Matyáš Lerch

Sur diverses formules d'Arithmétique

Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 12 (1894), 129–136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501469

SUR DIVERSES FORMULES D'ARITHMÉTIQUE

PAR

M. Lerch

(à Prague)

Représentons, comme il est d'usage, par $E(x)$ ou $[x]$ le plus grand nombre entier ne surpassant pas la quantité positive x, et posons $E(x)=0$ lorsque x est négative. Nous aurons d'abord la formule

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\infty} E\left(\frac{m}{u+\alpha}-v\right)=\sum_{\alpha=1}^{\infty} E\left(\frac{m}{v+\alpha}-u\right),$$

dans laquelle m, u, v représentent des quantités positives quelconques. On l'obtient aisément par la voie géométrique en observant que les deux membres expriment le nombre des points aux coordonnées entières et positives, contenus dans l'aire limitée par les axes et par l'hyperbole équilatère

$$(u+x)\,(v+y)=m.$$

La démonstration purement arithmétique, équivalente au fond au raisonnement géométrique, est aussi facile: Il est clair que la quantité $E\left(\frac{u}{u+\alpha}-v\right)$ représente la totalité des nombres entiers positifs β, pour lesquels $\frac{m}{u+\alpha}-v \geqq$ ou bien $m \geqq (u+\alpha)(v+\beta)$. Le premier membre dans (1) représente donc le nombre des combinaisons α, β (α, $\beta = 1, 2, 3, \ldots$) qui satisfont à l'inégalité $m \geqq (u+\alpha)(v+\beta)$. Il est clair que le même nombre est esprimable par le deuxième membre de l'équation (1), qui se trouve ainsi démontrée.

Dans cette équation prenons $m = n - \sigma a$, $u = ra$, $v = sa$, où a, r, s, n sont des entiers positifs, et faisons la somme pour $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ Dans l'équation qui résulte

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\infty} E\left(\frac{n-a^2rs-(\sigma+as)a}{ra+\alpha}\right)$$

$$=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\infty} E\left(\frac{n-a^2rs-(\sigma+r\alpha)a}{sa+\alpha}\right)$$

transformons les deux membres en introduisant comme les indices des quantités $ra+\alpha$, $s\alpha+\sigma$, respectivement $sa+\alpha$, $r\alpha+\sigma$, ce qui donne

$$(2)\qquad \sum_{\alpha=ra+1}^{\infty}\ \sum_{\sigma=s\alpha}^{\infty} E\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right)=\sum_{\alpha=sa+1}^{\infty}\ \sum_{\sigma=r\alpha}^{\infty} E\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right)$$

où m est un entier positif quelconque, remplaçant l'expression $n-a^2rs$.

Les conditions sommatoires dans le premier membre étant $\alpha > ra$, $\sigma \geqq s\alpha$ ou bien $ra < \alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{s}\right]$, $\sigma > ras$, la quantité considerée s'écrit

$$\sum \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right), \left(\sigma > rsa,\ ra < \alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{s}\right]\right),$$

et nous aurons l'égalité

$$(2^{\circ}) \qquad \sum \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right) = \sum \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a}{\alpha'}\right),$$

les conditions sommatoires étant

$$\sigma > rsa,\ \ ra < \alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{s}\right],\ sa < \alpha' \leqq \left[\frac{\sigma}{r}\right].$$

Changeons m en $m-1$ et retranchons, il vient

$$\sum_{\sigma > rsa}\ \sum_{ra < \alpha \leqq \left[\frac{\sigma}{s}\right]} \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha'}\right) - \mathrm{E}\,\frac{m-\sigma a-1}{\alpha}\right)\right\}$$

$$= \sum_{\sigma > rsa}\ \sum_{sa < \alpha' \leqq \left[\frac{\sigma}{r}\right]} \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a}{\alpha'}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a-1}{\alpha'}\right)\right\}.$$

Cela étant, remarquons que la différence

$$\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a-1}{\alpha}\right)$$

ne diffère de zero que lorsque α est un diviseur de $m-\sigma a$, dans ce cas sa valeur étant l'unité, et que par conséquent la somme

$$\sum_{ra<\alpha\leqq\left[\frac{\sigma}{s}\right]}\left\{E\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right)-E\left(\frac{m-\sigma a-1}{\alpha}\right)\right\}$$

équivaut au nombre des diviseurs de la quantité $m-\sigma a$ qui sont supérieurs à ra et ne surpassent pas $\left[\frac{\sigma}{s}\right]$.

Si nous représentons par $\psi(p,q)$ *le nombre des diviseurs de* p *supérieurs à* q, *notre quantité s'écrira* $\psi(m-\sigma a, ra)-\psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{s}\right)$, et il s'ensuit que nous aurons l'équation

$$\sum_{\sigma>rsa}\left\{\psi(m-\sigma a, ra)-\psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{s}\right)\right\}$$

$$=\sum_{\sigma>rsa}\left\{\psi(m-\sigma a, sa)-\psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right)\right\}$$

ou bien

$$(3)\qquad \sum_{\sigma}\left\{\psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right)+\psi(m-\sigma a, ra)\right\}$$

$$=\sum_{\sigma}\left\{\psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{s}\right)+\psi(m-\sigma a, sa)\right\}, \quad (\sigma>rsa).$$

On obtient un résultat de forme différente en prenant pour point de départ l'équation (2), dans le cas de $s=0$, où elle ne cesse pas d'être vraie :

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\alpha=ra+1}^{\infty}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{\sigma=r\alpha}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right).$$

Remarquons que les conditions sommatoires dans le second membre peuvent s'écrire $\sigma>0,\ 0<\alpha\leqq\left[\frac{\sigma}{r}\right]$, et que par conséquent

$$\sum_{\sigma,\alpha}\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\alpha}\right)=\sum_{\sigma',\alpha'}\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a}{\alpha'}\right),\quad\left(\begin{array}{l}\sigma\geqq 0,\ \sigma'>0,\\ \alpha>ra,\ 0<\alpha'<\left[\frac{\sigma'}{r}\right]\end{array}\right).$$

En y changeant m en $m-1$ et retranchant les résultats, il vient

$$\sum_{\sigma,\alpha}\left\{\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma\alpha}{\alpha}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a-1}{\alpha}\right)\right\}$$

$$-\sum_{\sigma',\alpha'}\left\{\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a}{\alpha'}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma' a-1}{\alpha'}\right)\right\}.$$

Le premier membre est évidemment égal à la somme

$$\sum\psi(m-\sigma a,\ ra),\ (\sigma=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

et le deuxième sera donné par l'expression

$$\sum_{\sigma'} \chi\left(m-\sigma' a, \frac{\sigma'}{r}\right), \quad (\sigma'>0),$$

en convenant de représenter par $\chi(p, q)$ *le nombre des diviseurs de* p *ne surpassant pas* q. Nous aurons donc l'équation

$$\sum_{\sigma \geqq 0} \psi(m-\sigma a, ra) = \sum_{\sigma'>0} \chi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right).$$

Retranchons les deux membres de l'identité

$$\sum_{\sigma \geqq 0} \Theta(m-\sigma a) = \psi(m, 0) + \sum_{\sigma'>0} \Theta(m-\sigma' a),$$

où $\Theta(k) = \psi(k, 0)$ représente le nombre total des diviseurs de k; il vient de la sorte, en employant l'identité évidente $\chi(p, q) + \psi(p, q) = \Theta(p)$:

$$\sum_{\sigma \geqq 0} \chi(m-\sigma a, ra) = \psi(m, 0) + \sum_{\sigma'>0} \psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right),$$

ou bien

$$(4) \quad \sum_{\sigma} \psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right) = \sum_{\sigma} \chi(m-\sigma a, ra); \left(\sigma=0, 1, \ldots \left[\frac{m-1}{a}\right]\right).$$

C'est le cas de $r=1$ que nous avons considéré antérieurement (*), à savoir

$$(5) \qquad \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \psi(m-\sigma a, \sigma) = \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \chi(m-\sigma a, a);$$

il est intéressant de remarquer que, inversement, l'équation (4) se déduit aisément de (5). Soit en effet r un entier supérieur à un; nous pouvons prendre $\sigma = \mu r + \rho$, où $\rho = 0, 1, 2, \ldots r-1$: on a ainsi

$$\sum_{\sigma}\left(\psi\left(m-\sigma a, \frac{\sigma}{r}\right)\right) = \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{\mu=0,1,2,\ldots} \psi(m-\rho a-\mu r a, \mu),$$

et à cause de l'équation (5) cette quantité peut s'écrire

$$\sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{\mu=0,1,2,\ldots} \chi(m-\rho a-\mu r a, r a),$$

ou bien

$$\sum_{\sigma} \chi(m-\sigma a, r a),$$

ce qui en effet coïncide avec le second membre de (4).

(*) Au sujet des fonctions ψ et ϕ v. deux notes dans le Bulletin de M Darboux, année 1888, puis trois articles parus dans le Bulletin de la Société des Sciences de Boheme, 1894.

À titre d'exemple considérons l'équation (5) dans les cas de $a=2$; les nombres $\chi(m-2\sigma, 2)$ seront égaux à 2 ou à 1 suivant que m est pair ou impair. Lorsque m est pair, le deuxième membre sera alors $\frac{m}{2} \cdot 2 = m$, lorsque m est impair, il sera égal à $\frac{m+1}{2}$; on a donc

$$\sum_{\sigma=0,1,2,\ldots} \psi(m-2\sigma, \sigma) = \frac{3m+1}{4} + (-1)^m \frac{m-1}{4}.$$