Eduard Čech; a kol.
Matematika pro IV. třídu gymnasií

Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 133 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501388

MATEMATIKA

PRO IV. TŘÍDU GYMNASIÍ

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC, PRAHA

MATEMATIKA

PRO IV. TŘÍDU GYMNASIÍ

Dr EDUARD ČECH

se spolupracovníky

1951

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC

PRAHA

Úvodní poznámky.

Nová látka matematiky ve čtvrté třídě, zpracovaná v učebnici, skládá se ze dvou podstatně odlišných částí. V první části se pokračuje v samostatném a stále hlubším studiu nejjednodušších funkcí, ve druhé části se vykládají základy matematické statistiky.

Žák má být seznámen s pojmem funkce a s důležitými pojmy, které s tím souvisí (definiční obor, spojitost). Zvláštní pozornost věnujeme aplikacím jak matematickým, tak i fysikálním. Dále se studují vlastnosti kuželoseček, z goniometrických funkcí sinus, který je důležitý při harmonickém pohybu. Ve zvláštní kapitole se pojednává o lineární interpolaci.

Pojem derivace funkce se uvádí v těsnou souvislost se směrnicí tečny grafu. Soustavně se sleduje otázka geometrisace aritmetiky, takže pojem funkce i její graf a rovnice čáry se uvádějí v těsnou souvislost. Při tom se však žáku dá dosti příležitosti, aby se seznámil s methodou analytické geometrie a aby se naučil výsledky, početně odvozené, geometricky interpretovat; tomuto úkolu je věnována i řada cvičení, na nichž se má žák naučit dokazovat cestou analytické geometrie různé (třeba již známé) vlastnosti kuželoseček. Vyvarujeme se tradičnímu formalistnímu počítání s rovnicemi se zvláštními čísly bez náležité geometrické interpretace.

Všecky tři methody zkoumání geometrických útvarů, planimetrická, trigonometrická i analytická, které žák na gymnasiu poznal, se musí prolínat a vzájemně doplňovat. Žák má také nabýt zkušenosti, kdy je která methoda při zkoumání vlastností útvarů nejvhodnější, i když je předním úkolem IV. třídy studovat útvary analyticky. Nezapomeneme ani na to, že vzájemným srovnáváním jednotlivých method si žák opakuje poznatky z nižších tříd a že právě tímto způsobem vynikne řada geometrických a aritmetických vztahů a souvislostí. Jako v planimetrii bez Paschovy věty, tak i v analytické geometrii bez zevrubných diskusí výsledků byly by všecky závěry bezcenné. Jen touto cestou poučíme žáka o významu methody analytické geometrie a zároveň jej naučíme užívat kriticky výsledků, k nimž jsme při výpočtech dospěli.

V kapitole o matematické statistice, která je významnou aplikací matematiky, důležitou zvláště pro vědecký výzkum a technický rozvoj, budeme hlavně srovnávat jednotlivé výsledky statistických šetření a hledat vztahy mezi nimi. Tak pozná žák hlubší vztahy mezi jevy přírody, výrobního procesu a způsobů kontroly.

Po čtyřech letech studia matematiky si má žák odnášet do života jasné vědomí její logické struktury. Schopnost logicky usuzovat, kterou má žák nabýt studiem matematiky, přenese i na jiné problémy, které bude v životě řešit. To je jeden z nejdůležitějších přínosů a úkolů studia matematiky. Splněním tohoto výchovného úkolu vykoná vyučování matematice velmi mnoho pro výchovu socialistického člověka.

ROZVRH UČIVA

Září:	Pojem funkce Lineární celistvá funkce
Říjen:	Funkce $y = ax^2$ Lineární lomená funkce Funkce $y = \sin x$ Lineární interpolace Limita funkce
Listopad:	Derivace funkce Fysikální význam derivace Elipsa
Prosinec:	Hyperbola Elipsa nebo hyperbola a přímka
Leden:	Statistický soubor Třídění
Únor:	Soubor s hlediska jednoho znaku Střední hodnoty Výpočet aritmetického průměru Odchylky od středních hodnot Grafické znázornění kvantitativního znaku
Březen:	Indexní čísla Ukazatelé Příklady užití některých ukazatelů Časové řady
Duben — květen:	Opakování všeho učiva

I. FUNKCE A JEJICH GRAFY.

1. Pojem funkce.

Pokud nebude výslovně uveden opak, budeme se v této kapitole zabývati výlučně jen čísly *reálnými.*

Již ze střední školy znáte rozdělení veličin na **stálé (konstanty)** a **proměnné.** Ve vzorci $S = 4\pi r^2$, kde S znamená povrch koule, r poloměr koule, jsou 4, π, veličiny stálé, r, S jsou veličiny proměnné. Rovněž je vám známo, že veličiny proměnné dělíme na **nezávisle proměnné** a na **závisle proměnné.** V rovnici pro zákon dráhy volného pádu

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

pokládáme čas t za veličinu nezávisle proměnnou, dráhu s za veličinu závisle proměnnou; g je konstanta (je $g \doteq 981$ cm/sec^2). Říkáme, že veličina závisle proměnná je *funkcí* veličiny nezávisle proměnné. Slovo funkce znamená *pravidlo*, které každé hodnotě veličiny nezávisle proměnné přiřazuje určitou hodnotu veličiny závisle proměnné. Při tom nevylučujeme případ pravidla, které všem hodnotám nezávisle proměnné přiřazuje jedno a totéž číslo c jako hodnotu veličiny „závisle proměnné", která ovšem v tomto případě není „proměnná", nýbrž je konstantní. Při soustavném probírání funkcí je zvykem označovat nezávisle proměnnou písmenem x, závisle proměnnou písmenem y.

Mnohé funkce nejsou definovány pro všecky hodnoty nezávisle proměnné, nýbrž pouze pro některé hodnoty, které tvoří **obor funkce.** Na př. funkce

$$y = 2x + 3, \tag{1}$$

$$y = x^2 \tag{2}$$

jsou definovány pro všecky hodnoty nezávisle proměnné x, což neplatí o funkcích

$$y = \frac{1}{x}, \tag{3}$$

$$y = \sqrt{x}, \tag{4}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{5}$$

Funkce (3) je definována pro všecka x různá od nuly, funkce (4) pro všecka kladná x, a mimo to ještě pro $x = 0$, funkce (5) pouze pro všecka kladná x.

Často se vyskytují funkce definované v nějakém **intervalu.** Jsou-li a, b dvě různá čísla a je-li na př. $a < b$, potom tato dvě čísla určují jednak **uzavřený** interval, který se skládá z těch čísel x, pro která platí nerovnosti $a \leqq x \leqq b$, jednak **otevřený** interval, který se skládá z těch čísel x, pro která platí nerovnosti $a < x < b$. Na př. funkce

$$y = \sqrt{1-x^2} \tag{6}$$

je definována v uzavřeném intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$, funkce

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{7}$$

je definována v otevřeném intervalu $-1 < x < 1$. Na číselné ose je uzavřený interval $a \leqq x \leqq b$ znázorněn úsečkou, do které musíme počítati oba její krajní body; otevřený interval $a < x < b$ je znázorněn úsečkou bez krajních bodů neboli vnitřkem úsečky.

Intervaly, o kterých jsme právě mluvili, jsou **ohraničené** intervaly. Máme také neohraničené intervaly. Každé reálné číslo c určuje jednak dva neohraničené *uzavřené* intervaly, z nichž prvý se skládá z těch čísel x, pro která platí nerovnost $x \geqq c$, a druhý z těch x, pro která platí $x \leqq c$, jednak dva neohraničené *otevřené* intervaly, z nichž prvý se skládá z těch čísel x, pro která platí $x > c$, a druhý z těch x, pro která platí $x < c$.

Na číselné ose jsou neohraničené intervaly znázorněny polopřímkami, při čemž v případě uzavřeného intervalu musíme do polopřímky počítat také její počátek, kdežto geometrický obraz neohraničeného otevřeného intervalu je polopřímka bez počátku. Obor funkce (4) je uzavřený interval $x \geqq 0$, obor funkce (5) je otevřený interval $x > 0$; obor funkce (3) se skládá ze dvou otevřených intervalů: $x > 0$, $x < 0$.

Některá funkce *nabývá* všech reálných hodnot, jako na př. funkce (1), která nabývá hodnoty y pro $x = \frac{y-3}{2}$. Často však funkce nabývá pouze některých reálných hodnot, které obyčejně tvoří nějaký interval. Hodnoty funkce (2) tvoří interval $y \geqq 0$; totéž platí o funkci (4); hodnoty funkce (5) tvoří interval $y > 0$. Hodnoty, kterých nabude funkce (3), tvoří dva intervaly: $y > 0, y < 0$. Hodnoty funkce (6) tvoří interval $0 \leqq y \leqq 1$, hodnoty funkce (7) tvoří interval $y \geqq 1$.

Některé funkce nabývají každé své hodnoty jenom jednou, t. j. mají tu vlastnost, že změníme-li hodnotu nezávisle proměnné x, změní se také příslušná hodnota funkce. Takové funkce se jmenují **prosté**. Mezi našimi příklady pouze (1), (3), (4), (5) jsou funkce prosté. Naproti tomu funkce (2) nabude sice hodnoty 0 pouze jednou (pro $x = 0$), ale každé kladné hodnoty y nabude dvakrát: pro $x = \sqrt{y}$ a pro $x = -\sqrt{y}$; záporných hodnot, jak jsme již uvedli, nenabývá vůbec. Podobně funkce (6) nabude hodnoty $y = 1$ jednou (pro $x = 0$), každé jiné hodnoty buďto nabude dvakrát nebo ji nenabude vůbec; totéž platí o funkci (7). Jsou také funkce, které každé své hodnoty nabudou nekonečně mnohokrát. Takové jsou zejména pro všecka x definované funkce

$$y = \sin x, \tag{8}$$

$$y = \cos x. \tag{9}$$

Hodnoty, kterých nabývá kterákoli z obou funkcí (8), (9), tvoří interval $-1 \leqq y \leqq 1$. O každé z těchto funkcí platí, že jestliže pro určité $x = a$ nabývá určité hodnoty $y = b$ (při čemž musí býti $-1 \leqq b \leqq 1$), nabývá funkce téže hodnoty $y = b$ mimo jiné také pro

$$x = a + 2\pi, \quad x = a + 4\pi, \quad x = a + 6\pi, \ldots,$$

$$x = a - 2\pi, \quad x = a - 4\pi, \quad x = a - 6\pi, \ldots;$$

obecně pro $x = a + 2k\pi$, kde k probíhá všecka čísla celá (kladná, záporná nebo nulu).

Mezi prosté funkce patří zejména **rostoucí a klesající** funkce (v. učebnici pro 3. třídu, str. 110). U rostoucí funkce větší hodnotě nezávisle proměnné odpovídá větší hodnota funkce, u klesající funkce větší hodnotě nezávisle proměnné odpovídá menší hodnota funkce. Funkce (1) a (4) jsou rostoucí funkce, funkce (5) je klesající funkce. Mezi ostatními našimi příklady už není žádná rostoucí ani klesající funkce.

Velmi často je užitečné *omeziti obor* funkce, t. j. nezkoumati hodnoty funkce pro *všecky* hodnoty nezávisle proměnné x, pro které je funkce definována, nýbrž pouze pro *některé* z nich. Nejčastěji omezujeme obor funkce na nějaký interval. Na př. i když funkce v celém svém oboru není ani rostoucí ani klesající, dá se velmi často obor funkce rozdělit na několik intervalů tak, že v každém z nich funkce buďto je rostoucí nebo klesající. Na př. funkce (2) je rostoucí funkce pro $x \geqq 0$, klesající pro $x \leqq 0$. Funkce (3) definovaná v intervalech $x > 0$, $x < 0$, není v celém svém oboru ani rostoucí ani klesající funkce, ale je to klesající funkce v intervalu $x > 0$ a také v intervalu $x < 0$. Funkce (6), definovaná pro $-1 \leqq x \leqq 1$, je klesající funkce v intervalu $0 \leqq x \leqq 1$, a je to rostoucí funkce v intervalu $-1 \leqq x \leqq 0$. Funkce (7), definovaná pro $-1 < x < 1$, je rostoucí funkce v intervalu $0 \leqq x < 1$ a je to klesající funkce v intervalu $-1 < x \leqq 0$.

Ve všech našich příkladech šlo o funkce definované jednoduchým početním pravidlem. V přírodních vědách jsou důležité **empirické** funkce (slovo empirie je řeckého původu a znamená zkušenost). Přírodovědec pozoruje určitý přírodní zjev a zapisuje pozorování; na př. můžeme měřit teplotu vzduchu a zkoumat její závislost na době (nezávisle proměnná čas, závislé proměnná teplota); to je jednoduchý příklad empirické funkce. Matematicky je tato empirická funkce jako většina jiných empirických funkcí nesmírně složitá a nedá se přesně vyjádřit vůbec žádným matematickým pravidlem. Přesto je velmi často možné udat matematicky jednoduchou funkci, která studované empirické funkci není sice přesně rovna, ale blíží se jí s prakticky dostatečnou přesností, zejména tehdy, jestliže nezávisle proměnnou omezíme na nepříliš velký interval. V následujícím budeme studovat pouze matematicky jednoduché funkce.

Cvičení.

1. Určete, pro které hodnoty nezávisle proměnné x je definována funkce:

a) $y = (3x - 2)^2 - 4$; b) $y = \sqrt[3]{x}$; c) $y = \sqrt[3]{x^2}$; d) $y = \sqrt[4]{x}$; e) $y = \sqrt[4]{x^2}$; f) $y = \sqrt{x}$; g) $y = x^{\frac{1}{n}}$, kde n je přirozené číslo; h) $y = x^{-\frac{1}{n}}$, kde n je přirozené číslo; i) $y = a^x$, kde $a > 0$; j) $y = \log x$; k) $y = \sin x$; l) $y = \operatorname{cotg} x$; m) $y = \frac{1}{\sin x}$; n) $y = \sqrt{5 - 2x}$; o) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$; p) $y = 1 - \log x$; q) $y = \log(x - 6)$; r) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$; s) $y = \frac{2x}{2 + 3x - x^2}$; t) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; u) $= y\sqrt{x^2 + 2x + 2}$; v) $y = \sqrt{6x - (x^2 + 11)}$; z) $y = \log(x^2 - 2ax - 3a^2)$, kde $a > 0$.

2. Uvažujte všechny pravoúhlé trojúhelníky o přeponě $\overline{AB} = c$, kde c je daná hodnota a označte $\sphericalangle A = \alpha$ a příslušnou protilehlou odvěsnu x. Potom poměr $\frac{x}{c}$ definuje vám dobře známou funkci.

a) Zapište tuto funkci užitím hodnot x, c, při čemž je x nezávisle proměnná; udejte příslušný obor této nezávisle proměnné, jakož i meze, ve kterých leží příslušné hodnoty funkce.

b) Zapište tuto funkci tak, aby bylo patrné, že úhel α je nezávisle proměnnou a udejte obor této nezávisle proměnné vzhledem k tomu, že se jedná o úhel pravoúhlého trojúhelníka.

c) Je vám známo, že tato funkce se dá definovat ještě jinak, takže nezávisle proměnná α může nabývat kterékoli reálné hodnoty. Jak vysvětlíte tuto zdánlivou nesrovnalost vzhledem k rozsahu oboru nezávisle proměnné α ve cvičení 2b?

3. Do koule o daném poloměru r je vepsán rotační válec. Vyjádřete objem V válce jako funkci jeho výšky x. a) V kterém oboru nezávisle proměnné x je definován objem V? b) V kterém intervalu nezávisle proměnné x je definována funkce V, kterou jste tak obdrželi?

4. Do koule o daném poloměru r je vepsán rotační kužel. Vyjádřete jeho plášť S jako funkci jeho strany s. Ve kterém intervalu nezávisle proměnné s: a) je definován plášť S; b) je definována funkce S, kterou jste ve cvič. a) obdrželi?

5. Kouli o daném poloměru r je opsán rotační kužel; budiž x poloměr jeho podstavy, v jeho výška a V jeho objem. a) Vyjádřete hodnoty v, V jako funkce nezávisle proměnné x; rozhodněte, pro která x jsou tyto funkce definovány a pro která x mají v naší úloze význam. b) Vyjádřete V jako funkci výšky v a proveďte podobnou diskusi jako ve cvič. a).

6. Pro která x jsou definovány dále uvedené funkce? Dokažte, že pro hodnoty x, $-x$ nabývají stejných funkčních hodnot, t. j. platí $f(-x) = f(x)$ (t. zv. funkce sudé):

a) $y = 3 - x^2$; b) $y = \sqrt{1 - x^2}$; c) $y = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, kde $a > 0$;
d) $y = \log(3x^2 - 4)$; e) $y = \cos x$; f) $y = 2 - 3\cos x$; g) $y = 2 - \sin^2 x$.

Vysvětlete, proč graf takové funkce má souřadnicovou osu y za osu souměrnosti. (Všimněte si bodů $[x; f(x)]$, $[-x; f(-x)]$.)

7. Pro která x jsou definovány dále uvedené funkce? Dokažte, že platí $f(-x) = -f(x)$ (t. zv. funkce liché):

a) $y = -bx$; b) $y = 2x^3$; c) $y = x - x^3$; d) $y = 2\sin x$; e) $y = -\operatorname{tg} x$;
f) $y = \sqrt[3]{x}$; g) $y = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$, kde $a > 0$.

Grafy těchto funkcí mají bod $P \equiv [0; 0]$ za střed souměrnosti. (Všimněte si bodů $[x; f(x)]$, $[-x; f(-x)]$.)

8. Které z těchto funkcí jsou prosté:

a) $y = 3x - 7$; b) $y = 6$; c) $y = -5\sqrt{x}$; d) $y = -\sqrt[3]{x}$; e) $y = 5\log x + 2$;
f) $y = x^3 - 2$; g) $y = 3 - x^2$; h) $y = 3 \cdot \cos 2x$; i) $y = -\frac{1}{x^2}$; j) $y = 4 \cdot 10^x$.

U funkcí, které nejsou prosté, uveďte číselné hodnoty x, y, které potvrzují správnost vašeho úsudku.

9. Které z dále uvedených funkcí jsou: (1) stále rostoucí, (2) stále klesající?

a) $y = -x$; b) $y = \frac{3}{2}x - 5$; c) $y = -4\sqrt{x}$; d) $y = -2 \cdot \sqrt[3]{x}$; e) $y = -5\log x$; f) $y = -10^x$.

10. Mezi funkcemi ze cvičení 1 vyhledejte funkci, která:

a) je v celém svém oboru rostoucí; b) je v celém svém oboru klesající; c) není ani stále rostoucí ani stále klesající (vysvětlete).

11. Udejte meze, ve kterých leží funkční hodnoty funkce:

a) $y = x^2 - 5$; b) $y = 8 - 2x^2$; c) $y = 4\sin x$; d) $y = -2\cos x + 2$; e) $y = \cos^2 x - 1$; f) $y = -\sin 2x + 1$; g) $y = 10 - 10^x$; h) $y = 5 - \log x$.

12. Je dána funkce: a) $y = 6 - 5x^2$; b) $y = 5\sin^2 x$; c) $y = -3\cos 3x$; d) $y = -\frac{5}{4}\operatorname{tg}(-x)$.

Jestliže daná funkce pro hodnotu a nezávisle proměnné x nabývá hodnoty $y = b$, určete jinou hodnotu nezávisle proměnné x, pro niž daná funkce nabývá zase hodnoty $y = b$.

Určete meze pro hodnotu b.

13. Pokud je to možné, rozdělte obor dané funkce na takové intervaly, aby v nich byla dána funkce (1) buď rostoucí nebo (2) klesající nebo (3) konstantní.

a) $y = 4x^2 - 9$; b) $y = -9 + 12x - 4x^2$; c) $y = 3x$; d) $y = -4\cos x$; e) $y = -3\operatorname{cotg} x$; f) $y = |x|$; g) $y = |x| - |x|$; h) $y = |x| + |x + 1|$.

14. Předchozí cvičení 13 opakujte pro tyto funkce:

a) $y = x^2 - 9$; b) $y = 9 - x^2$; c) $y = |x^2 - 9|$. Načrtněte grafy všech tří funkcí.

2. Lineární celistvá funkce.

Pojem funkce, jak jsme o něm mluvili v předcházejícím článku, je *aritmetický* pojem. Studium funkcí se však velmi podstatně ulehčí *geometrickými* úvahami; již v předcházejících třídách jsme měli příležitost k tomu, abychom si uvědomili souvislost aritmetiky s geometrií. Slavný sovětský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov (nar. 1903) prohlásil kdysi, že nejcharakterističtějším rysem matematiky 20. století je její *geometrisace*; co se tím míní, o tom si lze nejsnáze učiniti dobrý obraz právě v nauce o funkcích. Geometrisace nauky o funkcích spočívá mimo jiné v tom, že každou funkci y nezávisle proměnné x studujeme pomocí jejího grafu. **Graf** funkce se skládá ze všech bodů $[x; y]$, jejichž první souřadnice x probíhá obor funkce a jejichž druhá souřadnice y je vždy hodnotou funkce příslušnou hodnotě x nezávisle proměnné. Graf funkce je čára, kterou každá rovnoběžka s osou y protíná nejvýš v jednom bodě; neboť všecky body na přímce p rovnoběžné s osou y mají společnou první souřadnici $x = a$; jestliže číslo a nepatří do oboru funkce, pak přímka p nemá s grafem vůbec žádný společný bod, a jestliže číslo a patří do oboru funkce, má přímka p s grafem společný jediný bod $[a; b]$, kde číslo b je hodnota funkce příslušná hodnotě a nezávisle proměnné.

S geometrického stanoviska se jeví funkce tím jednodušší, čím jednodušší je její graf. Za nejjednodušší můžeme považovat ty funkce, jejichž graf je přímka. Přímka rovnoběžná s osou y není grafem žádné funkce; každá jiná přímka, jak je nám známo z III. třídy, je grafem **lineární celistvé funkce**, která má tvar

$$y = ax + b, \tag{1}$$

kde a, b jsou konstanty. Víme, že číslo a je směrnice přímky a číslo b je určeno tím, že bod $[0; b]$ je průsečík přímky s osou y. Je-li $a = 0$, je přímka rovnoběžná s osou x a funkce (1) je konstanta; konstanty se někdy nepočítají mezi lineární celistvé funkce.

Je-li $a > 0$, je (1) *rostoucí* funkce, tedy většímu x odpovídá větší y, menšímu x odpovídá menší y; je-li $a < 0$, je (1) *klesající* funkce, tedy většímu x odpovídá menší y, menšímu x odpovídá větší y. To je patrné ze vzorce

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a, \tag{2}$$

ve kterém x_1, x_2 jsou dvě různá čísla a y_1, y_2 jsou hodnoty funkce (1) v těchto číslech. Velikost čísla $|a|$ charakterisuje prudkost vzrůstu nebo poklesu funkce (1); je-li číslo $|a|$ malé, pak funkce (1) roste nebo klesá jen pomalu, je-li číslo $|a|$ velké, pak funkce (1) roste nebo klesá rychle. Protože a je konstanta, je prudkost vzrůstu nebo poklesu lineární funkce na všech místech stejná.

Máme-li jakoukoli jinou *rostoucí* funkci (tedy ne lineární celistvou funkci), je zase podíl

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

jistě kladný, ale není už konstantní; prudkost vzrůstu nebude na všech místech stejná. Podobně u *klesající* funkce podíl (3) je jistě záporný, ale zase není konstantní; prudkost poklesu není na všech místech stejná.

V tomto článku jsme si pouze stručně zopakovali to, co jsme probírali důkladně ve III. třídě; bylo toho třeba proto, že jiné funkce studujeme především tak, že je porovnáme s lineárními funkcemi.

Cvičení.

15. Napište lineární funkci, jejíž poměr přírůstků je roven danému číslu k a která hodnotě x_1 nezávisle proměnné přiřazuje funkční hodnotu y_1. Řešte pro tyto hodnoty:

a) $x_1 = 2$; $y_1 = -3$; $k = \frac{3}{4}$; b) $x_1 = -1$; $y_1 = -5$; $k = -\frac{3}{2}$; c) $x_1 = y_1 = -4$; $k = 0$.

16. Načrtněte graf dané funkce a rozhodněte i výpočtem, ve kterých intervalech je poměr přírůstků této funkce konstantní: a) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$; b) $y = \frac{1}{2}(|x| - x)$; c) $y = \frac{|x|}{x}$, při čemž definujeme, že pro $x = 0$ je $y = 0$; d) $y = 1 - |x|$.

Dále vyhledejte takovou dvojici čísel x_1, x_2, aby příslušný poměr přírůstků $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ měl předepsanou hodnotu k. Ve kterých případech má tato úloha řešení a ve kterém intervalu musí ležet číslo k? Úlohu řešte také graficky.

17. Daná funkce přiřazuje dané hodnotě x_1 určitou funkční hodnotu y_1; poměr přírůstků funkce $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ je roven danému číslu k pro každou dvojici x, y. Dokažte, že tato funkce je lineární.

18. Buďtež a, b, r libovolně volitelná reálná čísla. Jestliže potom funkce $y = f(x)$ splňuje tyto dvě podmínky:

$$(1)\ f(a) + f(b) = f(a + b);\ (2)\ f(r \cdot a) = r \cdot f(a),$$

pak rovnice funkce zní $y = k \cdot x$, kde k je určitá konstanta. [Platí: $f(x) + f(-x) = f(0)$; $f(-x) = -1 \cdot f(x)$, t. j. $f(0) = 0$. Dále je $f(x) = f(1 \cdot x) = x \cdot f(1)$: položte $f(1) = k$ a máte $f(x) = kx$. Tyto vlastnosti má na př. funkce arkus.]

3. Funkce $y = ax^2$.

Také funkci

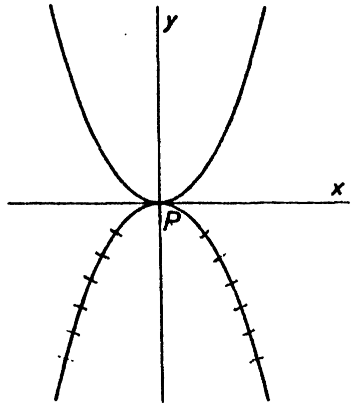
$$y = ax^2, \tag{1}$$

kde $a \neq 0$ je konstanta, jsme studovali již ve III. třídě. Víme, že graf funkce (1) je parabola, jejíž osou je osa y, kdežto osa x je její vrcholovou tečnou. Ohnisko $F \equiv \left[0; \frac{1}{4a}\right]$ leží na ose y a řídicí přímka d je rovnoběžná s osou x a má rovnici

$$y = -\frac{1}{4a}.$$

Jestliže dvě volby konstanty a se liší pouze znamením (obr. 1), pak pro každou hodnotu nezávisle proměnné x se liší obě hodnoty y také pouze znamením a obě paraboly jsou navzájem souměrné podle osy x. *V následujícím se omezíme na případ kladného* a; parabola (1) leží tedy nad osou x.

Zvolme dvě různé hodnoty x_1, x_2 nezávisle proměnné x a označme y_1, y_2 příslušné hodnoty funkce (1).



Obr. 1.

Potom je

$$y_2 - y_1 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_1 + x_2)(x_2 - x_1),$$

tedy

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2). \qquad (2)$$

Body $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ jsou dva různé body grafu funkce (1) a číslo (2) je směrnice přímky A_1A_2. Tato směrnice je závislá na volbě obou čísel x_1, x_2 neboli na volbě obou bodů A_1, A_2 na parabole. Vyměníme-li pořadí bodů A_1, A_2, zůstane podíl (2) nezměněn (směrnice přímky je nezávislá na jejím smyslu).

Omezíme-li se na interval $x \geqq 0$, je podíl (2) kladný: funkce (1) roste v intervalu $x \geqq 0$. Omezíme-li se na interval $x \leqq 0$, je podíl (2) záporný: funkce (1) klesá v intervalu $x \leqq 0$.

Jestliže jedno z obou čísel x_1, x_2 se zvětší a druhé zůstane beze změny nebo jestliže se obě čísla x_1, x_2 zvětší, podíl (2) se zvětší. Jinak řečeno, směrnice přímky A_1A_2 se zvětší, jestliže jeden z obou bodů A_1, A_2 se na parabole posune zleva napravo nebo se takto posunou oba. Naproti tomu se směrnice přímky A_1A_2 zmenší, jestliže jeden z bodů A_1, A_2 (nebo dva) se na parabole posune zprava doleva.

Z právě vyložené vlastnosti podílu (2) plynou zajímavé důsledky, které jsou velmi důležité proto, že se jich dá užít nejen na parabolu, nýbrž vůbec na graf kterékoli funkce, je-li jen splněna ta vlastnost, že podíl $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se zvětší, zvětšíme-li buďto x_1 nebo x_2. Zvolme na parabole dva různé body $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ a zkoumejme, jakou polohu mají vzhledem k parabole ostatní body přímky A_1A_2. Libovolné volbě čísla $x \neq x_1$, $x \neq x_2$ odpovídá (obr. 2) na parabole bod $M \equiv [x; y]$, na přímce A_1A_2 bod $M^* \equiv [x; y^*]$.

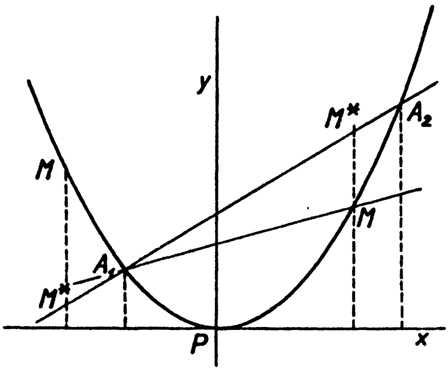
Je-li k směrnice přímky A_1A_2, jest $y^* - y_1 = k(x - x_1)$; je-li m směrnice přímky A_1M, jest $y - y_1 = m(x - x_1)$: tedy

$$y^* - y = (k - m)(x - x_1). \tag{3}$$

Podle předchozího jest

$$m > k, \quad \text{jestliže} \quad x > x_2; \tag{4}$$

$$m < k, \quad \text{jestliže} \quad x < x_2. \tag{4'}$$



Obr. 2.

Budiž nyní nejprve M^* vnitřní bod úsečky A_1A_2, takže $x_1 < x < x_2$. Potom je $x - x_1 > 0$ a mimo to podle (4′) je $k - m > 0$, takže podle (3) je $y^* - y > 0$ neboli $y^* > y$, t. j. bod M^* leží nad bodem M. Jestliže však M^* leží na prodloužení úsečky A_1A_2, je buďto $x > x_2$ (tedy též $x > x_1$) nebo je $x < x_1$ (tedy též $x < x_2$). V prvém případě podle (4) je $k - m < 0$ a mimo to je $x - x_1 > 0$, takže podle (3) je $y^* - y < 0$; ve druhém případě podle (4′) je $k - m > 0$ a mimo to je $x - x_1 < 0$, takže podle (3) je opět $y^* - y < 0$ neboli $y^* < y$, t. j. bod M^* leží pod bodem M.

Tedy: **Jestliže funkce y proměnné x má tu vlastnost, že podíl**

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

se zvětší, zvětšíme-li x_1 nebo x_2, potom, spojíme-li dva body $A_1 \equiv [x_1, y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ grafu funkce přímkou, leží vnitřek úsečky A_1A_2 nad grafem funkce, a prodloužení úsečky A_1A_2 (ať za bod A_1 či za bod A_2) leží pod grafem funkce.

Zvolme si na naší parabole bod $A_1 \equiv [x_1; y_1]$ a veďme jím nějakou přímku p; ptáme se, zda tato přímka protne parabolu ještě v nějakém jiném bodě $A_2 \equiv [x_2; y_2]$. Jestliže přímka p je rovnoběžná s osou y (osou paraboly), má ovšem s parabolou společný pouze bod A_1. Jestliže přímka p není rovnoběžná s osou y, má určitou směrnici k, a podmínka, aby bod A_2 různý od A_1

ležel na naší parabole, plyne ze (2) a zní

$$k = a(x_1 + x_2).$$

Z této rovnice vypočteme

$$x_2 = \frac{k - ax_1}{a};$$

zpravidla druhý průsečík existuje, ale výjimečný je případ

$$k = 2ax_1, \tag{5}$$

v němž vyjde $x_2 = x_1$, takže v tomto případě druhý průsečík neexistuje. Tedy každá přímka vedená bodem A_1 na parabole, až na dvě výjimečné přímky, je sečnou paraboly, t. j. má s parabolou mimo bod A_1 ještě jeden další společný bod A_2. Výjimečné přímky, které mají s parabolou společný pouze bod A_1, jsou: jednak rovnoběžka s osou paraboly vedená bodem A_1, jednak tečna paraboly v bodě A_1, která má směrnici (5). Bod A_1 se jmenuje **bod dotyku** tečny. Mezi oběma výjimečnými případy je podstatný rozdíl, který poznáme, vedeme-li bodem A_1 sečnu, která má *přibližně* touž polohu jako jedna z obou výjimečných přímek. Je-li s směrnice sečny a je-li $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ její druhý průsečík s parabolou, máme

$$s = a(x_1 + x_2). \tag{6}$$

Jestliže předně sečna je blízká poloze rovnoběžné s osou paraboly, je číslo $|s|$ velmi veliké a proto také číslo $|x_2|$ je velmi veliké, tedy jestliže sečna vedená bodem A_1 se blíží poloze rovnoběžné s osou paraboly, potom její druhý průsečík s parabolou se vzdaluje do nekonečna. Jestliže však za druhé je sečna blízká tečně, je číslo $|s - k|$ velmi malé, podle (5) a (6) je však

$$s - k = a(x_2 - x_1),$$

takže také číslo $|x_2 - x_1|$ je malé; tedy jestliže sečna vedená bodem A_1 se blíží tečně v tomto bodě, potom její druhý průsečík s parabolou se blíží bodu A_1.

Cvičení.

19. Dokažte, že poměr přírůstků $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ funkce $y = ax^2$, kde je $a < 0$, se zmenší, když jednu nebo obě hodnoty x_1, x_2 zvětšíme.

20. Jsou-li $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ body grafu funkce o rovnici $y = ax^2$, kde $a < 0$, potom, spojíme-li body A_1, A_2 přímkou, leží vnitřek úsečky A_1A_2 pod grafem funkce a prodloužení úsečky A_1A_2 (ať za bod A_1 či za bod A_2) leží nad grafem funkce. Dokažte.

21. Vyšetřte grafy funkcí: a) $y = -2x^2 + 8x - 9$; b) $y = -2x^2 - 20x - 50$; c) $y = 3x^2 - 6$. (Určete vrchol, ohnisko, rovnice řídicí přímky a vrcholové tečny.)

22. Jsou dány tři dvojice hodnot: $x_1 = 0, y_1 = 4$; $x_2 = -2, y_2 = 18$; $x_3 = 3, y_3 = 18$. Určete koeficienty celistvé kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ tak, aby dané dvojice x, y funkci splňovaly.

23. Vhodnou volbou nového souřadnicového počátku $P' \equiv [m; n]$ uveďte rovnici $y = ax^2 + bx + c$ paraboly na tvar $y' = ax'^2$, kde x', y' jsou nové souřadnice; napište také rovnice mezi původními souřadnicemi x, y a novými souřadnicemi x', y'. Dále určete odtud, pro která různá x dostaneme touž hodnotu y. [Rovnici uveďte na tvar $y - n = a(x - m)^2$.]

24. Víte-li, že derivace funkce $y = ax^2$ v čísle x_1 je $2ax_1$, odvoďte užitím výsledku předchozího cvičení 23 derivaci funkce $y = ax^2 + bx + c$ v čísle x_1.

25. Víte-li, že derivace funkce $y = ax^2 + bx + c$ v čísle x_1 je $2ax_1 + b$, jak potom snadno určíte souřadnice vrcholu grafu dané funkce. (Co víte o tečně ve vrcholu paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou y?)

26. Určete průsečíky přímky r o rovnici $y = 2amx - am^2$, kde $a \neq 0$, m jsou dané konstanty, s parabolou o rovnici $y = ax^2$.

27. Budiž $H \equiv [x_1; y_1]$ bod paraboly o rovnici $y = ax^2$. Rovnice tečny t paraboly v bodě H zní $y + y_1 = 2axx_1$; dokažte.

28. Užitím výsledku předchozího cvičení 27 určete rovnice tečen, které lze vést daným bodem $R \equiv [x_0; y_0]$ k parabole o rovnici:
a) $4y = x^2$, při čemž $R \equiv [-1; -2]$; b) $24y = x^2$, při čemž $R \equiv [5; -6]$; c) $2py = x^2$, při čemž $R \equiv [x_0; -\frac{1}{2}p]$. Kde vzhledem ke křivce v tomto případě leží bod R a které úhly tvoří obě tečny? (Bod R leží na tečně, proto platí $y_0 + y_1 = 2x_0x_1$ a dále je $y_1 = ax_1^2$; řešením obou rovnic obdržíte souřadnice dotykového bodu $H = [x_1; y_1]$.)

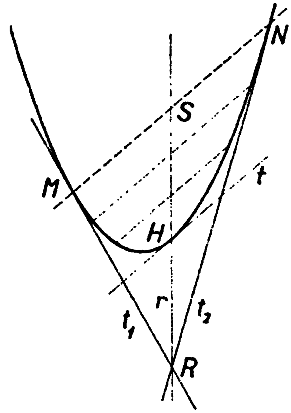
29. Je dána parabola o rovnici $y = ax^2$ (kde $a > 0$) a bod $M \equiv [x_0; y_0]$. Bodem M veďte přímku, která má s parabolou jediný společný bod. [Hledaná přímka má rovnici tvaru $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$. Bod M může vzhledem k parabole trojí polohu podle toho, je-li $y_0 \gtreqless ax_0^2$. Hledané přímky mohou mít odlišné geometrické vlastnosti.]

30. Dokažte: a) Středy S všech rovnoběžných tětiv MN o směrnici k paraboly o rovnici $y = ax^2$ leží na přímce $r \parallel y$; přímce r říkáme průměr sdružený se směrem tětiv MN (obr. 3). Určete rovnici tohoto průměru. b) Na průměru r leží také dotykový bod H tečny t, která je rovnoběžná s přímkou MN. c) Tečny t_1, t_2 v bodech M, N paraboly se protínají v bodě R na průměru r; přitom platí, $\overline{HR} = \overline{HS}$.

31. Který průměr paraboly o rovnici $6y = x^2$ půlí tětivy rovnoběžné s přímkou o rovnici $2x - y = 0$?

32. Které tětivy paraboly o rovnici $6y = x^2$ jsou půleny průměrem $x + 3 = 0$?

33. Budiž dán dutý úhel $\sphericalangle MRN$, kde M, N jsou určité body polopřímek RM, RN (obr. 3). Dokažte, že existuje jediná parabola, která se dotýká přímek RM, RN v bodech M, N; osa paraboly podle cvičení 30 je rovnoběžná s přímkou RS, kde S je střed úsečky MN. [Zvolte bod S za počátek souřadnic a volte $R \equiv [0; 2q]$, $M \equiv [x_1; y_1]$; určete koeficienty a, b, c v rovnici $y = ax^2 + bx + c$ pomocí hodnot $q \neq 0$, $x_1 \neq 0$, y_1. [Vysvětlete, proč tato volba není na újmu obecnosti úlohy.]



Obr 3.

34. Sečna $y = tx$ vedená vrcholem $P \equiv [0; 0]$ paraboly o rovnici $y = \dfrac{1}{h} x^2$ protne parabolu ještě v bodě $M \equiv [ht; ht^2]$, kde $h \neq 0$. Tak dospíváme k parametrickému vyjádření $x = ht, y = ht^2$ bodu $M \equiv [x; y]$ paraboly; označujme jej stručně bod (t). Každé hodnotě parametru t odpovídá jediný bod (t) paraboly a obráceně. Odvoďte tyto zajímavé výsledky:

a) Sečna $(t_1)(t_2)$ paraboly má rovnici

$$y = (t_1 + t_2)x - ht_1t_2.$$

b) Tečna v bodě (t) paraboly má rovnici $y = 2tx - ht^2$; její směrnice je $2t$. Všechny body tečny s výjimkou dotykového bodu leží vně paraboly.

c) Určete podmínku mezi hodnotami k, q, h, která musí být splněna, aby přímka $y = kx + q$ byla: (1) tečnou, (2) sečnou, (3) nesečnou dané paraboly.

d) Určete dotykový bod (t) tečny paraboly, jestliže je rovnoběžná s přímkou o rovnici $y = kx + q$.

e) Určete rovnici tečny paraboly, která prochází daným bodem $Q \equiv [x_0; y_0]$; úloha má dvě řešení, je-li bod Q vně paraboly (užijte výsledku cvičení b).

f) Středy rovnoběžných tětiv $(t_1)(t_2)$ paraboly leží na přímce s rovnoběžné s osou paraboly; přímka s protne parabolu v bodě, v němž je tečna rovnoběžná se směrem tětiv $(t_1)(t_2)$.

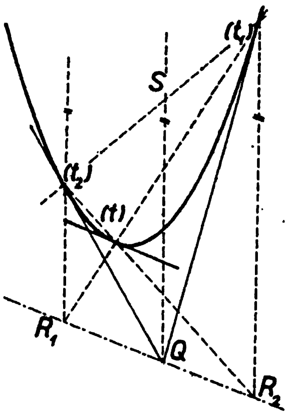
g) Průsečík tečen v bodech (t_1), (t_2) paraboly je bod $Q \equiv \left[\dfrac{h}{2}(t_1 + t_2); ht_1t_2\right]$.

Je-li S střed tětivy $(t_1)(t_2)$, udává přímka SQ směr osy paraboly.

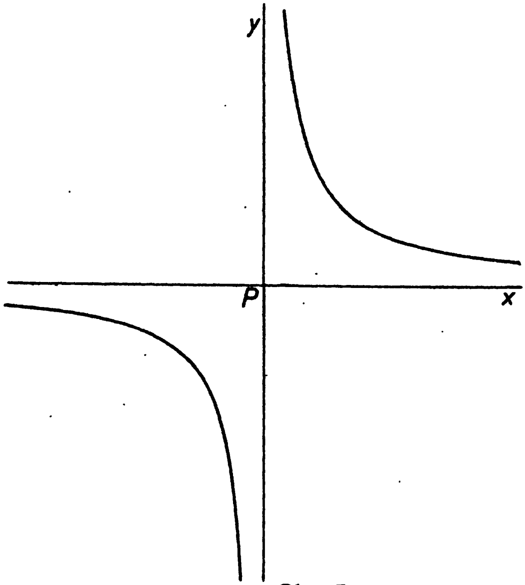
h) Dokažte, že dvě kolmé tečny paraboly se protnou v bodě Q, který leží na řídicí přímce (viz cvičení f).

i) Budiž Q bod ze cvičení g) (viz obr. 4) a budiž (t) jiný bod paraboly než body (t_1), (t_2). Určete souřadnice y bodů $R_1 \equiv [ht_2; y_1]$, $R_2 \equiv [ht_1; y_2]$, z nichž první leží na přímce $(t)(t_1)$ a druhý na přímce $(t)(t_2)$. Dokažte, že bod Q je střed úsečky R_1R_2, která je jedním ramenem lichoběžníka $(t_1)R_1R_2(t_2)$; při tom je tečna bodu (t) rovnoběžná s přímkou R_1R_2.

j) Odvoďte odtud konstrukci libovolného bodu (t) paraboly, která je určena tečnami $Q(t_1)$, $Q(t_2)$ a příslušnými dotykovými body (t_1), (t_2). Jak určíte vrchol P paraboly?



Obr. 4.



Obr. 5.

4. Lineární lomená funkce.

Ve výsledcích předcházejícího článku není mnoho nového proti výsledkům již známým ze III. třídy; probírali jsme je tak podrobně hlavně proto, že podobným způsobem se dají probírati mnohé jiné funkce. Počneme funkcí tvaru

$$y = \frac{a}{x}, \tag{1}$$

kde a je konstanta různá od nuly, kterou budeme prozatím předpokládati kladnou.

Graf funkce (1) je znázorněn v obr. 5. Je to zvláštní případ t. zv. **hyperboly**, kterou budeme obecně probírat až v článku 11, ale již nyní budeme graf funkce (1) nazývat **hyperbola.** Funkce (1) není definována pro $x = 0$, nýbrž pouze jednak pro $x > 0$, jednak pro $x < 0$. Proto graf funkce (1) se skládá ze dvou souvislých čar, které se jmenují **větve** hyperboly. Na jedné větvi je $x > 0$, $y > 0$, tuto větev nazveme horní; na druhé je $x < 0$, $y < 0$ a tuto větev nazveme dolní. Obě větve jsou [viz učebnici pro III. třídu, str. 85] navzájem souměrné podle středu $P \equiv [0; 0]$, který se proto jmenuje **střed** hyperboly.

Ani osa x ani osa y neobsahuje žádný bod hyperboly. Tyto dvě přímky jdou jejím středem a jsou **asymptoty** hyperboly; asymptotou čáry nazýváme přímku, která má tu vlastnost, že na čáře jsou body, které se vzdalují do nekonečna a jejichž vzdálenost od přímky se při tom blíží nule. Že skutečně osa x je asymptotou hyperboly, je zřejmé; neboť jestliže číslo $|x|$ je velmi veliké, pak podle (1) číslo $|y|$ je velmi malé, t. j. vzdálenost bodu $[x; y]$ od osy x je velmi malá. Také osa y je asymptotou hyperboly: jestliže číslo $|x|$ je velmi malé, je vzdálenost bodu $[x; y]$ od osy y velmi malá a při tom číslo $|y|$ je velmi veliké.

Zvolíme-li na hyperbole dva různé body $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$, jest

$$y_2 - y_1 = \frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1} = \frac{ax_1 - ax_2}{x_1 x_2},$$

tedy

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{x_1 x_2}. \tag{2}$$

Omezíme-li se na jednu větev hyperboly, mají obě čísla x_1, x_2 totéž znamení a podíl (2) je záporný; to znamená, že v každém z obou intervalů $x > 0$, $x < 0$ je (1) klesající funkce. Jestliže však každý z obou bodů A_1, A_2 leží na jiné větvi, je podíl (2) kladný; v celém svém oboru $x \neq 0$ není (1) klesající funkce.

Omezme se nyní na interval $x > 0$ a na příslušnou větev hyperboly. Ve (2) tedy obě čísla x_1, x_2 jsou kladná a proto také jejich součin je kladný. Jestliže některé z obou čísel x_1, x_2 se zvětší, zvětší se také jejich součin x_1x_2, t. j. zvětší se kladný jmenovatel zlomku $\frac{a}{x_1 x_2}$. Čitatel a je také kladný a zůstane beze změny; proto zlomek sám se *zmenší*. Jelikož však před zlomkem máme ve (2) znamení minus, výraz (2) se *zvětší*, zvětšíme-li x_1 nebo x_2. Tedy v intervalu $x > 0$ má podíl (2) tu vlastnost, že se zvětší, zvětšíme-li x_1 nebo x_2. Z této vlastnosti soudíme, jako ve článku 3, že zvolíme-li na horní větvi hyperboly dva různé body A_1, A_2, leží vnitřek úsečky A_1A_2 nad hyperbolou, kdežto prodloužení úsečky A_1A_2 (ať za bod A_1 či za bod A_2), pokud toto prodloužení je napravo od osy y, leží pod hyperbolou. Naproti tomu ta část přímky A_1A_2, která je nalevo od osy y, leží nad hyperbolou, neboť tato část leží nad osou x, což usoudíme snadno z toho, že směrnice (2) přímky A_1A_2 je záporná.

Jelikož obě větve hyperboly jsou navzájem souměrné podle středu P, nebudeme vyslovovat obdobnou větu o přímce spojující dva body A_1, A_2 na dolní větvi hyperboly.

Zvolme si nyní na hyperbole libovolný bod $A_1 \equiv [x_1; y_1]$ a veďme jím nějakou přímku p; podobně jako u paraboly si i zde předložme otázku, zda tato přímka protne hyperbolu ještě v nějakém jiném bodě $A_2 \equiv [x_2; y_2]$. Jestliže přímka p je rovnoběžná s některou osou soustavy souřadnic, snadno se dokáže, že má s hyperbolou společný pouze bod A_1. Jestliže přímka p není rovnoběžná s žádnou osou soustavy souřadnic, má určitou směrnici k, která je různá od nuly, a podmínka, aby bod A_2, různý od A_1 ležel na hyperbole, plyne ze (2) a zní

$$k = -\frac{a}{x_1 x_2}.$$

Z této rovnice vypočteme

$$x_2 = -\frac{a}{k x_1};$$

zpravidla druhý průsečík existuje, ale vyjimečný je případ

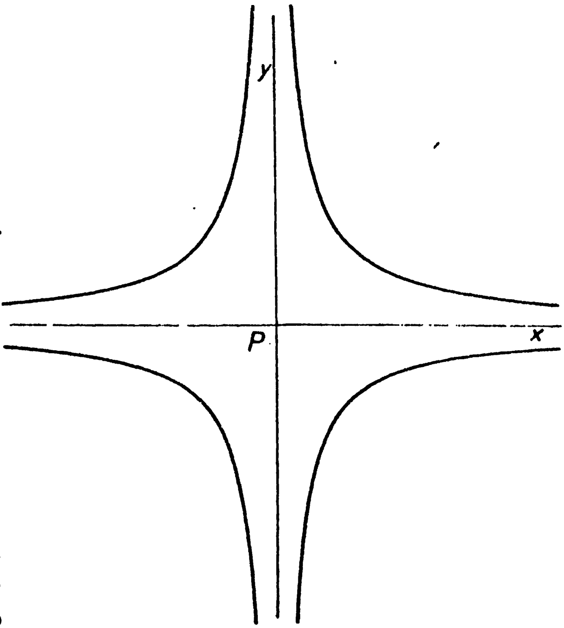
$$k = -\frac{a}{x_1^2}, \tag{3}$$

v němž vyjde $x_2 = x_1$, takže v tomto případě druhý průsečík neexistuje. Přímka vedená bodem $A_1 \equiv [x_1; y_1]$ na hyperbole, jejíž směrnice je (3), je **tečna** hyperboly v bodě A_1, který je jejím **bodem dotyku.** Tedy každá přímka vedená bodem A_1 na hyperbole, až na tři výjimečné případy, je sečnou hyperboly, t. j. má s hyperbolou mimo bod A_1 ještě jeden další společný bod. Výjimečné případy jsou jednak rovnoběžky s asymptotami vedené bodem A_1, jednak tečna hyperboly v bodě A_1. Mezi tečnou a oběma druhými výjimečnými případy je rozdíl obdobný tomu, který jsme zjistili u paraboly. Uvedeme pouze výsledek: Jestliže sečna vedená bodem A_1 se blíží poloze rovnoběžné s jednou z obou asymptot, potom její druhý průsečík s hyperbolou se vzdaluje do nekonečna. Jestliže však sečna vedená bodem A_1 se blíží tečně v tomto bodě, potom její druhý průsečík s hyperbolou se blíží bodu A_1.

Dosud jsme předpokládali, že číslo a v rovnici (1) je kladné. Není třeba, abychom se podrobně zabývali případem, že a je záporné. Neboť je-li a na př. kladné, je patrné [viz učebnici pro III. třídu, str. 85], že grafy obou funkcí

$$y = \frac{a}{x}, \quad y = \frac{-a}{x}$$

jsou navzájem souměrné jak podle osy x, tak i podle osy y, (obr. 6), takže všecky vlastnosti grafu jedné funkce se okamžitě přenesou na graf druhé funkce.



Obr. 6.

Funkce (1) je zvláštním případem funkce tvaru

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad (4)$$

kde a, b, c, d jsou konstanty. [Ze (4) obdržíme (1), volíme-li $a = 0$, $c = 1$, $d = 0$, kdežto $b \neq 0$.] Musíme předpokládat, že aspoň jedno z obou čísel c, d je různé od nuly, neboť jinak by jmenovatel ve (4) byl identicky roven nule a funkce (4) by nebyla definována pro žádnou hodnotu nezávisle proměnné x. Jestliže $c = 0$, je $d \neq 0$ a (4) zní

$$y = \frac{a}{d} \cdot x + \frac{b}{d};$$

je to lineární celistvá funkce a její graf je přímka. Budeme proto předpokládati, že $c \neq 0$. Funkce (4) se v tomto případě nazývá **lineární lomená funkce.** Místo abychom přímo studovali lineární lomenou funkci, dokážeme, že změnou počátku souřadnicové soustavy, která nemá vlivu na žádnou podstatnou vlastnost funkce, je možné funkci (4) převésti na tvar (1), jestliže vyloučíme jeden výjimečný případ. Napřed však poznamenejme, že funkce (4), ve které předpokládáme $c \neq 0$, není definována pro

$$x = -\frac{d}{c}, \tag{5}$$

neboť pro tuto hodnotu nezávisle proměnné jmenovatel ve (4) je roven nule; pro každou jinou hodnotu x je však $cx + d \neq 0$ a výraz (4) má určitý číselný smysl. Vzpomenutý výjimečný případ pozůstává v tom, že existuje taková konstanta k, že jsou splněny obě rovnice

$$a = kc, \qquad b = kd. \tag{6}$$

Platí-li (6), plyne ze (4), že

$$y = \frac{kcx + kd}{cx + d} = k,$$

pokud neplatí (5). Tedy ve výjimečném případě (6) funkce (4) nabývá konstantní hodnoty k, pokud je vůbec definována, t. j. pokud x nenabývá hodnoty (5).

Ze (6) plyne snadno, že

$$ad - bc = 0. \tag{7}$$

Obráceně, platí-li (7) a je-li $c \neq 0$, lze určit k tak, aby platilo (6). Neboť je-li $c \neq 0$, lze jistě určit k tak, aby bylo $a = kc$. Dosadíme-li tuto hodnotu a do (7), vyjde

$$c(kd - b) = 0 \quad \text{neboli} \quad b = kd,$$

t. j. platí (6).

Předpokládejme nyní, že nenastane výjimečný případ, že tedy

$$ad - bc \neq 0. \tag{8}$$

Provedeme-li změnu počátku tak, že novým počátkem bude bod $S \equiv [m; n]$, jsou [viz učebnici pro III. třídu, str. 88] nové souřadnice x', y' s původními souřadnicemi x, y spojeny vztahy

$$x' = x - m, \; y' = y - n \quad \text{neboli} \quad x = x' + m, \; y = y' + n.$$

Rovnice (4) nabude tvaru

$$y' + n = \frac{a(x' + m) + b}{c(x' + m) + d}$$

neboli

$$y' = \frac{(a - cn)x' + am + b - n(cm + d)}{cx' + (cm + d)}. \tag{9}$$

Ježto $c \neq 0$, můžeme určiti m, n tak, aby bylo:

$$a - cn = 0, \quad cm + d = 0;$$

stačí voliti

$$n = \frac{a}{c}, \quad m = -\frac{d}{c}. \tag{10}$$

Potom je

$$y' = \frac{am + b}{cx'}$$

a ježto podle (10)

$$am + b = -a\frac{d}{c} + b = -\frac{ad - bc}{c},$$

vyjde

$$y' = \frac{h}{x'},$$

kde

$$h = -\frac{ad - bc}{c^2} \neq 0. \tag{11}$$

Tedy za předpokladu (8) graf funkce (4) je hyperbola, jejíž střed je v bodě

$$\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$$

a jejíž asymptoty mají rovnice

$$x = -\frac{d}{c}, \quad y = \frac{a}{c}.$$

Cvičení.

35. Načrtněte graf funkce:

a) $y = \frac{2}{x}$; b) $y = -\frac{3}{2x}$ a určete druhou souřadnici bodu $[x_0; y_0]$, který na tomto grafu leží, když je dáno: (1) $x_0 = -1$; (2) $y_0 = -\frac{1}{2}$.

36. Načrtněte graf funkcí:

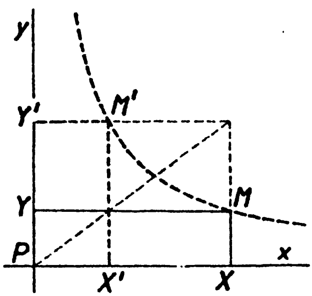
a) $y = \frac{12}{x}$; b) $y = -\frac{12}{x}$; c) $y = \frac{12}{|x|}$; d) $y = \frac{12}{x} + 3$ (to je součet dvou známých funkcí; kterých?); e) $y = \frac{12}{x} - 2$. Srovnejte výsledky!

37. Je dána hyperbola o rovnici $y = -\frac{4}{x}$. Určete interval nezávisle proměnné x, v němž body $M \equiv [x; y]$ dané hyperboly nemají a) od osy x, b) od osy y větší vzdálenost než je 0,7.

38. Hyperbola o rovnici $y = \dfrac{a}{x}$ má dvě osy souměrnosti; jejich rovnice jsou $y - x = 0$, $y + x = 0$. Dokažte. Který bod je proto jejím středem souměrnosti? [V souměrnosti podle osy o rovnici $y - x = 0$ je bod $[y; x]$ obrazem bodu $[x; y]$ atd.]

39. a) Obě hyperboly h, h' o rovnicích $y = \dfrac{a}{x}$, $y' = \dfrac{a'}{x'}$, kde čísla a, a' jsou týchž znamének, jsou dvojím způsobem stejnolehlé vzhledem ke středu stejnolehlosti $P \equiv [0; 0]$. Určete koeficient c stejnolehlosti. [Má platit $x' = cx$, $y' = cy$.]
b) Jsou-li čísla a, a' ze cvičení a) opačných znamének, lze od jedné hyperboly přejít ke druhé tak, že nejprve určíme hyperbolu h_0, která je obrazem hyperboly h v souměrnosti o ose x nebo y a pak provedeme vhodnou stejnolehlost (P, c) jako ve cvičení a). Proveďte.

40. Body $P \equiv [0; 0]$, $X \equiv [x; 0]$, $Y \equiv [0; y]$, $M \equiv [x; y]$ určují obdélník $PXMY$.



Obr. 7.

a) Určete rovnici čáry, na které leží vrcholy M takových obdélníků $PXMY$, které leží v I. kvadrantu roviny souřadnic, jestliže obsahy všech těchto obdélníků mají velikost S.
b) Předchozího výsledku užijte ke konstrukci bodů větve hyperboly, která má osy x, y za asymptoty a která prochází daným bodem M (viz obr. 7; volte bod X').
c) Konstrukci ze cvičení b) proveďte tak, aby $\overline{PX'} = \overline{PY'}$.

41. Napište rovnici tečny t hyperboly o rovnici $y = \dfrac{a}{x}$ v jejím bodě $H = [x_0; y_0]$. Dokažte pak, že obsah pravoúhlého trojúhelníka určeného přímkami x, y, t je konstantní a že bod H leží ve středu jeho přepony.

42. Výsledku předchozího cvičení 41 užijte ke konstrukci bodů a tečen hyperboly, která je dána asymptotami $x \perp y$; a a) bodem M, b) tečnou t (jak zvolíte tuto tečnu?).

43. Napište rovnici hyperboly, která má souřadnicové osy x, y za asymptoty a která se dotýká přímky o rovnici:
a) $9x - 4y + 72 = 0$; b) $4x + 9y + 72 = 0$; c) $y = kx + q$, kde $k \neq 0$, $q \neq 0$, d) $ux + vy = 1$; co předpokládáte o konstantách u, v?

44. Hyperbola h má rovnici $y = \dfrac{a}{x}$ a přímka r rovnici $y = kx$. Potom lze na hyperbole h určit právě dva body M_1, M_2 takové, že tečny t_1, t_2 v bodech M_1, M_2 jsou rovnoběžné s přímkou r; za kterého předpokladu je toto tvrzení správné?

45. Daným bodem $R \equiv [x_1; y_1]$ veďte přímku, která hyperbolu h o rovnici $y = \dfrac{a}{x}$ protíná v jediném bodě. [Rovnice hledané přímky je $u(x - x_1) + v(y - y_1) = 0$; hledejte průsečíky přímky s hyperbolou a volte u, v tak, aby vyšel jediný průsečík. Kdy má úloha čtyři, kdy tři a kdy dvě řešení; jaký je rozdíl mezi řešeními?]

46. Hyperbola o rovnici $y = \dfrac{a}{x}$ má své body v I. a III. kvadrantu. Buďtež $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ dva body na té větvi hyperboly, pro kterou platí $x < 0$.

a) Jak se změní poměr přírůstků $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1}$, když jeden nebo oba body A_1, A_2 se po hyperbole posunou zleva doprava? Leží tedy vnitřek úsečky A_1A_2 pod nebo nad hyperbolou?

b) Přímka A_1A_2 vytíná dvě opačné poloroviny ϱ_1, ϱ_2; při tom je ϱ_1 ta polorovina, ve které leží ty body dané hyperboly, které leží nad úsečkou A_1A_2. Ve které z obou polorovin ϱ_1, ϱ_2 leží druhá větev hyperboly (t. j. pro niž je $x > 0$)?

47. Určete graf funkce $y = \dfrac{1 - 2x}{4x - 2}$ a dokažte, že je to přímka s vyloučením určitého jejího bodu; kterého?

48. Určete graf dané lomené lineární funkce; vyšetřte střed S a asymptoty grafu:

a) $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$; b) $y = \dfrac{2x - 5}{x - 3}$; c) $y = \dfrac{6x - 7}{4x - 2}$; d) $y = \dfrac{6x - 4}{6 - 9x}$.

Předem vždy rozhodněte, zda se nejedná o výjimečný případ (viz vztah (8) v textu). (Při výpočtu lze také postupovat tak, že funkci upravíme na tvar $y - n = \dfrac{a}{x - m}$, takže při počátku $P' \equiv [m; n]$ souřadnic má graf funkce rovnici $y' = \dfrac{a}{x'}$.

Tak v případě funkce $y = \dfrac{2x - 3}{3x - 1}$ lze psát $\dfrac{2x - 3}{3x - 1} = \dfrac{\frac{2}{3}(x - \frac{1}{3}) - \frac{7}{9}}{x - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} - \dfrac{\frac{7}{9}}{x - \frac{1}{3}}$ a tedy $y - \frac{2}{3} = \dfrac{-\frac{7}{9}}{x - \frac{1}{3}}$; odtud střed příslušné hyperboly je $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, $a = -\frac{7}{9}$.)

49. Součet funkcí $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ a $y = e$, kde a, b, c, d, e jsou reálné konstanty, je opět lineární lomená funkce; je-li $ad - bc \neq 0$, je grafem první i výsledné funkce hyperbola. V jakém vztahu jsou tyto hyperboly?

50. Zobrazte funkce: a) $y = \left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right|$; b) $y = \dfrac{|x - 1|}{x + 1}$.

51. K hodnotám $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ nezávisle proměnné příslušejí po řadě funkční hodnoty $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 2$. Je možné určit lomenou lineární funkci, která by hodnotám x_1, x_2, x_3 přiřazovala funkční hodnoty y_1, y_2, y_3? [Dané hodnoty dosaďte do rovnice (4) v textu; při tom zlomek vpravo můžete krátit číslem $c \neq 0$. Proč?]

52. Derivace funkce $y = \frac{m}{x}$ je $k = -\frac{m}{x^2}$. Protože se směrnice tečny příslušné hyperboly nezmění při nové volbě počátku souřadnic, můžete určit i derivaci funkce $y = \frac{ax + b}{cx + d}$; proveďte!

5. Funkce $y = \sin x$.

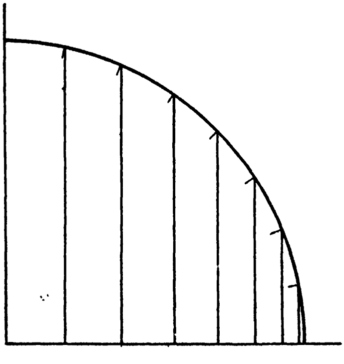
Funkce

$$y = \sin x \tag{1}$$

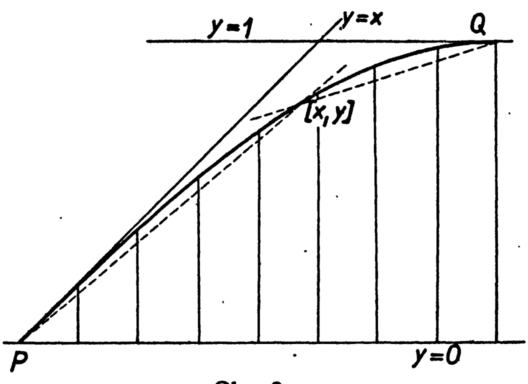
je velmi důležitá ve fysice. Graf funkce (1) se nazývá **sinusoida.** Poznamenejme, že číslo $\sin x$ znamená sinus úhlu, jehož velikost je v obloukové míře vyjádřena číslem x.

Zobrazíme si nejprve tu část sinusoidy, která odpovídá intervalu $0 \leqq x \leqq \leqq \frac{1}{2}\pi$ (viz obr. 8 a 9, ve kterých za jednotku zvolena délka 4 cm; sami zvolte za jednotku 10 cm). V obr. 8 je čtvrtina jednotkové kružnice rozdělena na $n = 8$ stejných dílů; z obr. 8 přeneseme do obr. 9 hodnoty funkce (1) pro

$$x = \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{2\pi}{2n}, \quad \frac{3\pi}{2n}, \ldots, \frac{\pi}{2}.$$



Obr. 8.



Obr. 9.

Pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ je $0 < \sin x < 1$, takže část sinusoidy zobrazená v obr. 9 leží v pásu omezeném přímkami o rovnicích $y = 0$, $y = 1$. Mimo to je v témž intervalu $\sin x < x$ [viz učebnici pro II. třídu] takže zobrazená část sinusoidy leží pod přímkou, jejíž rovnice je $y = x$. Spojíme-li počátek P

přímkou s bodem $[x; y]$ na sinusoidě, má tato přímka směrnici

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, \tag{2}$$

která je menší než 1; je-li však číslo $x > 0$ velmi malé, liší se číslo (2) velmi málo od čísla (1); proto v blízkosti bodu P sinusoida se těsně přimyká k přímce, jejíž rovnice je $y = x$; tato přímka je **tečnou** sinusoidy v bodě P. Zobrazená část sinusoidy jde od bodu P k bodu $Q \equiv [\frac{1}{2}\pi; 1]$; spojíme-li bod $[x; y]$ na sinusoidě s bodem Q, má tato přímka směrnici

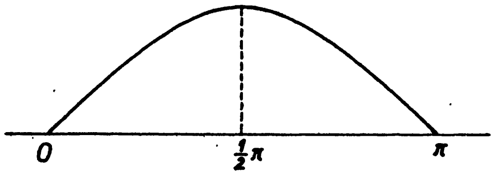
$$\frac{1 - \sin x}{\frac{1}{2}\pi - x}. \tag{3}$$

Ježto $(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x = \cos x \cdot \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$, je číslo (3) rovné

$$\cos x \cdot \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi - x)}{\frac{1}{2}\pi - x}.$$

Všichni tři činitelé jsou kladná čísla menší než 1; je-li číslo x velmi blízké číslu $\frac{1}{2}\pi$, je první činitel velmi malý a proto směrnice (3) je velmi malá a spojnice bodu $[x; y]$ s bodem Q je velmi přibližně rovnoběžná s osou x. Proto se sinusoida v blízkosti bodu Q těsně přimyká k přímce o rovnici $y = 1$; tato přímka je tečna sinusoidy v bodě Q.

Dosud jsme studovali sinusoidu pouze v intervalu $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$. Rozšíření na ostatní x je velmi snadné. Především víme, že $\sin(\pi - x) = \sin x$ [viz učebnici pro II. třídu, kap. 3, čl. 3, vzorec (13)]. Proto sinusoida zároveň s bodem $[x; y]$ obsahuje také bod $[\pi - x; y]$, který je zřejmě souměrným obrazem bodu $[x; y]$ podle svislé osy o rovnici $x = \frac{1}{2}\pi$. Na základě této vlastnosti snadno ze známého průběhu sinusoidy v intervalu $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ určíme její průběh v intervalu $\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \pi$ (obr. 10).



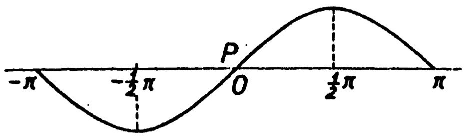
Obr. 10.

Dále víme, že $\sin(-x) = -\sin x$ [viz učebnici pro II. třídu, kap. 3, čl. 3, vzorec (6)]. Proto sinusoida zároveň s bodem $[x; y]$ obsahuje také bod $[-x; -y]$, který je souměrným obrazem bodu $[x; y]$ podle středu P. Na základě této vlastnosti ze známého průběhu sinusoidy v intervalu $0 \leqq x \leqq \pi$ určíme její průběh v intervalu $-\pi \leqq x \leqq 0$ (obr. 11a).

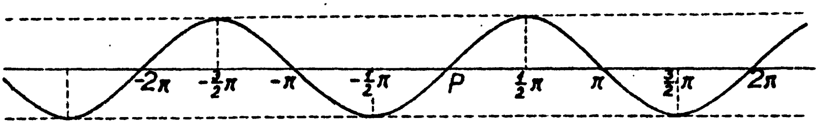
Posléze víme, že (obr. 11b).

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

[viz učebnici pro II. třídu, kap. 3, čl. 3, vzorec (3)]. Proto sinusoida zároveň s bodem $[x; y]$ obsahuje také bod $[x + 2\pi; y]$, který vznikne z bodu $[x; y]$ vodorovným



Obr. 11a.



Obr. 11b.

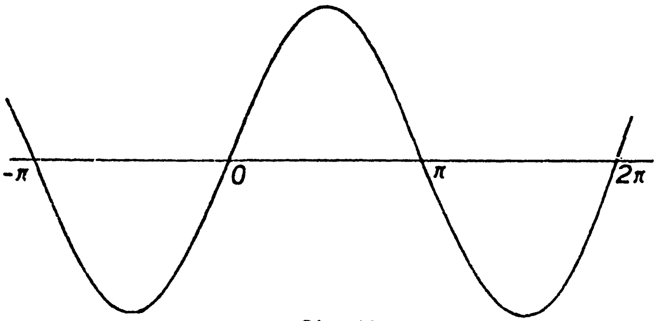
posunutím ve směru osy x doprava o délku 2π. Na základě této vlastnosti ze známého průběhu sinusoidy v intervalu $-\pi \leqq x \leqq \pi$ určíme její průběh pro všecka x. Celá sinusoida leží v pásu omezeném vodorovnými přímkami o rovnicích $y = 1$, $y = -1$; každá z těchto dvou přímek je tečnou sinusoidy v nekonečně mnoha bodech. Sinusoida protne osu x v nekonečně mnoha bodech; tečna sinusoidy v každém z těchto bodů je od osy x nakloněna o úhel 45°. Tyto tečny mají tu pozoruhodnou vlastnost, že v blízkosti bodu dotyku přechází sinusoida z jedné z obou polorovin vyťatých tečnou do druhé.

Graf funkce $y = c \cdot \sin x$, kde $c > 0$ je konstanta, se liší od grafu funkce $y = \sin x$ pouze tím, že všecky souřadnice y jsou v určitém poměru zvětšeny (pro $c > 1$, obr. 12) nebo zmenšeny (pro $c < 1$, obr. 13).

Podobně graf funkce

$$y = \sin(cx)$$

se liší od grafu funkce
$$y = \sin x$$
pouze tím, že všecky souřadnice x jsou v určitém poměru zmenšeny (pro $c > 1$) nebo zvětšeny (pro $0 < c < 1$).



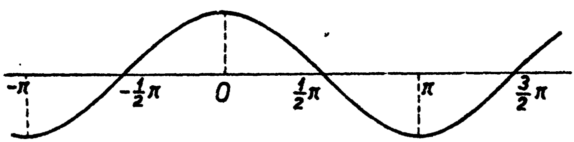
Obr. 12.

Je-li a libovolná konstanta, liší se graf funkce
$$y = \sin(x + a)$$

Obr. 13.

od grafu funkce $y = \sin x$ pouze posunutím ve směru osy x o délku $|a|$ doleva, je-li $a > 0$, doprava, je-li $a > 0$.

Volíme-li $a = \frac{1}{2}\pi$ dostaneme (obr. 14) graf funkce $y = \cos x$, neboť pro každé x je $\cos x = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ [viz učebnici pro II. třídu].



Obr. 14.

Tvar sinusoidy má také graf funkce
$$y = a\cos x + b\sin x,$$

kde a, b jsou konstanty. Vskutku položme [viz učebnici pro III. třídu, str. 90, vzorec (6), ve kterém místo x, y volíme čísla a, b]

$$a = r \cdot \sin\varphi, \qquad b = r \cdot \cos\varphi,$$

kde $r > 0$ a φ jsou konstanty. Potom je

$$y = r\,(\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi),$$

neboli [viz učebnici pro III. třídu, str. 137, vzorec (3).]

$$y = r \cdot \sin(x + \varphi).$$

Cvičení.

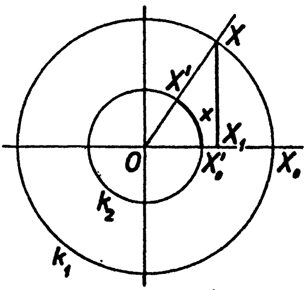
53. Narýsujte dostatečně přesně (na průsvitku) užitím kružnice o poloměru 1 graf funkce $y = \sin x$ pro x z intervalu $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Pomocí této křivky řešte podle výkladů v textu tyto úlohy:

a) Sestrojte grafy funkcí: $y = 2\sin x$; $y = \frac{7}{3}\sin x$.

b) Sestrojte grafy funkcí: $y = \sin 2x$; $y = \sin\frac{1}{2}x$; $y = \sin\frac{2}{3}x$.

c) Sestrojte grafy funkcí: $y = \sin x$; $y = \sin(x - \frac{2}{3}\pi)$; $y = \sin(x + \frac{2}{3}\pi)$; $y = \sin(x + \frac{4}{3}\pi)$; $y = \cos x$; $y = -\cos(x - \frac{1}{2}\pi)$; $y = \cos(x + \frac{2}{3}\pi)$. Ukažte vzájemnou souvislost kterýchkoli dvou z těchto grafů.

54. Graf funkce $y = a \cdot \sin bx$ lze také sestrojit takto (obr. 15): Narýsujme dvě pomocné soustředné kružnice k_1, k_2 o středu O a poloměrech a, $\frac{1}{b}$; zvolme dále úhel $\widehat{X_0OX}$, jehož vodorovné rameno OX_0 míří doprava, protne kružnice k_1, k_2 v bodech X_0, X_0', kdežto rameno OX protne k_1, k_2 v bodech X, X'. V rovině pravoúhlých souřadnic o počátku P a osách x, y sestrojme bod $[x; y]$ tak, že x je velikost oblouku $X'X$ kružnice k_2, ovšem opatřená znaménkem podle úmluvy o měření velikosti úhlu, kdežto $|y| = \overline{X_1X}$, kde X_1 je pravoúhlý průmět bodu X do přímky OX_0. Přitom je $y > 0$, když bod X leží nad přímkou OX_0 a $y < 0$, když bod X leží pod přímkou OX_0. Dokažte správnost této konstrukce a vysvětlete, jak budete sestrojovat graf funkce $y = a \cdot \sin(bx + c)$. (Můžeme předpokládat, že $a > 0$; kdyby bylo záporné, můžeme psát $y = |a| \cdot \sin(bx + c)$. Rovněž lze předpokládat, že $b > 0$; je-li $b < 0$, stačí psát $a\sin(bx + c) = a\sin(-bx - c)$. O konstantě c lze předpokládat, že $|c| < 2\pi$; není-li tomu tak, změníme vhodně nezávisle proměnnou. Hodnoty a, b jsou čísla, hodnota c je úhel měřený v obloukové míře.)



Obr. 15.

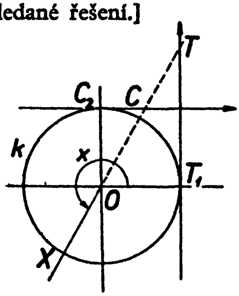
Sestrojte podle toho grafy funkcí:

a) $y = \frac{2}{3} \cdot \sin 2x$; b) $y = 2\sin(\frac{1}{2}x + 1)$; $y = 3\sin(\frac{2}{3}x - 2)$.

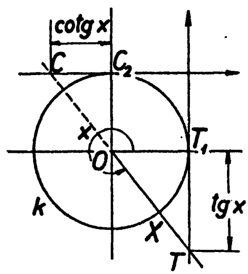
55. Na tvar $y = r \cdot \sin(x + \varphi)$ převeďte funkce:
a) $y = \sin x + \cos x$;
b) $y = -4\sin x + 3\cos x$;
c) $y = \sin x + \sin(x + \frac{2}{3}\pi) + \sin(x + \frac{4}{3}\pi)$.

56. Sestrojte graf funkce: a) $y = \mathrm{tg}\,x$; b) $y = \mathrm{cotg}\,x$. V obr. 16 a), b) je $x = \widehat{T_1OX}$; potom: $|\mathrm{tg}\,x| = \overline{T_1T}$; $|\mathrm{cotg}\,x| = \overline{C_2C}$, kde přímky T_1T, C_2C jsou tečny kružnice o poloměru 1 v bodech T_1 a C_2, při čemž je $OC_2 \perp OT_1$. Souřadnice bodu T na přímce T_1T vzhledem k počátku souřadnic T_1 přímky udává velikost funkce $\mathrm{tg}\,x$; kladný smysl v této přímce jde nahoru. Souřadnice bodu C na přímce C_2C vzhledem k počátku souřadnic C_2 přímky udává velikost funkce $\mathrm{cotg}\,x$; kladný smysl v této přímce jde napravo. V rovině os x, y sestrojte body $[x; y]$, kde x je oblouková míra úhlu $\widehat{T_1OX}$; při funkci $\mathrm{tg}\,x$ je $y = \mathrm{tg}\,x$ zmíněná souřadnice bodu T, při funkci $\mathrm{cotg}\,x$ je $y = \mathrm{cotg}\,x$ zmíněná souřadnice bodu C.

57. Budiž dána kružnice $(S; r)$ a v ní středový úhel $x = \sphericalangle ASB$, kde A, B jsou body kružnice. Tětiva AB dělí kruhovou výseč ve dvě části tak, že obsah trojúhelníka ABS je roven obsahu zbylé úseče. Určete graficky velikost úhlu x.
[Obsah výseče $= \frac{1}{2}r^2x$; obsah $\triangle ABC = \frac{1}{2}\, r^2 \sin x$. Máte řešit rovnici $\frac{1}{2}x = \sin x$. Hledejte průsečík $[x_1; v_1]$ grafů funkcí $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sin x$; hodnota x_1 je hledané řešení.]



Obr. 16a.



Obr. 16b.

6. Lineární interpolace.

Víme, že graf lineární celistvé funkce je přímka. Jsou-li $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ kterékoli dva různé body přímky, je její směrnice rovna podílu

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{1}$$

který je tudíž konstantní. Naproti tomu grafy jiných funkcí jsou křivé čáry a podíl (1) není konstantní. Přesto právě u theoreticky i prakticky nejdůležitějších funkcí podíl (1) je *přibližně* konstantní, jestliže nezávisle proměnnou x

omezíme na nepříliš velký interval. To znamená, že i když funkce není přímou čarou v žádném intervalu, přece jenom v malém intervalu se dopustíme jen velmi malé a prakticky často bezvýznamné chyby, jestliže část grafu odpovídající intervalu $x_1 \leqq x \leqq x_2$ nahradíme úsečkou spojující body A_1, A_2. Za předpokladu, že chyba, které se tím dopustíme, je prakticky bezvýznamná, můžeme potom na základě známých hodnot y_1, y_2, kterých nabývá funkce pro $x = x_1$, $x = x_2$, určit hodnoty funkce pro taková x, pro něž platí $x_1 < x < x_2$, při čemž toto určení je ovšem pouze přibližné.

Přibližné určení hodnot funkce pro všecka x nějakého intervalu na základě několika známých hodnot funkce v určitých číslech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tohoto intervalu se jmenuje **interpolace.** Je to slovo latinského původu, které znamená „vkládání". Interpolace pozůstává v tom, že danou funkci nahradíme jinou funkcí, jejíž typ je matematicky tak jednoduchý, že na základě znalosti hodnot funkce v číslech $x_1, x_2, \ldots, x_k$ je možné jednoznačně určit hodnoty funkce ve všech číslech x daného intervalu, při čemž tuto matematicky jednodušší funkci je nutné volit tak, aby se pokud možno málo lišila od dané funkce. Budeme probírati pouze **lineární interpolaci,** která je nejjednodušším a nejdůležitějším druhem interpolace. Lineární interpolace pozůstává v tom, že danou funkci nahradíme lineární celistvou funkcí, kterou volíme tak, aby pro $x = x_1$ a $x = x_2$ nabývala týchž hodnot jako daná funkce; předpokládáme, že v celém intervalu $x_1 < x < x_2$ nabývá daná funkce týchž hodnot jako původní funkce, což je ovšem pouze přibližně správné.

Interpolace je prakticky nesmírně důležitá. Jestliže na př. určujeme měřením hodnotu nějaké fysikální veličiny závislé na čase t, změříme hodnoty funkce pro několik časových okamžiků $t = t_1, t = t_2, \ldots, t = t_n$ a na základě těchto několika přímo změřených hodnot určujeme ostatní hodnoty funkce interpolací. To je nutné, neboť přímým měřením můžeme zjistit pouze konečný počet hodnot funkce, a neznáme-li matematický zákon, je interpolace jediným prostředkem k získání dalších hodnot funkce. Při tom interpolaci provádíme podle nějakého matematického vzorce a je nutné pokusy kontrolovat, zdali jsme oprávněni tvrdit, že výsledek interpolace s dostatečnou přesností vystihuje skutečnost.

Avšak interpolace je důležitá i u matematicky přesně definovaných funkcí. Hodnoty důležitých funkcí jsou sestaveny v tabulkách; s mnohými z nich jsme se v předcházejících třídách seznámili. V tabulce nemohou býti *všecky* hodnoty tabulované funkce a někdy je třeba vyčísti z tabulky hodnotu funkce pro takové hodnoty nezávisle proměnné, které v tabulce přímo obsaženy nejsou; to se děje právě interpolací.

Buďtež x_1, x_2 dvě sousední hodnoty nezávisle proměnné x, pro které jsou v tabulce udány hodnoty y_1, y_2 tabulované funkce. Číslo

$$d = y_2 - y_1 \tag{2}$$

nazveme tabulkovou diferencí. Běží o určení hodnoty y dané funkce pro takové x, které je v intervalu $x_1 < x < x_2$. Jest

$$y = y_1 + (y - y_1)$$

a běží o přibližný výpočet diference $y - y_1$ pomocí tabulkové diference d. Při lineární interpolaci předpokládáme, jak bylo vlastně řečeno již na počátku tohoto článku, že

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{3}$$

z čehož podle (2) vypočteme

$$y - y_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot d. \tag{4}$$

Místo vzorce (3) můžeme vyjít také od vzorce

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \tag{3'}$$

z něhož plyne

$$y - y_2 = -\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot d. \tag{4'}$$

Vzorce (4) a (4') dávají oba touž hodnotu y; protože však čísla y_1, y_2 jsou obyčejně známa pouze přibližně, bývá výhodnější vzorec (4), jestliže $x - x_1 < x_2 - x$, a vzorec (4'), jestliže $x_2 - x < x - x_1$.

Lineární interpolace pomocí vzorců (4) a (4') jsme užívali v předcházejících třídách a částečně již na střední škole u různých funkcí, jako jsou

$$y = x^2, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \log x, \quad y = \sin x$$

a pod., ačkoli jsme vzorce (4), (4') nezapisovali v obecném tvaru, nýbrž jsme jejich smysl popisovali slovy. Abychom si učinili představu o oprávněnosti lineární interpolace, předpokládejme, že interpolovaná funkce má tu vlastnost, že podíl (1) se zvětší, jestliže zvětšíme x_1 nebo x_2. Ve článku 3 jsme poznali, že tuto vlastnost má funkce $y = x^2$ a ve článku 4 jsme poznali, že touž vlastnost má také funkce $y = \frac{1}{x}$. Budiž nyní x_0 hodnota nezávisle proměnné, která v tabulce předchází hodnotu x_1, taková, že

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 \tag{5}$$

a budiž y_0 hodnota funkce příslušná hodnotě x_0. Jelikož $x_0 < x_1$, $x_1 < x$, podle předpokládané vlastnosti podílu (1) jest

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} < \frac{y - y_1}{x - x_1}; \tag{6}$$

jelikož dále $x < x_2$, podle téže vlastnosti je také

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} < \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{7}$$

Jestliže nyní, jak se zpravidla stane, bude v mezích přesnosti tabulky

$$y_2 - y_1 \doteq y_1 - y_0, \tag{8}$$

potom podle (5) bude s žádoucí přesností také

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \doteq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a podle (6), (7) bude pak též

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} \doteq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

t. j. předpoklad (3), na kterém je založena lineární interpolace, je s dostatečnou přesností splněn.

Je patrné, že táž úvaha se dá provésti také pro funkce, které mají tu vlastnost, že podíl (1) se zmenší, jestliže zvětšíme buďto x_1 nebo x_2. Dá se dokázati, že tuto vlastnost mají na př. funkce

$$y = \log x, \quad y = \sin x, \left(\text{pro } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y = \log \sin x, \left(\text{pro } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Cvičení.

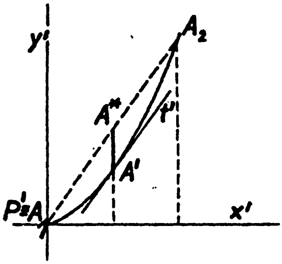
58. Vypočtěte hodnoty dané funkce: (1) $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$; (2) $f(x) = -3x^2 + 18x - 29$ pro $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_0 = 1{,}4$ a označte $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$.

a) Rozhodněte o vhodnosti a oprávněnosti lineární interpolace v intervalu $1 \leqq x \leqq 2$.

b) Určete aritmetickou posloupnost o prvním členu y_1 a jedenáctém členu y_2. Její pátý člen nám udává přibližnou hodnotu $f(x_0)$; oč se tato hodnota liší od hodnoty přesné?

c) Určete lineární funkci, kterou při lineární interpolaci v intervalu $1 \leqq x \leqq 2$ nahrazujeme danou funkci.

d) Načrtněte zhruba průběh funkce v intervalu $1 \leqq x \leqq 2$ a to tak, že bod $A_1 \equiv [x_1; y_1]$ zvolíte za počátek souřadnic P'; dále budiž $A_2 \equiv [x_2; y_2]$. Z grafu odůvodněte správnost tohoto úsudku: Je-li bod $A' \equiv [x'; y']$ dotykový bod tečny t' paraboly určené danou funkcí, při čemž je $t' \| A_1A_2$ a je-li $A^* \equiv [x'; y^*]$ bod úsečky A_1A_2, potom rozdíl $|y^* - y'|$ udává největší chybu, které se při této lineární interpolaci dopouštíme. Určete velikost této chyby (obr. 17).



Obr. 17.

59. Rozhodněte o intervalech nezávisle proměnné x, v nichž jsme vůbec oprávněni provádět lineární interpolaci funkce $y = \dfrac{a}{x}$.

60. Zobrazte graf funkce $y = x^2$ v intervalu $0 \leqq x$ a dokažte, že graf funkce $y = \sqrt{x}$ je parabolický oblouk, který z předchozího grafu obdržíme jako obraz v souměrnosti, jejíž osou je přímka o rovnici $y = x$.

Dokažte odtud, že poměr přírůstků $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ funkce $y = \sqrt{x}$ v intervalu $0 \leqq x$ se zmenší, když zvětšíme alespoň jednu z hodnot x_1, x_2. Odůvodněte tak oprávněnost lineární interpolace v tabulkách druhých odmocnin.

61. Interpolací v tabulkách druhých mocnin určete $\sqrt{8{,}854}$.

62. Jednoho dne ukazovaly moje hodinky 12 hod. 1 min. 15 vt. v okamžiku, když rozhlasový signál hlásil poledne. Druhého dne ukazovaly v témže okamžiku 11 hod. 59 min. 28 vt. V kterou denní dobu se shodoval časový údaj na mých hodinkách se správným časem?

63. Jazýček nezatížených vah ukazoval na stupnici na dílek 8,6. Pak jsme dali na jednu misku předmět a na druhou závaží 76,20 g. Jazýček se ustálil na dílku 12,3. Přidáním závaží 0,05 g se posunula poloha jazýčku na dílek 6,5. Jaké závaží bylo třeba přidati, aby se jazýček ustálil na počáteční poloze 8,6 a jaká je tedy přesná váha váženého předmětu?

64. V kružnici vésti tětivu tak, aby obsah menší úseče touto tětivou omezené byl roven třetině obsahu celého kruhu. V jaké vzdálenosti od středu třeba vésti tětivu? — (Označíme-li x středový úhel v míře obloukové, který přísluší k oblouku omezujícímu hledanou úseč, dostáváme rovnici $\frac{1}{2}r^2x - \frac{1}{2}r^2\sin x = \frac{1}{3}\pi r^2$, čili $\sin x = x - \frac{2}{3}\pi$, kterou přibližně řešíme užitím lineární interpolace.)

65. V jaké vzdálenosti od středu koule je třeba vésti rovinný řez, aby vzniklá kulová úseč měla objem rovný čtvrtině objemu celé koule? — (Je-li x hledaná vzdálenost, platí $\frac{1}{2}\pi(r^2 - x^2)(r - x) + \frac{1}{6}\pi(r - x)^3 = \frac{1}{3}\pi r^3$, čili $\left(\frac{x}{r}\right)^3 = 3 \cdot \frac{x}{r} - 1$; tuto rovnici přibližně řešíme pomocí lineární interpolace.)

66. Tabulka druhých mocnin obsahuje (na čtyři platné číslice zaokrouhlené) druhé mocniny čísel od 1 do 10 rostoucích po 0,01. Jaké největší chyby se dopustíme, provádíme-li v tabulce lineární interpolaci?

7. Limita funkce.

Dosud jsme probírali některé jednoduché příklady funkcí. Obecná nauka o funkcích je hlavním předmětem t. zv. **vyšší matematiky**, která se na gymnasiu neprobírá, pro kterou však je gymnasijní látka nezbytnou přípravou. Základním pojmem vyšší matematiky je pojem **derivace**, nesmírně důležitý při užití matematiky ve fysice a technice. Je to zcela jednoduchý pojem, se kterým jsme se, jak uvidíme, na příkladech již setkali. Vyložíme si v příštím článku smysl tohoto pojmu, jehož všestrannou užitečnost však již nebudeme moci prokázati; to je předmětem vyšší matematiky. V tomto článku provedeme předběžné úvahy.

Abychom se mohli stručně vyjadřovati, i když neprobíráme jednu určitou funkci, nýbrž máme provésti obecnou úvahu, označíme funkci písmenem f; je-li a číslo z oboru funkce, označíme $f(a)$ hodnotu funkce v čísle a. Znamená-li na př. f funkci $y = 2x^2 - 3x + 1$, je

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(\tfrac{3}{5}) = -\tfrac{2}{25}, \quad f(2) = 3, \quad f(-3) = 28$$

a pod. Znamená-li f funkci $y = \sqrt{1 - x^2}$, je $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$ a čísla $f(2)$, $f(-3)$ nejsou definována. Vyšetřujeme-li současně několik funkcí, nevystačíme s jedním písmenem f. Je-li jedna funkce označena f, označíme druhou g nebo φ.

Vyložíme si nyní stručně pojem **limity funkce.** Budiž f nějaká funkce a budiž a nějaké číslo, které samo může, ale nemusí náležet do oboru funkce; ale budeme předpokládati, že všecka čísla $x \neq a$, která jsou dosti blízká číslu a, náležejí do oboru funkce. Budiž dále s nějaké číslo. Pravíme, že funkce f má limitu rovnou číslu s pro $x \to a$ (čteme: pro x blížící se číslu a), jestliže pro všecka čísla $x \neq a$ dosti blízká číslu a je přibližně

$$f(x) \doteq s. \tag{1}$$

Je-li tomu tak, píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = s. \tag{2}$$

Je třeba blíže vyložit smysl přibližné rovnosti (1). Zvolme si nějaké malé kladné číslo, třeba $\frac{1}{10^3}$. Potom pro všecka $x \neq a$ dosti blízká číslu a musí býti

$$|f(x) - s| < \frac{1}{10^3}. \tag{3}$$

Zvolíme-li si nějaké ještě menší kladné číslo, třeba $\frac{1}{10^6}$, potom pro taková x, která vyhovují nerovnosti (3), zpravidla nebude splněna nerovnost

$$|f(x) - s| < \frac{1}{10^6}, \tag{4}$$

ale omezíme-li hodnoty do nějaké ještě větší blízkosti čísla a, musí být splněna i nerovnost (4), pro ještě blízkost číslu a musí platit dokonce

$$|f(x) - s| < \frac{1}{10^9} \qquad \text{atd.}$$

Přesná matematická definice vztahu (2) se dá vyslovit pomocí pojmu limity posloupnosti, který jsme probírali ve třetí třídě [viz učebnici pro III. třídu]. Vztah (2) znamená toto: Je-li $\{x_n\}$ posloupnost čísel taková, že $x_n \neq a$ a že $\lim x_n = a$, je vždy též $\lim f(x_n) = s$.

Řekli jsme si, že vztah (2) může platit, i když číslo a nepatří do oboru funkce, t. j. když číslo $f(a)$ není definováno. Na druhé straně jsme si také řekli, že číslo a může patřit do oboru funkce. Je-li tomu tak, je zvláště důležitý ten případ, že

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{5}$$

Dalo by se dokázati, že všecky naše příklady funkcí mají tu vlastnost, že vztah (5) je správný, ať zvolíme číslo a v oboru funkce jakkoli. Takové funkce se jmenují **spojité funkce.** Hodnota $f(a)$ funkce spojité v čísle a se může změnit jen málo, nahradíme-li číslo a číslem x přibližně rovným a. Jinak řečeno, spojité funkce mají tu vlastnost, že přibližný výpočet hodnoty funkce se dá provésti na základě *přibližné* znalosti hodnoty nezávisle proměnné. Jelikož pomocí funkcí vyjadřujeme závislosti mezi veličinami a jelikož každé měření se dá provádět pouze přibližně, můžeme se značnou oprávněností tvrdit, že pouze spojité funkce mají praktický význam.

Jestliže číslo a nepatří do oboru funkce, snadno udáme jednoduché příklady, ve kterých vztah (2) bude nesprávný, ať číslo s volíme jakkoli. Nesprávný je na př. vztah

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = s;$$

ať jakkoli zvolíme číslo s, vždycky právě pro čísla $x \neq 0$ velmi blízká nule bude se $\frac{1}{x}$ velmi značně lišit od čísla s.

V učebnici pro III. třídu jsme odvodili řadu vět o limitách posloupností, označených na udaném místě římskými číslicemi. Z těchto vět lze snadno odvodit obdobné věty o limitách funkcí.

A. Je-li $\quad \lim_{x \to a} f(x) = s, \quad \lim_{x \to a} g(x) = t, \qquad (6)$

je také $\quad \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = s + t, \quad \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = s - t.$

Důkaz. Budiž $\{x_n\}$ taková posloupnost, že pro $x_n \neq a$ je $\lim x_n = a$.

Podle (6) je $\lim f(x_n) = s$, $\lim g(x_n) = t$,

takže podle vět II a IV o limitách posloupností je také

$$\lim_{x \to a} [f(x_n) + g(x_n)] = s + t, \quad \lim_{x \to a} [f(x_n) - g(x_n)] = s - t.$$

B. Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = s$ a je-li c jakákoli konstanta, je také $\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = cs$. To plyne z věty III o limitách posloupností.

C. Platí-li (6), je také

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = st.$$

To plyne z věty V o limitách posloupností.

Jednu důležitou větu o limitách posloupností jsme poznali již ve II. třídě, ačkoli jsme tam ještě neužili zápisu tvaru (2). Užijeme-li tohoto zápisu, můžeme větu, kterou máme na mysli, vyjádřit vzorcem

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{7}$$

Vzorec (3) znamená, že pro všecka $x \neq 0$ dosti blízká nule je podíl $\dfrac{\sin x}{x}$ přibližně rovný jedné. Jelikož $\sin(-x) = -\sin x$ je

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Proto stačí odůvodnit, že pro kladná x velmi blízká nule podíl $\dfrac{\sin x}{x}$ je přibližně rovný jedné. To však bylo odůvodněno v učebnici geometrie pro II. třídu.

Cvičení.

Podle vztahu (5) textu je funkce $y = f(x)$ spojitá v čísle a, jestliže platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. To znamená, že lze k libovolnému malému kladnému číslu k určit kladné číslo l tak, aby platilo $|f(x) - f(a)| < k$ pro všechna x, o kterých platí $|x - a| < l$. Označíme-li $x = a + h$ neboli $h = x - a$, pak je $|h| < l$; toto označení často zjednoduší výpočet. Je vhodné požadovat, aby bylo $|h| < 1$, t. j. $h^2 < |h|$. Užitím uvedených vztahů řešte cvičení 67 až 71.

67. a) Dokažte, že $|(2x - 1) - 1| < 10^{-3}$ pro všechna x, o kterých platí $|x - 1| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.
b) Dokažte, že funkce $y = 2x - 1$ je spojitá v každém reálném čísle $x = a$.

68. Dokažte, že funkce $y = mx + n$, kde m, n jsou dané konstanty, je spojitá v každém reálném čísle $x = a$. [Pro $m \neq 0$ je $l \leq \dfrac{k}{|m|}$.]

69. Dokažte, že $|x^2 - 4| < 10^{-3}$ pro všechna x, o kterých platí $|x - 2| < l$, kde $l < 25 \cdot 10^{-5}$.

70. Dokažte, že funkce $y = x^2 - 2x + 3$ je spojitá v každém reálném čísle $x = a$. [Položte $x = a + h$ a určete $|f(x) - f(a)|$; dospějete k hodnotě $|h| < 1$, $|h| < \dfrac{k}{2|a| + 3}$.]

71. Dokažte, že funkce $y = \dfrac{1}{x}$ je spojitá v čísle 1.

72. Funkce $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ není pro číslo $x = 3$ definována.

a) Dokažte, že $\lim\limits_{x \to 3} y = 6$ a vysvětlete význam tohoto výsledku. [Je-li $x = 3 + h$, je $f(3 + h) = 6 + h$, ať je $|h| \neq 0$ jakkoli malé kladné číslo.]

b) Ukažte, že grafem funkce je přímka o rovnici $y = x + 3$ s výjimkou bodu $[3; 6]$, neboť pro číslo 3 není daná funkce definována.

73. Podobnou úvahu jako v předchozím cvičení 72 proveďte i s funkcí $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ pro číslo $x = 2$.

74. Dokažte postupně:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} = 1$; b) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2} = 1$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x} = 0$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$; e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$; e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + 1 - \cos x}{x} = 1.$

75. Nejprve dokažte, že funkce $y = c$ (kde c je reálná konstanta) a $y = x$ jsou spojité v každém čísle. Užitím výsledku A) až C) z výkladů v textu postupně dokažte:

a) Funkce $y = mx$, kde m je reálná konstanta, je spojitá v každém čísle. Odtud dokažte, že i funkce $y = mx + n$ je v každém čísle spojitá.

b) Jestliže je funkce $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ (kde $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou reálné konstanty) spojitá v každém čísle, je spojitá v každém čísle i funkce:

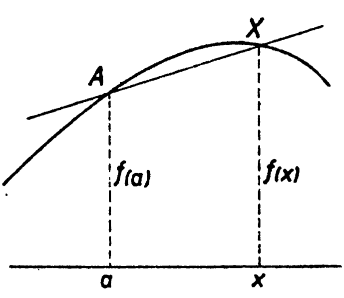
(1) $y = a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_{n-1} x^2 + a_n x$ a dále funkce

(2) $y = a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_{n-1} x^2 + a_n x + a_{n+1}$, kde a_{n+1} je konstanta [důkaz proveďte matematickou indukcí opírajíce se o výsledek cvičení a)].

8. Derivace funkce.

Budiž dána nějaká funkce f a nějaké číslo a tak, že nejen číslo a samo, nýbrž také všecka čísla dosti blízká číslu a patří do oboru funkce. Budeme definovati novou funkci, kterou označíme φ, takto:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{1}$$



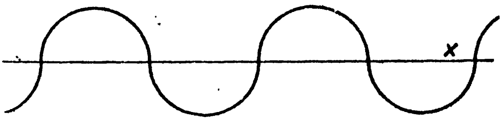
Obr. 18.

Číslo a samo už nepatří do oboru funkce φ, neboť pro $x = a$ bychom v (1) měli nulu ve jmenovateli. Ale každé jiné číslo z oboru funkce f patří do oboru funkce φ.

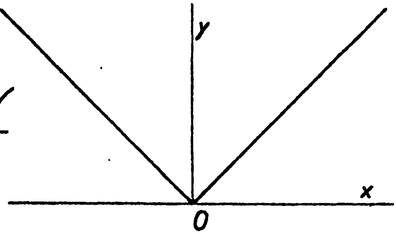
Funkce φ má jednoduchý geometrický význam (obr. 18). Bod $A = [a; f(a)]$ náleží do grafu funkce f. Pro každé jiné x z oboru funkce také bod $X \equiv [x; f(x)]$ náleží do grafu funkce f a je různý od bodu A. Přímka AX je sečnou grafu a číslo (1) je směrnice sečny AX. Pro $x = a$ oba body A, X splynou a nemá smyslu mluvit o přímce AX. Jestliže však číslo $x \neq a$ se blíží číslu a, blíží se na grafu bod X bodu A a často se stane, jak se zejména stalo u kvadratické celistvé funkce nebo u lineární lomené funkce, že směrnice sečny AX se blíží určitému číslu s. Graf funkce se potom v blízkosti bodu A těsně přimyká k přímce procházející bodem A se směrnicí s; tato přímka je **tečna** grafu v bodě A. Číslo s se nazývá derivace funkce f v čísle a. Definice čísla s se dá napsat ve tvaru

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = s. \tag{2}$$

Tedy **derivace funkce f v čísle a je směrnicí tečny grafu funkce v bodě** $[a; f(a)]$.



Obr. 19.



Obr. 20.

Jsou zcela jednoduché funkce, které v některém čísle svého oboru nemají derivaci. Na př. v obr. 19 je čára, složená z polokružnic položených střídavě nad a pod osou x. Tato čára má v každém svém bodě tečnu a je grafem určité funkce f, která nemá derivaci v těch číslech a, pro která je $f(a) = 0$, protože graf sice má v bodě $[a; 0]$ tečnu, ale tato tečna je svislá a nemá směrnici. V obr. 20 je naznačen graf funkce $y = |x|$. V čísle 0 nemá tato funkce derivaci, protože graf funkce nemá v bodě $[0; 0]$ tečnu.

Přesto právě nejdůležitější funkce mají v každém čísle svého oboru derivaci. Jestliže funkce f má v čísle a derivaci, je zvykem tuto derivaci označit $f'(a)$. Přepíšeme tedy (2) ve tvaru

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \tag{3}$$

Jestliže limita ve (3) neexistuje, není číslo $f'(a)$ definováno. Má-li funkce f v každém čísle svého oboru derivaci, nazveme **derivovanou funkcí** [označení pro ni bude f'] tu funkci, jejíž hodnota v každém čísle a [z oboru funkce f, který je také oborem funkce f'] je rovna derivaci funkce f v tomto čísle. Derivovaná funkce derivované funkce k funkci f je **druhá derivovaná funkce** [označení f'']; druhá derivovaná funkce je velmi důležitá ve fysice.

Pro stručnost nazveme **regulární** (česky pravidelnou) takovou funkci, která je v každém čísle definována a má v každém čísle derivaci.

I. Konstanta je regulární funkce a derivovaná funkce je identicky rovna nule. Neboť graf je vodorovná přímka a směrnice každé „sečny" AX je rovna nule.

II. Lineární celistvá funkce $y = kx + q$ je regulární funkce a derivovaná funkce je konstanta k. Neboť graf je přímka se směrnicí k a každá „sečna" AX splyne s grafem.

III. Kvadratická celistvá funkce $y = ax^2 + bx + c$ je regulární funkce a derivovaná funkce je lineární celistvá funkce $y' = 2ax + b$. Neboť pro každé číslo u (píšeme u místo a, protože písmeno a je zadáno) jest

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \frac{(ax^2 + bx + c) - (au^2 + bu + c)}{x - u} =$$

$$= \frac{a(x^2 - u^2) + b(x - u)}{x - u} = a\,(x + u) + b$$

a je zřejmé z definice limity funkce, že

$$\lim_{x \to u} [a\,(x + u) + b] = 2au + b.$$

Druhá derivovaná funkce kvadratické celistvé funkce $y = ax^2 + bx + c$ je podle II a III konstanta $y'' = 2a$.

IV. Jestliže existuje derivace $f'(a)$, jest

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \tag{4}$$

takže každá regulární funkce je spojitá. Neboť podle předpokladu platí (3); je však zřejmé, že

$$\lim_{x \to a} (x - a) = 0 \tag{5}$$

a z (3) a (5) plyne (4) podle věty C článku 7.

V. Jsou-li f, g regulární funkce, jsou také $f+g$, $f-g$ regulární funkce a jejich derivované funkce jsou $f'+g'$, $f'-g'$.

Důkaz. Zvolme libovolně číslo a. Jest

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),\quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a),$$

takže podle věty A článku 7 jest

$$\lim_{x\to a}\frac{[f(x)\pm g(x)]-[f(a)\pm g(a)]}{x-a}=f'(a)+g'(a).$$

VI. Je-li f regulární funkce a je-li c konstanta, je také $c\cdot f$ regulární funkce a derivovaná funkce je $c\cdot f'$.

Důkaz. Zvolme libovolně číslo a. Jest

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),$$

takže podle věty B článku 7 jest

$$\lim_{x\to a}\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a}=cf'(a).$$

VII. Jsou-li f, g regulární funkce, je také $f\cdot g$ regulární funkce a její derivovaná funkce je $f'\cdot g+f\cdot g'$.

Důkaz. Zvolme libovolně číslo a. Jest

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),\qquad \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a).$$

Podle věty B článku 7 jest

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}=f'(a)\cdot g(a); \tag{6}$$

podle IV a podle věty C článku 7 jest

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(a)}{x-a}=f(a)\cdot g'(a). \tag{7}$$

Ježto

$f(x)g(x)-f(a)g(a)=[f(x)g(a)-f(a)g(a)]+[f(x)g(x)-f(x)g(a)]$, plyne ze (6) a (7) podle věty A článku 7, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

VIII. Budiž f regulární funkce a budiž c konstanta. Definujeme funkci φ tím, že

$$\varphi(x) = f(x+c)$$

pro všecky hodnoty x. Pak také φ je regulární funkce a pro derivovanou funkci φ' jest

$$\varphi'(x) = f'(x+c)$$

pro všecka x.

Důkaz. Zvolme libovolně číslo a. Derivace funkce f v čísle $a+c$ je rovna $f'(a+c)$. Budiž nyní $\{x_n\}$ taková posloupnost, že pro $x_n \neq a$ je $\lim x_n = a$. Potom je $x_n + c \neq a + c$, $\lim (x_n + c) = a + c$, takže

$$\lim_{x_n\to a} \frac{f(x_n+c)-f(a+c)}{(x_n+c)-(a+c)} = f'(a+c)$$

neboli

$$\lim_{x_n\to a} \frac{\varphi(x_n)-\varphi(a)}{x_n-a} = f'(a+c).$$

Tedy derivace $\varphi'(a)$ je rovná $f'(a+c)$.

IX. Budiž f regulární funkce a budiž c konstanta. Definujeme funkci φ tím, že

$$\varphi(x) = f(cx)$$

pro všecky hodnoty x. Pak také φ je regulární funkce a pro derivovanou funkci φ' jest

$$\varphi'(x) = c\cdot f'(cx)$$

pro všecka x.

Důkaz. Jestliže $c = 0$, je φ konstanta a věta plyne z I. Budiž tedy $c \neq 0$. Zvolme libovolně číslo a. Derivace funkce f v čísle ca je rovna $f'(ca)$. Budiž $\{x_n\}$ taková posloupnost, že $x_n \neq a$, $\lim x_n = a$. Potom je $cx_n \neq ca$, $\lim cx_n = ca$, takže

$$\lim_{x_n\to a} \frac{f(cx_n)-f(ca)}{cx_n-ca} = f'(ca)$$

neboli

$$\lim_{x_n\to a} \frac{\varphi(x_n)-\varphi(a)}{c\cdot(x_n-a)} = f'(ca)$$

a z toho plyne [viz učebnici pro III. třídu, str. 29, III], že

$$\lim_{x_n \to a} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(a)}{x_n - a} = c \cdot f'(ca).$$

Tedy derivace $\varphi'(a)$ se rovná $c \cdot f'(ca)$.

Odvodíme si ještě vzorce pro derivace goniometrických funkcí sinus a kosinus, které jsou velmi důležité ve fysice. Z geometrické definice těchto funkcí [viz učebnici pro II. třídu], víme, že to jsou spojité funkce.

X. Funkce $y = \sin x$ je regulární a její derivace v čísle x je rovna $\cos x$.

Důkaz. Máme dokázati, že sinusoida má v každém svém bodě $[a; \sin a]$ tečnu a že směrnice této tečny je rovna číslu $\cos a$. To jsme již dokázali v článku 5 jednak pro $a = 0$ (směrnice rovná 1 neboli cos 0), jednak pro $a = \frac{1}{2}\pi$ (směrnice rovná 0 neboli $\cos \frac{\pi}{2}$. První z obou výsledků praví, že derivace funkce $y = \sin x$ v čísle 0 je rovna jedné, t. j., že

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = 1 \quad \text{neboli} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{8}$$

což je vzorec (7) článku 7. Druhý z obou výsledků praví, že derivace funkce $y = \sin x$ v čísle $\frac{1}{2}\pi$ je rovna nule; avšak (viz VIII) derivace funkce $y = \sin x$ v čísle $\frac{1}{2}\pi$ je totožná s derivací funkce $y = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ v čísle 0. Ježto $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$ [viz učebnici pro II. třídu], můžeme tento výsledek zapsati ve tvaru

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = 0 \quad \text{neboli} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \tag{9}$$

Budiž nyní a libovolné číslo. Máme dokázati, že derivace funkce $y = \sin x$ v čísle a je rovna číslu $\cos a$. Místo toho můžeme dokázati (viz opět VIII), že derivace funkce $y = \sin(x + a)$ v čísle 0 je rovna číslu $\cos a$ neboli že

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x + a) - \sin a}{x} = \cos a. \tag{10}$$

Tedy stačí z (8) a (9) odvodit (10).

Víme, [viz učebnici pro II. třídu], že

$$\sin(x + a) = \sin x \cdot \cos a + \cos x \cdot \sin a,$$

takže

$$\frac{\sin(x+a)-\sin a}{x} = \cos a \cdot \frac{\sin x}{x} + \sin a \cdot \frac{\cos x - 1}{x}$$

Tedy (10) plyne z (8) a (9) podle vět A, B článku 7.

XI. **Funkce $y = \cos x$ je regulární a její derivace v čísle x je rovna $-\sin x$.**

Tato věta plyne z X podle VIII, neboť [viz učebnici pro II. třídu] $\cos x = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$, $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\sin x$.

Cvičení.

76. Vypočtěte derivaci funkce: a) $y = 3x$; b) $y = -4x$; c) $y = -6$; d) $y = -3x + 2$; e) $y = 2 - x^2$; f) $y = -2x^2 + 3x - 5$. Narýsujte graf této funkce a sestrojte tečnu v bodě $[0; y_1]$.

77. Na základě výsledku (3) v článku 4 dokažte, že derivace funkce $y = \frac{a}{x}$ je $y' = -\frac{a}{x^2}$. Rozhodněte, v kterém oboru je tato derivace definována. Je funkce $y = \frac{a}{x}$ regulární?

78. Narýsujte graf funkce $y = \frac{12}{x}$ a v bodech $[3; y_1]$, $[-4; y_2]$, $[x_3; -5]$ sestrojte pomocí derivace dané funkce tečny.

79. Budiž dána funkce $y = x^n$, kde n je přirozené číslo. Jestliže předpokládáme, že derivace této funkce je $y' = nx^{n-1}$, dokažte, že funkce $y = x^{n+1}$ má derivaci $y' = (n+1)x^n$. [Užijte výsledku odst. VII textu, v němž položíte $f(x) = x^n$, $g(x) = x$. Proveďte odtud důkaz správnosti vzorce $y' = n \cdot x^{n-1}$ matematickou indukcí, víte-li, že vzorec $y' = nx^{n-1}$ je správný pro $n = 1$.]

80. Užitím výsledku předchozího cvičení dokažte správnost tohoto tvrzení:

a) Funkce $y = ax^n$ (kde a je reálná konstanta a n přirozené číslo) má derivaci $y' = an \cdot x^{n-1}$.

b) Funkce $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (kde $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou reálné konstanty) má derivaci $y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$.

c) Obě dané funkce ze cvičení a), b), jakož i jejich derivace, jsou spojité pro všechny reálné hodnoty nezávisle proměnné. (Viz cvič. 75.)

81. Zobrazte funkci $y = |x^2 - 1|$. Ve kterých bodech nemá graf této funkce tečnu? Pro která x nemá tedy daná funkce derivaci? [Napište derivaci pro ta x, pro něž existuje.]

82. Dokažte správnost těchto tvrzení:

a) Budiž $y = f(x)$ funkce, která je definována v určitém intervalu $x_1' < x < x_2'$ a která má v tomto intervalu derivaci rovnu nule pro každé x. Potom platí $y =$ konst.

[Podle předpokladu je $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ pro $x_1' < a < x_2'$ a pro $x \neq a$;

je tedy $\left|\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| < k$, kde k je libovolné malé kladné číslo. Odtud plyne $|f(x) - f(a)| < k\,|x - a|$, při čemž číslo vpravo lze volbou čísla k učinit libovolně malé. Je tedy $f(x) = f(a)$.]

b) Jestliže o funkci $y = f(x)$ v čísle a platí $f'(a) > 0$, potom je funkce v čísle a rostoucí, t. j. dá se najít určitý, třeba sebemenší, interval nezávisle proměnné x, do něhož patří číslo a, při čemž je v tomto intervalu daná funkce rostoucí. [Je $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$; proto pro všechna x, pro něž platí $0 < |x - a| < l$, kde l je určité malé kladné číslo, má čitatel zlomku $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ stejné znaménko jako jeho jmenovatel. Pro $x < a$ je tedy $f(x) < f(a)$, pro $x > a$ je $f(x) > f(a)$.]

c) Vyslovte podobnou větu jako ve cvičení b), jestliže o funkci $y = f(x)$ platí, že $f'(a) < 0$. Definujte funkci klesající v čísle a.

83. Užitím výsledků předchozího cvičení 82 řešte úlohy:

a) Funkce $y = mx + n$ je při $m > 0$ rostoucí a při $m < 0$ klesající.

b) Funkce $y = x^2$ je pro $x > 0$ rostoucí a pro $x < 0$ klesající.

c) Funkce $y = \dfrac{1}{x}$ je klesající v intervalu $0 > x$ i v intervalu $x > 0$, při čemž pro $x = 0$ není definována. (Viz cvičení 77.)

d) Funkce $y = ax^2 + bx + c$ je při $a > 0$ pro $x > -\dfrac{b}{2a}$ rostoucí a pro $x < -\dfrac{b}{2a}$ klesající. Jak je tomu při $a < 0$?

e) Funkce $y = x^n$, kde n je přirozené číslo, je pro $x > 0$ rostoucí a pro $x < 0$ rostoucí při lichém a klesající při sudém n.

f) Funkce $y = \sin x$ je v intervalu $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ rostoucí a v intervalu $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ klesající. Jak je tomu s funkcí $y = \cos x$?

9. Fysikální význam derivace.

V předcházejícím článku jsme zavedli pojem derivace jednak aritmeticky:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

jednak geometricky: derivace f' v čísle a je směrnice tečny grafu funkce v bodě $[a; f(a)]$. Pojem derivace se dá zavésti také fysikálně. Za tím účelem zkoumejme přímočarý pohyb bodu. Nezávisle proměnnou je tu čas, který, jak ve fysice zvykem, označíme t (tedy t stojí nyní místo x). Závisle proměnnou je souřadnice pohybujícího se bodu na přímce, kterou označíme s. Je tedy proměnná s

funkcí proměnné t:

$$s = f(t). \tag{1}$$

Uvažujme nyní dva časové okamžiky $t = t_1$, $t = t_2$. Příslušné polohy pohybujícího se bodu jsou $s = s_1 = f(t_1)$, $s = s_2 = f(t_2)$. Pro určitost budiž třeba $t_2 > t_1$. Od okamžiku t_1 do okamžiku t_2 uplyne doba $t_2 - t_1$ a za tu dobu urazí pohybující se bod dráhu rovnou číslu $|s_2 - s_1|$. Ve fysice přihlížíme však také ke *smyslu* pohybu a s ohledem na smysl pravíme, že dráha pohybujícího se bodu od okamžiku $t = t_1$ do okamžiku $t = t_2$ je rovna relativnímu číslu $s_2 - s_1$, které tedy může býti kladné nebo záporné a může také býti rovno nule. Podíl

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \tag{2}$$

t. j. podíl

$$\text{dráha : doba,}$$

ve kterém se přihlíží také ke smyslu dráhy, nazývá se **průměrná rychlost** pohybujícího se bodu za dobu od okamžiku $t = t_1$ do okamžiku $t = t_2$. Při tom jsme prozatím předpokládali, že $t_2 > t_1$. Tento předpoklad není podstatný, neboť výraz (2) zůstává beze změny, vyměníme-li t_1, t_2 mezi sebou, při čemž ovšem musíme zároveň vyměnit mezi sebou také čísla s_1, s_2. Podstatný je pouze předpoklad, že oba časové okamžiky t_1, t_2 jsou navzájem různé; jinak by výraz (1) neměl smyslu.

Nyní předpokládejme, že jeden z obou časových okamžiků t_1, t_2, pro určitost to budiž okamžik t_1, byl pevně zvolen, kdežto druhý z nich zůstává libovolný a proto jej neoznačíme t_2, nýbrž t bez indexu. Zároveň ovšem místo s_2 napíšeme s neboli $f(t)$ a ježto $s_1 = f(t_1)$, průměrná rychlost za dobu od okamžiku t_1 do okamžiku t (je-li $t > t_1$) nebo za dobu od okamžiku t do okamžiku t_1 (je-li $t < t_1$) je dána podílem

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}. \tag{3}$$

Jestliže studujeme pohyb bodu pouze na základě zkušenosti, známe funkci f pouze přibližně a o podílu (3) nemůžeme vůbec nic říci, jsou-li si oba časové okamžiky t_1, t_2 příliš blízké. Neboť potom je číslo $|t - t_1|$ velmi malé a sebe menší chyba v hodnotě $f(t)$ způsobí obrovskou chybu v podílu (3). Další důsledky jsou možné pouze tehdy, učiníme-li nějaký matematický předpoklad o *přesném tvaru* funkce f. Protože všecka skutečná měření jsou pouze přibližná, nelze žádný matematický předpoklad tohoto druhu odůvodnit pouze na základě zkušenosti. Ve skutečnosti při studiu jednoho určitého fysikálního zjevu je vždy možné k vysvětlení jeho vlastností podat nekonečně mnoho matematických formulací. Jestliže však si vybereme jednu z možných formulací, dává matematika možnost, učiniti velkou řadu důsledků z předpokladu správnosti vybrané formulace a z těchto důsledků vybíráme takové, které můžeme experimentálně (pokusně) kontrolovat. V daném případě studia pohybu bodu na přímce se ukázal nesmírně cenným předpoklad, že pohyb bodu se dá vyjádřit pomocí matematicky jednoduché funkce f, která má tu vlastnost, že podíl (3) má určitou limitu pro $t \to t_1$. Tato limita je derivace funkce f v čísle t_1 a ve fysice se nazývá **okamžitá rychlost** pohybujícího se bodu, zpravidla krátce **rychlost,** protože okamžitá rychlost je mnohem důležitější než průměrná rychlost, ačkoli na pouhém základě zkušenosti lze určit pouze průměrnou rychlost, kdežto sám pojem okamžité rychlosti vyžaduje ke své samotné formulaci matematických předpokladů, jejichž správnost plyne teprve ze správnosti zkušeností kontrolovatelných důsledků učiněných předpokladů.

Nejjednodušší je případ t. zv. **rovnoměrného pohybu** bodu na přímce. Je to ten případ, ve kterém funkce f je lineární celistvá funkce. Derivace funkce f, tedy okamžitá rychlost, je v tomto případě konstantní. Tato konstanta se ve fysice označuje písmenem c. Tedy u rovnoměrného pohybu jest

$$f(t) = ct + q, \tag{4}$$

kde také q je konstanta. Známe-li rychlost c, můžeme určit konstantu q, jestliže známe pro jeden časový okamžik $t = t_1$ příslušnou hodnotu s_1 funkce $s = f(t)$. Potom jest

$$s_1 = ct_1 + q,$$

z čehož vypočteme $q = s_1 - ct_1$ a dosadíme-li do (4), dostaneme základní vzorec pro rovnoměrný pohyb na přímce:

$$s = s_1 + c\,(t - t_1). \tag{5}$$

Jestliže f není lineární celistvá funkce, pak rychlost není konstantní a ve fysice se označuje písmenem v. Jest obecně

$$v = f'(t). \tag{6}$$

Nejdůležitější je ten případ, že $s = f(t)$ je kvadratická celistvá funkce:

$$s = at^2 + bt + c, \tag{7}$$

kde a, b, c jsou konstanty. Pro rychlost v platí (6), takže podle III ve článku 8 jest

$$v = 2at + b. \tag{8}$$

Při nerovnoměrném pohybu je rychlost v, stejně jako dráha s, funkcí času t [viz (6)] a můžeme pro rychlost opakovat úvahu výše provedenou o dráze. Pro dva různé časové okamžiky $t = t_1$, $t = t_2$, jimž přísluší rychlosti $v = v_1$, $v = v_2$, utvoříme podíl

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \tag{9}$$

který vyjadřuje prudkost změny rychlosti při změně času, stejně jako průměrná rychlost (2) vyjadřovala prudkost změny dráhy při změně času. Opět předpokládáme, že časový okamžik $t = t_1$ byl pevně zvolen a že druhý časový okamžik je libovolný, pročež místo (9) píšeme

$$\frac{f'(t) - f'(t_1)}{t - t_1}. \tag{10}$$

Nesmírně užitečným se pro fysiku ukázal matematický předpoklad, že podíl (10) má určitou limitu pro $t \doteq t_1$. Tato limita se nazývá **zrychlení** pohybu. Pojem zrychlení vede k fysikálnímu pojmu **síly**, který po staletí byl základním fysikálním pojmem. V případě (7) je zrychlení rovné derivaci funkce (8), t. j. [viz článek 8, II] zrychlení je rovné konstantě $2a$. Jestliže tuto konstantu označíme g [tak se děje ve fysice při pohybu bodu po (obecně šikmé) přímce v důsledku přitažlivosti zemské], máme pro dráhu podle (7) vzorec

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 + bt + c,$$

kde b, c jsou konstanty. Pro rychlost máme potom podle (8) vzorec

$$v = gt + b.$$

Konstanty b, c určíme, jestliže pro jeden časový okamžik $t = t_1$ známe příslušné hodnoty $s = s_1$, $v = v_1$. Potom jest

$$s_1 = \tfrac{1}{2} g t^2_1 + bt_1 + c,$$

$$v_1 = gt_1 + b,$$

tedy

$$b = v_1 - gt_1,$$

$$c = s_1 - \tfrac{1}{2} g t^2{}_1 - (v_1 - g t_1)\, t_1 =$$
$$= s_1 + \tfrac{1}{2} g t^2{}_1 - v_1 t_1,$$

z čehož plyne po snadné úpravě

$$s = \tfrac{1}{2} g (t^2 - t_1^2) + v_1 (t - t_1) + s_1,$$
$$v = g (t - t_1) + v_1.$$

Ježto zrychlení je konstantní, nazývá se tento pohyb **rovnoměrně zrychlený.**

Vedle rovnoměrně zrychleného pohybu má pro fysiku základní význam **harmonický pohyb,** při kterém je

$$s = A \sin(\omega t + \varepsilon), \tag{11}$$

kde A, ω, ε jsou konstanty a jest $A > 0$, $\omega > 0$. Rychlost dostaneme z (11) derivováním; podle vět VI, VIII, IX a X článku 8 najdeme

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varepsilon). \tag{12}$$

Dalším derivováním dostaneme zrychlení, které označíme a. Podle vět VI, VIII, IX a XI článku 8 najdeme

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon)$$

neboli

$$a = -\omega^2 s. \tag{13}$$

Ježto $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, plyne z (11), že hodnota s je táž v časovém okamžiku t jako v časovém okamžiku $t + T$, kde

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

je **perioda** harmonického pohybu. Ježto všecky hodnoty funkce sinus jsou v intervalu $-1 \leqq x \leqq 1$, jsou všecky hodnoty s v intervalu $-A \leqq s \leqq A$; číslo A je **amplituda** harmonického pohybu.

Cvičení.

84. Těleso o hmotě $M = 3$ kg se pohybuje v přímce podle rovnice $s = 1 + t + t^2$, kde s je udáno v cm, t ve vteřinách. Stanovte velikost kinetické energie ($\frac{1}{2} M v^2$) tělesa na konci páté vteřiny od počátku pohybu.
85. Vlak se rozjíždí ze stanice pohybem vyjádřeným rovnicí $s = at^2 + bt + c$ a po uplynutí jedné minuty dosáhne rychlosti 60 km/hod. Jak velikou vzdálenost ujede, než dosáhne této rychlosti? Jaké je zrychlení pohybu?

86. Těleso sjede po nakloněné rovině 50 m dlouhé za 10 vteřin. Předpokládáme-li, že dráha je kvadratická funkce času a že počáteční rychlost tělesa je rovna nule, jaká je jeho konečná rychlost?

87. Rychlík jedoucí rychlostí 90 km/hod. má zabrzditi tak, aby se zastavil na vzdálenost 1 km. a) Po jaké době se zastaví? b) Stanovte jeho rychlost vždy po 10 vteřinách od okamžiku, kdy byly utaženy brzdy.

88. Těleso vržené svisle vzhůru (ve vakuu a při malých rychlostech i ve vzduchu) se pohybuje podle rovnice

$$s = ct - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

kde t je čas, s dráha, c daná počáteční rychlost a $g \doteq 9{,}81$ m/sec² je gravitační zrychlení.

a) Určete rychlost tělesa v čase t.

b) V kterém okamžiku a v které poloze je rychlost tělesa rovna nule? Jaký to má fysikální význam?

c) S jakou rychlostí a v kterém okamžiku dopadne těleso zpět do místa, z něhož bylo vrženo?

d) Propočtěte pro $c = 40$ m/sec.

89. Pohyb tělesa vrženého šikmo danou rychlostí c pod výškovým úhlem α, měřeným od vodorovné roviny, lze rozložiti ve dvě složky: jedna z nich — vodorovná — je rovnoměrný pohyb s rychlostí $c\cos\alpha$, druhá z nich — svislá — je svislý vrh s počáteční rychlostí $c\sin\alpha$ (viz cvičení 88).

a) Dokažte, že křivka, kterou těleso opisuje, má rovnici

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2c^2\cos^2\alpha}.$$

b) V jaké vzdálenosti od počátku dopadne těleso zpět na zem? Kdy je tato vzdálenost největší (při dané počáteční rychlosti c)? Jaká je tato největší vzdálenost?

c) Rychlost tělesa se vypočte vektorovým sečtením rychlostí obou složek. Stanovte, jak závisí rychlost tělesa na čase. V kterém okamžiku je tato rychlost nejmenší? Jaký to má fysikální význam?

90. Kolo setrvačníku rozbíhá se tak, že úhel otočení je úměrný čtverci času. První otočka trvala 8 vteřin. Určete úhlovou rychlost po 32 vteřinách od počátku pohybu.

91. Dokažte, že při pohybu harmonickém

a) rychlost je největší, když je výchylka rovná nule a rychlost je rovná nule, když je výchylka největší;

b) zrychlení je přímo úměrné výchylce, liší se však od ní znamením.

92. Pohyb harmonický je dán rovnicí $s = A \sin(\omega t + \varepsilon)$, kde t je měřeno ve vteřinách. Kolik kmitů za vteřinu těleso vykoná? (Kmit je pohyb z jedné krajní polohy do druhé krajní a zpět.)

93. Ladička koná 435 kmitů za vteřinu (komorní a), při čemž koncový bod ramene ladičky se vychyluje o 1 mm od rovnovážné polohy. Jakou rychlostí probíhá tento bod rovnovážnou polohou?

94. Harmonický pohyb děje se tak, že těleso vykoná n kmitů za vteřinu a v okamžiku $t = t_0$ je poloha tělesa dána vztahem $s = 0$ a jeho rychlost je $v = v_0$. Stanovte rovnici tohoto pohybu, jeho rychlost a zrychlení.

95. a) Promítneme-li rovnoměrný pohyb kruhový s úhlovou rychlostí ω pravoúhle do některého průměru kruhové dráhy, dostaneme pohyb harmonický. Dokažte.
b) Je tedy možno rovnoměrný pohyb kruhový kolem počátku dostati složením dvou navzájem kolmých pohybů harmonických, z nichž jeden děje se v ose x a druhý v ose y. Napište rovnice těchto dvou složek, z nichž vzniká rovnoměrný pohyb kruhový, jestliže pohybující se bod se otáčí kolem počátku v kladném smyslu s úhlovou rychlostí ω tak, že v okamžiku $t = 0$ má souřadnice x_0, y_0.
c) Složením rychlostí obou složek, dostaneme rychlost výsledného rovnoměrného pohybu kruhového. Proveďte to.

10. Elipsa.

Zvolme dvě kladná čísla a, b. Budeme zkoumat křivku, která se skládá ze všech bodů $[x; y]$, pro které je splněna rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Jestliže $a = b$, lze rovnici (1) psáti ve tvaru $x^2 + y^2 = a^2$; proto křivka určená rovnicí (1) v tomto případě je **kružnice** opsaná kolem počátku s poloměrem a. Jestliže $a \neq b$, potom křivka určená rovnicí (1) se jmenuje **elipsa.** Při studiu elipsy budeme obyčejně předpokládati, že $a > b$; toto omezení se týká pouze volby soustavy souřadnic, neboť případ $a < b$ se liší od případu $a > b$ pouhou výměnou os souřadnic. Ostatně omezení $a > b$ je nepodstatné také proto, že většina našich úvah bude stejná pro všecky tři možné případy $a = b$, $a > b$, $a < b$.

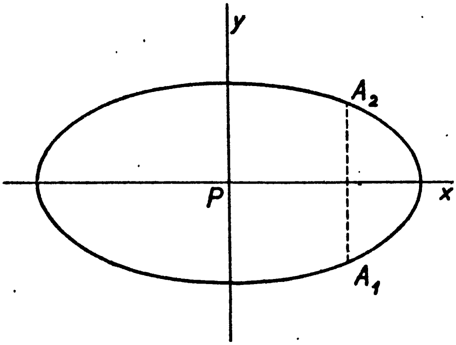
Z rovnice (1) je patrné, že zároveň s bodem $[x; y]$ leží na elipse o rovnici (1) bod $[-x; -y]$ a také oba body $[x; -y]$, $[-x; y]$. Z toho soudíme jednak, že počátek P je střed souměrnosti křivky; nazýváme jej proto **středem elipsy;** dále soudíme, že obě osy souřadnic jsou osami souměrnosti elipsy; osa x se jmenuje **hlavní** osa, osa y **vedlejší** osa elipsy. Každá osa protne elipsu ve dvou bodech; hlavní osa v bodech $[a; 0]$, $[-a; 0]$, které mají od středu elipsy vzdálenost a a jmenují se **hlavní vrcholy** elipsy; vedlejší osa v bodech $[0; b]$, $[0; -b]$, které mají od středu elipsy vzdálenost b a jmenují se **vedlejší vrcholy** elipsy. Číslo a se jmenuje **hlavní poloosa,** číslo b **vedlejší poloosa** elipsy (kde $b < a$).

Jestliže $|x| > a$, jest $x^2 > c^2$, $\frac{x^2}{a^2} > 1$ a nelze určit reálné číslo y tak, aby platilo (1). Jestliže však číslo x je v intervalu $-a \leqq x \leqq a$, lze nalézti y tak, aby platilo (1); k tomu je třeba položiti buďto

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (2)$$

nebo

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}; \qquad (3)$$



Obr. 21.

pro $x = a$ a pro $x = -a$ obě hodnoty y splynou. Vzhledem k souměrnosti elipsy podle obou os stačí při zkoumání tvar elipsy (obr. 21) zkoumati pouze funkci (2) v intervalu $0 \leqq x \leqq a$; při tom když x^2 se zvětšuje, $a^2 - x^2$ se zmenšuje a proto také y se zmenšuje, t. j. funkce (2) klesá v intervalu $0 \leqq x \leqq a$. Pro každé x z intervalu $-a < x < a$ máme na elipse dva body A_1, A_2 (obr. 21), jejichž prvá souřadnice je rovna zvolenému číslu x; druhá souřadnice je rovna

$$\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

O vnitřních bodech úsečky A_1, A_2 pravíme, že leží **uvnitř elipsy**; pro tyto body je

$$|y| < \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y^2 < \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$\frac{y^2}{b^2} < 1 - \frac{x^2}{a^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

Obráceně každý bod, pro který je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \qquad (4)$$

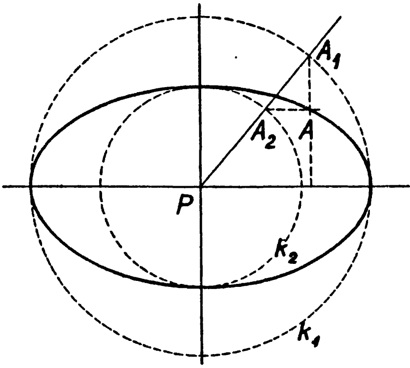
leží uvnitř elipsy. Neboť ze (4) nejprve vychází, že

$$\frac{x^2}{a^2} < 1,\ x^2 < a^2,\ |x| < a,\ -a < x < a,$$

a potom snadno spočteme, že

$$|y| < \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

O těch bodech, které neleží ani na elipse, ani uvnitř elipsy, pravíme, že leží **vně elipsy**; pro tyto body je



Obr. 22.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

Vyložíme si methodu, jak snadno narýsovat libovolný počet bodů elipsy. Kolem počátku veďme (obr. 22) kružnici k_1 s poloměrem a a kružnici k_2 s poloměrem b. Zvolme libovolně bod $A_1 \equiv [x_1; y_1]$ na kružnici k_1, takže $x^2{}_1 + y^2{}_1 = a^2$. Jestliže t probíhá interval $0 \leqq t \leqq 1$, jest [viz učebnici pro III. třídu str. 108],

$$x = tx_1, \quad y = ty_1$$

parametrické vyjádření úsečky PA_1. Volíme-li $t = \frac{b}{a}$, dostaneme bod $A_2 \equiv$ $\equiv [x_2; y_2]$, kde

$$x_2 = \frac{b}{a}x_1, \quad y_2 = \frac{b}{a}y_1;$$

jest

$$x_2{}^2 + y^2{}_2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2{}_1 + y^2{}_1) = \frac{b^2}{a^2} \cdot a^2 = b^2,$$

takže bod A_2 leží na kružnici k_2. Položme nyní $x = x_1$, $y = y_2$. Pak jest

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}y^2{}_1, \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{y^2{}_1}{a^2},$$

tedy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2{}_1}{a^2} + \frac{y^2{}_1}{a^2} = \frac{x^2{}_1 + y^2{}_1}{a^2} = 1,$$

t. j. bod $A \equiv [x; y]$ leží na elipse. Protože oba body A, A_1 mají touž prvou souřadnici, je přímka AA_1 rovnoběžná s osou y; podobně přímka AA_2 je rovnoběžná s osou x. Tedy bod A elipsy dostaneme jako průsečík vodorovné přímky vedené bodem A_2 se svislou přímkou vedenou bodem A_1. Tímto způsobem snadno narýsujeme tolik bodů elipsy, že celkový průběh křivky je patrný. Při skutečném provedení konstrukce užijeme také souměrnosti podle obou os.

Víme již, že každá osa protne elipsu ve dvou bodech. Totéž platí o kterékoli jiné přímce jdoucí počátkem. Rovnice takové přímky je

$$y = kx, \tag{12}$$

kde $k \neq 0$. Souřadnice průsečíků vyhovují oběma rovnicím (1) a (12). Jestliže ze (12) dosadíme za y do (1), vyjde snadno

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 k^2}}$$

a ke každému z obou x určíme y z rovnice (12).

Zvolme si na hlavní ose libovolný bod $[e; 0]$ a počítejme vzdálenost libovolného bodu elipsy $[x; y]$ od tohoto bodu. Pro kterýkoli bod elipsy platí rovnice (1), z níž vypočteme

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Je tedy

$$(x - e)^2 + y^2 = x^2 - 2\,ex + e^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2\,ex + e^2 + b^2.$$

Volíme-li e tak, že

$$b^2 + e^2 = a^2, \tag{13}$$

což je možné, ježto $0 < b < a$, tedy $b^2 < a^2$; vyjde

$$(x - e)^2 + y^2 = \left(\frac{ex}{a}\right)^2 - 2\,ex + a^2$$

neboli

$$(x - e)^2 + y^2 = \left(a - \frac{ex}{a}\right)^2. \tag{14}$$

Ze (13) plyne $|e| < a$; mimo to, ježto bod $[x; y]$ leží na elipse, jest $|x| \leqq a$. Proto je $|ex| < a^2$, $\left|\frac{ex}{a}\right| < a$ a číslo $a - \frac{ex}{a}$ je kladné, takže

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a - \frac{ex}{a}.$$

Bod $[e; 0]$ se jmenuje **ohnisko** elipsy. Protože ze (13) lze určit e dvojím způsobem, má elipsa dvě ohniska. Je zvykem značit e *kladné* číslo vyhovující rovnici (13). Potom jsou

$$F_1 \equiv [e; 0], \quad F_2 \equiv [-e; 0]$$

ohniska elipsy; pro vzdálenosti libovolného bodu elipsy $X \equiv [x; y]$ od ohnisek máme vzorce

$$\overline{F_1X} = a - \frac{ex}{a}, \quad \overline{F_2X} = a + \frac{ex}{a},$$

ze kterých plyne

$$\overline{F_1X} + \overline{F_2X} = 2a. \tag{15}$$

Tedy součet vzdáleností bodu na elipse od obou ohnisek je konstanta rovná $2a$. Obráceně každý bod $X \equiv [x; y]$, pro který platí (15), leží na elipse. Neboť

$$\overline{F_1X}^2 = (x-e)^2 + y^2 = x^2 - 2\,ex + e^2 + y^2,$$
$$\overline{F_2X}^2 = (x+e)^2 + y^2 = x^2 + 2\,ex + e^2 + y^2,$$

tedy

$$\overline{F_2X}^2 - \overline{F_1X}^2 = 4\,ex.$$

Avšak

$$\overline{F_2X}^2 - \overline{F_1X}^2 = (\overline{F_1X} + \overline{F_2X}) \cdot (\overline{F_2X} - \overline{F_1X}), \tag{16}$$

takže podle (15) a (16) je

$$\overline{F_2X} - \overline{F_1X} = \frac{2ex}{a}. \tag{17}$$

Z (15) a (17) plyne dále:

$$\overline{F_2X} = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = a + \frac{ex}{a},$$

tedy

$$(x+e)^2 + y^2 = a^2 + 2\,ex + \frac{e^2x^2}{a^2},$$

$$x^2 + e^2 + y^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2},$$

$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2y^2 = (a^2 - e^2) \cdot a^2$$

a z toho podle (13) vyjde (1).

Číslo e se jmenuje **výstřednost** elipsy (latinsky excentricita, proto se volí písmeno e).

Cvičení.

96. Určete velikosti poloos elipsy o rovnici $64x^2 + 81y^2 = 625$ a rozhodněte o poloze bodů $M \equiv [2\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}]$, $N \equiv [2{,}4; 1{,}6]$, $L \equiv [3; 2]$ vzhledem k elipse.

97. Napište rovnici elipsy, která má osy x, y souřadnic za osy souměrnosti, když je dáno:

a) $a = 20$; $e = 16$;

b) $e = 2$ a bod $M \equiv [1; \frac{2}{3}\sqrt{10}]$ elipsy;

c) body $M \equiv [3; 3{,}2]$, $N \equiv [4; 2{,}4]$ elipsy; které vztahy musí platit mezi souřadnicemi bodů M, N, má-li mít úloha řešení?

98. Užitím ohniskových vlastností narýsujte elipsu o rovnici:

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$; b) $9x^2 + 16y^2 = 576$.

Zvláště sestrojte bod X, o němž platí $\overline{F_1X} = 4$, kde $F_1 \equiv [-e; 0]$ je ohnisko elipsy.

99. Dokažte, že bod $A \equiv [a\cos\varphi; b\sin\varphi]$ leží na elipse o rovnici $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; tím dospíváme k parametrickému vyjádření elipsy: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$. Z obr. 22 snadno dokážete, že parametr φ je směrový úhel polopřímky PA_2A_1.

a) Pro které hodnoty parametru φ dospíváme k témuž bodu elipsy?

b) Dokažte, že je-li $[x_0; y_0]$ bodem naší elipsy, potom mu přísluší jediná hodnota parametru $0 \leq \varphi < 2\pi$. (Určete bod $J \equiv \left[\dfrac{x_0}{a}; \dfrac{y_0}{b}\right]$, o němž jistě platí $\overline{PJ} = 1$.)

c) Jak zní parametrická vyjádření kružnic k_1, k_2 z obr. 22?

d) Určete velikost parametrů φ příslušných k vrcholům elipsy.

100. Úsečka XY je bodem A rozdělena ve dvě části tak, že $\overline{XM} = b$, $\overline{YM} = a$. Úsečka je umístěna tak, že bod X je bodem kladné části osy x a bod Y bodem kladné části osy y (včetně počátku P souřadnic); dokažte, že při různých polohách bodů X, Y opíše bod $M \equiv [x; y]$ úsečky XY eliptický oblouk. [Uvažujte $\triangle XYP$, pokud existuje, a označte $\varphi = \sphericalangle PXY$ (ve dvou polohách úsečky XY trojúhelník XYP neexistuje); pak užijte výsledku cvičení 99.]

101. Výsledku předchozího cvičení 100 užijte ke konstrukci druhé poloosy elipsy, která je dána polohou x, y svých os, jednou poloosou a nebo b a bodem M elipsy. Kdy má úloha řešení?

102. Budiž dán bod $M \equiv [x; y]$; uvažujte body $M' \equiv [x' = x; y' = \dfrac{a}{b}y]$, $M'' \equiv$ $\equiv [x'' = \dfrac{b}{a}x; y'' = y]$. Dokažte:

a) Když M je bodem elipsy o rovnici $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, potom bod M' je bodem kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = a^2$, kdežto bod M'' je bodem kružnice o rovnic

$x^2 + y^2 = b^2$. b) Když M je bodem přímky r o rovnici $mx + ny + p = 0$, potom bod M' je bodem určité přímky r' a bod M'' je bodem určité přímky r''. Napište rovnice přímek r', r'' a vyšetřete jaký je vztah mezi dvojicí přímek r, r' nebo r, r''.

e) Užitím výsledků cvičení a), b) řešte dvojím způsobem úlohu: Vyšetřte graficky průsečíky přímky r s elipsou.

103. Dokažte, že vnitřek elipsy nebo vnitřek elipsy i s body elipsy je konvexní útvar. [Buďtež $X_1 \equiv [x_1; y_1]$, $X_2 \equiv [x_2; y_2]$ dva body roviny, které neleží vně elipsy. Potom všechny vnitřní body $X \equiv [x; y]$ úsečky X_1X_2 leží uvnitř elipsy. Parametrické vyjádření vnitřku úsečky X_1X_2 upravte takto: $x = x_1(1 - t) + x_2t$ atd. pro $0 < t < 1$. Nejprve uvažte případ, že $X_1 \not\equiv X_2$ jsou body elipsy. Tu je $b^2(x_2 + \varepsilon x_1)^2 + a^2(y_2 + \varepsilon y_1)^2 - a^2b^2 \geqq 0$ (kde $\varepsilon = \pm 1$); rovnost platí pro $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$.

11. Hyperbola.

Zvolme opět dvě kladná čísla a, b. Budeme zkoumat křivku, která se skládá ze všech bodů $[x; y]$, pro které je splněna rovnice

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Tato křivka se jmenuje **hyperbola.** Je to opět křivka souměrná podle středu P a podle osy x i osy y. Bod P je **střed hyperboly,** osa x je **její hlavní osa,** osa y je **vedlejší osa.** Číslo a se zase jmenuje **hlavní poloosa,** číslo b je **vedlejší poloosa.** U hyperboly není třeba rozeznávat případy $a = b$, $a > b$, $a < b$. Hlavní osa protne hyperbolu ve dvou bodech $[a; 0]$, $[-a; 0]$, které se jmenují **vrcholy** hyperboly. Vedlejší osa hyperbolu neprotne.

Je zřejmé, že také křivka daná rovnicí

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1'}$$

je hyperbola, pro kterou však je osa x vedlejší osou, osa y hlavní osou. Obě hyperboly jsou navzájem **sdružené.** Stačí ovšem, budeme-li zkoumat hyperbolu danou rovnicí (1).

Rovnice (1) se dá psáti ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1,$$

kde pravá strana nemůže býti menší než 1. Proto jestliže $|x| < a$, nemůže takovému x odpovídat žádný bod hyperboly, neboť pro takové x je $\frac{x^2}{a^2} < 1$. Body hyperboly dostaneme tedy pouze pro $|x| \geqq a$. To dává dvě možnosti: jednak $x \geqq a$, jednak $x \leqq -a$. Proto hyperbola se skládá ze dvou od sebe oddělených částí, které se jmenují **větve** hyperboly. Každá z obou větví je souměrným obrazem druhé podle vedlejší osy. Proto stačí zkoumat tvar té větve, na které je $x \geqq a$. Pro každé $x \geqq a$ lze nalézti y tak, aby platilo (1); k tomu je třeba položit buďto

$$y = c\sqrt{x^2 - a^2} \tag{2}$$

nebo

$$y = -c\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{3}$$

při čemž (zde i v dalším)

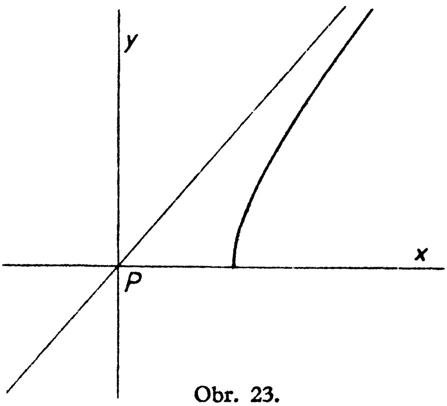
$$c = \frac{b}{a}, \quad c > 0\,. \tag{4}$$

Zkoumaná větev se skládá ze dvou částí navzájem souměrných podle hlavní osy. Budeme zkoumati horní část (obr. 23), která je dána funkcí (2) pro $x \geqq a$. Tato část počíná ve vrcholu $[a; 0]$ a jinak je na ní $y > 0$. Z (2) je patrné, že zvětšíme-li x, zvětšuje se také y, t. j. funkce (2) roste v intervalu $x \geqq a$. Dále ve (2) pro všecka $x \geqq a$ je

$$\sqrt{x^2 - a^2} < x,$$

takže $y < cx$, t. j. zkoumaná část hyperboly leží pod přímkou, jejíž rovnice je

$$y = cx. \tag{5}$$



Obr. 23.

Jestliže x se zvětšuje, přibližuje se hyperbola víc a více přímce (5), t. j. je-li $[x; y]$ bod na hyperbole ($x > a, y > 0$) a je-li $[x; y^*]$ příslušný bod přímky (5), je stále $y^* > y$ neboli $y^* - y > 0$, ale při velmi velkém y je číslo $y^* - y$ velmi malé. Neboť

$$y^* = cx, \quad y = c\sqrt{x^2 - a^2},$$

tedy

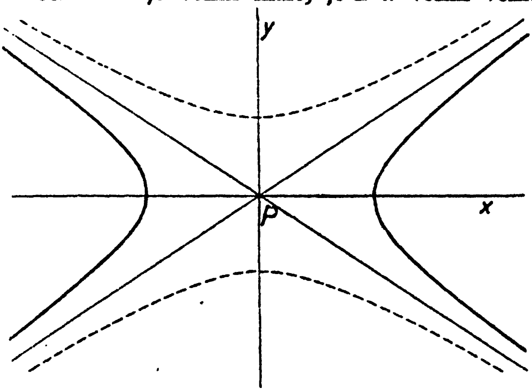
$$(y^*)^2 - y^2 = c^2a^2. \tag{5'}$$

Ježto $$(y^*)^2 - y^2 = (y^* + y)(y^* - y),$$
jest $$y^* - y = \frac{c^2a^2}{y^* + y}.$$

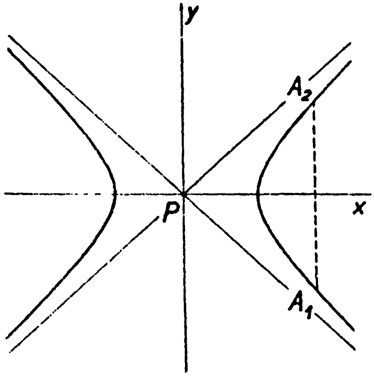
Protože čísla c^2a^2, y^*, y jsou kladná, je

$$y^* - y < \frac{c^2a^2}{y^*} \quad \text{neboli} \quad y^* - y < \frac{ca^2}{x},$$

což číslo je velmi malé, je-li x velmi veliké.



Obr. 24.



Obr. 25.

Celkový průběh hyperboly je naznačen silně vytaženou čarou v obr. 24. Obě přímky (5) a

$$y = -cx \tag{6}$$

jsou **asymptoty hyperboly**; význam slova asymptota jsme si objasnili již ve článku 4.

Obě asymptoty tvoří čtyři úhly, z nichž dva mají osu v hlavní ose hyperboly, druhé dva ve vedlejší ose. Každá z obou větví leží uvnitř jednoho z těch dvou úhlů, jejich osy jsou v hlavní ose; do ostatních dvou úhlů hyperbola vůbec nevnikne. Tytéž asymptoty má i sdružená hyperbola (1′) (vyčárkovaná v obr. 24), která leží uvnitř těch dvou úhlů, do kterých nevniká hyperbola (1).

Pro každé číslo x z intervalu $x > a$ nebo $x < -a$ máme na hyperbole dva body A_1, A_2 (obr. 25), jejichž prvá souřadnice je rovna, zvolenému číslu x; druhá souřadnice je rovna

$$\pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

O vnitřních bodech úsečky A_1A_2 pravíme, že leží **uvnitř hyperboly**; pro tyto body je

$$|y| < \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y^2 < \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

$$\frac{y^2}{b^2} < \frac{x^2}{a^2} - 1, \quad 1 < \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

neboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1. \tag{7}$$

Obráceně, každý bod, pro který platí (7), leží uvnitř hyperboly. Neboť platí-li (7), je tím spíše $\frac{x^2}{a^2} > 1$ a proto je

$$x^2 > a^2, \quad |x| > a,$$

t. j. buďto

$$x > a \quad \text{nebo} \quad x < -a$$

a potom snadno spočteme, že

$$|y| < \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

O těch bodech, které neleží ani na hyperbole ani uvnitř hyperboly, pravíme, že leží **vně hyperboly**; pro tyto body je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1. \tag{8}$$

Víme, že hlavní osa protne hyperbolu ve dvou bodech a že vedlejší osa hyperbolu neprotne. Budiž

$$y = kx \tag{9}$$

rovnice kterékoli jiné přímky procházející bodem P. Abychom našli průsečíky, máme řešit soustavu rovnic (1), (9). Dosadíme-li za y z (9) do (1), vyjde po snadné úpravě

$$x^2(b^2 - a^2k^2) = a^2b^2$$

neboli podle (4)

$$x^2(c^2 - k^2) = a^2. \tag{10}$$

Je-li $|k| > c$, je $x^2(c^2 - k^2) \leqq 0$ pro všecka x a tedy rovnici nelze vyhověti; podobně v případě $|k| = c$. Naproti tomu pro $|k| < c$ má rovnice (10) dva kořeny

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{c^2 - k^2}}$$

a ke každému z obou x určíme y z (9). Tedy přímka (9) procházející středem hyperboly P protne hyperbolu pouze v tom případě, že $|k| < c$, t. j. že leží uvnitř těch úhlů určených asymptotami, uvnitř kterých leží hyperbola.

Kterýkoli bod $[x; y]$ v rovině má od přímky (5) vzdálenost

$$d = \frac{|y - cx|}{\sqrt{1 + c^2}}$$

[viz učebnici pro III. třídu, str. 108, (5)] a od přímky (6) vzdálenost

$$d' = \frac{|y + cx|}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

Součin obou vzdáleností je

$$dd' = \frac{|y^2 - c^2x^2|}{1 + c^2}$$

neboli podle (4)

$$dd' = \frac{|a^2y^2 - b^2x^2|}{a^2 + b^2}$$

neboli

$$dd' = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left|\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}\right|.$$

Jestliže bod $[x; y]$ leží na hyperbole (1) nebo na sdružené hyperbole (1'), jest

$$\left|\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right| = 1, \tag{11}$$

takže

$$dd' = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}. \tag{12}$$

Tedy součin vzdáleností bodu na hyperbole od obou asymptot je konstanta $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$, která je pro dvě sdružené hyperboly táž. Obráceně, platí-li (12), musí platit (11), t. j. bod $[x; y]$ leží na jedné ze dvou sdružených hyperbol (1), (1').

Hyperbola, jejíž obě asymptoty stojí na sobě kolmo, se jmenuje **rovnoosá hyperbola**; podmínka pro rovnoosost tedy je kolmost obou přímek (5), (6) se směrnicemi c, $-c$, zní tedy $c^2 = 1$ neboli $a^2 = b^2$ nebo též $a = b$, protože obě čísla a, b jsou kladná. U rovnoosé hyperboly můžeme soustavu souřadnic volit tak, že osami soustavy souřadnic jsou obě asymptoty. Vzdálenosti bodu

$[x; y]$ od obou asymptot jsou potom dány čísly $|x|, |y|$ a jejich součin $|xy|$ je roven konstantě h, která je ovšem kladná. Všecky hyperboly vyhovují rovnici

$$|xy| = h; \tag{13}$$

téže rovnici vyhovují také všecky body sdružené hyperboly. Rovnici (13) lze vyhověti dvojím způsobem; buďto tak, že $y = \frac{h}{x}$, nebo tak, že $y = -\frac{h}{x}$. Každá z obou sdružených hyperbol je grafem jedné ze dvou funkcí $y = \frac{h}{x}$, $y = -\frac{h}{x}$ (viz článek 4).

Také hyperbola má jako elipsa **dvě ohniska**. Zvolme opět na hlavní ose bod $[e; 0]$ a počítejme vzdálenost bodu hyperboly $[x; y]$ od tohoto bodu. Pro každý bod na hyperbole (1) jest

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

takže po úpravě

$$(x - e)^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - 2\,ex + e^2 - b^2.$$

Volíme-li e tak, že

$$a^2 + b^2 = e^2, \tag{14}$$

jest

$$(x - e)^2 + y^2 = \left(\frac{ex}{a} - a\right)^2. \tag{15}$$

Volíme-li e kladné, máme vedle (15) ještě obdobný vztah, ve kterém místo e je $-e$:

$$(x + e)^2 + y^2 = \left(\frac{ex}{a} + a\right)^2. \tag{15'}$$

Pro každý bod na hyperbole je $|x| \geqq a$; mimo to podle (14) je $e > a$, takže $\left|\frac{ex}{a}\right| > a$. Na jedné větvi hyperboly je $x > 0$, tedy $\frac{ex}{a} > a$. Pro každý bod $X \equiv$ $\equiv [x; y]$ na této větvi jest

$$\overline{F_1X} = \frac{ex}{a} - a, \quad \overline{F_2X} = \frac{ex}{a} + a, \tag{16}$$

kde $F_1 \equiv [e; 0]$, $F_2 \equiv [-e; 0]$ jsou ohniska. Ze (16) plyne

$$\overline{F_2X} - \overline{F_1X} = 2a,$$

na druhé větvi je podobně

$$\overline{F_1X} - \overline{F_2X} = 2a;$$

na celé hyperbole je

$$|\overline{F_1X} - \overline{F_2X}| = 2a, \tag{17}$$

t. j. **absolutní hodnota rozdílu vzdáleností bodu na hyperbole od obou ohnisek je konstanta rovná** $2a$. Týmž postupem jako u elipsy se dá zjistit, že obráceně každý bod X, pro který platí (17), leží na hyperbole.

Cvičení.

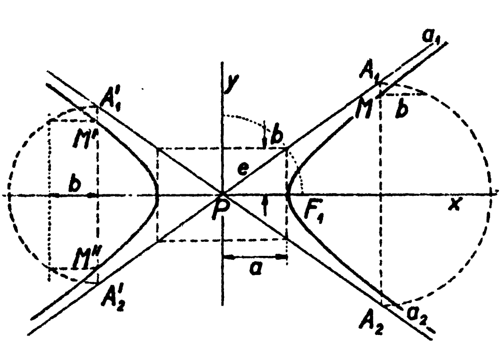
104. Hyperbola má jednu osu v ose x, druhou v ose y; určete rovnici hyperboly, je-li dáno:
a) $a = \sqrt{15}$ a bod $M \equiv [5; -2]$ hyperboly; b) body $M \equiv [2\sqrt{7}; -3]$, $N \equiv$ $\equiv [-7; -6\sqrt{2}]$ hyperboly; proveďte diskusi a stanovte podmínky, které musí splňovat souřadnice bodů M, N, má-li mít úloha řešení.

105. Bod $A' \equiv [x \cdot c; y \cdot c]$, kde $c \neq 0$ je daná konstanta, je obrazem bodu $A' \equiv [x; y]$ ve stejnolehlosti o středu $P \equiv [0; 0]$ a koeficientu stejnolehlosti c. Napište rovnici čáry k', která je v této stejnolehlosti obrazem:
a) elipsy o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
b) hyperboly o rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; dokažte, že obě hyperboly mají společné asymptoty.

106. a) Budiž $M \equiv [x; y]$ bod hyperboly o rovnici $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (viz obr. 26). Dále buďtež $A_1 \equiv [x; y^*]$, $A_2 \equiv [x; -y^*]$ body na jejích asymptotách a_1, a_2. Z výsledku (5') v textu na str. 63 plyne, že $\overline{MA_1} \cdot \overline{MA_2} = b^2$; dokažte.
b) Užitím předchozího výsledku sestrojte body na hyperbole, jsou-li dány její asymptoty a_1, a_2 a bod M (viz obr. 26).

107. Užitím ohniskových vlastností narýsujte několik bodů a asymptoty hyperboly o rovnici $16x^2 - 9y^2 = 144$.

108. Určete rovnici hyperboly, když:
a) vzdálenost jejích ohnisek je 10 a když $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$ jsou rovnice jejích asymptot;



Obr. 26.

b) $y = \frac{3}{5}x$, $y = -\frac{3}{5}x$ jsou rovnice jejích asymptot a když hyperbola prochází bodem $M \equiv [10; -3\sqrt{3}]$.

109. Určete rovnici hyperboly, která prochází bodem $M \equiv [-5; 3]$ a s hyperbolou o rovnici $x^2 - y^2 = 8$ má společná ohniska (t. zv. konfokální hyperboly).

110. Daná elipsa má rovnici $5x^2 + 8y^2 = 40$. Určete rovnici hyperboly, jejíž ohniska F_1, F_2 leží ve hlavních vrcholech dané elipsy a jejíž vrcholy G_1, G_2 leží v ohniskách dané elipsy.

111. Budiž $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ rovnice hyperboly o ohniscích F_1, F_2. Určete takový bod X hyperboly, aby bylo: a) $F_1X \perp F_2X$; b) $\overline{F_1X} = 2 \cdot \overline{F_2X}$.

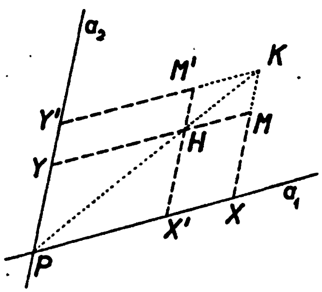
112. Narýsujte elipsu a hyperbolu, které mají společná daná ohniska F_1, F_2 a které procházejí daným bodem M. Rozhodněte, jak musíte volit bod M.

113. Jestliže v rovnici $\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1$ má reálné číslo k určitou hodnotu, představuje rovnice elipsu nebo hyperbolu. Rozhodněte, ve kterém intervalu musí ležet číslo k, aby tato rovnice byla rovnicí a) elipsy, b) hyperboly a dokažte, že všechny tyto křivky mají společná ohniska.

114. Je-li ω jeden ze čtyř dutých úhlů asymptot hyperboly o poloosách a, b a výstřednosti e, potom vztah (12) textu lze psát ve tvaru $d \cdot d'$ $\frac{1}{4}e^2 \sin^2\omega$; dokažte.

115. Bodem M hyperboly veďte rovnoběžky $r_1 \| a_1$, $r_2 \| a_2$ k jejím asymptotám a_1, a_2; označte X průsečík přímek a_1, r_2 a Y průsečík přímek a_2, r_1. Dokažte, že velikost obsahu rovnoběžníka $PXMY$, kde P je průsečík asymptot, je konstantní (obr. 27). [Užijte vztahu (12) textu a výsledku předchozího cvičení 114.]

116. Při označení z předchozího cvičení 115 platí, že $\overline{MX} \cdot \overline{MY} =$ konst.; určete hodnotu této konstanty. Tento výsledek je vám již znám z úvah o rovnici $y = \frac{a}{x}$; vysvětlete.



Obr. 27.

117. a) Užitím výsledku cvičení 115 sestrojte další bod M' hyperboly, která je určena asymptotami a_1, a_2 a bodem M; body M, M' leží na téže větvi (obr. 27).

b) Určete bod M' tak, aby $\overline{PX'} = \overline{PY'}$ (obr. 27).

118. Napište rovnici rovnoosé hyperboly, jejímiž asymptotami jsou osy souřadnic a která prochází bodem:

a) $[2; 5]$; b) $[-3; 2]$; c) $[x_0; x_0]$; co platí o číslech x_0, y_0?

119. Stanovte podmínky pro čísla x_0, y_0, jestliže bod $V \equiv [x_0; y_0]$ leží uvnitř:

a) pravé,

b) levé větve hyperboly o rovnici $y = \frac{a}{x}$. [Rozeznávejte $a > 0$, $a < 0$].

120. Dokažte, že vnitřek větve hyperboly o rovnici $y = \dfrac{a}{x}$ je konvexní útvar.

121. Určete vzdálenost d bodu $P \equiv [0; 0]$ od bodu $M \equiv [x; y]$ hyperboly o rovnici $y = \dfrac{a}{x}$.

a) Určete bod M tak, aby $\overline{PM} = u$, kde u je dané číslo. Proveďte diskusi.

b) Určete bod M tak, aby velikost úsečky PM byla co nejmenší. [Je $d^2 = \left(x - \dfrac{a}{x}\right)^2 + 2a$.]

12. Elipsa nebo hyperbola a přímka.

Jsou-li A, B dvě čísla různá od nuly, znamená rovnice

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

buďto elipsu (po případě kružnici), je-li $A > 0$, $B > 0$, při čemž kružnici máme pro $A = B$, kdežto pro $A \neq B$ máme elipsu s osami v osách souřadnic, při čemž osa x je hlavní osou, je-li $A < B$, vedlejší osou, je-li $A > B$. Je-li z čísel A, B jedno kladné a druhé záporné, znamená rovnice (1) hyperbolu s osami v osách souřadnic, při čemž osa x je hlavní osou, je-li $A > 0$, $B < 0$, vedlejší osou, je-li $A < 0$, $B > 0$. V případě $A < 0$, $B < 0$ nelze rovnici (1) vyhověti reálnými hodnotami čísel A, B; tento případ v následujícím vylučíme.

Probereme si stručně výpočet souřadnic průsečíků elipsy nebo hyperboly s přímkou. Případ přímky procházející počátkem jsme již probrali v předcházejících dvou článcích. Jestliže přímka neprochází počátkem, lze její rovnici napsati ve tvaru

$$ux + vy = 1, \tag{2}$$

při čemž aspoň jedno z obou čísel u, v je různé od nuly. Určení průsečíků křivky (1) s přímkou (2) můžeme provésti tak, že nejprve ze (2) vypočteme y:

$$y = \frac{1 - ux}{v} \tag{3}$$

a dosadíme (3) do (1); po úpravě dostaneme rovnici s neznámou x:

$$(Av^2 + Bu^2)\, x^2 - 2\,Bux + (B - v^2) = 0. \tag{4}$$

Každému kořenu x rovnice (4) podle (3) odpovídá jeden průsečík $[x; y]$. Nebo můžeme také nejprve ze (2) vypočísti x:

$$x = \frac{1 - vy}{u} \tag{3'}$$

a dosaditi (3′) do (1); po úpravě dostaneme rovnici s neznámou y:

$$(Av^2 + Bu^2)\, y^2 - 2Avy + (A - u^2) = 0. \tag{4'}$$

Každému kořenu y rovnice (4′) podle (3′) odpovídá jeden průsečík $[x; y]$. Prvého způsobu můžeme užíti, je-li $v \neq 0$; druhého, je-li $u \neq 0$. Protože aspoň jedno z obou čísel u, v je různé od nuly, dá se v každém případě užíti aspoň jednoho z obou způsobů.

Rovnice (4), (4′) jsou kvadratické rovnice, jestliže

$$Av^2 + Bu^2 \neq 0. \tag{5}$$

V případě elipsy je $A > 0$, $B > 0$ a podmínka (5) je vždy splněna. Diskriminant D kvadratické rovnice (4) se dá snadno upravit na tvar:

$$D = 4\,ABv^2 \left(\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} - 1\right), \tag{6}$$

diskriminant D' rovnice (4′) na tvar:

$$D' = 4\,ABu^2 \left(\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} - 1\right). \tag{6'}$$

Z toho soudíme snadno, že pro společné body přímky (2) s *elipsou* (nebo kružnicí) (1) jsou možné tyto tři případy. Jestliže je

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} - 1 > 0, \tag{7}$$

má přímka (2) s elipsou dva společné body; taková přímka se jmenuje **sečna** elipsy. Jestliže je

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} - 1 < 0, \tag{8}$$

nemá přímka (2) s elipsou žádný společný bod; taková přímka se jmenuje **nesečna** elipsy. Jestliže je

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} - 1 = 0, \tag{9}$$

má přímka (2) s elipsou jediný společný bod; taková přímka se jmenuje **tečna** elipsy a společný bod je její **bod dotyku.**

V případě hyperboly, pokud je splněna nerovnost (5), rozdíl proti elipse je pouze v tom, že součin $A \cdot B$, který se vyskytuje v (6) a (6′), je nyní záporný, takže znamení diskriminantu je opačné než znamení levé strany v (7), (8) a (9). Proto u hyperboly je (8) případ sečny, (7) případ nesečny; případ tečny zůstává (9).

U hyperboly máme však ještě výjimečný případ

$$Av^2 + Bu^2 = 0. \tag{10}$$

Pro určitost nechť osa x je hlavní osou hyperboly; potom jest

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = -\frac{1}{b^2}$$

a výjimečný případ nastane, jestliže

$$\frac{v^2}{a^2} = \frac{u^2}{b^2} \quad \text{neboli} \quad \frac{u}{v} = \pm \frac{b}{a}.$$

Avšak $-\dfrac{u}{v}$ je směrnice přímky (2); tedy výjimečný případ nastane, jestliže přímka (2) je rovnoběžná s jednou z obou asymptot hyperboly. V tomto případě rovnice (4), (4′) jsou lineární rovnice a mají jediný kořen. Tedy rovnoběžka s asymptotou (neprocházející středem a tedy různá od asymptoty) má s hyperbolou jediný společný bod; tyto rovnoběžky počítáme mezi sečny. Platí pro ně (10) neboli

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} = 0,$$

neboli

$$\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} - 1 < 0,$$

což spadá pod případ (8), který u hyperboly znamená sečnu.

Zastavme se ještě u případu tečny, ve kterém platí (9). Tečna má s křivkou (1) jediný společný bod, bod dotyku. Tento bod má souřadnice

$$x_0 = \frac{u}{A}, \quad y_0 = \frac{v}{B}. \tag{11}$$

Neboť z (11) plyne podle (9), že

$$ux_o + vy_o = 1,$$

t. j., že bod $[x_o; y_o]$ leží na tečně (2), a mimo to plyne z (9) a (11) dále, že

$$Ax_o^2 + By_o^2 = 1,$$

t. j., že bod $[x_o; y_o]$ leží na křivce (1). Podle (11) je $u = Ax_o$, $v = By_o$ a tedy rovnice (2) nabude tvaru

$$Axx_o + Byy_o = 1. \tag{12}$$

Tím jsme dokázali: Elipsa nebo hyperbola má v každém svém bodě $[x_o; y_o]$ jedinou tečnu a rovnice této tečny je (12).

Cvičení.

122. Rozhodněte, která z dále uvedených rovnic představuje: (1) elipsu, (2) hyperbolu; (3) které z rovnic nelze vyhovět žádnými reálnými hodnotami x, y? V případech (1), (2) rozhodněte, ve které ose souřadnic leží hlavní osa křivky.
a) $4x^2 + y^2 - 3 = 0$; b) $2x^2 - 6y^2 + 5 = 0$; c) $6x^2 + 5y^2 + 2 = 0$; d) $3x^2 + 9y^2 - 4 = 0$; e) $4x^2 + 4y^2 - 3 = 0$; f) $3x^2 + 6y^2 - 8 = 0$; g) $3x^2 - 3y^2 + 4 = 0$.
Rozhodněte dále o poloze bodů $A \equiv [-1; -2]$, $B \equiv [0; 6]$, $C \equiv [-3; -5]$ vzhledem k dané křivce, po případě k její větvi.

123. Určete rovnici hyperboly sdružené s hyperbolou o rovnici $Ax^2 + By^2 = 1$ a dokažte, že obě křivky mají společné asymptoty.

124. K asymptotám hyperboly o rovnici $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ veďte body $A \equiv [2a; b]$, $B \equiv [a; 2b]$ rovnoběžky r, r'. Určete průsečíky přímek r, r' s hyperbolou.

125. Je dána křivka o rovnici $Ax^2 + By^2 = 1$ a přímka r o rovnici $y = kx + q$. Stanovte podmínky pro konstanty k, q, aby přímka r byla a) sečnou, b) tečnou, c) nesečnou dané křivky.

126. Určete rovnici tečny v daném bodě $M \equiv [x_1; y_1]$ křivky o rovnici:
a) $x^2 + 4y^2 = 25$, je-li $x_1 = -3$, $y_1 > 0$;
b) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, je-li $x_1 = a\cos\varphi$, $y_1 = b\sin\varphi$, kde φ je daný úhel;
c) $4x^2 - 9y^2 = 175$, je-li $x_1 = -8$, $y_1 > 0$;
d) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, je-li $x_1 = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, $y_1 = b\,\mathrm{tg}\,\varphi$, kde φ není lichým násobkem čísla $\frac{1}{2}\pi$.
Je bod M ve cvičeních b), d) skutečně bodem křivky?

127. Daným bodem $Q \equiv [x_1; y_1]$ veďte tečny ke křivce o rovnici:
a) $x^2 - 4y^2 = 36$, je-li $x_1 = 6$, $y_1 = 6$;

b) $x^2 - y^2 = 9$, je-li $x_1 = 3$, $y_1 = -6$;
c) $x^2 + 2y^2 = 216$, je-li $x_1 = -9$, $y_1 = 9$.

[Je-li rovnice (12) rovnicí hledané tečny o neznámém dotykovém bodě $[x_0; y_0]$, potom platí $Ax_0x_1 + By_0y_1 = 1$ a $Ax^2_0 + By^2_0 = 1$; to jsou dvě rovnice pro neznámé x_0, y_0. Dokažte, že podmínkou řešitelnosti této soustavy je, aby bod Q neležel uvnitř křivky.]

128. Určete rovnice tečen křivky o rovnici $Ax^2 + By^2 = 1$ v průsečících křivky s osami souřadnic. Tyto tečny v případě hyperboly a hyperboly s ní sdružené určují obdélník, jehož úhlopříčky leží ve společných asymptotách obou hyperbol (viz cvičení 123).

129. Napište rovnici tečny v bodě $H \equiv [x_0; y_0]$ hyperboly o rovnici $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Určete bod H tak, aby tečna hyperboly, procházela daným bodem $M \equiv [ca; cb]$; ten zřejmě leží na asymptotě hyperboly. Kdy má tato úloha řešení a kolik tečen bodem M prochází? [O hledaném bodě H platí $c(bx_0 - ay_0) = ab$, $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = = a^2b^2$; rozeznávejte: (1) $c = 0$, (2) $c \neq 0$. Levou stranu druhé rovnice rozložte.]

130. Budiž $H_0 \equiv [x_0; y_0]$ bod křivky k o rovnici $Ax^2 + By^2 = 1$; budiž $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$. Označme H_1, H_2 pravoúhlé průměty bodu H do souřadnicových os x, y. Tečna t křivky v bodě H nechť protne osy x, y v bodech X, Y; střed křivky je $P \equiv [0; 0]$. Je-li křivka k hyperbola, nechť její hlavní osa leží v ose x. Dokažte:

a) U elipsy jsou uvažované body, ležící na ose x, v pořádku PH_1X_1, kdežto u hyperboly v pořádku PXH_1. Na ose y jsou uvažované body u elipsy v pořádku PH_2Y, u hyperboly v pořádku YPH_2.

b) Platí: $\overline{PH_1} \cdot \overline{PX} = a^2$; $\overline{PH_2} \cdot \overline{PY} = b^2$.

c) Výsledku cvičení b) užijte ke konstrukci křivky k, když jsou dány polohy x, y jejích os a tečna t s příslušným dotykovým bodem H.

131. Užijme téhož označení a týchž podmínek jako v předchozím cvičení 130. Přímce n, která prochází bodem H a stojí kolmo k tečně t, říkáme normála křivky příslušná bodu H; označme N průsečík normály s osou x.

a) Pořádek uvažovaných bodů na ose x je NH_1X, při čemž bod N padne dovnitř čáry k.

b) Platí: $\overline{PN} \cdot \overline{PX} = e^2$.

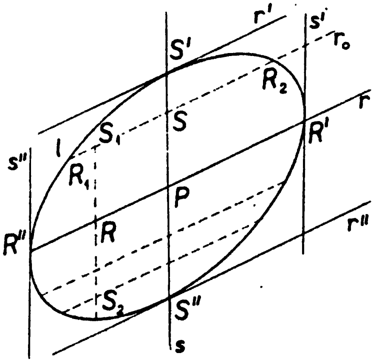
c) Výsledku cvičení b) užijte ke konstrukci ohnisek křivky k určené polohou svých os x, y a tečnou t s příslušným dotykovým bodem H.

132. Budiž dána křivka l o rovnici $Ax^2 + By^2 = 1$ a přímka r, která prochází středem $P \equiv [0; 0]$ křivky; takové přímce r říkejme průměr křivky a budiž $ux + vy = 0$ její rovnice. Dále budiž $r_0 \| r$ jiná přímka než r, a to taková, že křivku l protíná ve dvou různých bodech R_1, R_2; střed tětivy R_1R_2 je $S \equiv [x_0; y_0]$. Dokažte (obr. 28a, b): a) Středy S rovnoběžných tětiv křivky l leží na průměru s. [Přímka r_0 má rovnici $c \cdot ux + c \cdot vy = 1$, kde $c \neq 0$. Z dosazení cu, cv do vztahů (4), (4') textu plyne, že $x_0 = \dfrac{Bu}{Av^2 + Bu^2}$, $y_0 = \dfrac{Av}{Av^2 + Bu^2}$, pokud ovšem platí vztah (5) textu; víte, že v rovnici $x^2 + px + q = 0$ o kořenech platí $x_1 + x_2 = -p$.]

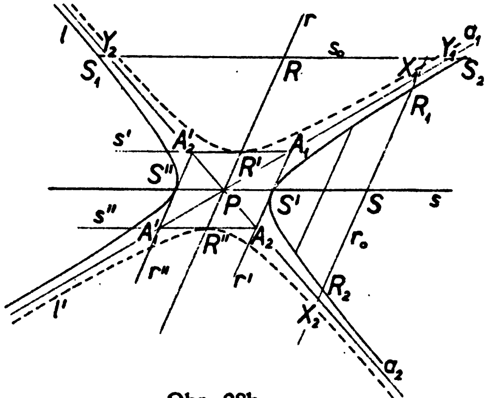
b) Jestliže $u'x + v'y = 0$ je rovnice přímky s, potom platí $Buu' + Avv' = 0$. Odtud je patrno, že středy R tětiv S_1S_2 rovnoběžných s průměrem s leží na přímce r. Přímky r, s nazýváme proto **sdružené průměry** křivky l. Říkáme také, že průměr s je **sdružen** s tětivou R_1R_2 a průměr r s tětivou S_1S_2.

133. Při témže označení jako v předchozím cvičení 132 dokažte (obr. 28a,b):

a) Je-li křivka l elipsa, lze vždy určit dvě takové tečny r', r'' křivky l, že $r' \| r'' \| r$. Je-li křivka l hyperbola s hlavní osou v ose x, je to možné jen tehdy, když je $Av^2 + Bu^2 < 0$ (neboli je-li $\left|\frac{u}{v}\right| > \frac{b}{a}$); v kterém úhlu asymptot leží v tomto případě průměr r?



Obr. 28a.



Obr. 28b.

Určete souřadnice dotykových bodů S', S'' tečen r', r'' a dokažte, že jsou souměrně sdružené podle bodu P. [Budiž $c \cdot ux + c \cdot vy = 1$ rovnice hledané tečny r', kde $c \neq 0$. Do vztahu (9) textu dosaďte za u, v hodnoty cu, cv a proveďte diskusi rovnice pro c. Stejně dosaďte do vztahů (11).]

b) Dotykové body S', S'' tečen r', r'' ze cvič. a) leží na průměru s sdruženém s průměrem r.

c) Tečny v krajních bodech S', S'' a R', R'' sdružených průměrů r, s elipsy l tvoří rovnoběžník, jehož střední příčky jsou právě přímky r, s.

d) Jeden z obou sdružených průměrů r, s hyperboly tuto hyperbolu protíná, zatím co druhý protne hyperbolu sdruženou.

134. Užitím parametrického vyjádření $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ elipsy (viz cvičení 99 a obr. 28a), dokažte:

a) Body R', S' elipsy příslušné k parametrům φ, $\varphi + \frac{1}{2}\pi$ určují pár sdružených průměrů PR', PS'.

b) Označme $a_1 = \overline{PR'}$, $b_1 = \overline{PS'}$ a nazveme tyto délky **sdružené poloměry** elipsy. Dokažte, že platí t. zv. Apolloniovy vzorce:

(1) $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$.

(2) $a_1 b_1 \sin \omega = ab$, kde ω je jeden ze čtyr dutých úhlů přímek PR', PS'.

Co tedy platí o obsahu $\triangle\, PR'S'$? [Užijte vztahu (5) pro $\sin\omega$ na str. 94 učebnice pro III. tř.]

c) Vypočtěte a sestrojte takové dva sdružené poloměry, aby bylo $a_1 = b_1$.

d) Napište rovnice tečen s', r' v bodech R', S' elipsy příslušných k parametrům φ, $\varphi + \frac{1}{2}\pi$ a dokažte, že $r' \parallel PR'$, $s' \parallel PS'$.

135. Podmínka pro to, aby dva průměry r, s o rovnicích $ux + vy = 0$, $u'x + v'y = 0$ křivky l o rovnici $Ax^2 + By^2 = 1$ byly sdružené, zní $Buu' + Avv' = 0$ (viz cvičení 132b). Dokažte:

a) Když křivka l je elipsa, lze tuto podmínku psát ve tvaru $a^2uu' + b^2vv' = 0$ nebo ve tvaru $k \cdot k' = -\dfrac{b^2}{a^2}$, kde k, k' jsou směrnice přímek r, s.

b) Když křivka l je hyperbola, lze tuto podmínku psát ve tvaru $a^2uu' - b^2vv' = 0$ nebo ve tvaru $k\,k' = \dfrac{b^2}{a^2}$, kde k, k' jsou směrnice průměrů r, s, a to bez ohledu na to, zda jde o hyperbolu l nebo hyperbolu l' s ní sdruženou. Mají tedy obě hyperboly společné nejen asymptoty, ale i páry sdružených průměrů.

c) Když je $A = B$, je $r \perp s$. O kterou křivku se tu jedná?

d) Když je $A = -B$, potom asymptoty hyperboly půlí duté úhly obou sdružených průměrů r, s. O kterou křivku se pak jedná?

136. Dokažte, že bod $S' \equiv \left[\dfrac{a}{\cos\varphi};\, b \operatorname{tg} \varphi\right]$ pro $0 \leqq \varphi < 2\pi$ a $\varphi \neq \frac{1}{2}\pi$, $\varphi \neq \frac{3}{2}\pi$ leží na hyperbole l (obr. 28b) o rovnici $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. [Víte, že platí $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$.]

a) Je-li naopak bod $[x; y]$ bodem této hyperboly, existuje jediná hodnota $0 \leqq \varphi < 2\pi$ taková, že platí:

$x = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, $y = b \operatorname{tg}\varphi$; tím dospíváme k parametrickému vyjádření hyperboly. Vysvětlete, proč vylučujeme případy $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ a jaký to má geometrický význam?

b) Napište rovnici tečny v bodě S' hyperboly l ze cvičení a), který přísluší k dané hodnotě φ parametru.

Upravte tuto rovnici tak, aby obsahovala jen $\cos\varphi$, $\sin\varphi$; položíte-li $\lim \varphi = \frac{1}{2}\pi$ nebo $\lim \varphi = \frac{3}{2}\pi$, dospějete k asymptotám hyperboly.

c) Dokažte, že $x = a \operatorname{tg}\varphi$, $y = \dfrac{b}{\cos\varphi}$ je parametrické vyjádření hyperboly l' sdružené s danou hyperbolou l ze cvič. a).

d) Body $S' \equiv \left[\dfrac{a}{\cos\varphi};\, b \operatorname{tg}\varphi\right]$, $R' \equiv \left[a \operatorname{tg}\varphi;\, \dfrac{b}{\cos\varphi}\right]$, z nichž první je bodem hyperboly l, druhý bodem sdružené hyperboly l', určují dvojici sdružených průměrů PS', PR' těchto hyperbol; dokažte.

Lze každé polopřímce procházející počátkem P souřadnic přiřadit bod některé z hyperbol l, l'?

c) Označme $a_1 = \overline{PS'}$, $b_1 = \overline{PR'}$ a nazveme tyto délky sdružené poloměry hyperboly l (nebo l'). Dokažte, že platí t. zv. Apolloniovy vzorce:

(1) $a^2_1 - b^2_1 = a^2 - b^2$; (2) $a_1 b_1 \sin \omega = ab$, kde je ω jeden ze čtyř dutých úhlů přímek PS', PR'; jaký je geometrický význam této rovnosti?

137. Buďtež $S' \equiv \left[\dfrac{a}{\cos \varphi}; b \operatorname{tg} \varphi\right]$; $R' \equiv \left[a \operatorname{tg} \varphi; \dfrac{b}{\cos \varphi}\right]$ body obou sdružených hyperbol l, l' z předchozího cvičení 136 příslušné k téže hodnotě φ. Budiž dále r' tečna hyperboly l v bodě S'. Označte A_1, A_2 průsečíky přímky r' s asymptotami a_1, a_2 obou hyperbol l, l' (obr. 28b). Dokažte, že platí:

a) Dotykový bod S' půlí úsečku A_1A_2.

b) Tečna r' v bodě S' je rovnoběžná s průměrem PR', který je sdružený s průměrem PS' (viz cvičení 136). Označíme-li sdružené poloměry $a_1 = \overline{PS'}$, $b_1 = \overline{PR'}$, je tedy $\overline{S'A_1} = \overline{S'A_2} = b_1$.

c) Tečny r', r'' v krajních bodech S', S'' průměru PS' hyperboly l protínají asymptoty a_1 a a_2 v bodech A_1, A_2 a A_1', A_2', které tvoří rovnoběžník $A_1A_2'A_1'A_2$. Odůvodněte, proč přímky A_1A_2', A_2A_1' jsou tečnami sdružené hyperboly l' v bodech R', R'' jejího průměru PR' (viz cvičení b).

138. Dokažte: Označíme-li X_1, X_2 průsečíky prodloužení tětivy R_1R_2 v obr. 28b s asymptotami a_1, a_2, potom platí $\overline{R_1X_1} = \overline{R_2X_2}$, $\overline{R_1X_2} = \overline{R_2X_1}$.

Podobně, jsou-li Y_1, Y_2 průsečíky prodloužení tětivy S_1S_2 s asymptotami a_1, a_2 v obr. 28b, potom platí $\overline{S_1Y_1} = \overline{S_2Y_2}$, $\overline{S_1Y_2} = \overline{S_2Y_1}$.

Užijte těchto výsledků ke konstrukci bodů hyperboly určené asymptotami a_1, a_2 a bodem R_1.

139. Dokažte užitím parametrického vyjádření hyperboly (viz cvič. 136), že obsah trojúhelníka PA_1A_2 určeného asymptotami a_1, a_2 a tečnou r' hyperboly v obr. 28b je konstantní pro všechny polohy tečny r.

II. ZÁKLADY MATEMATICKÉ STATISTIKY*).

1. Statistický soubor.

Některé poznatky nemůžeme získat pozorováním jediného předmětu, nýbrž pozorováním množství předmětů téhož druhu. Ptáme-li se na př., jaká je tělesná váha žáka IV. třídy školy III. stupně, nemůžeme odpovědět tím, že zjistíme váhu jednoho žáka. Úplná odpověď vyžaduje zjištění váhy všech žáků této třídy na všech školách III. stupně. K tomu cíli je třeba zvážit

*) Viz Doslov, str. 114.

množství všech žáků, jichž se dotaz týká, neboli provésti **hromadné pozorování.** Studium údajů získaných hromadným pozorováním, tvoří předmět **matematické statistiky.** Při tom údaje o každém jedinci nejsou cílem pozorování, nýbrž jsou jenom prostředkem k tomu, abychom si utvořili obraz, který by účelně a přehledně popisoval to, co je závažné pro celek.

V matematické statistice studujeme **statistické soubory.** Zde na př. je to soubor žáků IV. třídy na školách III. stupně. Každý soubor se skládá z určitých prvků, zvaných **statistickou jednotkou.** V našem případě jednotky jsou lidé, mohou to býti však také výrobky, jako boty, auta, šrouby, nebo události, jako sňatky, úmrtí a pod. Pojem statistické jednotky musí býti přesně vymezen; v daném případě musí býti jasné, o jaké školy III. stupně jde (vymezení věcné), na jakém území jsou ty školy (vymezení prostorové), ale to ve zkoumaném případě nestačí: musí býti určen také den, kdy se má vážení provádět (vymezení časové). Počet jednotek, ze kterých se skládá statistický soubor se jmenuje **rozsah souboru.** Při studiu statistického souboru **třídíme** soubor podle určitých **znaků,** kterými se jednotlivé prvky souboru mohou od sebe lišit. V našem příkladě jsme se zajímali o jediný znak souboru žáků, totiž o tělesnou váhu. Často třídíme soubor podle několika znaků. Na př. při sčítání lidu se zajímáme o pohlaví, věk, rodinný stav, povolání, národnost a o jiné znaky.

Znaky, které můžeme u statistického souboru zkoumati, jsou dvojího druhu:

1. **Znaky kvalitativní** (jakostní), které se nedají číselně vyjádřit. Kvalitativní znak se jmenuje **alternativní** (lat. alternativa = volba mezi dvěma možnostmi), jsou-li u každého prvku možné pouze dva případy. Jsou-li prvky souboru lidé, je pohlaví alternativní znak. Časté jsou však případy, že u kvalitativního znaku jsou více než dvě možnosti; jsou-li zase lidé prvky souboru, je barva očí, rodinný stav a j. takový znak.

2. **Znaky kvantitativní** (kolikostní) nabývají na každém prvku hodnoty vyjádřené určitým číslem. V našem souboru žáků byla tělesná váha takovým znakem. Mohla to býti také tělesná výška nebo věk každého žáka.

Souhrn všech záznamů o znacích prvků zahrnutých do statistického souboru tvoří **statistický materiál.**

Je-li rozsah souboru malý, je získání statistického materiálu věcí jednoduchou. Naproti tomu statistické šetření rozsáhlých souborů vyžaduje pečlivé práce odborníků, mají-li býti studované hromadné jevy co nejvěrněji číselně vyjádřeny. Proto každé obsáhlejší statistické šetření vyžaduje důkladné přípravy. Především musí býti přesně formulován úkol, který má býti statistickým šetřením řešen a podle toho se vypracuje *plán šetření a zpracování.*

Plán šetření musí obsahovati:

1. Vymezení statistické jednotky, a to věcné, prostorové a časové. (Na př. při zjištění počtu obyvatelstva je to obyvatel na určitém území a přítomný v stanoveném okamžiku.)

2. Stanovení vyšetřovaných znaků (na př. pohlaví, věk, rodinný stav, povolání a pod.).

3. Vymezení všech kombinací znaků podle nichž má původní soubor býti roztříděn.

4. Rozhodnutí, která statistická čísla mají býti vypočítána, seřazena do tabulek, která z nich mají býti publikována.

Šetření se provádí buď individuálními sčítacími lístky, t. j. pro každý prvek souboru jeden sčítací list nebo hromadnými sběrnými listinami pro celé skupiny prvků.

Je-li soubor prvků dostatečně veliký, učiníme nejlépe, použijeme-li t. zv. štítků, t. j. napíšeme každou hodnotu znaku na zvláštní lístek, načež lístky roztřídíme podle třídícího plánu. Tak získáme určitý počet skupin, z nichž každá bude obsahovat lístky s touž hodnotou znaku. Lístky takto roztříděné můžeme sečísti a údaje zapsati do příslušných třídicích nebo pomocných tabulek.

Je-li soubor prvku malý, nezavádíme štítky, nýbrž třídění provádíme tak, že pro každou hodnotu znaku zaznamenáváme tečkou nebo čárkou určitou jednotku souboru.

Prvý způsob třídění nazýváme methodou skládací nebo štítkovou, druhý způsob pak methodou čárkovací.

Při hromadných šetřeních, jakým je na př. sčítání lidu, sčítání závodů, používáme k zpracování dat t. zv. statistických strojů. Pomocí těchto strojů můžeme bez obtíží provésti různé kombinace a zpracovati je v poměrně krátké době.

Číselné údaje, získané zpracováním statistického materiálu, přenášíme do tabulek. Bývá to zpravidla množství čísel, seřazených ve vodorovné řádky a svislé sloupce. Kromě číslic, uvedených v řádcích nebo ve sloupcích, bývají ještě uvedena slovní hesla v záhlaví nebo v páskách mezi řádky a konečně v legendě, t. j. ve sloupci na levé straně tabulky. Nadpisy, uvedené nad tabulkami, charakterisují obsah dat v tabulce.

Statistické tabulky nás poučují o poměrech vlastního státu, na př. o obyvatelích, o výrobě a pod.

Jako příklad uveďme tyto tabulky:

Přítomné obyvatelstvo podle zemí v roce 1930 a 1947:

Země	Výměra v km²	Počet obcí	Přítomné obyvatelstvo		
			1930	1947 (22. května)	na 1 km² v r. 1947
Čechy	52 062	8 448	7 109 376	5 627 181	108
Morava a Slezsko	26 808	3 283	3 565 010	3 135 180	117
Slovensko	48 957	3 362	3 324 111	3 402 300	69
Československo	127 827	15 093	13 998 497	12 164 661	95

Všeobecná data o hornické výrobě v Československu.

Druh výroby	Závody		Průměrný počet dělníků		Vykonané směny (v 1 000)	
	1937	1946	1937	1946	1937	1946
Kamenné uhlí	80	89	43 392	58 410	11 945,5	15 635,5
Hnědé uhlí	190	109	29 761	40 746	7 803,7	11 746,6
Železná ruda	40	26	6 167	6 891	1 778,0	1 840,4
Ostatní rudy	20	15	4 240	4 123	1 159,6	1 082,6
Ostatní nerosty	12	17	1 039	1 357	305,1	389,7
Celkem	342	256	84 599	111 527	22 991,9	30 694,8

Elektrisace obcí k 1. lednu 1947.

Země	Obce				Obyvatelstvo*) v 1 000 obcích			
	elektr.	neelektr.		celkem	elektr.	neelektr.		celkem
		abs.	v %			abs.	v %	
Čechy	6 898	1 589	18,7	8 487	6 278	459	6,8	6 737
Morava a Slezsko	3 065	228	6,9	3 293	3 373	81	2,3	3 454
Slovensko	1 467	1 892	56,3	3 359	2 378	1 161	32,8	3 539
Československo	11 430	3 709	24,5	15 139	12 029	1 701	12,4	13 730

*) Přítomné obyvatelstvo v Čechách, na Moravě a ve Slezsku v prosinci 1945 a na Slovensku na konci roku 1940.

2. Třídění.

K získání objektivního vědeckého poznání jakéhokoli složitého přírodního jevu je především zapotřebí výsledky hromadného pozorování náležitě utřídit. Za tím účelem je nutno věnovat bedlivou pozornost jednotlivým charakteristickým znakům zkoumaného jevu, na jejichž účelné volbě záleží, do jaké míry se nám podaří získat opravdu vědecký obraz rozmanitých příčin určujících povahu a objektivní zákonitost daného jevu.

Znaky, které volíme za základ třídění, rozlišujeme zpravidla podle kvantity a podle kvality.

Na nezbytnost přísné objektivnosti při třídění znaků upozorňoval opětovně V. I. Lenin, který zejména vypracoval methodu typologického třídění, záležející v třídění jevu na kvalitativně rozdílné skupiny. Vyžadoval, aby za základ třídění byly brány znaky, charakterisující objektivně podstatu zkoumaného jevu s hlediska jeho předchozího správného theoretického rozboru.

Jenom tak podle Lenina je možno dospět k přísně objektivnímu vědeckému poznání skutečných změn a tendencí pozorovaného jevu.

Postupná stadia třídění na skupiny jsou:

1. volba základů třídění (znaků), umožňujících rozlišení jevů jednoho typu od jevů jiných typů;
2. vytřídění jednotek šetření podle znaků, zvolených za základ třídění na větší nebo menší počet skupin;
3. pořízení skupinových součtů, umožňujících při dalším zpracování využít veškeré rozmanitosti statistických method k všestrannému rozboru pozorovaného jevu.

Postup třídění na skupiny lze ukázat na konkretním příkladě:

Máme za úkol prostudovat obyvatelstvo ČSR podle dat ze sčítání lidu.

Je samozřejmé, že údaje musí být roztříděny podle skutečného místa pobytu obyvatelstva. Avšak pouze toto třídění nestačí. Máme-li na př. zjistit, jaký je poměr obyvatelstva k výrobním prostředkům, musíme kromě územního znaku vzíti za základní znak třídění také vztah k výrobním prostředkům. Na základě prvého znaku vytvoříme soubory obyvatelstva podle krajů, resp. okresů. Na základě druhého znaku rozdělíme obyvatelstvo na kategorie dělníků, rolníků a jiných zaměstnanců. Jedině toto vymezení umožňuje nám sledovat odděleně typické rysy a vlastnosti každého z těchto souborů s hlediska pohlaví, věkového složení, stupně gramotnosti a vzdělání, jakož i vzájemný vztah těchto znaků.

Methoda třídění dovoluje učinit si představu o závislostech mezi jednotlivými znaky a to tak, že třídění podle jednoho znaku kombinujeme s tříděním podle druhého znaku, na př. třídění obyvatelstva podle povolání kombinujeme s tříděním podle pohlaví, věku, vzdělání a pod.

Podobně máme-li v zemědělství zkoumat vliv určitého hnojiva na hektarový výnos nějaké zemědělské plodiny, netřídíme plodiny pouze podle osevu a podle výnosu, nýbrž vytřídíme do jedné skupiny plodiny, jejichž výnos v závislosti na hnojivu zkoumáme a dále roztřídíme oseté plochy na stejnorodé skupiny s hlediska složení půdy a každou takto získanou skupinu pak roztřídíme na plochy, které byly daným hnojivem pohnojeny a na ostatní.

Z těchto uvedených příkladů vidíme, že správné třídění jevů podle různých znaků a správné kombinování jednoho znaku s druhým je důležitým předpokladem statistického zkoumání vlivu příčin na nějaký výsledek.

3. Soubor s hlediska jednoho znaku.

Ve statistické praxi zkoumáme daný statistický soubor zpravidla s hlediska několika znaků a jedním z důležitých úkolů statistiky je zkoumání vlivu, který má hodnota jednoho znaku na hodnoty ostatních znaků. Jestliže zkoumáme na př. u žáků IV. třídy III. stupně tělesnou váhu, ukazuje se, že jiný znak, totiž pohlaví žáků, má na váhu žáků podstatný vliv. Chceme-li si získat správný obraz o váze jednotlivců tohoto souboru, je nejúčelnější rozdělit napřed soubor podle pohlaví na dva částečné soubory a zkoumat co do tělesné váhy každý z obou částečných souborů zvlášť. V daném případě jeden z obou znaků (pohlaví) byl alternativní znak; druhý byl kvantitativní. V tomto případě bývá účelné rozdělit původní soubor na dva podle kvalitativního znaku a zkoumat kvantitativní znak pro oba takto vzniklé částečné soubory. Složitější je zkoumání vzájemného vlivu dvou kvantitativních znaků. Toto zkoumání nebudeme probírat a omezíme se v následujícím na studium jediného znaku, které je nezbytnou průpravou pro všecky ostatní statistické problémy.

Soubor s hlediska alternativního znaku.

Máme-li soubor živě narozených dětí v Československu a ptáme-li se, kolik je v tomto souboru chlapců, třídíme soubor podle alternativního znaku pohlaví. Celý soubor, jehož rozsah budiž N, rozdělí se na dva částečné soubory, jejichž rozsahy buďtež f, f' (v daném případě f chlapců, f' děvčat).

Zřejmě jest

$$f + f' = N.$$

Číslům f, f' říkáme **absolutní četnosti**; jsou závislé na rozsahu původního souboru. Zlomky

$$\frac{f}{N}, \quad \frac{f'}{N}, \tag{1}$$

které se nazývají **relativní** neboli **poměrné četnosti**, jsou na rozsahu souboru nezávislé. Součet obou relativních četností jest ovšem roven jedné a proto stačí vypočísti jediný z nich. V praxi udáváme relativní četnost obyčejně v procentech, s přesností na desetiny procenta.

Řidčeji se místo relativních četností užívá vzájemných poměrů obou absolutních četností

$$\frac{f}{f'}, \quad \frac{f'}{f} \tag{2}$$

(poměr počtu chlapců k počtu dívek, počtu dívek k počtu chlapců). Čísla (2) se dají ovšem matematicky vyjádřiti pomocí čísel (1) a obráceně. Položíme-li

$$\frac{f}{N} = u, \qquad \frac{f'}{N} = u' = 1 - u,$$

$$\frac{f}{f'} = v, \qquad \frac{f'}{f} = v' = \frac{1}{v},$$

spočteme snadno, že

$$v = \frac{u}{1-u}, \quad u = \frac{v}{1+v}, \tag{3}$$

$$v' = \frac{u'}{1-u'}, \quad u' = \frac{v'}{1+v'}, \tag{3'}$$

$$v = \frac{1-u'}{u'}, \quad v' = \frac{1-u}{u}, \tag{4}$$

$$u = \frac{1+v'}{v'}, \quad u' = \frac{1+v}{v}. \tag{5}$$

Soubor s hlediska kvantitativního znaku.

V podniku se zkoušel určitý materiál (vlákno křemitého skla) na pevnost v tahu. Bylo provedeno celkem 111 zkoušek, které daly tyto číselné hodnoty znaku (v kg/mm^2).

Tab. 1.

88	69	80	92	82	75	68	74	66	81	79
84	91	78	81	79	83	78	81	78	75	84
63	82	75	74	90	79	81	89	71	81	87
74	79	73	80	81	76	85	80	83	78	90
78	80	67	79	77	80	91	86	77	83	82
69	81	58	81	80	86	78	71	84	79	87
72	93	81	85	82	81	80	76	79	86	80
81	85	84	76	84	73	82	80	84	77	83
77	80	93	70	97	79	88	82	83	80	89
70	87	89	80	79	83	94	73	88	85	80
										76

Přes to, že rozsah souboru $N = 111$ je neveliký, je tabulka 1 naprosto nepřehledná a nepodává tudíž jasný obraz o jakosti zkoušeného materiálu. Proto především sestavíme na základě tabulky 1 novou tabulku, ve které bude týchž $N = 111$ čísel jako v tabulce 1, ale v přehlednějším pořádku, totiž od nejmenšího do největšího.

Tab. 2.

58	71	75	78	79	80	81	82	84	86	89
63	72	76	78	79	80	81	82	84	86	89
66	73	76	78	79	80	81	82	84	86	90
67	73	76	78	79	80	81	82	84	87	90
68	73	76	78	80	80	81	83	84	87	91
69	74	77	79	80	80	81	83	84	87	91
69	74	77	79	80	80	81	83	85	88	92
70	74	77	79	80	81	81	83	85	88	93
70	75	77	79	80	81	82	83	85	88	93
71	75	78	79	80	81	82	83	85	89	94
										97

Při tom najdeme ovšem nejmenší a největší hodnotu pozorovaného znaku, v našem případě $x' = 58$, $x'' = 97$. Jejich rozdíl $x'' - x' = 39$ se jmenuje **variační rozpětí.**

V tabulce 2 se některé hodnoty znaku opakují. Proto sestavíme novou tabulku, ve které každá z pozorovaných hodnot znaku $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{32}$ (obecně píšeme x_r) bude jenom jednou, ale u každé pozorované hodnoty x_r bude poznamenána také její (absolutní) četnost f_r. Součet všech četností f_r

musí býti ovšem roven $N = 111$. Dostaneme *tabulku rozdělení četností*, která je už mnohem přehlednější než tab. 1.

Tab. 3.

x_r	58	63	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
f_r	1	1	1	1	1	2	2	2	1	3	3	3	4	4	6	9

x_r	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	97
f_r	13	11	6	6	6	4	3	3	3	3	2	2	1	2	1	1

Jestliže rozsah souboru je větší, což bývá obyčejně, je tabulka 3 stále ještě nepřehledná; hodnot x_r je velmi mnoho a mnohé se velmi málo od sebe liší. Proto se v praxi zpravidla rozděluje variační rozpětí na poměrně malý počet intervalů, které se jmenují *třídní intervaly*. Hodnoty pozorovaného znaku, které padnou dovnitř některého třídního intervalu, nahradíme hodnotou příslušnou středu tohoto intervalu, kterou nazveme *třídní znak*. Tím, že pozorované hodnoty znaku nahradíme třídními znaky, dopouštíme se malé chyby, která je však prakticky bezvýznamná a zejména při velkých souborech více než nahrazena zvýšením přehlednosti. Statistická praxe vyžaduje, aby počet intervalů nebyl ani příliš velký (pro přehlednost) ani příliš malý (aby chyby vzniklé zaokrouhlováním pozorovaných hodnot zůstaly bezvýznamné). Při malých souborech se obyčejně omezujeme nejvýš na 10 intervalů, aby průběh četnosti v jednotlivých třídních intervalech nebyl příliš nepravidelný a aby nebylo mnoho skupin prázdných. Při rozsáhlejších souborech se volí 15 až 20 intervalů. V našem příkladě zvolíme třeba 8 třídních intervalů délky 5 se středy 60, 65, 70, . . ., 95 a dostaneme místo tab. 3 následující *tabulku skupinového rozdělení četnosti*.

Tab. 4.

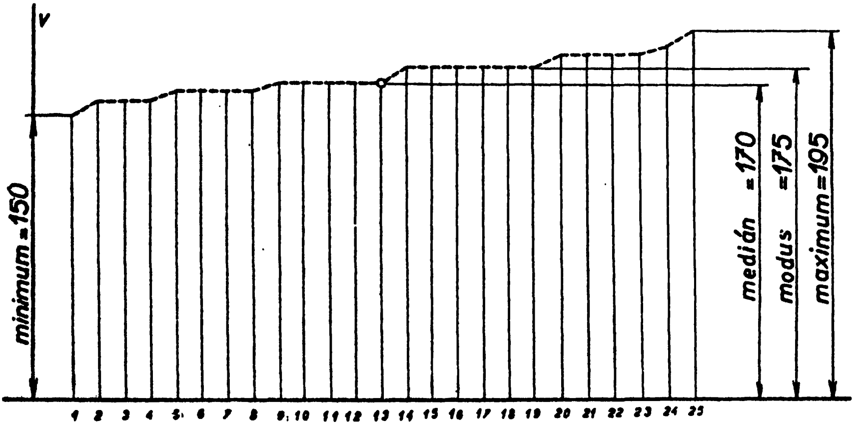
x_r	60	65	70	75	80	85	90	95
f_r	1	3	8	17	45	22	11	4

4. Střední hodnoty.

Tabulka četnosti dává úplný přehled jednoho kvantitativního znaku v daném statistickém souboru, neboť v ní jsou udány všecky hodnoty, kterých pozorovaný znak nabývá, a u každé z těchto hodnot je zaznamenáno, kolik statistických jednotek souboru připadá na tuto hodnotu. Často je však prakticky důležité vystihnouti všecky vyskytující se hodnoty znaku *jedinou* číselnou hodnotou, které říkáme **střední hodnota** znaku. Taková střední hodnota se dá definovat rozmanitými způsoby, z nichž některé si v tomto článku popíšeme. Žádná střední hodnota nemůže ovšem úplně popsat vyšetřovaný znak, nýbrž každá střední hodnota dává pouze hrubý popis znaku.

Pozn. Pro přesné rýsování obr. 29. výšky žáků jsou v tab. 5, str. 14.

V článku 6 poznáme, jak lze počítati další čísla, která dávají přibližný popis skutečných hodnot znaku od hodnoty střední.



Medián.

Jednou ze středních hodnot kvantitativního znaku je t. zv. **medián.** Vysvětlíme si pojem mediánu na příkladě.

Příklad. Profesor tělocviku postaví žáky IV. třídy podle výšky do řady (obr. 29). Výška toho žáka, který stojí uprostřed řady, je medián zkoumaného znaku (tělesné výšky) daného statistického souboru (žáků určité třídy). Je-li počet žáků roven lichému číslu $2n + 1$, stojí uprostřed řady jediný žák (s pořadovým číslem $n + 1$) a jeho tělesná výška je medián znaku. Je-li počet žáků roven sudému číslu $2n$, stojí uprostřed řady dva žáci (s pořadovými čísly n, $n + 1$); jsou-li x', x'' jejich tělesné výšky, považujeme za medián číslo $\frac{1}{2}(x' + x'')$. V obr. 29 jsou naznačeny graficky tělesné výšky 25 žáků. Výška 13. žáka je 1,7 m; to je medián vyšetřovaného znaku. Medián dosti dobře popisuje tělesnou výšku žáků; 13. žák není ani nejmenší ani největší, a je právě tolik žáků, jejichž výška je větší, kolik je těch, jejichž výška je menší. K určení mediánu není třeba žáky skutečně postavit do řady; jakmile známe jejich tělesné výšky, stačí je uspořádat jen na papíře. Jedna z výhod mediánu je v tom, že jsou-li ve třídě žáci výjimečně malí nebo výjimečně velcí, nemá to vlivu na medián.

Modus.

To je poměrně zřídka užívaná střední hodnota. Je to nejčastěji se vyskytující hodnota znaku. Na př. v obr. 29 největší počet žáků má výšku 1,75 m (je to 14., 15., 16., 17., 18., 19. žák, t. j. celkem 6 žáků má tuto výšku). Jsou případy, kdy modus má velkou praktickou důležitost. Na př. největší počet mužské obuvi má číslo 42, ženské 38. To je důležité pro výrobu.

Aritmetický průměr.

To je nejčastěji užívaná střední hodnota. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_N$ všecky pozorované hodnoty kvantitativního znaku, obdržíme aritmetický průměr, jestliže všecky hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sečteme a výsledek dělíme číslem N (rozsahem souboru). Tedy aritmetický průměr je roven

$$\frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N). \tag{1}$$

V příkladě probíraném na str. 83 a násl. dostaneme aritmetický průměr znaku (pevnosti v tahu), sečteme-li všecka čísla z tabulky 1 a výsledek dělíme číslem $N = 111$. Jednodušší je užít tabulky četnosti (tab. 3 na str. 84), ve které je každá hodnota znaku x_r zapsána jen jednou, ale s udáním své četnosti f_r. Aritmetický průměr je potom roven

$$\frac{1}{N}(f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_rx_r); \tag{2}$$

v daném případě vyjde 8989 : 111 neboli (zaokrouhleno na setiny) 80,98. Pro srovnání si všimneme, že medián je v tomto případě roven číslu 80, liší se tedy jen málo od aritmetického průměru. Přesnou hodnotu aritmetického průměru jsme zjistili pomocí tab. 3 rozdělení četnosti. Kdybychom místo toho užili tab. 4 *skupinového* rozdělení četnosti, dostali bychom poněkud jinou hodnotu aritmetického průměru, totiž 8760 : 111 = 78,92.

Aritmetického průměru se užívá mimo jiné při přesných měřeních délek, úhlů a fysikálních veličin. Měření se provede velmi pečlivě mnohokrát, při čemž zpravidla se naměřené hodnoty poněkud od sebe liší; za správnou hodnotu bereme aritmetický průměr naměřených hodnot. Při tom však nebereme ohled na ty výsledky měření, které vykazují podstatnější rozdíly, neboť už jediná příliš velká hodnota má podstatný vliv na aritmetický průměr (ne však na medián), a výsledky, které se příliš liší od výsledků většiny jiných měření, právem považujeme za chybné a nepřihlížíme k nim.

Následující jednoduchý příklad jasně ukazuje podstatný rozdíl mezi mediánem a aritmetickým průměrem. Mějme soubor pěti krychlí, jejichž hrany jsou (v cm):

$$6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11; \tag{1}$$

jejich povrchy jsou (v cm^2):

$$216,\ 384,\ 486,\ 600,\ 726; \tag{2}$$

jejich objemy jsou (v cm^3):

$$216,\ 512,\ 729,\ 1\,000,\ 1\,331. \tag{3}$$

Medián je pro hranu 9, pro povrch 486, pro objem 729; všecky tři hodnoty mediánu odpovídají téže velikosti krychle. Jinak je tomu s aritmetickými průměry; zde vyjde pro hranu 8,8. Aritmetický průměr povrchu jest 482,4, což odpovídá hraně rovné asi 8,967; aritmetický průměr objemu jest 757,6, což odpovídá hraně rovné asi 9,081. Při užití aritmetického průměru bude střední velikost krychle počítaná podle povrchu větší než podle hrany, a podle objemu větší než podle povrchu. Které ze tří hodnot aritmetického průměru jest dáti přednost, nedá se rozhodnouti matematicky, neboť při tom záleží na praktickém účelu, který statistika sleduje. Půjde-li na př. o spotřebu materiálu, užijeme objemu, jde-li o plné krychle; povrchu užijeme, jde-li o obaly (bedny a pod.); hrany bychom užili, kdyby šlo o drátěné krychle. Z tohoto jednoduchého příkladu je patrné, že úloha matematiky ve statistice se nesmí přeceňovat a že formální matematická stránka výpočtu nezaručuje sama o sobě, že výsledná čísla správně vystihují objektivní vlastnosti pozorovaného jevu; o tom jsme mluvili již ve článku 2.

Probereme si ještě jeden jednoduchý příklad. V dílně pracuje 9 dělníků, kteří všichni vyrábějí stejný detail; 6 dělníků vyrobí 1 kus každý za 12 minut, 3 dělníci vyrobí 1 kus každý za 10 minut. Zde si můžeme předložit 2 otázky. Předně se můžeme ptát, kolik kusů vyrobí 1 dělník průměrně za hodinu. Máme 6 dělníků, z nichž každý vyrobí za hodinu 5 kusů, a 3 dělníky, z nichž každý vyrobí za hodinu 6 kusů. Na jednoho dělníka tedy připadá průměrně $5\frac{1}{3}$ kusu. V tomto případě aritmetický průměr velmi účelně vystihuje skutečnost.

Neboť kdyby v dílně bylo 9 dělníků, z nichž každý by vyrobil $5\frac{1}{3}$ kusu za hodinu, vyrobili by za osmihodinový pracovní den dohromady 384 kusy, což je přesně týž počet kusů, kolik jich vyrobí 9 dělníků pracujících tak, jak bylo v podmínkách úlohy řečeno. Předložme si však druhou otázku! Ptejme se, jaká je průměrná doba potřebná k výrobě 1 kusu. Máme 6 dělníků, z nichž každý potřebuje 12 minut na kus, a ještě 3 dělníky, z nichž každý potřebuje 10 minut na kus. Užijeme-li aritmetického průměru, vyjde $11\frac{1}{3}$ minuty jako průměrná doba výroby 1 kusu. To už není přesné vystižení skutečnosti, neboť kdyby bylo v dílně 9 dělníků, z nichž každý by spotřeboval $11\frac{1}{3}$ minuty na výrobu 1 kusu, nevyrobili by za osmihodinový pracovní den 384 kusy, nýbrž asi o 3 kusy méně. Rozdíl není ovšem příliš veliký a jsou velmi četné případy, kdy užití aritmetického průměru, přes to že theoreticky lze činit proti němu námitky, pro praxi úplně postačí.

5. Výpočet aritmetického průměru.

Budiž dán statistický soubor rozsahu N a kvantitativní znak, který nabývá hodnot

$$x_1, x_2, \ldots, x_N. \tag{1}$$

Aritmetický průměr označme $\bar{x}$; vypočte se z rovnice

$$N \cdot \bar{x} = x_1 + x_2 + \ldots + x_N. \tag{2}$$

Označme obecně x veličinu, která v daném souboru nabývá hodnot (1), a vyšetřujme místo veličiny x jinou veličinu y, jež je závislá na x tak, že platí jednoduchý vztah

$$x = y + a, \tag{3}$$

kde a je konstanta. Hodnoty nové veličiny jsou

$$y_1 = x_1 - a, \quad y_2 = x_2 - a, \ldots, y_N = x_N - a.$$

Je-li $\bar{y}$ aritmetický průměr veličiny y, jest

$$\begin{aligned} N \cdot \bar{y} &= y_1 + y_2 + \ldots + y_N = \\ &= (x_1 - a) + (x_2 - a) + \ldots + (x_N - a) = \\ &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_N) - N \cdot a \end{aligned}$$

a podle (2)

$$N \cdot \bar{y} = N \cdot \bar{x} - N \cdot a$$

z čehož plyne

$$\bar{y} = \bar{x} - a \tag{4}$$

neboli

$$\bar{x} = \bar{y} + a. \tag{4'}$$

Tato jednoduchá úvaha značně ulehčí výpočet aritmetického průměru v těch prakticky častých případech, kdy hodnoty (1) se poměrně málo vzájemně liší. V tomto případě je snadné odhadnout zpaměti přibližnou hodnotu aritmetického průměru; zvolíme-li tuto přibližnou hodnotu za konstantu a ve (3), budou příslušné hodnoty

$$y_1, y_2, \ldots, y_N \tag{5}$$

malá čísla, jejichž aritmetický průměr $\bar{y}$ se pohodlněji počítá než číslo $\bar{x}$, které potom určíme ze (4′). Poznamenejme, že v praxi čísla (1) bývají vesměs kladná, kdežto z čísel (5) při účelné volbě konstanty a budou některá kladná, některá záporná a mnohdy některá rovná nule.

Příklad. Určitá délka byla měřena pětkrát a vyšlo (v metrech):

$$31{,}84; \quad 31{,}87; \quad 31{,}88; \quad 31{,}9; \quad 31{,}92. \tag{6}$$

Určete aritmetický průměr! Volíme-li za a medián 31,88, máme místo čísel (6) čísla

$$-0{,}04; \quad -0{,}01; \quad 0; \quad 0{,}02; \quad 0{,}04,$$

jejichž aritmetický průměr je 0,002. Proto aritmetický průměr čísel (6) je 31,882.

Velmi často se některé hodnoty pozorovaného znaku opakují. Jsou-li

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \tag{7}$$

všecky různé hodnoty znaku a jsou-li

$$f_1, f_2, \ldots, f_k \tag{8}$$

jejich četnosti, jest aritmetický průměr $\bar{x}$ roven

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k). \tag{9}$$

kde rozsah souboru N je roven součtu všech čísel (8):

$$N = f_1 + f_2 + \ldots + f_k. \tag{10}$$

Zavedeme-li opět veličinu y místo x pomocí (3), bude její aritmetický průměr roven

$$\bar{y} = \frac{1}{N}(f_1 y_1 + f_2 y_2 + \ldots + f_k y_k)$$

s týmiž četnostmi (8); známe-li $\bar{y}$, určíme $\bar{x}$ opět podle (4').

Jako příklad vezměme tělesnou výšku žáků třídy o 25 žácích naznačenou v obr. 29 na str. 85. V následující tabulce 5 jsou v 1. řádku naměřené výšky v centimetrech (přesně na poloviny dm), ve 2. řádku jejich četnosti, ve 3. řádku hodnoty pomocné veličiny y, při čemž za konstantu a je zvolen opět medián $a = 170$.

Tab. 5.

x_r	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195
f_r	1	0	3	4	5	6	4	0	1	1
y_r	−20	−15	−10	−5	0	5	10	15	20	25

Jest

$$25 \cdot \bar{y} = f_1 y_1 + f_2 y_2 + \ldots =$$
$$= -20 - 30 - 20 + 30 + 40 + 20 + 25 = 45,$$

tedy $\bar{y} = 1{,}8$; $\bar{x} = 171{,}8$ cm.

Všimneme si ještě vzorce (9), kterému podle (10) lze dáti tvar

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots}{f_1 + f_2 + \ldots}. \tag{11}$$

V tomto vzorci pro aritmetický průměr veličiny, která nabývá hodnot x_1, $x_2, \ldots$, čísla $f_1, f_2, \ldots$ jsou četnosti jednotlivých hodnot, kterých veličina nabývá. Místo četností $f_1, f_2, \ldots$ můžeme zavésti jiná čísla $v_1, v_2, \ldots$, která jsou četnostem *přímo úměrná*, neboť zlomek v (11) se nezmění, jestliže všecka čísla $f_1, f_2, \ldots$ násobíme týmž číslem. Můžeme proto místo (11) napsati vzorec

$$\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots}{v_1 + v_2 + \ldots}, \tag{12}$$

ve kterém se vyskytují kladná čísla

$$v_1, v_2, \ldots, \tag{13}$$

která mají býti úměrná četnostem $f_1, f_2, \ldots$. V praxi se často vyskytují velmi obsáhlé soubory, u kterých přesný výpočet četností bývá obtížný, nezřídka i neproveditelný. Proto se četnosti nahrazují čísly (13) získanými na základě zkoumání typických příkladů. Takovým číslům (13) se říká *váhy* a výraz (12) se jmenuje **vážený průměr.** Určení vah není ovšem otázkou matematickou, nýbrž dá se provésti pouze na základě četných pozorování typických příkladů.

6. Odchylky od středních hodnot.

Střední hodnota, ať již to jest medián či aritmetický průměr či některá z jiných středních hodnot, které zde neprobíráme, poskytuje jen hrubý obraz o hodnotách, kterých nabývá zkoumaný kvantitativní znak. Je sice nejdůležitějším charakteristickým číslem znaku, ale k přesnějšímu vystižení průběhu hodnot znaku je nutné jej doplniti dalšími charakteristickými hodnotami znaku.

Zmiňme se nejprve zcela stručně u mediánu. Medián byla ta hodnota znaku, pod kterou je v souboru polovina všech jednotek souboru. Přesnější obraz dávají **kvartily**: první, druhý a třetí kvartil jsou ty číselné hodnoty, pod nimiž je $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ a $\frac{3}{4}$ pozorovaných hodnot znaku. Druhý kvartil je tedy totožný s mediánem. V příkladě pevnosti v tahu vyšetřovaném na str. 83 a násl. kvartily jsou: 77, 80, 84.

Přistupme k rozboru, jakým údajem se má doplnit aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N), \qquad (1)$$

abychom měli lepší obraz o průběhu znaku. Za takový doplňující údaj se volí číslo, které dává celkový obraz o velikosti odchylek

$$x_1 - \bar{x},\quad x_2 - \bar{x},\quad \ldots,\quad x_N - \bar{x} \qquad (2)$$

pozorovaných hodnot znaku od aritmetického průměru (1). Mohlo by se zdáti, že je účelné za takové číslo volit aritmetický průměr všech odchylek (2); to však nejde, neboť tento aritmetický průměr je vždy roven nule (viz úvahu provedenou na str. 88, ve které nyní $a = \bar{x}$). Je však možné za míry velikosti odchylek (2) volit aritmetický průměr jejich absolutních hodnot, tedy číslo

$$\frac{1}{N}(|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_N - \bar{x}|) \qquad (3)$$

toto číslo se nazývá **průměrná odchylka** zkoumaného znaku.

Z různých důvodů theoretických i praktických se však místo průměrné odchylky (3) užívá aritmetického průměru *druhých mocnin* odchylek (2), tedy čísla

$$\frac{1}{N}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2]; \tag{4}$$

toto číslo se jmenuje **rozptyl** zkoumaného znaku. Praktickou nevýhodou rozptylu je, že to není pojmenované číslo toho druhu jako hodnoty znaku; jsou-li hodnotami znaku na př. délky vyjádřené v cm, nelze rozptyl udávat v cm, nýbrž v cm^2. Proto se místo rozptylu udává často jeho druhá odmocnina, která se jmenuje směrodatná odchylka znaku a značí se obyčejně σ, takže rozptyl je roven σ^2. V praxi se zhusta místo **směrodatné odchylky** udává její poměr k $\bar{x}$ vyjádřený v procentech, tedy číslo

$$\frac{100\,\sigma}{\bar{x}},$$

které se jmenuje **variační koeficient** znaku.

Poznámka. V předcházejících vzorcích jsme měli každou hodnotu zkoumaného znaku v tolika sčítancích, u kolika jednotek souboru se ta hodnota vyskytuje. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_k$ všecky *různé* hodnoty znaku, $f_1, f_2, \ldots, f_k$ jejich četnosti, potom místo (1), (3), (4) máme ovšem

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_k x_k); \tag{1'}$$

$$\frac{1}{N}(f_1 |x_1 - \bar{x}| + f_2 |x_2 - \bar{x}| + \ldots + f_k |x_k - \bar{x}|) \tag{3'}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}[f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + f_k (x_k - \bar{x})^2]. \tag{4'}$$

Obecněji, užíváme-li váženého aritmetického průměru

$$\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_k x_k}{v_1 + v_2 + \ldots + v_k} \tag{1''}$$

(viz str. 90), je průměrná odchylka dána výrazem

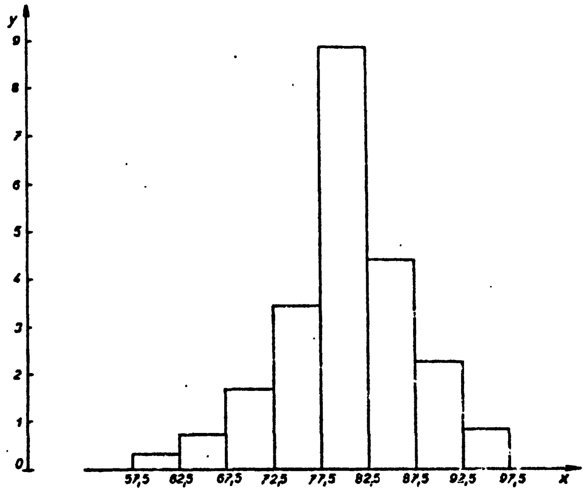
$$\frac{v_1 |x_1 - \bar{x}| + v_2 |x_2 - \bar{x}| + \ldots + v_k |x_k - \bar{x}|}{v_1 + v_2 + \ldots + v_k} \tag{3''}$$

a rozptyl výrazem

$$\sigma^2 = \frac{v_1 (x_1 - \bar{x})^2 + v_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + v_k (x_k - \bar{x})^2}{v_1 + v_2 + \ldots + v_k} \tag{4''}$$

7. Grafické znázornění kvantitativního znaku.

Místo tabulek se užívá mnohdy k názornému vystižení hodnot kvantitativního znaku různých diagramů (grafů). Nejprve si promluvíme o t. zv. **histogramu.** Histogram je horní obrys skupiny obdélníků, jejichž základnami



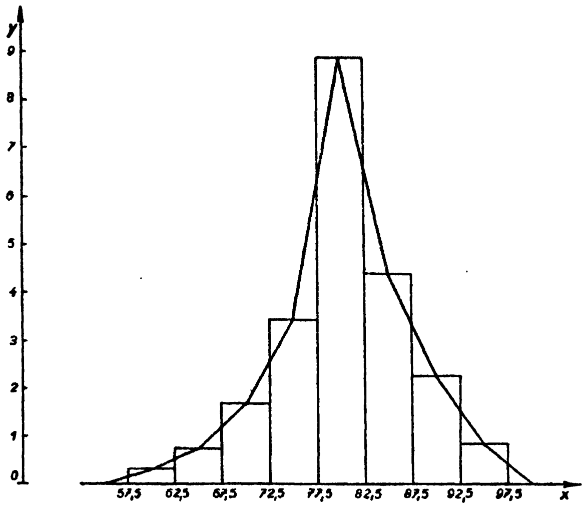
Obr. 30.

jsou třídní intervaly (na x-ové ose) a jejich obsahy jsou rovny třídním četnostem, takže výška každého obdélníka je rovna podílu

(třídní četnost) : (délka třídního intervalu).

Plocha histogramu je tedy rovna rozsahu souboru N. Na př. tabulce 4 na str. 84 odpovídá histogram znázorněný v obr. 30. Snadno se dokáže, že mediánu odpovídá ten bod k na ose x, jímž vedená rovnoběžka s osou y rozdělí plochu histogramu na dva sobě rovné díly.

Polygon (= mnohoúhelník) **četností** je lomená čára, která se skládá z úseček, které spojují postupně středy horních stran histogramu. Je-li h délka třídních intervalů, připojí se na začátek a na konec ještě po jednom intervalu délky h; polygon četností počíná a končí na ose x ve středech přidaných intervalů. V případě histogramu z obr. 30 dostaneme takto obr. 31.



Obr. 31.

Diagram Z.

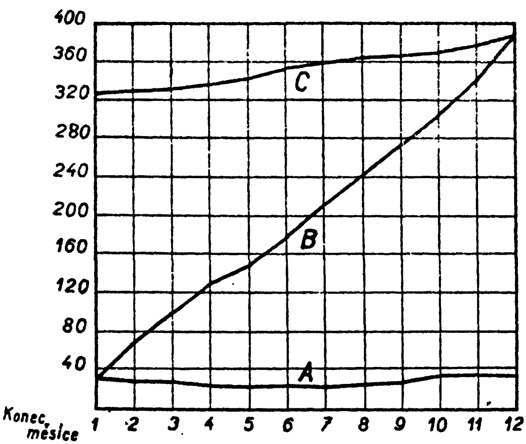
Tak zv. **diagram** Z je vhodnou pomůckou pro rozbor hospodářských jevů v podnicích a pro kontrolu plánu výroby. Skládá se ze tří čar A, B, C, které dohromady dávají přibližně tvar písmene Z (obr. 32). Při tom běží o zachycení výroby v určitých časových intervalech jako týdnech, 14 dnech, 28 dnech, měsících, rocích atd. za určité základní období, jímž může býti rok, dvouletí, pětiletí atd. Je-li základním obdobím rok, máme tudíž 52, 26, 13 nebo 12 časových intervalů. Strukturu diagramu Z si vyložíme na příkladě.

P ř í k l a d. Výroba jedné elektrárny za rok 1947, po měsících. Základní období je rozděleno na 12 měsíců. Výroba v jednotlivých měsících v roce 1947, jakož i v předcházejícím roce, je udána (v milionech kWh) v prvních dvou sloupcích tabulky 6.

Tab. 6.

Měsíc X	Výroba v mil. kWh		Kumulativní hodnoty	Klouzavý úhrn za 12 měsíců
	roku 1946	roku 1947		
1	28,1	35,0	35,0	322,6
2	24,6	31,1	66,1	329,1
3	26,1	31,5	97,6	334,5
4	22,5	28,1	125,7	340,1
5	22,9	28,3	154,0	345,5
6	22,0	28,7	182,7	352,2
7	23,5	28,4	211,1	357,1
8	27,1	30,9	242,0	360,9
9	28,5	32,8	274,8	365,2
10	29,7	35,7	310,5	371,2
11	30,5	35,6	346,1	376,3
12	30,2	35,4	381,5	381,5
	315,7	381,5		

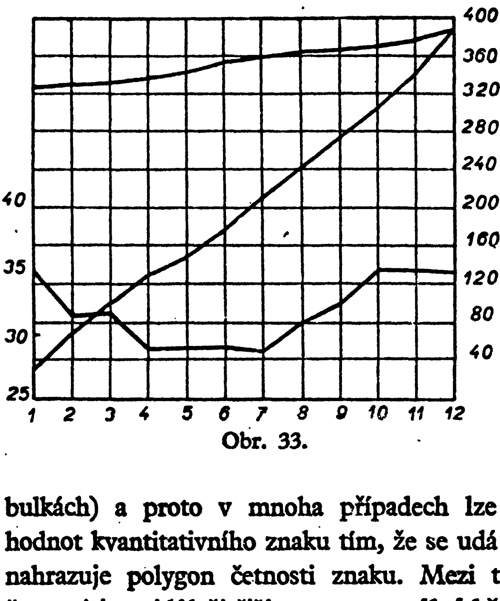
Při konstrukci diagramu Z naneseme nejprve na osu x 12 sobě rovných úseček, odpovídajících jednotlivým měsícům. Ve směru osy y nanášíme délky odpovídající výrobě za uplynulý měsíc. Jestliže takto vzniklé body spojíme úsečkami, dostaneme (obr. 32) čáru A, která dává přehled výroby za jednotlivé měsíce roku 1947. Z čáry A vidíme, zdali měsíční výroba je stálá nebo zda stoupá nebo klesá. K narýsování čáry A je třeba pouze 2. sloupce tab. 6, v němž je výroba za jednotlivé měsíce roku 1947. Z tohoto 2. sloupce dostaneme postupným sčítáním třetí sloupec kumulativních hodnot (lat. cumulare = hromaditi), který má v řádku odpovídajícím n-mu měsíci celkovou výrobu za prvých n-měsíců r. 1947. Pomocí tohoto 3. sloupce sestrojíme v diagramu Z čáru B stejně, jako byla sestrojena čára A pomocí 2. sloupce. Posléze obsahuje diagram Z ještě čáru C, odvozenou týmž způsobem ze sloupce 4. tabulky 6. V tomto sloupci je u každého měsíce zaznamenán



Obr. 32.

klouzavý úhrn, t. j. celková výroba za 12 měsíců, z nichž uvažovaný měsíc je poslední. Křivka C klouzavých úhrnů dává přehled o tom, zda *nezávisle od sezónních výkyvů* výroba stoupá či klesá. Největší zájem máme ovšem na křivce A běžných hodnot za jednotlivé měsíce; proto pro větší zřetelnost rýsujeme tuto křivku osy y v měřítku desetkrát zvětšeném a vhodně ve svislém směru posunutou (viz obr. 33).

Vraťme se k polygonu četnosti! Jestliže rozsah souboru je velmi veliký a třídní intervaly velmi malé, skládá se polygon četnosti z velké řady velmi malých úseček a má přibližně tvar hladké křivky, která se jmenuje **křivka četnosti.** Theoretickými úvahami, které nebudeme probírati, dají se odvoditi některé základní tvary křivek četnosti, které ve velmi četných případech dávají velmi uspokojivé přiblížení polygonu četnosti kvantitativních znaků důležitých statistických souborů. To je velmi důležité, protože četnosti odpovídající takovým theoretickým křivkám se dají snadno počítat (jsou také sestaveny v tabulkách) a proto v mnoha případech lze velmi přesně popsati rozložení hodnot kvantitativního znaku tím, že se udá theoretická křivka četnosti, která nahrazuje polygon četnosti znaku. Mezi takovými theoretickými křivkami četnosti je nejdůležitější t. zv. **normální křivka četnosti.** Její tvar je jednoznačně stanoven, známe-li hodnotu aritmetického průměru $\bar{x} = a$ a směrodatnou odchylku σ. Rovnice normální křivky zní:



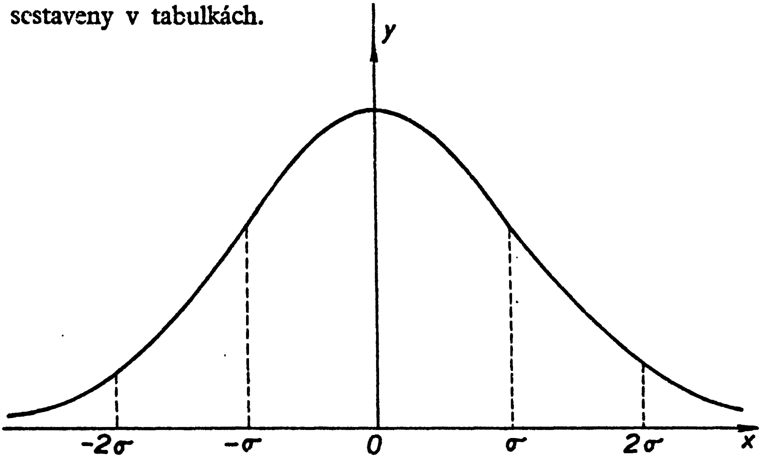
Obr. 33.

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

Při tom e se dá přesně matematicky definovati jako limita posloupnosti:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

přibližně je $e = 2{,}71828$. Normální křivka je souměrná podle svislé osy s rovnicí $x = a$; má zvonovitý tvar (viz obr. 34 pro $a = 0$; pro $a \neq 0$ stačí změna počátku, abychom měli $a = 0$). Pro $x = a \pm \sigma$ má křivka t. zv. inflexní body, t. j. přechází v nich z jedné strany tečny na druhou, jako sinusoida pro $x = 0$. Obsah plochy omezené obloukem normální křivky (1), intervalem $h \leqq x \leqq k$ a svislými úsečkami v krajních bodech tohoto intervalu udává relativní četnost znaku pro třídní interval $h \leqq x \leqq k$. Tyto relativní četnosti jsou sestaveny v tabulkách.



Obr. 34.

8. **Indexní čísla***).

Často nás zajímají časové (nebo prostorové) změny nějakého hospodářského jevu. Zkoumání takových změn se děje nejčastěji pomocí t. zv. **indexních čísel** neboli **indexů.** V nejjednodušším případě běží o změny jednotlivého jevu, které můžeme přímo číselně sledovati; tu máme jednoduchá indexní čísla. Zpravidla nás však zajímají jevy složené z řady zvláštních jevů, při čemž můžeme přímo číselně sledovati pouze jednotlivé zvláštní jevy; tu máme úhrnná indexní čísla, která jsou středními hodnotami jednoduchých indexních čísel.

Indexních čísel se dříve užívalo hlavně při zkoumání změn cen zboží. Později se jejich užití rozšířilo na rozbor údajů o úrovni průmyslové výroby a spotřeby, produktivity práce, plnění výrobního plánu, plnění pracovních norem.

*) Viz Doslov, na str. 114.

Tab. 7.

Druh	Průměrné ceny zboží v období		Index (základní období = 100)
	základním	běžném	
1. Pšenice	26,22	225,79	861
2. Žito	20,05	195,17	973
3. Ječmen	15,30	212,29	1388
4. Oves	14,62	177,92	1217
5. Pšeničná mouka	43,50	336,67	774
6. Žitná mouka	30,25	282,375	933
7. Kroupy	36,25	358,33	988
8. Brambory	5,50	53,875	980
9. Kukuřice	17,60	154,92	880
10. Rýže	31,00	304,58	983

Jednoduché indexní číslo je poměr hodnoty zkoumané veličiny v období běžném k hodnotě téže veličiny v období základním, kterým může býti na př. rok 1914 nebo rok 1948. Obyčejně se indexní číslo vyjadřuje v procentech, t. j. číslo odpovídající základnímu období se nahradí číslem 100.

Abychom z takových jednoduchých indexních čísel obdrželi číselné vyjádření celkové změny cenové úrovně, určíme některou střední hodnotu jednoduchých indexních čísel, která bude úhrnným indexním číslem, vyjadřujícím změnu pozorovaného jevu v celku. Za střední hodnotu se při tom volí zpravidla *vážený aritmetický průměr* (viz str. 90). Jde-li na př. o sledování životních nákladů obyvatelstva, je jasné, že změny cen různých druhů zboží se odrážejí v rozpočtu spotřebitele různě, a proto je nutné jednotlivým druhům zboží přikládati tím větší váhu, čím větší důležitost mají v tomto rozpočtu. Obyčejný aritmetický průměr by v případě cenového indexu znamenal, že pokládáme jednotlivé druhy zboží za rovnocenné jednotky; to by odporovalo skutečnosti. Určování vah není otázkou matematickou, nýbrž hospodářskou.

Uvedeme si nyní některé způsoby výpočtu úhrnných indexů, kterých se v praxi skutečně užívá. Mějme n různých druhů zboží nebo výrobků $a, b, c, d \ldots$ a označme

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \tag{1}$$

cenu za jednotku zboží (nebo výrobní náklad) v období základním;

$$p_1', p_2', \ldots, p_n' \tag{1'}$$

buďtež ceny nebo výrobní náklady v období běžném. Dále budiž

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \tag{2}$$

množství spotřebovaného nebo vyrobeného zboží v období základním,

$$q'_1, q'_2, \ldots, q'_n \qquad (2')$$

množství v období běžném. Jednoduchá indexní čísla pro cenu zboží (nebo výrobní náklad) jsou poměry

$$\frac{p'_1}{p_1}, \frac{p'_2}{p_2}, \ldots, \frac{p'_n}{p_n};$$

úhrnné indexní číslo pro všecky druhy zboží (výrobků) jest

$$\frac{v_1 \dfrac{p'_1}{p_1} + v_2 \dfrac{p'_2}{p_2} + \ldots + v_n \dfrac{p'_n}{p_n}}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}, \qquad (3)$$

kde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou váhy, které přiřadíme jednotlivým druhům zboží.

Jest ještě třeba zvolit váhy $v_1, v_2, \ldots, v_n$, aby úhrnný index (3) byl jednoznačně definován. Jedna z obvyklých method je tato:

$$v_1 = p_1 q_1, \quad v_2 = p_2 q_2, \ldots, \quad v_n = p_n q_n; \qquad (4)$$

váha $v_r = p_r q_r$ každého jednotlivého druhu zboží je tedy rovna součinu ceny za jednotku p_r v základním období s množstvím připadajícím na toto období, t. j. váha v_r je rovna celkové ceně všeho zboží příslušného druhu spotřebovaného (nebo vyrobeného) v období základním. Takto vypočtený úhrnný index (3) s vahami (4) se nazývá **úhrnný index cen nebo výrobních nákladů na podkladě množství základního období.** Dosadíme-li do (3) ze (4), dostaneme po úpravě pro úhrnný index jednodušší výraz

$$\frac{p'_1 q_1 + p'_2 q_2 + \ldots + p'_n q_n}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n}. \qquad (5)$$

Jako příklad vypočteme cenový index zvážený na podkladě množství základního období z dat uvedených v tabulce 8.

Tab. 8.

Druh zboží	Ceny		Množství v základním období
	v základním období	v pozorovaném období	
A	80	100	2
B	100	50	5
C	120	100	4

Podle vzorce (5) vyjde úhrnný cenový index

$$\frac{100 \cdot 2 + 50 \cdot 5 + 100 \cdot 4}{80 \cdot 2 + 100 \cdot 5 + 120 \cdot 4} = \frac{850}{1140} = 0{,}746 \text{ neboli } 74{,}6\%.$$

Právě vyloženého způsobu cenových indexů se dosud užívá u nás, v Polsku a v jiných lidově demokratických státech. Naproti tomu v Sovětském svazu přikročili ke konstrukci takových indexů, které by postihly rapidní tempo růstu výroby a socialistické výstavby. Prvého způsobu cenových indexů užívají jen pro srovnání výsledků.

Uveďme si nyní tento nový způsob konstrukce indexních čísel: místo (4), volme

$$v_1 = p_1q_1', \quad v_2 = p_2q_2', \; \dots, \; v_n = p_nq_n', \tag{4'}$$

t. j. váha $v_r = p_rq_r'$ každého jednotlivého druhu zboží je rovna číslu udávajícímu při cenách základního období úhrnnou cenu množství vyrobeného v běžném období. Úhrnný index (3) s vahami (4') se nazývá **úhrnný index cen nebo výrobních nákladů na podkladě množství pozorovaného období.** Dosadíme-li do (3) ze (4'), dostaneme pro tento index výraz

$$\frac{p_1'q_1' + p_2'q_2' + \dots + p_n'q_n'}{p_1q_1' + p_2q_2' + \dots + p_nq_n'}, \tag{5'}$$

který se liší od výrazu (5) tím, že množství zboží (výrobků) se nebere podle období základního, nýbrž podle období běžného.

Indexy (5) a (5') popisují změny v cenách na podkladě množství ze základního nebo běžného období. Mají-li značky (1), (1'), (2), (2') týž význam jako dosud, vyměníme-li však v (5) a (5') písmena p a q, dostaneme nové indexy

$$\frac{p_1q_1' + p_2q_2' + \dots + p_nq_n'}{p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n}, \tag{6}$$

$$\frac{p_1'q_1' + p_2'q_2' + \dots + p_n'q_n'}{p_1'q_1 + p_2'q_2 + \dots + p_n'q_n}; \tag{6'}$$

tyto indexy popisují změnu ve množství (spotřeby nebo výroby), a to (6) na podkladě cen ze základního období, (6') na podkladě cen z běžného období. Indexy (6), (6') se nazývají **indexy fysického objemu.**

Uveďme si příklad na výpočet indexů cenových i indexů fysického objemu z dat tabulky 9.

Tab. 9.

Stavební hmoty	Základní		Pozorované	
	období			
	cena	množství	cena	množství
Cement v pytlích	60	20	54	32
Železo v tunách	80	5	76	4
Cihly v 1 000 kusů	45	40	45	20

Výpočet cenových indexů:

a) zvážený na podkladě množství základního období

$$\frac{54 \cdot 20 + 76 \cdot 5 + 45 \cdot 40}{60 \cdot 20 + 80 \cdot 5 + 45 \cdot 40} = \frac{3260}{3400} \doteq 95{,}88\,\%;$$

b) zvážený na podkladě množství pozorovaného období

$$\frac{54 \cdot 32 + 76 \cdot 4 + 45 \cdot 20}{60 \cdot 32 + 80 \cdot 4 + 45 \cdot 20} = \frac{2932}{3140} \doteq 93{,}38\,\%.$$

Výpočet indexů fysického objemu:

a) zvážený na podkladě cen základního období

$$\frac{60 \cdot 32 + 80 \cdot 4 + 45 \cdot 20}{60 \cdot 20 + 80 \cdot 5 + 45 \cdot 40} = \frac{3140}{3400} \doteq 92{,}35\,\%;$$

b) zvážený na podkladě cen pozorovaného období

$$\frac{54 \cdot 32 + 76 \cdot 4 + 45 \cdot 20}{54 \cdot 20 + 76 \cdot 5 + 45 \cdot 40} = \frac{2932}{3260} \doteq 89{,}94\,\%.$$

9. Ukazatelé.

Ukazatelé jsou důležitá čísla, která nám objasňují pracovní poměry a výsledky v průmyslových, zemědělských, distribučních a j. podnicích a ústavech, ve veřejném životě.

Ve škole sestavuje každý třídní učitel pravidelně ukazatele své třídy:

1. docházka: kolik hodin zameškal průměrně jeden žák třídy za čtvrt roku;
2. počet vyznamenaných žáků (absolutně i v procentech);
3. počet žáků propadajících z jednoho předmětu a
4. z několika předmětů (absolutně i v procentech).

Tato čísla sestavuje každá škola pro sebe, aby měla přehled, a také pro KNV.

V závodě. Každý závod je povinen sestavovati v určitých časových intervalech, aspoň měsíčně, ukazatele, které hlásí podnikovému a oblastnímu ředitelství na přesně předepsaných formulářích. Jsou to 1. všeobecní, 2. zvláštní, 3. pomocní ukazatelé. Všeobecné a pomocné ukazatele hlásí každý závod, zvláštní pouze určité závody. Všeobecnými ukazateli jsou:

Hodnota výroby závodu za měsíc (týden) připadající na jednoho pracovníka.

Poměr počtu neodpracovaných hodin k počtu odpracovaných a to

a) placených (zákonitá dovolená, svátky atd.),
b) pro účast na školení a vykonávání veřejných funkcí,
c) nemoc a neplacené hodiny.

Podíl úkolové práce a prémií na celkové práci. (Každý závod se snaží, aby co největší počet dělníků pracoval v úkole.)

Poměr počtu nahrazených pracovníků k průměrnému celkovému počtu pracovníků.

Pomocnými ukazateli jsou:

Podíl osobních nákladů na hodnotě výroby.

Produktivita práce (hrubá hodnota výroby dělená počtem odpracovaných hodin).

Ukazatelé mají největší důležitost hlavně při plánování a při kontrole splnění plánu.

Plánování a jeho kontrola v závodě. V plánovaném hospodářství musí každý závod pro následující období vypracovat do podrobností svůj plán a k tomu musí znát ukazatele, kteří jsou výsledky mnoholetých zkušeností, zkoumání a výpočtů (normy). Jsou to na příklad:

1. ukazatelé hospodárnosti: a) množství suroviny, které připadá na jednotku určité výroby, b) množství práce, kterou je třeba vynaložit, c) množství energie (elektrického proudu atd.), kterého je třeba na jednotku výroby, a pod.

2. ukazatelé výrobnosti: jakou práci je možno očekávat od dělníka za hodinu podle klasifikace (je-li dělníkem prvé, druhé, . . . třídy, mužem či ženou, učněm nebo učednicí), jaký výkon je možno očekávat od určitého stroje za hodinu (kapacitní norma).

Pro kontrolu vykonané práce musí závod znát, po případě sestavit:

1. ukazatele jakosti. Závod zjišťuje na př., jaké procento vadné výroby připadá na celkový objem výroby, jaké procento připadá na jednotlivé jakostní třídy, a to

a) podle plánu, s kolika procenty se počítalo,
b) jaké procento se jeví ve skutečnosti.

2. ukazatele plnění plánu, kolik procent plánu se uskutečnilo v závodě, v jednotlivých sektorech, kolik uskutečnili jednotliví pracovníci atd.

Celostátní plánování a jeho kontrola.

Státní úřad plánovací (SUP) vypracuje ve spolupráci se všemi závody, podniky, oblastními a ústředními orgány, ministerstvy a poverenictvy, do předu celostátní plány a k tomu musí znát ukazatele předešlých období a sestavovat nové. Na př.:

Hlavní ukazatelé pětiletého plánu (podle směrnic r. 1948):

1. národní důchod v miliardách Kčs
   1948 . . . . 210 (= 100%),
   1953 . . . . 310 (= 148%);
2. průmyslová výroba v miliardách Kčs
   1948 . . . . 288 (= 100%),
   1953 . . . . 454 (= 157%).
3. zemědělská výroba v miliardách Kčs
   1948 . . . . 90 (= 100%),
   1953 . . . . 105 (= 116%);
4. stavebnictví v miliardách Kčs
   1948 . . . . 20 (= 100%),
   1953 . . . . 46 (= 230%) atd.

10. Příklady užití některých ukazatelů.

Máme vyjádřiti procento splnění plánu (ukazatel splnění plánu). Průmyslová výroba v pětiletém plánu je plánována jednak v hrubé hodnotě výroby oborů a odvětví na základě stálých cen k 1. 1. 1948, jednak ve jmenovitých úkolech. Jmenovité úkoly jsou jakýmisi základními výrobky, charakterisujícími příslušné odvětví průmyslové výroby. Jejich výroba je stanovena ve fysických jednotkách v množství (kusy, m, m^2, kg, atd.).

Výpočet procenta splnění plánu.

Procento splnění plánu se vypočítává u jednotlivých výrobků pouhým porovnáním vyrobeného množství q' s množstvím plánovaným q.

Tedy

$$U_p = \frac{q'}{q} \cdot 100.$$

Splnění plánu v celém odvětví a průmyslu se vypočte pomocí váženého aritmetického průměru, při čemž za váhu ukazatele U_p se bere počet zaměstnanců v tisících, zúčastněných na výrobě jmenovitého úkolu. Na př. váha 7,2 značí tedy 7 200 zaměstnanců. Příklad na výpočet procenta splnění plánu z dat průmyslové výroby, uvedených v tabulce 10.

Tab. 10.

Jmenovitý úkol	Plán q	Výroba q'	% splnění U_p	Váha v	$U_p \cdot v$
A	1 000 kusů	1 025	102,5	26,4	2 706,00
B	2 000 m	2 200	110,0	2,1	231,00
C	1 500 tun	1 450	96,7	7,2	696,24
				35,7	3 633,24

$$\overline{U}_p = \frac{3633,24}{35,7} = 101,8\%,$$

t. zn., že ukazatel průměrného splnění plánu byl překročen o 1,8%.

Zvláštní význam pro sledování plnění plánu má ukazatel o rovnoměrnosti splnění plánu.

Tento ukazatel je charakterisován *směrodatnou odchylkou*, tedy jediným číslem, udávajícím velikost výkyvů v plnění plánu u jednotlivých jmenovitých úkolů nad nebo pod průměrné procento splnění plánu. Čím jsou tyto rozdíly menší, tím je i menší směrodatná odchylka, vyjádřená v procentech. Jestliže některé odvětví má velmi nízkou směrodatnou odchylku, znamená to, že plán byl s hlediska rovnoměrnosti v plnění dobře splněn.

Vzorec pro ukazatele rovnoměrnosti splnění plánu má tento tvar:

$$U_\sigma^2 = \frac{(U_p - \overline{U}_p)^2 \cdot v + \ldots}{v + \ldots},$$

při čemž U_p je ukazatel procenta splnění plánu jmenovitého úkolu, $\overline{U}_p$ je ukazatel průměrného splnění plánu v odvětví a v je váha, tedy počet zaměstnanců, zúčastněných na výrobě, vyjádřený v tisících; tečky naznačují sčítání po všech jmenovitých úkolech.

Příklad: Vypočteme ukazatele rovnoměrnosti splnění plánu z dat průmyslové výroby, uvedených v tab. 11 a 12.

Tab. 11.

Oblast A — Průmyslové odvětví

Výrobek	Plán q	Výroba q'	Váha v	% splnění U_p	$U_p \cdot v$
A	2 400	2 472,0	65,0	103,0	6 695,00
B	1 600	1 603,2	29,2	100,2	2 925,84
C	1 500	1 432,5	5,1	95,5	487,05
D	1 000	1 011,0	1,2	101,1	121,32
E	520	421,2	0,4	81,0	32,40
			100,9		10 261,61

$$\overline{U}_p = \frac{10261 \cdot 61}{100{,}9} = 101{,}7\%$$

čili splnění plánu celého průmyslového odvětví činí 101,7%.

Tab. 11a)

Výrobek	% splnění U_p	$(U_p - \overline{U}_p)$	$(U_p - \overline{U}_p)^2$	$(U_p - \overline{U}_p)^2 \cdot v$
A	103,0	+ 1,3	1,69	109,850
B	100,2	− 1,5	2,25	65,700
C	95,5	− 6,2	38,44	196,044
D	101,1	− 0,6	0,36	0,432
E	81,0	− 20,7	428,49	171,396
	$\overline{U}_p = 101.7$			543,422

$$U_\sigma = \sqrt{\frac{543{,}422}{100{,}9}} \doteq \sqrt{5{,}3857} \doteq 2{,}32\%.$$

Tab. 12.

Oblast B — Průmyslové odvětví

Výrobek	% splnění U_p	Váha v	$U_p \cdot v$	$(U_p - \overline{U}_p)$	$(U_p - \overline{U}_p)^2$	$(U_p - \overline{U}_p)^2 \cdot v$
A	78,0	3,0	234,00	− 19,5	380,25	1 140,750
B	151,0	0,2	30,20	+ 53,5	2 862,25	572,450
C	108,2	5,5	595,10	+ 10,7	114,49	629,695
D	75,1	0,5	37,55	− 22,4	501,76	250,880
E	—	—	—	—	—	—
		9,2	896,85			2 593,775

$$\overline{U}_p = \frac{896{,}85}{9{,}2} = 97{,}5 \qquad U_\sigma = \sqrt{\frac{2593{,}775}{9{,}2}} = \sqrt{281{,}93} = 16{,}79\%,$$

to znamená, že ukazatel rovnoměrnosti plnění plánu je v tomto případě mnohem vyšší než v případě prvém, takže ukazatel rovnoměrnosti plnění plánu v prvém případě svědčí o lepším stejnoměrném plnění než v případě druhém.

Při počítání ukazatele rovnoměrnosti plnění plánu je možné uváděti jmenovitý úkol odvětví, který měl nejnižší procento splnění a jmenovitý úkol téhož odvětví, který měl nejvyšší splnění. Rozdíl mezi oběma těmito hodnotami se nazývá rozpětí v plnění plánu. V našem případě pro oblast *A* činí rozpětí v plnění plánu 103,0 — 81,0 = 22,0, kdežto pro oblast *B* je 151,0 — — 75,1 = 75,9, což znamená, že ve druhém případě jsou mnohem větší výkyvy ve splnění plánu než v případě prvém.

Další ukazatel, jehož se také velmi často užívá, je ukazatel odchylky od plánu. V tomto případě počítáme odchylky od plánu, t. j. od 100% a ne od průměrné hodnoty splnění plánu. Tento ukazatel je do jisté míry vlastně kontrolou, zda plán v celém odvětví byl velmi nízko nebo příliš vysoko stanoven.

Jiným z ukazatelů je ukazatel splňování pracovních norem. Určíme jej na základě údajů o výsledcích práce dělníků, pracujících v úkolu za určité období. Výpočet procenta splnění pracovních norem zjistíme srovnáním skutečné produkce dělníka v hmotných jednotkách s produkcí, která měla být dělníkem vyrobena za stejnou dobu při dodržení časových norem, stanovených pro výrobu jednotky produkce.

$$U_n = \frac{\frac{q}{T}}{t} \cdot 100 = \frac{qt}{T} \cdot 100$$

kde q je počet výrobků, zhotovených za určité období, nejčastěji za měsíc, t značí časovou normu pro jednotku výrobku v hodinách, T je pracovní čas v hodinách skutečně vynaložených.

Příklad: Stanovte procento splnění norem z dat uvedených v tab. 13.

Tab. 13.

Výrobky	Časová norma pro zhotovení jednoho výrobku v hodině t	Zhotoveno výrobků za měsíc q	Podle stanovených norem činila by potřeba děl. prac. hodin pro celou výrobu qt	Skutečně vynaložených děl. prac. hodin T	% splnění norem $U_n = \frac{qt}{T} 100$
A	2	80	160	90	177,8
B	1,5	40	60	50	120,0
C	0,5	100	50	70	71,4
Celkem			270	210	128,5

$$\overline{U}_n = \frac{270}{210} \cdot 100 \doteq 128,6\%.$$

Průměrné procento pracovních norem činí tedy 128,6%.

Vzniká otázka, jakého pracovního času máme použít při výpočtu: kalendářního nebo skutečně odpracovaného času.

Dejme tomu, že jsme pro výpočet použili kalendářního pracovního času, který, jak známo, zahrnuje také různé ztráty pracovního času. Bude potom ukazatel splnění norem nižší, než ukazatel vypočítaný na základě skutečně odpracovaných hodin.

Zpravidla se uvádějí oba ukazatelé. Ukazatel splnění norem, vypočítaný na základě skutečně odpracované doby, ukazuje, v jaké míře dělníci plní stanovené normy. Porovnáme-li tento ukazatel s ukazatelem vypočítaným podle kalendářního času, zjistíme, do jaké míry využili dělníci, pracující v úkole, svůj celkový pracovní čas.

Zjištění průměrného procenta časového splnění norem dělníky, pracujícími v úkolu, se často doplňuje ukazatelem průměrného procenta dělníků, pracujících v úkolu, kteří splnili stanovené normy.

Ukažme si na příkladě postup výpočtu obou uvedených ukazatelů.

Příklad: Vypočtěte ukazatele splnění pracovních norem u 50 dělníků, kteří se zúčastnili na výrobě v době jednoho měsíce. Potřebná data jsou uvedena v tabulce 14.

Tab. 14.

Pořadí dělníků	Zhotoveno výrobků za měsíc q	Časová norma pro jednotku výrobků v hodinách t	Pracovní čas v hodinách: podle norem qt	skutečně vynaložený T	% splnění norem $U_n = \frac{qt}{T} 100$
1	100	1,5	150,0	123	122
2	56	1,7	95,2	170	56
3	270	2,5	675,0	185	365
4	106	3	318,0	190	167
5	109	2	218,0	186	117
6	174	1	174,0	164	106
7	320	0,5	160,0	172	93
8	38	3	114,0	168	68
9	57	3	171,0	154	111
10	30	7	210,0	178	118
11	47	4	188,0	172	109
12	218	1	218,0	192	114
13	216	0,5	108,0	144	75
14	58	4	232,0	156	149
15	880	0,25	220,0	184	119
16	365	0,5	182,5	177	103
17	52	5	260,0	192	135
18	41	5	205,0	183	112
19	10	20	200,0	168	119
20	123	1,5	184,5	176	105
21	363	0,5	181,5	168	108
22	204	1	204,0	156	131
23	40	4	160,0	195	82
24	204	1,6	326,4	168	194
25	170	1,8	306,0	185	165
26	60	3	180,0	152	118
27	352	0,5	176,0	166	106
28	265	0,75	199,0	158	126
29	398	0,3	119,5	142	84
30	41	5	205,0	178	115
31	250	1,35	337,5	182	185
32	95	2	190,0	188	101
33	380	0,5	190,0	176	108
34	29	4	116,0	161	72
35	61	3	183,0	162	113

Pořadí dělníků	Zhotoveno výrobků za měsíc q	Časová norma pro jednotku výrobků v hodinách t	Pracovní čas v hodinách		
			podle norem qt	skutečně vynaložený T	% splnění norem $U_n = \frac{qt}{T} 100$
36	179	1,3	233,0	182	128
37	37	5	185,0	171	108
38	286	1,65	472,0	192	245
39	375	0,5	187,5	169	111
40	342	2,2	752,4	198	380
41	138	1	138,0	148	93
42	107	2	214,0	183	117
43	181	1	181,0	172	105
44	145	1,4	203,0	168	121
45	305	0,5	152,5	173	88
46	120	1,8	216,0	188	115
47	75	2,5	187,5	183	102
48	85	6,4	544,0	194	280
49	87	2	174,0	176	99
50	61	3	183,0	183	100
Celkem ...			11 380,0	8 651	131,5

$$U_n = \frac{11380,0}{8651} \cdot 100 \doteq 131,5\%.$$

Tento ukazatel je nutný pro charakteristiku celkového splňování pracovních norem v závodě. Avšak tento ukazatel sám o sobě nestačí. Z tabulky je patrno, že rozpětí ve splnění norem je značné, jak vidíme u dělníka č. 2, který splnil normu na 56%, kdežto dělník č. 40 na 380%, takže rozdíl činí 324. V průměrném procentu tyto rozdíly zmizely. Avšak pro správné posuzování možností dalšího zvyšování výkonnosti práce je třeba ukazatelů, charakterisujících stupeň splnění pracovních norem jednotlivými skupinami dělníků.

Je proto zapotřebí vypočítat doplňující ukazatele:

1. ukazatele roztřídění dělníků pracujících v úkolu podle procenta splnění pracovních norem,
2. průměrné procento splnění norem jednotlivými skupinami dělníků.

Pro vypočítávání těchto ukazatelů musíme všechny dělníky, pracující v úkolu, rozdělit na skupiny podle procenta splnění pracovních norem. Dejme tomu, že stanovíme tyto skupiny: Dělníci, kteří splnili normy pod 80%, od 80—99%, od 100—109%, od 110—129%, od 130—149%, od 150—199%, od 200—299% a od 300 a více %.

Pro první skupinu a prvního ukazatele vezmeme počet dělníků, splnivších normy pod 80%. Jsou to dělníci, č. 2, 8, 13 a 34 (viz tab. 14). Porovnáme nyní počet pracovních hodin podle norem se skutečně vynaloženým pracovním časem těchto dělníků.

$$U_{n_1} = \frac{433}{643} \cdot 100 \doteq 67\%$$

$$U_{n_2} = \frac{904}{1006} \cdot 100 \doteq 90\%$$

$$\vdots$$

Vypočteme-li tyto ukazatele pro všecky skupiny, dostaneme tuto tabulku (v zaokrouhlených procentech).

Tab. 15.

Počet dělníků podle procenta splnění norem	Počet dělníků ve skupině	Počet dělníků dané skupiny na celkovém počtu dělníků v %	Průměrné % splnění norem v dané skupině
— 80	4	8	67
80 — 99	6	12	90
100 — 109	12	24	105
110 — 119	13	26	115
120 — 149	7	14	130
150 — 199	4	8	178
200 — 299	2	4	263
300 +	2	4	373
Celkem	50	100	

Z tabulky je patrno, že 10 dělníků, t. j. 20% u celkového počtu dělníků nesplnilo stanovené normy, kdežto 80 dělníků normy splnilo. Těchto 80% je tedy ukazatelem průměrného procenta dělníků pracujících v úkolu, kteří splnili normy. Je to vlastně poměr počtu dělníků pracujících v úkolu, splnivších normy na 100 a více procent k počtu všech dělníků pracujících v úkolu násobený 100.

Dále je nutno vypočítat průměrné procento splnění norem skupinou dělníků, splnivších a překročivších stanovené normy. Za tím účelem se vypočte normovaný a skutečný pracovní čas u této skupiny, (t. j. všech dělníků s vyloučením dělníků nesplnivších normy).

V našem případě součet normovaného pracovního času pro dělníky, kteří plní a překročují normy, činí 10 039,5 hodin a součet skutečně vynaloženého času je 7 002 hodin.

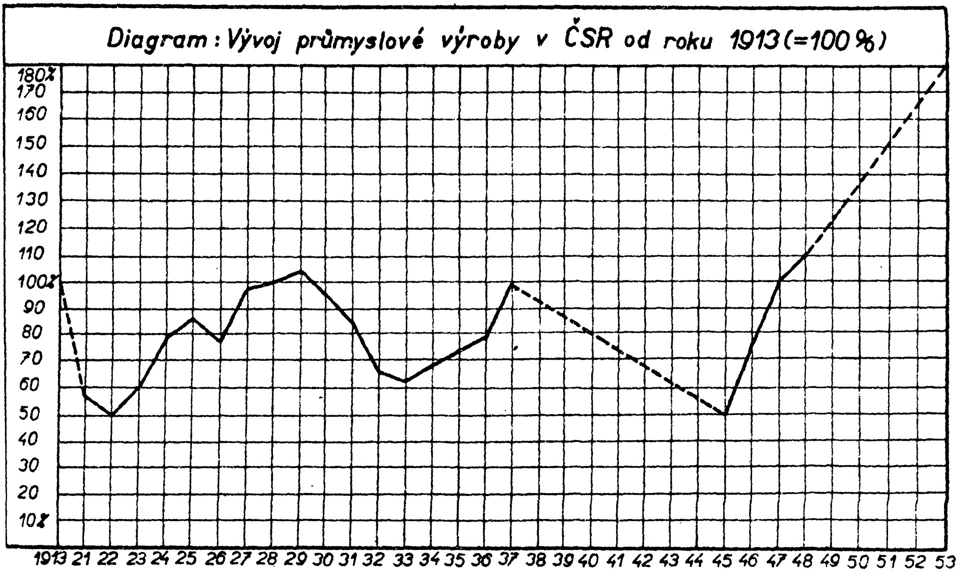
Průměrné procento splnění norem u této skupiny dělníků bude

$$\overline{U}_n = \frac{10039,5}{7002} \cdot 100 = 143\%.$$

11. Časové řady.

Vypočteme-li hodnotu některého ukazatele postupně pro časové intervaly pevné velikosti (roky nebo měsíce a pod.) následující za sebou, dostaneme **časovou řadu.** Považujeme-li jeden člen řady za základ a ostatní s ním porovnáváme dělením, dostaneme indexy, často vyjadřované v procentech nebo promilích. Indexy tedy ukazují změnu určitého ukazatele podle času (někdy také podle místa).

Koncem minulého století se velmi rozšířil takový způsob vyjadřování změny cen a životní úrovně, také změny porodnosti, úmrtnosti a pod. Nyní se užívá této methody hlavně ke znázornění postupu výroby.



Obr. 35.

Za základní rok se volí důležitý čas. Často se volí rok 1913 (poslední rok před světovou válkou); 1937 (poslední rok před Mnichovem); 1946 (začátek dvouletého plánu).

Jako příklad si uvedeme vývoj průmyslové výroby v ČSR od roku 1913 (index 1913 = 100%), neboť změna vnitřní skladby průmyslové výroby je nejlépe patrná z porovnání s předválečnou dobou.

Změnu průmyslové výroby můžeme vyčísti z diagramu. Takové indexy, které mají pevný základ, jmenují se **agregátní indexy.**

Jsou také **řetězové indexy.** Ty dostaneme, jestliže každého ukazatele dělíme ukazatelem z předcházejícího období, tedy na př. výrobu z roku 1922 dělíme výrobou z roku 1921, výrobu z roku 1923 dělíme výrobou z roku 1922 a tak dále.

Jestliže hodnoty ukazatelů v časové řadě jsou

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots a_n,$$

potom agregátní indexy jsou

$$\frac{a_1}{a_0}, \quad \frac{a_2}{a_0}, \quad \frac{a_3}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}; \tag{1}$$

řetězové indexy jsou

$$\frac{a_1}{a_0}, \quad \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}}. \tag{2}$$

V (1) a (2) máme *jednoduchá* indexní čísla, která dostáváme prostým dělením. Máme však také takové časové řady, ve kterých se vyskytují *úhrnná* indexní čísla, která, jak víme (viz článek 8) jsou váženými aritmetickými průměry jednoduchých indexních čísel.

Příklad. Vypočtěte cenové indexy se stálým základem i cenové indexy řetězové na základě údajů o cenách a množství výrobků za čtyři období obsažených v tabulce 16.

Tab. 16.

Výrobky	Ceny p				Množství q			
	p_0	p_1	p_2	p_3	q_0	q_1	q_2	q_3
a	95	80	70	70	34	39	81	60
b	190	150	150	200	9	5	4	6

A. Výpočet indexů se stálým základem na podkladě množství základního období:

$$\frac{80 \cdot 34 + 150 \cdot 9}{95 \cdot 34 + 190 \cdot 9} = \frac{4070}{4940} \doteq 82{,}39\,\%,$$

$$\frac{70 \cdot 34 + 150 \cdot 9}{95 \cdot 34 + 190 \cdot 9} = \frac{3730}{4940} \doteq 75{,}51\,\%,$$

$$\frac{70 \cdot 34 + 200 \cdot 9}{95 \cdot 34 + 190 \cdot 9} = \frac{4180}{4940} \doteq 84{,}62\,\%.$$

A. Výpočet indexů se stálým základem na podkladě množství běžného období:

$$\frac{80 \cdot 39 + 150 \cdot 5}{95 \cdot 39 + 190 \cdot 5} = \frac{3870}{4655} \doteq 83{,}14\,\%,$$

$$\frac{70 \cdot 81 + 150 \cdot 4}{95 \cdot 81 + 190 \cdot 4} = \frac{6270}{8455} \doteq 74{,}16\,\%,$$

$$\frac{70 \cdot 60 + 200 \cdot 6}{95 \cdot 60 + 190 \cdot 6} = \frac{5400}{6840} \doteq 78{,}95\,\%.$$

D. Výpočet indexů řetězových na podkladě množství předcházejícího období:

$$\frac{80 \cdot 34 + 150 \cdot 9}{95 \cdot 34 + 190 \cdot 9} = \frac{4070}{4940} \doteq 82{,}39\,\%,$$

$$\frac{70 \cdot 39 + 150 \cdot 5}{80 \cdot 39 + 150 \cdot 5} = \frac{3480}{3870} \doteq 89{,}92\,\%,$$

$$\frac{70 \cdot 81 + 200 \cdot 4}{70 \cdot 81 + 150 \cdot 4} = \frac{6470}{6270} = 103{,}19\,\%.$$

B. Výpočet řetězových indexů na podkladě množství běžného období:

$$\frac{80 \cdot 39 + 150 \cdot 5}{95 \cdot 39 + 190 \cdot 5} = \frac{3870}{4655} \doteq 83{,}14\,\%,$$

$$\frac{70 \cdot 81 + 150 \cdot 4}{80 \cdot 81 + 150 \cdot 4} = \frac{6270}{7080} \doteq 88{,}56\,\%,$$

$$\frac{70 \cdot 60 + 200 \cdot 6}{70 \cdot 60 + 150 \cdot 6} = \frac{5400}{5100} \doteq 105{,}88\,\%.$$

DOSLOV.

Na několika jednoduchých příkladech vzatých z denního života jste poznali, že matematická statistika používá ve svých základech matematických method, a že je aplikací počtu pravděpodobnosti. Proto matematické statistiky se užívá ve vědách přírodních, technických a všude tam, kde statistický soubor sestává z velkého počtu jednoduchých, vzájemně nezávislých prvků a kde se uplatňuje zákon velkých čísel.

Vědy společenské si však vyžadují jiných method, method ekonomických, založených na vědecké theorii marx-leninismu; a právě těchto method užívá statistika. Podle toho je tedy statistika věda společenská, která se zabývá studiem sociálně-ekonomických jevů a procesů a shromážděná data zpracovává na podkladě všestranné analysy společensko-ekonomických vztahů za pomoci ekonomiky marx-leninské. — Ovšem i statistika užívá při zpracovávání dat matematických method, samozřejmě až po jejich náležitém ekonomickém roztřídění. Rovněž tak výsledky získané methodami theorie pravděpodobnosti a methodami matematické statistiky, musí být vyhodnocovány na základě marx-leninské ekonomiky.

Rovněž tak theorie indexů, která je theorií čistě ekonomickou, manipuluje s určitým matematickým aparátem, s kterým se nutno obeznámit a který zde byl proto ve stručnosti také vyložen.

III. VÝSLEDKY CVIČENÍ.

I. FUNKCE A JEJÍ GRAFY.

1. Pojem funkce.

1. a) Pro každé x; b) $x \geqq 0$; c) pro každé x; d) $x \geqq 0$; e) pro každé x; f) $x \geqq 0$; g) $x \geqq 0$; h) $x > 0$; i) pro každé x; j) $x > 0$; k) pro každé x; l) $x \neq k\pi$, kde k je celé; m) $x \neq k\pi$, kde k je celé; n) $x \leqq \frac{5}{2}$; o) $-1 \leqq x \leqq 1$; p) $x > 0$; q) $x > 0$; r) $x \neq \pm 1$; s) $x \neq \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{17})$; t) $x \geqq 3$ a $x \leqq 1$; u) pro každé x; v) pro žádné x; z) $x > 3a$ a $x < -a$. — **2.** a) $y = \dfrac{x}{c}$, kde $0 < x < c$; $0 < y < 1$; b) $y = \sin\alpha$, kde $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$; c) definice goniometrické funkce $y = \sin\alpha$ libovolného úhlu α zahrnuje jako zvláštní případ definici funkce $\sin\alpha$, jakožto poměr $\dfrac{x}{c}$ ze cvič. a). — **3.** $V = \frac{1}{4}\pi(4r^2 - x^2)\,x$; a) $0 < x < 2r$; b) pro každé x. — **4.** $S = \pi s^2\sqrt{1 - \left(\dfrac{s}{2r}\right)^2} \cdot \left[2 + \sqrt{1 - \left(\dfrac{s}{2r}\right)^2}\right]$; a) $0 < s < 2r$; b) $0 \leqq s \leqq 2r$. — **5.** a) $v = \dfrac{2rx^2}{x^2 - r^2}$; $V = \dfrac{2\pi rx^4}{3(x^2 - r^2)}$; definováno pro $x \neq \pm r$; význam má pro $x > r$; b) $V = \dfrac{\pi r^2 v^2}{3(v - 2r)}$; definováno pro $v \neq 2r$; význam má pro $v > 2r$. — **6.** a) Pro každé x; b) $-1 \leqq x \leqq 1$; c) pro každé x; d) $x > \frac{2}{3}\sqrt{3}$ a $x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$; e), f), g) pro každé x. — **7.** a) až d) pro každé x; e) $x \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$, kde k je celé; f) $x \geqq 0$; nemá uvedenou vlastnost; g) pro každé x. — **8.** a), c), d), e), f), j) jsou prosté. — **9.** Rostoucí je funkce b); klesající je funkce a), c), d), e), f). — **10.** a) Rostoucí jsou funkce b), d), f), g), i), j), q). — b) Klesající jsou funkce h), n), p). — c) Všecky ostatní vyjímajíc v.

11. a) $y \geqq -5$; b) $y \leqq 8$; c) $-4 \leqq y \leqq 4$; d) $0 \leqq y \leqq 4$; e) $-1 \leqq y \leqq 0$; f) $0 \leqq y \leqq 2$; g) $y < 10$; h) nabývá všech reálných hodnot. — **12.** a) $b \leqq 6$; $-a$; b) $-5 \leqq b \leqq 5$; $k\pi \pm a$, kde k celé; c) $-3 \leqq b \leqq 3$; $\frac{2}{3}k\pi \pm a$, kde k je celé; d) b je libovolné; $a + k\pi$, kde k je celé. — **13.** a) Rostoucí pro $x \geqq 0$; klesající pro $x \leqq 0$; b) rostoucí pro $x \leqq \frac{3}{2}$; klesající pro $x \geqq \frac{3}{2}$; c) rostoucí pro každé x; d) rostoucí pro $2k\pi \leqq x \leqq (2k + 1)\pi$, klesající pro $(2k - 1)\pi \leqq x \leqq 2k\pi$, kde k je celé; e) rostoucí pro $k\pi < x < (k + 1)\pi$; f) rostoucí pro $x \geqq 0$, klesající pro $x \leqq 0$; g) konstantní pro každé x; h) rostoucí pro $x \geqq 0$, klesající pro $x \leqq -1$, konstantní pro $-1 \leqq x \leqq 0$. **14.** a) Rostoucí pro $x \geqq 0$, klesající pro $x \leqq 0$; b) rostoucí pro $x \leqq 0$, klesající pro $x \leqq 0$; c) rostoucí pro $x \geqq 3$ a pro $-3 \leqq x \leqq 0$, klesající pro $0 \leqq x \leqq 3$ a pro $x \leqq -3$.

2. Lineární celistvá funkce.

15. $y = kx - (kx_1 - y_1)$; a) $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$; b) $y = -\frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$; c) $y = -4$. — **16.** a) Pro $x \geqq 0$ je $k = 1$ a pro $x \leqq 0$ je $k = 0$; b) pro $x \geqq 0$ je $k = 0$, pro $x \leqq 0$ je $k = -1$; c) pro $x > 0$ i pro $x < 0$ je $k = 0$; d) pro $x \geqq 0$ je $k = -1$, pro $x \leqq 0$ je $k = 1$. — **17.** Je-li $A \equiv [x_1; y_1]$ jeden bod grafu funkce a $[x; y]$ jiný libovolný bod grafu, pak podle předpokladu je $\frac{y - y_1}{x - x_1} = k$, což je rovnice přímky jdoucí bodem A a mající směrnici k.

3. Funkce $y = ax^2$.

19. Z nerovnosti $x_1 + x_2 < x_1' + x_2'$ plyne $a(x_1 + x_2) > a(x_1' + x_2')$. — **20.** Ze symetrie parabol $y = ax^2$, $y = -ax^2$; je-li $a < 0$, je $-a > 0$.

21. a) $V \equiv [2; -1]$; $F \equiv [2; -\frac{5}{4}]$; $d \equiv y = -\frac{3}{4}$; $t \equiv y = -1$; b) $V \equiv [-5; 0]$; $F \equiv [-5; -\frac{1}{4}]$; $d \equiv y = \frac{1}{4}$; $t \equiv y = 0$; c) $V \equiv [0; -6]$; $F \equiv [0; -\frac{71}{12}]$; $d \equiv y = -\frac{73}{12}$; $t = y \equiv -6$. — **22.** $y = \frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 4$. — **23.** $x' = x + \frac{b}{2a}$; $y' = y + \frac{b^2}{4a} - c$; totéž y dostaneme pro taková x_1, x_2, pro něž je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. — **24.** $2a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right) = 2ax_1 + b$. — **25.** $2ax_1 + b = 0$; $x_1 = -\frac{b}{2a}$; $y_1 = -\frac{b^2}{4a} + c$. — **26.** Tečna v bodě $[m; am^2]$. — **27.** Přímka $y = 2axx_1 + q$ prochází bodem $[x_1; ax_1^2]$; odtud $q = -ax_1^2 = -y_1$. — **28.** a) $x - y = 1$; $2x + y = -4$; b) $3x - 2y = 27$; $2x + 3y = -8$; c) $2x(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + p^2}) - 2py = (x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + p^2})^2$. — **29.** Rovnice $avx^2 + ux - ux_0 - vy_0 = 0$ má jediné řešení, je-li buď $v = 0$ (hledaná přímka je pak $x = x_0$) nebo $u^2 + 4ax_0uv + 4ay_0v^2 = 0$; odtud $\frac{u}{v} = -2ax_0 \pm 2\sqrt{a(ax_0^2 - y_0)}$; dvě řešení pro $y_0 < ax_0^2$, jedno pro $y = ax_0^2$, žádné pro $y_0 > ax_0^2$. — **30.** a) Vyloučením y z rovnic $y = ax^2$, $y = kx + q$ ($\equiv$ přímka MN) dostaneme kvadratickou rovnici (1) $\equiv ax^2 - kx - q = 0$ pro souřadnice x_1, x_2 bodů $M \equiv [x_1; y_1]$, $N \equiv [x_2; y_2]$; je $M \not\equiv N$ pro $x_1 \neq x_2$, t. j. pro $D = k^2 + 4aq > 0$. Z rovnice (1) pro čísla x_1, x_2 plyne (2) $\equiv x_1x_2 = -\frac{q}{a}$; (3) $\equiv x_1 + x_2 = \frac{k}{a} = 2x_0$ (pro $D > 0$), jestliže totiž pro bod S platí $S \equiv [x_0; y_0]$. Tedy (4) $\equiv x_0 = \frac{k}{2a}$, což je rovnice přímky r rovnoběžné s osou y paraboly; body S leží tedy na přímce r o rovnici $x = \frac{k}{2a}$ (je $a \neq 0$). b) Z derivace $2ax$ funkce $y = ax^2$ plyne, že směrnice tečny t v hledaném bodě $H \equiv [x'; y']$ je $2ax' = k$, t. j. $x' = \frac{k}{2a}$; leží tedy bod H na přímce r ze cvič. a), což souhlasí i s případem, že rovnice (1) ze cvič. a) má jediný kořen, když je totiž $D = 0$. Dále je $y' = \frac{k^2}{4a}$. c) Jistě je $x_1 \neq x_2$. Bod $R \equiv [\bar{x}; \bar{y}]$ splňuje rovnice tečen t_1, t_2, t. j. $y + y_1 = 2axx_1$, $y + y_2 = 2axx_2$; je $\bar{x} = \frac{k}{2a} = x_0$ (a bod R leží na přímce r). V rovnicích tečen položme $x = \bar{x} = x_0$, sečtěme a dělme dvěma; tím $\bar{y} + y_0 = \frac{k^2}{2a}$ (užijte vztahu (4) ze cvič. a)) a poloviční hodnota tohoto součtu souřadnic y bodů R, S je skutečně souřadnice y' bodu H.

31. $x = 6$. — **32.** Tětivy o směrnici — 1. — **33.** Jestliže je úloha řešitelná, udává přímka RS směr osy paraboly (viz cvič. 30); je $N \equiv [-x_1; -y_1]$, neboť $\overline{MS} = \overline{SN}$ a $S \equiv [0; 0]$. Hledaná rovnice paraboly má tvar $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, b, c jsou konstanty, které máme užitím hodnot $x_1 \neq 0$, y_1, $q \neq 0$ určit. Body M, N leží na parabole, t. j. $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$; $y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$; směrnice přímky RM je $\frac{y_1 - 2q}{x_1} = 2ax_1 + b$. Z těchto tří rovnic plyne $a = -\frac{q}{x_1^2}$; $b = \frac{y_1}{x_1}$; $c = q$ atd. — **34.** a) Přímka určena body $[ht_1; ht_1^2]$, $[ht_2; ht_2^2]$. b] Přímka procházející bodem $[ht; ht^2]$ a mající směrnici $2t$. Leží-li bod $[x, y^*]$ na parabole a na tečně bod $[x; y]$, je $y^* - y = \frac{1}{h}(x - ht)^2$; pro $x = ht$ je $y^* - y = 0$, pro $x \neq ht$ má $y^* - y$ totéž znamení jako h. c) Jde o diskusi rovnice $ht^2 = kht + q$; $k^2h + 4q \gtreqless 0$. d) Hledáme kořen t rovnice $ht^2 = kht + q$, jejíž diskriminant položíme rovný nule; je $t = \frac{1}{2}k$. e) Parametry dotykových bodů vyhovují rovnici $y_0 = 2tx_0 - ht^2$; je-li $x_0^2 > hy_0$, je $hy = 2(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - hy_0}) \cdot (x - x_0) + hy_0$ rovnice tečny. f) Přímka (t_1) (t_2) má směrnici $k = t_1 + t_2$; střed úsečky (t_1) (t_2) má souřadnici $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}h(t_1 + t_2) = \frac{1}{2}hk$. Přímka s protne parabolu v bodě $[\frac{1}{2}hk; \frac{1}{4}hk^2]$; tečna v tomto bodě má směrnici k (viz cvič. b). g) Podle cvič. e) je $t_1 + t_2 = \frac{2x_0}{h}$; $t_1t_2 = \frac{y_0}{h}$, t. j. $x_0 = \frac{1}{2}h(t_1 + t_2)$; $y_0 = ht_1t_2$. Souřadnice x bodu S je $\frac{1}{h}(t_1 + t_2)$ podle f). h) Jsou-li tečny v bodech (t_1), (t_2) k sobě kolmé, je $2t_1 \cdot 2t_2 = -1$, tedy $y_0 = -\frac{1}{4}h$ (řídicí přímka). i) $y_1 = ht(t_2 - t_1) + ht_1t_2$; $y_2 = ht(t_1 - t_2) + ht_1t_2$. Směrnice přímky R_1R_2 je $\frac{y_2 - y_1}{h(t_1 - t_2)} = 2t$. j) Na přímkách vedených body (t_2), (t_1) rovnoběžně s přímkou QS, kde S je střed úsečky (t_1) (t_2); body R_1, R_2 zvolíme tak, aby jejich spojnice procházela bodem Q; bod (t) je průsečík přímek $R_1(t_1)$, $R_2(t_2)$. Je-li $R_1R_2 \perp QS$ je příslušný bod (t) vrcholem paraboly.

4. Lineární lomená funkce.

36. Hyperboly a), b) jsou souměrné podle kterékoli z os souřadnic; c) pro $x > 0$ jde o pravou větev hyperboly $y = \frac{12}{x}$; pro $x < 0$ o levou větev hyperboly $y = -\frac{12}{x}$; d) vznikne z a) posunutím o 3 jednotky směrem vzhůru; e) vznikne z a) posunutím o 2 jednotky směrem dolu. — **37.** a) $|y| \leq 0{,}7$; $x \geq \frac{40}{7}$ nebo $x \leq -\frac{40}{7}$; b) $-0{,}7 \leq x \leq 0{,}7$. — **38.** Je-li $y = \frac{a}{x}$, je $x = \frac{a}{y}$ a také $-x = \frac{a}{-y}$. — **39.** a) $c = \pm\sqrt{\frac{a'}{a}}$; b) hyperbola h_0 má rovnici $y = -\frac{a}{x}$; položíme-li $x = c' \cdot x'$, $y = c' \cdot y'$, kde $c' = \pm\sqrt{-\frac{a}{a'}}$, vyjde $y' =$

$= \frac{a'}{x'}$. — **40.** a) $y = \frac{S}{x}$ pro $x > 0$; b) spojnice bodu P s průsečíkem přímek $X'M'$, YM prochází průsečíkem přímek XM, $Y'M'$. c) $\overline{PX'^2} = \overline{PX} \cdot \overline{PY}$.

41. $y_0x + x_0y = 2a$; úseky tečny na osách souřadnic jsou: $\frac{2a}{y_0} = 2x_0$; $\frac{2a}{x_0} = 2y_0$; obsah $P = 2a$. — **42.** a) Tečnu v bodě $M \equiv [x; y]$ sestrojíme tak, že určíme její průsečíky X, Y s asymptotami x, y; je $\overline{PX} = 2x$; $\overline{PY} = 2y$. b) Dotykový bod je středem úsečky, kterou na tečně t vytínají asymptoty x, y; tečna nesmí jít průsečíkem asymptot a nesmí se žádnou z nich být rovnoběžná. — **43.** a) $y = -\frac{36}{x}$ b) $y = \frac{36}{x}$; c) $y = -\frac{q^2}{4kx}$; d) $y = \frac{1}{4uvx}$, kde $uv \neq 0$. — **44.** $M_1 \equiv \left[\sqrt{-\frac{a}{k}};\ \sqrt{-ak}\right]$; $M_2 \equiv \left[-\sqrt{-\frac{a}{k}};\ -\sqrt{-ak}\right]$ pro $a > 0, k < 0$ nebo $M_1 \equiv \left[\sqrt{-\frac{a}{k}};\ -\sqrt{-ak}\right]$; $M_2 \equiv \left[-\sqrt{-\frac{a}{k}};\ \sqrt{-ak}\right]$ pro $a < 0$, $k > 0$. — **45.** Rovnice $ux + \frac{av}{x} - ux_1 - y_1 = 0$ má jediné řešení, je-li: (1) $v = 0$ (hledaná přímka je $x = x_1$). (2) Je-li $v \neq 0$, lze naši rovnici psát $ux^2 - (ux_1 + vy_1)x + av = 0$ a jediné řešení je buď pro $u = 0$ (hledaná přímka je $y = y_0$) nebo když je diskriminant $(ux_1 + vy_1)^2 - 4auv = 0$; odtud
$\frac{u}{v} = \frac{2a - x_1y_1 \pm 2\sqrt{a(a - x_1y_1)}}{x_1^2}$; dvě řešení pro $a(a - x_1y_1) > 0$, jedno pro $x_1y_1 = a$, žádné pro $a(a - x_1y_1) < 0$. Případ $a - x_1y_1 > 0$ při $a > 0$ značí, že bod R leží uvnitř jedné větve hyperboly, na př. pro $x_1 > 0$ je i $y_1 > 0$ a o bodu $M \equiv [x_1; y^*]$ hyperboly pak platí, že $y^* < y_1$. — **46.** a) Poměr přírůstků se zmenší; vnitřek úsečky A_1A_2 leží pod hyperbolou. b) Leží v ϱ_1 (tedy zároveň s obloukem A_1A_2 ze cvič. a)), jak plyne z této úvahy: Budiž pro určitost $x_1 < x_2 < 0$; přímka $s \equiv A_1A_2$ má rovnici $k(x - x_1) - (y - y_1) = 0$, kde $a > 0$, $k = -\frac{a}{x_1x_2}$ (viz vztah (2) na str. 21), $y_1 = \frac{a}{x_1}$. Po úpravě rovnice zní $s \equiv ax + x_1x_2y - a(x_1 + x_2) = 0$. Uvažujme libovolný bod $M \equiv [x; y]$ naší hyperboly $\left(\text{je tedy } y = \frac{a}{x}\right)$; ptejme se, ve které z obou polorovin ϱ_1, ϱ_2 leží úhel M, t. j. dosaďme souřadnice bodu M do rovnice přímky s. Po úpravě máme dosazení $V = \frac{a}{x}\,[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$, při čemž pro hyperbolu jistě je $x \neq 0$, t. j. $V = \frac{a}{x}(x - x_1)(x - x_2)$. Pro body hyperboly z I. kvadrantu je $x_1 < x_2 < 0 < x$ a proto $V > 0$; ale také je $V > 0$ pro ta $x < 0$, pro něž je zároveň $x - x_1 > 0$, $x - x_2 < 0$ (nebo zároveň $x - x_1 < 0$, $x - x_2 > 0$, což však vzhledem k předpokladu, že $x_1 < x_2 < 0$ nelze splnit). Odtud plyne $x_1 < x < x_2$, t. j. body M hyperboly příslušné k oblouku A_1A_2 leží s pravou větví hyperboly v ϱ_1. — **47.** $y = -\frac{1}{2}$ s výjimkou bodu $[\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}]$. — **48.** a) $S \equiv [-1; 1]$; $a = -3$; b) $S \equiv [3; 2]$; $a = 1$; c) $S \equiv [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$; $a = -1$; d) přímka $y = -\frac{2}{3}$ s vyloučením bodu $[\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}]$. — **49.** Grafem

funkce je hyperbola, která vznikne posunutím dané hyperboly ve směru osy y o úsečku velikosti e. — **50.** a) Pro $-1 < x \leqq 1$ je to část hyperboly o rovnici $y - n = \dfrac{a}{x - m}$, kde $S \equiv [m = -1;\ n = -1]$, $a = 2$; pro $x > 1$ a $x < -1$ je to část hyperboly o rovnici téhož tvaru, kde $S' \equiv [m = -1;\ n = 1]$, $a = -2$; všecky části grafu leží nad osou x. b) Pro $x \geqq 1$ je to část hyperboly o rovnici $y - n = \dfrac{a}{x - m}$, kde $S \equiv$ $\equiv [m = -1;\ n = 1]$, $a = -2$, pro $x < 1$ část hyperboly o rovnici předchozího tvaru, kde však $S' \equiv [m = -1;\ n = -1]$, $a = 2$.

51. $y = \dfrac{5x - 7}{3x - 5}$. — **52.** $-\dfrac{bc - ad}{c^2} : \left(x + \dfrac{d}{c}\right)^2 = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ (viz vztahy (8), (10), (11) v textu).

5. Funkce $y = \sin x$.

53. c) Vznikají vhodným posunutím grafu o rovnici $y = \cos x$ ve směru osy x. — **54.** Označme φ velikost úhlu $\widehat{X_0OX}$ (v obloukové míře); potom $x = \dfrac{1}{b} \cdot \varphi$; $y = a \sin\varphi$. Jde-li o funkci $a \cdot \sin(bx + c)$, sestrojíme úhel $\widehat{X_0'OX_0''} = c$ (v obloukové míře), kde X_0'' leží na k_2 a oblouk x neměříme od bodu X_0', nýbrž od bodu X_0''. — **55.** a) $\sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$; b) $\frac{1}{5} \sin(x + \varphi)$, kde $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{4}$; c) 0. — **57.** 108°36′.

6. Lineární interpolace.

58. a) Žádáme, aby poměr $k = \dfrac{y'' - y'}{x'' - x'}$ přírůstků, kde $x_1 < x' < x_2$, $x_1 < x'' < x_2$, se vždy zvětšil (nebo zmenšil), kdykoli zvětšíme jednu nebo obě hodnoty x', x''. (1) Je $k = 2(x' + x'') + 8$ a tedy k roste s čísly x', x''. (2) Je $k = -3(x' + x'') + 18$ a tedy k se zmenšuje, roste-li jedno nebo obě čísla x', x''. Funkce tedy podmínkám interpolace vyhovují. b) Je o 0,48 větší (o 0,72 menší); c) $y = 14x + 1$; $y = 9x - 23$; d) všecky body křivky různé od dotykového bodu leží nad (pod) tečnou; je $x' = 1{,}5$; $|y^* - y'| =$ $= 0{,}5$ (v druhém případě $x' = 1{,}5$; $|y^* - y'| = 0{,}75$). — **59.** (Srovnej výsl. cvič. 58.) Budiž $a > 0$, $k = -\dfrac{a}{x_1x_2}$ poměr přírůstků. V intervalu $x < 0$ je interpolace oprávněná (poměr k roste, když jedno nebo obě čísla x_1, x_2 vzrostou). Právě tak v intervalu $x > 0$ (k se zmenší, když jedno nebo obě čísla x_1, x_2 vzrostou). — **60.** Body $M \equiv [x; y]$, $M' \equiv [x'; y']$, kde $x' = y$, $y' = x$ jsou souměrně sdružené vzhledem k ose souměrnosti o rovnici $y = x$. Bod M, jehož souřadnice vyhovují funkci $y = \sqrt{x}$ (pro $x \geqq 0$), vyhovuje i rovnici $x = y^2$. Ale graf funkce $y' = x'^2$ je obrazem funkce $x = y^2$ (kde y je nezávisle proměnná) ve zmíněné souměrnosti. Funkce $y' = x'^2$ je v intervalu $x' \geqq 0$ rostoucí a poměr přírůstků $k' = \dfrac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} > 0$ vzroste, vzroste-li alespoň jedno z čísel $x_2' = x_1'$; při tom pro $x_2' > x_1' \geqq 0$ je také $y_2' > y_1' \geqq 0$. Proto vzhledem k vztahům $x' = y$,

$y' = x$ o funkci $y = \sqrt{x}$ platí, že pro $x \geqq 0$ je tato funkce rostoucí a poměr přírůstků $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{x_2' - x_1'}{y_2' - y_1'} = \dfrac{1}{k'} > 0$ klesá, když vzroste alespoň jedno z čísel $x_1 \neq x_2$.

61. 2,974. — **62.** Ve 4 hod. 30 min. ránc. — **63.** 76,232 g. — **64.** Položme $x = \dfrac{\pi}{180}(90+y)$, kde y je v míře stupňové. Potom $\cos y = \operatorname{arc}(y - 30^0)$. Z tabulek zjistíme $\cos 59° \doteq 0{,}5150$; $\operatorname{arc}(59^0 - 30^0) \doteq 0{,}5061$; $\cos 60° \doteq 0{,}5000$; $\operatorname{arc}(60^0 - 30^0) \doteq 0{,}5236$; hledané y je mezi 59° a 60°. Je-li $y = 59° + \alpha'$, je přibližně $0{,}5160 - \frac{1}{60} \cdot 0{,}0150 \cdot \alpha = 0{,}5061 + \frac{1}{60} \cdot 0{,}0175\alpha$. Odtud $\alpha \doteq 16'$; $y = 59°16'$; x (v míře stupňové) $\doteq 149°16'$; $\dfrac{v}{r} = \cos \frac{1}{2} x \doteq 0{,}2630$.) — **65.** Z tabulek zjistíme: $0{,}347^3 = 0{,}04178$; $0{,}348^3 = 0{,}04214$; $3 \cdot 0{,}347 - 1 = 0{,}041$; $3 \cdot 0{,}348 - 1 = 0{,}044$, takže $\dfrac{x}{r}$ je mezi 0,347 a 0,348. Položme $\dfrac{x}{r} = 0{,}347 + 0{,}001 \cdot z$; pak je přibližně $0{,}04178 + 0{,}00036z = 0{,}041 + 0{,}003z$ a odtud $z \doteq 0{,}39$, takže $\dfrac{x}{r} = 0{,}34730$. — **66.** Je-li v tabulce uvedeno číslo x_1^2 a hledáme-li lineární interpolací číslo $(x_1 + n)^2$, kde $0 < n < 0{,}1$, nalezneme přibližnou hodnotu $y = x_1^2 + (2x_1 + 0{,}01)n$, která se liší od přesné hodnoty $(x_1 + n)^2$ o $n(0{,}01 - n) = 0{,}000\,025 - (0{,}005 - n)^2$, která je největší, když $n = 0{,}005$; je tedy nanejvýš rovná čtvrtině jednotky stojící na místě 5. nebo 6. platné číslice.

7. Limita funkce.

67.*) a) $|(2x - 1) - 1| = 2|x - 1| < 10^{-3}$, t. j. $|x - 1| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$, a to pro ta x, o nichž platí $1 - \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} < x < 1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$, je daná nerovnost splněna. b) Je-li $\{x_n\}$ taková posloupnost, že $x_n \neq a$, $\lim x_n = a$, máme dokázat, že $\{(2x_n - 1) - (2a - 1)\}$ je nulová posloupnost. Položme $x = a + h$; nerovnost $|(2x - 1) - (2a - 1)| < k$ neboli $|2 \cdot h| < k$ platí pro $|h| < \frac{1}{2} \cdot k$, t. j. pro ta x, o nichž platí $|x - a| < \frac{1}{2} \cdot k$. — **68.** $\{(mx + n) - (ma + n)\}$ má být nulová, jestliže $\{x_r\}$ je taková posloupnost, že $x_r \neq a$, $\lim x_r = a$. Nerovnost $|(mx + n) - (ma + n)| < k$ neboli $|m \cdot h| < k$ platí pro $|h| < \dfrac{k}{|m|}$, t. j. pro x, o nichž platí $|x - a| < \dfrac{k}{|m|}$; volíme $l \leqq \dfrac{k}{|m|}$. — **69.** Je-li $x = 2 + h$, kde $|h| < 1$; potom platí $|x^2 - 4| = |h^2 + 4h| \leqq |h^2| + |4h| = h^2 + 4|h| < 5|h|$. Nerovnost $|x^2 - 4| < k$ bude splněna, bude-li $|h| < 1$ a současně $5|h| < k$, t. j. bude-li $|h| < \frac{1}{5} \cdot k$ neboli $|x - 2| < \frac{1}{5} \cdot k$, $|x - 2| < 1$; poslední nerovnost odpadne, zvolíme-li $k < 5$. — **70.** Budiž $x = a + h$, kde $|h| < 1$. Potom je $|f(x) - f(a)| = |2ah - 2h + h^2| \leqq |2ah| + |2h| + |h^2| < |2ah| + |2h| + |h| = |h|(|2a| + 3)$; nerovnost $|f(x) - f(a)| < k$ bude platit, když bude platit $|h| < 1$ a zároveň $|h|(|2a| + 3) < k$, t. j. bude-li $|h|$ menší než kterékoli z čísel 1 a $\dfrac{k}{2|a| + 3}$.

---

*) [Čti návod ke cvič. 67 až 71 na str. 41.]

71. Je $\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|}$; jestliže je $|x-1| < \frac{1}{2}$, t. j. $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ a tudíž $\frac{1}{|x|} < 2$. Je tedy $\frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1|$; nerovnost $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < k$ bude splněna, zvolíme-li x tak, že současně platí nerovnosti $|x-1| < \frac{1}{2}$ a $2|x-1| < k$ neboli $|x-1| < \frac{k}{2}$. Stačí, aby platilo $|x-1| < l$, kde l je menší než kterékoli z čísel $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}k$. — 73. $\lim\limits_{x \to 2} y = 12$; grafem funkce je parabola o rovnici $y^2 = x^2 + 2x + 4$ s výjimkou bodu $[2; 12]$, neboť pro číslo $x = 2$ není daná funkce definována. — 74. a) Je $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1$ (viz věta V v Aritmetice III., na str. 38). b) Viz cvič. a). c) Lze psát $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} \cdot x = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} x = 1.0$. d) Je $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ a je-li $\lim x = 0$, je též $\lim \frac{1}{2}x = 0$. e) Je $\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}$ (dále cvič. c)). f) Je $\frac{\sin x + 1 - \cos x}{x} = \frac{\sin x}{x} + \frac{1 - \cos x}{x}$ (dále viz cvič. e)). — 75. (1) Pro $f(x) = c$ je $|f(x) - f(a)| = 0$ pro každé a, x. (2) Pro $f(x) = x$ je $|f(x) - f(a)| = |x - a| = |h| < k$ pro všecka x, pro něž je $|h| < k$ neboli $|x - a| < k$, kde k je zvolené malé kladné číslo. a) Funkce $y = m$, $y = x$ jsou spojité a tedy i jejich součin (věta C na str. 40) je funkce spojitá; dále funkce $y = mx$, $y = n$ jsou spojité a tedy i jejich součet (věta A na str. 123) je spojitá funkce. b) Daná funkce je spojitá, rovněž i funkce $y = x$ a podle věty C také jejich součin (1); funkce (1) je spojitá, rovněž funkce $y = a_n$ je spojitá a podle věty A i jejich součin. Věta platila podle předpokladu pro n a tedy platí i pro $(n + 1)$; podle cvič. a) je předpoklad platný pro $n = 1$, tím i pro $n = 2$ atd.

8. Derivace funkce.

76. a) 3; b) -4; c) -6; d) -3; e) $-2x$; f) $-4x + 3$. — 77. Derivace je definována pro reálná $x \neq 0$. Daná funkce není regulární. — 78. Směrnice tečen jsou: $-\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{25}{12}$. — 79. Položme $f(x) = x^n$, $g(x) = x$ (viz VII na str. 47) a tedy $f' \cdot g + f \cdot g' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1$; vzorec $y' = nx^{n-1}$ pro derivaci funkce $y = x^n$ platí pro $n = 1$ a podle předchozího i pro $n = 2$ atd. — 80. a) Funkce $f(x) = x^n$ má derivaci $f' = nx^{n-1}$; podle věty VI je $y = ax^n = a \cdot f(x)$ a tedy $y' = a \cdot f' = anx^{n-1}$. b) Proveďte postupně užitím cvič. a) a věty V.

83. a) Pro $m > 0$ je $y' > 0$, pro $m < 0$ je $y' < 0$. b) Je $y' = 2x > 0$ pro $x > 0$ a $y' < 0$ pro $x < 0$. c) Je $y' = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro všecka $x \neq 0$. d) Je $y' = 2ax + b \gtrless 0$ při $a > 0$ podle toho, je-li $x \gtrless -\frac{b}{2a}$. Pro $a < 0$ zaměňte znaménka nerovností a výrazy „rostoucí" a „klesající". e) Je $y' = nx^{n-1} > 0$ pro n liché, neboť x^{n-1} je sudá mocnina;

pro n sudé je $(n - 1)$ liché číslo a $y' > 0$ pro $x > 0$, kdežto pro $x < 0$ je lichá mocnina $x^{n-1} < 0$ a tím i $y' < 0$. f) Je $y' = \cos x > 0$ pro všecka x z intervalu $-\frac{1}{2}\pi < x - \frac{1}{2}\pi$. Funkce $y = \cos x$ je v intervalu $0 < x < \pi$ klesající, neboť je $y' = -\sin x < 0$ pro všecka x z tohoto intervalu.

9. Fysikální význam derivace.

84. 181 500 gcm²/sec². — **85.** Z rovnic $s = at^2 + bt + c$, $v = 2at + b$ pro $t = 0$ plyne $s = 0$, $v = 0$; proto $b = 0$, $c = 0$. 500 m, $\frac{5}{18}$ m/sec². — **86.** 10 m/sec. — **87.** 90 km/hod = 25 m/sec. Z rovnic $s = at^2 + bt + c$, $v = 2at + b$ pro $t = 0$ dostáváme $s = 0$, $v = 25$, takže $c = 0$, $b = 25$; dále $1000 = at^2 + 25t$, $0 = 2at + 25$, takže $t = 80$ vt. b) $78\frac{3}{4}$, $67\frac{1}{2}$, $56\frac{1}{4}$, ..., 0 km/hod. — **88.** a) $v = c - gt$; b) $t = \frac{c}{g}$, $s = \frac{c^2}{2g}$, nejvyšší bod dráhy; c) $v = -c$, $t = \frac{2c}{g}$. — **89.** a) Z rovnic $x = ct\cos\alpha$, $y = ct\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ vylučte t. b) $c^2\sin 2\alpha : g$; největší pro $\alpha = 45°$. c) $\sqrt{c^2 - 2cgt\sin\alpha + g^2t^2}$; nejmenší pro $t = c\sin\alpha : g$, kdy je těleso v nejvyšším bodě své dráhy. — **90.** Je-li $\alpha = at^2$ úhel otočení, je $2\pi = 64a$, takže $\alpha = \frac{1}{32}\pi t^2$; úhlová rychlost $\omega = \frac{1}{16}\pi t$ pro $t = 32$ je $\omega = 2\pi$.

91. a) $s = r\sin\omega t$, $v = r\omega\cos\omega t$; b) $a = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 s$. — **92.** $\omega : 2\pi$. — **93.** 273,3 cm/sec. — **94.** $s = \frac{v_0}{2\pi n}\sin 2\pi n(t - t_0)$, $v = v_0\cos 2\pi n(t - t_0)$, $a = -2\pi n v_0 \cdot \sin 2\pi n(t - t_0)$. — **95.** a) Průvodič r svírá s daným průměrem úhel $\omega t + \varepsilon$, kde ε je úhel, který svírá průvodič s průměrem v čase $t = 0$. Poloha průmětu je $r\cos(\omega t + \varepsilon) = r\sin(\omega t + \varepsilon + \frac{1}{2}\pi)$. b) $x = r\cos(\omega t + \varepsilon)$, $y = r\sin(\omega t + \varepsilon)$, kde $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{y_0}{x_0}$. c) Rychlost je vektor o složkách $-r\omega\sin(\omega t + \varepsilon) = r\omega\cos(\omega t + \varepsilon + \frac{1}{2}\pi)$, $r\omega\cos(\omega t + \varepsilon) = r\omega\sin(\omega t + \varepsilon + \frac{1}{2}\pi)$, který má velikost $r\omega$ a před průvodičem předbíhá o úhel $\frac{1}{2}\pi$.

10. Elipsa.

96. $a = \frac{25}{8}$; $b = \frac{25}{9}$; M leží na elipse, N uvnitř a L vně elipsy. — **97.** a) $b = 12$. b) $5x^2 + 9y^2 = 45$. c) $a = 5$; $b = 4$. Body M, N nesmí být souměrné vzhledem x nebo y nebo P. Je-li $|x_M| > |x_N|$, musí být $|y_M| < |y_N|$. — **98.** a) $a = 5$; $b = 4$; $e = 3$. b) $a = 8$; $b = 6$; $e = 2\cdot\sqrt{7}$. Úlohy mají 2 řešení. — **99.** a) Pro hodnoty $\varphi + 2k\pi$, kde k je celé číslo. b) Bod J leží na jednotkové kružnici (P, $r = 1$) určuje jednoznačně polopřímku PJ, k níž přísluší jediný směrový úhel $0 \leq \varphi < 2\pi$. c) $x_1 = a\cos\varphi$; $y_1 = a\cos\varphi$ a $x_2 = b\cos\varphi$; $y_2 = b\sin\varphi$. d) $\varphi = 0$; $\frac{1}{2}\pi$; π; $\frac{3}{2}\pi$. — **100.** Je $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ pro $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$. Je-li $P \equiv Y$, je $x = a$, $y = 0$; je-li $P \equiv X$, je $x = 0$, $y = b$; to platí tedy i pro $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

102. a) O souřadnicích bodu M' pak platí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$; o souřadnicích bodu M'' platí $\frac{x''^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. b) O souřadnicích bodu M' platí $mx + \frac{nb}{a}\,y' + p = 0$, což je rovnice přímky r', která s přímkou r má společný bod $\left[-\frac{p}{m}; 0\right]$, jestliže je $m \neq 0$; je-li $m = 0$, je $r' \parallel r \parallel x$, je-li $n = 0$, je $r' \equiv r$. Podobně body M'' leží na přímce r'' o rovnici $\frac{am}{b}x'' + ny + p = 0$, která má s přímkou r společný bod $\left[0; -\frac{p}{n}\right]$, jestliže je $n \neq 0$; je-li $n = 0$, je $r'' \parallel r \parallel y$; je-li $m = 0$, je $r'' \equiv r$. — **103.** Jistě je $X_1 \not\equiv X_2$ a proto není současně $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Máme dokázat, že nezáporný výraz $V = b^2x^2 + a^2y^2$ je menší než a^2b^2 pro každé dosazení bodu $U \equiv [x; y]$, který leží uvnitř úsečky X_1X_2; parametr t příslušný bodu U splňuje nerovnost $0 < t < 1$, takže $0 < 1 - t < 1$. Dosazení lze upravit takto: $V = |V| = Z_1 (1 - t)^2 + Z_2t^2 + 2Z_{12}t (1 - t)$, kde $Z_1 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2$, $Z_2 = b^2x_2^2 + a^2y^2$, $Z_{12} = b^2x_1x_2 + a^2y_1y_2$. Rozeznáváme dva případy: (1) body X_1, X_2 leží na elipse; (2) alespoň jeden z bodů X_1, X_2, na př. X_1 leží uvnitř elipsy. Případ (1): Zřejmě platí $b^2(x_2 - x_1)^2 + a^2 (y_2 - y_1)^2 > 0$ (je alespoň buď $x_2 - x_1 \neq 0$ nebo $y_2 - y_1 \neq 0$), dále $b^2 (x_2 + x_1)^2 + a^2 (y_2 + y_1)^2 \geqq 0$. Odtud plyne jednak $Z_1 + Z_2 - 2Z_{12} > 0$, jednak $Z_1 + Z_2 + 2Z_{12} \geqq 0$; ale $Z_1 = Z_2 = a^2b^2$ a tedy $2a^2b^2 > 2Z_{12}$, $2Z_{12} \geqq - 2a^2b^2$, t. j. $- a^2b^2 \leqq Z_{12} < a^2b^2$. Případ rovnosti nastane pro $x_2 = - x_1$, $y_2 = - y_1$; v tomto případě je $V = a^2b^2 [(1 - t)^2 + t^2 - 2t (1 - t)]$, neboť $Z_{12} = - Z_1 = a^2b^2$, t. j. $V = 0$. Není-li současně $x_2 = - x_1$, $y_2 = - y_1$, je vždy $- a^2b^2 < Z_{12} < a^2b^2$ neboli $|Z_{12}| < a^2b^2$. Potom je $|V| \leqq |Z_1 (1 - t)^2| + |Z_2t^2| + |2Z_{12}t (1 - t)| = Z_1 (1 - t)^2 + Z_2t^2 + 2t (1 - t)$. $|Z_{12}| < Z_1 (1 - t)^2 + Z_2t^2 + 2t (1 - t) a^2b^2 = a^2b^2 [(1 - t)^2 + t^2 + 2t (1 - t)] = a^2b^2$, neboť $Z_1 = Z_2 = a^2b^2$. Tedy $V < a^2b^2$. Případ (2): V tomto případě je $Z_1 < a^2b^2$, $Z_2 \leqq a^2b^2$; také $|Z_{12}| < a^2b^2$. Buďtež $X_1^* \equiv [x_1; y_1^*]$, $X_2^* \equiv [x_2; y_2^*]$ body elipsy, takže je $|y_1^*| > |y_1|$, $|y_2^*| \geqq |y_2|$ a proto platí $|Z_{12}| = |b^2x_1x_2 + a^2y_1y_2| \leqq |b^2x_1x_2| + |a^2y_1y_2| < |b^2x_1x_2| + |a^2y_1^*y_2^*| \leqq a^2b^2$. Poslední nerovnost plyne z výsledku případu (1), jestliže tam místo bodů X_1, X_2 uvažujeme body $[|x_1|; |y_1^*|]$, $[|x_2|; |y_2^*|]$ elipsy (rovnost platí, jen když $|x_1| = |x_2|$ a tím i $|y_1^*| = |y_2^*|$).

11. Hyperbola.

104. $2x^2 - 5y^2 = 30$. — **105.** Je-li $A' \equiv [x'; y']$, je $x' = cx, y' = cy$, t. j. $x = \frac{1}{c}x'$, $y = \frac{1}{c}y'$. a) Hledaná čára má rovnici $\frac{x'^2}{(ca)^2} + \frac{y'^2}{(cb)^2} = 1$, což je elipsa, která má s danou společný střed, její osy leží v osách souřadnic a její poloosy jsou ca, cb. b) Hledaná čára má rovnici $\frac{x'^2}{(ca)^2} - \frac{y'^2}{(cb)^2} = 1$; dále jako cvič. a). Směrnice jejich asymptot jsou $\pm\frac{cb}{ca} = \pm\frac{b}{a}$, takže obě čáry mají společné asymptoty. Protože c je reálné číslo, leží obě čáry v témže páru vrcholových úhlů asymptot. — **106.** a) Je $\overline{MA_1} = |y^* - y|$, $\overline{MA_2} = |-y^* - y| = |y^* + y|$, takže $\overline{MA_1} \cdot \overline{MA_2} = c^2a^2 = b^2$, kde $c = \frac{b}{a}$ (viz text na str. 63, vztah (5')). — **107.** $a = 3$; $b = 4$; $e = 5$. — **108.** a) $e = 5$; $a^2 = 20$; $b^2 = 5$. b) $a^2 = 25$; $b^2 = 9$. — **109.** $\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{6}y^2 = 1$. — **110.** $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}y^2 = 1$.

111. a) $X \equiv [\pm \frac{4}{5}\sqrt{34};\ \pm \frac{9}{2}]$ pro všechny 4 kombinace znamének. b) $X \equiv [\frac{48}{5};\ \pm \frac{3}{5}\sqrt{119}]$. — **112.** Bod M neleží ani na přímce F_1F_2 ani na ose úsečky F_1F_2. — **113.** Elipsa pro $k < b^2$; hyperbola pro $b^2 < k < a^2$; pro $k > a^2$ nelze vyhovět rovnici žádnou dvojicí reálných čísel x, y. — **114.** Buďtež e, $2b$, a, ω po řadě velikosti ramen, základny, výšky příslušné k základně, úhel ramen v rovnoramenném trojúhelníku (srovnej obr. 26), který je určen asymptotami hyperboly a kolmicí k její hlavní ose v jednom z vrcholů hyperboly; o obsahu P tohoto trojúhelníka platí $P = ab = \frac{1}{2} e^2 \sin\omega$, t. j. $e^2 = \dfrac{2ab}{\sin\omega}$. Po dosazení za $a^2 + b^2 = e^2$ do výrazu (12) na str. 65 textu dostáváme $dd' = \frac{1}{2}\, ab \sin\omega$. — **115.** Buďtež d, d' vzdálenosti bodu M od asymptot a_1, a_2 a budiž ω úhel asymptot; potom d je výška v rovnoběžníku $PXMY$, jehož strana $\overline{PX} = \dfrac{d'}{\sin\omega}$ a tudíž jeho obsah $S = \overline{PX} \cdot d = \dfrac{dd'}{\sin\omega} = \frac{1}{2}\, ab$. — **116.** Obsah S rovnoběžníka $PXMY$ ze cvič. 115 je $S = \overline{MX} \cdot \overline{MY} \cdot \sin\omega = \frac{1}{2}\, ab$; $\overline{MX} \cdot \overline{MY} = \dfrac{ab}{2\sin\omega} = \frac{1}{4} e^2$. — **117.** b) Je $\overline{PX'}^2 = \overline{PX'} \cdot \overline{PY'} = \overline{PX}\ \overline{PY}$ (obr. 27); sestrojte při daném bodu M střední geometrickou úměrnou $\overline{PX'}$ z hodnot $\overline{PX}, \overline{PY}$. — **118.** a) $xy = 10$; b) $xy = -6$; c) $xy = x_0y_0$, kde je současně $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$. — **119.** Pro $a > 0$: a), b) $x_0y_0 - a > 0$.

120. Důkaz provedeme pro pravou větev, a to pro případ $a > 0$; je-li $[x_0;\ y_0]$ bod pravé větve hyperboly nebo jejího vnitřku, pak je $x_0 > 0, y_0 > 0$ a $x_0y_0 \geq a$ (rovnost jen pro bod větve — viz cvič. 119). Je známá poučka: Budiž $m > 0$ reálné číslo, potom je $m + \dfrac{1}{m} \geq 2$, při čemž rovnost nastane jen pro $m = 1$. [Platí: $m + \dfrac{1}{m} - 2 = \dfrac{(m-1)^2}{m} \geq 0$.] Buďtež $X_1 \equiv [x_1;\ y_1] \not\equiv X_2 \equiv [x_2;\ y_2]$ dva body, z nichž žádný neleží vně pravé větve (srovnej výsledek cvič. 102), úsečka X_1X_2 má parametrické vyjádření $x = x_1\,(1-t) + x_2t$, $y = \ldots$, kde $0 < t < 1$; máme dokázat, že výraz $V = xy - a > 0$ pro každý vnitřní bod $[x; y]$ úsečky X_1X_2, t. j. pro $0 < t < 1$. Po dosazení z parametrického vyjádření do V dostaneme: $V = x_1y_1\,(1-t)^2 + x_2y_2t^2 + t\,(1-t)\,(x_1y_2 + x_2y_1) - a$. Rozeznávejme dva případy: Případ (1). Body X_1, X_2 leží na pravé větvi hyperboly, t. j. $x_1y_1 = a$, $x_2y_2 = a$; $(x_1y_2 + x_2y_1) = a\left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}\right) > 2a$ (neboť je $x_1 \neq x_2$). Proto o výrazu V, jehož první tři členy jsou kladná čísla, platí
$V > a\,[(1-t)^2 + t^2 + 2t(1-t) - 1] = 0$, t. j. $V > 0$ a vnitřní bod $[x;\ y]$ úsečky X_1X_2 leží uvnitř pravé větve hyperboly. Případ (2). Alespoň jeden z bodů X_1, X_2, na př. X_1, leží uvnitř pravé větve hyperboly; buďtež $X_1{}^* \equiv [x_1;\ y_1{}^*]$, $X_2{}^* \equiv [x_2;\ y_2{}^*]$ body pravé větve hyperboly, pak je $y_1 > y_1{}^* > 0$, $y_2 \geq y_2{}^* > 0$. O výrazu V platí: $V > x_1y_1{}^*\,(1-t)^2 + x_2y_2{}^*t^2 + t\,(1-t)\,(x_1y_2{}^* + x_2y_1{}^*) - a = V^*$, neboť první tři kladné členy výrazu V jsme nahradili kladnými čísly menšími (nebo nejvýše rovnými) než byly původní. Ale pro body $X_1{}^*$, $X_2{}^*$ platí úvaha z případu (1), t. j. $V^* > 0$ a tím i $V > 0$. — **121.** Je $d^2 = x^2 + \dfrac{a^2}{x^2} > 0$ pro $x \neq 0$; v dalším je $a > 0$.
a) Z rovnice $x^2 + \dfrac{a^2}{x^2} = u^2$ postupně dostaneme: $\left(x - \dfrac{a}{x}\right)^2 = u^2 - 2a$; $x - \dfrac{a}{x} =$

$= \pm \sqrt{u^2 - 2a}$ (pro $u \geq a\sqrt{2}$) neboli $x^2 \mp x\sqrt{u^2 - 2a} - a = 0$, kteréžto rovnice mají řešení pro $u^2 \geq -2a$; vzhledem k předchozí podmínce má úloha řešení pro $u \geq a\sqrt{2}$; má-li původní rovnice kořen x_1, má i kořen $-x_1$, budou takové body čtyři pro $u > a\sqrt{2}$ a dva (právě vrcholy) pro $u = a\sqrt{2}$. b) Je-li hodnota d nejmenší, je také hodnota $d^2 = \left(x - \frac{a}{x}\right)^2 + 2a$ nejmenší; ale ta je součtem dvou nezáporných čísel, při čemž první může být rovno nule. Odtud $x = \pm a\sqrt{2}$ (vrcholy).

12. Elipsa nebo hyperbola a přímka.

122. a) Elipsa: $a = \frac{1}{2}\sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$ (hlavní poloosa v ose y); b) hyperbola: $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$; $b = \sqrt{\frac{5}{6}}$ (hlavní poloosa v ose y); c) rovnici nelze vyhovět reálnými čísly x, y; d) elipsa: $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (hlavní poloosa v ose x); $b = \frac{2}{3}$; e) kružnice o poloměru $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; f) elipsa: $a = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ (hlavní poloosa v ose x); $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$; g) rovnoosá hyperbola: $a = b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (hlavní poloosa b v ose y). — **123.** (Viz (5') na str. 63). Předpokládáme, že znaménka čísel A, B jsou opačná; sdružená hyperbola má rovnici $-Ax^2 - By^2 = 1$. Pro určitost předpokládejme, že $A > 0 > B$, pak $a = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{-B}}$ jsou poloosy první hyperboly a $y = \pm$ $\pm \sqrt{-\frac{A}{B}}\,x$ rovnice jejích asymptot. Buďtež x, y, y^* kladná čísla (toto omezení není na újmu obecnosti), $[x; y]$ bod druhé hyperboly a $[x; y^*]$ bod asymptoty o rovnici $y =$ $= +\sqrt{-\frac{A}{B}}\,x$. Pak $y^2 - y^{*2} = -\frac{1}{B} > 0$ a $y - y^* = -\frac{1}{B(y + y^*)} < -\frac{1}{By^*} =$ $= \frac{1}{\sqrt{-AB} \cdot x}$, což je číslo kladné a velmi malé, jestliže je x velmi veliké. — **124.** Rovnoběžky s asymptotou o směrnici $\frac{b}{a}$ mají po jediném průsečíku, a to: $[a; 0]$; $[-a; 0]$. Rovnoběžky s druhou asymptotou mají s hyperbolou rovněž po jediném průsečíku, a to $[\frac{5}{3}a; \frac{4}{3}b]$. — **125.** Řešením obou rovnic máme rovnici $x^2(A + Bk^2) + 2Bkqx - (1 - Bq^2) = 0$, kterou označme (R). Mohou nastat 3 případy: (1) $A < 0$, $B < 0$ (vyloučíme); (2) $A > 0$, $B > 0$ (elipsa), takže $A + Bk^2 > 0$ a přímka je sečnou, tečnou, nesečnou podle toho, je-li v kvadratické rovnici (R) diskriminant $D = A(1 - Bq^2) + Bk^2 \gtreqless 0$. (3) Je-li $A > 0, B < 0$ nebo $A < 0$, $B > 0$ (hyperboly), rovnice (R) : (I) neexistuje pro $A +$ $+ Bk^2 = 0$ (t. j. $k \neq 0$) a zároveň pro $Bkq = 0$ (t. j. $q = 0$), což je případ asymptot; (II) se stane lineární pro $A + Bk^2 = 0$ (t. j. $k \neq 0$), ale $Bkq \neq 0$ (t. j. $q \neq 0$) a daná přímka, rovnoběžná s jednou asymptotou, má s hyperbolou jediný průsečík; (III) je kvadratická pro $A + Bk^2 \neq 0$ (přímka není rovnoběžná s žádnou z asymptot; potom je přímka sečnou, tečnou, nesečnou, podle toho, je-li $D \gtreqless 0$. Z diskriminantu $D > 0$ pro $A > 0$, $B < 0$ plyne, že $-\frac{A}{B} \cdot (1 - Bq^2) > k^2$, kde vlevo jsou oba činitelé kladní, při čemž druhý je větší než 1; tato nerovnost je jistě splněna, je-li $-\frac{A}{B} > k^2$, t. j. leží-li rovnoběžka, vedená k dané přímce středem hyperboly, v těch vrcholových úhlech asymptot, v nichž leží daná hyperbola, takže každá taková přímka seče hyperbolu ve dvou různých bodech. Je-li $D = 0$, je $k^2 = -\frac{A}{B} + Aq^2$, kde napravo jsou dvě kladná čísla; to v případě $A > 0$, $B < 0$ může nastat jen tehdy, když je $k^2 > -\frac{A}{B}$ (rovnost snadno z úvahy vyloučíme), to znamená, že tečna je rovnoběžná s přímkou, která prochází středem hyperboly a leží v těch vrcholových úhlech asymptot, v nichž daná hyperbola neleží. — **126.** a) $-3x + 8y = 25$; b) $xb\cos\varphi + ya\sin\varphi = ab$; c) $-32x - 27y = 175$; d) $x \cdot \frac{b}{\cos\varphi} - y \cdot a\operatorname{tg}\varphi = ab$. — **127.** a) $x = 6$; $-5x + 8y = 18$; b) $x = 3$; $-5x - 4y = 9$; c) $-x + 5y = 54$; $-x + y = 18$. [Srovnáním rovnice (2) textu a rovnice $Ax_1x + By_1y = 1$ dostáváme $u = Ax_1$, $v = By_1$; podmínku řešitelnosti naší soustavy vyjadřují vztahy (7) a (9) textu, dosadíme-li sem za u, v naše hodnoty, dostaneme $Ax_1^2 + By_1^2 - 1 \geqq 0$, což pro elipsu i hyperbolu značí, že bod Q leží vně křivky.] — **128.** Vrcholy elipsy nebo hyperboly a hyperboly s ní sdružené jsou: Vrcholy elipsy $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{A}};\ 0\right]$, $\left[0;\ \pm\frac{1}{\sqrt{B}}\right]$ a příslušné tečny mají rovnice $x = \pm\frac{1}{\sqrt{A}}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{B}}$. Vrcholy hyperboly, je-li $A > 0$, $B < 0$ jsou $\left[\pm\frac{1}{\sqrt{A}};\ 0\right]$, kdežto sdružená hyperbola má vrcholy $\left[0;\ \pm\frac{1}{\sqrt{-B}}\right]$; příslušný obdélník má úhlopříčky v asymptotách o rovnicích $y = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}}\,x$. — **129.** Tečna v bodě H má rovnici $b^2xx_0 - a^2yy_0 = a^2b^2$; bod M na této tečně leží a tudíž jeho souřadnice vyhovují této rovnici, takže platí $c(bx_0 - ay_0) = ab$. Je-li $c = 0$, nemá tato rovnice pro x_0, y_0 žádné řešení, neboť $ab \neq 0$ (bod M je středem hyperboly); je-li $c \neq 0$, lze soustavu uvedenou v poznámce ke cvičení nahradit ekvivalentní soustavou $bx_0 - ay_0 = \frac{ab}{c}$; $bx_0 + ay_0 = abc$, která má řešení $x_0 = \frac{1}{2}a\left(c + \frac{1}{c}\right)$, $y_0 = \frac{1}{2}b\left(c - \frac{1}{c}\right)$. Bod $[x_0; y_0]$ je dotykový bod hledané tečny jdoucí bodem M.

130. a) Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Je $H_1 \equiv [x_0; 0]$, $H_2 \equiv [0; y_0]$, $X \equiv \left[\frac{1}{Ax_0};\ 0\right]$, $Y \equiv \left[0;\ \frac{1}{By_0}\right]$. (1) V případě elipsy je $A > 0$, $B > 0$, $x_0 < \sqrt{\frac{1}{A}} = a$, $y_0 < \sqrt{\frac{1}{B}} = b$ a poměry souřadnic x bodů X, H_1 a souřadnic y bodů Y, H_2 jsou $\frac{1}{Ax_0} : x_0 = \frac{1}{Ax_0^2}$, $\frac{1}{By_0^2}$, zřejmě čísla větší než jedna. (2) V případě hyperboly $A > 0$, $B < 0$ je $x_0 > \sqrt{\frac{1}{A}}$, t. j. $Ax_0^2 > 1$ a poměr $\frac{1}{Ax_0^2}$ souřadnic x bodů X, H_1 je menší než jedna; na ose y leží bod P uvnitř úsečky H_2Y, neboť $y_0 > 0$, kdežto souřadnice $\frac{1}{By_0}$ bodu Y je záporná, neboť $B < 0$, $y_0 > 0$. b) $\overline{PH_1} = x_0$, $\overline{PX} = \frac{1}{Ax_0}$, t. j. $\overline{PH_1} \cdot \overline{PX} = \frac{1}{A} = a^2$; $\overline{PH_2} = y_0$, $\overline{PY} = \frac{1}{\varepsilon By_0}$, kde $\varepsilon = 1$ pro $B > 0$ a $\varepsilon = -1$ pro $B < 0$ a tedy $\overline{PH_2} \cdot \overline{PY} = \frac{1}{\varepsilon B} = b^2$ (pro elipsu je $b^2 = \frac{1}{B}$, pro hyperbolu je $b^2 = -\frac{1}{B}$). — **131.** Rovnice normály v bodě H je $By_0(x - x_0) - Ax_0(y - y_0) = 0$ a $N \equiv [x' = = \frac{x_0(B-A)}{B}; 0]$. a) $x' - x_0 = -\frac{Ax_0}{B}$, takže u elipsy je $x' - x_0 < 0$ (je $x_0 > 0$) a bod N je uvnitř úsečky PH_1, kdežto u hyperboly je $x' - x_0 > 0$ (je $A > 0$, $x_0 > 0$, $B < 0$) a bod N leží na prodloužení úsečky PH_1 za bod H_1 (dále viz výsledek cvič. 130). b) Pro $x_0 > 0, y_0 > 0$ je $\overline{PN} = x' > 0$, $\overline{PX} = \frac{1}{Ax_0}$ a tedy $\varrho = \overline{PN} \cdot \overline{PX} = \frac{B-A}{AB}$. Je $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{\varepsilon}{b^2}$, kde $\varepsilon = 1$ pro $B > 0$, $\varepsilon = -1$ pro $B < 0$ a tedy $\varrho = \frac{\varepsilon a^2 - b^2}{\varepsilon} = e^2$. — **132.** a) Vylučte hodnotu $Av^2 + Bu^2$ z hodnot x_0, y_0 uvedených v poznámce k tomuto cvičení; dostanete $Avx_0 - Buy_0 = 0$, což je při proměnných x_0, y_0 rovnice průměru s. b) Srovnáním hodnot konstant u', v' a Av, $-Bu$ v rovnicích $u'x + v'y = 0$, $Avx - - Buy = 0$ téže přímky s dostáváme: $u' = \varrho Av$, $v' = \varrho \cdot (-Bu)$, kde $\varrho \neq 0$ je určitá konstanta a proto je $u' \cdot \varrho(-Bu) = \varrho Av \cdot v'$ neboli $Buu' + Avv' = 0$. — **133.** a) Nechť je $\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} \neq 0$ (jinak by přímka r byla asymptotou hyperboly — viz (10) na str. 71). Budiž $cux + cvy = 1$ rovnice hledané tečny (je $c \neq 0$) o dotykovém bodu $S' \equiv [x_0; y_0]$, kde $x_0 = \frac{cu}{A}$, $y_0 = \frac{cv}{B}$ (viz vztahy (11) na str. 71); dosazením hodnot x_0, y_0 do rovnice tečny dostaneme $c^2\left(\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B}\right) = 1$, což je podmínka (9) ze str. 70 pro to, aby rovnice $cux + cvy = 1$ byla tečnou křivky. Z této podmínky dostaneme dva kořeny $c \neq -c$, a to tehdy, je-li $\frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} > 0$. Tak je tomu v případě elipsy ($A > 0$, $B > 0$). V případě hyperboly s hlavní osou v ose x (pro $A > 0$, $B < 0$) z této podmínky plyne, že $\frac{u^2}{v^2} > -\frac{A}{B} = \frac{b^2}{a^2}$ (nehledíc k případu $v = 0$, t. j. $r \perp x$, který úloze také vyhovuje) neboli $\left|\frac{u}{v}\right| > \frac{b}{a}$, takže průměr r leží ve vrcholových úhlech asymptot, v nichž neleží daná křivka (k stejnému závěru dojdeme i v případě $A < 0$, $B > 0$). Pokud c je reálné, máme vedle tečny $r' \parallel r$ v bodě S' druhou tečnu $r'' \parallel r$ v bodě $S'' \equiv [-x_0; -y_0]$ a příslušnou k druhé hodnotě $-c$. b) Průměr s (ze cvič. 132) o rovnici $Avx - Buy = 0$ obsahuje oba dotykové body S', S'' tečen r', r'', jak se přesvědčíte dosazením hodnot x_0, y_0 a $-x_0$, $-y_0$ do této rovnice. c) K průměru s o rovnici $u'x + v'y = 0$, kde $u' = Av$, $v' = -Bu$, přísluší dotykový bod $R' \equiv [x_0'; y_0']$ tečny $s' \parallel s$, kde $x'_0 = \frac{c'u'}{A}$,

$y'_0 = \dfrac{c'v'}{B}$ (viz cvič. a)), kde je $c'^2\left(\dfrac{u'^2}{A} + \dfrac{v'^2}{B}\right) = 1$; tato rovnice má v případě elipsy vždy dva kořeny $c' \neq -c'$ a vedle bodu R' máme druhý bod $R'' \equiv [-x_0'; -y'_0]$, v němž se dotýká tečna $s'' \parallel s$. Body R', R'' leží na průměru r o rovnici $ux + vy = 0$, jak plyne z tohoto výpočtu: $ux_0 + vy_0 = c'\left(\dfrac{uu'}{A} + \dfrac{vv'}{B}\right) = c'\left(\dfrac{u \cdot Av}{A} + \dfrac{v \cdot (-Bu)}{B}\right) = c' \cdot 0 = 0$ atd. Body S', S'' a body R', R'' jsou souměrné vzhledem ke středu $P \equiv [0; 0]$ elipsy, tečny $r' \parallel r''$ a $s' \parallel s''$ v těchto bodech tvoří tedy rovnoběžník a průměry $r \parallel r'$ a $s \parallel s'$, které procházejí bodem P jsou v něm středními příčkami. d) Buďtež $Ax^2 + By^2 = 1$, $-Ax^2 - By^2 = 1$ (kde je $A > 0$, $B < 0$) rovnice obou sdružených hyperbol l, l' a $ux + vy = 0$, $u'x + v'y = 0$ rovnice sdružených průměrů r, s hyperboly l, takže platí $Buu' + Avv' = 0$ (viz cvič. 132b); protože pro sdružené průměry hyperboly l' platí táž podmínka, mají obě hyperboly tytéž dvojice sdružených průměrů. Při tom je $u' = \varrho Av$, $v' = -\varrho Bu$, kde $\varrho \neq 0$. Snadno zjistíte, že průměr r protne l ve dvou různých bodech S', S'' (souměrných podle středu P křivek), když totiž platí $V = \dfrac{u^2}{A} + \dfrac{v^2}{B} > 0$; když je $V = 0$, je r asymptota; když je $V < 0$, nemá průměr s hyperbolou společných bodů (pak je $\left|\dfrac{u}{v}\right| > \sqrt{-\dfrac{A}{B}}$ nebo $u = 0$ a průměr leží v těch vrcholových úhlech asymptot, v nichž neleží hyperbola l). Nechť je pro průměr r výraz $V > 0$: potom je $V' = \dfrac{u'^2}{A} + \dfrac{v'^2}{B} = \dfrac{\varrho^2}{AB} \cdot V < 0$ (neboť $AB < 0$) a průměr s hyperbolu l neprotíná. Naproti tomu pro hyperbolu l' obdobné výrazy $\overline{V}$, $\overline{V'}$ jsou $\overline{V} = \dfrac{u^2}{-A} + \dfrac{v^2}{-B} = -V < 0$, $\overline{V'} = -V' > 0$, t. j. průměr r hyperbolu l' neprotíná, kdežto průměr s ji protíná. — **134.** V podmínce $Buv + Avv'$ pro sdružené průměry r, s elipsy (viz cvič. 132b) zaveďte místo u, v, u', v' směrnice k, k' a místo A, B hodnoty a, b a dostanete výraz $k \cdot k'$. a) Je $k = \dfrac{b}{a}\,\mathrm{tg}\varphi$, $k' = -\dfrac{b}{a}\cot g\varphi$ (pro $\varphi \neq n \cdot \frac{1}{2}\pi$ a $0 < \varphi < 2\pi$); s průměrem $r \equiv x$ je sdružen průměr $s \equiv y$. b) Je $a_1 = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$, $b_1 = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$; odtud (1). Budiž Q obsah $\triangle PR'S'$; je $Q = \frac{1}{2}a_1 b_1 \sin\omega = \frac{1}{2}a_1 b_1 \cdot \dfrac{1}{a_1 b_1}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$, kde $R' \equiv [x_1; y_1]$, $S' \equiv [x_2; y_2]$. Ale $x_1 y_2 - x_2 y_1 = a\cos\varphi \cdot b\cos\varphi + a\sin\varphi \cdot b\sin\varphi = ab$ a $Q = \frac{1}{2}ab$. c) Z výrazů pro a_1, b_1 ze cvič. b) dostanete: $a_1^2 = b_1^2$, t. j. $(a^2 - b^2)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0$. Je-li $a = b$, platí poslední rovnice pro každé φ (kružnice). Nechť je $a \neq b$, potom je buď $(\cos\varphi - \sin\varphi) = 0$ nebo $(\cos\varphi + \sin\varphi) = 0$, t. j. $\mathrm{tg}\varphi = \pm 1$ a $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ nebo $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, a příslušné směrnice průměrů jsou $k = \dfrac{b}{a}$, $k' = -\dfrac{b}{a}$; řešení je jediné, neboť oba průměry jsou zřejmě spolu sdruženy (a jsou určeny úhlopříčkami obdélníka vytvořeného tečnami ve vrcholech dané elipsy). d) Přímky PR', PS' mají směrnice $\dfrac{b}{a}\mathrm{tg}\varphi$, $-\dfrac{b}{a}\cot g\varphi$ (viz cvič. a)), tečny r', s' v bodech

S', R' mají rovnice $-xb\cdot\sin\varphi + ya\cdot\cos\varphi = ab$, $xb\cdot\cos\varphi + ya\cdot\sin\varphi = ab$; tedy $r' \parallel PR'$, $s' \parallel PS'$. — **135.** c) Kružnice. d) Asymptota a_1 o směrnici $k_0 = 1$ leží ve dvojici vrcholových úhlů obou průměrů r, s, které mají směrnice k, $k' = \frac{1}{k}$. Budiž ω_0 úhel přímek r, a_1 a úhel ω_0 přímek a_1, s; pak je $\operatorname{tg}\omega_0 = \frac{1-k}{1+k} = \operatorname{tg}\omega_0'$. — **136.** b) Tečna v bodě S' má rovnici $x\frac{b}{\cos\varphi} - ya\operatorname{tg}\varphi = ab$ neboli $xb - ya\sin\varphi = ab\cos\varphi$ (vesměs pro $\varphi \neq \frac{1}{2}\pi$, $\varphi \neq \frac{3}{2}\pi$). Je: $\lim\limits_{\varphi\to\frac{1}{2}\pi}\sin\varphi = 1$, $\lim\limits_{\varphi\to\frac{1}{2}\pi}\cos\varphi = 0$ a rovnice zní $bx - ay = 0$, ač parametrické vyjádření hyperboly pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ nedává žádné hodnoty. c) Dosaďte uvedené hodnoty do rovnice $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. d) Buďtež $ux + vy = 0$, $u'x + v'y = 0$ rovnice obou průměrů PS', PR', pak je $u = b\operatorname{tg}\varphi$, $v = -\frac{a}{\cos\varphi}$, $u' = \frac{b}{\cos\varphi}$, $v' = -a\operatorname{tg}\varphi$; v podmínce $Buu' + Avv' = 0$ je $A = \frac{\varepsilon}{a^2}$, $B = -\frac{\varepsilon}{b^2}$ (kde $\varepsilon = \pm 1$), t. j. $a^2uu' - b^2vv' = 0$ a naše hodnoty u, u', v, v' této podmínce vyhovují, takže PS', PR' jsou sdružené průměry vzhledem k oběma hyperbolám h, h'. — K polopřímkám, které leží v asymptotách nelze přiřadit žádný bod hyperboly. e) Je $a_1 = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\varphi} + b^2\operatorname{tg}^2\varphi}$, $b_1 = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{b^2}{\cos^2\varphi}}$ pro $\varphi \neq \frac{1}{2}\pi$, $\varphi \neq \frac{3}{2}\pi$ a $0 \leq \varphi < 2\pi$; odtud plyne (1). Budiž Q obsah $\triangle PR'S'$; je $Q = \frac{1}{2}a_1b_1\sin\omega = \frac{1}{2}a_1b_1\cdot\frac{1}{a_1b_1}(x_1y_2 - x_2y_1)$, kde $S' \equiv [x_1; y_1]$, $R' \equiv [x_2; y_2]$. Ale $x_1y_2 - x_2y_1 = ab\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi\right) = ab$. — **137.** a) Tečna $r' \equiv \frac{b}{\cos\varphi}x - a\operatorname{tg}\varphi\cdot y = ab$; asymptoty $y = \frac{b\varepsilon}{a}x$, kde $\varepsilon = 1$ pro asymptotu a_1, kdežto $\varepsilon = -1$ pro a_2. Průsečíky $A_k \equiv \left[\frac{a\cos\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}; \frac{b\varepsilon\cos\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right]$ pro $k=1$ (kde $\varepsilon=1$) a pro $k=2$ (kde $\varepsilon = -1$); střed úsečky A_1A_2 je skutečně S' (jistě $1 - \varepsilon\sin\varphi \neq 0$). b) Rovnice průměru $r \equiv PR' \equiv \frac{b}{\cos\varphi}x - a\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot y = 0$ má tytéž koeficienty při proměnných x, y jako rovnice tečny r' (viz cvič. a)). Dále je $\overline{A'S_1}^2 = a^2\left(\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi}\right)^2 + b^2\left(\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} - \operatorname{tg}\varphi\right)^2 = a^2\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{b^2}{\cos^2\varphi} = b_1^2$ (viz cvič. 137a, 136e). — e) Stačí dokázat, že na př. tečna $r' \equiv \frac{b}{\cos\varphi}x - a\operatorname{tg}\varphi\cdot y = ab$ a tečna $s' \equiv -b\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot x + \frac{a}{\cos\varphi}\cdot y = ab$ určují rovnici $m_1\left(\frac{b}{\cos\varphi}x - a\operatorname{tg}\varphi\cdot y - ab\right) + m_2\left(-b\cdot\operatorname{tg}\varphi + \frac{a}{\cos\varphi}\cdot y - ab\right) = 0$, která je při vhodné volbě konstant m_1, m_2 (není současně $m_1 = m_2 = 0$) rovnicí asymptoty $a_1 \equiv bx - ay = 0$. Zvolíme-li $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, dostáváme $\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\right)bx - \left(\frac{1}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\right)ay = 0$, t. j. $bx - ay = 0$, neboť je $\frac{1}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\varphi =$

$= \dfrac{1 + \sin\varphi}{\cos\varphi} \neq 0$. — **138.** Důkaz lze na př. provést takto: Budiž $S \equiv [x_0; y_0]$ střed tětivy R_1R_2, jejíž směrový úhel je φ; označme $m = \cos\varphi$, $n = \sin\varphi$. Parametrické vyjádření přímky $r_0 \equiv R_1SR_2$ určené bodem S a hodnotami m, n je $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$ (viz cvič. 72e, str. 116 v učebnici matematiky pro III. tř.), kde pro parametr t bodu M přímky r_0 platí $|t| = \overline{SM}$ (vzdálenost). Hyperbola má rovnici $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ a pro parametry jejích průsečíků s přímkou r_0 platí (I) $\equiv (b^2m^2 - a^2n^2)\, t^2 + 2t\, (b^2x_0\, m - a^2y_0n) + (b^2x_0^2 - - a^2y_0^2 - a^2b^2) = 0$; jistě je $b^2m^2 - a^2n^2 \neq 0$, neboť přímka r_0 není rovnoběžná s žádnou z asymptot. Pro kořeny t_1, t_2 této rovnice musí platit $t_1 + t_2 = 0$, neboť musí vzdálenosti $|t_1| = \overline{SR_1}$, $|t_2| = \overline{SR_2}$ být navzájem rovné, ale parametry mají opačná znaménka; proto je v kvadratické rovnici (1) koeficient $b^2x_0m - a^2y_0n = 0 \equiv$ (II). Pro průsečíky X_1, X_2 přímky r_0 s asymptotami $a_1 \equiv bx - ay = 0$, $a_2 \equiv bx + ay = 0$ dostaneme parametry $t_1' = \dfrac{bx_0 - ay_0}{bm - an}$, $t_2' = \dfrac{bx_0 + ay_0}{bm + an}$ (jmenovatelé jistě nejsou rovny nule); snadno dokážeme, že $t'_1 + t'_2 = 0$, t. j. $|t'_1| = |t'_2|$. Je $t'_1 + t'_2 = = \dfrac{2\,(b^2x_0m + a^2y_0n)}{b^2m^2 - a^2n^2} = 0$ podle (II). — **139.** Ze cvič. 137b plyne $\overline{A_1A_2} = 2 \cdot \overline{S'A_1} = 2b_1$; vzdálenost v bodu $P \equiv [0; 0]$ od tečny r' (viz rovnici ve výsledku cvič. 137a) je $v = = ab : \sqrt{\dfrac{b^2}{\cos^2\varphi} + a^2 \operatorname{tg}^2\varphi} = \dfrac{ab}{b_1}$ (viz výsl. cvič. 136e). Obsah $\triangle PA_1A_2$ je $\Delta = = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_1A_2} \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 2b_1 \cdot \dfrac{ab}{b_1} = ab$.

IV. REJSTŘÍK.

OBSAH

MATEMATIKA

pro čtvrtou třídu gymnasií

Autoři: prof. Dr Eduard Čech, Dr Karel Hruša, Dr Alfons Hyška, Dr O. Fraenkl, Dr Jaroslav Janko, Dr Josef Novák, Dr Antonín Robek, Rudolf Zelinka

Odpovědný redaktor: prof. Dr František Vyčichlo

Technický redaktor: Ing. Antonín Langer

Obálka: Marie Tůmová

Korektor: Antonín Mašek

●

Plánovací skupina 301 20-521 - Schváleno výnosem ministerstva školství, věd a umění ze dne 26. října 1950, č. 65 498/50-I/1, v prvním vydání jako učebnice pro gymnasia - Povoleno MIO č. j. 43 023/51-18-III/1 ze dne 20. února 1951 - Čkm. G 355-IV - Sazba: 31. I. 1951 - Tisk: 4. V. 1951 - Vydalo r. 1951 Státní nakladatelství učebnic, první vydání - Náklad 20 000 výt. (1.—20 000. výt.) - Plánovacích archů 8,50 - Autorských archů 15,51 - Vydavatelských archů 15,66 - Papír 221-10 - Formát A 5 - Písmo Plantin - Druh tisku: ofset - Všeobecná daň 1% - Vytiskla Státní tiskárna, n. p., závod 03, Praha II

CENA SEŠ. VÝTISKU Kčs 18,—

B 78

Čkm. G 355-IV

Cena Kčs 18,—

301 20-521