Matyáš Lerch

Über die analytische Natur einer von P. Du Bois-Reymond betrachteten Funktion

Monatsch. Math. Phys. 8 (1897), 377–382

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501505

Über die analytische Natur einer von P. Du Bois-Reymond betrachteten Function.

Von **M. Lerch** in Freiburg (Schweiz).

Im 21. Bande der Mathematischen Annalen bespricht Paul Du Bois-Reymond unendliche Reihen von der Form

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p \sin px,$$

worin die Coefficienten bestimmte infinitäre Bedingungen erfüllen, und erwähnt namentlich den Fall $\mu_p = e^{-\sqrt{p}}$. Diese Reihe besitzt Ableitungen aller Ordnungen und soll nach Du Bois-Reymonds Ansicht nicht ins Imaginäre fortsetzbar sein.

Eine Folge davon wäre, dass die unendliche Potenzreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\sqrt{m}} u^m$$

ihren Convergenzbezirk — den Einheitskreis um den Nullpunkt herum — auch zu ihrem Existenzbereich hat. Dies ist jedenfalls auffallend und wurde auch vom Herrn Pringsheim[1]) bestritten; letzterer begnügte sich jedoch mit einigen Bemerkungen, ohne die Frage selbst aufzulösen, obwohl dies in allereinfachster Weise ausführbar ist, wie wir jetzt zeigen wollen.

Es sei zunächst u eine complexe Veränderliche, welche ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist als 1 und es bedeute a eine positive reelle Größe; alsdann convergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}} u^m$$

absolut; um ihr Verhalten auf dem Convergenzkreise $|u| = 1$ und die analytische Natur dieser Transcendenten überhaupt zu erkennen, benützen wir die Integralformel

[1]) Math. Annalen Bd. 44.

$$\int_0^\infty e^{-mx-\frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{am}};$$

dabei halten wir uns bei der Verification der Gleichung

$$\sum_{m=1}^\infty u^m \int_0^\infty e^{-mx-\frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty u^m\, e^{-mx-\frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

nicht auf, und wenden uns zur Betrachtung des Resultats

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m=1}^\infty u^{m-1}\, e^{-2\sqrt{am}} = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}}. \tag{1}$$

Für die analytische Function

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m=1}^\infty e^{-2\sqrt{am}}\, u^{m-1}, \quad (|u| < 1), \tag{2}$$

gewinnt man so eine Integraldarstellung

$$\Phi(u) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}} \tag{3}$$

welche uns unmittelbar ihre Fortsetzung liefert.

Denn dieses Integral existiert für sämmtliche Werte u, welche in der complexen Ebene durch Punkte ausserhalb des in der reellen Axe auszuführenden Schnittes $(1 \cdots \infty)$ repräsentiert sind, und hat in diesem Gebiete offenbar den Charakter einer ganzen Function.

Hieraus folgt, dass unsere Function (2) sich in die ganze u-Ebene fortsetzen lässt, vorläufig mit der Ausnahme des Schnittes $(1 \cdots \infty)$.

Ihre Potenzentwicklung um den Punkt $u = i$ herum ergibt sich aus der Formel (3) u. zw.

$$\Phi(u) = \sum_{\nu=0}^\infty A_\nu (u - i)^\nu,$$

wobei

$$A_\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{(e^x - i)^{\nu+1}} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Offenbar ist

$$| A_\nu | < \int_0^\infty e^{-\frac{a}{x}-(\nu+1)x} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{a(\nu+1)}},$$

und die Reihe convergiert für $| u - i | < 1$, wie von vorneherein klar war.

Wir wollen jetzt zeigen, dass sich die Function $\Phi(u)$ auch längs des Schnittes $(1 \cdots \infty)$ analytisch regulär verhält mit alleiniger Ausnahme des Punktes $u = 1$.

Es sei That L eine Linie, die vom Nullpunkte ausgehend sich in der complexen x-Ebene in der Nähe der reellen Axe bis ins Unendliche erstreckt. Alsdann verhält sich die Function

$$\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

in dem durch die reelle Axe und die Curve L begrenzten Gebiete regulär und das Integral

$$\int_L \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}},$$

welches der Integrationslinie L entspricht, ist dem Integral $\Phi(u)$ gleich. Dasselbe verlangt aber zur Feststellung seines genauen Convergenzgebietes einen von dem früheren völlig verschiedenen Schnitt (definiert durch die Punkte $u = e^x$) und verhält sich in allen Punkten der Strecke $(1 \cdots \infty)$ mit Ausnahme von $u = 1$ regulär.

Es ist durchaus nicht schwer die Art der Unstetigkeit von $\Phi(u)$ im Punkte $u > 1$ zu untersuchen. Es sei wieder $\Phi(u)$ das Integral (3) und es sei $v > 1$ eine reelle Größe, ε', ε'' zwei kleine positive Größen; setzt man

$$u' = v + \varepsilon' i, \quad u'' = v - \varepsilon'' i,$$

so ist leicht mit Hilfe einer von Herrn Hermite ersonnenen und von Herrn Goursat vereinfachten Beweismethode zu zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon' = 0,\, \varepsilon'' = 0} \{\Phi(u') - \Phi(u'')\} = 2\pi i \frac{e^{-\frac{a}{\log u}}}{u (\log u)^{\frac{3}{2}}}.$$

ist. Eine Folge hiervon ist, dass die Function

$$\Phi(u) + e^{-\frac{a}{\log u}} \frac{\log(u-1)}{u(\log u)^{\frac{3}{2}}} = \Psi(u) \tag{4}$$

in der Umgebung der Stelle $u = 1$ eindeutig bleibt und sich somit nach positiven und negativen Potenzen von $(u - 1)$ entwickeln lässt.

Die Anzahl der negativen Potenzen, die in dieser Entwicklung vorkommen, ist nothwendig unendlich groß. Denn bedeutet ε eine positive unendlich kleine Größe, so ist offenbar $\Psi(1 - \varepsilon)$ unendlich groß, da $\Phi(1 - \varepsilon)$ endlich bleibt und das zweite Glied in (4) links unendlich groß wird, und andererseits bleibt $\Psi(1 + \varepsilon)$ endlich für unendlich kleine ε. Um dies zu zeigen, braucht man bloß nachzuweisen, dass das Integral

$$\int_L \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

für $u = 1 + \varepsilon$ endlich bleibt; dies leuchtet ein, wenn man dasselbe mit Hilfe der partiellen Integration auf die Form

$$\Phi(u) = -\frac{1}{u}\int_L \log(1 - e^{-x}u)\, d\,\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x\sqrt{x}}$$

bringt.

Weil nun die Ausdrücke $\Psi(u \pm \varepsilon)$ weder beide endlich noch beide unendlich groß sind, so ist $u = 1$ eine wesentlich singuläre Stelle der Function $\Psi(u)$ und in der Potenzentwickelung

$$\Psi(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu (u - 1)^\nu$$

ist die Anzahl der wirklich vorkommenden negativen Potenzen nothwendig unendlich groß, wie behauptet wurde.

„Die Function $\Phi(u)$, definiert durch die Reihe (2), verhält sich an allen Punkten der Kreislinie $|u| = 1$ regulär mit Ausnahme von $u = 1$. Diese letztere Stelle ist für die Function singulär und zwar lässt sich das Verhalten der Function in der Umgebung von $u = 1$ durch folgende Formel beschreiben:

$$\Phi(u) = -e^{-\frac{a}{\log u}} \frac{\log(u - 1)}{u(\log u)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu (u - 1)^\nu.$$

Die Construction von Beispielen von Functionen mit singulären Linien kann nach den Arbeiten von Weierstraß nur pädagogische Zwecke verfolgen. Ich habe von diesem Standpunkte aus vor zehn Jahren mehrere Ausdrücke untersucht; infolge der geringen Verbreitung der Prager Abhandlungen und Sitzungsberichte sind jedoch diese Untersuchungen sehr wenig bekannt geworden, ja selbst meine Abhandlung über die Nichtdifferentiierbarkeit gewisser

Functionen, welche im Bd. 103 des Journals für die reine und angewandte Mathematik erschien, wurde von Herrn Mittag-Leffler [1]) übersehen.

Namentlich wurden in meiner Abhandlung „Über Functionen mit beschränktem Existenzbereiche“ [2]) mehrere übersichtliche Ausdrücke dieser Kategorie, sowie auch neue Beweismethoden und Verallgemeinerungen abgeleitet. So wurde z. B. daselbst bewiesen, dass die Doppelreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{m}{\mu}\binom{n}{\nu}a^{\mu\nu}\,u^{\mu}\,x^{\nu}$$

aus ihrem Convergenzgebiete $|u|<1$, $|x|<1$ nicht fortgesetzt werden kann, wenn die Constanten m, n keine positiven ganzen Zahlen sind und die Constante a den absoluten Betrag 1 hat, aber keine Einheitswurzel ist.

Von der genannten Abhandlung ist Manches von Herrn A. Pringsheim in den Math. Annalen Bd. 42 und 44 neuerdings publiciert worden, so z. B. die Verallgemeinerung, welche er im Bde. 42 auf S. 166 in der Fußnote erwähnt, weiter das Princip der Beweisführung, welches auf p. 50 und 51 des Bd. 44 benutzt wird. Von mir stammt auch die Bemerkung, dass man Ausdrücke von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{x-a_\nu}$$

bilden kann, welche ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer Constante bleiben, wenn x auf ein Gebiet beschränkt wird, innerhalb dessen keine Punkte a_ν liegen, desgleichen auf seiner Begrenzung, wenn auch sämmtliche Punkte dieser Begrenzung Häufungsstellen der Menge (a_ν) sind. Ich habe dies auf Seite 7 der Abhandlung durch das Beispiel

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu\left(e^{\frac{1}{\nu}}-1\right)}{x-e^{\frac{1}{\nu}+2\nu a\pi i}},\ (|x|\leqq 1),$$

erläutert, worin a eine irrationale reelle Größe bedeutet. Derartige Ausdrücke werden von Herrn Pringsheim im 42 Bande der Mathem. Annalen mehrfach besprochen. Herr Pringsheim wollte

---

[1]) Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm (Acta math., Bd. 15). Meine am Schlusse der Abhandlung behandelte Reihe liefert unmittelbar eine Function derselben Beschaffenheit wie die Reihe des Herrn Fredholm.

[2]) Abhandlungen der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, VII. Folge, 2. Band, 1888.

jedoch in dieser Frage weiter gehen und behauptet, dass der Ausdruck

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x - a_\nu}, \quad \left(\sum | c_\nu | \text{ convergent}\right)$$

aus dem Gebiete (C) nicht fortgesetzt werden kann, wenn zwar sämmtliche Punkte a_ν außerhalb (C) liegen, jedoch so, dass ihre Häufungsstellen die Begrenzung von C ausmachen, vorausgesetzt, dass die a_ν keinen Flächentheil überall dicht ausfüllen.

Ich habe im Jahre 1887 nicht so weit gehen wollen, wie Herr Pringsheim, und ließ die Frage unentschieden, da mir der Beweis schwierig schien, und noch heute schwierig scheint, sodass ich für die Beantwortung dieser Frage auch jetzt nichts liefern kann. Wenn Herr Pringsheim diese Frage durch sein Theorem (auf p. 168 des 42. Annalenbandes) gelöst zu haben glaubt, so befindet er sich im Irrthum, denn sein Beweis ist falsch, und die Richtigkeit des Theorems bleibt daher dahingestellt.