K. Haße

Homogene Topologien in Polynomringen

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 171--175.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700835

HOMOGENE TOPOLOGIEN IN POLYNOMRINGEN

K. HAßE

Berlin

Topologische Methoden haben sich bei der Untersuchung des Verbandes aller Oberringe eines kommutativen Ringes B, die im vollen Quotientenring von B enthalten sind, als sehr nützlich erwiesen (siehe [1], [2], [3]). Diesbezügliche Betrachtungen führen oft auf Lineartopologien in B. So definiert zum Beispiel jeder Ring B_1 mit $B \subseteq B_1 \subseteq B_S$, wobei B_S den Quotientenring von B nach einem multiplikativ abgeschlossenen System S von Elementen aus B bezeichnet, eine Idealfilterbasis in B, welche aus den Idealen $B_1 s \cap B$, $s \in S$, besteht. Im folgenden soll der Verband aller homogenen Lineartopologien in dem Polynomring B einer Unbestimmten über einem kommutativen Ring A untersucht werden, ohne auf die Anwendungen in der Erweiterungstheorie einzugehen. Die dabei verwendete Methode kann ohne weiteres für das Studium der Lineartopologien in einem beliebigen homogenen Ring mit einem erzeugenden Element über einem kommutativen Grundring A oder in dem Modul $M[X] = M \otimes_A A[X]$, wobei M ein beliebiger A-Modul und X ein transzendentes Element über A ist, benutzt werden.

1. Es sei A ein kommutativer Ring mit Einselement. Eine *Lineartopologie* in A ist durch eine Idealfilterbasis F als Umgebungsbasis der Null gegeben. Unter $\bar{F}$ verstehen wir das von F erzeugte Idealfilter, d. h. die Menge aller Ideale $\mathfrak{a}$ von A, für die es ein $\mathfrak{f} \in F$ mit $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{a}$ gibt. Zwei Idealfilterbasen F und G sind genau dann äquivalent $(F \triangleq G)$ und definieren damit die gleiche Topologie in A, wenn $\bar{F} = \bar{G}$ ist. Wir werden daher im folgenden nicht zwischen einem Idealfilter und der durch dieses definierten Topologie unterscheiden und beide mit dem gleichen Buchstaben bezeichnen.

Die durch die Relation $F < G$ (F ist feiner als G) erklärte Halbordnung aller Lineartopologien in A ist ein vollständiger modularer Verband $\textbf{\textit{Top}}\ A$. Das *Supremum* einer Menge von Idealfiltern ist der mengentheoretische Durchschnitt aller Filter dieser Menge, und das *Infimum* ist dasjenige Idealfilter, welches durch die Idealfilterbasis aller Durchschnitte von endlich vielen Idealen aus der Vereinigungsmenge dieser Filter erzeugt wird. Der Verband $\textbf{\textit{Top}}\ A$ besitzt daher sowohl ein kleinstes, als auch ein größtes Element; für eine beliebige Topologie F ist $0 = \{0\} < < F < A = \{A\}$. Ist $F \in \textbf{\textit{Top}}\ A$, so sei mit $\textbf{\textit{Top}}\,(A \,\|\, F)$ der Verband aller $G \in \textbf{\textit{Top}}\ A$ mit $F < G$ bezeichnet.

Eine Idealfilterbasis F in A definiert in jedem Oberring B von A eine Idealfilterbasis $BF = \{B\mathfrak{f}, \mathfrak{f} \in F\}$ und damit eine Topologie. Die natürliche Einbettung von A in B ist eine stetige Abbildung der mit den Topologien F bzw. $\overline{BF}$ versehenen Ringe. Umgekehrt definiert eine Idealfilterbasis G in B eine Idealfilterbasis $G \cap A = \{\mathfrak{g} \cap A, \mathfrak{g} \in G\}$ in A. Es ist $F < BF \cap A$ und $B(G \cap A) < G$. Wenn B ein Polynomring über A ist, dann gilt $F \triangleq BF \cap A$.

Ist M eine Teilmenge von A, F eine Idealfilterbasis, so bezeichne $F\,C\,M$ die topologische Abschließung von M bezüglich der durch F definierten Lineartopologie, d. h. es ist $F\,C\,M = \bigcap_{\mathfrak{f} \in F} M + \mathfrak{f}$. Für zwei Idealfilterbasen F und G wird mit $F\,C\,G$ die Menge aller topologischen Abschließungen von Idealen aus G bezüglich der durch F definierten Topologie, d. h. die Menge aller $F\,C\,\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \in G$, bezeichnet. $F\,C\,G$ ist eine Idealfilterbasis. Es ist $\overline{F\,C\,\overline{G}} = \overline{F\,C\,G}$. Wenn F und G Idealfilter sind, dann wird die durch $F\,C\,G$ definierte Lineartopologie die *topologische Abschließung der Topologie G bezüglich der Topologie F* genannt. G heißt in F *dicht*, wenn $\overline{F\,C\,G} = F$ ist.

2. In einem Grellschen Ring (d. h. Integritätsbereich mit Gültigkeit der eingeschränkten Minimalbedingung) gilt für zwei beliebige Lineartopologien F und G mit $G < F$: G ist dicht in F und daher $(\overline{F\,C\,G})\,C\,G = \overline{F\,C\,G}$. Denn aus $G < F$ folgt $\overline{F\,C\,G} < F$, und da in einem Grellschen Ring jedes Idealfilter, dessen Durchschnitt vom Nullideal verschieden ist, ein minimales Element besitzt, gilt $F\,C\,\mathfrak{g} = \bigcap_{\mathfrak{f} \in F} \mathfrak{g} + \mathfrak{f} = \bigcap_{\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{f} \in F} \mathfrak{f} = \mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}$ für ein gewises $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}} \in F$.

3. Im folgenden sei mit $B = A[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über A bezeichnet. Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ in B sei $\mathfrak{a}^{(i)}$ die Menge aller Elemente α aus A, für die es ein Polynom i-ten Grades in $\mathfrak{a}$ mit höchstem Koeffizienten α gibt. $\mathfrak{a}^{(i)}$ ist ein Ideal in A, und es ist $\mathfrak{a}^{(0)} = \mathfrak{a} \cap A$. Sei F eine Idealfilterbasis in B, dann soll unter $F^{(i)}$ die Menge aller Ideale $\mathfrak{a}^{(i)}$ mit $\mathfrak{a} \in F$ verstanden werden. $F^{(i)}$ ist eine Idealfilterbasis in A.

4. Hilfssatz. *Wenn F und G Idealfilterbasen in B sind, die nur aus homogenen Idealen bestehen, dann gilt*

$$\overline{F}^{(i)} = \overline{F^{(i)}}$$

$$(F\,C\,G)^{(i)} = F^{(i)}\,C\,G^{(i)}$$

Sei $M = \{F_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ eine Menge von Idealfiltern, die von aus homogenen Idealen bestehenden Idealfilterbasen erzeugt werden und $M^{(i)} = \{F_\lambda^{(i)};\ \lambda \in \Lambda\}$, dann ist

$$(\inf M)^{(i)} = \inf M^{(i)}$$

$$(\sup M)^{(i)} = \sup M^{(i)}$$

Beweis. $\overline{F}^{(i)} \subseteq \overline{F^{(i)}}$ gilt für eine beliebige Idealfilterbasis F in B. Sei $\mathfrak{f} \in \overline{F^{(i)}}$, dann existiert ein Ideal $\mathfrak{g} \in F$ mit $\mathfrak{g}^{(i)} \subsetneqq \mathfrak{f}$. Da $\mathfrak{g}$ ein homogenes Ideal ist, kann es als

Summe der additiven Untergruppen $\mathfrak{g}^{(i)}X^i$ geschrieben werden, $\mathfrak{g} = \sum_i \mathfrak{g}^{(i)}X^i$. Dann ist $\mathfrak{g} = \sum_i \mathfrak{g}^{(i)}X^i \subseteq \mathfrak{f}' = \sum_{j<i} \mathfrak{g}^{(j)}X^j + \mathfrak{f}X^i + \sum_{j>i} (\mathfrak{g}^{(j)} + \mathfrak{f})\, X^j$, $\mathfrak{f}' \in F$ und $\mathfrak{f}'^{(i)} = \mathfrak{f}$, d. h. $\mathfrak{f} \in \overline{F^{(i)}}$.

Wenn $\mathfrak{a}^{(i)} \in (F\, \boldsymbol{C}\, G)^{(i)}$ ist, dann ist $\mathfrak{a}^{(i)} = (\bigcap_{\mathfrak{f}\in F} \mathfrak{g} + \mathfrak{f})^{(i)}$ für ein gewisses $\mathfrak{g} \in G$. Da $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ und damit $\mathfrak{f}+\mathfrak{g}$ homogene Ideale sind, gilt $(\bigcap_{\mathfrak{f}\in F} \mathfrak{g} + \mathfrak{f})^{(i)} = \bigcap_{\mathfrak{f}^{(i)}\in F^{(i)}} \mathfrak{g}^{(i)} + \mathfrak{f}^{(i)}$, und damit ist $\mathfrak{a}^{(i)} \in F^{(i)}\, \boldsymbol{C}\, G^{(i)}$. Sei $\mathfrak{a} \in F^{(i)}\, \boldsymbol{C}\, G^{(i)}$, d. h. $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{f}^{(i)}\in F^{(i)}} \mathfrak{g}^{(i)} + \mathfrak{f}^{(i)}$ für ein gewisses $\mathfrak{g}^{(i)} \in G^{(i)}$, dann folgt $\mathfrak{a} = (\bigcap_{\mathfrak{f}\in F} \mathfrak{g} + \mathfrak{f})^{(i)} \in (F\, \boldsymbol{C}\, G)^{(i)}$.

Aus $\inf M < F_\lambda$ und $F_\lambda < \sup M$ für alle $\lambda \in \Lambda$ folgt, daß $(\inf M)^{(i)} < \inf M^{(i)}$ und $\sup M^{(i)} < (\sup M)^{(i)}$ ist. Sei $\mathfrak{a}^{(i)} \in (\inf M)^{(i)}$, dann ist $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{f}_{\lambda_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{f}_{\lambda_n}$, wobei die Ideale $\mathfrak{f}_{\lambda_j}$ homogene Ideale aus F_{λ_i} für $j = 1, \ldots, n$ sind. Daher ist $\mathfrak{a}^{(i)} \supseteq$ $\supseteq (\mathfrak{f}_{\lambda_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{f}_{\lambda_n})^{(i)} = \mathfrak{f}_{\lambda_1}^{(i)} \cap \ldots \cap \mathfrak{f}_{\lambda_n}^{(i)} \in \inf M^{(i)}$. Wenn $\mathfrak{a} \in \sup M^{(i)}$ ist, dann existiert für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein homogenes Ideal $\mathfrak{f}_\lambda \in F_\lambda$ mit $\mathfrak{f}_\lambda^{(i)} \subseteq \mathfrak{a}$. $\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{f}_\lambda$ ist ein Ideal aus $\sup M$ mit $(\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{f}_\lambda)^{(i)} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{f}_\lambda^{(i)} \subseteq \mathfrak{a}$, d. h. es ist $(\sup M)^{(i)} < \sup M^{(i)}$. Damit ist alles bewiesen.

5. Eine Lineartopologie F in $B = A[X]$ soll *homogen* heißen, wenn es eine aus homogenen Idealen bestehende Idealfilterbasis G in B mit $\overline{G} = F$ gibt. Die Menge aller homogenen Lineartopologien in F ist ein vollständiger Teilverband $\boldsymbol{Top}^h(B)$ von $\boldsymbol{Top}(B)$, denn es gilt für eine beliebige Menge $M = \{F_i;\ i \in I\}$ von Idealfilterbasen $\sup \overline{M} = \overline{\sup M}$ und $\inf \overline{M} = \overline{\inf M}$, wobei $\overline{M} = \{\overline{F}_i;\ i \in I\}$ ist.

6. Für eine Halbordnung H bezeichnen wir mit H_ω die Menge aller Ordnungshomomorphismen der geordneten Mengen der natürlichen Zahlen (einschließlich der Null) in H, d. h. die Menge aller Ketten $(a_i) : a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \ldots$ mit $a_i \in H$. Wir definieren: $(a_i) \leqq (b_i)$ genau dann, wenn $a_i \leqq b_i$ für alle natürlichen Zahlen i. Damit ist H_ω eine Halbordnung. Wenn H ein vollständiger, modularer Verband ist, dann ist es auch H_ω.

7. Satz. *Sei F eine Lineartopologie in einem kommutativen Ring A mit Einselement und $B = A[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über A. Dann gilt:*

a) *Es gibt einen vollständigen Verbandshomomorphismus φ von $\boldsymbol{Top}^h(B \parallel \overline{BF})$ auf $\boldsymbol{Top}(A \parallel F)_\omega$.*

b) *Für ein beliebiges Element (G_i) von $\boldsymbol{Top}(A \parallel F)_\omega$ ist die Menge $\varphi^{-1}(G_i)$ ein vollständiger Teilverband von $\boldsymbol{Top}^h(B \parallel \overline{BF})$.*

c) *$\overline{BF}$ ist genau dann in $\inf \varphi^{-1}(G_i)$ dicht, wenn F in G_i für alle natürlichen Zahlen i dicht ist.*

Beweis. Für ein Element G von $\boldsymbol{Top}^h(B \parallel \overline{BF})$ sei $\varphi(G) = (G^{(i)})$: $G^{(0)} < G^{(1)} <$ $< \ldots$ Nach Hilfssatz 4 ist $G^{(i)}$ für alle i ein Filter mit $G^{(i)} \succeq (\overline{BF})^{(i)} = F$. φ ist ein

Verbandshomomorphismus, denn es gilt $(G \cap H)^{(i)} = G^{(i)} \cap H^{(i)}$ und $(G \cup H)^{(i)} = G^{(i)} \cup H^{(i)}$ für zwei Elemente G, H aus $\boldsymbol{Top}^h(B \parallel \overline{BF})$, wobei $\cap$ und $\cup$ die verbandstheoretischen Operationen bezeichnen. φ ist eine Abbildung auf $\boldsymbol{Top}(A \parallel F)_\omega$: Sei (G_i) ein beliebiges Element von $\boldsymbol{Top}(A \parallel F)_\omega$, dann ist $G = \{\sum_i \mathfrak{g}_i X^i, \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \ldots$ und $\mathfrak{g}_i \in G_i\}$ eine Idealfilterbasis mit $BF < G$. Denn wenn $\sum_i \mathfrak{f}_i X^i$ und $\sum_i \mathfrak{g}_i X^i$ Elemente der Menge G sind, dann existiert für jede natürliche Zahl i ein Ideal $\mathfrak{c}_i \in G_i$ mit $\mathfrak{c}_i \subseteq \mathfrak{f}_i \cap \mathfrak{g}_i$. Die Ideale $\mathfrak{d}_i = \sum_{j \leqq i} \mathfrak{c}_j \in G_i$ bilden eine aufsteigende Kette und es ist $\mathfrak{d}_i = \sum_{j \leqq i} \mathfrak{c}_j \subseteq \sum_{j \leqq i} \mathfrak{f}_j = \mathfrak{f}_i$ und ebenso $\mathfrak{d}_i \subseteq \mathfrak{g}_i$. Damit ist $\sum_i \mathfrak{d}_i X^i \subseteq \sum_i \mathfrak{f}_i X^i \cap \sum_i \mathfrak{g}_i X^i$ und G eine Idealfilterbasis. Es ist $(\bar{G})^{(i)} \subseteq G_i$. Sei umgekehrt $\mathfrak{g}_i \in G_i$, dann sei

$$\mathfrak{f}_j = \begin{cases} \mathfrak{g}_i & \text{für } j \leqq i \\ A & \text{für } j > i \end{cases}.$$

$\mathfrak{f} = \sum_i \mathfrak{f}_j X_e$ ist ein Ideal in G mit $\mathfrak{f}^{(i)} = \mathfrak{g}_i$ und damit ist auch $G_i \subseteq (\bar{G})^{(i)}$. Es ist also $\varphi(\bar{G}) = (G_i)$. Die Vollständigkeit des Verbandshomomorphismus φ und die Behauptung b) folgen trivial aus Hilfssatz 4.

Wenn H ein Element von $\boldsymbol{Top}^h(B \parallel \overline{BF})$ mit $\varphi(H) = (G_i)$ ist, dann gilt für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{f}$ aus H: $\mathfrak{f} \geqq \mathfrak{g} = \sum_i \mathfrak{g}^{(i)} X^i \in G$ für ein gewisses homogenes Ideal $\mathfrak{g}$. Daher ist $\bar{G} < H$ für alle $H \in \varphi^{-1}(G_i)$ und damit $\bar{G} = \inf \varphi^{-1}(G_i)$. Nach Hilfssatz 4 ist $\overline{\bar{G}\, \boldsymbol{C}\, \overline{BF}^{(i)}} = \overline{G_i\, \boldsymbol{C}\, F}$. Darum folgt aus $\overline{\bar{G}\, \boldsymbol{C}\, \overline{BF}} = \bar{G}$ stets $\overline{G_i\, \boldsymbol{C}\, F} = G_i$ für alle natürlichen Zahlen i. Sei umgekehrt $\overline{\bar{G}\, \boldsymbol{C}\, \overline{BF}^{(i)}} = G_i$ für alle natürlichen Zahlen i und $\mathfrak{f} \in \bar{G}\, \boldsymbol{C}\, \overline{BF}$. Dann existiert für jedes i ein Ideal $\mathfrak{g}_i \in G_i$ mit $\mathfrak{f}^{(i)} \supseteq \mathfrak{g}_i$. Es ist $\mathfrak{f}^{(i)} \supseteq \mathfrak{g}_i' = \sum_{j \leqq i} \mathfrak{g}_j \in G_i$ und damit $\mathfrak{f} = \sum_i \mathfrak{f}^{(i)} X^i \supseteq \sum_i \mathfrak{g}_i' X^i \in G$. $G > \bar{G}\, \boldsymbol{C}\, \overline{BF}$ gilt trivialerweise. Somit ist c) bewiesen.

8. Hilfssatz. *Sei F eine Lineartopologie in einem komutativen Ring A und $B = A[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über A und seien G, H zwei homogene Lineartopologien in B mit $G > \overline{BF}$, $\overline{H\, \boldsymbol{C}\, \overline{BF}} = H$. Aus $H^{(i)} < G^{(i)}$ für alle natürlichen Zahlen i folgt dann $H < G$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{g}$ ein homogenes Ideal aus G und $B\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{g}$. Aus $\overline{H\, \boldsymbol{C}\, \overline{BF}} = H$ folgt, daß es ein homogenes Ideal $\mathfrak{h}^* \in H$ mit $B\mathfrak{f} + \mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{h}^*$ für alle $\mathfrak{h} \in H$ gibt. Da $H^{(i)} < G^{(i)}$ ist, existiert für jede natürliche Zahl i ein homogenes Ideal $\mathfrak{h}_i \in H$ mit $\mathfrak{g}^{(i)} \supseteq \mathfrak{h}_i^{(i)}$. Damit gilt $\mathfrak{g}^{(i)} = (\mathfrak{g} + B\mathfrak{f})^{(i)} = \mathfrak{g}^{(i)} + \mathfrak{f} \supseteq \mathfrak{h}\mathfrak{f}_i^{(i)} + \mathfrak{f} = (\mathfrak{h}_i + B\mathfrak{f})^{(i)} \supseteq (\mathfrak{h}^*)^{(i)}$, und daher ist $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{h}^*$, was zu zeigen war.

9. Wenn A ein beliebiger kommutativer Ring und F eine Lineartopologie in A ist, dann bezeichnen wir mit $\boldsymbol{Top}_{\mathrm{C}}(A \parallel F)$ die Halbordnung aller Lineartopologien G mit $F < G < A$, in denen F dicht ist. $\boldsymbol{Top}_{\mathrm{C}}(A \parallel F)$ ist ein $\bigcup$-Hüllensystem und damit ein vollständiger $\bigcup$-Teilbund von $\boldsymbol{Top}(A \parallel F)$.

10. Satz. *Sei F eine Lineartopologie in einem kommutativen Ring A und $B = A[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über A. Dann gibt es einen Verbandsisomorphismus*

$$\mathbf{Top}_{\mathrm{C}}^{h}(B \parallel \overline{BF}) \overset{\sim}{\leftarrow} \mathbf{Top}_{\mathrm{C}}(A \parallel F)_{\omega}\,.$$

Beweis. Die Einschränkung der Abbildung φ von Satz 7 auf $\mathbf{Top}_{\mathrm{C}}^{h}(B \parallel \overline{BF})$ ist nach Hilfssatz 8 eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf $\mathbf{Top}_{\mathrm{C}}(A \parallel F)_{\omega}$. Da φ ein Verbandshomomorphismus und $\mathbf{Top}_{\mathrm{C}}^{h}(B \parallel \overline{BF})$ ein $\bigcup$-Teilbund von $\mathbf{Top}^{h}(B \parallel \overline{BF})$ ist, ist die Einschränkung von φ auf $\mathbf{Top}_{\mathrm{C}}^{h}(B \parallel BF)$ ein Verbandsisomorphismus.

Aus diesem Satz und 2. folgt dann

11. Corollar. *Wenn F ein Lineartopologie in einem Grellschen Ring A und $B = A[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über A ist, dann existiert ein Verbandsisomorphismus*

$$\mathbf{Top}_{\mathrm{C}}^{h}(B \parallel \overline{BF}) \overset{\sim}{\leftarrow} \mathbf{Top}(A \parallel F)_{\omega}\,.$$

In einem Grellschen Ring ist jede Lineartopologie einbettungsfrei und daher für diesen Fall $\mathbf{Top}(A \parallel F)$ gut bekannt [4].

Literatur

[1] *L. Budach und H. Grell:* Arithmetisch-topologische Untersuchungen an Ringen mit eingeschränkten Minimalbedingungen. Proceedings of the I. Symposium on general topology and its relations to modern analysis and algebra, Prag, September 1961, 121—122.

[2] *L. Budach:* Aufbau der ganzen Abschließung einartiger Noetherscher Integritätsbereiche I, II. Math. Nachr. *25* (1963), 5—17, 129—149.

[3] *L. Budach:* Erweiterungstheorie der Grellschen Präschemata. Math. Nachr. *25* (1963), 339—380.

[4] *L. Budach:* Beziehungen zwischen gewisser Topologien in Noetherschen Ringen. Dieses Symposium 1966.