Matyáš Lerch
Zur Theorie der unendlichen Reihen

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1891, 250–254

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501708

13.

Zur Theorie der unendlichen Reihen.

Von M. Lerch in Weinberge bei Prag.

(Vorgelegt den 17. April 1891.)

Der elegante Beweis, den Herr *Jensen* in den Comptes rendus 1888 (t. 106) für das *Kummer*'sche Convergenzkriterium entwickelt hat, führte mich vor drei Jahren zu einer Verallgemeinerung des letzteren, die zu demselben in ganz analogem Verhältnisse steht, wie die berühmten *Ermakov*'schen[1]) Theoreme zum *Cauchy*'schen Convergenzkriterium, welches den Ausdruck $\lim \frac{U_{n+1}}{U_n}$ betrifft. Wenn nun auch der praktische Werth jenes Ergebnisses durch die genannten Sätze des Herrn Ermakov in einfachster Weise erschöpft wird, so glaube ich indess durch dessen Veröffentlichung nichts Überflüssiges zu unternehmen, weil man das Resultat als Resumé einer ganzen Classe von Convergenzkriterien ansehen kann.

Alle Functionen, die im Folgenden vorkommen werden, nämlich $f(x)$, $\varphi(x)$, $h(x)$, sind in dem allein in Betracht kommenden Intervalle $(a \ldots \infty)$ positiv, und im Endlichen integrabel vorauszusetzen. Mit $\varphi(x)$ soll überdiess eine Function bezeichnet werden, welche im Intervalle $(a \ldots \infty)$ überall einen positiven integrablen Differentialquotienten $\varphi'(x)$ besitzt, und die Ungleichung $\varphi(x) > x$ befriedigt.

Alsdann lässt sich folgender Satz beweisen:

I. Gibt es für eine gegebene Function $f(x)$ eine andere $h(x)$ und eine positive Constante μ, so dass die Ungleichung besteht:

$$\frac{f(x)\,h(x)}{\varphi'(x)\,f(\varphi)} - h(x) > \mu, \qquad (a \leqq x \leqq \infty),$$

---

1) Bulletin des Sciences mathématiques, Bd. II der ersten und VII der zweiten Serie; einen anderen Beweis gab H. *Korkin* daselbst, Bd. VI der 2. Serie.

so existirt das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Diesem Satze entspricht ein ähnlicher, welcher sich auf die Divergenz bezieht. Um ihn einfach ausdrücken zu können, bezeichnen wir mit m_0 irgend welche Grösse, die $\varphi(a)$ übertrifft, definiren im Intervalle $(a \ldots . \infty)$ die unendliche Werthmenge

$$m_0,\ m_1,\ m_2, \ldots . m_\nu, \ldots .$$

durch die Gleichungen:

$$m_1 = \varphi(m_0),\ m_2 = \varphi(m_1),\ m_3 = \varphi(m_2), \ldots .$$

und bezeichnen schliesslich mit $h(m_\nu \ldots m_{\nu+1})$ die obere Grenze der Werthe, welche die Function $h(x)$ im Intervalle $(m_\nu \ldots m_{\nu+1})$ annimmt. Alsdann gilt der Satz:

II. Wenn aber im Intervalle $(a \ldots . \infty)$ überall die Ungleichung

$$\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\frac{h(x)}{f(\varphi)} - h(\varphi) \leqq 0$$

stattfindet, und wenn ausserdem die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{h(m_\nu \ldots m_{\nu+1})}$$

divergirt, so ist der Grenzwerth des Integrals

$$\int_a^u f(x)\,dx$$

für $u = \infty$ nicht endlich.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass sich die Lehrsätze I. und II. auf unendliche Reihen $\sum u_\nu$ unmittelbar übertragen, wenn man entweder unter $f(x)$ eine abnehmende Function versteht und dann $u_\nu = f(\nu)$ nimmt, oder wenn man für eine beliebig vorgelegte Reihe

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots .$$

die Function $f(x)$ durch die Gleichung

$$f(x) = u_{[x]}$$

definirt, wobei mit $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet wird. Denn es ist im letzteren Falle offenbar

$$\int_k^n f(x)\,dx = u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{n-1},$$

so dass sich die Existenz des Integrals $\int_k^\infty f(x)\,d(x)$ mit der Convergenz der Reihe $\sum u_n$ vollkommen deckt. Wir dürfen wohl den Beweis der Sätze I. und II. hier übergehen, und begnügen uns zu bemerken, dass die Voraussetzung $h(x) = 1$ uns die oben citirten merkwürdigen Resultate des Herrn *Ermakov* liefert, während man durch die Wahl $\varphi(x) = x + 1$ das *Kummersche* Kriterium erhält.

Man wird es mir gestatten, an dieser Stelle auf die eigenthümliche, in diesen Sitzungsberichten schon besprochene [1]) Aeusserung des Herrn *Pringsheim* [2]) in München noch einmal einzugehen.

Zuerst mag erwähnt werden, dass einige Jahre vor dem Erscheinen meiner den Quotienten $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ betreffenden Aufsätze bereits Herr *Worpitzky* in seinem ausgezeichneten mir leider erst zu spät bekannt gewordenen Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung auf die von vielen Schriftstellern getheilten falschen Ansichten inbetreff des *Cauchy*'schen Convergenzkriteriums hinwies und dieselben auch eben durch Construction eines speciellen Beispiels widerlegte.

Wenn man beachtet, dass *viele unter deutschen* Lehrbüchern [3]) in dieser Hinsicht fehlerhaft sind, wie überhaupt über die Natur der unendlichen Processe noch in unserer Zeit bei den Schriftstellern unklar gefasste Begriffe begegnet werden [4]), so wird man es wohl

---

[1]) Man sehe unseren Aufsatz: Bemerkung zur Reihentheorie. Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1890.

[2]) Mathematische Annalen, XXXV, p. 308.

[3]) Von den französischen möge z. B. das Buch von Hoüel genannt werden.

[4]) So hat z. B. der Recensent des Lehrbuchs des Herrn Mansion im Journal des Math. élém. über die Behauptung, dass lim $nu_n = 0$ zur Convergenz gar nicht nothwendig ist, sein Bedenken ausgesprochen.

nicht tadeln, dass ich — ohne das Lehrbuch des Herrn Worpitzky zu kennen — von den zahlreichen Beispielen, die mir bekannt waren [1]), eines, welches mir am merkwürdigsten schien, in fremder Sprache publicirte [2]).

Nun liest man bei Herrn *Pringsheim* [3]):

....„immerhin scheint mir über diesen Punct noch nicht allgemein genügende Klarheit zu herrschen. Sonst wäre es zum mindesten völlig unverständlich, dass vor noch nicht langer Zeit Herr M. Lerch eine besondere Note publizirte (Teixeira, Jornal de Sciencias Mathematicas, T. VII, p. 79) lediglich um darauf hinzuweisen, es könne $\sum a_\nu$ auch noch convergiren, wenn $lim\, \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nicht existirt, bezw. unter verschiedenen Werthen auch beliebig (ev. unendlich) grosse annimmt; und dass er nun gar zur Erhärtung dieser, wie gesagt eigentlich ganz selbstverständlichen, übrigens aber durch *zahllose* Beispiele *allereinfachster* Art zu belegenden Thatsache das folgende *geradezu monströse* Beispiel construirt:

$$a_n = \delta^{n\,(lgn)}\, g^{\frac{1}{2}(lgn)\,[1+(lgn)]}$$

wo (lgn) den *ganzen* Theil des Brigg'schen Logarithmus von n bezeichnet und δ, g positive Grössen sind, welche die Bedingungen erfüllen [4]):

$$\delta < 1,\ g > 1,\ \delta\sqrt{g} < 1!$$

Und wenn Herr Cesàro in einer weiteren Note (a. a. O. p. 171) von Herrn Lerch's „Entdeckung“ so überrascht ist, dass er dieselbe erst

---

Einen anderen Beleg für unsere Behauptung bietet uns eine Stelle der Abhandlung über die Convergenz der unendlichen Producte des Herrn *Pringsheim* (Math. Ann. XXXIII, p. 140). Aus den Ungleichungen

$$|V_{x_1} W_\infty - U| < \delta,\ |V_\infty W_{x_1} - U| < \delta$$

glaubt nämlich der Verfasser schliessen zu dürfen, dass V_∞ und W_∞ bestimmte Grössen sind.

[1]) Man sehe die Note des Herrn Gutzmer (im Jornal des Sciencias mathematicas, T. VIII. pag. 33), mit dem ich über diesen Gegenstand in Berlin 1885 gesprochen und nachher correspondirt habe.

[2]) Jornal de Sciencias math. T. VII, p. 79.

[3]) Math. Annalen XXXV, p. 308.

[4]) Dass die letzte Ungleichung $\delta\sqrt{g} < 1$ überflüssig ist, habe ich in der anfangs citirten *Bemerkung* erwähnt und auch deren ursprüngliche Einführung motivirt.

von nun ab in seine Vorlesungen aufnimmt, im übrigen aber bemerkt: es gäbe *einfachere Beispiele* solcher Reihen, so scheint mir dies den eigentlichen Kernpunkt der Sache noch keineswegs zu treffen" ....

Es möge dem Urtheil des mathematischen Publicums überlassen werden, ob man über eine der Sache nach einwurfsfreie Mittheilung sich so zu äussern berechtigt ist, selbst wenn sie nur zu pädagogischen Zwecken gemacht wurde. Wir wollen hier allein auf die einzige in Herrn Pringsheim's Bemerkung enthaltene sachliche Einwendung der *Monstrosität* etwas näher eingehen.

In Vorlesungen über analytische Functionen macht sich oft das Bedürfniss eines Beispiels der sogenannten *lacunären Functionen* geltend, welches mit elementarsten Mitteln behandelt werden könnte. Nun ist die von uns im besprochenen Briefe an Herrn Teixera betrachtete Reihe ein specieller Fall des folgenden Ausdrucks

$$fx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi([n]) x^n$$

(wobei $[n]$ die Anzahl der Ziffern von n bedeutet), welcher eine lacunäre, auf den Einheitskreis $|x| = 1$ beschränkte Function $f(x)$ darstellt, falls sie nur für alle $|x| < 1$ convergirt und wenn der reele oder imaginäre Bestandtheil von $\varphi(\nu)$ für $\nu = \infty$ mit einem bestimmten Vorzeichen unendlich wird. Der Beweis dieser Thatsache findet sich in einer kurzen Note, die wir neulich im ersten Hefte des X. Jahrgangs von Jornal de Sciencias mathematicas veröffentlicht haben [1]).

---

[1]) Sur une classe de fonctions à espace lacunaire.