Matyáš Lerch
Sur une intégrale définie qui représente la fonction $\zeta(s)$ de Riemann

Mathematical Papers Read at the International Congress Chicago 1893, 165–166

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501484

Papers Published by the American Mathematical Society.— Vol. I.

MATHEMATICAL PAPERS

READ AT THE

INTERNATIONAL MATHEMATICAL CONGRESS

HELD IN CONNECTION WITH THE

WORLD'S COLUMBIAN EXPOSITION CHICAGO 1893

EDITED BY THE

COMMITTEE OF THE CONGRESS

E. HASTINGS MOORE

OSKAR BOLZA HEINRICH MASCHKE HENRY S. WHITE

NEW YORK

MACMILLAN AND CO.

FOR THE

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

1896

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE QUI REPRÉSENTE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN.

PAR

M. LERCH À PRAGUE-VINOHRADY.

La série infinie

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots\ldots,$$

convergente lorsque la partie réelle de s est supérieure à un, est l'élément d'une fonction uniforme $\zeta(s)$ qui existe dans tout le plan de la variable s. Pour l'obtenir sous la forme d'une intégrale toujours convergente observons d'abord que l'on a

$$\zeta(s) = \lambda(s) + \frac{\lambda(s)}{2^s} + \frac{\lambda(s)}{2^{2s}} + \frac{\lambda(s)}{2^{3s}} + \frac{\lambda(s)}{2^{4s}} + \ldots\ldots$$

ou bien

$$(a) \quad \zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \lambda(s),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(b) \quad \lambda(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots\ldots$$

Cela étant, il suffit évidemment d'exprimer la fonction $\lambda(s)$ sous la forme voulue pour parvenir à notre but; on y parvient à l'aide de la formule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s} = -e^{-\frac{1}{2}s\pi i - wx\pi i} (2\pi)^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xz}(z - w\pi i)^{-s}\, dz}{1 - e^{-w\pi i - z}},$$

que nous avons donnée dans un mémoire tchèque publié dans les Mémoires de l'académie tchèque 1892. En y prenant $x=0$ et $w=\frac{1}{2}$, le premier membre devient $2^s \lambda(s)$ et l'on a, par conséquent,

$$(c) \quad \lambda(s) = -e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\, \pi^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1 + ie^{-z}}.$$

La convergence de l'intégrale exige que la partie réelle de s soit supérieure à un, mais il est aisé d'en tirer une intégrale toujours convergente. Décomposons en effet l'intervalle de l'intégration $(-\infty \ldots \infty)$ en deux autres $(-\infty \ldots 0)$ et $(0 \ldots \infty)$ et observons que l'on a

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1+ie^{-z}} = e^{s\pi i}\int_{0}^{\infty} \frac{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1+ie^{z}},$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1+ie^{-z}} = \int_{0}^{\infty}\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz - \int_{0}^{\infty} \frac{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1-ie^{z}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{\pi i}{2}\right)^{1-s}}{s-1} - \int_{0}^{\infty} \frac{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1-ie^{z}}.$$

En substituant la somme de ces deux intégrales dans la formule (c) il vient

$$\lambda(s) = \frac{2^{s-2}}{s-1} - \frac{\pi^s}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}s\pi i}\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^{-s}}{1+ie^{z}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s}}{1-ie^{z}}\right)dz$$

ou en changeant z en $\frac{z\pi}{2}$:

$$(d) \quad \lambda(s) = 2^{s-2}\left\{\frac{1}{s-1} + i\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}s\pi i}(z+i)^{-s}}{1+ie^{\frac{z\pi}{2}}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}s\pi i}(z-i)^{-s}}{1-ie^{\frac{\pi z}{2}}}\right)dz\right\}.$$

Or l'intégrale $\int_0^\infty$ qui figure au second membre pouvant s'écrire

$$\int_{0}^{\infty}(z^2+1)^{-\frac{s}{2}}\left(\frac{e^{is\,\mathrm{arctg}\,z}}{1+ie^{\frac{z\pi}{2}}} - \frac{e^{-is\,\mathrm{arctg}\,z}}{1-ie^{\frac{z\pi}{2}}}\right)dz$$

$$= 2i\int_{0}^{\infty}\frac{(z^2+1)^{-\frac{s}{2}}\left(\sin(s\,\mathrm{arctg}\,z) - e^{\frac{1}{2}\pi z}\cos(s\,\mathrm{arctg}\,z)\right)}{1+e^{z\pi}}dz,$$

ou de même, après la substitution $z = tg\phi$,

$$2i\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin s\phi - e^{\frac{1}{2}\pi tg\phi}\cos s\phi}{1+e^{\pi tg\phi}}\cos^{s-2}\phi\, d\phi,$$

l'équation (d) deviendra

$$(e) \quad \lambda(s) = \frac{2^{s-2}}{s-1} - 2^{s-1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin s\phi - e^{\frac{1}{2}\pi tg\phi}\cos s\phi}{1+e^{\pi tg\phi}}\cos^{s-2}\phi\, d\phi$$

ce qui est la formule à laquelle nous voulions parvenir.