D. Adnadjević

О розмерности dm топологических пространств

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 22--24.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700858

О РАЗМЕРНОСТИ dm ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Д. АДНАДЖЕВИЧ

Београд

Эта статья представляет собою обзор главных свойств размерности dm топологических пространств. Наряду с этим будет указано на некоторые проблемы стоящие в связи с размерностью dm.

Понятие размерности dm основывается на понятии нерва покрытия[1]) и размерности d_s этого нерва.

Под нервом $N(\mathscr{U})$ покрытия $\mathscr{U} = \{U_1, \ldots, U_p\}$ понимается полный симплициальный комплекс, вершинами которого являются элементы $U_1^0, \ldots, U_p^0$ (соответствующие элементам покрытия $U_1, \ldots, U_p$); множество вершин $U_{i_0}^0, \ldots, \ldots, U_{i_k}^0$ является симплексом U^k комплекса $N(\mathscr{U})$ тогда и только тогда, когда $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_k} \neq \emptyset$. Нерв $N(\mathscr{U})$ можно считать частично упорядоченным множеством $(N(\mathscr{U}), \leqq)$, где отношение $\leqq$ определено так, что $U^k \leqq U^s$, $k \leqq s$, тогда и только тогда, когда симплекс U^k является гранью симплекса U^s (см. [4]).

Для линейно упорядоченных множеств $X^i = \{x_1, \ldots, x_p; \leqq_i\}$, $i = 1, \ldots, r$, будем говорить, что они порождают по суперпозиции частично упорядоченное множество $X = \{x_1, \ldots, x_p; \leqq\}$, если

1° $x_s < x_t \Rightarrow x_s <_i x_t$, для каждого $i \in \{1, \ldots, r\}$;

2° если x_s и x_t несравнимы, то $x_s <_i x_t$, $x_t <_j x_s$, по крайней мере для одного i и одного $j \neq i$, $i, j \in \{1, \ldots, r\}$.

Минимальное число линейно упорядоченных множеств, порождающих по суперпозиции частично упорядоченное множество X, называется размерностью $\mathrm{d}_s X$ множества X (см. [6]).

Размерность $\mathrm{dm}\, X$ топологического пространства X определяется следующим образом.

1° $\mathrm{dm}\, \emptyset = -1$;

2° $\mathrm{dm}\, X = 0$, если в каждое покрытие пространства X можно вписать покрытие, в нерве которого нет сравнимых между собою элементов;

3° $\mathrm{dm}\, X \leqq n$, где $n > 0$, если в каждое покрытие пространства X можно вписать покрытие, нерв которого имеет размерность d_s не больше чем $n + 1$. Если $\mathrm{dm}\, X \leqq n$, а $\mathrm{dm}\, X \leqq n - 1$ не имеет места, тогда $\mathrm{dm}\, X = n$.

[1]) Под покрытием понимается конечное открытое покрытие.

4° $\mathrm{dm}\, X = \infty$, если для всякого конечного n существует покрытие в которое нельзя вписать покрытие, нерв которого имеет размерность d_s меньше чем n.

Определенное таким образом понятие размерности, очевидно, есть топологический инвариант.

Размерность $\mathrm{dm}\, X$ *монотонна по замкнутым подмножествам.*

Монотонна ли размерность $\mathrm{dm}\, X$ в других случаях, остается нерешенным вопросом. В частности, неизвестно, монотонна ли размерность $\mathrm{dm}\, X$ по открытым подмножествам в наследственно нормальных пространствах.

Укажем теперь на еще одно свойство этого типа.

Если каждое открытое подмножество G топологического пространства X удовлетворяет условию $\mathrm{dm}\, G \leqq n$, *тогда для каждого $A \subset X$ имеет место соотношение* $\mathrm{dm}\, A \leqq n$.

Оказывается, что теорема суммы не имеет места даже в случае конечного числа слагаемых. Именно, если взять на окружности S^1 две различные точки a, b, тогда $S^1 = L_1 \cup L_2$, где L_1, L_2 пути, определенные точками a, b, и $L_1 \cap L_2 = \{a, b\}$. Из того, что $\mathrm{dm}\, L_1 = \mathrm{dm}\, L_2 = 1$, $\mathrm{dm}\, S^1 = 2$, следует утверждение.

Что касается соотношения между размерностями $\mathrm{dm}\, X$ *и* $\dim X$, *то оказывается, что* $\dim X \leqq \mathrm{dm}\, X$. Для некоторых пространств имеет место равенство; пример такого пространства — эвклидово n-мерное пространство E^n. Для других пространств имеет место неравенство; пример такого пространства — окружность S^1, для которой известно что $\dim S^1 = 1$, $\mathrm{dm}\, S^1 = 2$. Кажется очень трудной проблема найти все пространства, для которых имеет место равенство размерностей $\dim X$ и $\mathrm{dm}\, X$. Но во всяком случае можно сказать, что размерность $\mathrm{dm} X$ представляет глобальное свойство пространства: размерность $\mathrm{dm}\, X$ является свойством покрытий всего пространства.

Отметим еще одно свойство самых общих топологических пространств по отношению к размерности $\mathrm{dm}\, X$.

Пусть A_i, $i = 1, \dots, r$, *открытые и замкнутые подмножества пространства* $X = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$. *Если* $\mathrm{dm}\, A_i \leqq n$, *тогда* $\mathrm{dm}\, X \leqq n$.

Не доказано, верна ли эта теорема и для бесконечного числа слагаемых.

Перейдем теперь к результатам, полученным для нормальных пространств.

Сперва приведем три предложения, из которых выводится несколько теорем.

Пусть F замкнутое подмножество нормального пространства X и пусть $\mathscr{U} = \{U_1, \dots, U_p\}$ — *покрытие пространства X. Если* $\mathrm{dm}\, F = n$, *тогда существует система* $\mathscr{W} = \{W_1, \dots, W_r\}$, *выполняющая условия:*

1° W_i *открыты в* X;

2° $F \subset \bigcup_{i=1}^{r} W_i$;

3° *система* $\mathscr{W}$ *вписана в покрытие* $\mathscr{U}$;

4° $\mathrm{d}_s N(\mathscr{W}) \leqq \begin{cases} n+1, & \text{если} \quad n > 0, \\ 2 & \text{если} \quad n = 0. \end{cases}$

Если F — *замкнутое подмножество нормального пространства* X, $\mathrm{dm}\, F \leqq n$, *и если для каждого замкнутого подмножества* $K \subset X$, *не пересекающего* F, *имеет место соотношение* $\mathrm{dm}\, K \leqq n$, *тогда* $\mathrm{dm}\, X \leqq 2n + 1$.

Пусть $\mathrm{dm}\, A \leqq n$, *где* $A \subset X$, X — *нормальное пространство. Если для каждого замкнутого подмножества* F, *не пересекающего* A, *выполнено условие* $\mathrm{dm}\, F \leqq m$, *тогда имеет место соотношение* $\mathrm{dm}\, A \leqq m + n + 1$.

На основании этих предложений и свойств размерности d_s частично упорядоченных множеств получаются теоремы о размерности суммы подмножеств.

Сейчас изложим основные полученные результаты.

Если нормальное пространство X *является объединением подмножеств* A *и* B, *и* $\mathrm{dm}\, A \leqq m$, $\mathrm{dm}\, B \leqq n$, *тогда справедливо соотношение* $\mathrm{dm}\, X \leqq 2(m + n) + 3$.

До сих пор остается открытой проблема, можно ли в общем случае снизить эту оценку размерности объединения. Однако, в частных случаях ее можно снизить.

Если нормальное пространство X *является объединением подмножеств* A *и* B, *хотя бы одно из которых замкнуто, и если* $\mathrm{dm}\, A \leqq m$, $\mathrm{dm}\, B \leqq n$, *тогда* $\mathrm{dm}\, X \leqq m + n + 1$.

Если нормальное пространство X *является объединением подмножеств* A *и* B, *хотя бы одно из которых открыто, и* $\mathrm{dm}\, A \leqq n$, $\mathrm{dm}\, B \leqq n$, *тогда* $\mathrm{dm}\, X \leqq 2n + 1$.

Пусть X — *наследственно нормальное пространство и пусть* $X = A \cup B$, *где* $\mathrm{dm}\, A \leqq m$, $\mathrm{dm}\, B \leqq n$. *Тогда имеет место соотношение* $\mathrm{dm}\, X \leqq m + n + 1$.

Для эвклидовых пространств справедлива теорема:

Размерность $\mathrm{dm}\, E^n$ *эвклидова пространства* E^n *равна* n.

Как сказано выше, для окружности S^1 имеем $\mathrm{dm}\, S^1 = 2$. Верно ли $\mathrm{dm}\, S^n = n + 1$ для произвольного конечного n, остается открытым вопросом.

Литература

[1] *D. Adnadjević:* O jednoj vrsti dimenzije topoloških prostora. Mat. vesnik 2 (17), sv. *2* (1965), 137—146.

[2] *D. Adnadjević:* Neka svojstva jedno vrste dimenzije topoloških prostora. Mat. vesnik 2 (17), sv. *4* (1965), 239—243.

[3] *Д. Аднаджевич:* Некоторые свойства размерности dm нормальных пространств. Рукопись, доложено на Международном конгрессе математиков, Москва 1966.

[4] *П. Александров:* Комбинаторная топология. Москва 1947.

[5] *W. Hurewicz and H. Wallman:* Dimension Theory. Princeton 1941.
(перевод: В. Гуревич и Г. Волмэн: Теория размерности. Москва 1948.)

[6] *B. Dushnik and E. W. Miller:* Partially ordered sets. Amer. J. Math. *63* (1941), 600—610.