Eduard Čech; a kol.
Aritmetika pre 2. triedu gymnázií

Štátne nakladateľstvo, Bratislava, 1951, 88 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501405

ARITMETIKA

PRE II. TRIEDU GYMNÁZIÍ

ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

ARITMETIKA

PRE II. TRIEDU GYMNÁZIÍ

1951

ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Názov originálu v českom jazyku: MATEMATIKA pro II. třídu gymnasia, Praha 1951
Autori: Dr. Eduard Čech a spolupracovníci
Preložil: Juraj Tatár
Recenzenti: Anton Dubec, Július Krmešský
Schválilo Povereníctvo školstva, vied a umení výnosom zo dňa 6. februára 1951, č. 3662/1951-II/2, ako učebnicu pre II. triedu gymnázií v prvom vydaní

Úvodné poznámky.

V aritmetike v II. triede doplníme vedomosti žiakov o počítanie s mocninami. Pravidlá odvodzujeme alebo definujeme najprv pre počítanie s číslami prirodzenými a potom rozširujeme ich platnosť na počítanie s číslami racionálnymi, iracionálnymi, relatívnymi a poprípade komplexnými. Pre správne pochopenie funkcií je dôležité, aby sme ich neponímali len ako analytický výraz čiary, ale ako množiny. Sústavne precvičujeme žiakov aj v numerickom počítaní a naučíme žiakov počítať aj pomocou logaritmov a ich tabuliek.

Komplexné čísla ponímame ako rozšírený pojem čísla, ktoré vyjadrujú určitú reálnu skutočnosť. V rozšírenom odbore komplexných čísel ucelíme poznatky žiakov o riešenie kvadratických rovníc. Poukážeme na praktické použitie počítania s komplexnými číslami. Použijeme ich na počtové vyjadrenie sčítania a otáčania vektorov a najmä na definovanie a vyšetrovanie goniometrických funkcií. Tieto funkcie definujeme pomocou komplexných čísel všeobecnejšie, ako by sme to mohli urobiť len v rámci geometrie a tiež poukážeme na ich dôslednejšie použitie najmä vo fyzike.

Pri rozširovaní číselného odboru, pri rozbore funkcií a tiež pri iných vhodných príležitostiach cvičíme a rozvíjame dialektický úsudok žiakov a tým prispievame k správnemu utváraniu ich duševna a socialistického charakteru.

Výsledky abstraktných úvah overujeme na riešení slovných úloh z praktického života. Vhodnou voľbou námetov pre tieto úlohy, vzatých zo socialistického budovania a pretvárania spoločnosti, prispievame tiež k výchove socialistického pokolenia.

Obsah.

Rozvrh učiva.

September	Opakovanie. Odmocňovanie.
Október	Mocniny s racionálnymi mocniteľmi. Exponenciálna funkcia.
November	Pojem a vlastnosti logaritmu. Tabuľka logaritmov. Použitie tabuľky logaritmov.
December	Zavedenie komplexných čísel. Sčítanie komplexných čísel.
Január	Násobenie komplexných čísel. Sdružené komplexné čísla. Absolútna hodnota.
Február	Kvadratická rovnica. Aplikácia komplexných čísel v geometrii.
Marec	Aplikácia komplexných čísel v geometrii (pokračovanie). Vyjadrenie otáčania okolo začiatku pomocou komplexných čísel.
Apríl	Pojem uhla. Sinus a kosinus.
Máj	Tangens a kotangens. Goniometrické rovnice.
Jún	Goniometrické rovnice (pokračovanie). Opakovanie.

I. Obecná mocnina a logaritmus.

1. Odmocňovanie.

Už v prvej triede sme preberali druhé odmocniny. Ak je a kladné číslo, potom druhou odmocninou čísla a rozumieme to kladné číslo x, pre ktoré platí $x^2 = a$. Podobne tretia odmocnina kladného čísla a je to kladné číslo x, pre ktoré platí $x^3 = a$. Tak isto môžeme definovať štvrtú, piatu odmocninu atď. Všeobecne nech je dané prirodzené číslo $n > 1$, a nech je a ľubovoľne zvolené **kladné** číslo. Budeme sa zaujímať o **kladný** koreň rovnice

$$X^n = a. \tag{1}$$

Táto rovnica môže mať len jeden kladný koreň. Lebo ak sú x_1, x_2 dve rôzne kladné čísla a ak je napr. $x_1 < x_2$, tak

$$x_1^n = x_1 \cdot x_1 \ldots x_1 \quad (n \text{ činiteľov}) \tag{2}$$

$$x_2^n = x_2 \cdot x_2 \ldots x_2 \quad (n \text{ činiteľov}). \tag{3}$$

V **(3)** je každý činiteľ väčší ako v **(2)**, preto je aj ich súčin $x_2^n > x_1^n$ a tak nemôžu sa obe čísla x_1^n a x_2^n rovnať tomuže číslu a, t. j. rovnica **(1)** môže mať len jeden kladný koreň. Vyslovíme definíciu: **n-ta odmocnina čísla a je to kladné číslo x, ktoré vyhovuje rovnici (1).**

Píšeme

$$x = \sqrt[n]{a}, \tag{4}$$

kde číslo a je **základ** a číslo n **odmocniteľ** našej n-tej odmocniny. Prakticky je prípad $n = 2$ omnoho dôležitejší ako ostatné, preto miesto $\sqrt[2]{a}$ sa skoro vždy píše $\sqrt{a}$, t. j. odmocniteľ 2 sa vynecháva. Teoreticky nevylučujeme v našej definícii ani prípad $n = 1$. Podľa definície je pravda,

$$\sqrt[1]{a} = a$$

pre každé kladné číslo a. Značku $\sqrt[n]{a}$ **definujeme len v tom prípade, keď základ** a **je číslo kladné a odmocniteľ** n **číslo prirodzené.**

Pre $n = 2$ mali sme v prvej triede

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Túto definíciu pripustíme pre ľubovoľné n, nie je to však príliš dôležité. Pri zápornom a nebudeme sa zapodievať otázkou, či je možné a účelné definovať (4).

Z definície n-tej odmocniny plynie niekoľko dôležitých viet, vyjadrených jednoduchými vzorcami. Vo všetkých vetách n znamená ľubovoľne dané prirodzené číslo.

I. **Ak sú** a, b **kladné čísla, tak**

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \tag{5}$$

D ô k a z. Položme $x = \sqrt[n]{a}, y = \sqrt[n]{b}$. Podľa definície sú x, y kladné čísla a $x^n = a$, $y^n = b$. Z 1. triedy viete, že $x^n y^n = (xy)^n$. Teda xy je kladné číslo a $(xy)^n = ab$. Vzhľadom na význam písmen x, y to znamená, že platí **(5)**.

Tak isto sa dokáže veta i pre viac ako dvoch činiteľov.

II. **Ak sú** a_1, $a_2 \ldots\ldots$, a_s **kladné čísla, tak**

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_s} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \ldots\ldots\ldots \sqrt[n]{a_s}.$$

Ak sú všetky čísla $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_s$, rovnaké, máme ďalší dôležitý výsledok.

III. **Ak je** a **kladné číslo, tak**

$$\sqrt[n]{a^r} = (\sqrt[n]{a})^r \tag{6}$$

pre každé prirodzené číslo r.

Ďalšie vety:

IV. **Ak je** a **kladné číslo a ak sú** m, n **prirodzené čísla** (rovnaké alebo nerovnaké), **tak**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \tag{7}$$

D ô k a z. Položme $z = \sqrt[mn]{a}$. Podľa definície je z kladné číslo a $z^{mn} = a$. Z 1. triedy viete, že $z^{mn} = (z^m)^n$. Ak teda položíme

$z^m = x$, je x kladné číslo a $x^n = z^{mn}$, čiže $x^n = a$. Teda podľa definície n-tej odmocniny $x = \sqrt[n]{a}$. Na druhej strane bolo z kladné číslo a $z^m = x$. Teda podľa definície m-tej odmocniny $z = \sqrt[m]{x}$. Teda

$$x = \sqrt[n]{a}, \; z = \sqrt[m]{x}, \text{ a tak } z = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Na druhej strane $z = \sqrt[mn]{a}$ a tak vzorec **(7)** je správny.

V. **Ak je a kladné číslo, tak**

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}. \tag{8}$$

D ô k a z. Položme $x = \sqrt[n]{a}$. Podľa definície je x kladné číslo a $x^n = a$. Preto je aj $\frac{1}{x}$ kladné číslo a z 1. triedy viete, že $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$ čiže $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{a}$ a tak podľa definície n-tej odmocniny $\frac{1}{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$. Vzhľadom na význam písmena x to znamená, že vzorec **(8)** je správny.

VI. **Ak je a kladné číslo, tak**

$$\sqrt[n]{a^s} = (\sqrt[n]{a})^s \tag{6}$$

pre každé celé číslo s (kladné, záporné alebo nulu).

D ô k a z. Pre kladné s je to už dokázané v III. vete. Pre $s = 0 : \sqrt[n]{a^s} = (\sqrt[n]{a})^0$ a to je správne, lebo jednak nultá mocnina každého čísla je 1, jednak

$$\sqrt[n]{1} = 1 \tag{7}$$

podľa definície n-tej odmocniny. Ostáva prípad, keď $s = -r$ je záporné. Podľa definície mocniny s celým záporným mocniteľom je jednak

$$(\sqrt[n]{a})^s = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^r}, \tag{8}$$

jednak

$$a^s = \frac{1}{a^r}$$

a tak

$$\sqrt[n]{a^s} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a^r})}. \tag{9}$$

Pretože podľa III. je $\sqrt[n]{a^r} = (\sqrt[n]{a})^r$, z **(8)** a **(9)** plynie **(6)**.

Pri definícii n-tej odmocniny vychádzali sme z faktu, že pri každom kladnom čísle a má rovnica **(1)** kladný koreň. Presné odôvodnenie tohto faktu je obťažné zvlášť preto, že už pri najjednoduchších voľbách čísla a koreň x rovnice **(1)** je obyčajne iracionálny a nedá sa vypočítať presne, ale len približne. Týmto odôvodnením nebudeme sa vôbec zaoberať.

1. Cvičenie.

1. Ako sa presvedčíte, že

a) $\sqrt{529} = 23$; b) $\sqrt[3]{512} = 8$; c) $\sqrt[4]{625} = 5$; d) $\sqrt[5]{243} = 3$?

V cvič. 2—7 n znamená prirodzené číslo.

2. Kedy značí rovnica $\sqrt[n]{a} = b$ presne to isté ako rovnica $a = b^n$?

3. Čo znamená výraz: a) $\sqrt[n]{a^n}$; b) $(\sqrt[n]{a})^n$? Kedy majú oba výrazy ten istý význam?

4. Kedy má smysel výraz a) $\sqrt[n]{-a}$; b) $\sqrt[n]{ab}$?

5. Za akých podmienok má smysel výraz a) $\sqrt[n]{a^r}$; b) $(\sqrt[n]{a})^r$, kde r je celé číslo?

6. Platia vety **I.** až **VI.**, ak niektorý zo základov, ktorý sa v nich vyskytuje, rovná sa nule?

7. Dokážte vetu: Ak $a \geqq 0$, $b > 0$, tak $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

8. Rozkladom na prvočiniteľov vypočítajte:

a) $\sqrt{48 \cdot 75}$; b) $\sqrt{30 \cdot 35 \cdot 42}$; c) $\sqrt[3]{12 \cdot 18}$; d) $\sqrt[3]{9 \cdot 15 \cdot 25}$;
e) $\sqrt[3]{30 \cdot 42 \cdot 70 \cdot 105}$; f) $\sqrt[4]{128 \cdot 162}$.

9. Vypočítajte: a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; b) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{30}$; c) $\sqrt{19{,}2} \cdot \sqrt{10{,}8}$; d) $\sqrt[3]{45} \cdot \sqrt[3]{75}$; e) $\sqrt[3]{4{,}9} \cdot \sqrt[3]{5{,}6} \cdot \sqrt[3]{6{,}4}$; f) $\sqrt[3]{13\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{11\frac{1}{9}}$.

10. Upravte na tvar súčinu, ktorého jedným činiteľom je odmocnina čo najmenšieho prirodzeného čísla: a) $\sqrt{125}$; b) $\sqrt{960}$; c) $\sqrt[3]{16}$; d) $\sqrt[3]{54}$; e) $\sqrt[3]{128}$; f) $\sqrt[3]{320}$; g) $\sqrt[3]{500}$; h) $\sqrt[3]{648}$; i) $\sqrt[4]{80}$; j) $\sqrt[4]{162}$.

11. Vypočítajte: a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; c) $\sqrt{4\frac{25}{36}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; e) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; f) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; g) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$.

12. Upravte na tvar súčinu zlomku a odmocniny čo najmenšieho prirodzeného čísla: a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{1}{8}}$; c) $\sqrt{\frac{3}{8}}$; d) $\sqrt{2\frac{1}{2}}$; e) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; f) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; g) $\sqrt[3]{1\frac{2}{25}}$; h) $\sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$.

13. Upravte a zakaždým uveďte, kedy má daný výraz smysel: a) $\sqrt{a^2}$; b) $\sqrt{a^4}$; c) $\sqrt{a^{-2}}$; d) $\sqrt[3]{a^3}$; e) $\sqrt[3]{a^6}$; f) $\sqrt[3]{a^{-3}}$; g) $\sqrt[4]{a^4}$; h) $\sqrt[4]{a^8}$; i) $\sqrt[4]{a^{-12}}$; j) $\sqrt[5]{a^{15}}$.

14. Upravte a zakaždým uveďte, kedy má daný výraz smysel: a) $\sqrt[4]{a^2}$; b) $\sqrt[4]{a^{-2}}$; c) $\sqrt[6]{a^3}$; d) $\sqrt[8]{a^4}$; e) $\sqrt[6]{x^4}$; f) $\sqrt[6]{x^{-4}}$; g) $\sqrt[9]{x^6}$; h) $\sqrt[16]{b^4}$; i) $\sqrt[12]{u^{-9}}$; j) $\sqrt[15]{z^{20}}$.

15. Nájdite hodnoty daných výrazov a zakaždým udajte, kedy majú tieto výrazy smysel:

a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$; b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}$; c) $\sqrt[3]{u}\cdot\sqrt[3]{u^2}$; d) $\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[3]{ab^2}$; e) $\sqrt{ax}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}$; f) $\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{b}{a}}$; g) $\sqrt[3]{a^2b^{-1}}\cdot\sqrt[3]{ab^{-2}}$; h) $\sqrt[4]{rt^{-1}}:\sqrt[4]{rt^{-3}}$.

16. Upravte a udajte, kedy má daný výraz smysel:

a) $\sqrt[4]{9a^2b^2}$; b) $\sqrt[4]{25a^{-2}b^2}$; c) $\sqrt[6]{8b^3c^3}$; d) $\sqrt[6]{27u^{-3}v^{-3}}$; e) $\sqrt[4]{\frac{a^6}{b^2}}$; f) $\sqrt[6]{\frac{27p^3q^6}{r^{12}}}$; g) $\sqrt[4]{\frac{16a^2}{b^6}}$; h) $\sqrt[6]{\frac{64x^3}{y^9}}$.

17. Nájdite hodnotu výrazu:

a) $\sqrt{\sqrt{2}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$; d) $\sqrt{2\sqrt{2}}$; e) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$; f) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$.

18. Nájdite hodnotu výrazov a zakaždým udajte, kedy má

daný výraz smysel: a) $\sqrt{\sqrt{a}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$; c) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$; d) $\sqrt{x\sqrt{x}}$; e) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}$; f) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$; g) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}$.

19. Pomocou tabuľky druhých a tretích mocnín vypočítajte na štyri platné číslice: a) $\sqrt{4{,}683}$; b) $\sqrt{46{,}83}$; c) $\sqrt{274{,}4}$; d) $\sqrt{2744}$; e) $\sqrt[3]{1{,}235}$; f) $\sqrt[3]{12{,}35}$; g) $\sqrt[3]{123{,}5}$; h) $\sqrt[3]{4147}$; i) $\sqrt[3]{0{,}4147}$; j) $\sqrt[3]{0{,}04147}$.

20. Pomocou tabuliek druhých a tretích mocnín vypočítajte na štyri platné číslice: a) $\sqrt[4]{5}$; b) $\sqrt[4]{50}$; c) $\sqrt[4]{500}$; d) $\sqrt[4]{5000}$; e) $\sqrt[6]{10}$; f) $\sqrt[6]{100}$; g) $\sqrt[6]{1000}$; h) $\sqrt[6]{10.000}$; i) $\sqrt[6]{100.000}$; j) $\sqrt[6]{1,000.000}$.

21. Zjednodušte:

a) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{45}$; b) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{\frac{v}{u}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$.

22. Vypočítajte:

a) $(\sqrt{6} + \sqrt{15}) \cdot \sqrt{3}$; b) $(\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81})\sqrt[3]{9}$;

c) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$; d) $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})$;

e) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{8})$; f) $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{9})$.

23. Vypočítajte:

a) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$; b) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3$; c) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^2$; d) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3$.

24. Dokážte, že

a) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{12}$; b) $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{8}$; c) $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{2(a + b)}$, kde $a \geq b \geq 0$; d) $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{2(a - b)}$, kde $a \geq b \geq 0$.

2. Mocniny s racionálnymi mocniteľmi.

V I. triede sme preberali mocninu a^n s tým omedzením, že mocniteľ n bol celé číslo (kladné, záporné alebo nula). Naproti tomu základ a bol ľubovoľné číslo okrem prípadu $a = 0$, keď nebolo možné definovať mocninu so záporným mocniteľom. Teraz budeme predpokladať, že základ je číslo kladné; predpoklad, že mocniteľ n je celé číslo, nahradíme omnoho všeobecnejším predpokladom, že n je racionálne číslo. Pre prípad celého mocniteľa v 1. triede odvodili sme vzorce

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \tag{1}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \tag{2}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r \tag{3}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \tag{4}$$

Uvidíme, že mocninu a^r s kladným základom a a s racionálnym mocniteľom r jediným spôsobom možno definovať tak, aby bolo stále

$$a^r > 0 \tag{5}$$

a aby práve pripomenuté pravidlá **(1)** až **(4)** zostaly v platnosti. Každé racionálne číslo r možno napísať vo tvare zlomku

$$r = \frac{m}{n}, \tag{6}$$

ktorého menovateľ n je prirodzené číslo (čiže celé kladné číslo) a čitateľ m je celé číslo (kladné, záporné alebo nula). Ak zvolíme racionálne číslo r v tvare **(6)**, musíme definovať hodnotu a tak, aby pre všetky racionálne čísla s platilo **(2)**. Ak zvolíme $s = n$, bude $rs = m$ a z **(2)** dostaneme

$$(a^r)^n = a^m,$$

zkadiaľ

$$a^{\frac{m}{n}} \doteq \sqrt[n]{a^m}. \tag{7}$$

Vzťah **(7)** je definíciou mocniny s kladným základom a a racionálnym mocniteľom **(6)**. Definíciu **(7)** možno písať aj v tomto tvare:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m. \tag{7'}$$

Že **(7')** a **(7)** dávajú tú istú hodnotu pre a, plynie z článku **1, VI.**

Prv než dokážeme, že pre práve definovanú mocninu s kladným základom a racionálnym mocniteľom platia pravidlá **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)**, musíme previesť dve veci. P r e d n e musíme uvážiť, že racionálne číslo r môžeme r o z m a n i t ý m i s p ô s o b m i uviesť na tvar **(6)** a musíme dokázať, že naša definícia mocniny a^r je nezávislá od toho, pre ktorý tvar **(6)** sa rozhodneme. Preto uvážme, že zo všetkých možných tvarov **(6)** je jeden **základný tvar,** v ktorom čísla m, n sú nesúdeliteľné a že ak **(6)** je základný tvar, potom ktorýkoľvek iný tvar je

$$r = \frac{km}{kn},$$

kde $k > 1$ je prirodzené číslo. Musíme teda dokázať, že

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}. \qquad \textbf{(8)}$$

Položme $\sqrt[n]{a^m} = x$, kde $x > 0$

$$x^n = a^m. \qquad \textbf{(9)}$$

Z **(9)** však plynie

$$(x^n)^k = (a^m)^k. \qquad \textbf{(10)}$$

Pretože čísla n, m, k sú celé, môžeme upotrebiť pravidlo **(2)** a miesto **(10)** napísať

$$x^{kn} = a^{km}, \qquad \textbf{(11)}$$

pretože $x > 0$, bude $a^{km} > 0$ a z **(11)** vyplýva, že $x = \sqrt[kn]{a^{km}}$; teda skutočne platí **(8)**.

Z a d r u h é musíme uvážiť, že medzi racionálne čísla patria aj všetky celé čísla a že mocniny s celým mocniteľom sme už predtým definovali; musíme dokázať, že pre celé r nová definícia výrazu a^r súhlasí so starou. To je ľahké, lebo to stačí urobiť za predpokladu, že číslo r je písané v základnom tvare. Ak však r je celé číslo, tak v základnom tvare **(6)** je $n = 1$, $m = r$ a pre $n = 1$ je **(7)** zrejme správne.

Ostáva dokázať, že pre kladné základy a racionálnych mocniteľov platia pravidlá **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)**.

D ô k a z p r a v i d l a **(1)**. Racionálne čísla r, s môžeme napísať so spoločným menovateľom

$$r = \frac{m_1}{n},\ s = \frac{m_2}{n},\ \text{teda}\ r + s = \frac{m_1 + m_2}{n}.$$

Pritom ovšem n je prirodzené číslo a m_1 a m_2 sú celé čísla. Položme

$$x = a^{\frac{1}{n}}.$$

Z toho nasleduje

$$a^r = x^{m_1};\; a^s = x^{m_2};\; a^{r+s} = x^{m_1+m_2}$$

a to znamená, že platí **(1)**.

D ô k a z p r a v i d l a **(2)**. Položme

$$r = \frac{m_1}{n_1},\; s = \frac{m_2}{n_2},\; \text{teda } rs = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2};$$

pritom n_1, n_2 sú prirodzené čísla, m_1, m_2 sú celé čísla. Podľa definície **(7)**

$$a^r = \sqrt[n_1]{a^{m_1}}; \tag{12}$$

podľa definície **(7')**

$$(a^r)^s = \left(\sqrt[n_2]{a^r}\right)^{m_2}. \tag{13}$$

Podľa článku 1, IV.

$$\sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a^{m_1}}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1}},$$

preto podľa **(12)**

$$\sqrt[n_2]{a^r} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1}},$$

podľa **(13)**

$$(a^r)^s = \left(\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1}}\right)^{m_2}; \tag{14}$$

podľa článku 1, III.

$$\left(\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1}}\right)^{m_2} = \sqrt[n_1 n_2]{(a^{m_1})^{m_2}} \tag{15}$$

m_1, m_2 sú celé čísla, preto

$$(a^{m_1})^{m_2} = a^{m_1 m_2}. \tag{16}$$

Zo **(14)**, **(15)**, **(16)** plynie, že

$$(a^r)^s = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}},$$

a podľa definície **(7)** je aj

$$a^{rs} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}}$$

a tak platí **(2)**.

D ô k a z p r a v i d l a **(3)**. Nech je opäť

$$r = \frac{m}{n},$$

kde n je prirodzené číslo, m je celé číslo. Podľa definície **(7)**

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}, \qquad b^r = \sqrt[n]{b^m}, \qquad (ab)^r = \sqrt[n]{(ab)^m}.$$

Pretože m je celé číslo,

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m$$

a podľa článku 1, I.

$$\sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m},$$

takže

$$(ab)^r = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m};$$

teda platí **(3)**.

D ô k a z p r a v i d l a **(4)**. Pretože súčet čísel r, $-r$ je nula, je podľa už dokázaného pravidla **(1)**

$$a^r \cdot a^{-r} = a^0, \quad \text{čiže} \quad a^r \cdot a^{-r} = 1$$

a z toho plynie **(4)**.

2. C v i č e n i e.

1. Vypočítajte: a) $49^{\frac{1}{2}}$; b) $16^{\frac{3}{4}}$; c) $8^{\frac{5}{3}}$; d) $27^{\frac{2}{3}}$; e) $25^{-\frac{1}{2}}$; f) $32^{-\frac{3}{5}}$; g) $81^{-\frac{3}{4}}$; h) $125^{-\frac{4}{3}}$.

2. Pomocou tabuliek vypočítajte: a) $10^{\frac{3}{2}}$; b) $10^{\frac{2}{3}}$; c) $5^{\frac{4}{3}}$; d) $5^{\frac{3}{4}}$; e) $12^{\frac{1}{6}}$; f) $20^{\frac{5}{6}}$.

3. Ako mocniny s lomenými mocniteľmi vyjadrite výrazy: a) $\sqrt{a^3}$; b) $\sqrt[3]{b^4}$; c) $\sqrt[6]{u^2}$; d) $\sqrt[4]{z^6}$; e) $\sqrt{x^{-5}}$; f) $\sqrt[5]{r^{-2}}$.

4. Odmocninami vyjadrite: a) $a^{\frac{3}{5}}$; b) $b^{\frac{5}{3}}$; c) $z^{-\frac{2}{3}}$; d) $u^{-\frac{3}{2}}$; e) $x^{\frac{12}{5}}$; f) $x^{-\frac{5}{12}}$.

5. Vypočítajte nasledujúce výrazy a výsledky vyjadrite odmocninami: a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$; b) $8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{3}{4}}$; c) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{-\frac{1}{3}}$; d) $12^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{-\frac{1}{3}}$; e) $5^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$; f) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$; g) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{5}}$; h) $d^{\frac{1}{4}} \cdot d^{-\frac{1}{2}}$; i) $m^{-\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{3}{2}}$; j) $k^{-\frac{1}{3}} \cdot k^{3}$.

6. Vypočítajte a výsledok vyjadrite odmocninou: a) $(2^{\frac{1}{2}})^3$; b) $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$; c) $(7^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{2}}$; d) $(9^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}}$; e) $(10^{-\frac{1}{4}})^{-\frac{4}{3}}$; f) $(a^{\frac{3}{4}})^2$; g) $(u^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$; h) $(z^{-\frac{4}{5}})^{-\frac{15}{8}}$; i) $(m^{\frac{3}{5}})^{-\frac{5}{3}}$; j) $(p^{-\frac{8}{3}})^{-\frac{9}{4}}$.

7. Vypočítajte: a) $(ab)^{\frac{2}{3}}$; b) $(x^2y)^{\frac{3}{2}}$; c) $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}$; d) $(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$; e) $(m^{\frac{1}{3}}n^{-\frac{5}{6}})^{\frac{3}{2}}$; f) $(3p^{-\frac{1}{4}}q^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}}$.

8. Vypočítajte: a) $5^{\frac{5}{4}} : 5^{\frac{3}{4}}$; b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{2}}$; c) $8^{-\frac{1}{6}} : 8^{\frac{1}{3}}$; d) $6^{\frac{1}{3}} : 6^{-\frac{3}{2}}$; e) $12^{-\frac{1}{5}} : 12^{-\frac{7}{10}}$; f) $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$; g) $u^{\frac{3}{4}} : u^{\frac{1}{2}}$; h) $z^{-\frac{1}{2}} : z^{\frac{1}{3}}$; i) $p^{\frac{3}{10}} : p^{-\frac{1}{2}}$; j) $h^{-\frac{3}{5}} : h^{-\frac{4}{15}}$.

9. Vyjadrite ako mocniny s lomenými mocniteľmi a potom vypočítajte: a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}$; b) $\sqrt[3]{6^2} \cdot \sqrt{6^3}$; c) $\sqrt{2\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; e) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; f) $\dfrac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[6]{12}}{\sqrt{12}}$; g) $\sqrt{\dfrac{3^2}{2^3}} : \sqrt[3]{\dfrac{2^3}{3^2}}$; h) $\sqrt{\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{5}{2}}}$; i) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{5} : \sqrt{\dfrac{2}{3}}}$;

$$\text{j)}\ \sqrt[5]{\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5}}{\sqrt[3]{5}}}.$$

10. Vyjadrite ako mocniny s lomenými mocniteľmi a potom vypočítajte:

a) $\sqrt{u^3} \cdot \sqrt[3]{u^2}$; b) $\sqrt[4]{a^3b} : \sqrt[3]{ab^2}$; c) $\sqrt{r\sqrt[3]{r^2}}$; d) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}} : \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$; e) $\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m}\sqrt[3]{m}}$; f) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{b}}} \cdot \sqrt{\dfrac{b}{\sqrt{a}}}$; g) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b\sqrt{ab}}}$.

11. Dokážte, že $1^r = 1$ pre každé racionálne r.

12. Dokážte, že $a^r : a^s = a^{r-s}$ pre $a > 0$ a pre ľubovoľných racionálnych mocniteľov r, s.

13. Dokážte, že $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$ pre $b > 0$ a ľubovoľné racionálne r.

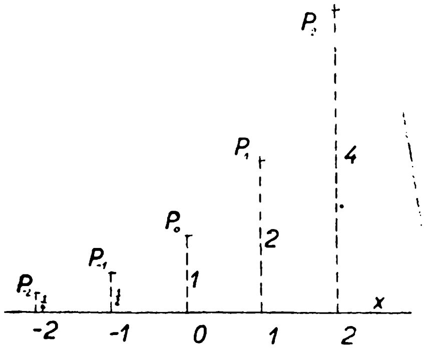
3. Exponenciálna funkcia.

Zvoľme kladné číslo a. Pre každé r a c i o n á l n e číslo x sme definovali hodnotu a^x; označme túto hodnotu písmenom y, položme teda

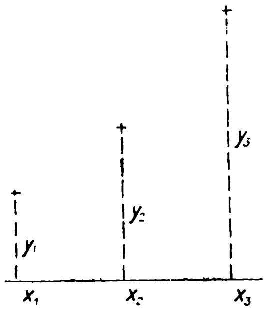
$$y = a^x. \tag{1}$$

Vo vzťahu **(1)** písmeno a znamená určité dané číslo (kladné); hovoríme, že a je konštanta. Naproti tomu písmená x, y znamenajú **premenné veličiny.** Za hodnotu premennej veličiny x môžeme zvoliť ľubovoľné racionálne číslo; x je **nezávisle premenná veličina.** Len čo zvolíme hodnotu premennej veličiny x, je vo vzťahu **(1)** určená hodnota premennej veličiny y; hovoríme, že y je **funkciou** premennej veličiny x. Táto funkcia a^x bola doteraz definovaná len pre racionálne hodnoty nezávislej premennej veličiny x.

Už na strednej škole sme hovorili o **grafoch** funkcií. Sostrojíme si graf funkcie a^x, pričom budeme voliť $a = 2$. Nakreslíme vodorovnú priamku, zvanú **os** x, ktorej body znázorňujú číselné hodnoty nezávislej premennej veličiny x; pre každé racionálne číslo x nanesieme od príslušného bodu osi x nahor dĺžku a^x a dostaneme príslušný bod grafu P_x. Pretože a^x je vždy kladné, leží celý graf nad osou x. Najprv vsadíme za x celé čísla 0, 1, 2, —1, —2, a dostaneme body grafu P_0, P_1, P_2, P_{-1}, P_{-2}. Aby sme



Obr. 1.



Obr. 2.

dostali body grafu, odpovedajúce lomeným hodnotám premennej veličiny x, preveďme túto úvahu (obr. 2). Zvolíme tri racionálne čísla x_1, x_2, x_3, tak, že $x_1 < x_2 < x_3$ a že oba rozdiely $x_2 - x_1$ a $x_3 - x_2$ rovnajú sa tomuže číslu c. Potom na osi x obraz čísla x_2 leží uprostred medzi obrazmi čísel x_1, x_3.

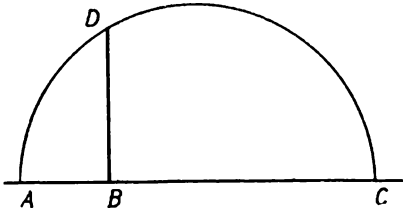
Položme $\quad y_1 = a^{x_1}, \; y_2 = a^{x_2}, \; y_3 = a^{x_3}.$

Pretože $x_2 = x_1 + c$, $x_3 = x_2 + c$, bude

$$y_2 = a^{x_1 + c} = a^{x_1} \cdot a^c = y_1 a^c,$$
$$y_3 = a^{x_2 + c} = a^{x_2} \cdot a^c = y_2 a^c = y_1 a^{2c}$$

a teda $\quad y_2^2 = y_1 y_3, \quad y_2 = \sqrt{y_1, y_2}.$

Kladné číslo y, spojené s kladnými číslami y_1, y_3 vzťahom **(2)**, volá sa **strednou geometrickou úmernou veličinou** kladných čísel y_1, y_3 a dá sa sostrojiť takto (obr. 3): Narysujme na priamke



Obr. 3.

body A, B, C tak, že B leží medzi A a C a že $AB = y_1$, $BC = y_3$. Potom opíšeme nad priemerom $\overline{AC}$ polkružnicu; kolmica, vztýčená na našu priamku v bode B pretne polkružnicu v bode D; $\triangle ACD$ má podľa Thalesovej vety pravý uhol pri vrchole D; úsečky $\overline{AB} = y_1$, $\overline{BC} = y_3$ sú úseky na prepone, úsečka $\overline{BD}$ je výška trojuholníka. Podľa Eukleidovej vety o výške $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, čiže $\overline{BD}^2 = y_1 y_3$, takže podľa **(2)** $y_2 = \overline{BD}$. Za predpokladu $y_1 < y_3$, ktorý v našom prípade je splnený, y_2 môžeme sostrojiť aj inak (zas obr. 3). Opäť máme tri body A, B, C tak, že B leží medzi A a C; teraz je však $\overline{AB} = y_1$, $\overline{AC} = y_3$. Opäť sostrojíme pravouhlý $\triangle ACD$; podľa Eukleidovej vety o odvesne $\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$, čiže $\overline{AD}^2 = y_1, y_3$, takže podľa **(2)** $y_2 = \overline{AD}$.

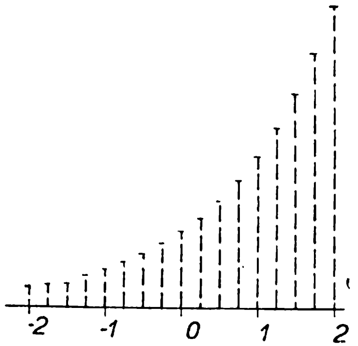
Pomocou práve opísanej konštrukcie môžeme graf funkcie $y = a^x$ doplniť ďalšími bodmi. Doteraz (obr. 1) sme mali len body na grafe, zodpovedajúce hodnotám $x = 0, 1, 2, -1, -2$; konštrukciou stredných geometrických úmerných veličín (obr. 4) doplníme najprv body, zodpovedajúce hodnotám

$$x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2};$$

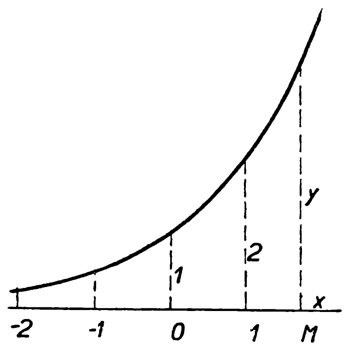
potom takou istou konštrukciou doplníme body, zodpovedajúce hodnotám

$$x = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; \ -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{4}.$$

Takto by sme mohli pokračovať ďalej. Ak spojíme sostrojené body čiarou, dostaneme graf funkcie $y = a^x$ (obr. 5, pre $a = 2$).



Obr. 4.



Obr. 5.

Z narysovaného grafu môžeme približne vyhľadať hodnoty funkcie a^x. Danému číslu, napr. $x = 1{,}7$, zodpovedá určitý bod M na osi x; v tomto bode vztýčime na os x kolmicu. Ak odmeriame na tejto kolmici vzdialenosť od priesečíka s osou x až ku priesečíku s grafom, dostaneme bez počítania číslo $y = a^x$, v našom príklade $y = a^{1,7}$. Týmto spôsobom môžeme k danému x určiť číslo a^x len s neprílíš veľkou presnosťou. Z nášho grafického spôsobu je zrejmé, že na to, aby sme mohli číslo a^x približne vypočítať, nemusíme ani číslo x presne poznať, ale tiež len približne. Teoreticky je to veľmi dôležité, lebo doteraz sme definovali hodnotu a^x len pre racionálnu hodnotu čísla x. Ak je však x iracionálne, ak napr. x sa rovná Ludolfovmu číslu $\pi = 3{,}141592653589\ldots$, môžeme približnú hodnotu čísla a^π (ktorá doteraz vôbec nebola definovaná) tak počítať, že miesto čísla π vezmeme racionálne číslo, veľmi blízke číslu π. Hodnotu čísla a^π takto môžeme určiť s presnosťou na 3 desatinné miesta: $2^3 = 8$, $2^{3,1} \doteq 8{,}574$; $2^{3,14} = 8{,}815$; $2^{3,141} = 8{,}821$; $2^{3,1415} = 8{,}824$; hodnota všetkých ďalších čísel $2^{3,14159}$; $2^{3,141592}$; $2^{3,1415926}$; $2^{3,14159265}$

atď., zaokrúhlená na tri desatinné miesta, bude 8,825. Teda $2^\pi \doteq 8{,}825$ presne na tri desatinné miesta. Nebudeme sa zaoberať presnou definíciou hodnoty a^x pre iracionálne x a spokojíme sa s výslovným uvedením fakta, že je možné presne definovať hodnotu a^x pre iracionálne x a že pravidlá

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ a^x \cdot b^x &= (ab)^x, \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \end{aligned}$$

odvedené v predchádzajúcom článku pre racionálnych mocniteľov, sú správne i keď x, y sú ľubovoľné reálne čísla, racionálne alebo iracionálne. Písmená a, b znamenajú stále kladné čísla.

Ak je $a > 1$ (ako na našich obrazcoch, na ktorých $a = 2$), potom a^x je **rastúcou funkciou**, ak sa zväčší x, zväčší sa aj a^x, čiže:

$$\text{Ak je } x_1 < x_2, \text{ je } a^{x_1} < a^{x_2}. \qquad \textbf{(3)}$$

Dokážeme aritmeticky, že **(3)** platí pre racionálne x_1, x_2 (za predpokladu, že $a > 1$). Najprv je zrejmé, že $\sqrt[n]{a} > 1$. Lebo ak $b = \sqrt[n]{a}$, je $b > 0$ a platí rovnica $b^n = a$. Teda číslo a je súčinom n činiteľov, ktoré všetky sa rovnajú číslu b; tento súčin a je väčší ako 1 a to je len tak možné, že aj činitelia $b = \sqrt[n]{a}$ sú väčšie ako 1. Ak je x kladné racionálne číslo, môžeme položiť $x = \frac{m}{n}$; m, n sú prirodzené čísla, potom je

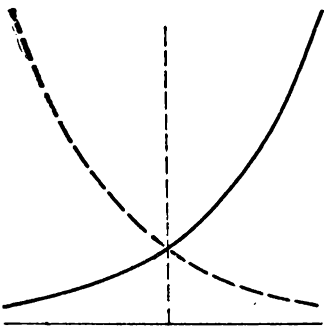
$$a^x = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ak je $a > 1$, je aj $a^m > 1$, a tak aj n-tá odmocnina čísla a^m je väčšia ako 1, teda $a^x > 1$. Nech sú teraz $x_1 < x_2$ dve racionálne čísla. Ak $x = x_2 - x_1$, je x kladné racionálne číslo a preto je $a^x > 1$. Avšak $x_2 = x_1 + x$, teda $a^{x_2} = a^{x_1} \cdot a^x$. Teda kladné číslo a^{x_2} vznikne z kladného čísla a^{x_1} tým, že ho znásobíme činiteľom $a^x > 1$, z čoho nasleduje, že $a^{x_2} > a^{x_1}$ a to sme mali dokázať.

Ak však a je kladné číslo, menšie ako 1, je a^x **klesajúcou funkciou.**

Ak je $x_1 < x_2$, je $a^{x_1} > a^{x_2}$. (4)

Aby sme si to názorne uvedomili, označme prevrátenú hodnotu čísla a písmenom b a tak číslo b je väčšie ako 1 a je $ab = 1$, teda $(ab)^x = 1$, čiže $a^x \cdot b^x = 1$. To znamená, že číslo b^x je prevrátenou hodnotou čísla a^x; ďalej vieme, že $a^{-x} \cdot a^x = 1$, teda a^{-x} je prevrátenou hodnotou čísla a^x a tak

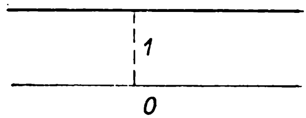


Obr. 6.

$$b^x = a^{-x}. \quad (5)$$

Z (5) je zrejmé, že grafy funkcií a^x, b^x sú súmerné obrazy podľa osi y, pozri obr. 6, v ktorom je plne vytiahnutý graf funkcie b^x a čiarkovaný graf funkcie a^x. Pretože funkcia b^x rastie, je z grafu zrejmé, že funkcia a^x klesá, t. j., že platí (4). Z porovnania grafov oboch funkcií je zrejmé, že platí (4).

Doteraz sme hovorili o grafe funkcie a^x za predpokladu, že a je kladné číslo, väčšie alebo menšie ako 1; ak $a = 1$, tak $1^x = 1$ pre každé x, preto (obr. 7) graf funkcie 1^x je rovnobežka s osou x, ktorá leží nad osou x vo vzdialenosti 1 od osi x.



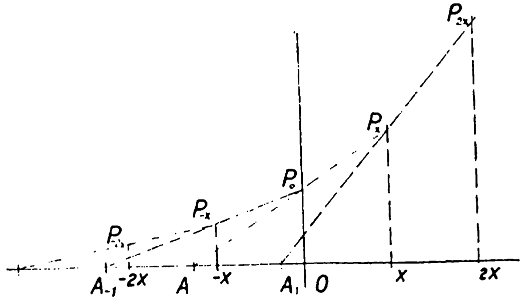
Obr. 7.

Študovaná funkcia a^x volá sa **exponenciálnou funkciou,** lebo nezávisle premenná veličina x je exponentom, čiže mocniteľom výrazu a^x.

3. C v i č e n i e.

1. Ak je daný bod P_x grafu funkcie $y = a^x$, odpovedajúci hodnote x nezávisle premennej veličiny, sostrojíme bod P_{2x}, odpovedajúci hodnote $2x$, takto: Priamka P_xP_0 (pričom $\overline{0P_0} = 1$, pozri obr. a) vytne na osi x úsek $\overline{A0}$. Tento úsek prenesieme na os x od bodu x do bodu A_1 a priamka A_1P_x pretne

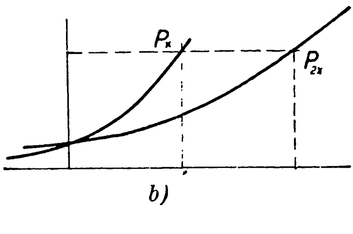
rovnobežku, vedenú s osou y vo vzdialenosti $2x$ od počiatku, v bode P_{2x}. Dokážte! Ako sostrojíte body P_{3x}, P_{-x}, P_{-2x} atď.?



$a)$

2. Ak máme sostrojené body P_1, P_2, zobrazujúce hodnoty funkcie $y = a^x$ pre $x = x_1$ a $x = x_1 + c$, dostaneme bod P_3, zobrazujúci hodnotu našej funkcie pre $x = x_1 + 2c$ takto: Priamka P_1P_2 pretne os x v bode A_1, úsek x_1A_1 prenesieme od obrazu čísla $x_1 + c$ (zachovávajúc smysel) do A_2; potom priamka A_2P_2 pretne rovnobežku s osou y, vedenú obrazom bodu $x_1 + 2c$ v bode P_3. Dokážte!

3. Ak je narysovaný graf funkcie $y = a^x$ a ak každé x tohto grafu k-krát zväčšíme (ponechávajúc príslušné y bez zmeny,



$b)$

pozri obr. b), dostaneme graf funkcie $y = b^x$, kde $b = a^{\frac{1}{k}}$. Dokážte! Čo vznikne pre $k = -1$?

4. Vypočítajte: a) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; b) $\left(3^{\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{9}}$; c) $\left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;
d) $\left(a^{\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; e) $\left(x^{2+\sqrt{2}}\right)^{2-\sqrt{2}}$; f) $x^{x+\sqrt{2}} \cdot x^{2-\sqrt{2}}$;

g) $x^{\sqrt{2}+1} : x^{\sqrt{2}-1}$; h) $\dfrac{x^{\sqrt{2}-1} \cdot x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{x^{\sqrt{3}-1}}$; i) $\dfrac{(ab)^{\sqrt{2}} \cdot (bc)^{\sqrt{8}}}{(ac)^{\sqrt{32}}}$;

j) $\left(\dfrac{y}{z}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \left(\dfrac{z}{y}\right)^{\sqrt{3}-1}$.

5. Srovnajte podľa veľkosti čísla: 3^3; 3^4; $3^{3,1}$; $3^{3,2}$; $3^{3,14}$; $3^{3,15}$; $3^{3,141}$; $3^{3,142}$; $3^{3,1415}$. Kam medzi ne zaradíte 3^{π}?

6. Vyložte význam symbolu $10^{\sqrt{2}}$.

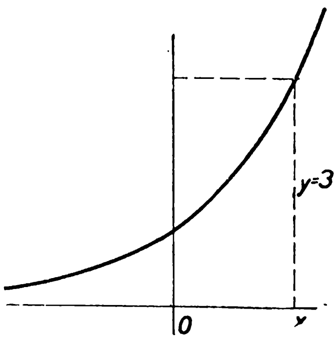
4. Pojem a vlastnosti logaritmu.

Zvolíme číslo a väčšie ako 1. Ak je dané číslo b, môžeme vypočítať x z rovnice

$$a^x = b. \tag{1}$$

Ak je číslo b záporné alebo nula, rovnica **(1)** nemá riešenia. Ak je ale b kladné číslo, rovnica **(1)** má práve jedno riešenie; približná hodnota riešenia sa dá určiť meraním, ak je narysovaný graf funkcie a^x; pozri obr. 8 pre $a = 2$, $b = 3$. Koreň rovnice $2^x = 3$ je približne

$$x = 1{,}58.$$



Obr. 8.

Koreň x rovnice **(1)** sa menuje logaritmom čísla b pri základe a; píšeme

$$x = \log_a b.$$

Teda logaritmus čísla b je mocniteľ, na ktorý musíme umocniť základ a, aby sme dostali číslo b. Pretože $a^0 = 1$, $a^1 = a$, logaritmus jednotky je nula (pri každom základe) a logaritmus základu je 1. **Len kladné čísla majú logaritmus.**

Pretože o základe predpokladáme, že je väčší ako 1, a^x je rastúcou funkciou, teda väčšia hodnota logaritmu odpovedá väčšej hodnote čísla, t. j. ak je $b_1 > b_2 > 0$, je $\log_a b_1 > \log_a b_2$, pri každom základe $a > 1$. Pretože $\log_a 1 = 0$, z toho plynie:

Väčšie čísla ako 1 majú kladné logaritmy, kladné čísla, menšie ako 1, majú záporné logaritmy.

Zo známych vlastností exponenciálnej funkcie plynú tieto vlastnosti logaritmu:

I. **Logaritmus súčinu dvoch alebo viac kladných čísel rovná sa súčtu logaritmov činiteľov,** t. j.

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y\,; \tag{2}$$

všeobecnejšie

$$\log_a x_1 x_2 \ldots x_n = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n\,.$$

Lebo ak je napr.

$$\log_a x = r\,, \qquad \log_a y = s\,,$$

tak $\qquad a^r = x\,, \qquad a^s = y$

a preto $\qquad a^r \cdot a^s = a^{r+s} = xy\,,$

čiže a musíme umocniť na $r + s$, aby sme dostali hodnotu xy, preto

$$\log_a xy = r + s\,,$$

t. j. platí **(2)**.

II. **Logaritmus podielu dvoch kladných čísel dostaneme, ak od logaritmu delenca odčítame logaritmus deliteľa,** t. j.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y\,. \tag{3}$$

Lebo ak je

$$\frac{x}{y} = z, \text{ tak } x = yz\,,$$

a tak

$$\log_a x = \log_a y + \log_a z$$

a z toho plynie **(3)**.

III. **Logaritmus ľubovoľnej mocniny dostaneme, ak logaritmus základu násobíme mocniteľom,** t. j.

$$\log_a x^k = k \log_a x\,. \tag{4}$$

Nech je

$$\log_a x = r\,, \text{ teda } a^r = x\,,$$

potom bude

$$a^{rk} = (a^r)^k = x^k, \text{ a tak}$$

$$\log_a x^k = kr, \text{ t. j. platí } \mathbf{(4)}.$$

Číslo k vo vete III. nemusí byť celé. Ak je k prevrátená hodnota prirodzeného čísla n, je

$$x^k = x^{\frac{1}{n}}, \text{ čiže } x^k = \sqrt[n]{x}.$$

Zvláštnym prípadom III. vety je teda veta:

IV. **Logaritmus n-tej odmocniny kladného čísla dostaneme, ak logaritmus základu delíme odmocniteľom,** t. j.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = (\log_a x) : n.$$

Z III. vety plynie súvislosť logaritmov tohože čísla x pri dvoch rôznych základoch $a > 1$, $b > 1$, vyjadrená

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \tag{5}$$

Dôkaz. Ak je $\log_b x = r$, tak $b^r = x$. **(6)**

Pretože oba výrazy v **(6)** sú rovnaké, sú rovnaké aj ich logaritmy pri základe a, t. j.

$$r \log_a b = \log_a x, \text{ zkadiaľ } r = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \text{ to je ale } \mathbf{(5)}.$$

4. Cvičenie.

Vypočítajte: a) $\log_2 4$; b) $\log_2 8$; c) $\log_2 16$; d) $\log_2 \frac{1}{2}$; e) $\log_2 \frac{1}{4}$; f) $\log_2 \frac{1}{8}$; g) $\log_2 \sqrt{2}$; h) $\log_2 \sqrt[3]{2}$; i) $\log_2 \sqrt[3]{4}$; j) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Vypočítajte: a) $\log_3 1$; b) $\log_3 3$; c) $\log_3 9$; d) $\log_3 27$; e) $\log_3 \frac{1}{3}$; f) $\log_3 \frac{1}{9}$; g) $\log_3 \sqrt{3}$; h) $\log_3 \sqrt[3]{9}$; i) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; j) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{81}}$.

3. Vypočítajte: a) $\log_5 1$; b) $\log_5 5$; c) $\log_5 125$; d) $\log_5 \frac{1}{25}$; e) $\log_5 \frac{1}{625}$; f) $\log_5 \sqrt[3]{5}$; g) $\log_5 \sqrt{125}$; h) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$; i) $\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$; j) $\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{625^2}}$.

4. Stanovte x tak, aby a) $\log_2 x = 0$; b) $\log_2 x = 1$; c) $\log_2 x = 2$; d) $\log_2 x = 5$; e) $\log_2 x = -1$; f) $\log_2 x = -4$; g) $\log_2 x = \frac{1}{5}$; h) $\log_2 x = \frac{4}{3}$; i) $\log_2 x = -\frac{1}{3}$; j) $\log_2 x = -\frac{3}{5}$.

5. Stanovte x tak, aby a) $\log_5 x = 0$; b) $\log_5 x = 1$; c) $\log_5 x = 3$; d) $\log_5 x = -1$; e) $\log_5 x = -2$; f) $\log_5 x = -3$; g) $\log_5 x = \frac{1}{3}$; h) $\log_5 x = \frac{3}{2}$; i) $\log_5 x = -\frac{3}{4}$; j) $\log_5 x = -\frac{2}{5}$.

6. Stanovte x tak, aby a) $\log_3 x = 0$; b) $\log_3 x = 1$; c) $\log_3 x = 2$; d) $\log_3 x = 4$; e) $\log_3 x = -1$; f) $\log_3 x = -3$; g) $\log_3 x = \frac{1}{3}$; h) $\log_3 x = \frac{5}{4}$; i) $\log_3 x = -\frac{1}{3}$; j) $\log_3 x = -\frac{3}{2}$.

7. Stanovte z tak, aby a) $\log_z 4 = 2$; b) $\log_z 8 = 3$; c) $\log_z 7 = 1$; d) $\log_z \frac{1}{9} = -2$; e) $\log_z 0{,}001 = -3$; f) $\log_z 5 = \frac{1}{2}$; g) $\log_z 3 = \frac{1}{3}$; h) $\log_z 1 = 0$; i) $\log_z 10 = 2$; j) $\log_z 2 = 10$.

8. Vypočítajte: a) $\log_z z$; b) $\log_z z^2$; c) $\log_z z^3$; d) $\log_z \frac{1}{z}$; e) $\log_z \frac{1}{z^3}$; f) $\log_z \sqrt{z}$; g) $\log_z \sqrt[3]{z}$; h) $\log_z \sqrt[4]{z^3}$; i) $\log_z \frac{1}{\sqrt{z}}$; j) $\log_z \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}}$.

9. Vyjadrite pomocou $\log_z a$: a) $\log_z az$; b) $\log_z az^2$; c) $\log_z az$; d) $\log_z \frac{a}{z}$; e) $\log_z \frac{a}{z^2}$.

10. Pomocou $\log_z a$, $\log_z b$ vyjadrite: a) $\log_z a^2 b$; b) $\log_z (ab)^3$; c) $\log_z a\sqrt{b}$; d) $\log_z \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^5}$; e) $\log_z \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2}$; f) $\log_z \frac{az}{b}$; g) $\log_z \frac{z}{ab^2}$; h) $\log_z \frac{z^2}{a\sqrt{b}}$; i) $\log_z \sqrt{abz}$; j) $\log_z a\sqrt[3]{\frac{b^2}{z}}$.

11. Vypočítajte x, ak a) $\log_z x = \log_z a + \log_z b - \log_z c$; b) $\log_z x = 2\log_z a + 3\log_z b$; c) $\log_z x = \log_z a - \frac{1}{2}\log_z b$; d) $\log_z x = \frac{1}{3}\left(\log_z a + \frac{1}{2}\log_z b\right)$; e) $\log_z x = 1$; f) $\log_z x = 2 + \log_z a$; g) $\log_z x = \frac{1}{2} - \log_z a$; h) $\log_z x = \log_z (a+1) + \log_z (a-1)$; i) $\log_z x = \log_z (a+2) + \log_z (a-1)$; j) $\log_z x = \log_z a + \log_z\left(1 + \frac{b}{a}\right)$.

12. Dokážte, že $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

13. Dokážte, že a) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$; b) $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$.

14. Dokážte, že $\log_{ab} x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$.

15. Pri ktorom základe z je $\log_z a$ o n väčší ako $\log b$? (Príklad: $a = 500$, $b = 256$, $n = 3$.)

5. Tabuľka logaritmov.

V praxi sa užívajú najčastejšie dekadické logaritmy, t. j. logaritmy so základom 10. Píšeme stručne

$$\log x \text{ miesto } \log_{10} x.$$

Teda rovnica $\log x = r$ znamená to isté ako rovnica $10^r = x$.

A tak

$$\log 1 = 0; \ \log 10 = 1; \ \log 100 = 2; \ \log 1000 = 3 \text{ atď.}$$
$$\log 0{,}1 = -1; \ \log 0{,}01 = -2; \ \log 0{,}001 = -3 \text{ atď.}$$

Zo 4. článku vieme, že, ak sa zväčší číslo, zväčší sa jeho logaritmus.

Teda

čísla medzi	1 a 10	majú	logaritmy	medzi	0 a 1,
„ „	10 a 100	„	„	„	1 a 2,
„ „	100 a 1000	„	„	„	2 a 3 atď.
„ „	0,1 a 1	„	„	„	—1 a 0,
„ „	0,01 a 0,1	„	„	„	—2 a —1,
„ „	0,001 a 0,01	„	„	„	—3 a —2 atď.

Všimnime si najmä čísel medzi 1 a 10, teda čísel, ktorých najvyššia číslica má nulový rád. Ich logaritmy ležia medzi 0 a 1, sú to teda kladné čísla, ktoré majú pred desatinnou čiarkou 0. Ak má číslo medzi 1 a 10 tri cifry, ako napr. číslo $N = 3{,}14$, v tabuľke je udaný jeho logaritmus, zaokrúhlený na 4 desatinné miesta. Tento logaritmus má, ako vieme, pred desatinnou čiarkou len 0 a táto nula nie je v tabuľke uvedená. V tabuľke nájdeme len číslice za desatinnou čiarkou, ktoré tvoria tzv. **mantisu** logaritmu. Každý riadok tabuľky obsahuje 10 mantís; to sú mantisy logaritmov čísel s týmiže prvými dvoma číslicami. Napr. mantisu logaritmu čísla $N = 3{,}14$ nájdeme v riadku 31 a stĺpec 4; mantisa je 4969, teda

$$\log 3{,}14 \doteq 0{,}4969$$

na štyri desatinné miesta. U čísla $N = 4$ hľadáme v riadku 40 a stĺpci 0; teda $\log 4 \doteq 0{,}6021$. Alebo $\log 7{,}7 \doteq 0{,}886\bar{5}$; čiarka nad piatkou značí vzostupné zaokrúhlenie, teda $\log 7{,}7 \doteq 0{,}886$ na tri desatinné miesta.

Ak má číslo N, ktoré je medzi 1 a 10, viac ako tri cifry, ako napr. číslo $N = 5{,}728$, nenájdeme $\log N$ priamo v tabuľke a užívame interpoláciu podobne ako napr. pri tabuľkách goniometrických funkcií. Číslo N je medzi číslami 5,72 a 5,73, ktorých logaritmy podľa tabuľky sú: $\log 5{,}72 \doteq 0{,}7574$, $\log 5{,}73 = 0{,}7582$. Číslo N je bližšie k číslu 5,73 ako k číslu 5,72 a tak aj $\log N$ bude bližšie k číslu $\log 5{,}73$ ako k číslu $\log 5{,}72$. Ak prejdeme od čísla 5,73 k číslu 5,72 zmenšením o 0,01, zmenší sa logaritmus o $0{,}0008 = 8 \cdot 10^{-4}$; ak prejdeme od čísla 5,73 k číslu 5,728, bude zmenšenie čísla: 2 desatiny z 0,01 a interpoláciu prevedieme tak, že $\log 5{,}73$ zmenšíme o 2 desatiny z $8 \cdot 10^{-4}$, t. j. o $1{,}6 \cdot 10^{-4} \doteq 2 \cdot 10^{-4}$. Preto bude $\log 5{,}728 \doteq 0{,}7580$, čo je skutočne správne na štyri desatinné miesta. Podobne hľadáme napr. $\log 2{,}023$. Pri prechode od čísla 2,02 k číslu 2,023 činí zväčšenie tri desatiny z 0,01, preto $\log 2{,}02 \doteq 0{,}3054$ zväčšíme o tri desatiny tabuľkového rozdielu $(3075 - 3054) \cdot 10^{-4} = 21 \cdot 10^{-4}$; zväčšenie je $6{,}3 \cdot 10^{-4} \doteq 6 \cdot 10^{-4}$; teda $\log 2{,}023 \doteq 0{,}3062$ a to je zas správne na štyri desatinné miesta. Pri veľkých tabuľkových diferenciách popísaná interpolácia niekedy môže udať štvrté desatinné miesto logaritmu trocha nesprávne; preto logaritmy čísel 1,001; 1,002; .... 1,109 sú osobitne udané v tabuľke.

Doteraz sme hovorili len o logaritmoch tých čísel N, ktoré sú medzi 1 a 10; ale keď vieme určiť dekadické logaritmy takýchto čísel N, ľahko už určíme dekadický logaritmus ktoréhokoľvek kladného čísla. Lebo každé kladné číslo sa dá písať v tvare

$$x = 10^k \cdot N, \tag{1}$$

kde k je celé číslo (kladné, záporné alebo nula) a N je číslo medzi 1 a 10, ktorého logaritmus je medzi 0 a 1. Napr. $314 = 10^2 \cdot 3{,}14$; $0{,}000314 = 10^{-4} \cdot 3{,}14$ atď. Je zrejmé, že k je rád najvyššej číslice v čísle x. Pretože ide o logaritmy so základom 10, je $\log 10 = 1$, teda $\log 10^k = k$ a podľa **(1)** bude

$$\log x = k + \log N; \tag{2}$$

Napr. $\log 314 \doteq 2{,}4969$, $\log 0{,}000314 \doteq 0{,}4969-4$ atď. Celé číslo k sa volá **charakteristikou** logaritmu kladného čísla x.

Ak je číslo x väčšie ako 1, je jeho logaritmus kladný a má tvar

$$\log x \doteq k{,}\times\times\times\times \tag{3}$$

kde pred desatinnou čiarkou stojí charakteristika k, ktorá sa rovná rádu najvyššej číslice čísla x; hodnota charakteristiky nezávisí od číslic v čísle x, ale len od umiestenia desatinnej čiarky. Naproti tomu mantisa, označená hviezdičkami v (3), závisí len od sledu číslic v čísle x a nemení sa pri posunutí desatinnej čiarky.

Ak je číslo x menšie ako 1, je jeho logaritmus záporný a píšeme ho v tvare

$$\log x \doteq 0{,}\times\times\times\times - h, \tag{4}$$

kde $h = |k|$ je prirodzené číslo a hviezdičky opäť značia mantisu. Teda napr.

$$\log 0{,}000314 \doteq 0{,}4969 - 4; \quad \log 0{,}314 \doteq 0{,}4969 - 1 \text{ atď.}$$

(4) nie je obvyklý tvar písania záporného čísla; v obvyklom tvare mali by sme napr.

$$\log 0{,}000314 \doteq -3{,}5031; \quad \log 0{,}314 \doteq -0{,}5031 \text{ atď.}$$

Ale tvar (4), v ktorom môžeme logaritmus kladného čísla $x < 1$ bezprostredne napísať, len čo poznáme charakteristiku a mantisu, je pre logaritmus veľmi účelný a zásadne budeme písať záporné logaritmy v tomto tvare. S logaritmom, ktorý má zápornú charakteristiku, počítame ako s dvojčlenom!

Ak má číslo x viac ako tri cifry, užívame zas interpoláciu, napr.

$$\log 202300 \doteq 5{,}3060; \quad \log 0{,}5728 \doteq 0{,}7580 - 1 \text{ atď.}$$

Doteraz sme hovorili len o určení logaritmu daného kladného čísla pomocou tabuľky. Ale tabuľky logaritmov môžeme použiť i na obrátený výkon: určiť číslo, ak je známy jeho logaritmus.

Príklad 1. $\log x \doteq 3{,}9425$. V tabuľke nájdeme, že mantisa 9425 zodpovedá čísliciam 876; rád najvyššej číslice sa rovná charakteristike, v našom prípade trom, a preto číslica 8 znamená tisíce. Teda $x = 8760$.

Príklad 2. $\log x \doteq 0{,}8854 - 2$ čiže $\log x \doteq -1{,}1146$. Druhý tvar je pre nás nevhodný a ak by číslo $\log x$ bolo dané pôvodne v tvare $-1{,}1146$, najprv by sme ho previedli na prvý tvar $0{,}8854 - 2$. Pre mantisu 8854 nájdeme v tabuľke číslice 768 a najvyššia číslica 7 má rád -2, teda stotiny a tak $x \doteq 0{,}0768$.

V oboch doterajších príkladoch mantisu sme našli v tabuľke; vo väčšine prípadov však daná mantisa nebude v tabuľke. Nahradíme ju potom najbližšou tabuľkovou mantisou a dostaneme hodnotu x, zaokrúhlenú na tri platné číslice, ktorá pre prax v mnohých prípadoch postačí. Ale pomocou interpolácie môžeme určiť aj štvrtú platnú číslicu, ktorá zvlášť v prípadoch malého tabuľkového rozdielu mantís nebude vždy presná.

Príklad 3. $\log x \doteq 0{,}4702$. Mantisa 4702 nie je v tabuľke. Najbližšia tabuľková mantisa 4698 je o niečo menšia a dáva číslice 295, z ktorých najvyššia má rád 0 (ktorý sa rovná charakteristike) a teda znamená jednotky. Bude teda na tri platné číslice $x = 2{,}95^+$, kde malé znamienko plus naznačuje, že zaokrúhlenie 2,95 je sostupné. Aby sme určili štvrtú platnú číslicu, všimneme si v tabuľke vedľa zmienenej už mantisy ešte druhú tabuľkovú mantisu 4713, ktorá je väčšia ako daná mantisa 4702. Rozdiel oboch tabuľkových mantís $4713 - 4698 = 15$. Na štvrtú číslicu, ktorú označíme písmenom n, pripadá n desatín tohto rozdielu mantís, teda n-krát $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ ako rozdiel logaritmov. Daná mantisa je 4702; pretože $4702 - 4698 = 4$, hodnotu n určíme takto: $1{,}5n = 4$, zkadiaľ $n \doteq 3$ a preto $x \doteq 2{,}953$ na štyri platné číslice.

Príklad 4. $\log x \doteq 0{,}4575 - 1$. Najbližšia tabuľková mantisa je 4579; daná mantisa je o niečo menšia. Mantise 4579 v tabuľke odpovedajú číslice 287; najvyššia číslica má rád -1. Teda na tri platné číslice $x \doteq 0{,}287^-$; malé mínus naznačuje, že skutočná hodnota x je o niečo menšia. Tabuľkový rozdiel mantís $4579 - 4565 = 24$ porovnávame s daným rozdielom mantís $4579 - 4575 = 4$. Podmienka $2{,}4n = 4$ dáva približne $n \doteq 2$. Teda na štyri platné číslice je $x \doteq 0{,}287 - 0{,}002$, t. j. $x \doteq 0{,}2868$.

Príklad 5. $\log x \doteq 0{,}900 - 3$. Tabuľková mantisa 8998 dáva číslice 794; najvyšší rád je -3 a preto $x = 0{,}00794$. Tabuľkový rozdiel $9004 - 8998 = 6$ porovnávame s daným rozdielom

$9000 - 8998 = 2$; dá $0{,}6n = 2$, teda $n \doteq 3$ a tak $x \doteq 0{,}007943$. Ale nie je vylúčené, že na štyri platné číslice zaokrúhlené číslo x je v skutočnosti $x \doteq 0{,}007944$. O tom by bolo možné rozhodnúť len vtedy, keby sme poznali presnejšie hodnotu $\log x$ a i potom by bolo na to treba presnejšie tabuľky.

Na urýchlenie interpolácie je v tabuľke posledný stĺpec, označený P. P. (latinsky Partes proportionales = úmerné diely). Tým sa nebudeme zaoberať.

5. Cvičenie.

1. Nájdite dekadické logaritmy čísel: a) 2,63; b) 8,37; c) 1,52; d) 4,02; e) 1,032; f) 7,7; g) 4,2; h) 3,8; i) 5; j) 9.

2. Nájdite dekadické logaritmy čísel: a) 3,452; b) 7,546; c) 8,888; d) 5,503; e) 4,308; f) 2,034; g) 6,057; h) 4,003; i) 9,007; j) 1,0434.

3. Nájdite dekadické logaritmy čísel: a) 23,6; b) 457; c) 8700; d) 0,172; e) 0,003; f) 48,42; g) 530,7; h) 8765; i) 0,6089; j) 0,007006.

4. K daným dekadickým logaritmom nájdite čísla: a) 0,5119; b) 0,7505; c) 0,9196; d) 0,9566; e) 0,0282; f) 0,4472; g) 0,1761; h) 0,8808; i) 0,7782; j) 0,9542.

5. K daným dekadickým logaritmom vyhľadajte čísla: a) 0,1113; b) 0,5228; c) 0,6596; d) 0,0419; e) 0,4846; f) 0,7040; g) 0,5568; h) 0,9195; i) 0,6993; j) 0,3027.

6. K daným dekadickým logaritmom nájdite čísla: a) 1,8222; b) 2,5752; c) 4,4440; d) 0,2718—1; e) 0,0233—2; f) 1,7777; g) 2,5000; h) 3,0180; i) 0,4177—1; j) 0,3456—3.

7. Nájdite číslo, ktorého dekadický logaritmus je: a) —0,3782; b) —1,1409; c) —2,2222; d) —3,3; e) $-\frac{1}{4}$; f) $-\frac{2}{3}$.

8. Vypočítajte (na dve desatinné miesta) dekadické logaritmy prirodzených čísel od 1 do 10 z približných vzťahov: $2^{10} = 1000$; $3^4 = 10 \cdot 2^3$; $5 = 10 : 2$; $7^2 = 50$.

9. Ak približne platia rovnosti: $2 \cdot 3^{35} = 10^{17}$; $2^{16} = 10 \cdot 3^8$. Vypočítajte odtiaľ (na štyri desatinné miesta) dekadické logaritmy čísel 2 a 3.

10. Ak sa zväčší číslo x k-krát, zväčší sa jeho dekadický logaritmus o $\log k$. Dokážte!

11. Ak sa zväčší číslo x o h, zväčší sa jeho dekadický logaritmus o $\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$. Dokážte!

12. Ak sa zväčší dekadický logaritmus čísla x o m, zväčší sa toto číslo o $x\,(10^m - 1)$. Dokážte!

6. Použitie tabuľky logaritmov.

Pomocou našej tabuľky dajú sa rýchle a pohodlne riešiť rozmanité úlohy, pri čom presnosť riešenia je závislá od presnosti tabuľky. Štvormiestna tabuľka obyčajne umožňuje určiť štyri platné číslice výsledku, pričom štvrtá obyčajne nie je úplne spoľahlivá. Táto presnosť je postačujúca pre bežné fyzikálne úlohy, lebo presnosť výsledku závisí v prvom rade od presnosti priamo meraných hodnôt a už meranie na tri platné číslice je prakticky obťažné.

Logaritmy umožňujú nahradiť násobenie sčítaním.

Príklad 1. Vypočítajte $x = 0{,}2364 \cdot 0{,}3481$. Podľa tabuľky:

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}2364 & \doteq 0{,}3736 - 1 \\ \log 0{,}3481 & \doteq 0{,}5417 - 1 \\ \hline \log x & \doteq 0{,}9153 - 2, \text{ teda } x \doteq 0{,}08229 \end{array}$$

alebo $x = 0{,}08228$. Presvedčte sa, že presná hodnota je $x = 0{,}008229084$.

Ďalej logaritmy umožňujú nahradiť delenie odčítaním.

Príklad 2. Vypočítajte $x = 3{,}489 : 156{,}4$. Podľa tabuľky

$$\begin{array}{ll} \log 3{,}489 & \doteq 0{,}5427 \\ -\log 156{,}4 & \doteq 2{,}1942 \\ \hline \log x & \doteq 0{,}3485 - 2, \text{ teda } x \doteq 0{,}02231. \end{array}$$

Presvedčte sa delením!

Pomocou logaritmov umocňovanie nahradíme násobením.

Príklad 3. Vypočítajte približnú hodnotu mocniny 3^{17}.

$$\log 3 \doteq 0{,}4771, \text{ teda } \log 3^{17} \doteq 8{,}1107 \text{ a tak}$$

$3^{17} \doteq 1{,}28 \cdot 10^8$. Zistili sme hodnotu čísla 3^{17} na tri platné číslice.

Skúmajme spoľahlivosť výsledku. Údaj $\log 3 \doteq 0,4771$ znamená, že $\log 3 > 0,47705$; $\log 3 < 0,47715$. Pretože $\log 3^{17} = 17 \log 3$, je $\log 3^{17} > 8,10985$; $\log 3^{17} < 8,11155$. Teda podľa tabuľky $3^{17} > 1,287 \cdot 10^8$; $3^{17} < 1,291 \cdot 10^8$. Je teda náš údaj $3^{17} = 1,29 \cdot 10^8$ v podstate spoľahlivý.

Konečne odmocňovanie nahradíme delením:

Príklad 4. $x = \sqrt[7]{100}$. Pretože $\log 100 = 2$, bude $\log x \doteq 0,2857$ a tak $x \doteq 1,930$ alebo $x \doteq 1,931$.

Príklad 5. $x = \sqrt[3]{0,0002433}$; $\log 0,000243 \doteq 0,3856-4$; toto číslo máme deliť 3. Prevedieme ho najprv na tvar $2,3856-6$, v ktorom aj charakteristika je deliteľná 3. Potom delíme a dostaneme $\log x \doteq 0,7952-2$, odkiaľ $x \doteq 0,06240$.

Na príkladoch sme si ukázali, ako sa pomocou logaritmov násobí, delí, umocňuje a odmocňuje. A teraz ešte vypočítame složitejší príklad s týmito výkonmi.

Príklad 6. $x = \sqrt{\dfrac{11,2 \cdot 23,4 \cdot 37,6}{256,4 \cdot 97,6}}$.

$$\begin{aligned} \log 11,2 &\doteq 1,0492 \\ \log 23,4 &\doteq 1,3692 \\ \log 37,6 &\doteq 1,5752 \\ \hline \log \text{čitateľa} &\doteq 3,9936 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 256,4 &\doteq 2,4089 \\ \log 97,6 &\doteq 1,894 \\ \hline \log \text{menovateľa} &\doteq 4,3983 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3,9936 \\ &-4,3983 \\ \hline \log \text{zlomku} &\doteq 0,5953-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1,5953-2) : 2 &= 0,7976-1 \\ \log x &\doteq 0,7976-1 \\ x &\doteq 0,6274. \end{aligned}$$

Všimnite si, že sme nevypočítali hodnotu čitateľa, menovateľa a zlomku, ale len ich logaritmy.

6. C v i č e n i e.

1. Vypočítajte: a) $2{,}47 \cdot 1{,}86$; b) $704 \cdot 14{,}2$; c) $0{,}3724 \cdot 1{,}276$; d) $54{,}26 \cdot 0{,}02873$; e) $3{,}05 \cdot 0{,}468 \cdot 0{,}256$.

2. Vypočítajte: a) $56{,}2 : 4{,}81$; b) $6{,}254 : 9{,}236$; c) $0{,}2487 : 5{,}602$; d) $1 : 3{,}784$; e) $10 : 0{,}07438$.

3. Vypočítajte: a) $3{,}25^2$; b) $48{,}7^3$; c) $1{,}032^5$; d) $0{,}5682^2$; e) $0{,}2154^3$.

4. Vypočítajte: a) $\sqrt{5{,}64}$; b) $\sqrt[3]{12{,}8}$; c) $\sqrt{456{,}8}$; d) $\sqrt{0{,}2345}$; e) $\sqrt[5]{10}$; f) $\sqrt[3]{0{,}1}$.

5. Vypočítajte: a) $\sqrt{2{,}262 \cdot 0{,}3186}$; b) $\sqrt{5{,}426^2 - 4{,}862^2}$; c) $2 \cdot 3{,}872^2$; d) $\sqrt{7} : \sqrt[3]{5}$; e) $\left(\frac{56{,}28}{61{,}05}\right)^3$.

6. S akou presnosťou možno pomocou štvormiestnej tabuľky logaritmov vypočítať: a) $(7^7)^7$; b) $7^{(7^7)}$?

7. Vypočítajte: a) $\sqrt[5]{7} - \sqrt[7]{5}$; b) $\sqrt{0{,}3253^2 + 0{,}4867^2}$; c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$; d) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

8. Vypočítajte obsah trojuholníka, ktorého strany sú: $a = 965$ dm; $b = 6{,}38$ dm; $c = 5{,}84$ dm.

9. a) Vypočítajte dĺžku kružnice, ktorej polomer $r = 31{,}2$ cm.
 b) Vypočítajte plochu kruhu, ktorého priemer $d = 26{,}3$ dm.

10. a) Obvod kruhu je 1 m. Vypočítajte jeho plochu.
 b) Plocha kruhu je 1 m². Vypočítajte jeho obvod.

11. Povrch kocky je 1 m². Vypočítajte jej objem.

12. Litrová nádoba má podobu valca, ktorého výška sa rovná dvojnásobnému priemeru základne. Vypočítajte rozmery nádoby.

13. Vypočítajte a) povrch, b) objem Zeme (polomer 6371 km).

14. Vypočítajte pomer a) povrchov, b) objemov Zeme a Mesiaca (polomery 6371 km a 1741 km).

15. a) Vypočítajte, koľko percent objemu gule zaujíma kocka, do nej vpísaná. b) Riešte túto úlohu aj pre povrch.

16. a) Aký veľký je polomer gule, ktorej objem je 1 m³? b) Aký veľký je polomer gule, ktorej povrch je 1 m²?

17. V pravouhlom trojuholníku je jedna odvesna 15,2 cm, prepona 25,7 cm. Vypočítajte druhú odvesnu.

18. Vzdialenosť 32,7 cm dlhej tetivy od stredu kružnice je 12,6 cm. Vypočítajte polomer kružnice.

19. Hrany kvádra sú: 26,3 cm, 42,5 cm, 56,8 cm. Vypočítajte a) jeho povrch, b) jeho uhlopriečku.

20. Ak sú dané: $\log a = 3{,}2683$, $\log b = 2{,}3548$ a chceme vypočítať $\log(a + b)$, môžeme počítať alebo tak, že stanovíme čísla a, b, potom tieto čísla sčítame a vyhľadáme log ich súčtu, alebo aj tak, že počítame podľa rovnosti $\log(a + b) = \log a + \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, kde najprv stanovíme hodnotu $\frac{b}{a}$ a potom vypočítame $\log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$. Preveďte oba spôsoby a rozmyslite si, ktorý z nich je výhodnejší.

II. Komplexné čísla.

7. Zavedenie komplexných čísel.

Slovo číslo doteraz stále znamenalo reálne číslo. Reálne čísla sa delia na racionálne a iracionálne. Vlastnosti počtových výkonov s racionálnymi číslami sme podrobne opisovali a odôvodňovali v prvej triede; u iracionálnych čísel vychádzali sme zo skutočnosti, že každé iracionálne číslo možno nahradiť racionálnym, ktoré sa od neho líši tak málo, že na tom prakticky nezáleží. S iracionálnymi číslami sme tak počítali, že sme ich nahradzovali racionálnymi číslami špeciálneho tvaru, ktoré sa im približne rovnajú, totiž desatinnými zlomkami. Všetky počtové pravidlá, ktoré sme odôvodnili pre racionálne čísla, zostávajú správnymi i pre reálne čísla (racionálne a iracionálne); ale odôvodnenie sme neprevádzali a nebudeme ho prevádzať jednak preto, že je zdĺhavé a obťažné, jednak preto, že pri praktických úlohách ide vo väčšine prípadov len o približné výpočty a ako už vieme, každé iracionálne číslo môžeme nahradiť racionálnym, ktoré sa od neho líši tak málo, že pri približnom výpočte na tom nezáleží.

Pojem reálneho čísla sa však ukázal pre matematiku príliš úzkym a jedným z najväčších pokrokov v matematike bolo zavedenie všeobecnejšieho druhu čísel, ktoré sa volajú komplexné čísla. Tieto čísla budeme teraz definovať a naučíme sa s nimi počítať.

Nepostačiteľnosť reálnych čísel pre matematiku sa historicky prejavila najprv tou skutočnosťou, že celkom jednoduché rovnice nemajú často reálne korene. Predovšetkým sú to známe nám kvadratické rovnice so záporným diskriminantom, t. j. rovnice tvaru

$$a x^2 + b x + c = 0, \qquad (a \neq 0) \tag{1}$$

u ktorých $b^2 - 4ac < 0$. Najjednoduchšia taká rovnica je

$$x^2 + 1 = 0, \tag{2}$$

a ktorej je na prvý pohľad zrejmé, že nemá reálny koreň. Zavedením komplexných čísel bude mať koreň nielen rovnica (2), ale každá kvadratická rovnica. Ostatne dôležitosť zavedenia komplexných čísel spočíva aj v tom, že ich zavedením nielen každá kvadratická, ale aj každá algebraická rovnica tretieho, štvrtého, piateho a vôbec ľubovoľného stupňa má vždy koreň. To je tzv. základná veta algebry, ktorá však nie je v učebnom programe gymnázia.

Množstvo komplexných čísel musí teda obsahovať vedľa reálnych čísel predovšetkým číslo, ktoré označíme **i** a ktoré bude koreňom rovnice (2). Číslo **i** sa volá imaginárnou jednotkou; písmeno **i** je počiatočné písmeno slova imaginárny, ktoré je latinského pôvodu a znamená: obrazný; v starej českej matematickej literatúre sa slovo imaginárny počešťovalo a nahradzovalo slovom „pomyslný". Názov imaginárny je akýsi protiklad názvu reálny, ktorý vlastne znamená skutočný. Neskoršie vidíme, že komplexné čísla nie sú o nič menej skutočné než čísla reálne. Zatiaľ poznamenajme, že sme písmená doteraz užívali vo význame reálnych čísel; tieto písmená a, b, c atď. boly tlačené tzv. kurzívou a nie antikvou (a, b, c atď). Písmeno **i** však neznamená reálne číslo, preto bude tlačené antikvou. Kurzívne písmená a, b, c budeme užívať len vo významne reálnych čísel. Vedľa reálnych čísel zavedieme najprv tzv. **rýdzo imaginárne** číslo tvaru

$$a\mathbf{i}, \tag{3}$$

kde písmeno a znamená ľubovoľné reálne číslo. Aký je skutočný význam rýdzo imaginárnych a komplexných čísel vôbec, bude účelnejšie pohovoriť si o tom neskoršie, až po definícii sčítania a násobenia týchto čísel. Bude však účelné už teraz zaviesť geometrické znázornenie, ktoré je u komplexných čísel veľmi dôležité. Ako viete, reálne číslo znázorňujeme pomocou bodu na vodorovnej priamke, ktorú sme doteraz volali číselnou osou; pretože na číselnej osi sú znázornené len reálne čísla a nám pôjde teraz aj o iné nové čísla, budeme miesto číselná os radšej hovoriť **reálna os.** Začiatkom, t. j. obrazom čísla 0, nakreslíme ešte svislú priamku a túto budeme volať **imaginárnou osou.** Na tejto imaginárnej osi budeme si znázorňovať rýdzo imaginárne čísla (3) a to tak, že obraz čísla (3) leží na imaginárnej osi vo vzdialenosti $|a|$ od počiatku nad reálnou osou, ak $a > 0$, pod reálnou osou, ak $a < 0$. Pre $a = 0$ máme $0\mathbf{i}$ a položíme

$$0\mathbf{i} = 0;$$

to znamená, že **reálne číslo 0 je zároveň rýdzo imaginárne číslo;** okrem tejto výnimky rýdzo imaginárne čísla nie sú reálne a geometricky sú inde znázornené než reálne čísla. Ako možno očakávať, položíme

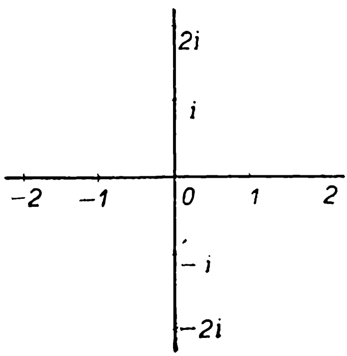
$$1\mathbf{i} = \mathbf{i}, \tag{4}$$

t. j. medzi rýdzo imaginárne čísla patrí aj imaginárna jednotka $\mathbf{i}$, znázornená bodom, ktorý je svisle nad začiatkom v takej vzdialenosti od začiatku, ktorá sa rovná zvolenej dĺžkovej jednotke. Podobne položme ešte

$$-1\mathbf{i} = -\mathbf{i}. \tag{5}$$

V obr. 9 sú znázornené reálne čísla 0, 1, 2, -1, -2 a rýdzo imaginárne čísla 0, $\mathbf{i}$, $2\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}$, $-2\mathbf{i}$; pripomeňme si znovu, že číslo 0 je zároveň reálne i rýdzo imaginárne.

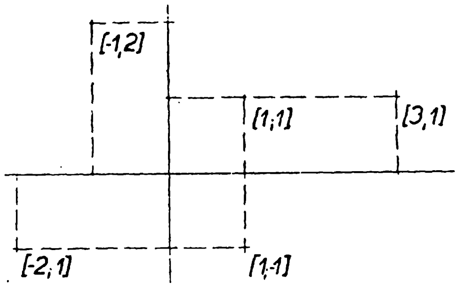
Teraz si zavedieme všeobecný pojem komplexného čísla; slovo komplexný je latinského pôvodu a znamená: složený.



Obr. 9.

Komplexné číslo je dvojica, složená z reálneho čísla a_1 a z rýdzo imaginárneho čísla $a_2\mathbf{i}$; reálne číslo a_1 sa volá **reálnou časťou** komplexného čísla, reálne číslo a_2 sa volá **imaginárnou časťou** komplexného čísla. Medzi komplexné čísla počítame aj všetky reálne čísla a a to tak, že reálnou časťou čísla a je číslo a samo, kdežto imaginárnou časťou je v tomto prípade číslo 0. Medzi komplexné čísla počítame aj všetky rýdzo imaginárne čísla $a\mathbf{i}$ a to tak, že teraz je reálna časť 0 a imaginárnou časťou je a.

Komplexné číslo s reálnou časťou a_1 a s imaginárnou časťou a_2 geometricky znázorňujeme bodom, ktorý je priesečíkom svislej priamky, vedenej obrazom reálneho čísla a_1 s vodorovnou



Obr. 10.

priamkou, vedenou obrazom imaginárneho čísla $a_2\mathbf{i}$. Toto komplexné číslo odteraz budeme označovať

$$[a_1, a_2]; \tag{6}$$

malé písmená (kurzívou písané; písmeno $\mathbf{i}$, písané antikvou sem nepatrí) nateraz budú znamenať len reálne čísla. Pre jasnosť výkladu komplexné čísla budeme označovať veľkými písmenami a to tak, že reálnu a imaginárnu časť označíme príslušnými malými písmenami s indexom 1 pri reálnej časti a s indexom 2 pri imaginárnej časti, napr.

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2], \quad \mathbf{B} = [b_1, b_2], \quad \mathbf{C} = [c_1, c_2].$$

V obr. 10 sú znázornené komplexné čísla [1, 1]; [3, 1]; [1, —1]; [—1, 2]; [—2, —1].

Ako reálne tak i rýdzo imaginárne čísla sú zvláštnymi prípadmi komplexných čísel, a preto ich budeme takto označovať:

$$
\begin{aligned}
a &= [a, 0] \quad \text{je reálne číslo,}\\
a\mathbf{i} &= [0, a] \quad \text{je rýdzo imaginárne číslo,}\\
\mathbf{i} &= [0, 1] \quad \text{je imaginárna jednotka,}\\
0 &= [0, 0],\\
1 &= [1, 0].
\end{aligned}
$$

Posledná definícia: imaginárne číslo je také komplexné číslo, ktoré nie je reálne, teda komplexné číslo je imaginárne, ak $a_2 \neq 0$. Medzi imaginárne čísla patria aj všetky rýdzo imaginárne čísla s výnimkou 0, ktorú sme síce zaradili medzi imaginárne čísla, ktorá však podľa našej definície nie je rýdzo imaginárna, lebo 0 je reálna.

7. Cvičenie.

1. Existuje komplexné číslo, ktoré je súčasne a) reálnym, b) rýdzo imaginárnym, c) imaginárnym číslom?
2. Existuje reálne číslo, ktoré je súčasne a) komplexným, b) rýdzo imaginárnym, c) imaginárnym číslom?
3. Existuje rýdzo imaginárne číslo, ktoré je súčasne a) komplexným, b) reálnym, c) imaginárnym číslom?
4. Existuje imaginárne číslo, ktoré je súčasne a) komplexným, b) reálnym, c) rýdzo imaginárnym číslom?
5. Komplexné číslo $[a_1, a_2]$ je zobrazené bodom **M**. Ktoré komplexné číslo je zobrazené bodom, súmerným k bodu **M** a) podľa reálnej osi, b) podľa imaginárnej osi, c) podľa počiatku?
6. Dve komplexné čísla $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ považujeme za rovnaké, ak sú zobrazené tým istým bodom. Dokážte, že to nastane len a jedine vtedy, keď $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.
7. Je možné, aby pre nejaké komplexné číslo platilo a) $[a_1, a_2] = [a_1, -a_2]$; b) $[a_1, a_2] = -[a_1, a_2]$; c) $[a_1, a_2] = [-a_1, -a_2]$? Ktoré je to číslo a kde leží jeho obraz?
8. Je možné, aby pre nejaké komplexné číslo platilo $[a_1, a_2] = [a_2, a_1]$? Kde leží obraz takéhoto čísla?
9. Ktoré komplexné číslo zobrazuje vrcholy štvorca, ktorého jeden vrchol leží v začiatku a jedna jeho strana, dĺžky 1, leží v reálnej osi? Je niektoré zo zobrazených čísel a) reálne, b) rýdzo imaginárne, c) imaginárne? (Vcelku štvoro riešení.)

10. Ktoré komplexné čísla zobrazujú vrcholy pravidelného šesťuholníka, ktorého stred leží v začiatku a jeden vrchol leží vo vzdialenosti 1 od začiatku a) na reálnej osi, b) na imaginárnej osi?

11. Štvorec má stred v začiatku a jeden vrchol v bode, ktorý je obrazom čísla $[a_1, a_2]$. Ktoré komplexné čísla zobrazujú ostatné vrcholy tohto štvorca?

12. Ktoré komplexné čísla sú zobrazené bodmi, ležiacimi na priamkach, ktoré rozpoľujú uhly, sovrené reálnou a imaginárnou osou?

8. Sčítanie a násobenie komplexných čísel.

Ak sú dané dve komplexné čísla

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2], \qquad \mathbf{B} = [b_1, b_2],$$

ich súčet $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ definujeme takto:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$

t. j. dve komplexné čísla sčítame tak, že sčítame ich reálne a ich imaginárne časti. Podľa definície (1) komplexné čísla sčítajú sa tak jednoduchým spôsobom, ako je z definície priamo zrejmé, že známe základné vlastnosti sčítania reálnych čísel platia i pre sčítanie komplexných čísel. Predovšetkým platí

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \tag{2}$$

t. j. komutatívny zákon sčítania platí i pre komplexné čísla. Ďalej máme pre tri komplexné čísla

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2],\ \mathbf{B} = [b_1, b_2],\ \mathbf{C} = [c_1, c_2]:$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}),$$

t. j. asociatívny zákon sčítania platí i pre komplexné čísla, takže môžeme písať $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ i bez zátvorky. Asociatívna veta sčítania platí pre ľubovoľný počet sčítancov. Treba poznamenať, že aj pre každé komplexné číslo $\mathbf{A}$ platí:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}.$$

Ako pri reálnych, tak i pri komplexných číslach máme ku každému komplexnému číslu $\mathbf{A} = [a_1, a_2]$ opačné komplexné číslo

$$-\mathbf{A} = [-a_1, -a_2], \tag{4}$$

ktoré má túto vlastnosť:

$$(-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Ak sú dané komplexné čísla $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, existuje práve jedno komplexné číslo $\mathbf{X}$, ktoré je koreňom rovnice $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$; toto číslo je

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + [-\mathbf{A}],$$

jednoduchšie píšeme $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ a voláme ho rozdielom s menšencom $\mathbf{B}$ a s menšiteľom $\mathbf{A}$. Tým sme zistili, že všetky základné zákony sčítania reálnych čísel bez zmeny platia i pre komplexné čísla.

Poznamenajme ešte toto: Medzi komplexné čísla patria aj všetky reálne čísla.

Ak sú $\mathbf{A} = [a, 0]$, $\mathbf{B} = [b, 0]$ dve reálne čísla, tak podľa definície **(1)** $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a + b, 0]$, t. j. obecná definícia súčtu dvoch komplexných čísel v tom zvláštnom prípade, keď oba sčítanci sú reálne čísla, vedie znovu na obyčajnú definíciu súčtu reálnych čísel. Podobne v prípade $\mathbf{A} = [0, a]$, $\mathbf{B} = [0, b]$ dvoch rýdzo imaginárnych sčítancov podľa definície **(1)** bude

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [0, a + b]$$

alebo

$$a\mathbf{i} + b\mathbf{i} = (a + b)\mathbf{i}, \tag{6}$$

čo zas potvrdzuje účelnosť definície **(1)**. Nakoniec si všimneme prípad, keď prvý sčítanec $\mathbf{A} = [a, 0] = a$ je reálne číslo a druhý sčítanec $\mathbf{B} = [0, a_2]$ je číslo rýdzo imaginárne. Podľa definície **(1)**

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_1, a_2], \text{ ale}$$
$$[a_1, a_2] \text{ je to isté ako } a_1 + a_2\mathbf{i}. \tag{7}$$

Preto pre komplexné číslo $[a_1, a_2]$ zavedieme aj označenie $a_1 + a_2\mathbf{i}$.

Pristúpme k definícii násobenia dvoch komplexných čísel. Už v článku 7. sme poznamenali, že zavedením komplexných čísel rovnica $x^2 + 1 = 0$ má koreň $x = \mathbf{i}$. Aby táto podmienka bola splnená, musí byť definícia násobenia dvoch komplexných čísel taká, aby z nej plynulo

$$\mathbf{i}^2 = -1 \tag{8}$$

v tom smysle, že $\mathbf{i}^2$ znamená súčin $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$. Nech je znovu

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2], \quad \mathbf{B} = [b_1, b_2] \tag{9}$$

alebo

$$\mathbf{A} = a_1 + a_2\mathbf{i}, \quad \mathbf{B} = b_1 + b_2\mathbf{i}.$$

Ak má byť súčin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ tak definovaný, aby zostaly v platnosti všetky pravidlá pre počítanie s reálnymi číslami a aby okrem toho platilo **(8)**, bude

$$(a_1 + a_2\mathbf{i}) \cdot (b_1 + b_2\mathbf{i}) = a_1b_1 + a_2b_1\mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{i}^2,$$

čiže

$$(a_1 + a_2\mathbf{i}) \cdot (b_1 + b_2\mathbf{i}) = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)\mathbf{i}.$$

Tým sme došli k nasledujúcej definícii súčinu dvoch komplexných čísel **(9)**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [a_1b_1 - a_2b_2, \; a_1b_2 + a_2b_1]. \tag{10}$$

Našou úlohou bude teraz presvedčiť sa, že pri platnosti definície **(10)** bude mať násobenie komplexných čísel skutočne tie vlastnosti, ktoré poznáme pre násobenie reálnych čísel. Predovšetkým si všimneme, že vo zvláštnom prípade $\mathbf{A} = [a, 0]$; $\mathbf{B} = [b, 0]$ z definície **(10)** vychádza $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [ab, 0]$; t. j. všeobecná definícia súčinu dvoch komplexných čísel v tom zvláštnom prípade, keď oba činitelia sú reálne čísla, znovu vedie na obyčajnú definíciu súčinu dvoch reálnych čísel. V prípade $\mathbf{A} = [0, 1]$; $\mathbf{B} = [0, 1]$, alebo $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{i}$ z definície **(10)** plynie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [-1, 0]$. Teda podľa definície **(10)** skutočne platí základný vzorec **(8)**. Je bezprostredne zrejmé, že z definície **(10)** plynie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, t. j. **komutatívny zákon násobenia platí i pre komplexné čísla.**

Ak sú dané 3 komplexné čísla

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2], \; \mathbf{B} = [b_1, b_2], \; \mathbf{C} = [c_1, c_2],$$

potom podľa definície **(10)** bude

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} =$$
$$= [(a_1b_1 - a_2b_2)c_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)c_2, (a_1b_2 + a_2b_1)c_1 + (a_1b_1 - a_2b_2)c_2]$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) =$$
$$= [a_1(b_1c_1 - b_2c_2) - a_2(b_1c_2 + b_2c_1), a_1(b_1c_2 + b_2c_1) + a_2(b_1c_1 - b_2c_2)]$$

na základe známych pravidiel o počítaní s reálnymi číslami z toho vyplýva, že

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \qquad (11)$$

asociatívny zákon násobenia platí i pre komplexné čísla a tak môžeme písať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ i bez zátvorky a to i pre ľubovoľný počet činiteľov.

Ak $\mathbf{B} = [1, 0] = 1$, alebo $\mathbf{B} = [0, 0] = 0$, z **(10)** plynie:

$$\mathbf{A} \cdot 1 = \mathbf{A}, \qquad (12)$$

$$\mathbf{A} \cdot 0 = 0, \qquad (13)$$

pre každé komplexné číslo $\mathbf{A}$. Ďalej nech je

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2], \ \mathbf{A}' = [a_1', a_2'], \ \mathbf{B} = [b_1, b_2].$$

Podľa definície sčítania a násobenia bude

$$\mathbf{AB} + \mathbf{A'B} =$$
$$= [(a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1'b_1 - a_2'b_2), (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_2'b_1 + a_1'b_2)]$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{B} =$$
$$= [(a_1 + a_1')b_1 - (a_2 + a_2')b_2, (a_2 + a_2')b_1 + (a_1 + a_1')b_2];$$

podľa známych pravidiel o počítaní s reálnymi číslami z toho vyplýva, že

$$\mathbf{AB} + \mathbf{A'B} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{B}, \qquad (14)$$

t. j. **distributívny zákon platí aj pre komplexné čísla.**

V tomto článku definovali sme sčítanie a násobenie komplexných čísel a zistili sme predovšetkým, že pri sčítaní komplexných čísel platia presne tie isté pravidlá ako pre reálne čísla. Pri násobení tiež sme zistili súhlas u väčšiny základných pravidiel, ale s násobením nie sme ešte hotoví. Všimnime si pravidla **(13)**: $\mathbf{A} \cdot 0 = 0$; podľa komutatívneho zákona je aj $0 \cdot \mathbf{A} = 0$ a môžeme povedať: **Súčin dvoch komplexných čísel je nula, ak je aspoň jeden činiteľ nula.** Naskytá sa otázka, ak $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, či aj obrátene môžeme súdiť, že aspoň jeden činiteľ je nula. Vieme, že pri reálnych činiteľoch je to tak a aj pre komplexných činiteľov platí táto veta, ale doteraz sme to ešte nedokázali, a to je v našich doterajších výsledkoch podstatnou medzerou. Druhá medzera, ktorá úzko súvisí s prvou, je to, že doteraz ešte nič nevieme o delení komplexných čísel.

8. Cvičenie.

1. Vypočítajte: a) $[2, 3] + [3, 1]$; b) $[8, 5] + [2, 0]$; c) $[3, -2] + [-1, 1]$; d) $[2, 1] + [-3, -1]$; e) $[-4, -3] + [-2, -1]$; f) $[2, 3] - [-1, 5]$; g) $[2, 1] - [0, 2]$; h) $[3, 1] - [-1, -2]$; i) $[-3, 5] - [-2, 4]$; j) $[-3, -1] - [-3, -2]$.

2. Vypočítajte: a) $(2 + 3\mathbf{i}) + (1 + 2\mathbf{i})$; b) $(2 - \mathbf{i}) + 2\mathbf{i}$; c) $(2 - 3\mathbf{i}) + (-3 + 2\mathbf{i})$; d) $(-2 - \mathbf{i}) + (2 - \mathbf{i})$; e) $(-1 - \mathbf{i}) + (-2 - 3\mathbf{i})$; f) $(3 + 2\mathbf{i}) - (2 + 3\mathbf{i})$; g) $(4 - 3\mathbf{i}) - 5$; h) $(4 - 5\mathbf{i}) - (2 - 3\mathbf{i})$; i) $(3 + \mathbf{i}) - (2 - \mathbf{i})$; j) $(-1 - \mathbf{i}) - (-2 - 3\mathbf{i})$.

3. Je možné, aby a) súčet, b) rozdiel dvoch komplexných čísel bol reálny? Kedy to nastane?

4. Je možné, aby a) súčet, b) rozdiel dvoch komplexných čísel bol rýdzo imaginárny? Kedy to nastane?

5. Je možné, aby a) súčet, b) rozdiel dvoch komplexných čísel bol imaginárny? Kedy to nastane?

6. Vypočítajte: a) $[3, 3]\,[2, 1]$; b) $[2, 1]\,[3, 0]$; c) $[3, -2]\,[1, 2]$; d) $[3, 0]\,[0, 2]$; e) $[4, -3]\,[0, -1]$; f) $[4, -2]\,[2, 1]$; g) $[-2, 4]\,[-2, -4]$; h) $[3, -2]\,[2, -3]$; i) $[-3, 1]\,[3, 1]$; j) $[-2, -3]\,[-1, -1]$.

7. Vypočítajte: a) $(4 + 3\mathbf{i})\,2$; b) $(3 + 5\mathbf{i})\,\mathbf{i}$; c) $(2 + 3\mathbf{i})(4 + 5\mathbf{i})$; d) $(2 - 3\mathbf{i})(2 + \mathbf{i})$; e) $(-3 + 4\mathbf{i})(4 - 3\mathbf{i})$; f) $(-6 + 3\mathbf{i})(-4 - 2\mathbf{i})$; g) $(-1 - \mathbf{i})(1 - \mathbf{i})$; h) $(1 + \mathbf{i})^2$; i) $(2 - 3\mathbf{i})^2$; j) $(-2 - \mathbf{i})^2$.

8. Vypočítajte: a) $\mathbf{i}^2$; b) $\mathbf{i}^3$; c) $\mathbf{i}^4$; d) $\mathbf{i}^5$; e) $\mathbf{i}^6$; f) $\mathbf{i}^7$; g) $\mathbf{i}^8$.

9. Vypočítajte: a) $(1 + \mathbf{i})(2 + \mathbf{i}) + (1 + \mathbf{i})(1 + 2\mathbf{i})$; b) $(2 + 3\mathbf{i})(1 - 4\mathbf{i}) - (2 - 3\mathbf{i})(1 + 4\mathbf{i})$; c) $(5 + \mathbf{i})(\mathbf{i} - 3)(8 + \mathbf{i})$; d) $(1 + \mathbf{i})(1 + 2\mathbf{i})(1 + 3\mathbf{i})$; e) $(1 + \mathbf{i})^3$; f) $(-1 + \mathbf{i}\sqrt{3})^3$; g) $(1 - \mathbf{i})^4$; h) $(1 + \mathbf{i})^6$.

10. Je možné, aby súčin dvoch komplexných čísel bol reálny? Kedy to nastane?

11. Je možné, aby súčin dvoch komplexných čísel bol rýdzo imaginárny? Kedy to nastane?

12. Je možné, aby súčin dvoch komplexných čísel bol imaginárny? Kedy to nastane?

9. Sdružené komplexné čísla; absolútna hodnota.

Ku komplexnému číslu $\mathbf{A} = a_1 + a_2\mathbf{i}$ **sdružené komplexné číslo** je $\overline{\mathbf{A}}$ (čítame $\mathbf{A}$ s prúžkom) $= a_1 - a_2\mathbf{i}$. Je jasné, že aj obrátene k číslu $\overline{\mathbf{A}}$ sdružené komplexné číslo je pôvodné komplexné číslo $\mathbf{A}$. **Ak je číslo $\mathbf{A}$ reálne, $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$; ak je číslo $\mathbf{A}$ rýdzo imaginárne, $\overline{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$.** Obrátene: **Ak $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$, je číslo $\mathbf{A}$ reálne; ak $\overline{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$, je číslo $\mathbf{A}$ rýdzo imaginárne.** Pri geometrickom znázornení komplexných čísel, ktoré sme zaviedli v článku 7 a ktoré budú mať neskoršie dôležitú úlohu, je $\overline{\mathbf{A}}$ súmerný obraz bodu $\mathbf{A}$ podľa reálnej osi.

Zrejmé a dôležité sú vzorce:

$$\text{Ak } \mathbf{A} = a_1 + a_2\mathbf{i}, \text{ tak } \mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}} = 2a_1, \quad \mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}} = 2a_2\mathbf{i}. \tag{1}$$

Teda číslo $\mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}}$ je reálne, číslo $\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}}$ je rýdzo imaginárne.

Z definície súčtu a súčinu dvoch komplexných čísel je bezprostredne zrejmé, že:

$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}, \quad \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \tag{2}$$

podobne

$$\overline{(-\mathbf{A})} = -\overline{\mathbf{A}}, \quad \overline{\mathbf{A} - \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}. \tag{3}$$

Z toho plynie, že ak z daných komplexných čísel $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ sčítaním, odčítaním, násobením odvodíme komplexné číslo $\mathbf{K}$, tak zo sdružených komplexných čísel $\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}}, \ldots$ vznikne týmiže počtovými výkonmi komplexné číslo $\overline{\mathbf{K}}$, sdružené s komplexným číslom $\mathbf{K}$.

Ak napr. vypočítame, že

$$(2 + 3\mathbf{i})(3 - \mathbf{i}) - (1 + 2\mathbf{i})(2 - \mathbf{i}) + (1 + 3\mathbf{i})(2 + 5\mathbf{i}) = = -8 + 15\mathbf{i},$$

bez nového výpočtu bude

$$(2-3\mathbf{i})(3+\mathbf{i})-(1-2\mathbf{i})(2+\mathbf{i})+(1-3\mathbf{i})(2-5\mathbf{i})=$$
$$=-8-15\mathbf{i}.$$

Po zavedení delenia komplexných čísel uvidíme, že ani tento výkon nerobí výnimku; preto: Ak z komplexných čísel $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ sčítaním, odčítaním, násobením a delením odvedieme komplexné číslo $\mathbf{K}$, tak zo združených čísel $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{C}}$, ... vznikne týmiže výkonmi sdružené číslo $\overline{\mathbf{K}}$.

Zvlášť dôležitý je súčin $\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}}$ dvoch sdružených komplexných čísel, kde

$$\mathbf{A}=a_1+a_2\mathbf{i}, \quad \overline{\mathbf{A}}=a_1-a_2\mathbf{i}.$$

Podľa známych pravidiel bude:

$$\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}}=a_1^2+a_2^2. \tag{4}$$

Číslo $\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}}$ je teda vždy reálne a zpravidla kladné; jediná výnimka nastane pre $\mathbf{A}=0$; v tomto prípade $\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}}=0$. Druhá odmocnina $\sqrt{\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}}}$ je dôležitejšia ako číslo $\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}}$ samo; ak je $\mathbf{A}$ reálne, teda $\mathbf{A}=a_1$, $a_2=0$, tak $\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}}=a_1^2$, $\sqrt{\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}}}=\sqrt{a_1^2}=|a_1|$. Preto i v prípade ľubovoľného komplexného čísla $\mathbf{A}=a_1+a_2\mathbf{i}$ píšeme

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}}} \tag{5}$$

a voláme číslo $|\mathbf{A}|$ **absolútnou hodnotou čísla** $\mathbf{A}$. Teda

$$|a_1+a_2\mathbf{i}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}. \tag{6}$$

Absolútna hodnota čísla 0 je číslo 0; absolútna hodnota každého iného komplexného čísla je reálne kladné číslo.

Pri znázornení komplexných čísel bodmi v rovine číslo $(\mathbf{A})$ znamená vzdialenosť bodu $\mathbf{A}$ od počiatku; toto plynie zo známej Pythagorovej vety.

Nech sú

$$\mathbf{A}=a_1+a_2\mathbf{i}, \quad \mathbf{B}=b_1+b_2\mathbf{i}$$

dve ľubovoľné komplexné čísla. Podľa už dokázaných pravidiel

$$\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}},$$
$$\mathbf{AB}\cdot\overline{\mathbf{AB}}=\mathbf{AB}\cdot\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}$$

a pretože

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}},\quad |\mathbf{B}| = \sqrt{\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}},\quad |\mathbf{AB}| = \sqrt{\mathbf{AB}\cdot\overline{\mathbf{AB}}},$$

$$|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}| = \sqrt{\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}}\cdot\sqrt{\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}} = \sqrt{\mathbf{AB}\cdot\overline{\mathbf{AB}}} = |\mathbf{AB}|,$$

dostaneme

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|, \tag{7}$$

t. j. **absolútna hodnota súčinu dvoch komplexných čísel rovná sa súčinu absolútnych hodnôt oboch činiteľov.** Veta o absolútnej hodnote súčinu platí i pre ľubovoľný počet činiteľov.

Teraz už ľahko doplníme doteraz ešte neprebrané vlastnosti násobenia komplexných čísel (pozri koniec článku 8). Predovšetkým dokážeme, že, **ak súčin AB dvoch komplexných čísel je nula, musí byť aspoň jeden činiteľ nula.**

Dôkaz. Ak $\mathbf{AB} = 0$, je aj $|\mathbf{AB}| = 0$ a podľa **(7)** je aj $|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}| = 0$; avšak absolútne hodnoty sú reálne čísla, preto z tejto rovnice sleduje, že alebo $|\mathbf{A}| = 0$, alebo $|\mathbf{B}| = 0$ a to znamená, že alebo $\mathbf{A} = 0$, alebo $\mathbf{B} = 0$.

Ďalej dokážeme, že ak je $\mathbf{A}$ komplexné číslo, rôzne od nuly, existuje k nemu prevrátená hodnota, t. j. také komplexné číslo, ktoré vyhovuje rovnici

$$\mathbf{AX} = 1. \tag{8}$$

Postupujeme takto: Najprv predpokladajme, že $\mathbf{X}$ vyhovuje rovnici **(8)**, z čoho nasleduje

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{X} = \overline{\mathbf{A}}$$

a číslo $\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}} = |\mathbf{A}|^2$ je kladné reálne číslo, ku ktorému iste existuje prevrátená hodnota $\frac{1}{\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}}$. Ak týmto zlomkom násobíme obe strany predošlej rovnice, dostaneme

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}}\cdot\overline{\mathbf{A}}. \tag{9}$$

Obrátene vsadením sa môžeme presvedčiť, že číslo **(9)** vyhovuje rovnici **(8)**. Teda každé komplexné číslo $\mathbf{A}$, rôzne od nuly, má prevrátenú hodnotu, ale len jedinú, a to je $\frac{1}{\mathbf{A}}$.

Všimnime si všeobecnejšie rovnice

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{10}$$

v ktorej $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sú dané komplexné čísla a $\mathbf{X}$ je neznáma. Ak $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, vyhovuje rovnici **(10)** každé komplexné číslo $\mathbf{X}$; ak $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} \neq 0$, rovnica **(10)** je neriešiteľná. Ak $\mathbf{A} \neq 0$, má **(10)** práve jedno riešenie.

Lebo, ak platí **(10)**, je zrejmé

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} \tag{11}$$

a obrátene z **(11)** môžeme dostať **(10)**. Riešenie **(11)** rovnice **(10)** značíme obvykle

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}. \tag{12}$$

Znak $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ má teda význam len v prípade $\mathbf{A} \neq 0$. Praktický postup je zrejmý z príkladu:

$$\frac{3+\mathbf{i}}{2-3\mathbf{i}} = \frac{(3+\mathbf{i})\ (2+3\mathbf{i})}{(2-3\mathbf{i})\ (2+3\mathbf{i})} = \frac{3+11\mathbf{i}}{13} = \frac{3}{13} + \frac{11}{13}\mathbf{i}.$$

Pre komplexné čísla definovali sme doteraz sčítanie a násobenie a zistili sme, že platia pre ne tie isté počtové pravidlá ako pre reálne čísla. Zvlášť sme videli, že i pre komplexné čísla možno definovať obrátené počtové výkony, odčítanie a delenie, s tým omedzením, že n u l o u d e l i ť n e m o ž n o.

Ale medzi reálnymi a komplexnými číslami je ten podstatný rozdiel, že reálne čísla môžeme porovnávať podľa veľkosti (z dvoch rôznych reálnych čísel jedno je menšie a druhé väčšie), čo u komplexných čísel nie je možné. Pri komplexných číslach veľkosti porovnávame len podľa absolútnych hodnôt. Aj rozlišovanie kladných a záporných čísel pri komplexných číslach odpadá.

Tie partie aritmetiky, v ktorých sa vychádza len od vlastností základných počtových výkonov a v ktorých pojmy väčší, menší, kladný, záporný nehrajú nijakú úlohu, prenesú sa bez zmeny i na komplexné čísla. Príkladom takej partie je náuka o mocninách s celými exponentmi. Ak je n prirodzené číslo, väčšie ako 1, tak $\mathbf{A}^n$ znamená pre každé komplexné číslo $\mathbf{A}$ súčin n činiteľov, ktoré sa rovnajú číslu $\mathbf{A}$; mimo toho je

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^0 = 1$$

pre každé komplexné číslo $\mathbf{A}$. $0^n = 0$ pre každé celé kladné číslo n; naproti tomu pre $\mathbf{A} \neq 0$ platí $\mathbf{A}^n \neq 0$ pre každé, celé kladné n (i pre $n = 0$). Preto v prípade $\mathbf{A} \neq 0$ definujeme mocninu $\mathbf{A}^{-n}$ s celým záporným mocniteľom ako prevrátenú hodnotu komplexného čísla $\mathbf{A}$ (kdežto 0^{-n} nedefinujeme).

Na základe týchto definícií, ktoré úplne súhlasia s predošlými definíciami pre reálne základy, máme i pre komplexné základy pravidlá:

$$\mathbf{A}^r \cdot \mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s},$$

$$(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs},$$

$$\mathbf{A}^{-r} = \frac{1}{\mathbf{A}^r},$$

$$\mathbf{A}^r \cdot \mathbf{B}^r = (\mathbf{AB})^r$$

za predpokladu, že mocnitele sú celé čísla; základy sú ľubovoľné komplexné čísla. Vylúčený je len prípad, keď základ je 0 a súčasne mocniteľ je záporný. Dôkazy týchto pravidiel sú doslova také isté, ako pre reálne čísla, a je preto zbytočné znovu ich preberať.

9. Cvičenie.

1. Vyhľadajte komplexné čísla, združené s číslami: a) $5 + 2\mathbf{i}$; b) $4 - 3\mathbf{i}$; c) $-2 + \mathbf{i}$; d) $-3 - \mathbf{i}$; e) 8; f) $\mathbf{i}$; g) $-5\mathbf{i}$. Zobrazte tieto čísla!

2. Rozpísaním na složky dokážte, že a) $\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$; b) $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}$.

3. Ak je $[\mathbf{A}]$ obraz čísla $\mathbf{A}$, v akom vzťahu sú k nemu obrazy čísel $-\mathbf{A}$, $\overline{\mathbf{A}}$, $-\overline{\mathbf{A}}$? Dokážte, že $\overline{-\mathbf{A}} = -\overline{\mathbf{A}}$, ďalej, že $\overline{\mathbf{A} - \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}$!

4. Aký význam má symbol $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$? Čo značí $\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$?

5. Vypočítajte: $(2 + \mathbf{i})\ (3 - \mathbf{i}) + (1 + 2\mathbf{i})\ (1 - 3\mathbf{i})$. Viete hneď napísať, koľko je $(2 - \mathbf{i})\ (3 + \mathbf{i}) + (1 - 2\mathbf{i})\ (1 + 3\mathbf{i})$?

6. Dokážte, že z podmienky $|\mathbf{A}| = 0$ plynie $\mathbf{A} = 0$.

7. Čo je geometrické miesto bodov, ktoré zobrazujú všetky komplexné čísla danej absolútnej hodnoty?

8. Ktoré komplexné čísla sa rovnajú svojej absolútnej hodnote?

9. Rozpísaním na složky dokážte, že $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

10. Rozpísaním na složky dokážte, že z podmienky $\mathbf{AB} = 0$ plynie, že alebo $\mathbf{A} = 0$, alebo $\mathbf{B} = 0$.

11. Vypočítajte: a) $\frac{50}{3 + 4\mathbf{i}}$; b) $\frac{2}{1 + 3\mathbf{i}}$; c) $\frac{\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$; d) $\frac{1}{\mathbf{i}}$; e) $\frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$; f) $\frac{1 + \mathbf{i}}{1 + 2\mathbf{i}}$; g) $\frac{2 - 1}{2 + \mathbf{i}}$; h) $\frac{-2 + 3\mathbf{i}}{3 - 2\mathbf{i}}$; i) $\frac{-1 - 2\mathbf{i}}{-1 - 3\mathbf{i}}$; j) $\frac{a + \mathbf{i}}{a - a\mathbf{i}}$.

12. Vypočítajte: a) $\frac{1}{1 + \mathbf{i}} + \frac{1}{1 - \mathbf{i}}$; b) $\frac{1}{(1 + \mathbf{i})^2} + \frac{1}{(1 - \mathbf{i})^2}$; c) $\frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} - \frac{1 - \mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$; d) $\frac{(1 - \mathbf{i})^2}{1 + \mathbf{i}} - \frac{(1 + \mathbf{i})^2}{1 - \mathbf{i}}$.

13. Je možné, aby podiel dvoch komplexných čísel bol číslo a) reálne, b) rýdzo imaginárne, c) imaginárne? Kedy to nastane?

14. Ktoré komplexné čísla sa rovnajú svojej prevrátenej hodnote?

15. Ktoré komplexné čísla majú tú vlastnosť, že sa rovnajú svojej a) druhej, b) tretej mocnine?

16. Aké hodnoty môže postupne nadobúdať $\mathbf{i}^n$, keď n je celé číslo? Dokážte, že $\mathbf{i}^n = \mathbf{i}^{n-4}$.

17. Dokážte, že a) $\overline{1 : \mathbf{A}} = 1 : \overline{\mathbf{A}}$; $\overline{\mathbf{A} : \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} : \overline{\mathbf{B}}$.

18. Dokážte, že $|\overline{\mathbf{A}}| = |\mathbf{A}|$.

19. Je možné, aby bolo a) $\mathbf{A} = \frac{1}{\mathbf{A}}$; b) $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{i}\mathbf{A}$; c) $\overline{\mathbf{A}} = -\mathbf{i}\mathbf{A}$? Kedy to nastane?

10. Kvadratické rovnice.

Už v článku 7. sme uviedli, že objav komplexných čísel historicky vznikol zo skutočnosti, že niektoré kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi nemajú reálne korene. Ako sme už uviedli a ako teraz dokážeme, zavedením komplexných čísel, je riešiteľná každá kvadratická rovnica.

Začnime s rýdzo kvadratickou rovnicou

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}, \tag{1}$$

kde $\mathbf{A}$ je dané komplexné číslo, ktoré môže a nemusí byť reálne, $\mathbf{X}$ je neznáma veličina. Ak $\mathbf{A} = 0$, má rovnica **(1)** koreň $\mathbf{X} = 0$, to je v tomto prípade jediný koreň rovnice **(1)**, lebo súčin dvoch komplexných čísel, rôznych od nuly, nemôže byť nula. Ak je $\mathbf{A}$

kladné reálne číslo, má rovnica **(1)** reálny koreň $\mathbf{X} = \sqrt{\mathbf{A}}$ (ako aj koreň $\mathbf{X} = -\sqrt{\mathbf{A}}$); ak je $\mathbf{A}$ záporné reálne číslo, rovnica **(1)** má rýdzo imaginárny koreň $\mathbf{X} = \sqrt{|\mathbf{A}|}\,\mathbf{i}$ (a tiež aj koreň $\mathbf{X} = -\sqrt{|\mathbf{A}|}\,\mathbf{i}$). Ostáva prípad, keď číslo

$$\mathbf{A} = a_1 + a_2\mathbf{i}$$

je imaginárne, takže $a_2 \neq 0$, teda aj $a_2^2 > 0$. V tomto prípade vyjdeme zo skúsenosti, že mocninou imaginárneho čísla x_1 je opäť imaginárne číslo. Skúsime teda vypočítať také imaginárne číslo $\mathbf{X} = x_1 + x_2\mathbf{i}$, aby jeho druhá mocnina sa rovnala danému číslu $\mathbf{A}$.

$$(x_1 + x_2\mathbf{i})^2 = a_1 + a_2\mathbf{i}, \tag{2}$$

z čoho nasleduje

$$x_1^2 - x_2^2 = a_1 \tag{2'}$$

$$2x_1x_2 = a_2. \tag{2''}$$

Vylúčením napr. x_1 a dosadením $x_2^2 = z$ po úprave na normálny tvar dostaneme rovnicu

$$z^2 + a_1 z - \frac{a_2^2}{4} = 0. \tag{3}$$

(3) je kvadratická rovnica s reálnymi koeficientmi a s diskriminantom $a_1^2 + a_2^2 > 0$, má teda dva reálne korene, ktorých súčin sa rovná zápornému číslu $-\frac{a_2^2}{4}$, preto jeden koreň je kladný a druhý záporný. Nech je z kladný koreň rovnice **(3)** potom aj jeho odmocnina $x_2 = \sqrt{z}$ je reálna. Z rovnice **(2)″** vypočítame x_1 a potom

$$\mathbf{X} = \frac{a_2}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z}\,\mathbf{i}, \tag{4}$$

z čoho

$$\mathbf{X}^2 = \left(\frac{a_2}{4z} - z\right) + a_2\mathbf{i},$$

podľa **(2)** je teda $\mathbf{X}^2 = a_1 + a_2\mathbf{i}$, t. j. $\mathbf{X}$ je koreň rovnice **(1)**.

Dokázali sme, že pri každej voľbe komplexného čísla $\mathbf{A}$ rovnica **(1)** má aspoň jeden komplexný koreň $\mathbf{X} = \mathbf{C}$. Ak je $\mathbf{A} = 0$, je $\mathbf{C} = 0$ a vieme, že v tomto prípade nula je jediný koreň rovnice **(1)**. Ak $\mathbf{A} \neq 0$, tak ani $\mathbf{C} \neq 0$ a pretože číslo $-\mathbf{C}$ sa líši od čísla $\mathbf{C}$, ale $(-\mathbf{C})^2 = \mathbf{C}^2$, je aj číslo $-\mathbf{C}$ koreňom rovnice **(1)**.

Iný koreň však rovnica nemá, lebo, pretože $\mathbf{X} = \mathbf{C}$ je koreň, je $\mathbf{C}^2 = \mathbf{A}$ a rovnicu **(1)** možno uviesť na tvar $\mathbf{X}^2 - \mathbf{C}^2 = 0$ alebo na tvar

$$(\mathbf{X} - \mathbf{C})\,(\mathbf{X} + \mathbf{C}) = 0. \tag{5}$$

Na ľavej strane rovnice (5) máme súčin, ktorý sa rovná nule, preto aspoň jeden činiteľ je nula; ak $\mathbf{X} - \mathbf{C} = 0$, je $\mathbf{X} = \mathbf{C}$, ak $\mathbf{X} + \mathbf{C} = 0$, je $\mathbf{X} = -\mathbf{C}$.

Záver: **Zavedením komplexných čísel rovnica (1) má pre $\mathbf{A} = 0$ jediný koreň $\mathbf{X} = 0$, pre $\mathbf{A} \neq 0$ má dva korene, navzájom opačné.**

Ďalší postup je úplne taký ako u reálnych rovníc, prebraných v 1. triede. Môžeme predpokladať, že koeficient kvadratického člena je 1. Kvadratická rovnica potom má tvar

$$\mathbf{X}^2 + \mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{Q} = 0$$

alebo
$$\left(\mathbf{X} + \frac{\mathbf{P}}{2}\right)^2 = \frac{\mathbf{P}^2}{4} - \mathbf{Q} \tag{6}$$

a má jediný koreň, ak v (6) pravá strana je nula; inak má dva korene, ktorých súčet je $-\mathbf{P}$ a súčin $\mathbf{Q}$. Kvadratickú rovnicu

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^2 + \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{C} = 0 \tag{7}$$

môžeme riešiť aj vzorcom $\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{B} \pm \sqrt{\mathbf{D}}}{2\mathbf{A}}$, (8)

kde $\mathbf{D} = \mathbf{B}^2 - 4\mathbf{A}\mathbf{C}$ je diskriminant rovnice. Ak $\mathbf{D} = 0$, je $\sqrt{\mathbf{D}} = 0$ a rovnica (7) má jediný koreň. Ak $\mathbf{D} \neq 0$, má rovnica (7) dva korene, ktoré sú dané vzorcom (8), ak v ňom $\sqrt{\mathbf{D}}$ znamená ktorýkoľvek z oboch koreňov rovnice $|\mathbf{D}|^2 = d$. Ak je $\mathbf{D}$ reálne, dávame symbolu $\sqrt{\mathbf{D}}$ obvyklý význam pre $\mathbf{D} > 0$ a pre $\mathbf{D} < 0$ kladieme $\sqrt{\mathbf{D}} = \sqrt{|\mathbf{D}|}\,\mathbf{i}$. Podľa tejto dohody je $\sqrt{-1} = \mathbf{i}$. Aj pre imaginárne $\mathbf{D}$ by bolo možné podať určitý predpis, ktorý by jednoznačne opísal $\sqrt{\mathbf{D}}$, napr. tak, keď predpíšeme, že imaginárna časť čísla $\sqrt{\mathbf{D}}$ je kladná. To však nemá veľký význam.

10. Cvičenie.

1. Ak sú a_1, a_2 racionálne čísla, čo je podmienka, aby rovnica $z^2 + a_1 z - \frac{a_2^2}{4} = 0$, o ktorej je reč v texte, mala racionálny koreň?

2. Podľa návodu v texte riešte rovnice: a) $\mathbf{X}^2 = 4 + 3\mathbf{i}$; b) $\mathbf{X}^2 = 9 - 40\mathbf{i}$; c) $\mathbf{X}^2 = \mathbf{i}$; d) $\mathbf{X}^2 = 1 + \mathbf{i}$; e) $\mathbf{X}^2 = 1 + 4\mathbf{i}\sqrt{3}$; f) $\mathbf{X}^2 = 4\mathbf{i}\sqrt{5} - 1$.

3. Vypočítajte: a) $\sqrt{32 + 126\mathbf{i}}$; b) $\sqrt{15 - 8\mathbf{i}}$; c) $\sqrt{1 + 2\mathbf{i}\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{2\mathbf{i}\sqrt{6} - 1}$; e) $\sqrt{-1 - \mathbf{i}}$. (Z oboch možných hodnôt zvoľte tú, ktorá má imaginárnu časť kladnú.)

4. Riešte rovnice: a) $\mathbf{X}^2 - \mathbf{X} + 1 = 0$; b) $\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + 2 = 0$; c) $4\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X} + 13 = 0$; d) $\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X}\sqrt{2} + 5 = 0$; e) $\mathbf{X}^2 - \mathbf{i}\mathbf{X} + 1 = 0$; f) $\mathbf{X}^2 - 3\mathbf{X} + 3 + \mathbf{i} = 0$; g) $\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 10\mathbf{i} = 0$; h) $\mathbf{X}^2 + (2 - 3\mathbf{i})\mathbf{X} - 5(1 + \mathbf{i}) = 0$.

5. Ak má rovnica $\mathbf{A}\mathbf{X}^2 + \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{C} = 0$ korene $\mathbf{R}, \mathbf{S}$, napíšte rovnicu, ktorá má korene $\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{S}}$.

6. Ak má rovnica $a\mathbf{X}^2 + b\mathbf{X} + c = 0$ s reálnymi koeficientmi imaginárne korene, majú čísla a, c jednaké znamienka. Dokážte!

7. Ak má rovnica $a\mathbf{X}^2 + b\mathbf{X} + c = 0$ s reálnymi koeficientmi koreň $\mathbf{R}$, má aj koreň $\overline{\mathbf{R}}$. Dokážte!

8. Ak má rovnica $a\mathbf{X}^2 + b\mathbf{X} + c = 0$ s celočíselnými koeficientmi imaginárne korene, ktorých reálna a imaginárna časť sú racionálne čísla, je b párne. Dokážte!

11. Geometrický význam komplexných čísel.

V praktickom živote stretávame sa obyčajne s kladnými reálnymi číslami. Takéto čísla vznikajú jednak sčítaním — a to len kladné celé čísla (čiže prirodzené čísla), — jednak meraním. Pri meraní sa vyskytujú aj také čísla, ktoré nie sú celé. Praktické merania sú vždy približné, a preto výsledky praktických meraní udávame racionálnymi číslami, obyčajne desatinnými číslami s malým počtom desatinných miest. Teoreticky niektoré iracionálne čísla vystupujú pri meraní veľmi prirodzeným spôsobom, napr. $\sqrt{2}$ (dĺžka uhlopriečky štvorca, ktorého strana je dĺžková jednotka) alebo π (polovica dĺžky kružnice, ktorej polomer je dĺžková jednotka).

V matematike, ktorej úlohou nie je prostý záznam čísel, získaných sčítaním alebo meraním, ale okrem iného štúdium metód, pomocou ktorých na základe priamo meraných čísel dochádzame k novým číslam, ktorých priame meranie by bolo obťažné alebo i nemožné, nemôžeme vystačiť s kladnými reálnymi číslami. Už na strednej škole ste poznali záporné čísla a teraz sme sa soznámili aj s imaginárnymi číslami. Je vám známe, aké zjednodušenie dosiahneme pomocou záporných čísel napr. v náuke o rovniciach (pravidlo o prevádzaní členov s jednej strany rovnice na druhú); bez záporných čísel museli by sme miesto jedného typu $x^2 + px + q = 0$ kvadratických rovníc rozoznávať tri typy: $x^2 = px + q$, $x^2 + px = q$, $x^2 + q = px$.

Kladné reálne číslo vyjadruje veľkosť nejakej veličiny. Naproti tomu relatívne číslo vyjadruje nielen veľkosť, ale zároveň aj jeden z dvoch navzájom opačných smerov (hore alebo dolu, vzrast alebo pokles, budúcnosť alebo minulosť a pod.). Relatívne čísla znázorňovali sme si na priamke (na číselnej osi), a tak sme najľahšie pochopili pravidlá sčítania relatívnych čísel. Význam komplexných čísel je celkom podobný; komplexné číslo vyjadruje nielen veľkosť, ale súčasne aj určitý smer, pričom, na rozdiel od relatívnych čísel, teraz nejde len o dva navzájom opačné smery na priamke, ale o všetky možné smery v rovine, ktorých je nekonečne mnoho.

Dva rôzne body **A**, **B** môžeme spojiť úsečkou **AB**; úsečka má určitú polohu a určitú veľkosť. Ak nás nezaujíma poloha úsečky a potrebujeme poznať len jej veľkosť (čiže vzdialenosť bodov **A**, **B**), tak túto veľkosť vyjadrujeme (po zavedení dĺžkovej jednotky) kladným reálnym číslom. Sú však mnohé prípady, keď síce nezáleží na určitej polohe úsečky **AB**, ale predsa treba poznať vedľa jej veľkosti aj smer, vedúci od bodu **A** do bodu **B**. Úsečka, u ktorej na určitej polohe síce nezáleží, ale u ktorej je vedľa jej veľkosti určite predpísaný aj smer, vedúci od **začiatočného bodu A** ku **koncovému bodu B**, volá sa **vektorom.** Dve úsečky **AB**, **A'B'** určujú ten istý vektor, ak obe majú tú istú veľkosť a ak je súčasne

$$\mathbf{AB} \uparrow\uparrow \mathbf{A'B'},$$

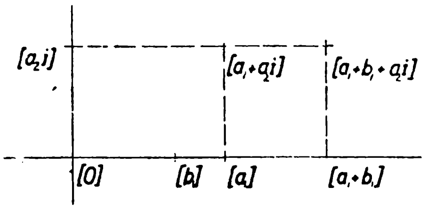
kde $\uparrow\uparrow$ znamená priamu rovnobežnosť. Pritom poloha začiatočného bodu je celkom ľubovoľná. Ak je v jednej polohe začiatočný bod **A**, koncový bod **B** a ak si zvolíme iný začiatočný bod **A'** tohože vektora, potom nový koncový bod **B'** je obrazom bodu **B** pri posunovaní, pri ktorom obrazom bodu **A** je bod **A'**. Ak je začiatočný bod **A** (teda koncový bod **B**) vektora určite zvolený, hovoríme o určitom umiestení vektora. Všimnite si, že u vektora starostlivo musíme robiť rozdiel medzi začiatočným a koncovým bodom. Ak vymeníme funkciu oboch bodov, dostaneme **opačný vektor.** Ako je účelné medzi čísla počítať aj nulu, tak isto je účelné medzi vektory počítať aj **nulový vektor;** u nulového vektora pri každom umiestení začiatočný a koncový bod splýva.

Vektory, ktoré majú nielen určitú veľkosť, ale i určitý smer, sú vo fyzike veľmi dôležité. Ako príklad uvedieme pojem rýchlosti. Ak napr. len to vieme, že sa auto pohybuje rýchlosťou 60 km za hodinu, nemôžeme vypočítať zo znalosti polohy auta v jednom okamihu jeho polohu v inom okamihu; aby bol výpočet možný, musíme poznať rýchlosť ako vektor, t. j. nestačí poznať len veľkosť rýchlosti, ale treba poznať aj jej smer.

Nás budú teraz zaujímať len vektory, ktoré ležia všetky v určitej rovine. Zvolíme si v rovine určitý bod 0, ktorý nazveme **začiatkom. Základným umiestením vektora** nazveme to umiestenie, ktorého začiatočným bodom bude zvolený bod 0. Ešte si zvolíme určitý **základný smer;** to bude vodorovný smer od ľava do prava. Teraz môžeme priradiť každému komplexnému číslu určitý vektor a obrátene každému vektoru určité komplexné číslo. Komplexnému číslu

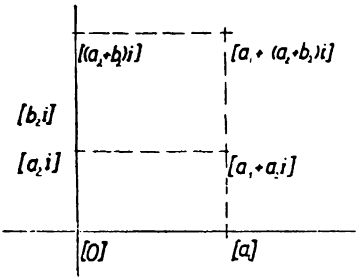
$$\mathbf{A} = a_1 + a_2\mathbf{i}$$

priradíme ten vektor, ktorý pri svojom základnom umiestení bude mať svoj koncový bod v tom bode, ktorý sme zaviedli už v článku 7 ako geometrické znázornenie komplexného čísla $\mathbf{A}$; nech je $[\mathbf{A}]$ značka pre tento bod. Číslo $\mathbf{0}$ je teda priradené k nulovému vektoru; kladné reálne čísla sú priradené k tým vektorom, ktorých smer je základný; záporné reálne čísla sú priradené k tým vektorom, ktorých smer je opačný základnému smeru; konečne, ak ani smer daného vektora ani smer opačný nie je základným smerom, tak priradené číslo je imaginárne; rýdzo imaginárne čísla priradené sú k tým vektorom, ktorých smer je kolmý na základný smer.



Obr. 11.

Obraz $[a_1 + a_2\mathbf{i}]$ komplexného čísla $a_1 + a_2\mathbf{i}$ bol v priesečíku svislej priamky, vedenej obrazom $[a_1]$ reálneho čísla a_1 (ktorý leží na reálnej osi) s vodorovnou priamkou, vedenou obrazom $[a_2\mathbf{i}]$ rýdzo imaginárneho čísla $a_2\mathbf{i}$ (ktorý leží na imaginárnej osi). Zvoľme teraz (obr. 11) reálne číslo b_1 a urobme vodorovné posunutie, ktorým počiatok $[0]$ prejde do bodu $[b_1]$, tým prejde bod $[a_1]$ do bodu $[a_1 + b_1]$, vodorovná priamka, vedená bodom $[a_2\mathbf{i}]$ zostane na svojom mieste a bod $[a_1 + a_2\mathbf{i}]$ prejde do bodu $[(a_1 + b_1) + a_2\mathbf{i}]$. Ak znovu zvolíme (obr. 12) reálne číslo b_2, ale teraz urobíme svislé posunutie, ktorým prejde začiatok $[0]$ do bodu $[b_2\mathbf{i}]$, tým prejde bod $[a_2\mathbf{i}]$ do bodu $[(a_2 + b_2)\mathbf{i}]$ a svislá priamka, vedená bodom $[a_1]$ zostane na svojom mieste, takže bod $[a_1 + a_2\mathbf{i}]$ prejde do bodu $[a_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{i}]$.



Obr. 12.

Preveďme najprv vodorovné a potom svislé posunutie! Pri vodorovnom posunutí prejde bod $[0]$ do bodu $[b_1]$, bod $[a_1 + a_2\mathbf{i}]$ do bodu $[(a_1 + b_1) + a_2\mathbf{i}]$; pri svislom posunutí prejde bod $[b_1]$ do bodu $[b_1 + b_2\mathbf{i}]$, bod $[(a_1 + b_1) + a_2\mathbf{i}]$ do bodu $[(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\mathbf{i}]$. Ak položíme $\mathbf{A} = a_1 + a_2\mathbf{i}$, $\mathbf{B} = b_1 + b_2\mathbf{i}$, tak $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\mathbf{i}$, teda môžeme povedať, že celkový výsledok obidvoch posunutí je ten, že bod $[\mathbf{0}]$ prejde do bodu $[\mathbf{B}]$ a bod $[\mathbf{A}]$ prejde do bodu $[\mathbf{A} + \mathbf{B}]$. Teraz komplexnému číslu $\mathbf{A}$ je priradený vektor, ktorý v základnom umiestení má začiatočný bod $[\mathbf{0}]$ a koncový bod $[\mathbf{A}]$. Pri posunutí vektor sa nemení, ale mení sa len jeho umiestenie, teda ten istý vektor, umiestený tak, aby jeho začiatočný bod bol $[\mathbf{B}]$, bude mať koncový bod $[\mathbf{A} + \mathbf{B}]$. Môžeme napísať

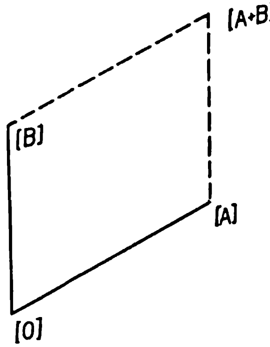
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \text{ teda } \mathbf{A} = \mathbf{C} - \mathbf{B}.$$

Môžeme povedať: **Vektor, ktorý pri jednom umiestení má začiatočný bod $[\mathbf{B}]$ a koncový bod $[\mathbf{C}]$, má pri základnom umiestení koncový bod $[\mathbf{C} - \mathbf{B}]$.**

Z toho plynie: **Vektor so začiatočným bodom $[\mathbf{B}]$ a koncovým bodom $[\mathbf{C}]$ má veľkosť $[\mathbf{C} - \mathbf{B}]$.**

Z predchádzajúceho je zrejmé, že **sčítanie komplexných čísel je geometricky znázornené skladaním vektorov**, ktoré poznáte z fyziky.

Ak sú $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dve ľubovoľné komplexné čísla, tak každému z nich je priradený vektor. Prvý vektor má v základnom umiestnení začiatočný bod $[\mathbf{0}]$ a koncový bod $[\mathbf{A}]$; druhý umiestime tak, aby začiatočným bodom bol koncový bod predchádzajúceho, t. j. bod $[\mathbf{A}]$; koncovým bodom bude podľa predchádzajúceho bod $[\mathbf{A} + \mathbf{B}]$. Ako výsledok skladania dostaneme vektor so začiatočným bodom $[\mathbf{0}]$ a koncovým bodom $[\mathbf{A} + \mathbf{B}]$. Poriadok oboch vektorov môžeme vymeniť (obr. 13).



Obr. 13.

Ak sú $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ dva rôzne body a ak je $[\mathbf{X}]$ stred úsečky $[\mathbf{A}]\,[\mathbf{B}]$, tak vektor so začiatočným bodom $[\mathbf{A}]$ a koncovým bodom $[\mathbf{X}]$ rovná sa vektoru so začiatočným bodom $[\mathbf{X}]$ a koncovým bodom $[\mathbf{B}]$. Podľa predchádzajúceho je teda

$$\mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{X},$$

a z toho plynie

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}). \qquad (1)$$

Vzorec (1) vyjadruje stred úsečky pomocou komplexných čísel.

S geometrickým významom násobenia komplexných čísel sa soznámime v článku 14.

11. Cvičenie.

1. Pomocou vektorov znázornite a) $(2 - 3\mathbf{i}) + (-1 + 2\mathbf{i})$; b) $(-4 + 2\mathbf{i}) + (3 - 2\mathbf{i})$; c) $(2 + 3\mathbf{i}) - (2 - \mathbf{i})$; d) $(3 - 2\mathbf{i}) - (-2 - \mathbf{i})$.

2. a) Daný je vektor v základnej polohe, priradený k číslu $\mathbf{A} = 2 + 3\mathbf{i}$. Ktorý je koncový bod tohto vektora pri takom umiestení, pri ktorom je jeho začiatočným bodom $[\mathbf{B}]$, zobrazujúci číslo $\mathbf{B} = 3 - \mathbf{i}$? b) Daný je vektor základnej polohe, pri-

radený k číslu $\mathbf{B} = 3 - \mathbf{i}$. Ktorý je koncový bod tohto vektora pri takom umiestení, pri ktorom je jeho začiatočným bodom bod $[\mathbf{A}]$, zobrazujúci číslo $\mathbf{A} = 2 + 3\mathbf{i}$? Urobte náčrtok!

3. a) Daný je vektor v základnej polohe, priradený k číslu $\mathbf{A} = 2 + 3\mathbf{i}$. Ktorý je začiatočný bod tohto vektora pri takom umiestení, pri ktorom je jeho koncovým bodom bod $[\mathbf{B}]$, zobrazujúcim číslo $\mathbf{B} = 3 - \mathbf{i}$. b) Daný je vektor v základnej polohe, priradený k číslu $\mathbf{B} = 3 - \mathbf{i}$. Ktorý je začiatočný bod tohto vektora pri takom umiestení, pri ktorom je jeho koncovým bodom bod $[\mathbf{A}]$, zobrazujúcim číslo $\mathbf{A} = 2 + 3\mathbf{i}$. Urobte náčrtok!

4. Body $[\mathbf{0}]$, $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, ktoré neležia v priamke, sú obrazy komplexných čísel $\mathbf{0}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ a tvoria tri vrcholy rovnobežníka. Obrazom ktorého čísla je štvrtý vrchol tohto rovnobežníka? (Troje riešení.)

5. Na základe sčítania vektorov dokážte, že a) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leqq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$; b) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| \geqq |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$.

6. Ak je k číslu $\mathbf{A}$ priradený určitý vektor, aký vektor je priradený k číslu a) $-\mathbf{A}$; b) $\overline{\mathbf{A}}$; c) $-\overline{\mathbf{A}}$? Odôvodnite, že $\mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}}$ je reálne, $\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}}$ rýdzo imaginárne.

7. Vyhľadajte stred úsečky $[\mathbf{A}]\,[\mathbf{B}]$, ak je a) $\mathbf{A} = 6 - 3\mathbf{i}$, $\mathbf{B} = 1 - 2\mathbf{i}$; b) $\mathbf{A} = 3 + 2\mathbf{i}$; $\mathbf{B} = 5 - 2\mathbf{i}$; c) $\mathbf{A} = 2 - 5\mathbf{i}$, $\mathbf{B} = -2 + 5\mathbf{i}$.

8. Komplexné čísla $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ $(\mathbf{A} \neq \mathbf{B})$ sú zobrazené bodmi $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$. Ktoré komplexné čísla zobrazujú body $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{D}]$, $[\mathbf{E}]$, ležiace na polpriamke $[\mathbf{A}]\,[\mathbf{B}]$, ktorej krajným bodom je bod $[\mathbf{A}]$, ktorý má tú vlastnosť, že $[\mathbf{A}]\,[\mathbf{B}] = [\mathbf{B}]\,[\mathbf{C}] = [\mathbf{C}]\,[\mathbf{D}] = [\mathbf{D}]\,[\mathbf{E}]$?

9. Body $[\mathbf{0}]$, $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{A} + \mathbf{B}]$, $[\mathbf{B}]$ sú obrazy komplexných čísel $\mathbf{0}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ a tvoria vrcholy rovnobežníka. Stanovte stredy úsečiek, omedzených vždy dvoma nesusednými vrcholmi. Ktorú vetu možno vyčítať z výsledku?

10. Podobne body $[\mathbf{0}]$, $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{A} + \mathbf{B}]$, $[\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}]$, $[\mathbf{B} + \mathbf{C}]$, $[\mathbf{C}]$ sú obrazy komplexných čísel $\mathbf{0}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ a tvoria vrcholy šesťuholníka, ktorého protiľahlé strany sú spolu rovnobežné. Stanovte stredy úsečiek, omedzených vždy dvoma protiľahlými vrcholmi, ako i stredy úsečiek, omedzených vždy stredmi dvoch protiľahlých strán. Výsledok vyslovte geometricky!

11. Dané sú štyri navzájom rozličné komplexné čísla **A**, **B**, **C**, **D**, ktoré sa zobrazujú bodmi **|A|**, **|B|**, **|C|**, **|D|**. Tieto body možno (troma spôsobmi) rozdeliť vo dve dvojice, čím dostávame vcelku tri dvojice úsečiek. Úsečky každej dvojice nazveme náprotivnými. Dokážte, že úsečky, omedzené stredmi náprotivných úsečiek, sa navzájom rozpoľujú!

12. Dané sú dve komplexné čísla **A**, **B** (**A** $\neq$ **B**), ktoré sú zobrazené bodmi **|A|**, **|B|**. Nájdite číslo **C**, ktorého obraz **|C|** a) leží na úsečke **|A| |B|** a delí ju v pomere **|A| |C|** : **|B| |C|** $= k : h$; b) leží na predĺženej úsečke **|A| |B|** tak, že **|A| |C|** : **|B| |C|** $= k : h$, kde $k \neq h$.

13. Dané sú tri komplexné čísla **A**, **B**, **C**, ktorých obrazy tvoria trojuholník **|A| |B| |C|**. Vyhľadajte bod, ktorý leží na úsečke, spojujúcej ktorýkoľvek vrchol tohto trojuholníka so stredom protiľahlej strany a delí túto úsečku v pomere 2 : 1 (väčšia časť pri vrchole). Ktorá veta je tým dokázaná?

III. Goniometria.

12. Vyjadrenie otáčania okolo začiatku pomocou komplexných čísel.

Poznali ste, že školská matematika sa delí na dva veľké celky: aritmetiku, v ktorej študujeme vlastnosti čísel, a geometriu, v ktorej študujeme vlastnosti priestoru. Medzi oboma týmito celkami príležitostne objavily sa určité súvislosti; napr.: v aritmetike pri náuke o relatívnych číslach bolo veľmi užitočné geometrické znázornenie a v geometrii pri náuke o útvaroch a objemoch boly dôležité výpočty. Jednako však aritmetika a geometria sa javily pri vyučovaní v podstate ako dve rozličné náuky. To však nezodpovedá súčasnému stavu matematickej vedy, v ktorej dnes aritmetika a geometria tvoria jediný súvislý celok. Náuka o komplexných číslach, s ktorou ste sa práve soznámili, poskytuje výbornú príležitosť poznania, že vzťahy medzi aritmetikou a geometriou sú omnoho hlbšie, než ste si doteraz mohli uvedomiť.

Komplexné číslo $\mathbf{S}$, ktorého absolútna hodnota je 1, t. j.

$$|\mathbf{S}| = 1, \tag{1}$$

voláme **komplexnou jednotkou.** Medzi komplexnými jednotkami sú dve reálne, a to $\mathbf{S} = 1$, $\mathbf{S} = -1$, všetky ostatné komplexné jednotky sú imaginárne a je ich nekonečne mnoho. Pri našom obvyklom geometrickom znázornení komplexnej jednotke $\mathbf{S}$ odpovedá bod $[\mathbf{S}]$, ktorého vzdialenosť od začiatku je dĺžková jednotka; všetky tieto body vypĺňujú kružnicu so stredom v začiatku a s polomerom jednotkovej dĺžky. Táto kružnica sa volá **jednotkovou kružnicou.**

Teraz nás budú zaujímať shodnosti, pri ktorých začiatok $\mathbf{O}$ je samodružným bodom. Takáto shodnosť je jednoznačne určená, ak poznáme obraz ešte jedného bodu, iného ako začiatok, napr. bodu $[1]$ a ak vieme, či je to shodnosť priama alebo nepriama. Pretože sa pri shodnosti vzdialenosti nemenia, musí obraz $[\mathbf{S}]$ bodu $[1]$ ležať na jednotkovej kružnici, t. j. musí byť komplexnou jednotkou. Ak $\mathbf{S} = 1$, je $[1]$ samodružný bod; priama shodnosť v tomto prípade je identita a nepriama shodnosť je osová súmernosť s osou súmernosti v reálnej osi. Ak $\mathbf{S} \neq 1$, je nepriama shodnosť zas osová súmernosť s osou v osi úsečky $[1]\,[\mathbf{S}]$; lebo táto osová súmernosť, ako vieme, je nepriama shodnosť a je zrejmé, že bod $[0]$ je samodružný a že obrazom bodu $[1]$ je bod $[\mathbf{S}]$. Priama shodnosť je otáčanie okolo počiatku o uhol, ktorého ramená sú polpriamky $[0]\,[1]$, $[0]\,[\mathbf{S}]$. Teraz nás bude zaujímať len otáčanie. Dokážeme, že obraz $[\mathbf{X}']$ ľubovoľného bodu $[\mathbf{X}]$ je daný jednoduchým vzorcom

$$\mathbf{X}' = \mathbf{S}\mathbf{X}. \tag{2}$$

Najprv dokážeme, že vzorec (2) definuje shodnosť. Preto zvoľme dva ľubovoľné body $[\mathbf{X}_1]$, $[\mathbf{X}_2]$; ich obrazy sú $[\mathbf{X}_1']$, $[\mathbf{X}_2']$, kde

$$\mathbf{X}_1' = \mathbf{S}\mathbf{X}_1, \qquad \mathbf{X}_2' = \mathbf{S}\mathbf{X}_2. \tag{3}$$

Vzdialenosť bodov $[\mathbf{X}_1]$, $[\mathbf{X}_2]$ je podľa článku 11. $|\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1|$; podobne vzdialenosť obrazov je $|\mathbf{X}_2' - \mathbf{X}_1'|$, t. j. podľa (3) $|\mathbf{S}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)|$. Podľa článku 9. vieme, že

$$|\mathbf{S}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)| = |\mathbf{S}| \cdot |\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1|.$$

Podľa (1) je ale $|\mathbf{X}_2' - \mathbf{X}_1'| = |\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1|$. Tým sme dokázali, že pri zobrazení, ktoré je definované vzorcom (2), nemenia sa veľkosti úsečiek ani veľkosti uhlov; lebo ak je daný $\sphericalangle\,[\mathbf{X}_1]\,[\mathbf{X}_2]\,[\mathbf{X}_3]$, sú trouholníky $\Delta\,[\mathbf{X}_1]\,[\mathbf{X}_2]\,[\mathbf{X}_3]$ a $\Delta\,[\mathbf{X}_1']\,[\mathbf{X}_2']\,[\mathbf{X}_3']$ shodné podľa *sss* a z toho plynie, že

$$\sphericalangle\,[\mathbf{X}_1']\,[\mathbf{X}_2']\,[\mathbf{X}_3'] = \sphericalangle\,[\mathbf{X}_1]\,[\mathbf{X}_2]\,[\mathbf{X}_3].$$

Teda zobrazenie, definované vzorcom (2) je shodnosť. Je zrejmé, že obrazom bodu $[1]$ je bod $[\mathbf{S}]$ a že bod $[0]$ je samodružný; dokonca je $[0]$ jediný samodružný bod a preto naša shodnosť nemôže byť nepriama, lebo potom by to bola osová súmernosť, ktorá má viac ako jeden samodružný bod. Teda vzorec (2) vyjadruje pomocou komplexných čísel otáčanie okolo začiatku, pri ktorom obrazom bodu [**1**] je bod [**S**]; pritom môže byť **S** ľubovoľná komplexná jednotka; pre $\mathbf{S} = \mathbf{1}$ znamená (2) identitu.

12. Cvičenie.

1. Dokážte, že čísla a) $\mathbf{i}$; b) $-\mathbf{i}$; c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\sqrt{3}$; d) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathbf{i}$ sú komplexné jednotky.

2. Napíšte komplexnú jednotku, ktorá má tú vlastnosť, že násobenie touto jednotkou znamená otáčanie okolo začiatku o uhol 45° a) v kladnom, b) v zápornom smysle.

3. Ak znamená násobenie komplexnou jednotkou **S** otočenie okolo začiatku o uhol φ, znamená násobenie sdruženou jednotkou $\bar{\mathbf{S}}$ otočenie okolo začiatku o tenže uhol φ v opačnom smysle. Dokážte!

4. Napíšte komplexné jednotky, ktoré majú tú vlastnosť, že násobenie, týmito jednotkami znamená otáčanie okolo začiatku o uhol a) 30°; b) 60° v kladnom alebo v zápornom smysle.

5. Body [**0**] a [**A**], kde $\mathbf{A} = a_1 + a_2\mathbf{i}$, sú dva vrcholy rovnostranného trojuholníka. Stanovte jeho tretí vrchol. (Dvoje riešení.)

6. Ak je [**A**] obraz čísla $\mathbf{A} = a_1 + a_2\mathbf{i}$, aký útvar tvoria obrazy čísel $\mathbf{A}$, $\mathbf{Ai}$, $\mathbf{Ai}^2$, $\mathbf{Ai}^3$?

7. Aké otáčanie je určené komplexnou jednotkou -1?

8. Násobiť komplexnou jednotkou **S** značí otáčať okolo začiatku o akýsi uhol α. Ak sú dané dve komplexné čísla $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ $(\mathbf{A} \neq \mathbf{B})$, ako dostaneme číslo, ktorého obrazom je bod, ktorý vznikne otáčaním a) bodu [**B**] o uhol α okolo bodu [**A**]; bodu [**A**] o uhol α okolo bodu [**B**]?

9. Dané sú body [**A**] [**B**] ako obrazy komplexných čísel $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ $(\mathbf{A} \neq \mathbf{B})$. Ktoré komplexné čísla zobrazujú ďalšie dva vrcholy štvorca, ktorého dva vrcholy sú v bodoch [**A**], [**B**]? (Vcelku troje riešení.)

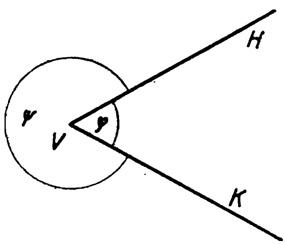
10. Ak $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i}\sqrt{2})$ a $\mathbf{A} = a_1 + a_2\mathbf{i}$, akú vlastnosť majú body [**A**], [**AS**], [$\mathbf{AS}^2$], [$\mathbf{AS}^3$] ...., [$\mathbf{AS}^7$]? Kde leží bod [$\mathbf{AS}^8$]?

11. Ak je **S** komplexná jednotka, akú vlastnosť majú obrazy čísel $\mathbf{1}, \mathbf{S}, \mathbf{S}^2, \mathbf{S}^3, \ldots, \mathbf{S}^n$? Čo značí podmienka $\mathbf{S}^n = \mathbf{1}$?

13. Pojem uhla.

Pri uhloch bude dôležité všímať si aj ich smysel, čo sme doteraz robili len príležitostne. Budeme rozoznávať **začiatočné** a **koncové rameno** uhla; uhol vznikne otáčaním polpriamky okolo vrcholu tak, že prvá poloha pohyblivej polpriamky je začiatočné rameno, posledná poloha je koncové rameno. Ak sa toto otáčanie deje v kladnom smysle (proti pohybu hodinových ručičiek) máme **kladný uhol**, ak sa otáčanie deje v zápornom smysle, máme **uhol záporný.** Veľkosť uhla budeme vyjadrovať relatívnymi číslami (kladnými pre kladné, zápornými pre záporné uhly); pritom budeme užívať oblúkovú mieru ako už dosiaľ v geometrii v 1. triede; napr. veľkosť pravého uhla bude $+\frac{\pi}{2}$ v prípade kladného smyslu, $-\frac{\pi}{2}$ v prípade záporného smyslu. Ak zameníme začiatočné rameno uhla za koncové, zmení sa jeho smysel, teda zmení sa znamienko čísla, ktoré vyjadruje veľkosť uhla.

V prvom rade bude nás zaujímať veľkosť uhla a nie jeho poloha. Ak chceme mať uhol danej veľkosti v určitej polohe, zvolíme ľubovoľne polohu začiatočného ramena; poloha koncového ramena je potom jednoznačne určená, ak poznáme veľkosť



Obr. 14.

uhla vyjadrenú relatívnym číslom, t. j. ak poznáme nielen veľkosť uhla, vyjadrenú kladným číslom, ale aj smysel uhla. V obr. 14 je dutý uhol $\varphi = \mathbf{KVH} = 60°$; ak je **VK** začiatočné rameno, je smysel uhla kladný a podľa učinenej dohody $\varphi = \frac{1}{3}\pi$; ak je však **VH** začiatočné rameno, je smysel uhla záporný, $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$.

V obidvoch prípadoch išlo o dutý uhol. Ak je ψ vypuklý uhol s týmiže ramenami, tak $\psi = -\frac{5}{3}\pi$ v prípade, že **VK** je začiatočné rameno, $\psi = \frac{5}{3}\pi$ v prípade, že **VH** je začiatočné rameno. V každom prípade je veľkosť dutého uhla vyjadrená číslom φ, ktorého absolútna hodnota je menšia ako π a ktoré môže byť kladné alebo záporné podľa toho, aký je smysel uhla; veľkosť vypuklého uhla je vyjadrená číslom ψ, ktorého absolútna hodnota je väčšia ako π, ale menšia ako 2π a ktoré zas môže byť kladné alebo záporné; veľkosť priameho uhla je vyjadrená číslom π alebo číslom $-\pi$ podľa toho, aký je smysel uhla. Ak dutý uhol φ a vypuký uhol ψ majú tie isté ramená, pre oba uhly spoločné, tak jeden z nich je kladný a druhý záporný a máme

$$\psi = \varphi - 2\pi \text{ v prípade } \varphi > 0,$$
$$\psi = \varphi + 2\pi \text{ v prípade } \varphi < 0.$$

Doteraz sme hovorili o dutých, priamych a vypuklých uhloch, pričom sme mali na zreteli aj smysel uhla; veľkosť uhla bola vyjadrená číslom kladným alebo záporným, ktorého absolútna hodnota je menšia ako 2π. Ak by sme sa pridržiavali tohto omedzenia i naďalej, tak by reálne číslo φ mohlo vyjadrovať veľkosť uhla len v tom prípade, ak je od nuly rôzne a ak je jeho absolútna hodnota menšia ako 2π; to je aritmeticky veľmi nepohodlné, pretože napr. sčítanie uhlov a násobenie uhlov číslom je potom možné len za nepohodlných podmienok.

Z názoru je však zrejmé, že pojem uhla sa dá tak zovšeobecniť, že veľkosť uhla bude vyjadrená celkom ľubovoľným reálnym číslom. Napr. uhol veľkosti 7φ vznikne, ak urobíme sedemkrát za sebou otočenie o uhol φ v kladnom smysle. Ak je znovu začiatočné rameno **VK** (obr. 14), bude koncové rameno **VH** to isté ako pri veľkosti φ; jediný rozdiel je v tom, že polpriamka, ktorá vytvorí uhol veľkosti φ, otočí sa napred vo sväzku polpriamok so začiatkom **V** dookola v kladnom smysle, pričom sa vráti do začiatočnej polohy **VK** (otočí sa o uhol 2π) a potom sa ešte ďalej otočí v kladnom smysle o dutý uhol φ.

Ak záleží na tom, akými polohami prejde postupne otáčajúca sa polpriamka, vytvárajúc uhol so začiatočným ramenom **VK** a koncovým ramenom **VH**, je veľkosť uhla vyjadrená celkom určitým reálnym číslom α. Obyčajne však na postupných polohách otáčajúcej sa polpriamky nezáleží a záleží len na polohe začiatočného ramena **VK** a koncového ramena **VH**. Tejto dohody sa budeme teraz pridržiavať. Číslo, vyjadrujúce veľkosť uhla, nie je potom jednoznačne stanovené; ak je α jedna z jeho možných hodnôt, všetky možné hodnoty sú vyjadrené vzorcom:

$$\alpha + 2k\pi,$$

v ktorom k značí všetky celé čísla (kladné, záporné i nulu). Napr. veľkosť so začiatočným ramenom **VK** a koncovým ramenom **VH** v obr. 14 je vyjadrená ktorýmkoľvek z čísel

$$\frac{2\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{14\pi}{6}, \frac{20\pi}{6}, \ldots$$

$$-\frac{4\pi}{6}, -\frac{10\pi}{6}, -\frac{16\pi}{6}, -\frac{22\pi}{6} \ldots$$

Pritom nevylučujeme ani ten prípad, keď začiatočné a koncové rameno splynú; v tom prípade hovoríme o nulovom uhle; jeho veľkosť je tvaru $2k\pi$ (k celé číslo), t. j. je daná ktorýmkoľvek z čísel

$$0, 2\pi, \quad 4\pi, \quad 6\pi, \quad 8\pi, \ldots$$

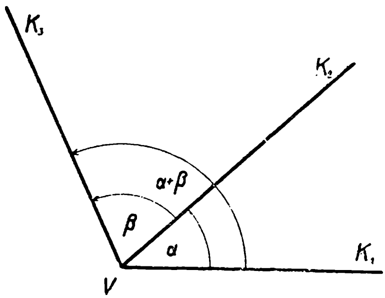
$$-2\pi, -4\pi, -6\pi, -8\pi \ldots$$

Vyložený pojem uhla sa trochu líši od pojmu uhla, známeho z elementárnej geometrie; je dôležitý medzi iným pre štúdium goniometrických funkcií, ktorými sa budeme zaoberať v nasledujúcich článkoch.

Sčítanie uhlov pre uhly v smysle tu vyloženom dá sa takto definovať: Začiatočné rameno $\mathbf{VK_1}$ prvého sčítanca zvolíme v ľubovoľnej polohe; ak je daná veľkosť α prvého sčítanca, je potom jednoznačne určená poloha $\mathbf{VK_2}$ jeho koncového ramena. Tú istú polpriamku $\mathbf{VK_2}$ zvolíme za začiatočné rameno druhého sčítanca a na základe veľkosti β tohto sčítanca určíme jeho koncové rameno $\mathbf{VK_3}$. Súčet oboch daných uhlov má začiatočné rameno VK_1 a koncové rameno VK_3. Jeho veľkosť γ je daná vzorcom

$$\gamma = \alpha + \beta,$$

ktorého presný smysel je ten, že ak je α ktorékoľvek z čísel, vyjadrujúcich veľkosť prvého sčítanca a ak je β ktorékoľvek



Obr. 15.

z čísel, vyjadrujúcich veľkosť druhého sčítanca, je $\alpha + \beta$ jedno z čísel, vyjadrujúcich veľkosť súčtu. Môže byť napr.

$$\alpha = -\frac{2}{3}\pi, \ \beta = \frac{1}{4}\pi, \ \gamma = -\frac{5}{12}\pi,$$

alebo aj napr.

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi, \ \beta = \frac{1}{4}\pi, \ \gamma = \frac{19}{12}\pi.$$

Podobne, ako pre dva uhly, môžeme definovať súčet ľubovoľného počtu uhlov; súčet n rovnakých uhlov α je **n-násobok uhla** α; jedno z čísel, vyjadrujúcich veľkosť n-násobku uhla α, je $n\alpha$; ale aj každé číslo tvaru $n\alpha + 2k\pi$ (k celé číslo) vyjadruje veľkosť tohože n-násobku. Napr. pre $\alpha = \frac{\pi}{3}$ veľkosť desaťnásobku uhla α môžeme vyjadriť číslom $\frac{4\pi}{3}$ a sedemnásobok uhla α je znovu uhol α.

13. Cvičenie.

1. Ak považujeme za rovnaké také dva uhly, ktoré sa líšia o násobok uhla 2π, môžeme veľkosť každého uhla vyjadriť vhodným číslom α, ktoré má tú vlastnosť, že $0 \leq \alpha < 2\pi$. Dokážte!

2. Veľkosti nasledujúcich uhlov vyjadrite číslom α tak, aby $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$ a) 9π; b) 12π; c) $-\pi$; d) -6π; e) $\frac{9}{2}\pi$; f) $\frac{10\pi}{3}$; g) $\frac{23\pi}{4}$; h) $-\frac{1}{6}\pi$; i) $-\frac{13\pi}{5}$; j) $\frac{21\pi}{8}$.

3. Číslom α, ktoré má tú vlastnosť, že $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$, vyjadrite nasledujúce uhly: a) $\frac{1}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi$; b) $\frac{7}{4}\pi + \pi$; c) $\frac{4}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi$; d) $\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}$; e) $\frac{7}{4}\pi + \frac{7}{6}\pi$; f) $\frac{1}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi$; g) $\frac{4}{5}\pi - \pi$; h) $\frac{2}{3}\pi - \frac{3}{2}\pi$; i) $-\frac{11}{8}\pi - \frac{11}{6}\pi$; j) $-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi$.

4. Podobne, ako v predchádzajúcom cvičení, vyjadrite: a) $\frac{3}{2}\pi \cdot 3$; b) $\frac{5}{3}\pi \cdot 6$; c) $\frac{3}{10}\pi \cdot 15$; d) $-\frac{5}{6}\pi \cdot 8$; e) $\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{7}{2}$; f) $\frac{9}{10}\pi \cdot 3\frac{1}{3}$; g) $-\frac{4}{15}\pi \cdot \frac{5}{6}$; h) $-\frac{1}{7}\pi \cdot 1\frac{5}{4}$.

5. Ak považujete za rovnaké také dva uhly, ktoré sa líšia o násobok uhla 2π, vyhľadajte všetky x, ktoré majú tú vlastnosť, že $0 \leqq x < 2\pi$ a vyhovujú rovniciam: a) $2x = \pi$; b) $2x = \frac{3}{4}\pi$; c) $3x = 0$; d) $3x = \frac{4}{3}\pi$; e) $5x = \frac{5}{3}\pi$; f) $4x = \frac{3}{4}\pi$; g) $10x = 0$; h) $2x + \pi = 0$; i) $3x + \frac{4}{3}\pi = 0$; j) $6x + \frac{3}{4}\pi = 0$.

6. Ak je n prirodzené číslo a ak x značí uhol, má rovnica $nx = c$, kde c je daný uhol, práve n takých riešení x, pre ktoré $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Dokážte a udajte všetky tieto riešenia.

7. Pri takých istých podmienkach, ako v predchádzajúcich cvičeniach, riešte sústavy rovníc: a) $x + y = \pi$, $x - y = 0$; b) $2x + y = \frac{4}{3}\pi$, $3x - y = \frac{2}{3}\pi$; c) $3x + 2y = \pi$, $2x + 3y = 15$.

14. Kosinus a sinus.

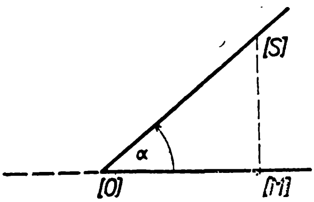
V tejto časti nebude záležať na polohe uhla, ale len na jeho veľkosti. **Základnou polohou uhla** nazveme tú polohu, v ktorej začiatočným ramenom je priamka **[0]**, **[1]**; koncovým ramenom uhla je polpriamka so začiatkom **[0]**, ktorá pretne jednotkovú kružnicu v bode **[S]**, kde číslo **S** je komplexná jednotka, jednoznačne určená veľkosťou uhla a jednoznačne určujúca túto veľkosť. Komplexnú jednotku $\mathbf{S}$ nazveme **komplexnou mierou uhla.** Nezabúdajme, že výraz veľkosť uhla zahrnuje v sebe aj smysel uhla. Ak zmeníme smysel uhla, tak nový uhol v základnej polohe bude súmerný obraz pôvodného uhla podľa reálnej osi, a tak jeho komplexnou mierou bude číslo $\overline{\mathbf{S}}$, združené s číslom $\mathbf{S}$. Pretože $|\mathbf{S}| = 1$, je $\mathbf{S}\overline{\mathbf{S}} = 1$ (pozri článok 9). Teda: **Ak je $\mathbf{S}$ komplexná miera uhla α, je $\overline{\mathbf{S}}$ čiže $\frac{1}{\mathbf{S}}$ komplexná miera uhla** $-\alpha$.

Je jasné, že:

$$\text{pre } \alpha = 0, \quad \mathbf{S} = 1, \qquad \text{pre } \alpha = \pi, \quad \mathbf{S} = -1,$$

$$\text{pre } \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{i}, \qquad \text{pre } \alpha = -\frac{\pi}{2}, \quad \mathbf{S} = -\mathbf{i}. \qquad (1)$$

Nech je teraz α kladné a menšie ako $\frac{\pi}{2}$, takže α je ostrý uhol, ktorého začiatočné rameno ide vodorovne doprava a koncové rameno šikmo doprava nahor. (Obr. 16.) Ak je $[\mathbf{M}]$ päta kolmice spustenej z bodu $[\mathbf{S}]$ na reálnu os, vznikne $\Delta\,[\mathbf{0}]\,[\mathbf{M}]\,[\mathbf{S}]$ s pravým uhlom pri vrchole $[\mathbf{M}]$. Veľkosť $[\mathbf{0}]\,[\mathbf{S}]$ sa rovná jednej a preto podľa známej definície goniometrických funkcií ostrého uhla je $[\mathbf{0}]\,[\mathbf{M}] = \cos\alpha$, $[\mathbf{S}]\,[\mathbf{M}] = \sin\alpha$. Z toho plynie*)



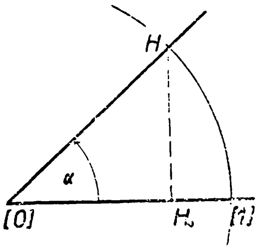
Obr. 16.

$$\mathbf{S} = \cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha. \qquad (2)$$

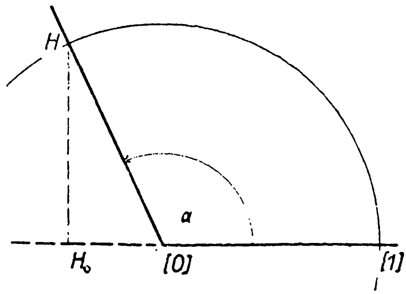
Pre ľubovoľný uhol α definujeme funkcie $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ **vzorcom (2), v ktorom $\mathbf{S}$ znamená komplexnú mieru uhla α.** Z tejto aritmetickej definície funkcií kosinus a sinus odvodíme ich základné vlastnosti rýchlejšie, ako je to možné ktoroukoľvek inou cestou. Najprv si však vyslovíme našu definíciu rýdzo geometricky: **Uhol α umiestime v základnej polohe. Nech je H priesečík jednotkovej kružnice s koncovým ramenom a nech je H_0 päta kolmice, spustenej z bodu H na začiatočné rameno. Potom je** $\cos\alpha = \pm\,[\mathbf{0}]\,H$ **so znamienkom plus** (obr. 17 a 20), **keď H_0 padne**

*) Píšeme radšej $\mathbf{i}\sin\alpha$ miesto $\sin\alpha\,\mathbf{i}$, aby nevznikla pochybnosť o tom, že by snáď $\sin\alpha\mathbf{i}$ znamenalo sinus súčinu čísel α, $\mathbf{i}$.

do začiatočného ramena, so znamienkom mínus (obr. 18 a 19), **keď H_0 padne na opačnú polpriamku. Ďalej** $\sin\alpha = \pm HH_0$ **so znamienkom plus** (obr. 17 a 18), **keď H leží nad začiatočným ra-**



Obr. 17.

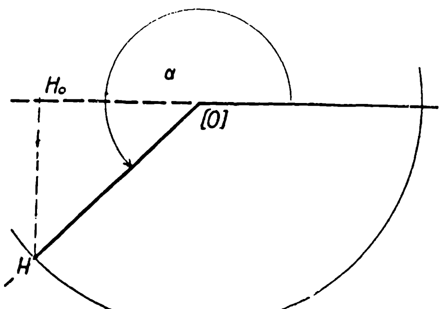


Obr. 18.

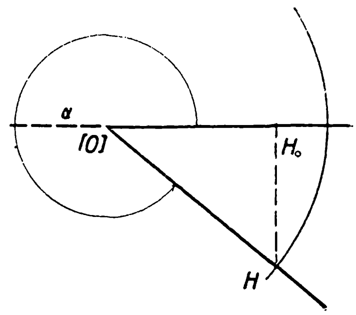
menom, so znamienkom minus (obr. 19 a 20), **keď H leží pod začiatočným ramenom.**

Pretože zmena uhla o násobok čísla 2π nemá vplyvu na umiestenie ramien, bude:

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha, \qquad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \qquad (3)$$



Obr. 19.



Obr. 20.

a všeobecnejšie

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \qquad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \qquad (3)$$

pre každé celé k. Hovoríme, že funkcie kosinus a sinus majú periodu 2π. Z **(1)** a **(2)** plynie:

$$\cos 0 = 1;\ \sin 0 = 0;\ \cos \pi = -1;\ \sin \pi = 0;\ \cos \frac{\pi}{2} = 0;\ \sin \frac{\pi}{2} = 1;\ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0;\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1. \tag{4}$$

Podľa (2) je

$$\overline{\mathbf{S}} = \cos \alpha - \mathbf{i} \sin \alpha. \tag{5}$$

Pretože $\overline{\mathbf{S}}$ je komplexná miera uhla $-\alpha$, z (5) plynie:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \tag{6}$$

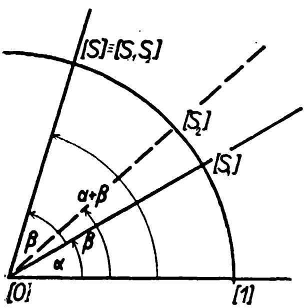
slovom: **zmena znamienka pri α nemá vplyvu na $\cos \alpha$, ale spôsobí zmenu znamienka pri** $\sin \alpha$. Pretože $\mathbf{S}$ je komplexná jednotka, je $\mathbf{S}\overline{\mathbf{S}} = 1$ a tak z (2) a (5) plynie dôležitá identita

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \tag{7}$$

Najdôležitejšia vlastnosť funkcií kosinus a sinus plynie z článku 12. Nech sú dané dva uhly α, β a nech je $\mathbf{S}_1$ komplexná miera uhla α, $\mathbf{S}_2$ komplexná miera uhla β, $\mathbf{S}$ komplexná miera uhla $\alpha + \beta$, teda

$$\mathbf{S}_1 = \cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha, \qquad \mathbf{S}_2 = \cos \beta + \mathbf{i} \sin \beta,$$
$$\mathbf{S} = \cos(\alpha + \beta) + \mathbf{i} \sin(\alpha + \beta). \tag{8}$$

Uhol α v základnej polohe má začiatočné rameno $[0]\ [1]$, koncové rameno $[0]\ [\mathbf{S}_1]$ (obr. 21). Uhol β v základnej polohe má začiatočné rameno $[0]\ [1]$, koncové rameno $[0]\ [\mathbf{S}_2]$. Aby sme dostali uhol $\alpha + \beta$ v základnej polohe, musíme polohu uhla β otočením okolo začiatku tak zmeniť, aby bod $[1]$ prešiel do bodu $[\mathbf{S}_1]$. Pri tomto otočení podľa článku 12 ľubovoľný bod $[\mathbf{X}]$ prejde do bodu $[\mathbf{X}']$, kde $\mathbf{X}' = \mathbf{S}_1\mathbf{X}$. A tak prejde bod $[\mathbf{S}_2]$ do bodu $[\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2]$ a to znamená, že uhol $\alpha + \beta$ v základnej polohe má druhé rameno v polpriamke $[\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2]$, čiže polpriamky $[0]\ [\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2]$, $[0]\ [\mathbf{S}]$ splynú. Pretože však $|\mathbf{S}_1| = 1$, $|\mathbf{S}_2| = 1$, podľa článku 9 je aj $|\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2| = 1$ a mimo toho je, pravda, aj $|\mathbf{S}| = 1$.



Obr. 21.

Preto splynú i body $[\mathbf{S}]$, $[\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2]$ a to znamená, že $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$. Výsledok, ku ktorému sme došli, volá sa **Moivreovou vetou.** Podľa **(8)** Moivreova veta, vyjadrená vzorcom, je:

$$\cos(\alpha + \beta) + \mathbf{i}\sin(\alpha + \beta) = (\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta). \quad \textbf{(9)}$$

Priam tak sa dá odvodiť všeobecnejší vzorec, ktorý hovorí, že komplexná jednotka

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + \mathbf{i}\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$

je súčin komplexných jednotiek:

$$\cos\alpha_1 + \mathbf{i}\sin\alpha_1, \cos\alpha_2 + \mathbf{i}\sin\alpha_2, \ldots \cos\alpha_n + \mathbf{i}\sin\alpha_n.$$

Najdôležitejší prípad všeobecného vzorca je ten, keď všetky uhly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sú rovnaké. Tento prípad je vyjadrený vzorcom

$$(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \mathbf{i}\sin n\alpha. \quad \textbf{(10)}$$

Smysel vzorca **(9)** dá sa vyjadriť takto: Z komplexnej jednotky $\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha$ vznikne komplexná jednotka $\cos(\alpha + \beta) + \mathbf{i}\sin(\alpha + \beta)$ znásobením komplexnou mierou uhla β. Najdôležitejšie zvláštne prípady sú: $\beta = \pi$ (komplexná miera je -1), $\beta = \frac{\pi}{2}$ (komplexná miera je $-\mathbf{i}$). Zo vzorca **(9)** dostaneme vzorce:

$$\cos(\alpha + \pi) + \mathbf{i}\sin(\alpha + \pi) = -(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha),$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{i}(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha),$$

z ktorých po oddelení reálnych a imaginárnych častí dostaneme:

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha, \ \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \quad \textbf{(11)}$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha, \ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha. \quad \textbf{(12)}$$

Ak v týchto vzorcoch miesto α píšeme $-\alpha$ podľa **(6)** dostaneme:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \textbf{(13)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \quad \textbf{(14)}$$

Všetky vzorce **(11)** až **(17)** ľahko sa dajú odviesť priamo z definície funkcií kosinus a sinus (pozri obr. 17 až 20).

Zo všeobecného Moivreovho vzorca **(9)** oddelením reálnych a imaginárnych častí dostaneme:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \qquad \textbf{(15)}$$

Jediný vzorec **(9)** hovorí presne to isté, čo oba vzorce **(15)** dovedna; už z tohto je jasná výhoda zavedenia komplexných čísel v geometrii.

Ak $\alpha = \beta$, zo vzorcov **(15)** sleduje:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad \textbf{(16)}$$

To plynie aj zo vzorca **(10)** pre $n = 2$. Vzorcom **(10)** pre $n = 2$ budeme sa zaoberať v nasledujúcej triede.

Ak je $\mathbf{A}$ komplexné číslo, ktoré sa nerovná nule, môžeme jednoznačne definovať komplexné číslo $\mathbf{S}$ pomocou rovnice $\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{S}$, z ktorej plynie, že $\mathbf{S}$ je komplexná jednotka, ktorú môžeme napísať vo tvare **(2)**. Položme ešte $|\mathbf{A}| = r$ a dostaneme

$$\mathbf{A} = r(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha); \qquad \textbf{(17)}$$

r geometricky znamená vzdialenosť bodu $[\mathbf{A}]$ od začiatku, α je uhol so začiatočným ramenom $[\mathbf{0}]\,[\mathbf{1}]$ a koncovým ramenom $[\mathbf{0}]\,[\mathbf{A}]$, ktorý sa volá **amplitúdou** komplexného čísla $\mathbf{A}$; miesto α môžeme vziať aj $\alpha + 2k\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo. Ak je aj $\mathbf{A}'$ komplexné číslo, rôzne od nuly, máme podobne

$$\mathbf{A}' = r'(\cos\alpha' + \mathbf{i}\sin\alpha'). \qquad \textbf{(18)}$$

Zo **(17)** a **(18)** nasleduje:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = rr'[\cos(\alpha + \alpha') + \mathbf{i}\sin(\alpha + \alpha')]. \qquad \textbf{(19)}$$

Zo **(17)**, **(18)** a **(19)** ľahko vyčítame geometrický význam násobenia komplexných čísel. Z **(10)** a **(17)** plynie ešte

$$\mathbf{A}^n = r^n(\cos n\alpha + \mathbf{i}\sin n\alpha) \qquad \textbf{(20)}$$

pre každé prirodzené číslo n.

14. Cvičenie.

1. Vypočítajte (bez tabuľky) hodnoty sinu a cosinu týchto uhlov: a) $120°$; b) $135°$; c) $150°$; d) $210°$; e) $225°$; f) $240°$; g) $270°$; h) $300°$; i) $315°$; j) $330°$.

2. Pre ktoré α platí: a) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; b) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$?

3. Kedy je a) $\sin\alpha > \cos\alpha$; b) $\sin\alpha < \cos\alpha$; c) $\sin\alpha = \cos\alpha$; d) $\sin\alpha > -\cos\alpha$; e) $\sin\alpha < -\cos\alpha$; f) $\sin\alpha = \quad \cos\alpha$?

4. Vypočítajte komplexnú mieru uhlov: a) $30°$; b) $45°$; c) $90°$; d) $135°$; e) $150°$; f) $180°$; g) $225°$; h) $240°$; i) $270°$; j) $300°$.

5. Ak viete, že komplexná miera uhla $15°$ je $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\,\mathbf{i}$, vypočítajte komplexnú mieru uhlov: a) $105°$; b) $195°$; c) $285°$; d) $345°$; e) $255°$; f) $165°$; g) $75°$.

6. Zjednodušte a) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$; b) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

$$\text{c)}\ \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha};\quad \text{d)}\ \frac{\sin}{1-\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\text{e)}\ \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha};\quad \text{f)}\ \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Kedy majú dané výrazy smysel?

7. Dokážte, že a) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\beta - \cos^2\alpha$;

$$\text{b)}\ \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1 \cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \text{c)}\ \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Pre ktoré α majú výrazy smysel?

8. Dokážte, že a) $\dfrac{\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha}{\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta} = \cos(\alpha-\beta) + \mathbf{i}\sin(\alpha-\beta)$; b) $\dfrac{\cos\alpha - \mathbf{i}\sin\alpha}{\cos\beta - \mathbf{i}\sin\beta} = \cos(\beta-\alpha) + \mathbf{i}\sin(\beta-\alpha)$.

9. Dokážte, že a) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$; b) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

10. Dokážte, že a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(45° + \alpha)$; b) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha - 45°)$; c) $\sin(30°+\alpha) + \sin(30°-\alpha) = \cos\alpha$; d) $\cos(30°+\alpha) - \cos(30-\alpha) = -\sin\alpha$; e) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$; f) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \cos^2\beta$.

11. Dokážte, že a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; b) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha$; c) $2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta = 1 + \cos 2\alpha\cos 2\beta$; d) $-\frac{1}{2} \leq \sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$.

12. Dokážte, že $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; b) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

13. Dokážte, že $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; b) $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

14. Dokážte, že a) $1 + \sin\alpha = 2\sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

15. Dokážte, že a) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; b) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; c) $\cos\alpha + \cos^2\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; d) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

16. Podľa cvičenia 15. upravte: a) $\sin 50° - \sin 40°$; b) $\sin 105° + \sin 75°$; c) $\cos 240° - \cos 150°$; d) $\cos 125° + \cos 225°$.

17. Dokážte, že pre $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ platí: a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$; c) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$; d) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

18. Čo je geometrické miesto bodov, ktoré zobrazujú všetky komplexné čísla danej amplitúdy?

19. Ak sú komplexné čísla $\mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{B} \neq 0$ zobrazené bodmi $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, sostrojte bod, ktorý zobrazuje ich súčin $\mathbf{AB}$. (Pomocou vlastností podobných trojuholníkov.)

20. Ak je komplexné číslo $\mathbf{A} \neq 0$ zobrazené bodom $[\mathbf{A}]$, sostrojte bod, ktorý zobrazuje číslo $\frac{1}{\mathbf{A}}$.

21. Akú absolútnu hodnotu r a akú amplitúdu α, pre ktorú platí $0 \leq \alpha < 360°$, majú čísla: a) 1; b) -2; c) $\mathbf{i}$; d) $-2\mathbf{i}$; e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\sqrt{3}$; f) $1 - \mathbf{i}$; g) $-\sqrt{3} + \mathbf{i}$; h) $-2 - \sqrt{3} - \mathbf{i}$.

22. Vypočítajte: a) $(1 + \mathbf{i})^{25}$; b) $(3 - \mathbf{i})^{10}$; c) $\left(\frac{1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}{1 - \mathbf{i}}\right)^{20}$.

23. Akú absolútnu hodnotu a akú amplitúdu majú čísla a) $1 + \cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha$; b) $1 + \sin\alpha - \mathbf{i}\cos\alpha$.

24. Ak $\mathbf{A} = \cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha$, $\mathbf{B} = \cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta$; vypočítajte absolútnu hodnotu a amplitúdu čísel a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

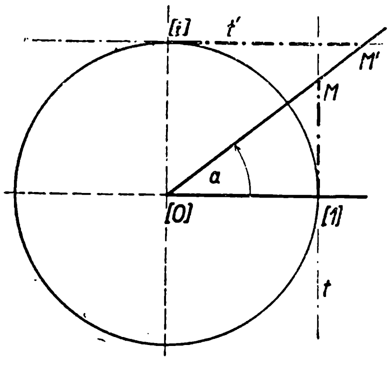
15. Tangens a kotangens.

Funkcia tangens a kotangens sú pre každý uhol definované pomocou vzťahov

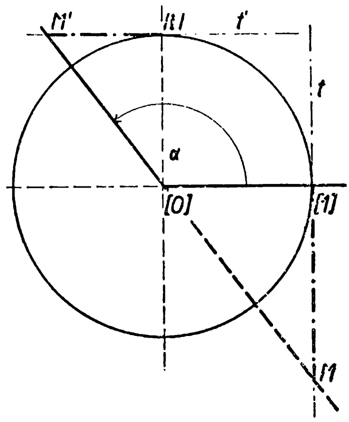
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \tag{1}$$

ktoré sú nám známe z 1. triedy pre ostrý uhol α. Na rozdiel od funkcií $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ funkcie $\operatorname{tg} \alpha$ a $\operatorname{cotg} \alpha$ nie sú definované pre všetky α, ale len pre tie α, pre ktoré v menovateli nie je nula. Také nazveme **prípustnými.** Pre $\operatorname{tg} \alpha$ neprípustné hodnoty sú $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, pre $\operatorname{cotg} \alpha$ neprípustné hodnoty sú $\alpha = k\pi$ (k je celé kladné, záporné alebo 0).

Z geometrickej definície funkcií kosinus a sinus (pozri obr. 17 až 20) sa ľahko odvedú pomocou **(1)** nasledujúce geometrické definície funkcií tangens a kotangens: Uhol α umiestime v základnej polohe. V jednotkovej kružnici nech je t dotyčnica v bode **[1]**, t' dotyčnica v bode [**i**]. Priamka, obsahujúca koncové rameno uhla α, pretne dotyčnicu t v bode M, dotyčnicu t' v bode M'. Potom je $\operatorname{tg} \alpha = \pm$ **[1]** M so znamienkom plus (obr. 22 a 24) ak bod M



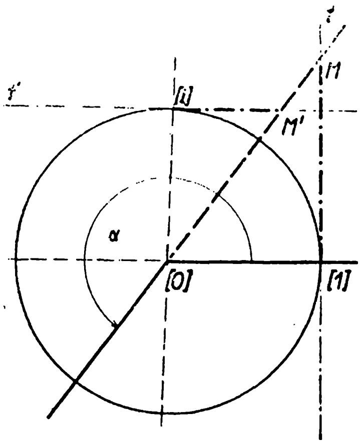
Obr. 22.



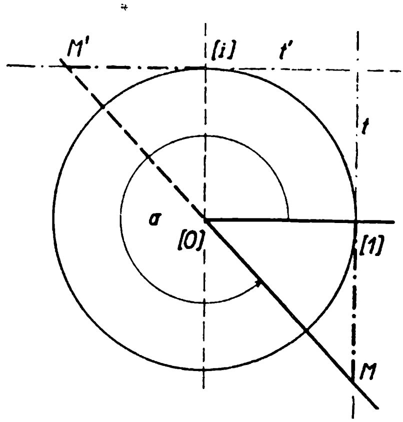
Obr. 23.

leží nad bodom **[1]**, so znamienkom mínus (obr. 23 a 25), ak bod M leží pod bodom **[1]**. Ďalej je $\operatorname{cotg} \alpha = \pm$ **[1]** M' so znamienkom plus (obr. 22 a 24), ak bod M' leží napravo od bodu [**i**], so znamienkom mínus (obr. 23 a 25), ak bod **M'** leží naľavo od bodu [**i**].

Vlastnosti funkcií tg a cotg plynú bezprostredne z odvedených už vlastností funkcií sin α a cos α. Najdôležitejšie z týchto vlastností sú shrnuté v nasledujúcich vzorcoch. U každého z týchto



Obr. 24.



Obr. 25.

vzorcov treba udať, ktoré sú prípustné hodnoty uhlu; to nie je uvedené v texte učebnice, ale je to cvičenie. Priam tak odvedenie nasledujúcich vzorcov na základe vzorcov predchádzajúceho článku je ľahkým cvičením, a preto nie je v texte uvedené.

Vzorce:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1 \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{cotg}(\alpha + \pi) = \operatorname{cotg}\alpha, \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg}\alpha, \qquad \operatorname{cotg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha, \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}, \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg} 2\alpha - 1}{2 \operatorname{cotg}\alpha}, \qquad (8)$$

15. Cvičenie.

V nasledujúcich cvičeniach udajte sami, ktoré hodnoty uhlov sú prípustné:

1. Vypočítajte (bez tabuliek) tangens a kotangens týchto uhlov: a) 120°; b) 135°; c) 150°; d) 210°; f) 240°; g) 270°; h) 300°; i) 315°; j) 330°.

2. Pre ktoré α platí a) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$; b) $|\operatorname{cotg}\alpha| = \operatorname{cotg}\alpha$?

3. Kedy je a) $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{cotg}\alpha$; b) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{cotg}\alpha$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha$; d) $\operatorname{tg}\alpha > -\operatorname{cotg}\alpha$; e) $\operatorname{tg}\alpha < -\operatorname{cotg}\alpha$; f) $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{cotg}\alpha$?

4. Dokážte, že funkcie tangens a kotangens sú periodické s periodou π.

5. Upravte: a) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$; b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{cotg}\alpha+1}$; d) $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$; e) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}$; f) $\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}$.

6. Dokážte, že a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\beta}$; b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; c) $\operatorname{tg}^2\cdot\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$; d) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\operatorname{cotg}\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$.

7. Dokážte, že $|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha| \geqq 2$. Môže platiť rovnosť?

8. Vypočítajte a) $\dfrac{1+\mathrm{i}\operatorname{tg}\alpha}{1-\mathrm{i}\operatorname{tg}\alpha}$; b) $\dfrac{1+\mathrm{i}\operatorname{cotg}\alpha}{1-\mathrm{i}\operatorname{cotg}\alpha}$; c) $\dfrac{1-\mathrm{i}\operatorname{tg}\alpha}{1+\mathrm{i}\operatorname{cotg}}$.

9. Dokážte, že a) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = 1$; b) $\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right) = 1$; c) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$; d) $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha+1}{\operatorname{cotg}\alpha-1} = \operatorname{cotg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

10. Dokážte, že a) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; b) $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \dfrac{1+\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$.

11. Dokážte, že $\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

12. Dokážte, že a) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; b) $\left|\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; c) $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1\ \cos}{1\ \cos}}$.

13. Dokážte, že a) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \cos\alpha$; b) $\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \sin\alpha$.

14. Dokážte, že a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; b) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

15. Dokážte, že pre $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ platí: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$; b) $\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}2\beta \operatorname{tg}2\gamma$; c) $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$.

16. Goniometrické rovnice.

Takto sa nazývajú rovnice, v ktorých sa vyskytujú goniometrické funkcie neznámeho uhla. Najjednoduchšie sú tie goniometrické rovnice, v ktorých je priamo daná hodnota niektorej goniometrickej funkcie neznámeho uhla α a má sa určiť veľkosť uhla α. Ak je daná hodnota goniometrickej funkcie kladná, môžeme, ako sme sa to vlani učili v geometrii, určiť pomocou tabuliek približnú hodnotu toho riešenia α, ktoré vyhovuje nerovnostiam $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\left(\text{to znamená: } 0 < \alpha \text{ a okrem toho } \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Riešenie sme udávali v stupňoch; ak značí α° veľkosť uhla v stupňoch, tak potom α, veľkosť tohože uhla v oblúkovej miere, je

$$\alpha = \frac{\alpha^\circ \pi}{180^\circ}.$$

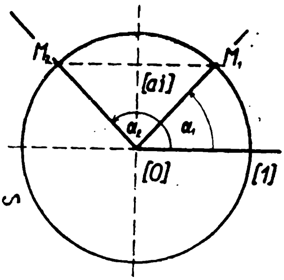
Prevod stupňov na oblúkovú mieru sa dá prevádzať rýchle pomocou tabuľky prevodu, ktorú možno použiť aj k obrátenému prevodu oblúkovej miery na stupne.

Goniometrické rovnice uvedeného tvaru môžeme riešiť graficky na základe geometrickej definície goniometrických funkcií, naznačenej v obr. 17 až 20 a 22 až 25.

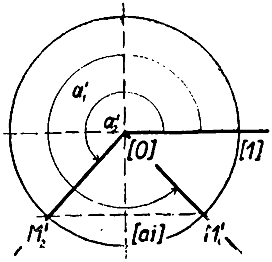
Hľadaný uhol si myslíme v základnej polohe, takže počiatočným ramenom je polpriamka **[0] [1]**; koncové rameno pretne jednotkovú kružnicu v bode M, ktorého poloha sa dá určiť z danej rovnice jednoduchou konštrukciou, ktorú pre všetky prípady teraz vysvetlíme. Poznamenávame, že vždy vyjdú dve polohy M_1, M_2 bodu M, ktorým odpovedajú dve hodnoty α_1, α_2

hľadaného uhla α. Miesto čísel α_1, α_2 môžeme, ako známo, za mieru uhla vziať aj čísla $\alpha_1 + 2k\pi$, $\alpha_2 + 2k\pi$ (s ľubovoľným celým k), v stupňoch $\alpha_1^0 + k \cdot 360°$, $\alpha_2^0 + k \cdot 360°$.

I. $\sin \alpha = a$ (obr. 26 pre kladné a, obr. 27 pre záporné a). Na imaginárnej osi určíme si bod $[a\mathbf{i}]$, ak je $|a| < 1$, padne tento bod dovnútra jednotkovej kružnice. Rovnobežka s reálnou osou pretne jednotkovú kružnicu v dvoch bodoch (M_1, M_2 v obr. 26, M_1', M_2' v obr. 27), ktoré určujú žiadané uhly. Tieto uhly ozna-



Obr. 26.

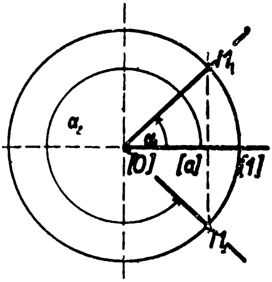


Obr. 27.

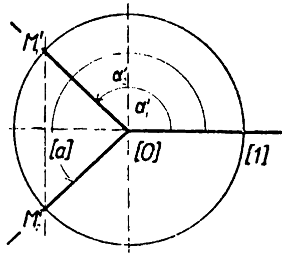
číme α_1, α_2 pre kladné a; α_1', α_2' pre záporné a. Body M_1, M_2 a tak i uhly α_1, α_2 sú navzájom súmerné podľa imaginárnej osi; ak je absolútna hodnota $|a|$ čísla a v oboch obrazcoch 26 a 27 tá istá, sú oba obrazy navzájom súmerné podľa reálnej osi; súmerným obrazom uhla α_1 je uhol α_1', súmerným obrazom uhla α_2 je uhol α_2', je teda $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, $\alpha_1' = -\alpha_1$, $\alpha_2' = -\alpha_2$, takže stačí určiť α_1 (pomocou tabuliek). Majme napr. rovnice $\sin \alpha = \pm 0{,}7528$. Podľa tabuliek $\alpha_1^0 \doteq 48° 50'$, teda $\alpha_2^0 = 180 - \alpha_1^0 \doteq 131° 10'$. V oblúkovej miere $\alpha_1 \doteq 0{,}8523$, $\alpha_2 \doteq 2{,}2893$.

Pre $a = 0$ máme rovnicu $\sin \alpha = 0$, ktorej vyhovujú uhly $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$; priamka $M_1 M_2$ v tomto prípade splynie s reálnou osou. Pre $a = \pm 1$ máme rovnicu $\sin \alpha = \pm 1$. V tomto prípade oba body M_1, M_2 splynú s bodom $[\mathbf{i}]$, oba body M_1', M_2' splynú s bodom $[-\mathbf{i}]$; jediným riešením rovnice $\sin \alpha = 1$ je uhol $\alpha = \frac{\pi}{2}$, jediným riešením rovnice $\sin \alpha = -1$ je uhol $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Ak je $|a| > 1$, leží bod $[a\mathbf{i}]$ mimo jednotkovej kružnice a rovnici $\sin \alpha' = a$ nevyhovuje nijaký uhol.

II. $\cos\alpha = b$ (obr. 28 pre kladné b, obr. 29 pre záporné b, číslo $|b|$ v obidvoch prípadoch rovnaké). Na reálnej osi určíme bod b; ak je $|b| < 1$, padne tento bod dovnútra jednotkovej kružnice. Rovnobežka s imaginárnou osou pretne jednotkovú



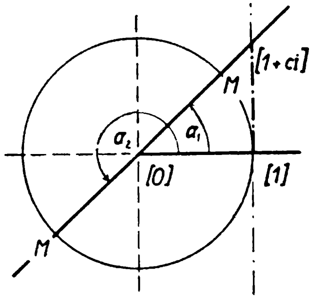
Obr. 28.



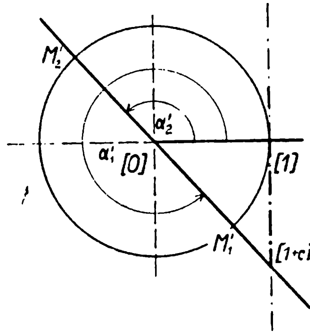
Obr. 29.

kružnicu v bodoch $M_1\,M_2$ (obr. 28) alebo $M_1'\,M_2'$, obr. 29), ktoré určujú dva uhly α_1, α_2 alebo α_1', α_2'. Teraz je $\alpha_2 = -\alpha_1$; $\alpha_1' = \pi - \alpha_1$; $\alpha_2' = -\alpha_1'$; α_1 sa opäť určí z tabuliek, pre $a = 0$ máme rovnicu $\cos\alpha = 0$, riešenie $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$. Rovnici $\cos\alpha = 1$ vyhovuje jediný uhol $\alpha = 0$; rovnici $\cos\alpha = -1$ vyhovuje jediný uhol $\alpha = \pi$. Pre $|b| > 1$ nevyhovuje nijaký uhol rovnici $\cos\alpha = b$.

III. $\operatorname{tg}\alpha = c$ (obr. 30 pre kladné c, obr. 31 pre záporné c); číslo $|c|$ je v obidvoch prípadoch rovnaké. Sostrojíme bod $[1 + c\mathbf{i}]$, ktorý leží na dotyčnici jednotkovej kružnice s bodom dotyku **[1]** vo vzdialenosti c od bodu dotyku. Priamka **[0]** $[1 + c\mathbf{i}]$



Obr. 30.



Obr. 31.

pretne jednotkovú kružnicu v dvoch bodoch (M_1, M_2 v obr. 30, M_1', M_2' v obr. 31), ktoré určia hľadané uhly (α_1, α_2 pre $c > 0$, α_1', α_2' pre $c < 0$); bude teda

$$\alpha_1' = -\alpha_1, \quad \alpha_2' = \pi - \alpha_1, \quad \alpha_2 = 2\pi - \alpha_2';$$

α_1 sa určí z tabuliek. Pre $c = 0$ máme rovnicu $\operatorname{tg} \alpha = 0$, ktorá má riešenie $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. Pre žiadne c nevyjde $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, lebo hodnoty $\pm \frac{\pi}{2}$ nie sú prípustné pre funkciu tangens.

IV. Podobne riešime rovnicu $\operatorname{cotg} \alpha = d$.

Iné goniometrické rovnice budeme preberať až v tretej triede.

16. Cvičenie.

V príkladoch 1—7 vypočítajte (na stupne a minúty) také hodnoty x, pre ktoré platí $0 \leqq x < 2\pi$ a ktoré vyhovujú daným rovniciam.

1. a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; b) $\sin x = -\frac{1}{3}$; c) $\cos x = 0{,}6$; d) $\cos x = -\frac{3}{4}$; e) $\operatorname{tg} x = 1$; f) $\operatorname{tg} x = -2$; g) $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{4}$; h) $\operatorname{cotg} x = -10$.

2. a) $\sin(x + 30°) = 0{,}4567$; b) $\sin(120° - x) = \frac{1}{4}$; c) $\cos(x - 52°) = 1$; d) $\cos(150° + x) = -0{,}625$; e) $\operatorname{tg}(x - 20°) = 1{,}3785$; f) $\operatorname{tg}(135° - x) = -0{,}5678$; g) $\operatorname{cotg}(x + 100°) = 3{,}8$; h) $\operatorname{cotg}(12° - x) = -0{,}1$.

3. a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; b) $\sin 3x = -1$; c) $\cos 2x = -\frac{5}{6}$; d) $\cos 4x = 0{,}96$; e) $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{3}$; f) $\operatorname{tg} 3x = -5$; g) $\operatorname{cotg} 10x = 1$; h) $\operatorname{cotg} 6x = -3{,}2$.

4. a) $\sin x = \sin 2x$; b) $\cos 3x = \cos x$; c) $\operatorname{tg} x = 10x$; d) $\operatorname{cotg} 5x = \operatorname{cotg} 2x$.

5. a) $\sin x = \sin(3x° + 20°)$; b) $\sin 2x = \sin(45° - 3x)$; c) $\cos 3x = \cos(2x + 60°)$; d) $\cos(30° - x) = \cos x$; e) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg}(3x - 90°)$; f) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(-7x)$; g) $\operatorname{cotg}(x + 135°) = \operatorname{cotg} 4x$; h) $\operatorname{cotg}(100° - 5x) = \operatorname{cotg} 3x$.

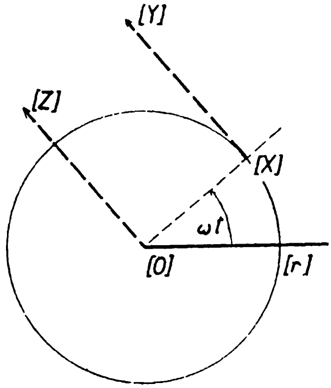
6. a) $\sin x = \cos 35°$; b) $\cos x = -\sin 27°$; c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} 125°$; d) $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} 54° = 0$.

7. a) $\sin x = \cos 2x$; b) $\cos 3x = \sin (20^\circ - x)$; c) $\cos x = \sin (45^\circ - x)$; d) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{cotg} 5x$; e) $\operatorname{cotg} 2x = \operatorname{tg} 7x$; f) $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} (120^\circ + 3x)$.

8. Aké vzťahy medzi x a y určujú rovnice: a) $\sin x = \sin y$; b) $\sin x = \cos y$; c) $\cos x = \cos y$; d) $\cos x = -\sin y$; e) $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} y$; f) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} y$; g) $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} y$; h) $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{tg} y$?

17. Rovnomerný pohyb po kružnici.

Z goniometrických funkcií najdôležitejšie sú sinus a kosinus, ktoré sa vyskytujú v najdôležitejších otázkach mechaniky a fyziky vôbec. V tomto článku rozriešime jednoduchú, ale dôležitú úlohu matematicky vyjadriť rýchlosť bodu, ktorý sa rovnomerne pohybuje po kružnici K. Stred kružnice nech je v začiatku; polomer označíme r. Ako obvykle čas (v sekundách) označíme písmenom t a predpokladáme, že pre $t = 0$ pohyblivý



Obr. 32.

bod je vodorovne napravo od začiatku a že otáčanie sa deje v kladnom smysle. Polpriamka, vychádzajúca zo začiatku **[0]** a prechádzajúca pohyblivým bodom, opíše uhol, ktorého veľkosť je priamo úmerná času. Koeficient úmernosti označíme ω a uhly budeme merať v oblúkovej miere; číslo ω menuje sa uhlovou rýchlosťou pohybu. Pohyblivý bod **[X]** odpovedá komplexnému číslu **X**, ktorého absolútna hodnota je r a ktorého amplitúda (viď koniec článku 14) je ωt, takže

$$\mathbf{X} = r(\cos \omega t + \mathbf{i} \sin \omega t).$$

Od okamihu $t = t_1$ do okamihu $t = t_2$ opíše bod $[\mathbf{X}]$ oblúk kružnice K; keby $r = 1$, rovnala by sa veľkosť tohto oblúka veľkosti uhla (v oblúkovej miere), ktorý opíše polpriamka $[\mathbf{0}]\,[\mathbf{X}]$, t. j. $\omega(t_2 - t_1)$. Pri ľubovoľnom r opíše bod $[\mathbf{X}]$ r – násobok, t. j. $r\omega(t_2 - t_1)$.

Podiel

$$\frac{r\omega(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = r\omega$$

je veľkosť rýchlosti pohyblivého bodu. Táto veľkosť je konštantná, ale rýchlosť sama nie je konštantná, lebo rýchlosť je vektor, ktorého smerom je okamžitý smer pohybu a tento smer sa stále mení. V obr. 32 je vektor rýchlosti, ten vektor, ktorého začiatočným bodom je bod $[\mathbf{X}]$ a ktorého koncový bod $[\mathbf{Y}]$ leží na dotyčnici kružnice K vo vzdialenosti $r\omega$ od $[\mathbf{X}]$ v smere, odpovedajúcom otáčaniu v kladnom smysle. Vektor rýchlosti radšej tak umiestime, aby jeho začiatočným bodom bol začiatok $[\mathbf{0}]$; koncový bod podľa článku 11. bude bod $[\mathbf{Z}]$, kde $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}$. Ide tu len o výraz pre komplexné číslo $\mathbf{Z}$. Zrejme však $|\mathbf{Z}| = r\omega$ a amplitúda čísla Z = amplitúde čísla $\mathbf{X}$, zväčšenej o $\frac{\pi}{2}$, t. j. alebo podľa vzorcov **(12)** článku 14.:

$$\mathbf{Z} = -r\omega \sin \omega t + \mathbf{i}\, r\omega \cos \omega t.$$

17. Cvičenie.

1. a) Ak poznáte uhlovú rýchlosť ω rovnomerného pohybu po kružnici, vypočítajte čas t_0, potrebný na jeden obeh. b) Ak poznáte dobu obehu t_0, vypočítajte uhlovú rýchlosť.

2. Miesto uhlovej rýchlosti pri rovnomernom pohybe po kružnici niekedy zavádzame t. zv. frekvenciu f, t. j. počet obehov, ktoré vykoná pohybujúce sa teleso za 1 sek. Udajte, ako sa vypočíta a) frekvencia z uhlovej rýchlosti, b) uhlová rýchlosť z frekvencie.

3. Motocyklista na kruhovej závodnej dráhe, ktorej dĺžka je práve 1 km, ide rovnomerne rýchlosťou 90 km|hod. Aká je jeho uhlová rýchlosť (za 1 sek.)?

4. Zem pri svojom obehu okolo Slnka koná približne rovnomerný pohyb kruhový, pričom priemerná vzdialenosť Zeme od Slnka je $149{,}5 \cdot 10^6$ km. Vypočítajte postupnú i uhlovú rýchlosť tohto pohybu (za 1 sek.).

5. Bod na povrchu Zeme koná pri otáčaní Zeme okolo osi rovnomerný pohyb kruhový. Ak je φ zemepisná šírka tohto bodu a r polomer Zeme, vypočítajte postupnú i uhlovú rýchlosť tohto pohybu (za 1 sek.).

6. Koleso zotrvačníka, ktorého priemer je 1 m, koná 100 obrátok za 1 min. Vypočítajte postupnú i uhlovú rýchlosť, ktorú má bod na obvode kolesa (za 1 sek.).

7. Ak je bod, konajúci rovnomerný pohyb kruhový, v čase $t = 1$ v bode $[3 - 4\mathbf{i}]$, aký je polomer jeho dráhy a aká je jeho uhlová rýchlosť?

8. Bod, konajúci rovnomerný pohyb kruhový, nadobudne po uplynutí 1 sekundy rýchlosť, vyjadrenú vektorom $[\mathbf{0}]\ [\mathbf{Z}]$, kde $\mathbf{Z} = 1 - \mathbf{i}$. Vypočítajte polomer dráhy a uhlovú rýchlosť.

ARITMETIKA

PRE II. TRIEDU GYMNÁZIÍ

Vydalo Štátne nakladateľstvo v Bratislave, šéfredaktor Dr. Ján Slosiarik, výkonný redaktor Elena Horná, technický redaktor Ján Homolka, číslo publikácie 186, plán. podskupina 20, náklad 6000 výtlačkov, plánov. hárkov 5,75, papier skupiny 222, formát 61 × 86, 70 g, vytlačila Svoboda, n. p., záv. 5/I v Brne, rukopis zadaný 14. II. 1951, vytlačené 30. IX. 1951, tlačené zo sadzby, typ písma garmond a petit Didot-monotype, sadzba všeobecnej dane 1 %, povolenie PIO číslo 8729/51-III/1, cena broš. Kčs 25·—.

Čkm. 770 Cena Kčs 25·—