Matyáš Lerch

Poznámky k theorii interpolace

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 1 (1892), č. 32, 1–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501718

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 32.

POZNÁMKY

K THEORII INTERPOLACE.

NAPSAL
M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 5. LEDNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

1. Budiž

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

libovolná celistvá funkce stupně n, $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ pak libovolné veličiny a utvořme podíl determinantů

$$(1)\qquad F_h(x_0, x_1, x_2, \ldots x_h) = \frac{\begin{vmatrix} 1\, x_0\, x_0^2 \ldots x_0^{h-1}\, F(x_0) \\ 1\, x_1\, x_1^2 \ldots x_1^{h-1}\, F(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1\, x_h\, x_h^2 \ldots x_h^{h-1}\, F(x_h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1\, x_0\, x_0^2 \ldots x_0^h \\ 1\, x_1\, x_1^2 \ldots x_1^h \\ \cdots\cdots \\ 1\, x_h\, x_h^2 \ldots x_h^h \end{vmatrix}}.$$

Násobímeli sloupce determinantu v čitateli po řadě čísly a_n, a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots$ a odečtemeli výsledky od sloupce posledního, zbude determinant

$$\left| 1, x_0, x_0^2, \ldots x_0^{h-1}, a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-h} x_0^h \right|,$$

kde jsme se omezili na vyjádření prvního řádku. Odtud pak obdržíme

$$(2)\qquad F_h(x_0, x_1, \ldots x_h) = \sum_{a=0}^{n-h} a_a \frac{\left| 1, x_0, x_0^2, \ldots x_0^{h-1}, x_0^{n-a} \right|}{\left| 1, x_0, x_0^2, \ldots x_0^h \right|}.$$

Jednotlivé členy posledního součtu jsou celistvé souměrné úkony veličin $x_0, x_1, x_2, \ldots x_h$, jak brzy ukážeme.

Rozvinemeli čitatele podlé prvků posledního sloupce a vyjádřímeli jmenovatele rozdílovým součinem, obdržíme po zkrácení

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} & F_h(x_0, x_1, \ldots x_h) \\ &= \frac{F(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_h)} + \frac{F(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_h)} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{F(x_h)}{(x_h - x_0)(x_h - x_1)\ldots(x_h - x_{h-1})}, \end{aligned} \right.$$

z čehož plyne jednoduchým výpočtem vztah

$$(4)\qquad F_h(x_0, x_1, \ldots x_h) = \frac{F_{h-1}(x_0, x_1, \ldots x_{h-1}) - F_{h-1}(x_h, x_1, \ldots x_{h-1})}{x_0 - x_h},$$

který sloužiti může k rekurrentnímu stanovení funkcí F_h. Máme tu postupně

$$F_1(x_0, x_1) = \frac{F(x_0) - F(x_1)}{x_0 - x_1}, \qquad F_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{F_1(x_0, x_1) - F_1(x_2, x_1)}{x_0 - x_2}, \ldots$$

1*

Volímeli $F(x) = x^n$, bude tu postupně

$$F_1(x_0, x_1) = \sum_{a_0 + a_1 = n-1} x_0^{a_0} x_1^{a_1}, \quad F_2(x_0, x_1, x_2) = \sum_{a_0 + a_1 + a_2 = n-2} x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \ldots$$

obecně

$$F_h(x_0, x_1, \ldots x_h) = \sum x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_h^{a_h}; \quad \begin{pmatrix} a_0, a_1, \ldots a_h = 0, 1, 2, \ldots \\ a_0 + a_1 + \ldots + a_h = n - h \end{pmatrix}$$

čili explicite vyjádřeno

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 1\, x_0\, x_0^2 \ldots x_0^{h-1}\, x_0^n \\ 1\, x_1\, x_1^2 \ldots x_1^{h-1}\, x_1^n \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1\, x_h\, x_h^2 \ldots x_h^{h-1}\, x_h^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1\, x_0\, x_0^2 \ldots x_0^h \\ 1\, x_1\, x_1^2 \ldots x_1^h \\ \ldots\ldots \\ 1\, x_h\, x_h^2 \ldots x_h^h \end{vmatrix} = \sum_{(a_0 + a_1 + \ldots + a_h = n - h)} x_0^{a_0} x_1^{a_1} \ldots x_h^{a_h}.$$

Vzorec tento dlužno považovati za zobecnění elementarné rovnice

$$\frac{x_0^n - x_1^n}{x_0 - x_1} = x_0^{n-1} + x_0^{n-2} x_1 + \ldots x_1^{n-1}.$$

Veličina (5) v pravo je patrně celistvá souměrná funkce veličin $x_0, x_1, \ldots x_h$, rozměru $n - h$, a totéž platí následovně o výrazu (2), který tedy lze psáti:

$$(2^*) \qquad F_h(x_0, x_1, \ldots x_h) = \sum_{(a + a_0 + a_1 + \ldots + a_h = n - h)} a_a x_0^{a_0} x_1^{a_1} \ldots x_h^{a_h}.$$

2. Z rovnice (4) máme

$$F(x_0) = F(x_1) + (x_0 - x_1) F_1(x_0, x_1),$$
$$F_1(x_0, x_1) = F_1(x_1, x_2) + (x_0 - x_2) F_2(x_0, x_1, x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{h-1}(x_0, x_1, \ldots x_{h-1}) = F_{h-1}(x_1, x_2, \ldots x_h) + (x_0 - x_h) F_h(x_0, x_1, \ldots x_h),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Násobímeli tyto rovnice po řadě $1, x_0 - x_1, \ldots (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_{h-1}), \ldots$ a sečtemeli výsledky až k $h = m$, obdržíme

$$(\alpha) \quad \begin{cases} F(x_0) = F(x_1) + (x_0 - x_1) F_1(x_1, x_2) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) F_2(x_1, x_2, x_3) \\ \qquad + \ldots + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_{m-1}) F_{m-1}(x_1, x_2, \ldots x_m) \\ \qquad + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_m) F_m(x_0, x_1, \ldots x_m). \end{cases}$$

Jelikož při odvození vzorce (4) nepotřebovali jsme předpokládati, že $F(x)$ je celistvá funkce, nýbrž může $F(x)$ ve vzorci (1) znamenati zcela libovolnou funkci, platí také vzorce (1), (4), (α) zcela identicky, a máme takto z (α) pro libovolnou funkci $f(x)$ *Newtonův* či *Gaussův* interpolační vzorec

$$(6) \quad \begin{cases} f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f_1(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \qquad + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{m-1}) f_{m-1}(x_1, x_2, \ldots x_m) \\ \qquad + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m) f_m(x, x_1, x_2, \ldots x_m), \end{cases}$$

který zobecňuje známý t. zv. vzorec *Taylorův*, jenž odtud vznikne pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$.

Poslední člen $(x - x_1) \dots (x - x_m) f_m(x, x_1, x_2, \dots x_m) = R_m$ se při interpolaci vynechává (poněvadž právě neznáme hodnotu funkce $f(x)$ pro libovolné místo) a zove se zbytkem interpolačním. Jedná se o sblížené udání chyby, jaké se dopustíme vynecháním zbytku R_m.

K tomu účelu užijeme následující *důležité věty.*

Utvořme funkce rozdílové

$$F(x), \quad \Delta F(x) = F(x) - F(x - \xi), \quad \Delta^2 F(x) = \Delta F(x) - \Delta F(x - \xi),$$
$$\dots \Delta^k F(x) = \Delta^{k-1} F(x) - \Delta^{k-1} F(x - \xi), \dots,$$

kde ξ je realná veličina kladná neb záporná. Pak zní míněná věta následovně: *Mizíli realná spojitá funkce realné proměnné $F(x)$ na $n + 1$ místech $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$, pak lze ustanoviti dosti malé ξ tak, aby též n-tá funkce rozdílová $\Delta^n F(x)$ zmizela na jednom místě uvnitř intervallu* $(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n)$.*)

Této věty užijme nyní při determinantu

$$\text{(A)} \qquad F(z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n & f(z) \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & f(x_1) \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & f(x_n) \end{vmatrix};$$

tento jest realnou funkcí proměnné z a mizí na $n + 1$ místech: $x, x_1, x_2, \dots x_n$; musí tedy uvnitř intervallu omezeného největší a nejmenší z právě psaných veličin existovati hodnota z, pro niž $\Delta^n F(z) = 0$, t. j. pro niž

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n!\,\xi^n \Delta^n f(z) \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n & f(x_1) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n & f(x_n) \end{vmatrix} = 0;$$

řešením dle $\Delta^n f(z)$ plyne odtud rovnice

$$(7^a) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \frac{\Delta^n f(z)}{n!\,\xi^n},$$

čili dle (1):

$$(7) \qquad f_n(x, x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\Delta^n f(z)}{n!\,\xi^n},$$

takže zbytek v řadě (6) zní

$$(6^a) \qquad R_m = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) \frac{\Delta^m f(z)}{m!\,\xi^m}.$$

*) Najisto platí věta pro nekonečně malá ξ, jsouli derivace až ku n-té včetně konečny a spojity.

Vzorec (7) vyjádřen ve tvaru explicitním dle (3) přejde v následující

$$\begin{aligned}(8)\qquad \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = {} & \frac{f(x_1)}{(x-x_1).(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \\ & + \frac{f(x_2)}{(x-x_2).(x_2-x_1)\dots(x_2-x_n)} \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{f(x_n)}{(x-x_n).(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \\ & + \frac{\Delta^n f(z)}{n!\,\xi_n},\end{aligned}$$

který není nic jiného než známý *interpolační vzorec Lagrangeův* s udáním zbytku.

Z toho plyne zároveň, že interpolace Newtonova a Lagrangeova jsou stejně přesny, majíce vždy týž zbytek; jsoutě v podstatě totožny a liší se pouze formalně.

Předpokládámeli, že funkce $f(z)$ a její prvých n derivac jsou spojity na mezeře $(x, x_1, x_2, \dots x_n)$, pak plyne z okolnosti, že determinant $F(z)$ mizí na n místech $x, x_1, \dots x_n$, že též n-tá derivace jeho zmizí na určitém místě z řečené mezery;*) z toho obdržíme podobně jako výše vzorec

$$(7')\qquad f_n(x, x_1, \dots x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Zbytky Lagrangeova prokladu a též prokladu obecnějšího ustanovil na základě počtu integralního poprvé pan *Hermite.***)

3. Lagrangeův vzorec interpolační byl zobecněn panem Hermitem na uvedeném místě, a po té způsobem elementarným bez udání zbytku panem F. Gomes Teixeirou.***) Neli k týmž, tož aspoň k analogickým vzorcům bychom dospěli následujícím způsobem. Utvořme determinant

$$(\mathrm{A}')\qquad \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & \dots & z^n & f(z) \\ 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n & f(x) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n & f(x_1) \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \dots & n x_1^{n-1} & f'(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n & f(x_2) \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & \dots & n x_2^{n-1} & f'(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = F(z),$$

*) Srovnej H. A. Schwarz, Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XVII, 1882. Aneb: Gesammelte math. Abhandlungen, II. Bd. (Berlin, J. Springer, 1890) p. 307.

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 84.

***) Mémoires de la Société royale de Sciences de Liège, 2. řada, X. sv. Courso de Analyse infinitesimal, I, 2. vyd., str. 256.

jenž vznikne z determinantu (A) tím, že se určitý počet řádků nahradí derivacemi prvými, druhými atd. řádků ostatních. Vyskytnou se takto v determinantu v posledním sloupci prvky $f(x_1), f'(x_1), \dots f^{(\nu_1-1)}(x_1); f(x_2), f'(x_2), \dots f^{(\nu_2-1)}(x_2); \dots$ a součet indexů $\nu_1+\nu_2+\dots$ bude roven n. Předpokládámeli, že derivace funkce $f(z)$ jsou v intervallu $(x, x_1, x_2 \dots)$ spojité až po n-tou, pak je z determinantu patrno, že $F(z)$ mizí na $z=x$ jednoduše, na $z=x_1$ α_1-násobně, na $z=x_2$ α_2-násobně, atd., takže známe celkem $n+1$ míst nullových, z nichž některá se kupí v mnohonásobná. Z toho pak plyne, že $F^{(n)}(z)$ zmizí aspoň na jednom místě z uvažovaného intervallu, z čehož se obdrží rozvinutím n-té derivace determinantu (A′) rovnice:

$$
(9)\qquad \begin{vmatrix}
1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & f(x) \\
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\
0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \dots & (n-1)x_1^{n-2} & f'(x_1) \\
. & . & . & . & . & . & . \\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}
1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\
0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \dots & nx_1^{n-1} \\
. & . & . & . & . & . \\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\
. & . & . & . & . & .
\end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(z)}{n!},
$$

kterýžto vzorec právě obsahuje míněné zobecnění interpolace Lagrangeovy, takže zbývá pouze rozvinouti levou stranu, aby se obdržely hotové vzorce, což pro nedostatek času pomíjíme.

Uvedeme zde ještě poznámku, která nám přišla na mysl před pěti lety při studiu citované práce pana Hermitea. Týž uvádí ve svém pojednání vzorec, jejž lze takto psáti:

$$
(10)\quad \begin{cases} F(x+h) - F(x) = \Phi_1(h)\,F'(x) + \Phi_2(h)\,F''(x) + \dots + \Phi_k(h)\,F^{(k)}(x) \\ \qquad + \Phi_{k+1}(h)\,F'(x+h) + \Phi_{k+2}(h)\,F''(x+h) + \dots \\ \qquad + \Phi_{2k}(h)\,F^{(k)}(x+h) + R_k, \end{cases}
$$

kde $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_{2k}$ jsou výrazy závislé pouze na h, nezávislé na povaze funkce $F(x)$, a zbytek R_k zmizí, klademeli za $F(x)$ polynóm stupně $2k$.

Jedná se o tvar funkcí Φ, které se obdrží specialisováním funkce F; volíme právě za F polynóm stupně $2k$, aby R_k odpadlo z rovnice. Znamenámeli $\Delta F(x) = F(x+h) - F(x)$, máme rovnice

$$
\left[\Delta F^{(\lambda)}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-\lambda} \frac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+\lambda)}(x)\right] + \sum_{\nu=k+1}^{2k} \frac{h^{\nu-\lambda}}{(\nu-\lambda)!} F^{(\nu)}(x) = 0,
$$

$$
(\lambda = 0, 1, 2, \dots k).
$$

Vyloučímeli z těchto rovnic veličiny $F^{(k+1)}, F^{(k+2)}, \dots F^{(2k)}$, obdržíme

$$
(10^a)\qquad
\begin{vmatrix}
\Delta F(x) - \sum\limits_{\nu=1}^{k} \dfrac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu)}(x), & \dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!}, & \dfrac{h^{k+2}}{(k+2)!}, & \dots & \dfrac{h^{2k}}{(2k)!} \\
\Delta F'(x) - \sum\limits_{\nu=1}^{k-1} \dfrac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+1)}(x), & \dfrac{h^{k}}{k!}, & \dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!}, & \dots & \dfrac{h^{2k-1}}{(2k-1)!} \\
\Delta F''(x) - \sum\limits_{\nu=1}^{k-2} \dfrac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+2)}(x), & \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}, & \dfrac{h^{k}}{k!}, & \dots & \dfrac{h^{2k-2}}{(2k-2)!} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\Delta F^{(k)}(x) & \dfrac{h}{1!} & \dfrac{h^2}{2!} & \dots & \dfrac{h^k}{k!}
\end{vmatrix} = 0 .
$$

Z tohoto determinantu lze vypočísti $\Delta F(x)$ jako linearnou homogení funkci veličin $F'(x), F''(x), \dots F^{(k)}(x), F'(x+h), \dots F^{(k)}(x+h)$, právě tak jak udává vzorec (10) a proto obdržíme identifikací koefficientů hodnoty veličin Φ.

Vše tedy záleží na stanovení determinantu

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_0 & \dfrac{h}{1!} & \dfrac{h^2}{2!} & \dfrac{h^3}{3!} & \dots & \dfrac{h^k}{k!} \\
a_1 & \dfrac{h^2}{2!} & \dfrac{h^3}{3!} & \dfrac{h^4}{4!} & \dots & \dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_k & \dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!} & \dfrac{h^{k+2}}{(k+2)!} & \dfrac{h^{k+3}}{(k+3)!} & \dots & \dfrac{h^{2k}}{(2k)!}
\end{vmatrix} .
$$

K jeho vyčíslení vede studium determinantu na pohled specialního

$$
(11)\qquad
\Delta_0 = \begin{vmatrix}
\dfrac{x_0^{\,k}}{k!} & \dfrac{h}{1!} & \dfrac{h^2}{2!} & \dots & \dfrac{h^k}{k!} \\
\dfrac{x_0^{\,k+1}}{(k+1)!} & \dfrac{h^2}{2!} & \dfrac{h^3}{3!} & \dots & \dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dfrac{x_0^{\,2k}}{(2k)!} & \dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!} & \dfrac{h^{k+2}}{(k+2)!} & \dots & \dfrac{h^{2k}}{(2k)!}
\end{vmatrix},
$$

který lze psáti při označení $C_k = \dfrac{1}{k!\,(k+1)!\dots(2k)!}$ takto:

$$
\Delta_0 = C_k \begin{vmatrix}
x_0^{\,k}, & D^{k-1}h^k, & D^{k-2}h^k, & \dots & D^0 h^k \\
x_0^{\,k+1}, & D^{k-1}h^{k+1}, & D^{k+2}h^{k+1}, & \dots & D^0 h^{k+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_0^{\,2k}, & D^{k-1}h^{2k}, & D^{k-2}h^{2k}, & \dots & D^0 h^{2k}
\end{vmatrix},
$$

kde symbol $D^\alpha h^\beta$ značí αtou derivaci funkce h^β, tedy

$$D^\alpha h^\beta = \beta(\beta - 1)\ldots(\beta - \alpha + 1)\, h^{\beta-\alpha},$$

a zvláště $D^0 h^\beta = h^\beta$.

Tento determinant se však obdrží z výrazu

$$C_k D_{x_1}^{k-1} D_{x_2}^{k-2} \ldots D_{x_k}^{0} \begin{vmatrix} x_0^k & x_1^k & x_2^k & \ldots & x_k^k \\ x_0^{k+1} & x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & \ldots & x_k^{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^{2k} & x_1^{2k} & x_2^{2k} & \ldots & x_k^{2k} \end{vmatrix}$$

substitucí $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = h$; klademeli tedy

$$\Psi(x_0, x_1, x_2, \ldots x_k) = \begin{vmatrix} x_0^k & x_1^k & x_2^k & \ldots & x_k^k \\ x_0^{k+1} & x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & \ldots & x_k^{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^{2k} & x_1^{2k} & x_2^{2k} & \ldots & x_k^{2k} \end{vmatrix}$$

$$= x_0^k x_1^k x_2^k \ldots x_k^k \prod_{\alpha > \beta = 0,1,2,\ldots k} (x_\alpha - x_\beta),$$

bude $\dfrac{\Delta_0}{1!\,2!\ldots(k-1)!}$ rovnati se součiniteli při $\xi_1^{k-1} \xi_2^{k-2} \ldots \xi_k^0$ v rozvinutém výrazu $C_k \Psi(x_0, h + \xi_1, h + \xi_2, \ldots h + \xi_k)$. Poněvadž ale

$$\Psi(x_0, h + \xi_1, h + \xi_2, \ldots h + \xi_k)$$
$$= x_0^k (h + \xi_1)^k (h + \xi_2)^k \ldots (h + \xi_k)^k \prod_{\alpha > \beta} (\xi_\alpha - \xi_\beta) \prod_\gamma (\xi_\gamma + h - x_0),$$

$$\begin{pmatrix} \alpha > \beta = 1, 2, 3, \ldots \\ \gamma = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix},$$

musí každý člen v rozvinutém výrazu této funkce obsahovati jakožto činitele jeden člen rozvinutého součinu $\Pi(\xi_\alpha - \xi_\beta)$, jenž jest rozměru $1 + 2 + \ldots + k - 1$. Tudíž náleží člen o součinu $\xi_1^{k-1} \xi_2^{k-2} \ldots \xi_k^0$ k členům stupně nejnižšího a obdrží se, když se tento člen ze součinu $\prod\limits_{\alpha < \beta} (\xi_\alpha - \xi_\beta)$ s náležitým znamením vyjme a znásobí veličinou, již z ostatních činitelů obdržíme substitucí $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_k = 0$. Obdržíme tak

$$\frac{\Delta_0}{1!\,2!\ldots(k-1)!} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} C_k x_0^k h^{k^2} (h - x_0)^k$$

čili

$$\Delta_0 = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{1!\,2!\ldots(k-1)!}{k!\,(k+1)!\ldots(2k)!} x_0^k h^{k^2} (h - x_0)^k. \tag{11*}$$

Determinant Δ jest linearnou funkcí veličin a_α, jejíž členové přejdou v *různé* členy funkce Δ_0 substitucí $a_\alpha = \dfrac{x_0^{k+\alpha}}{(k+\alpha)!}$; z toho plyne, že determinant Δ

obdržíme, když v rozvinuté funkci (11*) nahradíme veličiny $x_0{}^{k+\alpha}$ veličinami $(k+\alpha)!\,a_\alpha$. Nacházíme takto vzorec

$$
(12)\qquad \begin{vmatrix}
a_0 & \frac{h}{1!} & \frac{h^2}{2!} & \cdots & \frac{h^k}{k!} \\
a_1 & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \cdots & \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_k & \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} & \frac{h^{k+2}}{(k+2)!} & \cdots & \frac{h^{2k}}{(2k)!}
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{1!\,2!\ldots(k-1)!}{k!\,(k+1)!\ldots(2k)!}\, h^{k^2} \sum_{\sigma=0}^{k} (-1)^\sigma \binom{k}{\sigma} (k+\sigma)!\, a_\sigma h^{k-\sigma}.
$$

Hodnota determinantu (10^a) se obdrží, klademeli zde

$$
a_{k-\alpha} = \Delta F^{(\alpha)}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-\alpha} \frac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+\alpha)}(x),
$$

takže rovnice (10^a) zní

$$
\sum_{\sigma=0}^{k} (-1)^\sigma \binom{k}{\sigma} (2k-\sigma)!\, h^\sigma \left[\Delta F^{(\sigma)}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-\sigma} \frac{h^\nu}{\nu!} F^{(\nu+\sigma)}(x)\right] = 0,
$$

z čehož následuje porovnáním s (10)

$$
\Phi_{k+\sigma} = (-1)^{\sigma+1} \binom{k}{\sigma} \frac{(2k-\sigma)!}{(2k)!} h^\sigma,
$$

$$
\Phi_\sigma = \frac{h^\sigma}{(2k)!} (-1)^\sigma \sum_{\nu=0}^{\sigma} (-1)^\nu \binom{k}{\sigma-\nu} \frac{(2k-\sigma+\nu)!}{\nu!}.
$$

Klademeli ve vzorci (10) $x+h'$ za x, $-h'$ za h, vznikne

$$
F(x+h') - F(x) = -\sum \Phi_\alpha(-h')\, F'(x+h') - \sum \Phi_{\alpha+k}(-h')\, F'(x),
$$

z čehož plyne $\Phi_\alpha(h) = -\Phi_{k+\alpha}(-h)$, $\Phi_{k+\alpha}(h) = -\Phi_\alpha(-h)$, a tedy máme dosazením do posledních výsledků jednak

$$
(10^b)\qquad \Phi_\sigma(h) = \binom{k}{\sigma} \frac{(2k-\sigma)!}{(2k)!} h^\sigma, \qquad \Phi_{k+\sigma}(h) = (-1)^{\sigma+1} \Phi_\sigma(h),
$$

jednak ale obdržíme též následující vzorec arithmetický:

$$
\sum_{\nu=0}^{\sigma} (-1)^\nu \binom{k}{\sigma-\nu} \frac{(2k-\sigma+\nu)!}{\nu!} = (-1)^\sigma \binom{k}{\sigma} (2k-\sigma)!
$$

čili elegantněji vyjádřeno:

$$
(13)\qquad \sum_{\nu=0}^{\sigma} (-1)^\nu \binom{k}{\sigma-\nu} \binom{2k-\sigma}{\nu} = (-1)^\sigma \binom{k}{\sigma}.
$$

Vzorec ten lze též vyjádřiti větou, že *součinitel při x^σ v rozvinuté a spořádané funkci*

$$(1+x)^k(1-x)^{2k-\sigma}$$

má hodnotu $(-1)^\sigma\binom{k}{\sigma}$.

Vyjádříme-li součinitele tohoto integrálem

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(0)}(1+x)^k(1-x)^{2k-\sigma}\frac{dx}{x^{\sigma+1}}=(-1)^\sigma\binom{k}{\sigma},$$

obdržíme substitucí $x=e^{2i\varphi}$ vzorec

$$(13^a)\qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos^k\varphi\,\sin^{2k-\sigma}\varphi\,e^{3(k-\sigma)i\varphi}\,d\varphi=(-1)^{k+\sigma}i^{-\sigma}\binom{k}{\sigma}2^{\sigma-3k}.$$

4. Pan Ivar Bendixson ve své zajímavé práci Extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss*) užil identity

$$(\alpha)\quad \frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-a_0}+\frac{x-a_0}{(z-a_0)(z-a_1)}+\frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(z-a_0)(z-a_1)(z-a_2)}+\dots$$
$$+\frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_n)}+\frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_n)(z-x)}$$

následujícím způsobem: Značíli $f(z)$ funkci mající uvnitř jistého oboru (S) omezeného čarou S povahu funkce celistvé, a neležíli na čáře S žádný z bodů $a_0\dots a_n$, x, kde aspoň x leží uvnitř oboru (S), pak násobme poslední identitu $f(z)\,dz$ a integrujme podél S; tím obdržíme rovnici

$$(14)\qquad f(x)=A_0+A_1(x-a_0)+A_2(x-a_0)(x-a_1)+\dots$$
$$+A_n(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})+R_n,$$

kde

$$A_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{f(z)\,dz}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_\nu)},$$

$$R_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_n)}\,\frac{f(z)\,dz}{z-x};$$

snadno ukážeme, že vzorec (14) splývá se vzorcem Newtonovým (6), *jestliže všecka místa* $a_0, a_1, \dots a_n, x$ leží uvnitř (S). Neboť za této podmínky integrály A_ν, R_n jsou spojité funkce veličin $a_0, a_1, \dots a_n, x$, které se mohou uvnitř (S) libovolně pohybovati. Poněvadž ale

$$A_\nu(a_0, a_1, \dots a_\nu)-A_\nu(a_{\nu+1}, a_1, \dots a_\nu)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{f(z)\,dz\,.\,(a_0-a_{\nu+1})}{(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_\nu)(z-a_{\nu+1})},$$

*) Acta mathematica, sv. 9.

máme

$$\frac{A_\nu(a_0, a_1, a_2, \ldots a_\nu) - A_\nu(a_{\nu+1}, a_1, a_2, \ldots a_\nu)}{a_0 - a_{\nu+1}} = A_{\nu+1}\,;$$

kromě toho jest $A_0(a_0) = f(a_0)$, a odtud soudíme, že bude

$$A_\nu(a_0, a_1, \ldots a_\nu) = f_\nu(a_0, a_1, \ldots a_\nu)\,.$$

Vzorec interpolační (6) resp. (14) redukuje funkci $f(x)$ na funkci celistvou; můžeme ale též utvořiti obecnější vzorec interpolační, kde se interpolovaná funkce nahradí výrazem racionalným lomeným. Tento obecnější vzorec interpolační bude generalisovati theorém Laurentův právě tak jako vzorec (6) zobecňuje větu Taylorovu.

Mějme v rovině věnec (S) omezený dvěma uzavřenýma čarama, vnitřní S_0 a vnější S_1; $f(z)$ buď jednoznačná funkce mající na (S) povahu funkce celistvé a znamenejtež $b_1, b_2, b_3, \ldots$ místa položená mimo (S), jinak libovolná, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pak body zcela libovolné, z nichž žádný neleží na čáře S_1. Tu pak bude

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} \frac{f(z)\,dz}{z - x}\,,$$

kde integrál je vzat v kladném směru po okraji oboru (S) a tedy sestává ze dvou částí:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_1} \frac{f(z)\,dz}{z - x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{S_0} \frac{f(z)\,dz}{z - x}\,.$$

V prvém integrálu nahraďme $\frac{1}{z - x}$ výrazem (α), v němž pišme $a_1\, a_2 \ldots$ místo $a_0\, a_1 \ldots$, v druhém pak užijme vzorce

$$(\beta)\quad \frac{1}{x - z} = \frac{1}{x - b_1} + \frac{z - b_1}{(x - b_1)(x - b_2)} + \frac{(z - b_1)(z - b_2)}{(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)} + \ldots$$
$$+ \frac{(z - b_1)(z - b_2)\ldots(z - b_{m-1})}{(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_m)} + \frac{(z - b_1)(z - b_2)\ldots(z - b_m)}{(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_m)(x - z)}\,,$$

i obdržíme tak hledaný vzorec interpolační

$$(15)\quad f(x) = A_0 + A_1(x - a_1) + A_2(x - a_1)(x - a_2) + \ldots + A_n(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$
$$+ \frac{B_1}{x - b_1} + \frac{B_2}{(x - b_1)(x - b_2)} + \ldots + \frac{B_m}{(x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_m)} + R_{m,n}\,,$$

kde položeno

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_1} \frac{f(z)\,dz}{(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_{\nu+1})}\,,$$

$$B_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_0} (z - b_1)(z - b_2) \ldots (z - b_{\nu-1}) f(z)\, dz\,,$$

$$R_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_1} \frac{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n+1})}{(z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_{n+1})} \frac{f(z)\, dz}{z - x}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_0} \frac{(z - b_1)(z - b_2) \ldots (z - b_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_n)} \frac{f(z)\, dz}{x - z}\,.$$

Máli $f(z)$ povahu funkce celistvé také uvnitř čáry S_0, zmizí patrně všecka B, takže vzorce (15) lze s výhodou užiti pouze při funkcích, jež mají uvnitř S_0 místa zvláštní. Jestliže dále funkce $f(z)$ má sice uvnitř S_0 místa zvláštní, ale máli ve všech bodech zevně S_0 (a jeli konečná pro $z = \infty$) povahu funkce celistvé, bude patrně $A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0$, takže celistvá část pravé strany se redukuje na konstantu. Nejdůležitější částí interpolačního problému jest ovšem vhodná volba veličin a, b, tak aby zbytek $R_{m,n}$ byl co možná malý.

Leží na snadě, jak třeba voliti veličiny a, b v počtu nekonečném, tak aby ve vzorci (15) bylo $\lim\limits_{m=\infty,\, n=\infty} R_{m,n} = 0$, t. j. abychom obdrželi pro $f(x)$ nekonečnou řadu, která právě zobecňuje větu Laurentovu; tím není ovšem řečeno, že by úkol ten byl vždy možným. Ukážeme to na příkladě, kde

$$a_1 = v\,, \qquad a_2 = qv\,, \qquad a_3 = q^2 v\,, \qquad \ldots\, a_n = q^{n-1} v\,, \ldots$$
$$b_1 = q^{-1} v\,, \qquad b_2 = q^{-2} v\,, \qquad b_3 = q^{-3} v\,, \qquad \ldots\, b_n = q^{-n} v\,,$$

při čemž q značí komplexní veličinu absolutně menší jedné.

Za čáry S_0, S_1 volme kružnice $|z| = r_0$, $|z| = r_1$ $(r_0 < r_1)$; podmínka, aby body $b_\nu = q^{-\nu} v$ ležely mimo mezikruží, vyžaduje $|q^{-1} v| > r_1$, tedy $|v| > |q r_1|$. Volímeli kromě toho $|v| < r_1$, pak také žádný z bodů a neleží na kružnici S_1. Zbytek $R_{m,n}$ zní v našem případě

$$R_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r_1} \prod_{a=0}^{n} \frac{1 - q^a \frac{v}{x}}{1 - q^a \frac{v}{z}} \cdot \left(\frac{x}{z} \right)^{n+1} \frac{f(z)\, dz}{z - x}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r_0} \prod_{a=1}^{m} \frac{1 - q^a \frac{z}{v}}{1 - q^a \frac{x}{v}} \frac{f(z)\, dz}{x - z}\,.$$

a tedy přejde pro $m = \infty$, $n = \infty$ ve tvar

$$R_\infty = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r_0} \left(\prod_{a=1}^{\infty} \frac{1 - q^a \frac{z}{v}}{1 - q^a \frac{x}{v}} \right) \frac{f(z)\, dz}{z - x}\,.$$

Následkem toho máme vztah:

$$(16)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r_0}\left(\prod_{a=1}^{\infty}\frac{1-q^a\frac{\xi}{v}}{1-q^a\frac{x}{v}}\right)\frac{f(z)\,dz}{z-x} = -f(x)+\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\,.\,(x-q^{a-1}v)^n_{a=1},$$

kde jsme po příkladu Schendelově*) užili označení

$$(x-q^{a-1}v)^n_{a=1} = (x-v)(x-qv)(x-q^2v)\ldots(x-q^{n-1}v),$$

$$(x-q^{a-1}v)^{-n}_{a=1} = \frac{1}{(x-q^{-a}v)^n_{a=1}} = \frac{1}{(x-q^{-1}v)(x-q^{-2}v)\ldots(x-q^{-n}v)},$$

a pak zcela obecně

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r_1}\frac{f(z)\,dz}{(x-q^{a-1}v)^{n+1}_{a=1}}.$$

Vzorec (16) zde nastupuje na místo theorému Laurentova, který zde tedy nemá analogie v pravém slova smyslu, poněvadž integrál (16) nedovedeme obecně vyčísliti. Volme jakožto příklad

$$f(z) = \log\frac{z+r}{z-r};$$

tato funkce jest jednoznačna v komplexní rovině (z) opatřené řezem ($-r\ldots r$); pomyslná část její jest na severním břehu o $-2\pi i$ větší, než na jižním. Volíme pak $r_0 = r+\delta$, a v integrálu (16) možno nahraditi cestu integrační čarou, jež obíhá řez ($-r\ldots r$) a těsně k němu přiléhá. Obdržíme tak jakožto hodnotu levé strany (16) v našem případě výraz

$$\int\limits_{-r}^{r}\left(\prod_{a=1}^{\infty}\frac{1-q^a\frac{\xi}{v}}{1-q^a\frac{x}{v}}\right)\frac{dz}{z-x};$$

znamenámeli tedy k vůli přehledu

$$\prod_{a=1}^{\infty}(1-q^a\xi) = P(\xi,q),$$

máme z (16), uvážímeli, že zde $A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = 0$, vztah

$$(17)\quad \frac{1}{P(\frac{x}{v},q)}\int\limits_{-r}^{r}P(\tfrac{\xi}{v},q)\frac{dz}{z-x} = \log\frac{x-r}{x+r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{(x-q^{-a}v)^n_{a=1}},$$

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik sv. 84. Srovnej též naši studii o Schendelově zobecnění mocninových řad. (Věstník Č. Ak. čís. 3.)

kde

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int (z - q^{-a}v)_{a=1}^{n-1} \log \frac{z+r}{z-r}\, dz$$

čili

(17ª)
$$C_n = \int_{-r}^{r} \prod_{a=1}^{n-1} (z - q^{-a}v)\,.\,dz\,,$$

a sice vztah dokázaný za podmínek $r < |x| < \left|\frac{v}{q}\right|$.