Matyáš Lerch
Bemerkung zur Reihentheorie

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1890, 219–221

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501680

17.

Bemerkung zur Reihentheorie.

Von M. Lerch in Prag.

(Vorgelegt den 2. Mai 1890.)

In Herrn Cesàro's *Remarques sur divers articles concernant la théorie des séries*[1]) findet sich folgende Stelle:

„... Il suffit de prendre la série

$$q_1 + q_2^2 + \dots q_r^r + q_1^{r+1} + q_2^{r+2} + \dots + q_r^{2r} + q_1^{2r+1} + \dots$$

où

$$0 < q_1 < q_2 < \dots < q_r < 1.$$

„Ici la convergence est manifeste. Cependant la probabilité de voir $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasser toute limite est $1 - \frac{1}{r}$; elle est aussi voisine de l'unité qu'on le veut. *Est-il possible de construire des séries convergentes dans lesquelles les valeurs de n, qui ne font pas croître $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ à l'infini soient infiniment rares?*“

Ich habe gleich nach dem Erscheinen der Cesàro'schen Notiz Herrn Ed. Weyr eine Reihe mitgetheilt, welche obige Frage im bejahenden Sinne entscheidet; sie lautet

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n, \text{ wobei } u_n = \frac{\log 2 \,.\, \log 3 \dots \log n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \dots 10^{(n)}},$$

und wobei unter (n) die Anzahl der Ziffern von n verstanden werden soll. Diese Reihe ist offenbar convergent und der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ist

[1]) Nouvelles Annales de Mathématiques, t. VII, 1888. Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas (Herausgeber Herr F. Gomes Teixeira) vol. IX.

im Allgemeinen $log(n+1)$, nur falls n die Form $10^\nu - 1$ hat, is derselbe durch den Ausdruck $log(n+1)\frac{10^\nu!}{10^{\nu+1}}$ dargestellt und wird für hinreichend grosse ν beliebig klein.

Bemerkung. Ich habe vor fünf Jahren in diesen Sitzungsberichten (1885, März) darauf aufmerksam gemacht, dass eine Reihe aus positiven Gliedern

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

auch dann convergiren kann, wenn nicht nur der Ausdruck $\lim_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nicht existirt, sondern selbst wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bei unendlich vielen Werthen von n eine irgendwie gegebene, noch so grosse Grenze übersteigt. Diesen Ausspruch habe ich an einem Beispiele erläutert, welches ich später in einem Briefe an Herrn Teixeira discutirt habe.[1]) Wenn mir auch die Selbstverständlichkeit jener Bemerkung nicht entgehen konnte, so glaubte ich dieselbe doch veröffentlichen zu sollen, da die Sache ohne ein nach einem *einheitlichen Gesetze* gebildetes Beispiel einigen Studirenden nicht hinreichend klar zu sein schien und weil, was besonders beachtet werden muss, *einige Lehrbücher gerade das Gegentheil ausdrücklich behaupten.*

Wenn nun ein Lehrbuch eine falsche Behauptung enthält, welche — obzwar sie leicht corrigirt werden kann — von den meisten Lesern für richtig gehalten wird, so wird man es wohl nicht für schädlich erklären, wenn Jemand dieselbe durch ein leicht discutirbares Beispiel widerlegt. Aus diesem Grunde ist es mir nicht wohl begreiflich, warum Herr Dr. Alfred Pringsheim in seiner neulich in den *Math. Annalen* (Bd. XXXV. S. 308) erschienenen Abhandlung die Veröffentlichung jenes Beispieles in einer so ungewohnten Art tadelt.

Um die Sache näher zu erklären, möge der von mir berichtigte Fehler hier angedeutet werden. Derselbe besteht darin, dass für *jede* Potenzreihe

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

der Convergenzradius r durch die Formel

---

[1]) Jornal de Sciencias math., vol. VII. p. 79.

$$r = \lim_{n=\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

bestimmt wird. Man widerlegt ihn leicht, wenn man an Stelle von

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots$$

folgende Grössen[1]) setzt:

$$a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots$$

Indess hat diese Art der Widerlegung einige meiner damaligen Collegen nicht hinreichend befriedigt und ich habe deshalb die mir von anderen Betrachtungen aus bekannte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-(n)}\, g^{\frac{1}{2}(n)\,[(n)+1]}$$

veröffentlicht[2]), in welcher $\delta < 1$, $g > 1$ und (n) die Anzahl der Ziffern von n bedeutet. Dies ist die Reihe, welche Herr Pringsheim für *geradezu monströs* erklärt. Ungeachtet des Umstandes, dass man die obige Reihe durch die formal einfachere

$$\Sigma\, \delta^n\, g^{(n)^2}$$

ersetzen kann, bin ich noch immer der Meinung, dass die obige Reihe, so wie ich sie zuerst publicirte, *zu den einfachsten gehört*, welche dasselbe leisten, und von denen man in elementaren Vorlesungen Gebrauch machen kann.

---

[1]) Im citirten Aufsatze wählte ich $a_\nu = \frac{1}{(\nu+1)^2}$, $b_\nu = 2^\nu$.

[2]) Ursprünglich habe ich den Convergenzbeweis auf die Ungleichung $(n) < \sqrt{n}$ gegründet und somit die *sonst überflüssige* Beschränkung $\delta\sqrt{g} < 1$ eingeführt. Bei der Redaction des oben erwähnten Briefes habe ich leider versäumt, diese Bedingung fortzulassen.