Matyáš Lerch

Nouvelle analogie de la série théta et quelques séries hypergéométriques particulièresde Heine

Bulletin int. de l'Ac. Prague 1 (1895), 1–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501474

Nouvelle analogie de la série théta et quelques séries hypergéométriques particulières de Heine.

Par M. Lerch.

(Pres. 15. XII. 1893.)

1. Soient q, $\mathfrak{q}$ deux quantités dont les modules soient moindres que l'unité, et considérons la fonction $f(x, \xi; q, \mathfrak{q})$ de deux variables x, ξ, définie par la série infinie

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,\xi;q,\mathfrak{q}) = 1 &+ \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} x^{2n} (1+\mathfrak{q}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^3\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{2n-1}\xi^2) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2} x^{-2n}}{(1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{-2n+1}\xi^2)} .\end{aligned}\right.$$

On trouve une première propriété de cette fonction en changeant, dans la première somme, n en $n+1$ et, dans la seconde, en $n-1$; il vient de la sorte l'équation

$$(2)\qquad f(qx, \mathfrak{q}\xi) = \frac{1}{qx^2(1+\mathfrak{q}\xi^2)} f(x, \xi) .$$

Pour obtenir une autre relation, nous changeons, dans la première somme, n en $n+1$, de la sorte que le terme général deviendra

$$q^{n^2}(qx)^{2n} qx^2 (1+\mathfrak{q}\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{2n-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{2n+1}\xi^2);$$

en effectuant la multiplication par le dernier facteur, la première somme deviendra

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} & qx^2 + qx^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(qx)^{2n}(1+\mathfrak{q}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^3\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{2n-1}\xi^2) \\ & + q\mathfrak{q}x^2\xi^2 + q\mathfrak{q}x^2\xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(q\mathfrak{q}x)^{2n}(1+\mathfrak{q}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^3\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{2n-1}\xi^2) \end{aligned}\right.$$

La deuxième somme (1) se transforme en changeant n en $n-1$ et en écrivant le terme général comme il suit

$$\frac{q^{n^2}(qx)^{-2n} qx^2}{(1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{-2n+1}\xi^2)} (1+\mathfrak{q}^{-2n+1}\xi^2);$$

en effectuant la multiplication par le facteur $1+\mathfrak{q}^{-2n+1}\xi^2$ on trouve l'identité

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}x^{-2n}}{(1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{-2n+1}\xi^2)}$$

$$=qx^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}(qx)^{-2n}}{(1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{-2n+1}\xi^2)}$$

$$+q\mathfrak{q}x^2\xi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}(q\mathfrak{q}x)^{-2n}}{(1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{-2n+1}\xi^2)}\,.$$

Evidemment, cette expression ajoutée à la quantité (α) donne la somme

$$qx^2f(qx,\xi)+q\mathfrak{q}x^2\xi^2f(q\mathfrak{q}x,\xi)$$

de la sorte qu'on a l'équation

$$f(x,\xi)=qx^2f(qx,\xi)+q\mathfrak{q}x^2\xi^2f(q\mathfrak{q}x,\xi)\,. \tag{3}$$

D'après (2) le premier membre peut être remplacé par l'expression

$$qx^2(1+\mathfrak{q}\xi^2)f(qx,\mathfrak{q}\xi)\,;$$

il vient de la sorte

$$f(qx,\xi)+\mathfrak{q}\xi^2f(q\mathfrak{q}x,\xi)=(1+\mathfrak{q}\xi^2)f(qx,\mathfrak{q}\xi)$$

ou bien en changeant x en $\dfrac{x}{q}$,

$$f(x,\mathfrak{q}\xi)=\frac{f(x,\xi)+\mathfrak{q}\xi^2f(\mathfrak{q}x,\xi)}{1+\mathfrak{q}\xi^2}\,. \tag{3^a}$$

La fonction $f(x,\xi)$, considérée par rapport à la variable x, n'a que les deux points singuliers $x=0$ et $x=\infty$, mais, par rapport à la seconde variable ξ, elle a sauf ces deux points singuliers les pôles du premier dégré $\xi^2=-\mathfrak{q},-\mathfrak{q}^3,-\mathfrak{q}^5,\dots$ Pour s'en débarasser, il suffit de multiplier par la fonction suivante, entière en $\dfrac{1}{\xi^2}$,

$$\Pi(\xi,\mathfrak{q})=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mathfrak{q}^{2n-1}}{\xi^2}\right). \tag{4}$$

ce qui donne la fonction

$$\varphi(x,\xi;q,\mathfrak{q})=\Pi(\xi,\mathfrak{q})\,.\,f(x,\xi;q,\mathfrak{q})\,. \tag{5}$$

Cela étant, l'équation évidente

$$\Pi(\mathfrak{q}\xi,\mathfrak{q})=\left(1+\frac{1}{\mathfrak{q}\xi^2}\right)\Pi(\xi,\mathfrak{q}) \tag{6}$$

étant combinée avec les relations (2) et (3^a) donne les équations fondamentales

$$\varphi(qx,\mathfrak{q}\xi)=\frac{1}{q\mathfrak{q}x^2\xi^2}\varphi(x,\xi)\,, \tag{2*}$$

$$\varphi(x,\mathfrak{q}\xi)-\varphi(\mathfrak{q}x,\xi)=\frac{1}{\mathfrak{q}\xi^2}\varphi(x,\xi)\,. \tag{3*}$$

Les propriétés caractéristiques de la fonction $\varphi(x, \xi)$ sont les suivantes:

1. *$\varphi(x, \xi)$ est une fonction analytique uniforme des deux variables x, ξ, n'ayant d'autre singularité que les points $x = 0$ et $x = \infty$, puis $\xi = 0$ et $\xi = \infty$;*

2. *la fonction $\varphi(x, \xi)$ est paire pour toutes les deux variables et satisfait aux équations fondamentales* (2*) et (3*).

La première propriété prouve l'existence d'un développement toujours convergent de la forme

$$\varphi(x, \xi) = \sum_{m,n} A_{m,n} \xi^{2m} x^{2n}, \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

auquel se lie la troisième propriété caractéristique, à savoir que

3. *le terme constant $A_{0,0}$ du développement équivaut à l'unité.*

Ces trois propriétés caractérisent entièrement la fonction $\varphi(x, \xi)$. Car en effet il est facile d'en conclure la valeur des coefficients $A_{m,n}$. Remarquons pour ce but que les équations (2*) et (3*) s'écriront

$$\sum A_{m,n} \mathfrak{q}^{2m+1} q^{2n+1} \xi^{2m+2} x^{2n+2} = \sum A_{m,n} \xi^{2m} x^{2n},$$

$$\sum A_{m,n} (\mathfrak{q}^{2m+1} - \mathfrak{q}^{2n+1}) \xi^{2m+2} x^{2n} = \sum A_{m,n} \xi^{2m} x^{2n},$$

d'où nous aurons les relations

$$(\alpha) \qquad A_{m,n} \mathfrak{q}^{2m+1} q^{2n+1} = A_{m+1,n+1},$$

$$(\beta) \qquad A_{m,n} (\mathfrak{q}^{2m+1} - \mathfrak{q}^{2n+1}) = A_{m+1,n}.$$

En substituant, dans la formule (β), successivement $m = n, n+1, n+2, \ldots$ on trouve que l'on a

$$A_{n+1,n} = 0, \quad A_{n+2,n} = 0, \quad A_{n+3,n} = 0, \ldots$$

de la sorte que tous les coefficients $A_{m,n}$ seront nuls dans lesquels le premier indice m surpasse l'autre n.

Dans le cas de $m < n$ remplaçons successivement, dans l'équation (β), l'indice m par les valeurs $m, m+1, m+2, \ldots n-1$ et multiplions les résultats; il vient

$$A_{m,n} (\mathfrak{q}^{2m+1} - \mathfrak{q}^{2n+1}) (\mathfrak{q}^{2m+3} - \mathfrak{q}^{2n+1}) \ldots (\mathfrak{q}^{2n-1} - \mathfrak{q}^{2n+1}) = A_{n,n},$$

et il ne reste qu'à obtenir la valeur de $A_{n,n}$.

Pour ce but l'équation (α) donne

$$A_{n,n} = A_{0,0} (q \mathfrak{q})^{n^2} = (q \mathfrak{q})^{n^2},$$

puisqu'on a $A_{0,0} = 1$.

On a donc ces valeurs des coefficients

$$A_{n,n} = (q \mathfrak{q})^{n^2}, \qquad A_{m,n} = 0 \quad \text{lorsque} \quad m > n,$$

et dans le cas de $m < n$

$$A_{m,n} = \frac{(q \mathfrak{q})^{n^2}}{(\mathfrak{q}^{2n-1} - \mathfrak{q}^{2n+1})(\mathfrak{q}^{2n-3} - \mathfrak{q}^{2n+1}) \ldots (\mathfrak{q}^{2m+1} - \mathfrak{q}^{2n+1})},$$

ou bien

$$A_{m,n} = \frac{q^{n^2}\,\mathrm{q}^{m^2}}{(1-\mathrm{q}^2)(1-\mathrm{q}^4)(1-\mathrm{q}^6)\ldots(1-\mathrm{q}^{2n-2m})}\;;$$

la fonction $\varphi(x, \xi)$ est donc représentée par la série à double entrée

$$(7) \quad \varphi(x,\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\,\mathrm{q}^{n^2}\,x^{2n}\,\xi^{2n} + \sum_{m<n} \frac{q^{n^2}\,\mathrm{q}^{m^2}\,x^{2n}\,\xi^{2m}}{(1-\mathrm{q}^2)(1-\mathrm{q}^4)\ldots(1-\mathrm{q}^{2n-2m})},$$

ou en écrivant $n = m + \nu$

$$(7^*) \quad \varphi(x,\xi) = \sum q^{m^2}\,\mathrm{q}^{m^2}\,(x\,\xi)^{2m} + \sum_{m,\nu} \frac{q^{(m+\nu)^2}\,\mathrm{q}^{m^2}\,x^{2m+2\nu}\,\xi^{2m}}{(1-\mathrm{q}^2)(1-\mathrm{q}^4)\ldots(1-\mathrm{q}^{2\nu})},$$

$$\left(\begin{matrix} m = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \pm 3\,, \ldots \\ \nu = 1\,, 2\,, 3\,, \ldots \end{matrix}\right).$$

2. Soient maintenant τ_1, τ_2 deux quantités complexes avec des parties imaginaires positives, et soient w_1 et w_2 deux variables indépendantes; en posant

$$q = e^{\tau_1 \pi i}, \qquad \mathrm{q} = e^{\tau_2 \pi i}, \qquad x = e^{w_1 \pi i}, \qquad \xi = e^{w_2 \pi i},$$

la fonction φ change en fonction entière transcendante de w_1 et w_2

$$(8) \qquad \varphi\left(e^{w_1 \pi i}, e^{w_2 \pi i}; e^{\tau_1 \pi i}, e^{\tau_2 \pi i}\right) = \Phi(w_1, w_2, \tau_1, \tau_2)$$

qui satisfait aux conditions tirées des équations (2*) et (3*)

$$(9) \quad \begin{cases} \Phi(w_1 + 1, w_2) = \Phi(w_1, w_2 + 1) = \Phi(w_1, w_2)\,, \\ \Phi(w_1 + \tau_1, w_2 + \tau_2) = e^{-\pi i(2w_1 + 2w_2 + \tau_1 + \tau_2)}\,\Phi(w_1, w_2)\,, \\ \Phi(w_1, w_2 + \tau_2) - \Phi(w_1 + \tau_2, w_2) = e^{-\pi i(2w_2 + \tau_2)}\,\Phi(w_1, w_2)\,. \end{cases}$$

En effectuant, dans la formule (7), la sommation par rapport à m, il vient

$$(10) \quad \Phi(w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\pi i(\nu^2\tau_1 + 2\nu w_1)} \frac{\vartheta_3(w_1 + w_2 + \nu\tau_1 \mid \tau_1 + \tau_2)}{\prod\limits_{\alpha=1}^{\nu}\left(1 - e^{2\alpha\tau_2\pi i}\right)},$$

avec la convention de remplacer le produit $\prod\limits_{\alpha=1}^{\nu}$ par l'unité, lorsque $\nu = 0$.

Si l'on remplace τ_2 par des multiples de la quantité τ_1, la fonction Φ change en fonction théta d'un dégré supérieur; en prenant en particulier $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, puis $w_1 = v_1 + u$, $w_2 = v_2 + u$, l'expression

$$\Phi(v_1 + u, v_2 + u \mid \tau, \tau) = F(u)$$

sera une fonction entière de u qui satisfait aux équations

$$F(u+1) = F(u)\,, \qquad F(u+\tau) = e^{-2\pi i(v_1 + v_2 + 2u + \tau)}\,F(u)\,,$$

d'où il suit que l'expression $F\left(u - \dfrac{v_1 + v_2}{2}\right)$ est une fonction théta du second dégré avec la caractéristique 00, de la sorte qu'ils existent deux constantes A, B telles que

$$F(u) = A\,\vartheta_1{}^2\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2}\,\middle|\,\tau\right) + B\,\vartheta_2{}^2\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2}\,\middle|\,\tau\right).$$

Pour obtenir ces constantes, posons une fois $u = -\frac{v_1 + v_2}{2}$ et l'autre $u = \frac{1 - v_1 - v_2}{2}$, ce qui donne

$$F\left(\frac{1 - v_1 - v_2}{2}\right) = A\,\vartheta_2{}^2, \qquad F\left(-\frac{v_1 + v_2}{2}\right) = B\,\vartheta_2{}^2,$$

en écrivant, suivant l'usage, ϑ_2 au lieu de $\vartheta_2(0\,|\,\tau)$.

Il nous reste donc à évaluer les quantités

$$F\left(\frac{1 - v_1 - v_2}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2}, \frac{1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{2}\right),$$

$$F\left(-\frac{v_1 + v_2}{2}\right) = \Phi\left(\frac{v_1 - v_2}{2}, \frac{v_2 - v_1}{2}\right),$$

les paramètres τ_1, τ_2 de la fonction Φ ayant la valeur commune τ. Les expressions considérées sont de la forme

$$\Phi(z, -z),$$

et cette quantité a, d'après l'équation (10), le développement

$$\Phi(z, -z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu^2} e^{2\nu z\pi i}\,\vartheta_3(\nu\tau\,|\,2\tau)}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2\nu})}, \qquad (q = e^{\tau\pi i}).$$

Or on a

$$\vartheta_3(2\mu\tau\,|\,2\tau) = q^{-2\mu^2}\,\vartheta_3(0\,|\,2\tau),$$

$$\vartheta_3(\overline{2\mu+1}\,\tau\,|\,2\tau) = q^{-2\mu^2-2\mu-\frac{1}{2}}\,\vartheta_2(0\,|\,2\tau),$$

ce qui permet d'écrire

$$\Phi(z, -z) = \vartheta_3(0\,|\,2\tau) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q^{2\mu^2} e^{4\mu z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{4\mu})}$$

$$+ \vartheta_2(0\,|\,2\tau) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q^{2\mu^2+2\mu+\frac{1}{2}} e^{(4\mu+2)z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{4\mu+2})}.$$

Posant donc

$$(11)\quad \begin{cases} \psi_0(z) = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q^{2\mu^2} e^{4\mu z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-q^{4\mu})} = 1 + \frac{q^2 e^{4z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^2)} + \ldots, \\ \psi_1(z) = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q^{2\mu^2+2\mu+\frac{1}{2}} e^{(4\mu+2)z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-q^{4\mu+2})} = \frac{q^{\frac{1}{2}} e^{2z\pi i}}{1-q^2} + \ldots \end{cases}$$

nous aurons

$$(12)\qquad \Phi(z, -z\,|\,\tau, \tau) = \vartheta_3(0\,|\,2\tau)\,\psi_0(z) + \vartheta_2(0\,|\,2\tau)\,\psi_1(z).$$

Nos constantes A et B seront alors données par les formules

$$A\,\vartheta_2{}^2 = \vartheta_3(0\,|\,2\tau)\,\psi_0\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right) - \vartheta_2(0\,|\,2\tau)\,\psi_1\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right),$$

$$B\,\vartheta_2{}^2 = \vartheta_3(0\,|\,2\tau)\,\psi_0\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right) + \vartheta_2(0\,|\,2\tau)\,\psi_1\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right),$$

et l'expression cherchée de la fonction $F(u)$ sera par conséquent donnée par l'équation

$$(13)\quad \begin{cases} \vartheta_2{}^2\, \Phi(v_1+u, v_2+u \mid \tau, \tau) \\ = \left\{\vartheta_3(0\mid 2\tau)\,\psi_0\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right) - \vartheta_2(0, 2\tau)\,\psi_1\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right)\right\}\vartheta_1{}^2\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}\,\middle|\,\tau\right) \\ + \left\{\vartheta_3(0\mid 2\tau)\,\psi_0\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right) + \vartheta_2(0\mid 2\tau)\,\psi_1\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right)\right\}\vartheta_2{}^2\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}\,\middle|\,\tau\right). \end{cases}$$

En prenant $v_1 = v_2 = 0$, on a

$$(13^a)\quad \begin{cases} \vartheta_2{}^2\,\Phi(u, u \mid \tau, \tau) = \left[\psi_0\,\vartheta_3(0\mid 2\tau) - \psi_1\,\vartheta_2(0\mid 2\tau)\right]\vartheta_1{}^2(u\mid\tau) \\ \qquad + \left[\psi_0\,\vartheta_3(0\mid 2\tau) + \psi_1\,\vartheta_2(0\mid 2\tau)\right]\vartheta_2{}^2(u\mid\tau), \end{cases}$$

en convenant de représenter par ψ_0 et ψ_1 les quantités $\psi_0(0)$ et $\psi_1(0)$. Donc, le produit des fonctions

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}e^{-2nu\pi i}\right)$$

et

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} e^{2nu\pi i}\left(1+q\,e^{2u\pi i}\right)\left(1+q^3 e^{2u\pi i}\right)\ldots\left(1+q^{2n-1}e^{2u\pi i}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}e^{-2nu\pi i}}{\left(1+q^{-1}e^{2u\pi i}\right)\left(1+q^{-3}e^{2u\pi i}\right)\ldots\left(1+q^{-2n+1}e^{2u\pi i}\right)}$$

est exprimable en transcendantes elliptiques.

3. A la catégorie des fonctions que nous venons d'étudier appartiennent aussi les expressions dont s'occupe la théorie de la série hypergéométrique généralisée de Heine. Nous allons exposer quelques formules particulières auxquelles nous a donné l'occasion l'analyse d'un mémoire de M. Schendel,*) que nous avons donnée dans la première année du recueil de l'Académie.**)

a) Soit comme précédemment q une quantité inférieure à l'unité, en valeur absolue, et rappelons nous la formule connue

$$(a)\quad \prod_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1+q^{\alpha}v\,x}{1+q^{\alpha}x} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-v)(1-qv)\ldots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}\,x^n,$$

avec ses conséquences

$$(b)\quad \frac{1}{\prod\limits_{\alpha=0}^{\infty}(1+q^{\alpha}x)} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)},$$

$$(c)\quad \prod_{\alpha=0}^{\infty}(1+q^{\alpha}u) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}u^n}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots(1-q^n)};$$

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 84.

**) Il faut remarquer que les résultats de M. Schendel sont des cas particuliers des théorèmes plus généraux exposés, avec plus de rigueur, par M. *Frobenius* dans le 73me t. du même journal.

remarquons que les séries (a) et (b) sont convergentes lorsque $|x| < 1$, tandisque la série (c) est toujours convergente.

En changeant x en $-x$, la formule (a) devient

$$(a') \qquad \prod_{a=0}^{\infty} \frac{1 - q^a v x}{1 - q^a x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-v)(1-qv)\dots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} x^n .$$

Cela étant, nous allons considérer l'expression un peu plus générale

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-v)(1-qv)\dots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-1})(1-q^n)^s} x^n ,$$

ou bien

$$V = \frac{1-v}{(1-q)^s} x + \frac{(1-v)(1-qv)}{(1-q)(1-q^2)^s} x^3 + \dots$$

En employant la série du binôme

$$\frac{1}{(1-q^n)^s} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{-s}{\nu} q^{n\nu}$$

on aura

$$V = \sum_{n,\nu} \frac{(1-v)(1-qv)\dots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-1})} (-1)^\nu (q^\nu x)^n \binom{-s}{\nu} ,$$

et par conséquent

$$V = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{-s}{\nu} S_\nu ,$$

en posant

$$S_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-v)(1-qv)\dots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-1})} (q^\nu x)^n$$

$$= (1-v) q^\nu x + \frac{(1-v)(1-qv)}{1-q} (q^\nu x)^2 + \dots ,$$

de la sorte que

$$S_\nu = (1-v) q^\nu x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-qv)\dots(1-q^n v)}{(1-q)\dots(1-q^n)} (q^\nu x)^n \right] .$$

La quantité entre parenthèses s'obtient à l'aide de l'équation (a′) qui donne

$$S_\nu = (1-v) q^\nu x \prod_{a=0}^{\infty} \frac{1 - q^{a+\nu+1} v x}{1 - q^{a+\nu} x} ,$$

d'où

$$S_\nu = (1-v) \prod_{\mu=0}^{\infty} \frac{1 - q^{\mu+1} v x}{1 - q^\mu x} \cdot q^\nu x \prod_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{1 - q^\mu x}{1 - q^{\mu+1} v x} ,$$

le dernier produit $\prod\limits_{\mu=0}^{\nu-1}$ devant être remplacé par 1 lorsque $\nu = 0$.

Après avoir substitué cette valeur de S_ν dans l'expression de V nous aurons

$$V = (1-v)\,x \,.\prod_{\mu=0}^{\infty} \frac{1-q^{\mu+1} v x}{1-q^{\mu} x}$$

$$.\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{-s}{\nu} q^{\nu} \frac{(1-x)(1-qx)\ldots(1-q^{\nu-1}x)}{(1-qvx)(1-q^2vx)\ldots(1-q^{\nu}vx)}\right\}.$$

En changeant v en $\frac{v}{q}$ on a par conséquent la relation cherchée

$$\text{(d)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(1-q)^s}+\frac{1-v}{(1-q)(1-q^2)^s}x+\frac{(1-v)(1-qv)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)^s}x^2 \\ &\quad+\ldots+\frac{(1-v)(1-qv)\ldots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)(1-q^{n+1})^s}x^n+\ldots \\ &=\frac{(1-vx)(1-qvx)(1-q^2vx)(1-q^3vx)\ldots}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\ldots} \\ &\quad\times\left[1+\binom{s}{1}q\frac{1-x}{1-vx}+\binom{s+1}{2}q^2\frac{(1-x)(1-qx)}{(1-vx)(1-qvx)}+\ldots\right. \\ &\quad\left.+\binom{s+n-1}{n}q^n\frac{(1-x)(1-qx)\ldots(1-q^{n-1}x)}{(1-vx)(1-qvx)\ldots(1-q^{n-1}vx)}+\ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

En prenant $v=0$ il vient

$$\text{(e)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(1-q)^s}+\frac{x}{(1-q)(1-q^2)^s}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)^s}+\ldots \\ &=\frac{1+\binom{s}{1}q(1-x)+\binom{s+1}{2}q^2(1-x)(1-qx)+\binom{s+2}{3}q^3(1-x)(1-qx)(1-q^2x)+\ldots}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\ldots} \end{aligned}\right.$$

Si l'on substitue, dans la formule (d), $vx=u$, en partant ensuite à la limite pour $x=0$, on aura

$$\text{(f)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(1-q)^s}-\frac{u}{(1-q)(1-q^2)^s}+\frac{qu^2}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)^s}-\ldots \\ &\quad+\frac{(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}u^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)(1-q^{n+1})^s}+\ldots \\ &=(1-u)(1-qu)(1-q^2u)(1-q^3u)\ldots \\ &\quad\times\left[1+\binom{s}{1}\frac{q}{1-u}+\binom{s+1}{2}\frac{q^2}{(1-u)(1-qu)}+\ldots\right. \\ &\quad\left.+\binom{s+n-1}{n}\frac{q^n}{(1-u)(1-qu)\ldots(1-q^{n-1}u)}+\ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

On obtient une autre formule, en différentiant l'équation (d) par rapport à v et en prenant $v = 1$; il vient de la sorte

$$\text{(g)} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu} x}{1-q^{\nu} x} = (1-q)^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-q^n)(1-q^{n+1})^s} \\ \displaystyle\qquad + (1-q)^s \sum_{n=1}^{\infty} \binom{s+n-1}{n} q^n \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \frac{q^{\varkappa} x}{1-q^{\varkappa} x}, \end{cases}$$

formule, dont on déduit aisément expressions nouvelles de la série de Lambert.

Sur une méthode pour rectifier des prismes creux employés pour la mesure des indices de réfraction des liquides.

Par MM. O. **Šulc** et A. P. **Pařízek.**

(Pres. 6. X. 1893.)

Pour déterminer les indices de réfraction n des liquides par le spectromètre, on fait usage de prismes de verre creux formés des glaces planes et parallèles. Désignant par Δ la déviation minima, par Φ l'angle réfringent du prisme, on calcule n par la formule connue

$$n = \frac{\sin \frac{\Phi + \Delta}{2}}{\sin \frac{\Phi}{2}}. \qquad \text{(I)}$$

La supposition que les glaces sont planes et parallèles n'est jamais assez exactement satisfaite; dans ce cas il est nécessaire de posséder une méthode qui permette, tout en se servant d'un prisme même moins parfait, d'observer et de calculer les indices avec toute l'exactitude désirable.

Dans le présent mémoire, nous admettons d'abord la possibilité de placer tous les plans du prisme parallèlement à l'axe du spectromètre. En désignant par φ et δ l'angle réfringent et la déviation minima observés, nous avons montré par une discussion rigoureuse que la correction peut être appliquée de la manière suivante:

1° On corrige simplement la valeur définitive n par le terme

$$n' = -\frac{\nu\omega}{2} \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - C\right)}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \qquad \text{(a)}$$

2° ou immédiatement un des angles trouvés φ, δ

3° ou enfin ces deux angles simultanément, en employant ensuite la formule I.