Karel Lepka

Dílo Matyáše Lercha z teorie čísel

in: Sborník Vojenské akademie v Brně, Vojenská akademie, Brno 1997, sv. 1, s. 161–171

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501878

RNDr. Karel Lepka

DÍLO MATYÁŠE LERCHA Z TEORIE ČÍSEL

Redakci došlo 27. října 1996

Recenzent Prof. RNDr. Ladislav Skula, DrSc.

R e s u m é :

Příspěvek je věnován 75. výročí úmrtí vynikajícího českého matematika Matyáše Lercha. Kromě jeho životopisu jsou uvedeny nejdůležitější výsledky z teorie čísel a připojen seznam Lerchových prací z této oblasti matematiky.

1. Životopis M. Lercha

3. srpna 1997 uplyne 75 let od smrti českého matematika Matyáše Lercha. Poněvadž jeho vědecká a pedagogická činnost je spojena i s brněnskými vysokými školami, považujeme za vhodné si tuto osobnost připomenout.

Matyáš Lerch se narodil 20. února 1860 v Milínově, což je malá vesnice poblíž Sušice. Jeho otec Vojtěch Lerch byl drobný zemědělec. Již jako malé dítě byl velmi čilý a bystrý, ale v šesti letech utrpěl vážný úraz a po vyléčení zůstala jeho levá noha ohnuta v koleně, takže mohl chodit jen s pomocí jedné berle.

Následkem tohoto úrazu začal chodit do školy až v devíti letech, když se jeho rodiče přestěhovali do Sušice. Lerch byl od počátku výborným žákem a záhy se začalo projevovat jeho mimořádné nadání pro matematiku. Po skončení měšťanské školy nastoupil krátce v továrně Františka Scheinosta v Sušici, kde se měl stát úředníkem.

Přestože finanční situace jeho rodičů nebyla nejlepší a úřednická kariéra byla lákavá a mladý Matyáš by byl přes svůj hendikep finančně zabezpečen, rozhodl se pro další studium. Složil úspěšně přijímací zkoušky a pro mimořádně dobré výsledky mu byla udělena výjimka, takže mohl nastoupit hned do pátého ročníku. Studium začal na reálném gymnáziu v Plzni, maturitu složil v roce 1880 na gymnáziu v Rakovníku. Po prázdninách téhož roku se dal zapsat na České vysoké učení technické jako řádný posluchač odboru inženýrského stavitelství. Na technice studoval tři roky, jeho učiteli byli mj. i *Eduard Weyr, Gabriel Blažek a František Tilšer*. Lerch měl v úmyslu vykonat učitelskou zkoušku a stát se středoškolským učitelem. Toto mu vzhledem k jeho tělesné vadě nebylo umožněno a tak se začal plně věnovat pouze matematice. Ve školním roce 1883–1884 se stal mimořádným posluchačem české univerzity, jeho profesorem byl *F. J. Studnička*, který si nadaného studenta velice oblíbil. V dalším školním roce studoval v Berlíně, neboť získal státní stipendium 800 zlatých. Zde byli jeho profesory nejlepší němečtí matematici té doby—*Weierstrass, Kronecker, Fuchs a Runge*. Zde také poznal některé mladé matematiky, mezi nimi byla *Soňa Kovalevská, Heffter, Köhler* a další.

Po návratu do Prahy se Lerch v roce 1886 habilitoval a byl jmenován soukromým docentem pražské techniky. V této době začala také jeho rozsáhlá publikační činnost. V období 1886–1896 uveřejnil kolem 110 článků, a to nejen v časopisech domácích, ale také v renomovaných časopisech zahraničních, jako byly *Comptes rendus, Acta mathematica, Journal für die reine und angewandte Mathematik* a jiné. Seznam evropských a amerických matematiků, jimž Lerch posílal separáty svých prací obsahuje více než sto adres. Zvláštního uznání se Lerchovi dostalo od vynikajícího francouzského matematika *Ch. Hermita*, který vysoce oceňoval Lerchovu vědeckou práci. Jak ukazuje jejich vzájemná korespondence, Hermite měl k Lerchovi vřelý vztah.

Přestože se Lerch stal světově uznávaným matematikem, nepodařilo se mu získat profesuru na některé z českých vysokých škol a proto přijal nabídku na jmenování profesorem na univerzitě ve švýcarském Freiburgu. Lerch působil ve Švýcarsku deset let a v tomto období došlo v jeho životě k řadě významných změn. Kromě toho, že se podstatně zlepšila jeho hmotná situace, podstoupil v roce 1900 náročnou operaci u doktora Hessinga, takže po ní mohl odložit berlu a chodit jenom o holi, na kratší vzdálenosti i bez hole. V roce 1897 za ním přijela jeho čtrnáctiletá neteř Růžena Sejpková, která mu vedla domácnost, takže se mohl věnovat plně pedagogické a publikační činnosti, která v tomto období vyvrcholila a dostalo se jí i významného mezinárodního ocenění, jak o tom bude ještě zmíněno.

Přes všechny pocty, kterých se mu v cizině dostalo, Lerch se chtěl vrátit do vlasti a proto ho velice mrzelo, že byl několikrát opomenut při jmenování profesorů na českých vysokých školách. Vrátit se zpět do vlasti se mu povedlo až v roce 1906, kdy byl jmenován řádným profesorem brněnské techniky. Na této škole působil až do roku 1920, kdy přešel jako profesor na nově zřízenou Masarykovu univerzitu v Brně. Po příchodu do Brna se Lerch dočkal uznání i doma. Byl zvolen čestným členem Jednoty českých matematiků a fyziků, v roce 1909 získal čestný doktorát filosofie pražské university a ve školním roce 1908–1909 byl děkanem odboru strojního inženýrství brněnské techniky. V té době se však jeho zdravotní stav postupně zhoršoval. Lerch totiž trpěl cukrovkou, která se tehdy prakticky nedala léčit, neboť inzulín ještě nebyl objeven. Ze zdravotních důvodů musel odmítnout jmenování rektorem brněnské techniky a také jeho publikační činnost poklesla.

Závěr svého neobyčejného života strávil Lerch budováním matematického ústavu Masarykovy univerzity. Zde se stal jeho asistentem *Otakar Borůvka*, který se stal pokračovatelem v jeho díle a také dosáhl světového věhlasu. Při prázdninovém pobytu v Sušici dostal Lerch zápal plic a dne 3. srpna 1922 zemřel.

2. Lerchovo dílo z teorie čísel

Matyáš Lerch publikoval v teorii čísel 52 prací, jejichž seznam je uveden v závěru článku. Lerchovy práce jsou psány česky, německy a francouzsky a polsky a jsou publikovány jak v renomovaných zahraničních časopisech, tak i v časopisech domácích. V tomto seznamu nalezneme řadu významných prací, které významným způsobem přispěly k rozvoji teorie čísel. Zpočátku se Lerch věnoval aritmetickým funkcím, kde dokázal řadu zajímavých tvrzení. Tak např. v práci [L2] odvodil vzorce

$$\sum_{\varrho=0}^{[\frac{n}{2}]} \psi(n-\varrho), \varrho = n$$

a

$$\sum_{\varrho=0}^{n} \psi(n+\varrho, \varrho) = 2n.$$

V pracích [L5] a [L10] dokázal různými způsoby vzorec

$$\sum_{a=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \psi(m-an, a) = \sum_{a=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \chi(m-an, a),$$

kde $\psi(a,b)$ je počet dělitelů čísla a, které jsou větší než b,
$\chi(a,b)$ je počet dělitelů čísla a, které jsou menší než b.

V roce 1895 publikoval článek [L19], kde se poprvé věnoval kvadratickým formám a zde dosáhl největších úspěchů. Jeho stěžejní dílo v této oblasti, *Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers* (Pojednání o výpočtu počtu tříd binárních kvadratických forem s celočíselnými koeficienty) bylo v roce 1900 oceněna Velkou cenou francouzské akademie věd v Paříži. Toto ocenění získal Lerch jako jediný. Originál této práce je [L46], zkrácenou a upravenou verzi publikoval v Acta Mathematica [L43], [L45].

Binární kvadratická forma má tvar

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

její diskriminant je $D = b^2 - 4ac$, pro $D < 0$ klademe $-\Delta = D$. Zavedeme-li substituci

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

vznikne nová forma $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$. Tyto dvě formy se nazývají ekvivalentní. Všechny formy navzájem ekvivalentní tvoří určitou třídu kvadratických forem. Formy téže třídy mají stejný diskriminant. Naopak dvě formy, které mají stejný diskriminant, mohou patřit do různých tříd. Počet tříd kvadratických forem příslušných k danému diskriminantu je konečný. Výraz $Cl(-\Delta)$, resp. $Cl(D)$ označuje potom *počet tříd kvadratické formy* se záporným, resp. kladným diskriminantem. V práci [L23] dokázal Lerch vzorce

$$\frac{2}{\tau}\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right] Cl(-\Delta) = -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(-\frac{\Delta}{\alpha}\right) E\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)$$

kde m je libovolné celé číslo nedělitelné Δ,
$\tau = 6$ pro $\Delta = 3$,
$\tau = 4$ pro $\Delta = 4$,

$\tau = 2$ jinak
$E(x)$ je celá část x
a

$$Cl(-\Delta) = \frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta}{\nu}\right) \cos\frac{2\nu x\pi}{\nu}$$

kde $0 \leq x \leq \frac{1}{\Delta}$.
(Pro $x = 0$ dostáváme známou Dirichletovu rovnici.)

V práci [L46] Lerch odvodil nové, prakticky použitelné vzorce pro počet tříd. Vzorce, které předtím odvodili Kronecker a Dirichlet, byly zejména v případě kladného diskriminantu v praxi nepoužitelné. Nejdůležitější Lerchem odvozené vzorce jsou následující:

$$\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} e^{\frac{n^2\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta}}}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

a

$$\frac{1}{\tau}Cl(-\Delta) = \sum_{1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta}{m}\right) \frac{1}{1 + e^{\frac{m\pi\sqrt{2\Delta}}{\Delta}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta}{m}\right) \frac{1}{\sinh\frac{2m\pi}{\sqrt{2\Delta}}}$$

pro $\Delta > 0$. Pro případ kladného diskriminantu D odvodil Lerch následující dva vzorce:

$$Cl(D)\ln E(D) = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2} dx + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{n^2\pi}{D}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

a

$$\frac{1}{2}Cl(D)\ln E(D) = \sqrt{D} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{2D}}} + 1} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \ln \frac{1 + e^{-\frac{n\pi\sqrt{2D}}{D}}}{1 - e^{-\frac{n\pi\sqrt{2D}}{D}}}$$

kde $E(D) = \frac{T+U\sqrt{D}}{2}$ a $T^2 - DU^2 = 4$
$\left(\frac{D}{n}\right)$ resp. $\left(-\frac{D}{n}\right)$ je Legendreův symbol
a $E(D)$ je základní Pellova jednotka k diskriminantu D.

Práce [L42] se týká *Fermatových kvocientů*

$$q(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p},$$

kde p je prvočíslo a a libovolné číslo, které není dělitelné p. V této práci Lerch dokázal vztah

$$\sum_{a=1}^{p-1} q(a) \equiv N \pmod{p},$$

kde

$$N = \frac{(p-1)! + 1}{p}$$

je tzv. *Wilsonův kvocient.*

S využitím logaritmických vlastností Fermatových kvocientů a dalších jednoduchých identit dokázal Lerch důležitý vzorec

$$q(a) \equiv \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu a} \left[\frac{\nu a}{p}\right] \pmod{p}$$

Z řady dalších zajímavých, zde odvozených kongruencí uvádíme tyto:

$$\sum_{a=1}^{p-1} a q(a) \equiv \frac{1}{2} \pmod{p}$$

Pro prvočísla tvaru $4n+3$ platí

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

a pro prvočísla tvaru $4n+1$ platí

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) \equiv (-1)^{n-1} 2B_n \pmod{p},$$

kde $\left(\frac{\nu}{p}\right)$ je *Legendreův symbol*
a B_n je n-té *Bernoulliho číslo*
Označíme-li $Cl(-p)$ počet tříd kvadratických forem se záporným diskriminantem $-p$, platí kongruence

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) \equiv Cl(-p) \pmod{p}$$

pro $p = 4n+3$ a

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

pro $p = 4n+1$.

Jednou z aplikací, kterou zde Lerch uvádí je řešení neurčité rovnice

$$ax - py = 1 \qquad p \text{ prvočíslo.}$$

Řešení této rovnice je uvedeno ve tvaru

$$x = a - 12 \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu \left[\frac{a\nu}{p} \right].$$

3. Závěr

Matyáš Lerch se stal prvním českým matematikem, jehož práce získaly věhlas a uznání. Jeho práce jsou i po šedesáti letech, které uplynuly od jeho smrti, přímo citovány v publikacích zahraničních autorů. Z teorie čísel jsou to zejména práce [L22], [L42] a [L46]. Řada výsledků, jichž dosáhl, je dodnes v matematické literatuře označována jeho jménem. Práce, které publikoval, jsou psány srozumitelně a mají i vysokou jazykovou úroveň. Přestože Lerchova publikační činnost byla zejména v mladších letech velmi intenzívní, Lerch nepublikoval žádnou monografii ani učebnici, ačkoliv dosažené výsledky by ho k tomu v mnoha oborech opravňovaly.

Významná byla i jeho činnost pedagogická. Jeho přednášky měly vysokou úroveň, byl i náročným examinátorem. Své žáky vedl k tomu, aby samostatně studovali matematickou literaturu.

Lerchův žák prof. Otakar Borůvka zhodnotil význam M. Lercha těmito slovy: „Význam Matyáše Lercha je především pro vědecké pracovníky všech oborů v přesnosti myšlení a jasnosti výkladu. Dále v tom, že M. Lerch měl široké znalosti z oborů, které byly blízké jeho vlastnímu pracovnímu zaměření, že nově získané výsledky ve svém oboru rozšiřoval podle možností do oborů příbuzných a měl velké porozumění pro aplikaci cizích výsledků, které zpracovával podle svého založení.

Koncem minulého století se začala rozvíjet teorie množin a Lerch byl první český matematik, který nové myšlenky přenášel do české literatury. Zdá se například velmi pravděpodobné, že název množina pochází od Lercha. Soudíme tak z toho, že Lerch slovo množina běžně používá, kdežto toto slovo u dřívějších autorů nalezeno nebylo.

Velmi význačné se také jeví působení pedagogické na universitách a technikách a z toho plynoucí množství Lerchových následníků.“

4. Seznam Lerchových prací z teorie čísel

[L1] Expression analytique du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers. Zprav. KČSN **1885**, 414–415.

[L2] Deux théorèmes d'arithmétique. Věstník KČSN **1887**, 683–688.

[L3] Sur une propriétè des nombres. Journal de Teixeira **8**, 161–163.

[L4] Modification de la troisième démonstration donnée par Gauss de la loi de réciprocité de Legendre. Journal de Teixeira **8**, 137–146.

[L5] Sur une formule d'arithmètique. Darboux Bull. (2) **12**. 100–108.

[L6] Théorèmes d'arithmétique. Darboux Bull. (2) **12**, 121–126.

[L7] Sur une formule d'arithmétique. C. R. **106**, 186–187.

[L8] Sur le développement en série de certaines fonctions arithmétiques. C. R. **108**, 171–174.

[L9] Různé věty aritmetické. Čas. pro pěstování mat. a fyziky **21**, 90–95, 185–190.

[L10] Sur quelques théorèmes d'arithmétique. Zprav. KČSN **1894**, 1–11.

[L11] Bemerkungen über eine Klasse arithmetischer Lehrsätze. Zprav. KČSN **1894**, 1–20.

[L12] Ueber eine arithmetische Relation. Zprav. KČSN **1894**, 1–16.

[L13] Sur une théorème de Kronecker. Zprav. KČSN **1893**, 1–17.

[L14] Sur une intégrale définie qui représente la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Chicago Congress, Math. Papers. I, 165–166.

[L15] Sur diverses formules d'arithmétique. Journal de Teixeira **12**, 129–136.

[L16] Poznámky aritmetické. Čas. pro pěstování mat. a fyziky **24**, 25–34, 128–134.

[L17] Poznámka aritmetická. Čas. pro pěstování mat. a fyziky **24**, 228–230.

[L18] Logarithmus faktorielly. Čas. pro pěstování mat. a fyziky **24**, 129–132.

[L19] Sur le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant négatif. C. R. **121**, 870–880.

[L20] Sur une théorème de Zolotarev. Bull. ČA **1896**, 34–37.

[L21] O jisté aritmetické větě Zolotareva. Rozpravy ČA **5**, 1–8.

[L22] Sur quelques analogies des sommes de Gauss. Zprav. KČSN **1897**, 1–16.

[L23] Sur quelques formules relatives au nombre des classes. Darboux Bull. (2), **21**, 290–304.

[L24] O součtech Gaussových. Čas. pro pěstování mat. a fyziky **28**, 1–24.

[L25] O počtu tříd kvadratických forem záporného diskriminantu. Rozpravy ČA **7**, No.4, 1–16.

[L26] Arithmetické odvození Lejeune-Dirichletových výsledků o počtu tříd kvadratických forem.
Rozpravy ČA **7**, No.5, 1–51.

[L27] O souvislosti Legendreova znaménka s čísly Moebiovými. Rozpravy ČA **7**, No.6, 1–12.

[L28] O součtu celých v lomené aritmetické posloupnosti druhého stupně a jeho souvislosti s počtem tříd kvadratické formy záporného diskriminantu. Rozpravy ČA **7**, No.7, 1–8.

[L29] Resumé de trois notes d'arithmétique. Zprav. KČSN **1898**, 33–38.

[L30] Sur la fonction $\zeta(s)$ pour les valeurs impaires de l'argument. Journal de Teixeira **14**, 65–69.

[L31] Sur la formule fondamentale de Dirichlet qui sert à déterminer le nombre des classes de formes quadratiques binaires définies. C. R. **135**, 1314–1315.

[L32] Démonstration élémentaire d'un théorème arithmétique.
Zprav. KČSN **1903**, Nr.2, 1–3.

[L33] Über den fünften Gaußschen Beweis des Reziprozitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Zprav. KČSN **1903**, 1–19.

[L34] Sur la cinquième démonstration de Gauß de la loi de réciprocité de Legendre. Journal de Teixeira **15**, 97–104.

[L35] Bemerkung über die Theorie der Gaußschen Summen. Zprav. KČSN **1903**, 1–4.

[L36] Zur theorie der Gaußschen Summen. Math. Ann. **57**, 554–567.

[L37] Über die arithmetische Gleichung $Cl(-\Delta) = 1$. Math. Ann. **57**, 568–570.

[L38] Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental. Journ. de Math. (5), **9**, 337–401.

[L39] Sur quelques applications des sommes de Gauss. Annali di Mat. (3) **11**, 79–91.

[L40] Sur quelques applications d'un théorème arithmétique de Jacobi. Krakau Anz. **1904**, 55–70.

[L41] O liczbie klas form kwadratowych dwójkowych o wyróżniku zasadniczym dodatnim. Prace **15**, 91–113.

[L42] Zur Theorie des Fermatschen Quotienten $\frac{a^{p-1}-1}{p} = q(a)$. Math. Ann. **60**, 471–490.

[L43] Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers. Acta Math. **29**, 333–424.

[L44] Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat. C. R. **142**, 35–38.

[L45] Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers. Acta Math. **30**, 203–293.

[L46] Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers. Mém. Sav. Étr. **1906**, 1–244.

[L47] Příspěvky k vlastnostem počtu tříd kvdratických forem záporného diskriminantu. Rozpravy ČA **17**, Nr.6, 1–20.

[L48] Stanovení jistých aritmetických součtů. Rozpravy ČA **20**, Nr.40, 1–14.

[L49] Sur quelques formules concernant les formes quadratiques binaires d'un discriminant négatif. Ann. do Porto **6**, 72–76.

[L50] Zjednodušení Lejeune-Dirichletova postupu při odvozování vzorců pro počet tříd kvadratických forem záporného diskriminantu. Čas. pro pěstování mat. a fyziky **40**, 425–466.

[L51] Poznámky o počtu tříd kvadratických forem. Zprav. KČSN **20**, 120–144.

[L52] Úvahy o theorii kvadratických zbytků pro kmenné moduly s novými vztahy k theorii kvadratických forem s kmennými zápornými determinanty. Spisy MU **1923**, Nr.34, 1–44.

L i t e r a t u r a:

[1] **ČUPR K.** Profesor Matyáš Lerch, Časopis pro pěstování mat. a fyziky **52**, 301–313.
[2] **FRANK L.** : O životě Matyáše Lercha , Časopis pro pěstování mat. a fyziky **78**, 119–137.
[3] Jahrbuch über der Forschritte der Mathematik, Physik und Astronomie 1885–1923.
[4] **LEPKA K.** : Matyáš Lerch's Work on Number theory, přír. fak. MU Brno, 1995.
[5] **MACHALOVÁ J.**: O Matyáši Lerchovi, Diplomová práce, přír. fak. M U, Brno 1993.
[6] **ŠKRÁŠEK J.** : Seznam prací profesora Matyáše Lercha, Časopis pro pěstování mat. a fyziky **78**, 139–148.

A b s t r a c t :

This paper deals with M. Lerch's Work on number theory. After a short biography, there are published the most important Lerch's results on number theory and the list of Lerch's papers on this branch.

Key words: Number theory, binary quadratic form, quadratic residue, Gauss sum, Fermat quotient.