Gerhard Grimeisen

Eine natürliche Topologisierung der Potenzmenge eines topologischen Raumes

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [187]--190.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700923

EINE NATÜRLICHE TOPOLOGISIERUNG DER POTENZMENGE EINES TOPOLOGISCHEN RAUMES

G. GRIMEISEN

Stuttgart

1. Gegeben sei ein topologischer Raum (E, τ), unter τ wie üblich eine additive $(\tau(X \cup Y) = \tau X \cup \tau Y)$, extensionale $(X \subseteq \tau X)$, idempotente $(\tau^2 = \tau)$ Abbildung der Menge $\mathfrak{P}E$ aller Teilmengen von E (der Potenzmenge von E) in die Menge $\mathfrak{P}E$, die die leere Menge $\emptyset$ festläßt $(\tau\emptyset = \emptyset)$, verstanden.

Ist $(f(i))_{i \in I}$, kürzer (f, I), eine Familie von Elementen $f(i)$ von E, wir sagen: eine *Familie über E*, und $\mathfrak{a}$ ein Filter über deren Indexbereich I, so nennen wir das Paar $(f, \mathfrak{a})$, ausführlicher $(f, I, \mathfrak{a})$ oder $f(i)_{i \in I, \mathfrak{a}}$, nach G. NÖBELING [13] eine *gefilterte Familie über E*. Die Menge aller Limespunkte von $(f, \mathfrak{a})$ bezüglich der Topologie τ nennen wir mit J. SCHMIDT [14] den *Limes* $\mathrm{Lim}_\tau(f, \mathfrak{a})$ von $(f, \mathfrak{a})$. (Statt „$X \in \mathrm{Lim}_\tau(f, \mathfrak{a})$" sagt BOURBAKI [3] „$x$ est valeur limite de f suivant $\mathfrak{a}$".) Ist $(g, \mathfrak{b})$ eine gefilterte Familie über $\mathfrak{P}E$, so bezeichnen wir wie üblich (siehe etwa G. CHOQUET [4] oder G. NÖBELING [13]) den *Limes inferior* von $(g, \mathfrak{b})$ bezüglich τ mit $\lim\inf_\tau(g, \mathfrak{b})$. Wir bemerken, dass für jede gefilterte Familie $(f, I, \mathfrak{a})$ über E $\mathrm{Lim}_\tau(f, \mathfrak{a}) = \lim\inf_\tau \{f(i)\}_{i \in I, \mathfrak{a}}$ gilt.

Lim_τ ist ein Operator mit der Klasse aller gefilterten Familien über E als Definitionsbereich und Werten in der Menge $\mathfrak{P}E$. Die Zuordnung $(g, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{P}(\lim\inf_\tau(g, \mathfrak{b}))$ ($(g, \mathfrak{b})$ eine gefilterte Familie über $\mathfrak{P}E$) werde mit $\mathfrak{P}\lim\inf_\tau$ bezeichnet. $\mathfrak{P}\lim\inf_\tau$ ist ein Operator mit der Klasse aller gefilterten Familien über $\mathfrak{P}E$ als Definitionsbereich und Werten in der Menge $\mathfrak{P}\mathfrak{P}E$. Wir stellen die Frage nach der Existenz einer Topologie σ der Menge $\mathfrak{P}E$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{P}\lim\inf_\tau = \mathrm{Lim}_\sigma .$$

2. Die Lösung des Problems ordnet sich in eine Theorie der Limesräume ein: Gegeben sei eine (abstrakte) Menge E. Wir nennen eine Abbildung Lim, die jeder gefilterten Familie $(f, \mathfrak{a})$ über E eine bestimmte Teilmenge $\mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$ von E zuordnet, einen *Limesoperator* — das Paar (E, Lim) einen *Limesraum* — wenn Lim nachfolgenden Axiomen (Lim 1), (Lim 2) und (Lim 3) genügt.

(Lim 1): *Ist* $(f, I, \mathfrak{a})$ *eine gefilterte Familie über E und* $x \in E$, *so gilt* $x \in \mathrm{Lim}(f, \mathfrak{a})$ *genau dann, wenn es zu jeder Menge* $S \subseteq E$, *für die* $f(i) \in S$ *für* $\mathfrak{a}$*-konfinal viele* $i \in I$ *gilt, eine gefilterte Familie* $(g, K, \mathfrak{b})$ *über E gibt mit* $g(K) \subseteq S$ *und* $x \in \mathrm{Lim}(g, \mathfrak{b})$.

Dabei bedeute für irgendeine Aussageform $H(i)$ in der Variablen i, sinnvoll für alle $i \in I$, nach G. Nöbeling [13] „$H(i)$ gilt für $\mathfrak{a}$-konfinal viele $i \in I$“ dasselbe wie „in jeder Menge $A \in \mathfrak{a}$ gibt es ein Element i derart, dass $H(i)$ gilt“ und später übrigens (wie in [7]) „$H(i)$ gilt für $\mathfrak{a}$-fast alle $i \in I$“ dasselbe wie „es gibt eine Menge $A \in \mathfrak{a}$ derart, dass $H(i)$ für alle $i \in A$ gilt“.

(Lim 2): $$x \in \operatorname{Lim} \langle x \rangle \textit{ für alle } x \in E\,.$$

Mit $\langle x \rangle$ bezeichnen wir die spezielle gefilterte Familie $(f, I, \mathfrak{a})$, in der $I = \{x\}$, $\mathfrak{a} = \{I\}$, $f(x) = x$ ist (also die konstante Folge).

(Lim 3): *Ist* $(f, I, \mathfrak{a})$ *eine gefilterte Familie über E und zu jedem* $i \in I$ $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ *eine gefilterte Familie über E, so gilt mit*

$$f(i) \in \operatorname{Lim}(g_i, \mathfrak{b}_i) \textit{ für alle } i \in I$$

stets auch

$$\operatorname{Lim}(f, \mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Lim}\big(\underset{i \in I}{\mathrm{S}}\, g_i, \underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}}\, \mathfrak{b}_i\big)\,.$$

Die in (Lim 3) vorkommende gefilterte Familie $\big(\underset{i \in I}{\mathrm{S}}\, g_i, \underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}}\, \mathfrak{b}_i\big)$ nennen wir in [8] auch die *durch* $\mathfrak{a}$ *gefilterte Summe* $\underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}}\,(g_i, \mathfrak{b}_i)$ *der gefilterten Familien* $(g_i, \mathfrak{b}_i)$ (diese seien ausführlich, unter Betonung der Indexbereiche, etwa mit $(g_i, K_i, \mathfrak{b}_i)$ bezeichnet); sie ist eine modifizierte Verallgemeinerung des Begriffs der Diagonalfolge einer Doppelfolge und wird folgendermassen definiert: Wir verstehen (siehe [7] und [8])

(a) unter der *direkten Summe* $\underset{i \in I}{\mathrm{S}}\, K_i$ *der Mengen* K_i die Menge aller geordneten Paare (j, k) mit $j \in I$ und $k \in K_j$;

(b) unter der *direkten Summe* $\underset{i \in I}{\mathrm{S}}\, g_i$ *der Abbildungen* g_i die Abbildung

$$(j, k) \to g_j(k) \quad ((j, k) \in \mathrm{S}K_i)\,;$$

(c) unter dem *j-ten Schnitt* $q_j X$ (mit $j \in I$) *einer Menge* $X \subseteq \mathrm{S}K_i$ die Menge aller $k \in K_j$ mit $(j, k) \in X$;

(d) unter der *durch* $\mathfrak{a}$ *gefilterten Summe* $\underset{i \in I}{{}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}}\, \mathfrak{b}_i$ *der Filter* $\mathfrak{b}_i$ die Menge aller $X \subseteq \mathrm{S}K_i$ mit der Eigenschaft, daß $q_j X \in \mathfrak{b}_j$ für $\mathfrak{a}$-fast alle $j \in I$.

${}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}\mathfrak{b}_i$ ist ein Filter über der Menge $\mathrm{S}K_i$, nach (b) folglich $(\mathrm{S}g_i, {}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}\mathfrak{b}_i)$ – ausführlicher $(\mathrm{S}g_i, \mathrm{S}K_i, {}^{\mathfrak{a}}\mathrm{S}\mathfrak{b}_i)$ geschrieben – eine gefilterte Familie über E.

Wir bemerken, daß (Lim 1) eine inhaltliche Zusammenfassung des die Teilfolge betreffenden Axioms von M. Fréchet [5] (in der Theorie der Limesräume) mit dem dieses in gewisser Weise umkehrenden Axiom von P. Urysohn (siehe P. Alexandroff-P. Urysohn [1] und P. Urysohn [15]) darstellt. (Lim 2) geht auf M. Fréchet [5] zurück, (Lim 3) ist nichts anderes als die filtertheoretische Fassung des „Theorem on iterated limits“ von G. Birkhoff [2] und J. L. Kelley [11], welches in einer konventionellen Sprechweise besagt, daß man (in topologischen Räumen) iterierte Grenzübergänge stets in einfache, nicht iterierte Grenzübergänge verwandeln kann.

(E, Lim) sei ein Limesraum. Ist $X \subseteq E$, so sei $\tau_{\mathrm{Lim}}X$ die Menge aller $y \in E$ mit der Eigenschaft, daß es zu y eine gefilterte Familie $(f, I, \mathfrak{a})$ über E gibt mit $f(I) \subseteq X$ und $y \in \mathrm{Lim}\,(f, \mathfrak{a})$. Der so definierte Operator τ_{Lim} ist eine Topologie, anders ausgedrückt:

Satz 1. (E, τ_{Lim}) *ist ein topologischer Raum.*

Beweis in [9].

Im Sinne von Abschnitt 1 ist also der Operator $\mathrm{Lim}_{\tau_{\mathrm{Lim}}}$ bezüglich der Topologie τ_{Lim} definiert. Wesentlich ist nun

Satz 2. $\mathrm{Lim} = \mathrm{Lim}_{\tau_{\mathrm{Lim}}}$.

Beweis in [9].

Während der Beweis von Satz 1 inhaltlich wie der des entsprechenden Satzes bei Kelley [11] (p. 74 f.) verläuft, benutzt derjenige von Satz 2, anders als bei Kelley [11] (p. 75), wo an der entsprechenden Stelle das „Theorem on iterated limits" wesentlich verwendet wird, von den Axiomen (Lim 1) bis (Lim 3) nur das erste. Daran liegt es, daß man eine Theorie der Limesräume auch allein auf das Axiom (Lim 1) bzw. auf die beiden Axiome (Lim 1) und (Lim 2) aufbauen kann, die dann der Theorie der nichtidempotenten und nichtextensionalen bzw. der nichtidempotenten „Topologien" genau entspricht.

3. Damit haben wir die Hilfsmittel zur Lösung des aufgeworfenen Problems zusammengestellt. Wir gehen wie in Abschnitt 1 von einem topologischen Raum (E, τ) aus. Dann gilt zunächst, als eine wichtige Rechtfertigung obiger Theorie der Limesräume,

Satz 3. (E, Lim_τ) *ist ein Limesraum, und es gilt* $\tau = \tau_{\mathrm{Lim}_\tau}$.

Beweis in [9].

Dabei sei τ_{Lim_τ} wie τ_{Lim} in Abschnitt 2, mit Lim_τ anstelle Lim, definiert. Topologische Räume und Limesräume entsprechen einander also eineindeutig.

Hier interessiert besonders

Satz 4. $(\mathfrak{P}E, \mathfrak{P}\lim\inf_\tau)$ *ist ein Limesraum.*

Beweis in [9].

Mittels des Limesoperators $\mathfrak{P}\lim\inf_\tau$ bezüglich $\mathfrak{P}E$ als Grundmenge (in Abschnitt 2: Lim bezüglich E als Grundmenge) definieren wir den Operator $\tau_{\mathfrak{P}\lim\inf_\tau}$ (wie τ_{Lim} in Abschnitt 2) und setzen $\tau_{\mathfrak{P}\lim\inf_\tau} = \sigma(\tau)$. Die Verknüpfung der Sätze 1 bis 4 liefert das angestrebte Ergebnis, nämlich den

Satz 5. $(\mathfrak{P}E, \sigma(\tau))$ *ist ein topologischer Raum, es gilt* $\mathfrak{P}\lim\inf_\tau = \mathrm{Lim}_{\sigma(\tau)}$, *und* $\sigma(\tau)$ *ist die einzige Topologie* σ *von* $\mathfrak{P}E$ *mit der Eigenschaft* $\mathfrak{P}\lim\inf_\tau = \mathrm{Lim}_\sigma$.

4. Eine andere Topologisierung von $\mathfrak{P}E$ bei gegebenem topologischen Raum (E, τ) wird von G. Choquet [4] (siehe insbesondere p. 91, remarque) angegeben: Ist $(g, K, \mathfrak{b})$ eine gefilterte Familie über $\mathfrak{P}E$, so sei $\Phi_\tau(g, \mathfrak{b})$ das System aller $X \in \mathfrak{P}(\lim\inf_\tau(g, \mathfrak{b}))$ mit der Eigenschaft, dass für jede Umgebung U von X bezüglich τ die Inklusion $g(k) \subseteq U$ für $\mathfrak{b}$-fast alle $k \in K$ gilt. An die Stelle unseres Operators $\mathfrak{P}\lim\inf_\tau$ tritt im wesentlichen (G. Choquet arbeitet mit Relationen) der Operator Φ_τ. Mittels Φ_τ

wird, auf dem Weg über eine geeignete Konzeption des Limesraums, eine Topologie σ_{Φ_τ} von $\mathfrak{P}E$ definiert. Es fehlen jedoch (unseres Wissens) Sätze, die unseren Sätzen 2 und 5 entsprächen.

Gewöhnlich beschränkt man sich aber auf die Topologisierung eines Teiles von $\mathfrak{P}E$, nämlich auf diejenige der Menge 2^E aller abgeschlossenen Teilmengen von E. Ausser den historischen Ansätzen bei F. HAUSDORFF [10] (Zugrundelegung einer Metrik von E) und deren Weiterentwicklung bei C. KURATOWSKI [12] (Einführung des $(2^E)_L$-Raumes) ist die schon zitierte Arbeit von G. CHOQUET [4] (p. 87) zu erwähnen, in der u. W. zum erstenmal (bei dieser Problemstellung) auf eine Metrik von E verzichtet wird und statt gewöhnlicher Folgen gefilterte Familien verwendet werden, und schließlich, als u. W. neueste Note, die von Z. FROLÍK [6]. Wesentliches Hilfsmittel zur Metrisierung oder Topologisierung von 2^E ist in diesen Arbeiten der topologische Limes einer Folge oder verallgemeinerten Folge von Elementen aus 2^E.

Literatur

[1] *P. Alexandroff* und *P. Urysohn*: Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe ($\mathscr{L}$) soit une classe ($\mathscr{D}$). C. R. Acad. Sci. *177* (1923), 1274–1277.

[2] *G. Birkhoff*: Moore-Smith convergence in general topology. Ann. Math. *38* (1937), 39–56.

[3] *N. Bourbaki*: Topologie générale, Chap. I–II. 2. Aufl. Actual. Sci. Industr. *1142* (1951).

[4] *G. Choquet*: Convergences. Ann. Univ. Grenoble *23* (1948), 57–112.

[5] *M. Fréchet*: Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rend. Circolo mat. Palermo *22* (1906), 1–74.

[6] *Z. Frolík*: Concerning topological convergence of sets. Czechoslovak Math. J. *10* (*85*), (1960), 169–180.

[7] *G. Grimeisen*: Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse. I. Math. Ann. *141* (1960), 318–342.

[8] *G. Grimeisen*: Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse. II. Math. Ann. *144* (1961), 386—417.

[9] *G. Grimeisen*: Zur Stufenhebung bei topologischen Räumen. Math. Ann. *147* (1962), 95—109.

[10] *F. Hausdorff*: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.

[11] *J. L. Kelley*: General topology. New York 1955.

[12] *C. Kuratowski*: Topologie. Bd. 1. 4. Aufl. Warszawa 1958.

[13] *G. Nöbeling*: Grundlagen der analytischen Topologie. Berlin 1954.

[14] *J. Schmidt*: Eine Studie zum Begriff der Teilfolge. Jahresber. Dtsch. Math. Ver. *63* (1960), 28–50.

[15] *P. Urysohn*: Sur les classes ($\mathscr{L}$) de M. Fréchet. Enseign. math. *25* (1926), 77–83.