Tiberiu Popoviciu

Application de la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur à l'étude de certains procédés d'intégration numérique des équations différentielles

In: Miloš Ráb and Jaromír Vosmanský (eds.): Proceedings of Equadiff III, 3rd Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications. Brno, Czechoslovakia, August 28 - September 1, 1972. Univ. J. E. Purkyně - Přírodovědecká fakulta, Brno, 1973. Folia Facultatis Scientiarum Naturalium Universitatis Purkynianae Brunensis. Seria Monographia, Tomus I. pp. 241--245.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700080

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS CONVEXES D'ORDRE SUPÉRIEUR À L'ÉTUDE DE CERTAINS PROCÉDÉS D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par TIBERIU POPOVICIU

1. La plupart des formules d'approximation linéaires qui interviennent dans les procédés d'intégration numérique des équations différentielles peuvent être mises sous la forme

$$f^{(m+r)}(x_0) \approx \sum_{j=0}^{r-1} a_j f^{(j)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{r_i-1} a_{i,j} f^{(j)}(x_i). \tag{1}$$

Pour des formules particulières on peut consulter divers livres d'Analyse numérique et, en particulier, le livre bien connu de L. COLLATZ [1].

La formule (1), qu'on appelle aussi une formule de *dérivation numérique*, permet de calculer approximativement la valeur de la dérivée d'un certain ordre (d'ordre $m + r$) d'une fonction, sur un point donné (le point x_0), par une combinaison linéaire donnée des valeurs, en nombre fini, de la fonction et de certaines de ses dérivées succesives, sur des points donnés. Les a_j, $a_{i,j}$ sont des constantes données, les points distincts $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_s$ de l'axe réel appartiennent à l'intervalle borné et fermé $[a, b]$ sur lequel la fonction f est définie. Enfin les $s, r_1, r_2, \ldots, r_s$ sont des nombres naturels et r, m des entiers non-négatifs également donnés.

La différence $R = R(f)$, entre le premier et le second membre de la formule (1), est *le reste* de cette formule de dérivation numérique. Dans un travail antérieur [3] nous avons fait une discussion assez détailée de ce reste et ultérieurement nous avons complété ces résultats [6].

2. Remarquons que le reste $R(f)$ est une fonctionnelle linéaire définie sur un certain ensemble S de fonctions f définies sur l'intervalle $[a, b]$. L'étude du reste, qui dépend évidemment de la fonction f, donc de la structure de l'ensemble S, conduit à diverses délimitations de l'erreur commis par l'approximation (1) de $f^{(m+r)}(x_0)$.

Supposons que, en général, $R(f)$ soit une fonctionnelle linéaire dèfinie sur un ensemble linéaire S de fonctions réelles et *continues*, définies sur un intervalle I de l'axe réel. La théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur ou bien la théorie des diverses généralisations de ces fonctions peuvent servir pour préciser la structure de la fonctionnelle $R(f)$ lorsqu'elle a un degré d'exactitude ou quelque chose d'analogue.

Supposons, en particulier, que S contienne tous les polynomes. Alors le degré d'exactitude, s'il existe, est un entier $n \geqq -1$ bien déterminé par la propriété que

$R(f)$ est nulle sur tout polynome de degré n et est différent de zéro sur au moins un polynome de degré $n + 1$*). Nous avons alors le *théorème* suivant:

Lorsque $R(f)$ est différent de zéro sur toute fonction $f \in S$, convexe d'ordre n, nous avons

$$R(f) = K \, . \, [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] \tag{2}$$

où $K \neq 0$ est indépendant de la fonction f et les noeuds $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$ dépendent en général de la fonction f, sont distincts et même à l'intérieur de l'intervalle I si $n \geqq 0$.

Dans ce cas nous disons que la fonctionnelle linéaire $R(f)$ est *de la forme simple.* D'ailleurs, pour la simplicité, dans un certain sens, la condition que $R(f)$ soit différent de zéro pour $f \in S$ convexe d'un certain ordre, est en même temps nécessaire et suffisante. Divers critères permettent de décider si une fonctionnelle linéaire $R(f)$ est de la forme simple ou non. De la forme simple sont les restes dans beaucoup de formules linéaires d'approximation de l'analyse. Par exemple, dans la formule de Taylor, dans la formule plus générale d'interpolation de Lagrange-Hermite, dans beuacoup de formules classiques de quadrature mécanique et dans la plupart des formules linéaires employées dans l'intégration numérique des équations différentielles. En ce qui concerne le facteur K, il est égal à $R(x^{n+1})$.

J'ai introduit (d'abord sous un autre nom) la notion de fonctionnelle linéaire de la forme simple dans un autre travail [2].

La fonction f est dite *convexe d'ordre n* sur I si toutes ses *différences divisées* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$, d'ordre $n + 1$ sur des *noeuds* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \in I$ distincts, sont positives.

Pour les définitions et les propriétés des différences divisées sur des noeuds distincts ou non, des fonctions convexes d'ordre supérieur, pour la notion de simplicité d'une fonctionnelle linéaire et pour diverses autres propriétés utilisées dans ce travail, on peut consulter mes travaux antérieurs. Par exemple, mon mémoire de „Mathematica" [4].

Remarquons enfin que, dans le cas de la simplicité de $R(f)$, la formule (2) doit être envisagée en étroite liaison avec divers théorèmes et formules de la moyenne des différences divisées. On peut aussi représenter le second membre de la formule (2) sous diverses formes. Par exemple, si $n \geqq 0$ et si la fonction f a une dérivée $(n + 1)$ ième sur l'intérieur de I, nous avons

$$R(f) = K \, . \, \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{3}$$

ξ étant un point de l'intérieur de I.

3. La fonctionnelle linéaire $R(f)$ peut ne pas être de la forme simple, mais si elle

*) Lorsque $n = -1$ on a $R(1) \neq 0$.

a un degré d'exactitude déterminé, n, sous des hypothèses assez générales (voir [4]), on a une formule de la forme

$$R(f) = A[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] + B[\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{n+2}; f] \tag{4}$$

où A, B sont indépendants de la fonction f et ξ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n+2$, ξ'_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n+2$ sont deux groupes de $n+2$ points distincts de I, dépendant en général de la fonction f. On a $A + B = R(x^{n+1}) \neq 0$ et la simplicité revient à ce qu'on peut choisir l'un des coefficients A, B égal à zéro. Si la fonction f a une dérivée $(n+1)$ ième sur l'intérieur de I $(n \geqq 0)$, de (4) on déduit la formule

$$R(f) = A_1 f^{(n+1)}(\xi) + B_1 f^{(n+1)}(\xi'), \qquad \left(A_1 = \frac{A}{(n+1)!},\ B_1 = \frac{B}{(n+1)!}\right), \tag{5}$$

ξ, ξ' étant deux points de l'intérieur de I.

Remarquons que cette fois *au lieu d'un seul groupe de points ξ_ν respectivement d'un seul point ξ nous rencontrons deux groupes de points ξ_ν, ξ'_ν, respectivement deux points ξ, ξ', en général sans liaison entre eux, de l'intervalle I de définition de la fonction f.*

Les considérations précédentes s'appliquent à une fonctionnelle linéaire de la forme

$$R(f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i - 1} c_{i,j} f^{(j)}(z_i), \tag{6}$$

où les noeuds z_i sont distincts et les coefficients $c_{i,j}$ sont indépendants de la fonction f. Lorsque $R(f)$ n'est pas nulle identiquement, donc si les $c_{i,j}$ ne sont pas tous nuls, la fonctionnelle linéaire a un degré d'exactitude n bien déterminé.

En particulier, le reste de la formule d'approximation (1) est de la forme (6).

Remarquons aussi qu'en passant à une primitive de la fonction f, l'étude du reste d'une formule de quadrature permettant le calcul approximative d'une intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, revient à l'étude d'une fonctionnelle de la forme (6) (voir [4]).

4. Nous avons cherché à rémedier le défaut mis en évidence par les lignes en italique du no. précédent.

Lorsque $R(f)$ n'est pas de la forme simple on peut chercher à rétablir la simplicité en définissant un degré de simplicité non pas par rapport aux puissances successives de x, mais par rapport à un système de Tschebycheff convenablement défini sur I. Nous avons appliqué une telle méthode dans un travail antérieur [5]. En supposant que f a un nombre suffisant de dérivées, on peut alors, dans certains cas, obtenir $R(f)$ comme une combinaison linéaire des valeurs de certaines des dérivées de f sur *un seul point* ξ (dépendant en général de la fonction f). Cette combinaison linéaire peut avoir des coefficients dépendant aussi de ξ, comme nous le montre l'exemple de notre travail cité [5].

5. Dans le cas particulier de la fonctionnelle linéaire (6) on peut obtenir une telle formule aussi de la manière suivante. On peut trouver une fonction g, définie sur I, dépendant seulement des coefficients $a_{i,j}$ et des noeuds z_i (mains non pas de la fonction f et de la fonctionnelle R), de manière que l'on ait

$$R(f) = [\underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{z_p, z_p, \ldots, z_p}_{k_p}; gf] \tag{7}$$

Le nombre total des noeuds de la différence divisée du second membre est $q + 1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_p$. On peut toujours trouver pour g un polynome, même de degré q. On le détermine comme un polynome d'interpolation de Lagrange-Hermite sur les $q + 1$ noeuds considérés.

Alors si nous supposons que $q > 0$ et que f soit q-fois dérivable (de même que g) sur l'interieur de I, nous obtenons

$$R(f) = \frac{1}{q!}(gf)^{(q)}_{x=\xi}, \tag{8}$$

ξ étant un point inérieur de I dépendant, en général, de la fonction f. Ce résultat s'obtient en tenant compte de la formule classique de Cauchy

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{q+1}; f] = \frac{f^{(q)}(\xi)}{q!},$$

ξ étant à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_{q+1}$.

6. La fonction g n'étant pas déterminée d'une manière unique, ils peuvent exister plusieurs réprésentations de la forme précédente.

Exemple. Considérons la fonctionnelle linéaire

$$R(f) = \frac{af(b) - bf(a)}{ab(b - a)},$$

où $0 < a < b$ et f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Cette fonctionnelle linéaire est de la forme

$$R(f) = [a, b; gf]$$

en choisissant, ou bien $g = \dfrac{1}{x}$, ou bien $g = \dfrac{a + b - x}{ab}$.

La formule (8) nous donne

$$R(f) = (gf)'_{x=\xi} = g'(\xi)f(\xi) + g(\xi)f'(\xi),\ \xi \in]a, b[$$

On obtient donc, soit

$$R(f) = -\frac{1}{\xi^2} f(\xi) + \frac{1}{\xi} f'(\xi), \qquad \xi \in]a, b[,$$

soit

$$R(f) = -\frac{1}{ab} f(\xi) + \frac{a+b-\xi}{ab} f'(\xi), \qquad \xi \in]a, b[.$$

Dans les deux formules le nombre ξ n'est évidemment pas le même. Pour justifier cette affirmation il suffit de prendre $f = x^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Collatz, L.: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen,* 1955.

[2] Popoviciu, T.: *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei,* Lucrările Ses. Gen. stiințifice ale Acad. RPR din 2–12 iunie 1950, 183–186 (1950)

[3] Popoviciu T.: *Asupra restului în unele formule de derivare numerică* (Sur le reste dans quelques formules de dérivation numérique). Studii si Cercetări Matematice, T. III, 53–122 (1952)

[4] Popoviciu, T.: *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse,* Mathematica, 1 (24), 95–142 (1959)

[5] Popoviciu T.: *Sur le reste de certaines formules de quadrature,* Aequationes math., 2, 265–268 (1969)

[6] Popoviciu T.: *Das Restglied in einigen Formeln der numerischen Integration von Differentialgleichungen,* Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik, B. 5, 117–129 (1971)

L'adresse de l'auteur:

Tiberiu Popoviciu
Institutul de Calcul
37 Str. Republicii, Cluj
Roumanie