

V. V. Попов

О топологиях очановского типа

In: Zdeněk Frolík (ed.): Abstracta. 9th Winter School on Abstract Analysis. Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1981. pp. 143--145.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/701244>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, 1981

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## NINTH WINTER SCHOOL ON ABSTRACT ANALYSIS (1981)

## О топологиях очановского типа

В.В. Попов

Пусть  $X$  топологическое пространство,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  семейства подмножеств пространства  $X$ . Топологией очановского типа ( $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -топологией) на пространстве  $ex X$  замкнутых подмножеств пространства  $X$  называем топологию с предбазой  $\sigma = \{[A, B] : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ , где  $[A, B] = \{(F) \in ex X : ACFCX \setminus B\}$ . Такая топология введена в [1] и исследовалась в работах [2, 3]. Элементы предбазы  $\sigma$  открыто-замкнуты в  $ex X$ , поэтому в случае хаусдорфовости  $ex X$  последнее автоматически является вполне регулярным пространством. При различном выборе  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  получаем широкий спектр топологий на  $ex X$ . Особое внимание уделяется  $(C_0, C_0)$  и  $(C_1, C_1)$ -топологии, которые получаются соответственно при  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{A \subset X : A \text{ конечно}\}$  и  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{A \subset X : A \text{ замкнуто}\}$ . Пространство  $X$  предполагается вполне регулярным, хотя многие результаты справедливы при отделимости  $T_1$ .

Пространство  $ex X$  хаусдорфово в  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -топологии тогда и только тогда, когда  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -топология мажорирует  $(C_0, C_0)$ -топологию. Пусть пространство  $ex X$  нормально; тогда:

(а) если  $\mathcal{A}$  содержит замыкания всех счетных подмножеств, а каждый элемент из  $\mathcal{B}$  счетнокомпактен, то  $X$  состоит из конечного числа точек;

(б) если  $f : X \rightarrow Y$  - факторное отображение на отрезок числовой прямой,  $fB$  замкнуто для всякого  $B \in \mathcal{B}$ , то  $fK$  счетно для всякого бикompакта  $K \subset X$  - в частности, всякий связный бикompакт в  $X$  состоит в этом случае из единственной точки;

(в) если всякий элемент из  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  пересекает лишь конечное число элементов некоторой дискретной системы  $\theta$ , состоящей из недискретных подмножеств пространства  $X$ , то  $\theta$  счетно.

Примеры: пусть  $ex X$  наделено  $(C_0, C_0)$ -топологией, тогда если  $X$  дискретно, то  $ex X$  гомеоморфно канторову дисконтинууму  $\mathcal{D}^{\tau}$  веса  $\tau = |X|$ ; если  $X$  - александровская компактификация дискретного пространства, то  $ex X$  гомеоморфно  $\mathcal{D}^{\tau} \circledast Z$ , где  $Z$  -  $\sigma$ -произведению дискретных двоеточий в числе  $\tau$ ; если  $X$  - прообраз отрезка числовой прямой при совершенном отображении, то  $ex X$  содержит замкнутое подпространство, гомеоморфное прямой Зоргенфрея.

Пространство  $Z$  называется  $k$ -пространством, если множество  $A \cap Z$  замкнуто тогда и только тогда, когда пересечение  $A \cap B$  замкнуто для любого бикompакта  $B \subset Z$ . Пусть  $ex X$  -  $k$ -пространство. Тогда если  $\mathcal{A}$  содержит замкнания всех счетных подмножеств, а всякое  $B \in \mathcal{B}$  удовлетворяет условию Суслина, то  $X$  наследственно удовлетворяет условию Суслина; если же  $\mathcal{B} = C_1(X)$ , то  $X$  - пространство Фреше-Урсона; в случае же, когда  $[A]$  счетно для всякого  $A \in \mathcal{A}$  в  $X$  всякое сепарабельное подпространство обязано быть счетным. Для нормального совершенно нормального  $X$  при наделении  $ex X$   $(C_1, C_1)$ -топологией эквивалентны условия:

- (а)  $ex X$  -  $k$ -пространство;
- (б)  $ex X$  - пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности;
- (в) всякое замкнутое множество в  $X$  имеет счетную систему окрестностей.

Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  порождает отображения  $\varphi: ex Y \rightarrow ex X$  и  $\psi: ex X \rightarrow ex Y$ , определенные формулами  $\varphi(P) = (f^{-1}P)$  и  $\psi(P) = ([fP])$ . Пусть пространства  $ex X$  и  $ex Y$  наделены  $(C_0, C_0)$ -топологиями, тогда  $\psi$  непрерывно тогда и только тогда, когда  $f$  - замкнутое конечнократное отображение; если же  $\psi$  замкнуто и непрерывно, то  $X = X_1 \cup X_2$ , где  $X_1$  гомеоморфно  $Y$ , ограничение  $f$  на  $X_1$  взаимно однозначно и  $X_2$  состоит из изолированных в  $X$  точек. Пусть  $ex X$  и  $ex Y$  наделены  $(C_1, C_1)$ -топологиями. Тогда:

- (а) если  $Y$  нормально, то  $\psi$  непрерывно;
- (б) если  $\psi$  открыто, то и  $f$  открыто;
- (в) если  $Y$  паракомпакт и  $f$  открыто-замкнуто, то  $\psi$  открыто;
- (г) если  $Y$  - плотное в себе пространство и  $\psi$  замкну-

то, то  $f$  - гомеоморфизм.

Отображение  $\varphi$  является гомеоморфным вложением в каждом из следующих случаев:

- (а)  $f$  непрерывно и  $ex X$ ,  $ex Y$  наделены  $(C_0, C_0)$ -топологиями;
- (б)  $f$  непрерывно и замкнуто,  $ex X$  и  $ex Y$  наделены  $(C_1, C_1)$ -топологиями.

### Литература

- [1] Очан Д.С.: Пространство подмножеств топологического пространства, Мат.сб., 1943, № 2, 340-352
- [2] Кашуба Р.П., Матузявичус А.: Очановские пространства и кольца, Труды IV.Тираспольского симпозиума по общей топологии и ее приложениям, "Штиница", 1979, 59-60
- [3] Попов В.В.: О нормальности экспоненты в топологиях очановского типа, в печати