba přímé nebo je jeden z nich dutý a druhý vypuklý. Takové dva jednoduché úhly se společnými rameny nazveme pro stručnost *úhly spřízněné*. Jestliže afinní (speciálně shodná) transformace f roviny převádí jeden jednoduchý úhel ve druhý, potom f převádí také úhel spřízněný s prvým daným úhlem v úhel spřízněný s druhým. Z toho plyne, že věta 61.5 vyslovená a dokázaná pro dva duté úhly platí rovněž pro dva úhly vypuklé.

Následující věty 63.1 až 63.3 jsou zřejmé.

VĚTA 63.1. *Každé dva přímé úhly mají touž velikost.*

VĚTA 63.2. *Mají-li dva jednoduché úhly touž velikost, jsou buďto oba duté nebo oba přímé nebo oba vypuklé.*

VĚTA 63.3. *Mají-li dva jednoduché úhly vzájemně touž velikost, potom také oba jednoduché úhly spřízněné s prvými mají vzájemně touž velikost.*

Velikosti jednoduchých úhlů budeme značit řeckými písmeny. V článku 61 jsme v oboru dutých úhlů definovali číslo $\cos\alpha$. Rozšířme nyní pojem kosinu na všecky jednoduché úhly takto: *Kosinus přímého úhlu je roven číslu* -1. *Kosinus vypuklého úhlu je roven kosinu s ním spřízněného dutého úhlu.* V článku 50 bylo dokázáno, že v oboru dutých úhlů platí nerovnost $-1 < \cos\alpha < 1$ a je zřejmé, že táž nerovnost platí také v oboru vypuklých úhlů. Tedy pro všecky jednoduché úhly máme nerovnost

$$-1 \leqq \cos\alpha < 1, \tag{63.1}$$

při čemž znamení rovnosti platí pouze pro úhly přímé.

Vedle čísla $\cos\alpha$ zavedeme ještě číslo $\sin\alpha$ takto:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \tag{63.2}$$

se znamením plus pro úhly duté, se znamením minus pro úhly vypuklé; pro přímé úhly je $\cos\alpha = -1$, tedy $\sin\alpha = 0$ a na znamení v (63.2) nezáleží. Poznamenejme, že z (63.2) plyne

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{63.3}$$

Je účelné shrnout obě reálná čísla $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ v jediné komplexní číslo

$$(63.4) \qquad \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha,$$

které nazýváme *komplexní měrou* jednoduchého úhlu.

VĚTA 63.4. *Komplexní míra jednoduchého úhlu je komplexní jednotka různá od čísla* $+1$. To plyne z (63.1) a (63.3).

VĚTA 63.5. *Komplexní míra přímého úhlu je rovna číslu* -1. To je zřejmé.

VĚTA 63.6. *Dva jednoduché úhly mají touž velikost tehdy a jenom tehdy, mají-li touž komplexní míru, neboli, což je totéž, mají-li oba zároveň týž kosinus a týž sinus.*

DŮKAZ. Podle definice máme $\sin\alpha > 0$ pro duté úhly, $\sin\alpha = 0$ pro přímé úhly, $\sin\alpha < 0$ pro vypuklé úhly. Jestliže tedy dva jednoduché úhly mají týž kosinus a mimo to jsou buďto oba duté, nebo oba přímé nebo oba vypuklé, mají také týž sinus. Z toho plyne podle věty 63.2, že můžeme vyšetřovati zvlášť úhly duté, úhly přímé, úhly vypuklé a v každém ze tří případů máme zjistit, že dva úhly uvažovaného druhu mají touž velikost tehdy a jenom tehdy, mají-li týž kosinus. Pro úhly duté to bylo odvozeno již v článku 61. Pro přímé úhly je $\cos\alpha = - 1$, takže žádaný výsledek plyne z věty 63.1. Případ vypuklých úhlů se převede na případ dutých úhlů podle věty 63.3.

VĚTA 63.7. *Každá komplexní jednotka* $j \neq 1$ *je komplexní měrou jednoduchého úhlu.*

DŮKAZ. Budiž $j = c + s\mathrm{i}$, tedy $c^2 + s^2 = 1$. Je-li $s = 0$, je $j = - 1$, tedy j je komplexní míra přímého úhlu (viz větu 63.5). Je-li $s \neq 0$, je $-1 < c < 1$. Zaveďme libovolnou kartézskou soustavu souřadnic a položme $V = [0, 0]$, $A = [1, 0]$, $B = [c, s]$. Snadno se zjistí, že dutý úhel $\sphericalangle\, AVB$ má komplexní míru $c + \mathrm{i}|s|$ a vypuklý úhel s ním spřízněný komplexní míru $c - \mathrm{i}|s|$; jeden z obou má tudíž komplexní míru j.

V článku 62 jsme pro velikosti *dutých úhlů* definovali nerovnost $\alpha < \beta$. Zobecníme nyní definici této nerovnosti na velikosti všech *jednoduchých úhlů* takto: *Každý dutý úhel je menší než úhel přímý; každý vypuklý úhel je větší než úhel přímý; tedy každý dutý úhel je menší než každý vypuklý úhel. Ze dvou vypuklých úhlů je první menší než druhý* *tehdy a jenom tehdy, jestliže dutý úhel spřízněný s prvním je větší než dutý úhel spřízněný s prvým.* Jinak řečeno, nerovnost $\alpha < \beta$ znamená, že nastane jeden z těchto případů:

$$\begin{aligned}&\cos\alpha > \cos\beta,\ \sin\alpha > 0,\ \sin\beta > 0;\\&\sin\alpha > 0,\ \sin\beta = 0;\\&\sin\alpha = 0,\ \sin\beta < 0;\\&\sin\alpha > 0,\ \sin\beta < 0;\\&\cos\alpha < \cos\beta,\ \sin\alpha < 0,\ \sin\beta < 0.\end{aligned}$$

VĚTA 63.8. *Buďtež α, β dvě dané velikosti jednoduchých úhlů. Budiž dán jednoduchý úhel s rameny VA, VB, jehož velikost je β. Potom je $\alpha < \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže existuje vnitřní polopřímka VC daného úhlu tak, že ten jednoduchý úhel s rameny VA, VC, který je částí daného úhlu, má velikost α.*

DŮKAZ. Rozeznávejme tři případy podle toho, zda β je úhel dutý, přímý či vypuklý.

I. Je-li β úhel dutý, plyne naše věta z věty 62.1.

II. Je-li β úhel přímý, jest $\alpha < \beta$ tehdy a jenom tehdy, je-li α úhel dutý, a naše věta plyne z věty 61.3.

III. Je-li β úhel vypuklý, je naše věta zřejmá pro ten případ, že α je úhel dutý nebo přímý. Je-li však také α úhel vypuklý, převede se případ III snadno na případ I zavedením spřízněných úhlů.

VĚTA 63.9. *Buďtež α, β dvě dané velikosti jednoduchých úhlů, při čemž $\alpha < \beta$. Budiž dán jednoduchý úhel s rameny VA, VB, jehož velikost je β. Potom existuje právě jedna vnitřní polopřímka VC daného úhlu tak, že ten jednoduchý úhel s rameny VA, VC, který je částí daného úhlu, má velikost α.*

DŮKAZ. Že existuje *aspoň jedna taková* polopřímka, plyne z věty 63.8. Jsou-li však VC_1, VC_2 dvě různé vnitřní polopřímky daného úhlu, uvažujme to přirozené uspořádání daného úhlu, ve kterém je VA první, a předpokládejme, že v tomto přirozeném uspořádání jde třeba VC_1 před VC_2. Je-li α_1, resp. α_2, velikost toho v daném úhlu obsaženého jednoduchému úhlu, jehož rameny jsou polopřímky VA, VC_1, resp. VA, VC_2, je podle definice přirozeného uspořádání prvý z těchto dvou úhlů částí druhého, takže podle věty 63.8 jest $\alpha_1 < \alpha_2$ a proto nemůže býti zároveň $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha$.

64. SČÍTÁNÍ VELIKOSTI ÚHLŮ. Buďtež α, β, γ tři dané velikosti dutých úhlů. Pravíme, že velikost γ je *součtem* velikostí α, β a píšeme

$$\gamma = \alpha + \beta, \tag{64.1}$$

jestliže existuje jednoduchý úhel s rameny VA, VC, jehož velikost je rovna γ, a jeho vnitřní polopřímka VB tak, že v daném úhlu obsažený jednoduchý úhel s rameny VA, VB, resp. s rameny VB, VC, má velikost α, resp. β. Při daných α, β součet $\alpha + \beta$ nemusí existovat, ale existuje-li, je jednoznačně určen. To by bylo snadné dokázati přímo, ale je zbytečné to přímo dokazovati, neboť je to důsledkem následující věty 64.6.

Je-li α daná velikost jednoduchého úhlu, označíme α^* velikost jednoduchého úhlu spřízněného s úhlem velikosti α. Lehko se nahlédne, že velikost α^* je velikostí α jednoznačně určena a že $(\alpha^*)^* = \alpha$. Zřejmě platí:

VĚTA 64.1. *Buďtež α, β velikosti jednoduchých úhlů. Existuje-li součet $\alpha + \beta$, existuje také součet $\beta + \alpha$ a oba součty jsou si rovny.*

VĚTA 64.2. *Jsou-li α, β velikosti jednoduchých úhlů, existuje součet $\alpha + \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže*

$$\beta < \alpha^*. \tag{64.2}$$

DŮKAZ. I. Platí-li (64.1), existují tři různé polopřímky VA, VB, VC s týmž počátkem V a tři jednoduché úhly tak, že první má ramena VA, VC a velikost γ, druhý má ramena VA, VB a velikost α, třetí má ramena VB, VC a velikost β, a že druhý a třetí z daných úhlů jsou částmi prvého. Podle věty 59.1 druhý a třetí z daných úhlů jsou navzájem styčné, takže třetí je částí jednoduchého úhlu spřízněného s druhým a z toho plyne (64.2) podle věty 63.8.

II. Nechť platí (64.2). Zvolme jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}_1$ s velikostí α a s rameny VA, VB; označme $\boldsymbol{U}_2$ jednoduchý úhel spřízněný s $\boldsymbol{U}_1$, takže $\boldsymbol{U}_2$ má velikost α^*. Ze (64.2) plyne podle věty 63.8, že existuje vnitřní polopřímka VC úhlu $\boldsymbol{U}_2$ tak, že v $\boldsymbol{U}_2$ obsažený jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}_3$ s rameny VB, VC má velikost β. Podle věty 59.1 úhel $\boldsymbol{U}_2$ se skládá z úhlu $\boldsymbol{U}_3$ a z úhlu $\boldsymbol{U}_4$ s rameny VA, VC styčného k $\boldsymbol{U}_3$. Zřejmě oba úhly $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{U}_3$ jsou navzájem styčné a dohromady vyplní úhel $\boldsymbol{U}_5$ spřízněný s $\boldsymbol{U}_4$, takže platí (64.1), znamená-li γ velikost úhlu $\boldsymbol{U}_5$.

VĚTA 64.3. *Buďtež α, β takové velikosti dutých úhlů, že existuje součet $\gamma = \alpha + \beta$. Jestliže*

$$\alpha' \leqq \alpha, \; \beta' \leqq \beta, \tag{64.3}$$

potom existuje také součet $\gamma' = \alpha' + \beta'$. Mimo to jest

$$\gamma' \leqq \gamma \tag{64.4}$$

a v (64.4) *platí znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže v* (64.3) *platí současně na obou místech znamení rovnosti.*

DŮKAZ. I. Ježto existuje součet $\alpha + \beta$, je $\beta < \alpha^*$ podle věty 64.2. Ježto $\alpha' \leqq \alpha$, je zřejmě $\alpha^* \leqq (\alpha')^*$; mimo to $\beta' \leqq \beta$, takže $\beta' < (\alpha')^*$ a z věty 64.2 plyne existence součtu $\alpha' + \beta'$.

II. Podle definice součtu existuje jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}$ s velikostí γ a s rameny VA, VC a uvnitř $\boldsymbol{U}$ polopřímka VB, která podle věty 59.1 rozdělí $\boldsymbol{U}$ na dva styčné úhly $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, z nichž prvý má velikost α a ramena VA, VB, druhý má velikost β a ramena VB, VC. Ježto $\alpha' \leqq \alpha$, existuje podle věty 63.8 v úhlu $\boldsymbol{U}_1$ polopřímka $VA_0 \neq VB$ tak, že v tomto úhlu obsažený jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}_3$ s rameny VA_0, VB má velikost α'; podobně existuje v úhlu $\boldsymbol{U}_2$ polopřímka $VC_0 \neq VB$ tak, že v tomto úhlu obsažený jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}_4$ s rameny VB, VC_0 má velikost β'. Ježto úhly $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ jsou navzájem styčné, ježto úhel $\boldsymbol{U}_3$ je částí úhlu $\boldsymbol{U}_1$ a ježto úhel $\boldsymbol{U}_4$ je částí úhlu $\boldsymbol{U}_2$, jsou také úhly $\boldsymbol{U}_3$, $\boldsymbol{U}_4$ navzájem styčné. V přirozeném uspořádání úhlu $\boldsymbol{U}$, ve kterém polopřímka VA je první, jdou za sebou polopřímky VA_0, VB, VC_0 a proto oba úhly $\boldsymbol{U}_3$, $\boldsymbol{U}_4$ dohromady dávají v $\boldsymbol{U}$ obsažený dutý úhel $\boldsymbol{U}_5$ s rameny VA_0, VC_0, jehož velikost podle definice součtu je rovna $\alpha' + \beta'$. Ježto úhel $\boldsymbol{U}_5$ velikosti $\alpha' + \beta'$ je částí úhlu $\boldsymbol{U}$ velikosti $\alpha + \beta$, platí nerovnost (64.4), při čemž znamení rovnosti platí pouze v případě, že $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}_5$ splynou a to vyžaduje, aby splynuly polopřímky VA, VA_0 a zároveň i polopřímky VB, VB_0, t. j., aby v (64.3) platilo na obou místech znamení rovnosti.

VĚTA 64.4. *Budiž dán kladně orientovaný jednoduchý úhel α s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB. Existuje rotace roviny se středem V, která převádí polopřímku VA v polopřímku VB. Komplexní míra této rotace* (ve smyslu článku 42) *je rovna komplexní míře úhlu α.*

DŮKAZ. Můžeme předpokládati, že $\overline{VA} = \overline{VB} = 1$. Existuje kladná kartézská soustava souřadnic $\langle V; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ s počátkem V tak, že

(64.5) $$A = V + u_1.$$

Položme
$$B = V + x_1u_1 + x_2u_2.$$

Ježto $\overline{VB} = 1$, jest $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Ježto $\overline{VA} = \overline{VB} = 1$, jest $\cos\alpha = (A - V)(B - V) = x_1$ a tedy $\sin\alpha = \pm x_2$. Podle věty 60.2 je však $x_2 > 0$, je-li úhel α dutý; $x_2 < 0$, je-li úhel α vypuklý a pro přímý úhel α je ovšem $x_2 = 0$. Tedy ve všech případech $\sin\alpha = x_2$. Položíme-li
$$c = \cos\alpha, \; s = \sin\alpha,$$
takže $c + is$ je komplexní míra úhlu α, je tudíž

(64.6) $$B = V + cu_1 + su_2.$$

Při uvažované rotaci f je zřejmě $f(V) = V$, $f(A) = B$, takže podle (64.5) a(64.6) snadno odvodíme z věty 42.2, že f převádí bod $[x_1, x_2]$ v bod $[x_1', x_2']$, kde
$$x_1' = cx_1 - sx_2, \; x_2' = sx_1 + cx_2.$$

Z toho však plyne podle článku 42, že rotace f má komplexní míru $c + is$.

Z věty 64.2 plyne snadno:

VĚTA 64.5. *Buďtež α, β dvě velikosti jednoduchých úhlů a buďtež*
$$c_1 + is_1, \; c_2 + is_2$$
příslušné komplexní míry. Součet $\alpha + \beta$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže nastane jeden z těchto tří případů:

(a) $s_1 \geqq 0$, $s_2 \geqq 0$, *ne však současně* $s_1 = s_2 = 0$;

(b) $s_1 > 0$, $s_2 < 0$, $c_2 < c_1$;

(c) $s_1 < 0$, $s_2 > 0$, $c_1 < c_2$.

VĚTA 64.6. *Buďtež α, β dvě velikosti jednoduchých úhlů. Existuje-li součet $\alpha + \beta$, je jeho komplexní míra rovna součinu komplexních měr úhlů α, β.*

DŮKAZ. Podle definice součtu existuje jednoduchý úhel s velikostí $\alpha + \beta$ a s rameny VA, VC a uvnitř něho polopřímka VB, která jej rozkládá na úhel s velikostí α a s rameny VA, VB a na úhel s velikostí β a s rameny VB, VC. Můžeme předpokládati, že u prvého úhlu je kladná ta orientace, při které je VA počátečním ramenem. Podle věty 60.3 je potom u druhého úhlu kladná ta orientace, při které je VA počátečním ramenem, u třetího pak ta, při které je VB počátečním ramenem. Podle věty 64.4 je komplexní míra úhlu α rovna komplexní míře rotace f_1 převádějící polopřímku VA v polopřímku VB, komplexní míra úhlu β je rovna komplexní míře rotace f_2 převádějící polopřímku VB v polopřímku VC a komplexní míra úhlu $\alpha + \beta$ je rovna komplexní míře rotace $f_1 \circ f_2$. Naše věta plyne nyní z věty 42.5.

Poznamenejme, že věta 64.6 je vyjádřena komplexní formulí

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i} \sin(\alpha + \beta) &= \\ = (\cos\alpha + \mathrm{i} \sin\alpha) \,.\, (\cos\beta + \mathrm{i} \sin\beta) \end{aligned} \tag{64.7}$$

ekvivalentní se dvěma reálnými formulemi

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \tag{64.8}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta. \tag{64.9}$$

65. NÁSOBENÍ A DĚLENÍ ÚHLŮ. Dosud jsme mluvili pouze o součtu *dvou* jednoduchých úhlů. Součet více než dvou jednoduchých úhlů definujeme rekurentní formulí

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k+1} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) + \alpha_{k+1}, \tag{65.1}$$

kterou jest chápati tak, že levá strana má význam tehdy a jenom tehdy, má-li význam strana pravá. Připomeneme-li si definici součtu se dvěma sčítanci, vidíme snadno, že platí:

VĚTA 65.1. *Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dané velikosti jednoduchých úhlů, potom součet $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže existuje orientovaný jednoduchý úhel φ s počátečním ramenem VA_0 a s koncovým ramenem VA_k a uvnitř něho polopřímky $VA_1, \ldots, VA_{k-1}$ tak, že předně v přirozeném uspořádání úhlu φ příslušném dané jeho orientaci jdou za sebou polopřímky*

$$VA_0, VA_1, \ldots, VA_{k-1}, VA_k$$

a že za druhé pro $1 \leqq r \leqq k$ ve φ obsažený jednoduchý úhel s rameny VA_{r-1}, VA_r má velikost α_r. Je-li tomu tak, je velikost úhlu φ rovna součtu $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$.

Z věty 65.1 je patrné, že existuje-li součet $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$, potom pro $1 \leqq r < s \leqq k$ existuje také součet $\alpha_r + \dots + \alpha_s$. Dále je patrné, že *platí obecný asociativní zákon*, který praví, že existuje-li součet $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ a rozdělíme-li sčítance na skupiny

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1};\ \alpha_{n_1+1} + 1, \dots, \alpha_{n_2};\ \alpha_{n_2+1}, \dots, \alpha_{n_3}; \dots,$$

při čemž některá skupina může obsahovati jen jednoho sčítance, potom existují součty

$$\beta_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n_1},$$
$$\beta_2 = \alpha_{n_1+1} + \dots + \alpha_{n_2}; \dots,$$

při čemž $\beta_1 = \alpha_1$ pro $n_1 = 1$, $\beta_2 = \alpha_{n_2}$ pro $n_1 + 1 = n_2$ atd., mimo to existuje součet $\beta_1 + \beta_2 + \dots$, který je roven součtu $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$

Indukcí se dá dokázati, že platí *obecný komutativní zákon*, který praví, že existence a hodnota součtu $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ jsou nezávislé na pořadí sčítanců. Posléze lze dokázati, že existuje-li součet $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ a je-li

(65.2) $$\alpha_1' \leqq \alpha_1, \dots, \alpha_k' \leqq \alpha_k,$$

existuje také součet $\alpha_1' + \dots + \alpha_k'$ a jest

(65.3) $$\alpha_1' + \dots + \alpha_k' \leqq \alpha_1 + \dots + \alpha_k,$$

při čemž znamení rovnosti v (65.3) platí tehdy a jenom tehdy, platí-li ve všech k vztazích (65.2) současně.

Z věty 64.6 plyne, že existuje-li součet $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ a jsou-li $j_1, \dots, j_k$ komplexní míry sčítanců, potom komplexní míra součtu $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ je rovna součinu $j_1 \dots j_k$. Z věty 64.5 lze odvodit podmínky pro $j_1, \dots, j_k$ vyjadřující existenci součtu $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

Je-li α daná velikost dutého úhlu, potom pro $k = 2, 3, \dots$ symbol $k\alpha$ znamená součet k sčítanců vesměs rovných α, pokud tento součet má význam; mimo to $1 . \alpha = \alpha$. Je patrné, že jestliže při určitém k má význam $k\alpha$, potom pro $1 \leqq h < k$ má též význam $h\alpha$ a jest $h\alpha < k\alpha$.

Jestliže při daných α, k existuje $k\alpha$, potom pro každé $\beta < \alpha$ existuje $k\beta$ a jest $k\beta < k\alpha$. Z toho plyne, že při daném $k = 2, 3, \dots$, je-li α daná velikost jednoduchého úhlu, existuje *nejvýš jedna* velikost φ jednoduchého úhlu tak, že $k\varphi = \alpha$. Existuje-li φ, položíme

$$(65.4) \qquad \varphi = \frac{1}{k}\,\alpha.$$

Teprve ve druhém svazku dokážeme, že pro každé α a pro každé $k \geqq 2$ existuje (65.4). Důležitý případ $k = 2$ probereme však již nyní.

Budiž φ daná velikost jednoduchého úhlu. Dokážeme, že 2φ existuje tehdy a jenom tehdy, je-li φ úhel dutý. Za tím účelem položme

$$c = \cos\varphi, \quad s = \sin\varphi,$$

takže

$$j = c + is$$

je komplexní míra úhlu φ. Podle věty 64.5 existuje 2φ tehdy a jenom tehdy, je-li $s > 0$, t. j. je-li φ úhel dutý. Je-li tomu tak, potom podle věty 64.6 komplexní míra úhlu 2φ je rovna

$$j^2 = (c + is)^2 = (c^2 - s^2) + 2ics$$

neboli: *Pro každý dutý úhel φ jest:*

$$(65.5) \qquad \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi.$$

Je-li nyní α libovolná velikost jednoduchého úhlu, jest $-1 \leqq \cos\alpha < < 1$ podle (63.1), takže existují reálná čísla

$$(65.6) \qquad a = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, \qquad b = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

Jest $a \geqq 0$; $b > 0$, $a^2 + b^2 = 1$. Definujme znamení $\varepsilon = \pm 1$ takto: je-li α úhel dutý, jest $\varepsilon = 1$, je-li α úhel vypuklý, jest $\varepsilon = -1$, je-li α úhel přímý, nezáleží na znamení ε. V každém případě je potom $\sin\alpha = = \varepsilon\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$. Ježto $b > 0$, $a^2 + b^2 = 1$, existuje dutý úhel φ, pro který $\cos\varphi = \varepsilon a$, $\sin\varphi = b$. Podle (65.5) a (65.6) je však $\cos 2\varphi = \cos\alpha$, $\sin 2\varphi = \varepsilon\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sin\alpha$ neboli $2\varphi = \alpha$, t. j. $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$. Tedy pro každý jednoduchý úhel α existuje dutý úhel $\frac{1}{2}\alpha$ a jest

$$(65.7) \qquad \cos \tfrac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, \; \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}},$$

při čemž v prvém vzorci (65.7) platí znamení plus, je-li α úhel dutý, znamení minus, je-li α úhel vypuklý; je-li α úhel přímý, je $\cos\frac{1}{2}\alpha = 0$ a na znamení nezáleží.

66. ÚHLY V KRUŽNICI. Předpokládejme, že rovina E_2 jest *orientována* a zaveďme v ní *kladnou* kartézskou soustavu souřadnic. Je-li $X = [x_1, x_2]$ libovolný bod, položíme $z = x_1 + ix_2$ a píšeme $X = [z]$, t. j. místo dvou reálných souřadnic x_1, x_2 bodu X budeme užívat jediné *komplexní souřadnice* $x_1 + ix_2$. Je-li $z = x_1 + ix_2$ libovolné komplexní číslo, označíme z^* *komplexně sdružené číslo* $z^* = x_1 - ix_2$.

Budiž dána kružnice se středem S a poloměrem r. Budiž $S = [s]$, kde s je tedy komplexní číslo. Daná kružnice se skládá ze všech těch bodů $[z]$, pro něž $|z - s| = r$ neboli

$$(z - s)(z^* - s^*) = r^2. \tag{66.1}$$

Rovnici (66.1) můžeme napsati ve tvaru

$$zz^* + az + a^*z^* + b = 0, \tag{66.2}$$

kde $a = -s^*$ je komplexní číslo, $a^* = -s$ je číslo komplexně sdružené s a a $b = ss^* - r^2$ je reálné číslo. Obráceně budiž dána rovnice tvaru (66.2), ve které a je komplexní číslo, a^* je číslo komplexně sdružené, b je reálné číslo. Označíme-li s komplexní číslo

$$s = -a^*, \tag{66.3}$$

lze rovnici (66.2) uvésti na tvar

$$(z - s)(z^* - s^*) = D \tag{66.4}$$

neboli

$$|z - s|^2 = D, \tag{66.4'}$$

kde reálné číslo

$$D = ss^* - b = aa^* - b = |a|^2 - b \tag{66.5}$$

je t. zv. *diskriminant* rovnice (66.2). Je-li $D < 0$, je zřejmé ze tvaru (66.4′), že rovnici (66.2) nevyhovuje *žádný* bod $[z]$; je-li $D = 0$, potom rovnici (66.2) vyhovuje *jediný* bod $[z] = [s] = [-a^*]$. Je-li však $D > 0$, potom porovnání (66.1) a (66.4) ukazuje, že bod $[z]$ vyhovuje rovnici (66.2) tehdy a jenom tehdy, leží-li na kružnici, jejíž střed je v bodě $[s] = [-a^*]$ a jejíž poloměr je $\sqrt{D}$; pravíme stručně, že (66.2) je *rovnice kružnice*. Tedy *rovnice tvaru* (66.2) *je rovnicí kružnice tehdy a jenom tehdy, má-li kladný diskriminant.* Z předcházející diskuse je patrné, že jestliže známe dvě různá komplexní čísla z_1, z_2, která obě splňují rovnici (66.2), jest jistě $D > 0$, t. j. (66.2) v tomto případě je jistě rovnice kružnice.

VĚTA 66.1. *Dvě různé kružnice k_1, k_2 nemohou míti více než dva společné body*. To je zřejmé, mají-li k_1, k_2 obě týž střed. Jsou-li však středy S_1, S_2 kružnice k_1, k_2 různé, buďtež

$$
\begin{aligned}
&zz^* + a_1 z + a_1^* z^* + b_1 = 0,\\
&zz^* + a_2 z + a_2^* z^* + b_2 = 0
\end{aligned}
\tag{66.7}
$$

rovnice obou kružnic, takže a_1, a_2 jsou komplexní čísla, b_1, b_2 jsou reálná čísla. Bod $[z]$, který je společný oběma kružnicím k_1, k_2, splňuje obě rovnice (66.7) a tudíž splňuje také rovnici

$$(a_1 - a_2)\, z + (a_1^* - a_2^*)\, z^* + b_1 - b_2 = 0. \tag{66.8}$$

Obráceně je patrné, že každý bod kružnice k_1, který splňuje rovnici (66.8), leží také na kružnici k_2. Položíme-li však

$$a_1 = x_1 + y_1 \mathrm{i},\ a_2 = x_2 + y_2 \mathrm{i},\ z = x + y\mathrm{i},$$

nabude rovnice (66.8) tvaru

$$2(x_1 - x_2)\, x - 2(y_1 - y_2)\, y + b_1 - b_2 = 0. \tag{66.8'}$$

Podle (66.3) a (66.7) jest $S_1 = [- x_1 + y_1 \mathrm{i}]$, $S_2 = [- x_2 + y_2 \mathrm{i}]$. Ježto $S_1 \neq S_2$, je tedy (66.8′) rovnice přímky p a průsečíky kružnic k_1, k_2 tudíž splynou s průsečíky přímky p s kružnicí k_1, jsou tedy nejvýš dva.

V následujícím označíme $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ dutý úhel $\sphericalangle PZQ$ orientovaný tak, že polopřímka ZP je počátečním ramenem. Je-li $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ *kladně orientován*, nazveme *jeho komplexní měrou* komplexní míru neorientovaného dutého úhlu $\sphericalangle PZQ$. Je-li však $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ záporně orientován, nazveme jeho komplexní měrou komplexní míru neorientovaného vypuklého úhlu spřízněného s dutým úhlem $\sphericalangle PZQ$ neboli číslo komplexně sdružené s komplexní měrou neorientovaného $\sphericalangle PZQ$. Potom platí:

VĚTA 66.2. *Je-li $Z = [z]$, $P = [z_1]$, $Q = [z_2]$ a není-li číslo*

$$s = (z_1^* - z^*)(z_2 - z)$$

reálné, potom body Z, P, Q neleží na přímce a komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je rovna $s : |s|$.

Důkaz. Z věty 64.4 plyne snadno, že komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je rovna komplexní míře rotace f roviny o středu Z, která převádí polopřímku ZP v polopřímku ZQ. Je-li ε tato komplexní míra, potom se snadno dokáže [viz (42.16′)], že f převádí bod $[\zeta]$ v bod $[\zeta']$, kde

$$\zeta' - z = \varepsilon(\zeta - z).$$

Ježto f převádí bod P v některý bod polopřímky ZQ, odvodí se snadno, že existuje číslo $k > 0$ tak, že transformace φ, která převede bod $[\zeta]$ v bod $[\zeta'']$, kde

$$\zeta'' - z = k\varepsilon(\zeta - z),$$

převede bod $P = [z_1]$ v bod $Q = [z_2]$. Je tedy $z_2 - z = k\varepsilon(z_1 - z)$ a tudíž

$$s = k\varepsilon(z_1 - z)(z_1^* - z^*) = k\varepsilon|z_1 - z|^2;$$

ježto $k > 0$, $|\varepsilon| = 1$, je $s : |s| = \varepsilon$.

Věta 66.3. *Buďtež P, Q dva různé body v rovině $\mathbf{E}_2$. Budiž ε komplexní jednotka; $\varepsilon \neq 1$, $\varepsilon \neq -1$. Potom existuje kružnice k, která se skládá z obou bodů P, Q, dále ze všech bodů Z, pro které $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ má komplexní míru rovnou ε nebo $-\varepsilon$.*

Důkaz. Budiž $P = [z_1]$, $Q = [z_2]$. Vyjděme od rovnice

$$\varepsilon(z_1 - z)(z_1^* - z^*) = \varepsilon^*(z_1^* - z^*)(z_2 - z). \tag{66.9}$$

Ježto $|\varepsilon| = 1$, $\varepsilon \neq 1$, $\varepsilon \neq -1$, číslo ε není reálné, takže $\varepsilon \neq \varepsilon^*$ a rovnici (66.9) lze uvésti na tvar (66.2). Ježto rovnici (66.9) je vyhověno i pro $z = z_1$ i pro $z = z_2$ a ježto $z_1 \neq z_2$, jest (66.9) rovnice kružnice k, která obsahuje oba body P, Q. Bod $Z = [z]$ různý od P i od Q leží na kružnici k tehdy a jenom tehdy, jestliže komplexní číslo

$$\varepsilon^*(z_1^* - z^*)(z_2 - z) \tag{66.10}$$

je rovné číslu komplexně sdruženému, t. j., jestliže číslo (66.10) je rovné reálnému číslu a; ježto $z \neq z_1$, $z \neq z_2$, jest ovšem $a \neq 0$. Ježto ε je komplexní jednotka, jest $\varepsilon\varepsilon^* = 1$ a podmínka

$$\varepsilon^*(z_1^* - z^*)(z_2 - z) = a$$

se dá psáti ve tvaru

$$(66.11) \qquad (z_1^* - z^*)(z_2 - z) = a\varepsilon.$$

Ježto číslo $a \neq 0$ je reálné a ježto $|\varepsilon| = 1$, plyne z (66.11) podle věty 66.2, že komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je rovna ε pro $a > 0$, rovna $-\varepsilon$ pro $a < 0$. Tím je vše dokázáno.

VĚTA 66.4. *Třemi různými body P, Q, R, které neleží na přímce, prochází právě jedna kružnice.*

DŮKAZ. Podmínka, aby body P, Q, R neležely na přímce, byla nutná, ježto přímka a kružnice mají nejvýš dva společné body. Podle věty 66.1 stačí dokázati, že existuje *aspoň jedna* kružnice obsahující body P, Q, R. To však plyne z věty 66.3, je-li ε komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PRQ}$.

VĚTA 66.5. *Budiž c oblouk kružnice k s krajními body P, Q. Potom velikost orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je táž pro všechny vnitřní body Z oblouku c a obráceně každý bod $Z \neq P$, $Z \neq Q$, pro který $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ má tuto velikost, je vnitřním bodem oblouku c.*

DŮKAZ. Budiž Z_0 libovolně zvolený bod vnitřní bod oblouku c a budiž ε komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZ_0Q}$. Podle věty 66.4 existuje právě jedna kružnice k obsahující všechny tři body P, Q, Z_0 a oblouk c skládající se z těch bodů kružnice k, které leží v té polorovině vyťaté přímkou PQ, která obsahuje bod Z_0. Je-li Z libovolný bod roviny $\mathbf{E}_2$, který neleží na přímce PQ, potom podle věty 66.3 komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je rovna $\pm\varepsilon$ tehdy a jenom tehdy, jestliže bod Z leží na kružnici k. Je-li $Z = [z]$, $P = [z_1]$, $Q = [z_2]$ a je-li η komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZO}$, potom podle věty 66.2 existuje kladné číslo a tak, že

$$(z_1^* - z^*)(z_2 - z) = a\eta;$$

při tom podle věty 66.3 je $\eta = \pm\varepsilon$ tehdy a jenom tehdy, jestliže bod Z leží na kružnici k. Avšak snadno se odvodí, že ve vztahu $\eta = \pm\varepsilon$ platí znamení plus tehdy a jenom tehdy, jestliže $[P - Z, Q - Z]$ má totéž znamení jako $[P - Z_0, Q - Z_0]$; ježto však $Q - Z = (Q - P) + (P - Z)$, jest $[P - Z, Q - Z] = [P - Z, Q - P]$, takže $\eta =$

$= + \varepsilon$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $[P - Z, Q - P]$ má totéž znamení jako $[P - Z_0, Q - P]$ neboli jestliže oba body $[z]$, $[z_0]$ jsou v téže polorovině vyťaté přímkou P, Q, t. j., jestliže Z patří do oblouku c.

67. DYADICKÉ ÚHLY. K početnímu vyjádření velikosti α dutého úhlu jsme v článku 61 užili čísla $\cos\alpha$, podrobeného podmínce $-1 < \cos\alpha < 1$. Algebraicky se jeví $\cos\alpha$ jako nejjednodušší možné početní vyjádření velikostí dutého úhlu, ježto platí jednoduchý vzorec

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}.$$

Také porovnání velikostí dutých úhlů pomocí kosinu je snadné; víme z článku 62, že pro dvě velikosti α, β dutých úhlů platí $\alpha < \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\cos\alpha > \cos\beta$. Všimněme si sčítání velikosti dutých úhlů pomocí kosinu. V článku 64 jsme pro libovolné dva duté úhly α, β definovali součet $\alpha + \beta$, který je jednoduchým úhlem; nyní se však omezíme pouze na duté úhly a součet $\alpha + \beta$ budeme považovat za definovaný pouze pro ten případ, že $\alpha + \beta$ je dutý úhel. Znamená-li však α' úhel výplňkový k dutému úhlu α, plyne z definice, že $\alpha + \alpha'$ je přímý úhel. Z věty 64.3 tedy plyne, že v *oboru dutých úhlů součet $\alpha + \beta$ existuje tehdy a jenom tehdy, je-li $\beta < \alpha'$, kde α' je úhel výplňkový k úhlu α.* Ježto $\cos\alpha' = -\cos\alpha$, můžeme podmínku pro existenci součtu $\alpha + \beta$ pomocí kosinu vyjádřit v jednoduchém tvaru

$$\cos\alpha + \cos\beta > 0.$$

Avšak číslo $\cos(\alpha + \beta)$ je dáno poměrně složitým vzorcem (viz 64.8)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2\beta}.$$

Při sčítání velikostí více než dvou úhlů bylo by vyjadřování pomocí kosinu velmi nepohodlné.

Mnohem jednodušší je v otázkách sčítání velikostí úhlů užívati komplexní míry definované vzorcem

$$\varepsilon = \cos\alpha + i \sin\alpha,$$

kde $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} > 0$. Jsou-li α, β dvě velikosti dutých úhlů a jsou-li ε_1, ε_2 příslušné komplexní míry, plyne z věty 64.6, že v oboru dutých úhlů součet $\alpha + \beta$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže jest Im. $(\varepsilon_1\varepsilon_2) > 0$ a že je-li tato podmínka splněna, potom komplexní míra součtu $\alpha + \beta$ je rovna součinu $\varepsilon_1\varepsilon_2$ komplexních měr sčítanců. Užíváme-li komplexní míry, nabudou podmínky pro existenci součtu a výraz pro komplexní míru součtu jednoduchého tvaru. Jsou-li $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ komplexní míry sčítanců, existuje v oboru dutých úhlů součet tehdy a jenom tehdy, jestliže všecky komplexní jednotky

$$\varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k$$

mají imaginární část kladnou a je-li tato podmínka splněna, potom komplexní míra součtu je součin $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k$. Zejména: je-li α velikost dutého úhlu a je-li ε příslušná komplexní míra, potom pro $k = 2, 3, \ldots$ existuje $k \,.\, \alpha$ tehdy a jenom tehdy, jestliže všecky mocniny

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^k$$

mají kladnou imaginární část a je-li tato podmínka splněna, potom $k\alpha$ má komplexní míru ε^k.

Komplexní míra má tu vlastnost, že sčítání velikostí dutého úhlu odpovídá násobení komplexní míry. V elementární geometrii se místo komplexní míry užívá pro vyjádření velikosti úhlu reálného čísla, které nazveme *aditivní měrou*, protože sčítání velikosti dutého úhlu odpovídá sčítání aditivní míry. K přesnému vybudování pojmu aditivní míry je třeba hlubších vlastností pojmu reálného čísla než v jiné zde probírané látce; proto jsme odložili aditivní míru až na konec svazku.

Položme

$$\varepsilon_1 = i \tag{67.1}$$

a pro $n \geqq 1$

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1 + \varepsilon_n}{|1 + \varepsilon_n|}. \tag{67.2}$$

Pro $n = 1$ jest Im. $\varepsilon_1 = 1$, tedy Im. $\varepsilon_n > 0$. Je-li Im. $\varepsilon_n > 0$ při určitém n, jest $1 + \varepsilon_n \neq 0$, takže číslo ε_{n+1} je jednoznačně definováno a jest Im. $\varepsilon_{n+1} > 0$. Z toho plyne, že čísla ε_n jsou jednoznačně definována pro všecka $n \geqq 1$ tak, že

$$\text{Im. } \varepsilon_n > 0. \tag{67.3}$$

Ze (66.2) plyne snadno, že

$$\varepsilon_{n+1}^2 = \varepsilon_n, \tag{67.4}$$

takže podle (67.1) všecka čísla ε_n jsou komplexní jednotky. Podle (67.3) je každé ε_n komplexní měrou určité velikosti dutého úhlu, kterou označíme R_n. Podle (67.1) R_1 znamená úhel pravý; podle (67.4) je

$$R_{n+1} = \tfrac{1}{2}R_n. \tag{67.5}$$

Z (67.1) plyne, že pro $n = 1$ jest

$$\varepsilon_n^{2^n} = -1; \tag{67.6}$$

platí-li však (67.6) při určitém n, plyne ze (67.4), že obdobný vzorec platí také pro $n + 1$; tedy (67.6) platí pro každé $n \geqq 1$.

Všimněme si nyní při určitém $n \geqq 1$ komplexních jednotek

$$1 = \varepsilon_n^0, \varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \ldots, \varepsilon_n^{2^n} = -1. \tag{67.7}$$

První a poslední z komplexních jednotek (67.7) mají imaginární část rovnu nule; o ostatních dokážeme, že mají imaginární část kladnou. Pro $n = 1$ je správnost učiněného tvrzení podle (67.1) zřejmá. Předpokládejme tedy, že při určitém n už víme, že

$$\text{Im. } \varepsilon_n^r > 0 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq 2^n - 1. \tag{67.8}$$

Máme dokázati, že

$$\text{Im. } \varepsilon_{n+1}^s > 0 \text{ pro } 1 \leqq s \leqq 2^{n+1} - 1, \tag{67.9}$$

ale pro $s = 1$ je nám to známo, takže můžeme předpokládati, že $s \geqq 2$. Je-li nejprve číslo s sudé, jest $s = 2r$, kde $1 \leqq r \leqq 2^n - 1$, takže (67.9) plyne ze (67.4) a (67.8). Je-li za druhé číslo s liché, jest $s = 2r + 1$, kde $1 \leqq r \leqq 2^n - 1$, takže platí (67.8). Podle (67.4) jest

$$\varepsilon_{n+1}^s = \varepsilon_n^r \cdot \varepsilon_{n+1};$$

avšak podle (67.2) existuje reálné kladné číslo a tak, že $\varepsilon_{n+1} = a(1 + \varepsilon_n)$, tedy

$$\varepsilon_{n+1}^s = a(\varepsilon_n^r + \varepsilon_n^{r+1});$$

při tom je

$$\text{Im. } \varepsilon_n^r > 0, \text{ Im. } \varepsilon_n^{r+1} \geqq 0,$$

takže opět platí (67.9).

Z právě dokázaného výsledku plyne, že dutý úhel $k \,.\, R_n$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže $1 \leqq k \leqq 2^n - 1$. Dutý úhel α tvaru

$$\alpha = k \,.\, R_n, \; 1 \leqq k \leqq 2^n - 1,$$

nazveme *dyadickým úhlem řádu n*. Tento pojem se tedy týká pouze velikosti dutého úhlu, t. j. nezávislý na poloze. Z (67.5) plyne, že každý dyadický úhel řádu n je zároveň dyadickým úhlem řádu $n+1$. Tedy pro $n_1 < n_2$ každý dyadický úhel řádu n_1 je zároveň dyadickým úhlem řádu n_2. Pravíme prostě, že α je *dyadický úhel*, existuje-li takové $n \geqq 1$, že α je dyadický úhel řádu n. Je patrné, že jsou-li α, β dva dyadické úhly, existuje takové $n \geqq 1$, že α, β jsou oba dyadickými úhly řádu n, z čehož plyne dále, že jsou-li α, β dva dyadické úhly a existuje-li dutý úhel $\alpha + \beta$, je také $\alpha + \beta$ dyadický úhel.

Pro $n \geqq 1$ nazveme *dyadickým zlomkem řádu n* každé racionální číslo tvaru

$$\frac{k}{2^n}, \; k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1.$$

Je-li $n_1 < n_2$, je každý dyadický zlomek řádu n_1 zároveň dyadickým zlomkem řádu n_2. Racionální číslo c nazveme prostě *dyadickým zlomkem*, existuje-li takové $n \geqq 1$, že c je dyadický zlomek řádu n. Pro každý dyadický zlomek c platí $0 < c < 1$. Jsou-li c', c'' dva dyadické zlomky, existuje takové $n \geqq 1$, že c', c'' jsou oba dyadickými zlomky řádu n; je-li tomu tak, a je-li $c' + c'' < 1$, je také $c' + c''$ dyadický zlomek řádu n.

Je-li nyní

(67.10) $$\alpha = k \,.\, R_n, \; 1 \leqq k \leqq 2^n - 1$$

dyadický úhel, nazveme jeho aditivní měrou číslo

(67.11) $$\frac{k}{2^n}.$$

Platí-li (67.10), potom podle (67.5) je zároveň $\alpha = 2k \,.\, R_{n+1}$; ježto však

$$\frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n},$$

je patrné, že additivní míra dyadického úhlu jest jednoznačně určena. Aditivní míra každého dyadického úhlu je dyadický zlomek; obráceně, je-li c libovolný dyadický zlomek, existuje a je co do velikosti jednoznačně určen dyadický úhel α, jehož aditivní míra je rovna c.

Jsou-li α, β dva dyadické úhly a jsou-li c', c'' jejich aditivní míry, je z předcházejícího patrné, že dutý úhel $\alpha + \beta$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže $c' + c'' < 1$; je-li tomu tak, je také $\alpha + \beta$ dyadický úhel a jeho aditivní míra je rovna $c' + c''$, t. j. je rovna součtu aditivních měr dyadických úhlů α, β. Také je patrné, že jsou-li α, β dva dyadické úhly, jest $\alpha < \beta$ tehdy a jenom tehdy, je-li $c' < c''$, t. j. je-li aditivní míra úhlu α menší než aditivní míra úhlu β.

68. ADITIVNÍ MÍRA DUTÝCH ÚHLŮ. V tomto článku podržíme všecky předpoklady a označení z předcházejícího článku. Ježto R_1 je úhel pravý, je $R_2 = \frac{1}{2}R_1$ úhel ostrý, takže $\cos R_2 > 0$. Položme

$$a = 1 + \cos R_2, \text{ takže } a > 1.$$

Podle (67.5) je $R_{n+1} \leqq R_2$ pro $n \geqq 1$, tedy $\cos R_{n+1} \geqq \cos R_2$, takže

$$|1 + \varepsilon_{n+1}| \geqq \text{Re.}\,(1 + \varepsilon_{n+1}) = 1 + \cos R_{n+1} \geqq a > 1.$$

Podle (67.4) jest

$$1 - \varepsilon_{n+1}^2 = (1 - \varepsilon_{n+1})(1 + \varepsilon_{n+1}) = 1 - \varepsilon_n \quad ,$$

neboli

$$1 - \varepsilon_{n+1} = \frac{1 - \varepsilon_n}{1 + \varepsilon_{n+1}},$$

takže

$$|1 - \varepsilon_{n+1}| \leqq \frac{|1 - \varepsilon_n|}{a}. \tag{68.1}$$

Ježto $\varepsilon_1 = \mathrm{i}$, jest $|1 - \varepsilon_1| = \sqrt{2}$, takže z (68.1) plyne, že pro $n \leqq 1$ jest

$$|1 - \varepsilon_n| \leqq \frac{a\sqrt{2}}{a^n}.$$

Ježto $a > 1$, jest

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1, \tag{68.2}$$

takže $\lim\limits_{n\to\infty} \text{Re.}\,\varepsilon_n = 1$ neboli

$$\lim_{n\to\infty} \cos R_n = 1. \tag{68.3}$$

Ježto ε_n je komplexní jednotka, je $|\varepsilon_n|^2 = \varepsilon_n \, . \, \varepsilon_n^* = 1$, takže podle (67.6) je $\varepsilon_n^* = -\varepsilon_n^{2^n-1}$, tedy

$$\cos(2^n - 1)\, R_n = -\cos R_n, \tag{68.4}$$

t. j. R_n a $(2^n - 1)\, R_n$ jsou výplňkové úhly.

Budiž nyní α libovolný dutý úhel. Jest $-1 < \cos\alpha < 1$, takže podle (68.3) a (68.4) existuje index $\nu(\alpha)$ tak, že pro všecka $n \geqq \nu(\alpha)$ jest

$$\cos R_n > \cos\alpha > \cos(2^n - 1)\, R_n$$

neboli

$$R_n < \alpha < (2^n - 1)\, R_n.$$

Z toho plyne, že pro všecka $n \geqq \nu(\alpha)$ existuje a je jednoznačně určeno celé číslo $k_n(\alpha)$ tak, že

$$1 \leqq k_n(\alpha) < 2^n - 1, \tag{68.5}$$

$$\alpha = k_n(\alpha) \, . \, R_n + \alpha_n, \tag{68.6}$$

kde

$$0 \leqq \alpha_n < R_n. \tag{68.7}$$

Je-li $\alpha_n = 0$, potom (68.6) znamená, že $\alpha = k_n(\alpha) \, . \, R_n$; je-li $\alpha_n > 0$, je α_n dutý úhel splňující (68.7). Vedle (68.6) a (68.7) máme ovšem také

$$\alpha = k_{n+1}(\alpha) \, . \, R_{n+1} + \alpha_{n+1}, \tag{68.6'}$$

$$0 \leqq \alpha_{n+1} < R_{n+1}. \tag{68.7'}$$

Podle (68.6), (68.7) a (67.5) je však

$$\alpha = 2k_n(\alpha) \, . \, R_{n+1} + \alpha_n, \tag{68.8}$$

$$0 \leqq \alpha_n < 2R_{n+1}. \tag{68.9}$$

Podle (68.9) jsou dvě možnosti. Předně může býti

$$0 \leqq \alpha_n < R_{n+1}$$

v tomto případě budiž $\delta_n(\alpha) = 0$, $\alpha_n' = \alpha_n$ a je tedy

$$\alpha = [2k_n(\alpha) + \delta_n(\alpha)] \, . \, R_{n+1} + \alpha_n', \tag{68.8'}$$

$$0 \leqq \alpha_n' < R_{n+1}; \tag{68.9'}$$

za druhé může býti

$$R_{n+1} \leqq \alpha_n < 2R_{n+1},$$

takže lze položiti

$$\alpha_n = \alpha_n' + R_{n+1},$$

kde opět platí (68.9'); je-li $\delta_n(\alpha) = 1$, platí také (68.8'). Jestliže (68.8') a (68.9') porovnáme s (68.6') a (68.7'), dostaneme

$$k_{n+1}(\alpha) = 2k_n(\alpha) + \delta_n(\alpha), \tag{68.10}$$

při čemž

$$\text{buďto } \delta_n(\alpha) = 0 \text{ nebo } \delta_n(\alpha) = 1. \tag{68.10'}$$

Podle (68.10) a (68.10') je pro všecka $n \geqq \nu(\alpha)$

$$0 \leqq \frac{k_{n+1}(\alpha)}{2^{n+1}} - \frac{k_n(\alpha)}{2^n} \leqq \frac{1}{2^{n+1}};$$

tedy pro každé $n \geqq \nu(\alpha)$ a pro všecka $p = 1, 2, 3, \ldots$ jest

$$0 \leqq \frac{k_{n+p}(\alpha)}{2^{n+p}} - \frac{k_n(\alpha)}{2^n} \leqq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n},$$

z čehož plyne, že existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(\alpha)}{2^n} = c(\alpha), \tag{68.11}$$

při čemž

$$\frac{k_n(\alpha)}{2^n} \leqq c(\alpha) \leqq \frac{k_n(\alpha) + 1}{2^n}, \tag{68.11'}$$

takže podle (68.5) jest

$$0 < c(\alpha) < 1. \tag{68.12}$$

Všimněme si toho zvláštního případu, že α je dyadický úhel. V tomto případě existuje index μ tak, že α je dyadický úhel řádu μ; potom je

$$\alpha = kR_\mu, \quad 1 \leqq k \leqq 2^n - 1$$

a pro $n > \mu$ je

$$\alpha = 2^{n-\mu}k \,.\, R_n.$$

takže pro $n \geqq \mu$ je

$$\frac{k_n(\alpha)}{2^n} = \frac{k}{2^\mu},$$

tedy podle (68.11) $c(\alpha) = \frac{k}{2^\mu}$, t. j. je-li α dyadický úhel, je $c(\alpha)$ aditivní míra úhlu α ve smyslu článku 67. Můžeme tedy definovat pro každý dutý úhel α jako jeho *aditivní míru* reálné číslo $c(\alpha)$, definované vztahem (68.11), které vyhovuje nerovnosti (68.12).

Obráceně budiž dáno reálné číslo c splňující nerovnosti

$$0 < c < 1. \tag{68.13}$$

Dokážeme, že existuje dutý úhel α, jehož aditivní míra je rovna c. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ existuje a je jednoznačně určeno celé číslo k_n, pro něž

$$k_n \leqq 2^n . c < k_n + 1. \tag{68.14}$$

Podle (68.13) existuje index ν tak, že

$$\frac{1}{2^\nu} \leqq c < \frac{2^\nu - 1}{2^\nu};$$

pro $n \geqq \nu$ je tím spíše

$$\frac{1}{2^n} \leqq c < \frac{2^n - 1}{2^n},$$

tedy podle (68.14) je pro $n \geqq \nu$:

$$1 \leqq k_n < 2^n - 1, \tag{68.15}$$

takže pro $n \geqq \nu$ existují duté úhly $k_n R_n$, $(k_n + 1) R_n$. Pro $n \geqq \nu$ a pro $p = 1, 2, 3, \ldots$ je podle (68.14)

$$2^p k_n \leqq 2^{n+p} . c < 2^p (k_n + 1),$$
$$k_{n+p} \leqq 2^{n+p} . c < k_{n+p} + 1,$$

z čehož plyne

$$2^p k_n \leqq k_{n+p} < 2^p(k_n + 1). \tag{68.16}$$

Podle (67.5) je však $2^p . R_{n+p} = R_n$, takže ze (68.16) plyne

$$k_n R_n \leqq k_{n+p} R_{n+p} < (k_n + 1) R_n$$

a tudíž

$$\cos k_n R_n \geqq \cos k_{n+p} R_{n+p} > \cos(k_n + 1) R_n.$$

Posloupnost $\{\cos k_n R_n\}$ je nerostoucí omezená posloupnost reálných čísel, takže existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \cos k_n R_n = 0$$

a jest pro $n \geqq \nu$

$$\cos k_\nu R_\nu \geqq \lambda \geqq \cos(k_\nu + 1) R_\nu,$$

tedy $-1 < \lambda < 1$, takže existuje dutý úhel α, pro který je $\lambda = \cos\alpha$. Pro $n \geqq \nu$ je tedy

$$\cos k_n R_n \geqq \cos\alpha \geqq \cos(k_n + 1) R_n,$$

tudíž

$$k_n R_n \leqq \alpha \leqq (k_n + 1) R_n. \tag{68.17}$$

Porovnáme-li (68.17) se (68.6) a (68.7), vidíme, že pro $n \geqq \nu$ je

$$\text{buďto } k_n(\alpha) = k_n \text{ nebo } k_n(\alpha) = k_n + 1.$$

Podle (68.14) je tedy pro $n \geqq \nu$

$$|k_n(\alpha) - 2^n c| \leqq 1 \quad \text{neboli} \quad \left|\frac{k_n(\alpha)}{2^n} - c\right| \leqq \frac{1}{2^n},$$

takže podle (68.11) je $c = c(\alpha)$, t. j. aditivní míra dutého úhlu α je skutečně rovna c.

Buďtež nyní α, β dva takové duté úhly, že existuje dutý úhel $\alpha + \beta$. Dokážeme, že

$$c(\alpha) + c(\beta) = c(\alpha + \beta), \tag{68.18}$$

t. j. že součet aditivních měr dutých úhlů α, β je roven aditivní míře dutého úhlu $\alpha + \beta$. Za tím účelem uvažme, že pro všecka dosti velká n jest

$$k_n(\alpha) \,.\, R_n \leqq \alpha < [k_n(\alpha) + 1] R_n, \tag{68.19}$$

$$k_n(\beta) \,.\, R_n \leqq \beta < [k_n(\beta) + 1] R_n. \tag{68.20}$$

Ježto $k_n(\alpha) \,.\, R_n \leqq \alpha$, $k_n(\beta) \,.\, R_n \leqq \beta$ a ježto existuje součet $\alpha + \beta$, existuje také součet $k_n(\alpha) \,.\, R_n + k_n(\beta) \,.\, R_n = [k_n(\alpha) + k_n(\beta)] R_n$ a tento součet je $\leqq \alpha + \beta$. Podle definice čísla $k_n(\alpha + \beta)$ je tudíž

$$k_n(\alpha) + k_n(\beta) \leqq k_n(\alpha + \beta). \tag{68.21}$$

Předpokládejme, že

$$k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2 \leqq k_n(\alpha + \beta). \tag{*}$$

Ježto $k_n(\alpha + \beta) < 2^n$, je $k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2 < 2^n$, takže existuje dutý úhel $[k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2]\, R_n$, který je součtem dutých úhlů $[k_n(\alpha) + 1]\, R_n$, $[k_n(\beta) + 1]\, R_n$. Ježto $\alpha < [k_n(\alpha) + 1]\, R_n$, $\beta < [k_n(\beta) + 1]\, R_n$, je potom $\alpha + \beta < [k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2]\, R_n \leqq k_n(\alpha + \beta)\, R_n$, což je nemožné. Tedy vztah (*) je nesprávný a máme

$$k_n(\alpha + \beta) < k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2. \tag{68.22}$$

Z (68.21) a (68.22) plyne

$$\frac{k_n(\alpha)}{2^n} + \frac{k_n(\beta)}{2^n} \leqq \frac{k_n(\alpha + \beta)}{2^n} < \frac{k_n(\alpha)}{2^n} + \frac{k_n(\beta)}{2^n} + \frac{2}{2^n},$$

z čehož podle (68.11) plyne (68.18).

Jsou-li α, γ duté úhly a je-li $\alpha < \gamma$, je také $c(\alpha) < c(\gamma)$. [Z toho plyne zejména, že dva duté úhly různé velikosti nemohou míti touž aditivní míru.] Neboť ježto $\alpha < \gamma$, existuje dutý úhel β tak, že $\gamma = \alpha + \beta$, takže podle (68.18) $c(\gamma) = c(\alpha) + c(\beta)$. Avšak $0 < c(\beta) < 1$, takže $c(\alpha) < c(\gamma)$.

Z (68.18) plyne, že jsou-li α, β dva duté úhly takové, že existuje dutý úhel $\alpha + \beta$, musí býti

$$c(\alpha) + c(\beta) < 1. \tag{68.23}$$

Obráceně předpokládejme, že pro dva duté úhly α, β platí nerovnost (68.23); máme dokázati, že existuje dutý úhel $\alpha + \beta$. Ze (68.23) plyne, že pro dosti velká n je

$$c(\alpha) + c(\beta) + \frac{2}{2^n} < 1.$$

Podle (68.11′) je tedy pro dosti velká n

$$k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2 < 2^n,$$

takže existuje součet $[k_n(\alpha) + 1]\, R_n + [k_n(\beta) + 1]\, R_n$ a podle (68.19) existuje také součet $\alpha + \beta$.

PŘEHLED POJMŮ

V následujícím znamená n^k str. n, řádek k shora; n_k str. n, řádek k zdola.

PŘEHLED ZNAČEK

OBSAH

KRUH

svazek

18

DR EDUARD ČECH

ZÁKLADY ANALYTICKÉ GEOMETRIE

I

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1951. Šéfredaktor Miroslav Střída, odborný redaktor Miroslav Fuka, výtvarný redaktor Miloš Hrbas. Z nové sazby písmem Extended vytiskla Státní tiskárna n. p., závod 05 (Prometheus), Praha 8. — 1. vydání, náklad 3.300 výtisků. — 30103/130 — 40618/51/10/III/1 — 97 — 1%. — Sazba 10. V. 1951. Tisk 15. XI. 1951. — 13,63 plánovaných archů, 10 autorských archů, 10,19 vydavatel. archů. — 218 stran — 6 obrazců. — Papír 222-02, formát 86 × 122 cm, 80 g.

Cena brož. 96 Kčs