František Balada; Eduard Čech; a kol.
Matematika pro III. třídu gymnasií

Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 176 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501386

MATEMATIKA

PRO III. TŘÍDU GYMNASIÍ

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC · PRAHA

MATEMATIKA

PRO TŘETÍ TŘÍDU GYMNASIÍ

1951

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC

PRAHA

Úvodní poznámky.

Látka aritmetiky třetí třídy je rozdělena na čtyři samostatné oddíly: posloupnosti, limity, kombinatorika a počet pravděpodobnosti. Pojetím i zpracováním jsou téměř všecky stati odlišné od dřívějších učebnic a mají tedy na methodické podání větší nároky.

Tak posloupnosti jsou definovány rekurentně, podstatný důraz je kladen na porozumění pojmu posloupnost a vyvození n-tého členu a částečných součtů posloupnosti, při čemž bylo upuštěno od umělých úloh, které byly jenom formalistické. Také v užití se upouští od umělých příkladů. Finanční matematika je v souhlase s dnešním pojetím velmi omezena a důraz je kladen na úlohy jednající o vzrůstu nebo o poklesu nějaké veličiny v daném poměru. Methoda matematické indukce je probrána samostatně a podrobně.

V oddílu „Limity“ se doplňují věty o nerovnostech, jsou probrány ohraničené a nulové posloupnosti, konvergentní posloupnosti a jejich limity a úvahy o reálných číslech jako limitách. Tato část je svým zpracováním nová a dává pevné základy pro studium vyšší matematiky i nové možnosti výchovy k logickému myšlení.

Vzorce v kombinatorice jsou dokazovány přímo úsudkem, takže se vzorec objeví přímo ve své definitivní formě. Upouští se zde od formalistických úloh a zmechanisování celé partie, jak tomu bývalo dříve, a klade se důraz na usuzování.

Počet pravděpodobnosti začíná kritickým rozborem pojmu pravděpodobnosti, je založen na skutečných pokusech, zpracování je ukázkou jednoty theorie s praxí.

V celé aritmetické části je kladen důraz na úvahy.

Látka analytické geometrie, kterou se začíná geometrie III. třídy, je proti předchozím učebnicím restringována. Zpracování učiva je v souhlase s moderním pojetím vědeckým na podkladě vektorovém, i když se výslovně o vektorech nemluví. Zvláště si všímáme těch vztahů, které jsou nezávislé na poloze os souřadnic a na volbě počátku souřadnic. Při vyvození je užito také komplexních čísel a geometrických příbuzností. Geometrické úvahy se nevážou na pevný systém souřadnic, ale naopak soustava se volí vhodně k příslušnému útvaru. Při tom se nemluví o transformaci souřadnic proto, aby byl žák spíše připoutáván k studiu geometrických vlastností zkoumaného útvaru.

Výklady jsou zvláště zevrubné při směrových úhlech přímek v rovině nebo při výpočtu velikosti úhlů. Je nutné, aby si žáci uvědomili, že jde o úhel dvou polopřímek, aby se úhly neměřily bez zdůraznění, o který z úhlů, jež svírají dvě přímky, jde. Tvary rovnic přímek byly omezeny v podstatě na dva, což přispěje rovněž k soustředění žáků na jádro úlohy. Při studiu některých kvadratických funkcí je připravována půda pro odvození pojmu derivace. U kvadratické funkce je uváděn také rozbor kvadratické funkce.

Trigonometrie je proti dřívějším učebnicím značně zestručněna; řešení trojúhelníka se omezuje na řešení úloh odpovídajících větám o určenosti trojúhelníka.

Vyučování analytické geometrii má být vedeno tak, aby si žáci osvojili její methodu. Ve všech částech učiva má výklad směřovat k tomu, aby žáci pochopili principy a pevně si je osvojili: má být kladen důraz na pojmové porozumění látce, při čemž nezanedbáváme ani numerické počítání, kterému však nevěnujeme již tolik času jako dříve.

Toto pojetí aritmetiky i geometrie přispěje k tomu, aby žáci rozuměli přírodnímu, hospodářskému a společenskému dění také po stránce kvantitativních vztahů a aby poznávali význam matematiky pro rozvoj věd a pro technický pokrok ve službách socialismu.

ARITMETIKA

Rozvrh učiva.

Září:	Úvod do posloupností Aritmetické posloupnosti
Říjen:	Geometrické posloupnosti Užití geometrických posloupností
Listopad:	Matematická indukce Nerovnosti
Prosinec:	Absolutní hodnoty Ohraničené a nulové posloupnosti
Leden:	Konvergentní posloupnosti
Únor:	Reálná čísla jako limity Variace a permutace
Březen:	Kombinace Binomická věta
Duben:	Úvod do počtu pravděpodobnosti Výpočet pravděpodobností
Květen:	Pravděpodobnost úhrnná a složená
Červen:	Opakování.

I. Posloupnosti.

1. Úvod.

Jestliže každému přirozenému číslu n přiřadíme podle jakkoli zvoleného pravidla číslo a_n (nemusí to býti přirozené číslo), říkáme, že

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots. \tag{1}$$

je **posloupnost čísel**; číslo a_n je n-tý **člen** posloupnosti (1); přirozené n je **index** členu a_n; místo (1) píšeme někdy stručně $\{a_n\}$.

Příklady:

[1] $1, 2, 3, 4, \ldots$; obecně $\{n\}$.

[2] $0, 0, 0, 0, \ldots$; obecně $\{0\}$.

[3] $1, 4, 9, 16, \ldots$; obecně $\{n^2\}$.

[4] $-1, 2, -3, 4, \ldots$; obecně $\{(-1)^n \cdot n\}$.

[5] $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; obecně $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$.

[6] $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$; obecně $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ nebo $\{2^{-n}\}$.

[7] $0, 1, 0, 1, \ldots$; obecně $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$.

Posloupnosti [1], [3] mají tu vlastnost, že pro $r < s$ je $a_r < a_s$; to jsou **rostoucí posloupnosti.** Posloupnosti [5], [6] mají tu vlastnost, že pro $r < s$ je $a_r > a_s$; to jsou **klesající posloupnosti.** Posloupnosti [2], [4], [7] nejsou ani rostoucí, ani klesající.

V předcházejících příkladech bylo možné udat jednoduchý vzorec pro „obecný člen" posloupnosti, t. j. udat početní výraz, který slouží k výpočtu členu a_n na základě indexu n. Důležité jsou však také jiné mnohem nepravidelněji budované posloupnosti, u kterých takový vzorec neumíme udat. V tomto směru je zejména pozoruhodná rostoucí posloupnost $\{p_n\}$, jejímiž členy jsou všecka prvočísla:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, \ldots\ldots$$

Posloupnost $\{p_n\}$ je nesmírně složitá a její studium patří mezi nejkrásnější a přitom nejobtížnější oddíly matematiky. Na základě zkoumání tabulek prvočísel byly o posloupnosti $\{p_n\}$ vysloveny rozmanité domněnky, z nichž mnohé byly později s neobyčejným důmyslem dokázány, jiné však přes usilovnou práci nejlepších matematiků dosud nejsou dokázány. Dosud je nedokázaná na př. Goldbachova domněnka vyslovená r. 1742, že každé sudé číslo větší než 3 se dá napsat jako součet dvou prvočísel; na základě tabulek bylo zjištěno, že je tomu tak pro všechna čísla až po 10 milionů, ale obecný důkaz dosud nebyl proveden. Velký pokrok v tomto směru učinil sovětský matematik I. M. Vinogradov, který r. 1937 dokázal, že každé dosti velké liché číslo se dá napsat jako součet tří prvočísel a že každé sudé číslo je součet nejvýš čtyř prvočísel; tento důkaz se považuje za jeden z nejskvělejších výkonů moderní matematiky.

Velmi častý a důležitý je případ, že je přímo dán první člen nebo několik prvních členů posloupnosti a že pro následující členy je dán obecný předpis, jak se má počítati člen a_{n+1} na základě znalosti předcházejících členů

$$a_1, a_2, \ldots, a_n .$$

V takovém případě říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je definována **rekurentně** (latinsky recurrere = běžeti zpět). Příklad rekurentně definované posloupnosti dostaneme, zvolíme-li prvé dva členy a_1, a_2 zcela libovolně a každý následující člen určíme podle předpisu

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} .$$

Volíme-li na př. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, je začátek naší posloupnosti

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

a snadno lze tedy počítat libovolné množství dalších členů.

Poznámka. Často je účelné začít indexem 0 místo indexem 1, psáti tedy posloupnost ve tvaru

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{2}$$

místo ve tvaru (1). Ve tvaru (2) n-tý člen je a_{n-1}, kdežto a_n je $(n + 1)$-ní člen.

Cvičení.

1. Napište prvních deset členů posloupnosti: a) $\{1\}$; b) $\{1 - n\}$; c) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; d) $\{n(n + 1)\}$; e) $\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n\}$; f) $\{1 + i^n\}$.
2. Napište prvních deset členů posloupnosti dané rekurentně: a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$; b) $a_1 = a$, $a_{n+1} = a \cdot a_n$; c) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = k \cdot a_n$; d) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = i \cdot a_n$; e) $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$; f) $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$; g) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$; h) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$.
3. Vyjádřete obecný člen posloupnosti: a) $a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a \ldots$; b) $a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 \ldots$; c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$; d) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$; e) $+1$,

$-1, +1, -1, +1, -1, \ldots$; f) $1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$; g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$; h) $-54, 18, -6, 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

4. Napište obecný člen posloupnosti dané rekurentně: a) $a_1 = 1, a_{n+1} = -a_n$; b) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 1$; c) $a_1 = -1, a_{n+1} = a_n$; d) $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$; e) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n \cdot q$; f) $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 - a_n$.

5. Vyjádřete člen a_{n+1} pomocí členu a_n v posloupnosti: a) $\{1\}$; b) $\{1 - n\}$; c) $\{(-1)^n\}$; d) $\{nd\}$; e) $\{aq^{n-1}\}$; f) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$; g) $\{1 + (-1)^n\}$.

6. Vyjádřete člen a_{n+2} pomocí členu a_n v posloupnosti: a) $\{1 + (-1)^n\}$; b) $\{1 - 2n\}$; c) $\{a^n\}$; d) $\{1 + i^n\}$.

7. Pro která x je posloupnost a) $\{nx\}$, b) $\{x^n\}$ rostoucí a pro která x je klesající?

8. Posloupnost, jež je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = (n + 1) a_n + (-1)^{n+1}$, vyhovuje také rekurentnímu vzorci $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$. Dokažte.

9. Vyjádřete člen a_{n+1} pomocí členů a_n a a_{n-1} v posloupnosti

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\right\}.$$ Která je to posloupnost?

10. Obecný člen posloupnosti dané rekurentními podmínkami $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ má tvar $a_n = k(x^n - y^n)$. Určete čísla k, x, y.

11. Posloupnost daná rekurentně podmínkami $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ má tyto vlastnosti: a) $a_{n+3} = -a_n$; b) $a_{n+6} = a_n$. Dokažte.

12. Obecný člen posloupnosti $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ má tvar $a_n = k(x^n - y^n)$. Určete k, x, y.

2. Aritmetické posloupnosti.

Budiž dáno libovolné číslo d. Potom můžeme rekurentně definovati posloupnost $\{a_n\}$ tak, že prvý člen zvolíme libovolně a všecky následující členy určíme předpisem

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{1}$$

Takto vzniklá posloupnost se nazývá **aritmetická posloupnost.** Číslo d se jmenuje její **diference** (latinský výraz pro rozdíl), protože je rovné rozdílu $a_{n+1} - a_n$ kterýchkoli dvou sousedních členů posloupnosti. Zřejmě aritmetická posloupnost je při kladné diferenci rostoucí posloupnost; při záporné diferenci je to klesající posloupnost; je-li $d = 0$, jsou všecky členy posloupnosti sobě rovny.

Jsou-li r, s dva indexy a je-li na př. $r < s$, je podle rekurentního předpisu (1)

$$a_s = a_r + (d + d + \dots + d),$$

kde počet sčítanců v závorce je roven rozdílu $s - r$ obou indexů. Tedy

$$a_s = a_r + (s - r)d. \tag{2}$$

Vztah (2) byl odvozen za předpokladu $r < s$, ale snadno z něho vypočteme, že za téhož předpokladu musí býti též $a_r = a_s - (s - r)d$ neboli

$$a_r = a_s + (r - s)d,$$

což neznamená nic jiného, nežli že vztah (2) musí zůstat správný i pro $r > s$; zřejmé je, že (2) platí též pro $r = s$. Tedy (2) platí pro kterékoli dva indexy r, s.

Zvláštním případem vzorce (2) je vzorec

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \tag{3}$$

pro výpočet obecného členu a_n na základě prvního členu a_1 a diference d. Jako příklad vezměme lichá přirozená čísla; ta tvoří zřejmě aritmetickou posloupnost s prvním členem 1 a s diferencí 2, takže n-té liché číslo podle (3) je rovné $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$ neboli

$$a_n = 2n - 1. \tag{4}$$

Jestliže podle poznámky na konci článku 1 počátečnímu členu dáme index 0, máme místo (3) jednodušší vzorec

$$a_n = a_0 + nd. \tag{5}$$

Na základě vzorce (2) můžeme jednoznačně určit aritmetickou posloupnost, jsou-li dány kterékoli dva její členy (s různými indexy), a vypočísti kterýkoli jiný člen posloupnosti. Má-li býti na př. $a_{10} = 15$, $a_{20} = -15$, dosadíme $r = 10$, $s = 20$ do (2) a dostaneme

$$-15 = 15 + 10d,$$

z čehož najdeme diferenci $d = -3$. Chceme-li vypočítat první člen a_1, dosadíme $r = 10$, $s = 1$ do (2) a dostaneme $a_1 = 15 - 9d = 15 + 27$, tedy $a_1 = 42$. Chceme-li vypočítat na př. a_{50}, je zbytečné počítati předem a_1; dosadíme $r = 20$ (nebo $r = 10$), $s = 50$ do (2) a dostaneme $a_{50} = a_{20} + 30d$ neboli $a_{50} = -15 - 90$, $a_{50} = -105$.

Je-li

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \tag{6}$$

libovolná posloupnost, můžeme pomocí jí definovati rekurentně novou posloupnost $\{s_n\}$ takto. První člen je $s_1 = a_1$; každý následující člen je určen rekurentním předpisem

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, \tag{7}$$

takže zřejmě

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \tag{8}$$

Čísla s_n se jmenují **částečné součty posloupnosti** (6).

Naučíme se, jak lze počítati částečné součty aritmetické posloupnosti. Počneme příkladem. O slavném matematiku K. F. Gaussovi se vypravuje tato anekdota. Když byl na národní škole, dostali žáci za domácí cvičení vypočísti součet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 \tag{9}$$

se sto sčítanci. Žák Gauss okamžitě prohlásil: „Vyjde 5050.“ Že se to opravdu ve škole stalo, není nikterak zaručeno, ale není na tom nic nemožného. Neboť součet (9) je roven součtu

$$100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1$$

a tedy dvojnásobek součtu (9) je roven součtu

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (99 + 2) + (100 + 1)$$

se 100 sčítanci vesměs rovnými 101. Tedy číslo (9) je rovné polovině součinu 101 . 100, t. j. 5050.

Počítáme-li touž methodou obecně součet (8), dostaneme nejprve

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1). \tag{10}$$

Dva sousední sčítanci napravo v (10) mají tvar

$$a_r + a_s,\ a_{r+1} + a_{s-1}.$$

Podle definice aritmetické posloupnosti je však

$$a_{r+1} = a_r + d,\ a_{s-1} = a_s - d,$$

a proto

$$a_r + a_s = a_{r+1} + a_{s-1},$$

t. j. v součtu napravo v (10) všichni sčítanci si jsou rovni. Protože počet sčítanců je roven n, máme $2s_n = n(a_1 + a_n)$ neboli

$$s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n), \tag{11}$$

což je žádaný vzorec pro částečné součty aritmetické posloupnosti.

Vzorec (11) můžeme ještě trochu zobecniti, uvážíme-li, že je-li (6) aritmetická posloupnost, je při libovolném r také

$$a_r,\ a_{r+1},\ a_{r+2},\ a_{r+3},\ \ldots$$

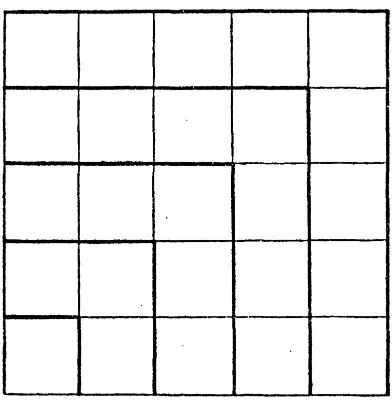
aritmetická posloupnost s prvním členem a_r; je-li $s > r$, je a_s $(s - r + 1)$-ní člen této posloupnosti, takže

$$a_r + a_{r+1} + \ldots + a_s = \frac{1}{2}(s - r + 1)(a_r + a_s)$$

neboli slovy: Součet libovolného počtu za sebou následujících členů aritmetické posloupnosti je roven polovině součinu jejich počtu se součtem prvního a posledního z nich. Na př. v hořejším příkladě (viz str. 10) aritmetické posloupnosti se dvěma danými členy $a_{10} = 15$, $a_{20} = -15$ je

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{20} = 0.$$

Zajímavý je případ posloupnosti lichých čísel (4). Podle (4) a (11) je



Obr. 1.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

t. j. součet prvých n lichých čísel je roven n^2. Viz pro $n = 5$ obr. 1, který jasně ukazuje, že $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$.

Jestliže do vzorce (11) dosadíme za a_n ze vzorce (3), dostaneme po snadné úpravě vzorec

$$s_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n - 1)d. \qquad (12)$$

Není však třeba si pamatovat vzorec (12).

Cvičení.

13. Napište prvních deset členů aritmetické posloupnosti, je-li a) $a_1 = 3$, $d = 2$; b) $a_1 = 2$, $d = -\frac{1}{2}$; c) $a_1 = -3$, $d = 0{,}4$; d) $a_1 = 0$, $d = -1$.

14. Napište prvních deset členů aritmetické posloupnosti, je-li a) $a_2 = 5$, $d = 3$; b) $a_3 = 1$, $d = -7$; c) $a_{10} = 5$, $d = 0{,}8$; d) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$; e) $a_4 = 9$, $a_5 = 6$.

15. Je-li v aritmetické posloupnosti dáno a_r a d, vypočtěte a_s v případech: a) $a_{10} = 12$, $d = 7$, $s = 5$; b) $a_6 = 8$, $d = -3$, $s = 12$; c) $a_5 = 4$, $d = -\frac{1}{2}$, $s = 1$; d) $a_{100} = 7$, $d = -0{,}01$, $s = 1000$.

16. Napište obecný člen aritmetické posloupnosti, je-li a) $a_1 = 4$, $d = 3$; b) $a_1 = -2$, $d = -2$, c) $a_5 = 7$, $d = 12$; d) $a_{10} = 10$, $d = -3$; e) $a_{100} = 1$, $d = 0{,}1$.

17. Je-li v aritmetické posloupnosti dáno a_r a a_s, vypočtěte d a udejte obecný člen v případech: a) $a_5 = 7$, $a_9 = 9$; b) $a_6 = -2$, $a_{15} = -5$; c) $a_{10} = 1$, $a_{100} = 2$; d) $a_1 = 5$, $a_{20} = 2$; e) $a_r = x$, $a_s = y$, $r \neq s$.

18. Určete součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti, je-li a) $a_1 = 3$, $a_{10} = 30$; b) $a_1 = 10$, $d = -2$; c) $a_4 = 5$, $d = -\frac{1}{2}$; d) $a_3 = -4$, $a_7 = 2{,}4$.

19. Kolik aspoň členů přirozené řady číselné třeba sečísti, aby součet přesáhl a) 100, b) 1000; c) 1 000 000?

20. Součet prvých n členů aritmetické posloupnosti je dán výrazem $4n^2 - 3n$. Určete prvých pět členů této posloupnosti a výraz pro obecný člen.

21. Aritmetická posloupnost je určena těmito podmínkami: a) $a_1 = 3$, $d = -1$; b) $a_7 = 8$, $d = \frac{1}{3}$; c) $a_4 = 3$, $a_{10} = 12$. Určete výraz pro a_n a pro s_n.

22. Kdy je posloupnost částečných součtů aritmetické posloupnosti a) rostoucí, b) klesající?

23. V aritmetické posloupnosti r-tý člen má hodnotu x, diference je d. Kolikátý člen je y? Kdy má úloha řešení?

24. V aritmetické posloupnosti je $a_1 = a$, $a_r = x$, $s_r = s$. Určete r. Kdy má úloha řešení?

25. V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 3$, $d = 2$. Kolik členů dává součet $s_r = 120$?

26. V aritmetické posloupnosti je dán r-tý člen x a součet prvých r členů s. Určete prvý člen a diferenci. Má úloha vždy řešení?

27. V aritmetické posloupnosti je součet prvých r členů roven x a součet prvých s členů roven y. Určete prvý člen, diferenci, r-tý a s-tý člen.

28. Je-li součet prvých r členů aritmetické posloupnosti roven nule, je $a_r = -a_1$. Dokažte.

29. n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, dělí rovinu v A_n částí. Dokažte, že pro číslo A_n platí rekurentní vzorec $A_{n+1} = A_n + n + 1$, a udejte vzorec pro obecný člen této posloupnosti.

3. Geometrické posloupnosti.

Budiž dáno libovolné číslo q. Potom můžeme rekurentně definovati posloupnost $\{a_n\}$ tak, že prvý člen zvolíme libovolně a všecky následující členy určíme předpisem

$$a_{n+1} = a_n q. \tag{1}$$

Takto vzniklá posloupnost se nazývá **geometrická posloupnost.** Číslo q se jmenuje její **kvocient** (latinský název pro podíl), protože v případě $a_n \neq 0$ je rovné podílu $a_{n+1} : a_n$ dvou sousedních členů posloupnosti.

Je-li $a_1 = 0$, jsou zřejmě všecky členy a_n rovny nule a kvocient q je naprosto neurčitý. Je-li $q = 0$, jsou všecky členy až na první rovny nule. Je-li však $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$, není žádný člen rovný nule, neboť podle (1) by člen a_{n+1} mohl být rovný nule pouze v tom případě, že by už předchozí člen a_n byl roven nule. Tedy v případě $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ je $a_{n+1} : a_n = q$ pro všecky indexy n. Vytkněme si ještě případ $q = 1$; v tomto případě všecky členy posloupnosti jsou si rovny.

Z (1) plyne — a to i v tom případě, že bereme v úvahu čísla komplexní — že

$$|a_{n+1}| = |a_n| \cdot |q|. \tag{2}$$

Tedy: Je-li $\{a_n\}$ geometrická posloupnost s kvocientem q, je $\{|a_n|\}$ geometrická posloupnost s kvocientem $|q|$.

Jestliže první člen a_1 i kvocient q jsou čísla kladná, plyne z (1), že všecky členy jsou čísla kladná. Jestliže mimo to je $q > 1$, plyne z (1), že $a_{n+1} > a_n$, takže v tomto případě $\{a_n\}$ je rostoucí posloupnost. Jestliže čísla a_1, q jsou kladná, ale $q < 1$, plyne z (1), že $a_{n+1} < a_n$, takže v tomto případě $\{a_n\}$ je klesající posloupnost. Je-li q záporné (a je-li $a_1 \neq 0$ reálné), mají členy posloupnosti $\{a_n\}$ střídavá znamení, a proto posloupnost není ani rostoucí, ani klesající.

V případě $a_1 > 0$, $q > 0$ jsou všecky členy geometrické posloupnosti kladná čísla, která můžeme logaritmovat. Podle (1) je

$$\log a_{n+1} = \log a_n + \log q,$$

takže logaritmováním vznikne aritmetická posloupnost s diferencí $d = \log q$.

Vraťme se k libovolné geometrické posloupnosti! Jsou-li r, s dva indexy a je-li na př. $r < s$, je podle rekurentního předpisu (1)

$$a_s = a_r \cdot (q \cdot q \cdot \ldots \cdot q),$$

kde počet činitelů v závorce je roven $s - r$. Tedy

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}. \tag{3}$$

Vztah (3) byl odvozen za předpokladu $r < s$, ale je zřejmé, že platí i pro $r = s$. Je-li $q \neq 0$, je

$$q^{s-r} \cdot q^{r-s} = q^0 = 1,$$

takže ze (3) plyne

$$a_s \cdot q^{r-s} = a_r,$$

což znamená, že vzorec (3) platí i pro $r > s$. Tedy (je-li $q \neq 0$) vzorec (3) platí pro kterékoli dva indexy r, s.

Zvláštním případem vzorce (3) je vzorec

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{4}$$

pro výpočet obecného členu geometrické posloupnosti na základě prvního členu a_1 a kvocientu q. Jestliže jako v poznámce na konci článku 1 počáteční člen označíme a_0, máme pohodlnější vzorec

$$a_n = a_0 q^n. \tag{5}$$

Je-li první člen geometrické posloupnosti roven jedné, je součet prvých n členů roven

$$s_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1}.$$

Z toho však plyne, že

$$s_n q = q + q^2 + \ldots + q^n$$

a odečtením vyjde

$$s_n(q - 1) = q^n - 1,$$

neboť všecky ostatní členy se zruší. Tedy pro $q \neq 1$:

$$1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{6}$$

což můžeme také psáti ve tvaru

$$1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{6'}$$

Je-li q záporné anebo kladné a menší než 1, máme ve tvaru (6′) kladného jmenovatele; je-li $q > 1$, máme kladného jmenovatele ve tvaru (6). Je-li $q = 1$, nemají vzorce (6), (6′) smyslu; levá strana je potom rovna n.

Pro geometrickou posloupnost s libovolným prvním členem a_1 máme ovšem

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Stačí si však pamatovati vzorce (6) a (6').

Cvičení.

30. Napište prvých deset členů geometrické posloupnosti, je-li a) $a_1 = 3$, $q = 2$; b) $a_1 = 1$, $q = -1$; c) $a_1 = -437{,}4$, $q = \frac{1}{3}$; d) $a_1 = -1$, $q = \sqrt{2}$; e) $a_1 = 3$, $q = 1 + i$.

31. Napište prvých deset členů geometrické posloupnosti, je-li a) $a_2 = \frac{1}{8}$, $q = 2$; b) $a_3 = 25$, $q = -0{,}2$; c) $a_{10} = -1$, $q = \frac{1}{2}$; d) $a_1 = 512$, $a_2 = 768$; e) $a_5 = 30$, $a_6 = -3$; f) $a_4 = 1 + i$, $a_5 = 1 - i$.

32. Je-li v geometrické posloupnosti dáno a_r a q, vypočtěte a_s v případech: a) $a_{10} = 243$, $q = \frac{3}{2}$, $s = 5$; b) $a_6 = 7$, $q = i$, $s = 12$; c) $a_6 = 2500$, $q = -2{,}5$, $s = 1$; d) $a_5 = 5$, $q = \frac{1}{2}(1 + i)\sqrt{2}$, $s = 13$.

33. Napište obecný člen geometrické posloupnosti, je-li a) $a_1 = 3$, $q = 5$; b) $a_1 = -2$, $q = -2$; c) $a_5 = 96$, $q = -\frac{3}{2}$; d) $a_{100} = 1$, $q = -i$.

34. Je-li v geometrické posloupnosti dáno a_r a a_s, vypočtěte q a udejte obecný člen v případech: a) $a_5 = 2$, $a_7 = 4$; b) $a_4 = 1$, $a_6 = -1$; c) $a_1 = 1$, $a_5 = 16$.

35. Určete součet prvých deseti členů geometrické posloupnosti, je-li a) $a_1 = 1$, $q = 2$; b) $a_1 = 19\,683$, $q = -\frac{1}{3}$; c) $a_5 = 9$, $q = \sqrt{3}$; d) $a_4 = 5$, $a_6 = 5$.

36. Určete (s užitím logaritmů) částečné součty s_5, s_{10}, s_{20}, s_{50} geometrické posloupnosti, v níž $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

37. Strany rovnostranného trojúhelníka o straně a jsou rozděleny na tři stejné díly. Nad středním dílem každé strany je sestrojen vně obrazce nový rovnostranný trojúhelník. Všecky strany vzniklého obrazce jsou opět rozděleny na tři stejné díly a nad středním dílem každé strany je opět sestrojen vně obrazce nový rovnostranný trojúhelník. Postup se opakuje celkem n-krát. Určete a) počet stran, b) obvod, c) obsah vzniklého obrazce.

38. Geometrická posloupnost je dána těmito podmínkami: a) $a_1 = 2$, $q = \frac{3}{2}$; b) $a_4 = 10$, $q = -1$; c) $a_3 = 10$, $a_4 = 9$; určete obecný výraz pro s_r.

39. Kdy je posloupnost částečných součtů geometrické posloupnosti a) rostoucí, b) klesající?

40. V geometrické posloupnosti je r-tý člen x, kvocient je q. Kolikátý člen je y? Kdy má úloha řešení?

41. V geometrické posloupnosti je kvocient 2, r-tý člen $5\frac{1}{3}$, součet prvých r členů $10\frac{1}{2}$; určete r.

42. V geometrické posloupnosti s kvocientem $q = -\frac{1}{3}$ je součet prvých osmi členů roven 14 760. Určete ty členy.

43. V geometrické posloupnosti je prvý člen $\frac{4}{27}$, r-tý člen $\frac{81}{32}$, součet prvých r členů $\frac{6305}{864}$; určete r.

44. Určete hodnoty součtů:

a) $c_r = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos ra$,

b) $s_r = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \ldots + \sin ra$.

[Návod: počítejte $c_r + \mathrm{i}s_r$ a uvědomte si, že $\cos ka + \mathrm{i}\sin ka = (\cos a + \mathrm{i}\sin a)^k$.]

45. Určete hodnotu součtů:

a) $\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos(2n-1)a$;

b) $\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \ldots + \sin(2n-1)a$.

4. Užití geometrických posloupností.

S geometrickými posloupnostmi se setkáváme v úlohách, v kterých jde o vzrůst (nebo pokles) nějaké veličiny v stálém poměru. Předpoklad, že změna veličiny se děje v stálém poměru a že proto postupné hodnoty zkoumané veličiny tvoří geometrickou posloupnost, nebývá ve skutečnosti splněn přesně, ale je často splněn přibližně a výpočty na tomto podkladě provedené mohou vésti k cenným závěrům, i když jsou tyto závěry pouze zhruba správné.

Prakticky bývá vzrůst nejčastěji udán v procentech, při čemž vzrůst o p procent znamená ovšem vzrůst v poměru

$$q = 1 + \frac{p}{100}. \tag{1}$$

V následujícím textu vzrůstem o p procent se míní vzrůst za jeden rok, ačkoli u některých úloh půjde o jiná období než roční. Jestliže počáteční hodnota veličiny je a_0, je zvětšená hodnota po n letech dána vzorcem

$$a_n = a_0 \cdot q^n. \tag{2}$$

Jsou-li ze čtyř hodnot

$$a_0,\ a_n,\ p \text{ (nebo } q),\ n$$

dány kterékoli tři, můžeme vypočísti čtvrtou na základě vzorce (2). Výpočet a_n je přímo dán vzorcem (2); pro výpočet a_0 máme

$$a_0 = a_n \cdot q^{-n}. \tag{3}$$

Pro nejčastěji se vyskytující hodnoty procentové míry p jsou čísla q^n, q^{-n} udána v tabulkách. Pro jiné hodnoty p počítáme logaritmicky; ze (2) a (3) plyne

$$\log a_n = \log a_0 + n \cdot \log q, \tag{4}$$

$$\log a_0 = \log a_n - n \cdot \log q. \tag{5}$$

Pracujeme-li se čtyrmístnými logaritmy a je-li $n < 100$, je třeba k čtyrmístnému výpočtu součinu znáti $\log q$ na 6 míst. Sedmimístné hodnoty $\log q$ jsou pro řadu hodnot p udány v následující tabulce.

	0,	1,	2,	3,	4,
0	0,0000000	0,0043214	0,0086002	0,0128372	0,0170333
1	04341	47512	90257	32587	74507
2	08677	51805	94509	36797	78677
3	13009	56094	98756	41003	82843
4	17337	60380	0,0103000	45205	8700$\bar{5}$
5	21661	64660	07239	49403	91163
6	25980	68937	11474	53598	95317
7	3029$\bar{5}$	73210	15704	57788	99467
8	34605	77478	19931	61974	0,0203613
9	38912	81742	24154	66155	0775$\bar{5}$

Tabulka udává hodnoty $\log q = \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ zaokrouhlené na 7 desetinných míst pro $p = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; ... až po $4{,}9$. Celá část procent je udána v záhlaví sloupců, desetiny procenta jsou udány v záhlaví řádků. Následující hodnota p by byla $p = 5$; příslušná hodnota $\log q \doteq 0{,}0211893$.

Ve finančních tabulkách je zvykem místo $\frac{p}{100}$ psáti i (angl. interest = úrok), místo q psáti r (angl. rate = poměr).

Logaritmování je nezbytné, jestliže neznámá je n nebo p. Neznámá n je dána výrazem

$$n = \frac{\log a_n - \log a_0}{\log q}; \tag{6}$$

neznámá p se určí takto:

$$\log q = \frac{\log a_n - \log a_0}{n}; \quad p = 100(q - 1). \tag{7}$$

Můžeme ovšem p určit také tak, že k vypočtené hodnotě $\log q$ najdeme jí nejbližší tabulkovou hodnotu $\log q$ a z tabulky vyčteme přímo p.

Není třeba si pamatovat vzorce (3) až (7); pamatujeme si pouze vzorec (2), jehož úpravu provedeme ve vyšetřovaném numerickém příkladě.

Příklad. Hodnota výroby dílny za rok činí 870 000 Kčs. Za každý rok zvýší se hodnota výroby o 1,3%. a) Jakou hodnotu bude mít výroba za 10 let? b) Za kolik let vzroste hodnota výroby o 25%?

Ve vzorci (2) je $a_0 = 870\,000$, $q = 1{,}013$. Na 6 des. míst je $\log q \doteq 0{,}005609$. V úloze a) je $n = 10$, tedy

$$a_n = a_0 \cdot q^{10}, \ \log a_n = \log a_0 + 10 \log q,$$

tedy $\log a_n \doteq 5{,}9956$; $a_n \doteq 990000$. Tedy za 10 let bude hodnota výroby skoro 1 000 000 Kčs. V úloze b) je $a_n : a_0 = 1{,}25$, tedy

$$q^n = 1{,}25; \quad n = \frac{\log 1{,}25}{\log q} \doteq 17{,}3.$$

Hodnota výroby vzroste za 17 let skoro o 25%.

Nejčastěji se vyskytující úlohy tohoto druhu jsou úlohy peněžní. Je-li nějaká jistina a_0 uložena na p%, vynese za každý rok úrok, který, není-li vyzvednut, se připočítá k jistině, a za druhý rok už máme vedle úroku z původní jistiny také ještě úrok z úroku. Po n letech konečná jistina a_n má hodnotu (2), kde číslo q^n je dáno vzorcem (1). Celkový úrok je ovšem roven $a_n - a_0$.

Vzhledem k tomuto užití geometrické posloupnosti na výpočet úroku se čísla q^n nazývají **úročitelé** a jejich převrácené hodnoty se jmenují **odúročitelé.**

Příklad. Uložím-li počátkem každého roku 1000 Kčs, kolik budu míti při 2%ním úrokování po 20 letech? Jest $q = 1{,}02$, $a = 1000$. Vklad a vzroste po n letech na $a \cdot q^n$; takových vkladů máme celkem 20; první je uložen 20 let, druhý 19, ..., poslední jeden rok. Po 20 letech budu míti

$$aq^{20} + aq^{19} + \ldots + aq = aq(1 + q + \ldots + q^{19}),$$

tedy podle vzorce (6) článku 3:

$$aq \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = 1020 \cdot \frac{q^{20} - 1}{0{,}02} = 51000 \cdot (q^{20} - 1).$$

Z tabulky úročitelů vyčteme $q^{20} \doteq 1{,}4859$. Tedy po 20 letech budu míti 24 781 Kčs.

Poznámka. Jestliže číslo b vznikne z čísla a zmenšením o p procent, vznikne číslo a z čísla b zvětšením. O kolik procent?

Označíme-li x hledaný počet procent, jest

$$b = a\left(1 - \frac{p}{100}\right), \quad a = b\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

Jestliže z první podmínky dosadíme b do druhé, dostaneme po krácení číslem a:

$$1 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{100 - p}{100}\left(1 + \frac{x}{100}\right),$$

$$1 + \frac{x}{100} = \frac{100}{100 - p} = 1 + \frac{p}{100 - p},$$

tedy

$$x = \frac{100p}{100 - p}.$$

Protože $100 - p$ je menší než 100, je

$$\frac{100p}{100 - p} > \frac{100p}{100},$$

t. j. číslo x je vždycky o něco větší než p. Je-li však p malé, je rozdíl mezi p a x nepatrný.

Cvičení.

46. a) Zvýšíme-li výrobu každoročně o 10 %, o kolik procent ji zvýšíme během pětiletky? b) O kolik procent třeba zvýšiti výrobu každoročně, aby se během pětiletky zdvojnásobila?

47. Přiroste-li dřevo v lese každým rokem o 2 %, za jak dlouho se zdvojnásobí?

48. Počet obyvatelstva jistého města vzrostl za 10 roků o 10 %. Kolikaprocentnímu ročnímu přírůstku to odpovídá?

49. Jakou dnešní cenu má pohledávka 10 000 Kčs splatná a) za rok, b) za tři roky při 2 % celoročním složeném úrokování?

50. JZD si vypůjčilo 100 000 Kčs a zavázalo se, že je zaplatí dvěma stejnými splátkami, z nichž prvá je splatná za 2 roky a druhá za 4 roky ode dne vypůjčení. Jak velké budou ty splátky při 2 % složeném úrokování?

51. Světelný paprsek ztrácí při průchodu skleněnou deskou určité tloušťky 5 % své intensity. a) O kolik procent se zeslabí intensita světla při průchodu pěti takovými deskami? b) Kolika deskami se zeslabí přibližně na polovinu?

52. Tlaku vzduchu ubývá se stoupající výškou (při stálé teplotě) asi o 1,2 % na 100 m. a) Je-li normální tlak vzduchu na hladině mořské 760 mm Hg, jak velký je normální tlak vzduchu na vrcholu Sněžky? b) Udejte vzorec, podle něhož lze z tlaku naměřeného ve dvou různých výškách určiti výškovou odlehlost obou pozorovacích míst. c) O kolik procent klesne tlak vzduchu, vystoupíme-li o 1000 m výše?

53. Rozdílem výšek dvou tónů rozumíme poměr jejich kmitočtů. Předpokládáme-li, že každé dva sousední půltóny mají stejný rozdíl výšek a je-li kmitočet tónu a_1 435 kmitů za vteř., nalezněte kmitočty všech celých tónů od tónu c_1 do tónu c_2 (t. zv. temperované ladění).

54. Tlumený pohyb kyvadla se děje tak, že každé dvě po sobě následující krajní výchylky od rovnovážné polohy (zvané rozkyv) jsou ve stálém poměru. a) O kolik procent se zmenší vždy každý následující rozkyv, jestliže se po 100 kyvech rozkyv zmenší na 0,01 původního rozkyvu? b) Po kolika kyvech klesne rozkyv na polovinu původního rozkyvu?

55. Je-li nějaký obnos uložen ve spořitelně pouze po část roku, počítá se úrok jen za tu část roku, po kterou byl obnos uložen (a to zaokrouhlenou sestupně na poloviny měsíců). Uložím-li kapitál K na p % uprostřed roku, počítá se úrok do konce roku za zbývajících m měsíců takto: Nejprve vypočteme, jaký kapitál x třeba uložiti počátkem roku, aby za $12 - m$ měsíců od počátku roku vzrostl (jednoduchým úrokováním) na hodnotu K. Potom vypočteme hodnotu y, na kterou vzroste kapitál x za jeden rok. Rozdíl $y - K$ je hledaný úrok. Proveďte výpočet a stanovte vzorec, podle něhož se vypočte úrok z vkladu vloženého uprostřed roku do konce roku za zbývajících m měsíců.*)

56. Kolik musím ukládati počátkem každého roku po 10 let, chci-li mít koncem 10. roku nastřádáno 10 000 Kčs při 2 % složeném úrokování?

57. Hodnota zlepšovacího návrhu, jehož bude továrna používat po dobu 10 let, propočtená k počátku této doby je 1 000 000 Kčs. O kolik Kčs ročně (počítáno vždy ke konci každého roku) se zlevní provoz továrny? (Počítá se 3 % úrok.)

58. Jakým obnosem, vloženým počátkem prvního roku, se zajistí fond ročních 1000 Kčs splatných vždy na konci každého roku po dobu 10 let? (Úrokování 2 %.)

59. Mám-li ve spořitelně na počátku prvního roku 10 000 Kčs, kolik mohu odtud ročně po 10 let koncem každého roku vybírati, než tento vklad vyčerpám? (Úrokování 2 %.)

---

*) Kdyby nebylo tohoto opatření, mohl bych zvýšit úrok nad zákonem stanovenou míru. Kdybych totiž uložil na počátku roku třeba 10 000 Kčs na 2 % a vklad vyzvedl koncem pololetí, dostal bych i s úrokem 10 100 Kčs. Kdybych vyzvednuté peníze ihned zase vložil jako nový vklad, dostal bych do konce roku 101 Kčs úroků. Úroky by tedy činily celkem 100 + 101 = 201 Kčs, t. j. o 1 Kčs více než stanovená 2 %.

60. Zápůjčka má býti zaplacena stejnými splátkami placenými vždy koncem roku během 20 let. První splátka se platí rok po vypůjčení. Kolik procent z vypůjčené částky třeba platiti ročně, počítá-li se 3% úroku?

61. Množství dřeva v lese se odhaduje na 50 000 m^3. Roční přírůstek činí 2,5 %. Kolik m^3 dřeva zbude v lese po 10 letech, bude-li se káceti 4000 m^3 ročně? — [Návod: Počítejte, jako by veškeré dřevo bylo káceno každým rokem najednou, a to vždy přesně za celý počet let po provedeném odhadu.]

62. Výrobní družstvo si vypůjčilo 1 000 000 Kčs na rozšíření svého provozního zařízení a splácí je každoročně obnosem 50 000 Kčs (první splátka za rok po vypůjčení). Za kolik let bude dluh zaplacen? Jak velká bude poslední splátka? (2,5% úroku).

63. Výměnkář pobíral starobního pojištění po 10 let měsíčně 950 Kčs počátkem každého měsíce. Kolik Kčs ročně by musel ukládat počátkem každého roku po dobu 20 let, aby si nastřádal takový obnos, který by mu zaručil hodnotu tohoto pojištění? (2% úrok.) — [Návod: Měsíční důchod převeďte nejprve (jednoduchým úrokováním) na roční důchod splatný počátkem roku.]

64. Manželé si koupili nábytek za 80 000 Kčs a splácejí tento obnos ročními splátkami 10 000 Kčs, z nichž první je splatná v den koupě a každá následující o rok později. Cena nábytku se však každým rokem opotřebováním snižuje o 10% té ceny, kterou měl nábytek vždy na počátku roku. Kdyby se koncem pátého roku rozhodli nábytek prodat a strženými penězi zaplatit zbytek dluhu, kolik by jim přebylo nebo kolik by se jim nedostávalo? (Počítejte 3% úroku.)

65. Objem válce vývěvy je roven 0,1 objemu recipientu, objem škodlivého prostoru činí 0,01 objemu válce. Je-li tlak vzduchu pod recipientem před n-tým tahem pístu p_{n-1} a po n-tém tahu p_n, platí rekurentní vzorec

$$(R + V + P)p_n = Rp_{n-1} + Pp_0,$$

kde R je objem recipientu, V objem válce, P objem škodlivého prostoru a p_0 tlak atmosférického vzduchu. a) Vyjádřete p_n pomocí p_0. b) Stanovte, jaký tlak je pod recipientem po 10, 50 tazích pístu, je-li $p_0 = 740$ mm Hg. c) Určete maximální zředění, jehož se může vývěvou dosáhnouti při $p_0 = 740$ mm Hg.

5. Matematická indukce.

S naukou o posloupnostech úzce souvisí velmi důležitá methoda matematických důkazů, t. zv. **matematická indukce.** Touto methodou dokazujeme, že pro každé přirozené číslo n platí nějaká věta V_n. Jako příklad takové věty V_n vezměme známý vzorec

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \tag{1}$$

pro n-tý člen aritmetické posloupnosti s prvním členem a_1 a s diferencí d. Můžeme jej dokazovati tak, že podle rekurentního pravidla $a_{n+1} = a_n + d$ soudíme postupně

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 + 0 \text{ neboli } a_1 = a_1 + 0 \cdot d,\\
a_2 &= a_1 + d \text{ neboli } a_2 = a_1 + 1 \cdot d,\\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d \text{ neboli } a_3 = a_1 + 2d,\\
a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d \text{ neboli } a_4 = a_1 + 3d,\\
a_5 &= a_4 + d = (a_1 + 3d) + d \text{ neboli } a_5 = a_1 + 4d,\\
a_6 &= a_5 + d = (a_1 + 4d) + d \text{ neboli } a_6 = a_1 + 5d \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Jestliže z takto provedeného výpočtu pro několik prvních hodnot n soudíme na správnost dokazované věty pro všecka n, mluvíme o **neúplné indukci.** Na konci tohoto článku si ukážeme na příkladech, že neúplná indukce může mnohdy vésti k ukvapenému nesprávnému závěru. Proto neúplná indukce není důkazem správnosti, ale má velkou cenu **heuristickou** (t. j. objevitelskou; řecky heuriskein = nalézti, objeviti). Naproti tomu matematická indukce, někdy zvaná též úplná indukce, je správný a důležitý způsob matematického důkazu. Důkaz obecné platnosti věty V_n pro všecka přirozená čísla n metodou matematické indukce probíhá ve dvou krocích:

[1] dokáže se, že věta V_n je správná pro $n = 1$;

[2] provede se obecný důkaz, že jestliže pro nějaké přirozené číslo n věta V_n je správná, je pro totéž n správná také věta V_{n+1}.

Matematická indukce je správná methoda důkazu. Dejme tedy tomu, že jsme u nějaké věty V_n provedli oba kroky [1], [2] matematické indukce. Kdyby přes to nebyla věta V_n správná pro všecka n, tu probíhajíce vzestupně přirozená čísla 1, 2, 3, 4, . . ., musili bychom dospěti k **nejmenšímu** přirozenému číslu k, pro které věta V_k je nesprávná. To však není možné, neboť krok [1] zaručuje, že nemůže býti $k = 1$, ježto věta V_1 je správná. Musí proto přirozené číslo k býti větší než 1, a proto existuje takové přirozené číslo n, že $k = n + 1$. Protože $n < k$, věta V_n je správná, naproti tomu věta V_{n+1} neboli věta V_k správná není. To není možné, byl-li správně proveden krok [2] důkazu.

V příkladě vzorce (1) důkaz matematickou indukcí zní takto:

Prvý krok. Dosadíme-li $n = 1$ do vzorce (1), dostaneme $a_1 = a_1 + 0 \cdot d$, což je zajisté správné.

Druhý krok. Pro libovolné přirozené číslo n předpokládáme, že je vzorec (1) správný; máme dokázati, že je správný také obdobný vzorec pro přirozené číslo $n + 1$, t. j. máme na základě vzorce (1) odůvodniti vzorec

$$a_{n+1} = a_1 + nd. \tag{2}$$

To je snadné, neboť podle rekurentní definice aritmetické posloupnosti je

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{3}$$

Jestliže do vzorce (3) dosadíme za a_n podle (1), dostaneme

$$a_{n+1} = [a_1 + (n - 1)d] + d,$$

z čehož snadnou úpravou vychází vzorec (2). Tím je obecná platnost vzorce (1) dokázána methodou matematické indukce.

Dokažme si matematickou indukcí pro aritmetickou posloupnost s prvním členem a_1 a s diferencí d vzorec

$$s_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n - 1)d, \tag{4}$$

který jsme měli v článku 2 pod číslem (12).

Prvý krok. Pro $n = 1$ vzorec (4) dává $s_1 = a_1$, což je správné.

Druhý krok. Ze vzorce (4) máme odvodit obdobný vzorec

$$s_{n+1} = (n + 1)a_1 + \frac{1}{2}(n + 1)nd. \tag{5}$$

Podle definice částečných součtů je

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}. \tag{6}$$

Do (6) jednak dosadíme za s_n hodnotu (4), jednak dosadíme za a_{n+1} hodnotu (2). Dostaneme

$$s_{n+1} = na_1 + \frac{1}{2}n(n - 1)d + a_1 + nd$$

neboli

$$s_{n+1} = (na_1 + a_1) + \left[\frac{1}{2}n(n - 1) + n\right]d,$$

z čehož snadnou úpravou plyne (5).

Nyní si udáme několik příkladů na nepostačitelnost neúplné indukce.

I. Pro každé přirozené číslo n položme

$$a_n = n^2 - n + 41.$$

Je tedy

$$a_1 = 41,\ a_2 = 43,\ a_3 = 47,\ a_4 = 53,\ a_5 = 61,$$
$$a_6 = 71,\ a_7 = 83,\ a_8 = 97,\ a_9 = 113,\ a_{10} = 131.$$

Všecky vypočtené členy a_n jsou prvočísla. Neúplná indukce by vedla k domněnce, že se naše posloupnost skládá ze samých prvočísel, a pro všecka n až po $n = 40$ skutečně a_n je prvočíslo. Ale $a_{41} = 41^2$ není prvočíslo.

II. Je-li $a_n = n^2 - n + 72\,491$, dá se dokázati, že a_n je prvočíslem pro všecka n až po 11 000. Ale pro žádné přirozené číslo c nemůže býti

$$a_n = n^2 - n + c$$

prvočíslem pro všecka n, neboť pro $n = c$ je $a_n = c^2$.

III. Budiž $\{p_n\}$ rostoucí posloupnost všech prvočísel (viz str. 7). Definujeme novou posloupnost $\{M_n\}$ takto:

$$M_n = 2^{p_n} - 1,$$

kde p_n značí n-té prvočíslo. Čísla M_n se nazývají Mersennova čísla. Jest

$$M_1 = 2^2 - 1 = 3,\ M_2 = 2^3 - 1 = 7,\ M_3 = 2^5 - 1 = 31,$$
$$M_4 = 2^7 - 1 = 127,$$

což jsou prvočísla. Ale již následující Mersennovo číslo $M_5 = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ není prvočíslem. Tento příklad je historicky velmi zajímavý. Především je snadné dokázati, že jestliže p není prvočíslo, ani $2^p - 1$ nemůže býti prvočíslo. Neboť je-li p rovné součinu rs dvou přirozených čísel $r > 1$, $s > 1$ a položíme-li $q = 2^r$, je $2^p = 2^{rs} = q^s$ a tudíž podle článku 3 číslo

$$\frac{2^p - 1}{2^r - 1} = \frac{q^s - 1}{q - 1} = 1 + q + \ldots + q^{s-1}$$

je číslo celé, t. j. číslo $2^p - 1$ je dělitelné menším číslem $2^r - 1$, které je větší než jedna; tedy $2^p - 1$ není prvočíslo. Naproti tomu pro mnohá prvočísla p je $2^p - 1$ prvočíslem. R. 1644 tvrdil Mersenne, že pro $n < 258$ číslo $2^n - 1$ je prvočíslem přesně v těchto případech:

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.$$

Od té doby bylo však dokázáno, jednak že pro $n = 67$ a pro $n = 257$ číslo $2^n - 1$ není prvočíslem, jednak že $2^n - 1$ je prvočíslem také pro $n = 61$, 89, 107. Že číslo

$$2^{127} - 1 = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$$

skutečně je prvočíslem, dokázal Lucas r. 1877. Je to největší z čísel, o kterých je známo, že jsou prvočísla.

Cvičení.

Pomocí matematické indukce dokažte správnost vět:

66. Je-li $a_{n+1} = a_n \cdot q$, je a) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; b) $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, pokud $q \neq 1$.

67. a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$;

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$.

68. a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$;

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n + 1)^2$;

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n + 1)(2n - 1)$.

69. a) Číslo $n^3 - n$ je dělitelné šesti pro každé přirozené číslo n. b) Číslo $n^5 - n$ je dělitelné třiceti pro každé přirozené číslo n. c) Číslo $n^7 - n$ je dělitelné čtyřiceti dvěma pro každé přirozené číslo n.

70. a) Číslo $a^n - b^n$ je pro každé přirozené číslo n dělitelné číslem $a - b$. b) Číslo $a^n + b^n$ je pro každé liché kladné n dělitelné číslem $a + b$.

71. a) Součet úhlů vypuklého n-úhelníka je $(n - 2) \cdot 180^0$. b) Vypuklý n-úhelník má $\frac{1}{2}n(n - 3)$ úhlopříček.

72. a) n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě, má $\frac{1}{2}n(n - 1)$ průsečíků. b) n body v prostoru, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce, je určeno $\frac{1}{2}n(n - 1)$ přímek.

73. n body v prostoru, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce a žádné čtyři na jedné rovině, je určeno $\frac{1}{6}n(n - 1)(n - 2)$ rovin.

74. a) V posloupnosti $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ platí $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. b) V téže posloupnosti je n-tý částečný součet dán vzorcem $s_n = a_{n+2} - 1$.

75. a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \dfrac{x - (n + 1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$, pokud $x \neq 1$.

b) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\sin\frac{1}{2}n\alpha \sin\frac{1}{2}(n + 1)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$, pokud $\sin\frac{1}{2}\alpha \neq 0$.

II. Limity.

1. Nerovnosti.

V aritmetice se po staletí kladl velký důraz především na nauku o rovnicích. Ale v moderní matematice jsou velmi důležité také nerovnosti. Základní pravidla o nerovnostech jsme poznali v první třídě a nyní si je zopakujeme. Kdežto skoro všecky výsledky předcházejících článků jsou správné nejen pro čísla reálná, nýbrž také pro čísla komplexní, je v tomto článku podstatné, že všecka čísla jsou reálná. Pravidla, která si chceme připomenout, znějí takto (v. učebnici pro 1. třídu, článek 4 v kapitole III.)·

I. Jestliže v nerovnosti na obou stranách změníme znamení, platí obrácená nerovnost. (Je-li $a < b$, je $-a > -b$.)

II. V nerovnosti je dovoleno na obou stranách přičísti totéž číslo (kladné, záporné nebo nulu).

III. V nerovnosti je dovoleno obě strany znásobit týmž **kladným** číslem.

IV. Jestliže obě strany nerovnosti znásobíme týmž záporným číslem, platí obrácená nerovnost.

Dvě nerovnosti nazveme souhlasné, máme-li v obou znamení „menší" nebo v obou znamení „větší". Již v 1. třídě jsme si všimli, že z pravidla III. plyne následující pravidlo V. a z pravidla IV. následující pravidlo VI.

V. Dvě souhlasné nerovnosti je dovoleno sečíst.

VI. Dvě souhlasné nerovnosti mezi **kladnými** čísly je dovoleno znásobit.

Z pravidla II. následuje, že pro nerovnosti platí pravidlo, které známe u rovnic: Kterýkoli člen nerovnosti můžeme převést s jedné strany nerovnosti na druhou s opačným znamením. Převésti člen a s jedné strany na druhou s opačným znamením znamená totiž totéž jako na obou stranách přičíst číslo $-a$.

Příklad 1. Určiti, pro která x platí nerovnost:

$$\frac{3x-5}{4}+\frac{x+2}{3}<\frac{x}{2}+\frac{x+8}{5}. \tag{1}$$

Obě strany znásobíme kladným číslem 60:

$$15(3x-5)+20(x+2)<30x+12(x+8) \tag{2}$$

neboli

$$45x-75+20x+40<30x+12x+96. \tag{2'}$$

Členy obsahující x převedeme nalevo, známé členy převedeme napravo:

$$45x+20x-30x-12x<75-40+96 \tag{3}$$

neboli

$$23x<131. \tag{3'}$$

Obě strany znásobíme kladným číslem $\frac{1}{23}$:

$$x < \frac{131}{23}. \tag{4}$$

Dokázali jsme, že každé x, které splňuje nerovnost (1), splňuje také nerovnost (4). Obráceně každé x, které splňuje nerovnost (4), splňuje také nerovnost (1), neboť jestliže obě strany nerovnosti (4) znásobíme kladným číslem 23, dostaneme nerovnost (3′), kterou můžeme upravit na tvar (3). Z nerovnosti (3) dostaneme převodem některých členů s jedné strany na druhou nerovnost (2′), kterou můžeme upravit na tvar (2). Jestliže obě strany nerovnosti (2) znásobíme kladným číslem $\frac{1}{60}$, dostaneme nerovnost (1). Tedy řešení nerovnosti (1) je dáno nerovností (4); všimněme si, že (4) platí, je-li x rovné nule nebo záporné.

Příklad 2. Určiti, pro která x platí nerovnost:

$$\frac{x+1}{x+3} < \frac{x+5}{x+6}. \tag{5}$$

Zde nemůžeme na obou stranách znásobit součinem $(x + 3)(x + 6)$, protože tento součin je pro některá x kladný, pro některá x záporný, pro některá x rovný nule. Převedeme pravou stranu nalevo:

$$\frac{x+1}{x+3} - \frac{x+5}{x+6} < 0 \tag{6}$$

neboli po úpravě

$$\frac{-x-9}{(x+3)(x+6)} < 0. \tag{7}$$

Podle I. plyne ze (7)

$$\frac{x+9}{(x+3)(x+6)} > 0. \tag{8}$$

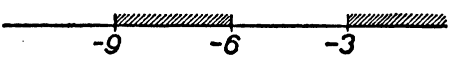
Protože podíl dvou čísel má stejné znamení jako jejich součin, plyne z (8)

$$(x+9)(x+3)(x+6) > 0. \tag{9}$$

Obráceně se lehko přesvědčíme, že každé x, které splňuje nerovnost (9), splňuje také nerovnost (5). Zbývá rozřešiti nerovnost (9); za tím účelem si vytkneme na číselné ose ty body, které anulují mnohočlen

$$(x+9)\,(x+3)\,(x+6), \tag{10}$$

t. j. body odpovídající číslům —9, —6, —3. Tyto tři body rozdělí čí-



Obr. 2.

selnou osu na čtyři části a zkoumáme postupně čísla x odpovídající bodům jednotlivých částí:

[1] $x < -9$; všichni tři činitelé jsou čísla záporná, součin (10) je záporný a nerovnost (9) není splněna.

[2] $-9 < x < -6$ (takto píšeme stručně, abychom naznačili, že platí zároveň obě nerovnosti $-9 < x$, $x < -6$); činitel $x + 9$ je kladný, činitelé $x + 6$, $x + 3$ jsou záporní a nerovnost (9) je splněna.

[3] $-6 < x < -3$; činitelé $x + 9$, $x + 6$ jsou kladní, činitel $x + 3$ je záporný, součin (10) je záporný a nerovnost (9) není splněna.

[4] $x > -3$; všichni tři činitelé jsou kladní, součin (10) je kladný a nerovnost (9) je splněna.

Vcelku tedy nerovnost (5) má řešení dvojího druhu:

$-9 < x < -6$, $x > -3$. V obr. 2. jsou vyznačeny čárkováním ty body na číselné ose, které jsou obrazy řešení nerovnosti (5).

V následujícím bude užitečné také toto pravidlo:

VII. Jestliže pro dvě **kladná** čísla a, b platí nerovnost $a < b$, potom pro jejich převrácené hodnoty $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ platí obrácená nerovnost $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, neboť nerovnost $a < b$ je dovoleno znásobit kladným číslem $\frac{1}{ab}$; vznikne nerovnost $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, která znamená totéž jako $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Cvičení.

76. Jak třeba voliti číslo x, aby byly splněny nerovnosti:

a) $12 + 3x < \frac{x}{3}$; b) $\frac{4x - 3}{4} + \frac{3x - 1}{6} \geqq \frac{1}{3}$; c) $\frac{2x - 3}{5} + \frac{3x - 4}{6} < \frac{9x - 5}{10}$; d) $\frac{4x - 1}{3} - \frac{2x + 1}{4} > x - \frac{x - 2}{6}$.

77. Která x vyhovují současně nerovnostem:

a) $5 - 7x < 3x + 2$, $7 - 5x > 3 + 2x$;
b) $x + 2 > 2x + 3 > 3x + 5$;
c) $2x + 6 > 3x + 2$, $5x - 3 > 3x - 4$, $x - 1 > 5x + 2$.

78. Pro která x platí: a) $6x^2 - 7x + 2 > 0$; b) $2x^2 - 3x + 1 \leqq 0$; c) $x^2 - x + 1 > 0$; d) $2x^2 - 3x + 2 < 0$,

79. Která x splňují nerovnosti: a) $\frac{12 - x}{x - 4} > 0$; b) $\frac{5 - 2x}{x - 7} \geqq 3$;

c) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}>0$; d) $1+\dfrac{x-4}{x-3}<\dfrac{x-2}{x-1}$; e) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x+4}{x-4}\geqq 2$.

80. Čísla a, b jsou kladná. Dokažte, že $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$. Kdy nastane rovnost?

81. Je-li $|x|<1$, je a) $\dfrac{1}{1-x}\geqq 1+x$; b) $\dfrac{1}{1+x}\geqq 1-x$. Dokažte.

82. Jsou-li čísla a, b kladná a taková, že $a\geqq b$, pak $a\geqq\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}\geqq\geqq\dfrac{2ab}{a+b}\geqq b$. Dokažte. Kdy nastává některá rovnost?

83. Matematickou indukcí dokažte: a) je-li $a>1$, pak také $a^n>1$ pro každé přirozené n, b) je-li $0<a<1$, pak také $0<a^n<1$ pro každé přirozené n.

84. Matematickou indukcí dokažte, že $(1+x)^n\geqq 1+nx$ pro $x>-1$ a n celé kladné. Kdy může nastati rovnost?

85. Matematickou indukcí dokažte: a) $2^n>n$ pro každé přirozené n; b) $2^n>n^2$ pro každé celé $n\geqq 5$; c) $2^n>n^3$ pro každé celé $n\geqq 10$.

2. Absolutní hodnoty.

Ze střední školy znáte pojem absolutní hodnoty $|a|$ reálného čísla a. Poznamenejme, že

$$|0|=0;\ |a|>0 \text{ pro každé } a\neq 0. \tag{1}$$

Podle známých pravidel o násobení relativních čísel je

$$|ab|=|a|\cdot|b| \tag{2}$$

pro kterákoli dvě reálná čísla a, b. Jelikož $|-1|=1$, plyne ze (2)

$$|-a|=|a|. \tag{3}$$

Podle pravidel o sčítání relativních čísel je

$$|a+b|\leqq|a|+|b| \tag{4}$$

pro kterákoli dvě reálná čísla a, b, při čemž znamení rovnosti platí, je-li některé z čísel a, b (nebo obě) rovné nule, dále jestliže jsou obě čísla a, b kladná nebo obě záporná; znamení menší platí ve (4), je-li z čísel a, b jedno kladné a jedno záporné.

V předcházející třídě jste se seznámili (v. učebnici pro 2. třídu, článek 3 v kapitole II.) s pojmem absolutní hodnoty komplexního čísla

$$X=x_1+\mathrm{i}\,x_2, \tag{5}$$

která je rovna

$$|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{6}$$

neboli je rovna $\sqrt{X\overline{X}}$, jestliže jako obvykle $\overline{X} = x_1 - ix_2$ je komplexní číslo sdružené s X. Na připomenutém místě jste poznali, že i pro komplexní čísla platí pravidlo (2), tudíž i pravidlo (3), které je důsledkem pravidla (2). Je zřejmé, že i pravidlo (1) je správné i pro čísla komplexní. Náš cíl nyní je dokázati správnost pravidla (4) pro čísla komplexní. Za tím účelem si nejprve dokažme, že pro každé komplexní číslo X platí nerovnost

$$|1 + X| \leqq 1 + |X|. \tag{7}$$

Je-li $\overline{X}$ sdružení komplexní číslo k číslu X, je k číslu $1 + X$ sdružené číslo $1 + \overline{X}$ a tedy

$$|1 + X|^2 = (1 + X)(1 + \overline{X})$$

neboli

$$|1 + X|^2 = 1 + (X + \overline{X}) + X\overline{X}.$$

Avšak

$$X + \overline{X} = 2x_1, \quad X\overline{X} = |X|^2.$$

Tedy

$$|1 + X|^2 = 1 + 2x_1 + |X|^2. \tag{8}$$

Podle (6) je však zřejmé, že $x_1 \leqq |X|$, tedy také $2x_1 \leqq 2\,|X|$. Jestliže v této nerovnosti na obou stranách přičteme číslo $1 + |X|^2$, dostaneme

$$1 + 2x_1 + |X|^2 \leqq 1 + 2|X| + |X|^2 = (1 + |X|)^2.$$

Z toho plyne podle (8), že $|1 + X|^2 \leqq (1 + |X|)^2$ a tudíž platí i (7).

Nyní snadno dokážeme, že nerovnost (4) je správná, jestliže obě písmena a, b znamenají čísla komplexní. Nerovnost (4) je zřejmá, jestliže $a = 0$. Je-li však $a \neq 0$, lze určiti komplexní číslo X tak, aby bylo

$$b = aX.$$

Potom je

$$a + b = a(1 + X),$$

takže podle pravidla (2) je

$$|a + b| = |a| \cdot |1 + X|. \tag{9}$$

Mimo to je podle téhož pravidla také $|b| = |a| \cdot |X|$, takže

$$|a| + |b| = |a|\,(1 + |X|). \tag{10}$$

Avšak dokázanou nerovnost (7) je dovoleno na obou stranách znásobit kladným číslem $|a|$; provedeme-li to, dostaneme

$$|a| \cdot |1 + X| \leqq |a|\,(1 + |X|),$$

z čehož podle (9) a (10) plyne (4).

Matematickou indukcí se snadno dokáže, že pro libovolná komplexní čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí jednak

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \tag{11}$$

jednak

$$|a_1 a_2 \ldots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|. \tag{12}$$

Jestliže v dokázaném vzorci (4) místo b napíšeme $-b$, dostaneme podle (3), že pro libovolná komplexní čísla a, b jest

$$|a - b| \leqq |a| + |b|. \tag{13}$$

Při obvyklém geometrickém znázornění čísel (na číselné ose pro čísla reálná, v rovině pro čísla komplexní) znamená číslo $|a|$ vzdálenost počátku od bodu znázorňujícího číslo a; číslo $|a - b|$ znamená vzdálenost bodů znázorňujících čísla a, b, Pro reálná čísla je to jasné; pro komplexní čísla viz učebnici pro 2. třídu, kapitola II., článek 5.

Cvičení.

Ve cvič. 86—92 jde vesměs o reálná čísla.

86. Která x splňují nerovnosti: a) $|x + 1| > x$; b) $|x + 1| < x$; c) $x + 1 < |x|$; d) $x + 1 > |x|$?

87. Pro která x platí: a) $|x| \leqq |x + 1|$; b) $|2x - 3| \geqq |3x - 2|$; c) $|x| + |x - 1| > 1$; d) $|x| + |2 - x| < 2$; e) $|x| + |2 - x| = 2$?

88. Která x vyhovují nerovnostem: a) $1 < |x + 2| \leqq 3$; b) $3x - 1 < |x| < 3x + 1$; c) $|3x - 1| < |x| < |3x + 1|$?

89. Řešte rovnice: a) $|2x + 1| + |2x - 1| = 3$; b) $|2x + 1| - |2x| + 1 = 2x$.

90. Řešte soustavu rovnic: $|x + y| = 1$, $|x| + |y| = 2$.

91. Která x splňují nerovnost $|2x^2 + 5x| > 3$?

92. Je-li $|x - a| < b$, kde $b > 0$, značí to přesně totéž jako $a - b < x < a + b$. Dokažte.

93. Matematickou indukcí odvoďte, že

a) $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$;
b) $|a_1 a_2 \ldots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \ldots |a_n|$.

94. Ze vztahu $|a + b| \leqq |a| + |b|$ dokažte, že $|x - y| \geqq ||x| - |y||$.

95. Je-li $|x - a| < b$, kde $b > 0$, dokažte, že a) $|x| < |a| + b$; b) $|x| > |a| - b$.

96. Co znamená v oboru komplexních čísel podmínka; a) $|x| < 1$; b) $|x - 2| > \sqrt{3}$; c) $1 < |x - 4| < 2$; d) $|x| = |x + 1|$; e) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \geqq 1$? Znázorněte graficky.

97. Řešte rovnice: a) $|x| - x = 1 + 2i$; b) $|x| + x = 2 + i$.

98. Je-li $|x| < \frac{1}{2}$, pak $|(1 + i)x^3 + ix| < \frac{3}{4}$. Dokažte.

3. Ohraničené a nulové posloupnosti.

Posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy jsou čísla reálná nebo komplexní, se jmenuje **ohraničená,** jestliže existuje takové kladné číslo K, že

$$|a_n| < K$$

pro všecky indexy n. O ohraničených posloupnostech snadno dokážeme dvě věty.

I. Jsou-li obě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené, je také posloupnost $\{a_n + b_n\}$ ohraničená.

Důkaz. Jelikož $\{a_n\}$ je ohraničená, existuje takové kladné číslo K, že

$$|a_n| < K \tag{1}$$

pro všecky indexy n. Jelikož $\{b_n\}$ je ohraničená, existuje takové kladné číslo H, že

$$|b_n| < H \tag{2}$$

pro všecky indexy n. Nerovnosti (1), (2) je dovoleno sečíst; proto

$$|a_n| + |b_n| < K + H$$

pro všecky indexy n. Ale podle předcházejícího článku je

$$|a_n + b_n| \leqq |a_n| + |b_n|;$$

tedy

$$|a_n + b_n| < K + H$$

pro všecky indexy n. Protože součet $K + H$ dvou kladných čísel K, H je kladné číslo, je věta dokázána.

II. Jsou-li obě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené, je také posloupnost $\{a_n b_n\}$ ohraničená.

Důkaz. Podle předpokladu existují taková kladná čísla K, H, že platí (1), (2). Je-li $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, jsou (1), (2) nerovnosti mezi kladnými čísly, které je dovoleno znásobit, což dá nerovnost

$$|a_n b_n| < KH; \tag{3}$$

protože KH je kladné číslo, platí (3), i když $a_n = 0$ nebo $b_n = 0$, t. j. (3) platí vždy, a tedy $\{a_n b_n\}$ je ohraničená posloupnost.

Jestliže všecky členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou rovny témuž číslu c, je $\{b_n\}$ zřejmě ohraničená posloupnost. Proto z věty II. plyne:

III. Je-li $\{a_n\}$ ohraničená posloupnost a je-li c libovolné číslo, je také $\{ca_n\}$ ohraničená posloupnost.

O posloupnosti $\{a_n\}$ pravíme, že **skoro všecky členy** mají nějakou vlastnost V, jestliže lze udati index r tak, že vlastnost V mají všecky ty členy posloupnosti $\{a_n\}$, jejichž index n je větší než r. Na př. skoro všecky členy posloupnosti $\{100 - n\}$ jsou záporné; pro $r = 100$ platí, že $100 - n$ je záporné pro všecka $n > r$. Také skoro všecky členy posloupnosti $100 - 0{,}001 \cdot n$ jsou záporné, ale zde musíme volit r mnohem větší než 100; $100 - 0{,}001 \cdot n$ je záporné teprve pro $n > 100\,000$.

Příklad. Budiž $q > 1$. Ať jakkoli zvolíme kladné číslo K, skoro všecky členy geometrické posloupnosti $\{q^n\}$ jsou větší než K. Je-li q na př. číslo celé, je to jasné. Je-li však číslo q jen o málo větší než 1, je-li na př $q = 1{,}000001$, není to tak jasné, ale dá se to snadno dokázat logaritmováním, neboť ježto $q > 1$, je $\log q > 0$. Mimo to je $\log q^n = n \cdot \log q$. Zvolíme index r tak, že

$$r > \frac{\log K}{\log q}.$$

Pro všecka $n > r$ je tím spíše

$$n > \frac{\log K}{\log q}.$$

Tuto nerovnost je dovoleno znásobit kladným číslem $\log q$. Dostaneme

$$n \cdot \log q > \log K \text{ neboli } \log q^n > \log K;$$

poněvadž ze dvou kladných čísel je to větší, které má větší logaritmus, je také $q^n > K$. Tedy $q^n > K$ pro všecka $n > r$, t. j. pro skoro všechna n.

Nyní si zavedeme důležitou definici. Posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy jsou libovolná čísla reálná nebo komplexní, se nazývá **nulová posloupnost,** jestliže, ať jakkoli zvolíme kladné číslo k, vždycky platí, že nerovnost

$$|a_n| < k \tag{4}$$

je splněna pro skoro všecka n. Od kterého indexu n počne platit nerovnost (4), to záleží na tom, jak malé bude kladné číslo k. Čím menší bude k, tím později začne platit nerovnost (4). Zvolíme-li k velmi malé, začne (4) platit velmi pozdě; jak pozdě, to záleží jednak na volbě kladného čísla k, jednak na volbě posloupnosti $\{a_n\}$.

Je skoro samozřejmé, že posloupnosti $\{0\}$ a $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ jsou nulové. Pro nás je důležitá tato věta:

IV. Je-li $|q| < 1$, je $\{q^n\}$ nulová posloupnost.

Důkaz. To je zřejmé pro $q = 0$. Jestliže $q \neq 0$, je $|q| > 0$; mimo to je $|q| < 1$, takže pro převrácenou hodnotu $Q = 1 : |q|$ platí $Q > 1$. Zvolme nyní libovolně kladné číslo k; také $K = 1 : k$ je kladné číslo, a protože $Q > 1$, nerovnost

$$Q^n > K \tag{5}$$

platí pro skoro všecka n. Avšak z nerovnosti (5) následuje (v. větu VII. na str. 29) nerovnost

$$\frac{1}{Q^n} < \frac{1}{K} \quad \text{neboli} \quad |q|^n < k.$$

Avšak $|q|^n = |q^n|$; tedy nerovnost $|q^n| < k$ platí pro všecka n, pro něž platí (5), t. j. $|q^n| < k$ pro skoro všecka n.

Zřejmá je tato věta: V. Každá nulová posloupnost je ohraničená.

O nulových posloupnostech snadno dokážeme následující dvě věty:

VI. Jsou-li $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dvě nulové posloupnosti, je také $\{a_n + b_n\}$ nulová posloupnost.

Důkaz. Zvolme kladné číslo k. Potom je také $\frac{1}{2}k$ kladné číslo, a ježto $\{a_n\}$ je nulová posloupnost, můžeme udat index r_1 tak, že

$$|a_n| < \tfrac{1}{2}k \tag{6}$$

pro všecka $n > r_1$. Podobně můžeme udat index r_2 tak, že

$$|b_n| < \tfrac{1}{2}k \tag{7}$$

pro všecka $n > r_2$. Zvolme nyní index r tak, aby bylo zároveň $r > r_1$, $r > r_2$. Jestliže $n > r$, platí obě nerovnosti (6), (7), které je dovoleno sečíst, což dá

$$|a_n| + |b_n| < k;$$

avšak
$$|a_n + b_n| \leqq |a_n| + |b_n|, \text{ takže}$$
$$|a_n + b_n| < k$$

pro všecka $n > r$. Věta je dokázána.

VII. Je-li $\{a_n\}$ nulová posloupnost a je-li $\{b_n\}$ ohraničená posloupnost, je $\{a_n b_n\}$ nulová posloupnost.

Důkaz. Podle definice ohraničené posloupnosti existuje takové kladné číslo K, že $|b_n| < K$ pro všecky indexy n. Zvolíme-li nyní libovolně kladné číslo k, je také $k : K$ kladné číslo. Ježto posloupnost $\{a_n\}$ je nulová, můžeme udat index r tak, že $|a_n| < k : K$ pro všecka $n > r$. Tedy pro všecka $n > r$ platí obě nerovnosti

$$|a_n| < \frac{k}{K}, \quad |b_n| < K.$$

Snadno uvážíme, že tyto dvě nerovnosti je dovoleno znásobit. Jelikož $|a_n| \cdot |b_n| = |a_n b_n|$, vyjde $|a_n b_n| < k$ pro všecka $n > r$.

Důsledek dokázané věty VIII. Je-li $\{a_n\}$ nulová posloupnost a je-li c libovolné číslo, je také $\{ca_n\}$ nulová posloupnost, neboť posloupnost $\{c\}$ je zřejmě ohraničená.

Cvičení.

99. Dokažte větu: Je-li $\{a_n\}$ ohraničená posloupnost, je i posloupnost $\{|a_n|\}$ ohraničená.

100. Dokažte větu: Jsou-li $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ohraničené posloupnosti, je ohraničená i posloupnost $\{ra_n + sb_n\}$, kde r, s jsou libovolná čísla.

101. Je-li $|q| \leqq 1$, je posloupnost $\{q^n\}$ ohraničená. Dokažte.

102. Dokažte větu: Je-li $\{a_n\}$ posloupnost ohraničená a je-li $|b_n| \leqq |a_n|$ pro skoro všecka n, pak je $\{b_n\}$ také posloupnost ohraničená.

103. Jestliže v posloupnosti $\{a_n\}$ změníme *konečný* počet členů, dostaneme posloupnost $\{b_n\}$. Pak je $a_n = b_n$ pro skoro všecka n. Dokažte.

104. Dokažte, že posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nulová.

105. Dokažte větu: Je-li $\{a_n\}$ nulová posloupnost, je i posloupnost $\{|a_n|\}$ nulová.

106. Dokažte větu: Jsou-li $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ nulové posloupnosti, je nulová i posloupnost a) $\{ra_n + sb_n\}$, kde r, s jsou libovolná čísla; b) $\{a_n b_n\}$.

107. Dokažte, že každá nulová posloupnost je ohraničená.

108. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost nulová, je i $\{a_n{}^r\}$, kde r je libovolné přirozené číslo, nulová. Dokažte matematickou indukcí.

109. Utvořte výrok, který přesně popírá to, co tvrdí výrok:
a) Existuje takové kladné číslo K, že $|a_n| < K$ pro všecka n. b) Ať zvolíme kladné číslo k jakkoli, vždycky je splněna nerovnost $|a_n| < k$ pro skoro všecka n.

110. Dokažte větu: Je-li posloupnost $\{a_n\}$ ohraničená a je-li $a_n \neq 0$ pro všecka n, pak posloupnost $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ není nulová.

111. Dokažte větu: Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nulová a je-li $a_n \neq 0$ pro všecka n, pak posloupnost $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ není ohraničená.

112. Dokažte větu: Je-li $\{a_n\}$ posloupnost nulová a je-li $|b_n| \leqq |a_n|$ pro skoro všecka n, pak je $\{b_n\}$ také posloupnost nulová.

4. Konvergentní posloupnosti.

Nyní se seznámíme s jedním pojmem, který je snad nejdůležitějším matematickým pojmem vůbec, kolem něhož se soustřeďuje celá t. zv. vyšší matematika. Je to pojem **limity**. Slovo l i m i t a je latinského původu a znamená mez nebo hranici. V matematice se velmi často setkáváme s čísly, která nedovedeme spočítati přesně, nýbrž pouze přibližně. Jestliže způsob přibližného počítání je tak pružný, že jej lze upraviti tak, aby stupeň přibližnosti byl tak velký, jak si přejeme, neboli tak, aby se přesná hodnota a přibližná hodnota lišily tak málo, jak je libovolným způsobem předepsáno, říkáme, že přesná hodnota hledaného čísla je limitou počítaných přibližných hodnot. S takovými čísly, která ve vyloženém smyslu můžeme počítati pouze přibližně, jsme se již setkali. Takto se počítají mimo jiné druhé odmocniny $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ atd., Ludolfovo číslo π, ale také logaritmy, goniometrické funkce a j.

Základní druh limity je **limita posloupnosti.** O posloupnosti $\{a_n\}$ říkáme, že má za limitu číslo a, jestliže $\{a_n - a\}$ je nulová posloupnost. To právě znamená, že při velkých hodnotách indexu n číslo $|a_n - a|$ je velmi malé neboli že pro všecka velká n je číslo a_n dobrým přiblížením k číslu a.

Každá posloupnost nemá limitu. Zřejmě na př. ani posloupnost $\{n\}$, ani posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá limitu. Jestliže však posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, je tato limita **jediná,** neboť dejme tomu, že by posloupnost $\{a_n\}$ měla dvě různé limity a, b. Potom by byly $\{a_n - a\}$, $\{a_n - b\}$ nulové posloupnosti. Pro každé číslo c by také $\{c(a_n - b)\}$ byla nulová posloupnost. Pro $c = -1$ dostaneme, že $\{b - a_n\}$ je nulová posloupnost. Z nulových posloupností $\{a_n - a\}$, $\{b - a_n\}$ bychom dostali sečtením novou nulovou posloupnost

$$\{(a_n - a) + (b - a_n)\} \text{ neboli } \{b - a\}.$$

Ježto však $a \neq b$, není $\{b - a\}$ zřejmě nulová posloupnost.

Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a, píšeme

$$\lim a_n = a. \tag{1}$$

O posloupnosti, která má limitu, říkáme, že je **konvergentní** (t. j. sbíhavá); o posloupnosti, která nemá limitu, říkáme, že je **divergentní** (t. j. rozbíhavá). Také užíváme sloves **konverguje, diverguje.** Platí-li (1), říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje k číslu** a. Zřejmě

$$\lim a_n = 0$$

znamená totéž, jako že posloupnost $\{a_n\}$ je nulová. Tedy podle věty IV. článku 3 této kapitoly:

$$\lim q^n = 0, \text{ je-li } |q| < 1. \tag{2}$$

Z vět článku 3 snadno odvodíme základní věty o konvergentních posloupnostech.

I. Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.

Důkaz. Platí-li (1), je $\{a_n - a\}$ ohraničená posloupnost podle věty V. článku 3. Zřejmě také $\{a\}$ je ohraničená posloupnost. Ježto $a_n = (a_n - a) + a$, je $\{a_n\}$ ohraničená posloupnost podle věty I. článku 3.

II. Jestliže $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, je také $\lim (a_n + b_n) = a + b$.

Důkaz. Ježto posloupnosti $\{a_n - a\}$, $\{b_n - b\}$ jsou nulové a ježto

$$(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b),$$

je $\{(a_n + b_n) - (a + b)\}$ nulová posloupnost podle věty I. článku 3.

III. Jestliže $\lim a_n = a$, je $\lim ca_n = ca$ pro každé číslo c.

Důkaz. Ježto posloupnost $\{a_n - a\}$ je nulová a ježto $ca_n - ca = c(a_n - a)$, je $\{ca_n - ca\}$ nulová posloupnost podle věty VIII. čl. 3.

IV. Jestliže $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, je také $\lim (a_n - b_n) = a - b$.

Důkaz. Z předcházející věty soudíme pro $c = -1$, že $\lim (-b_n) = -b$, takže naše věta plyne z věty II. tohoto článku.

V. Jestliže $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, je také $\lim a_n b_n = ab$.

Důkaz. Podle věty I. tohoto článku je $\{a_n\}$ ohraničená posloupnost, takže $\{a_n(b_n - b)\}$ je nulová posloupnost podle věty VII. článku 3. Podle věty VIII. téhož článku je také $\{b(a_n - a)\}$ nulová posloupnost. Avšak

$$a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a),$$

takže $\{a_n b_n - ab\}$ je nulová posloupnost podle věty VI. článku 3.

VI. Je-li $\lim a_n = a$ a je-li $a_n \neq 0$ pro všecka n, $a \neq 0$, je také

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}. \tag{3}$$

Důkaz. Ježto $a \neq 0$, je $|a|$ kladné číslo, tedy také $\frac{1}{2}|a|$ je kladné číslo. Ježto $\{a_n - a\}$ je nulová posloupnost, existuje takový index r, že

$$|a_n - a| < \tfrac{1}{2}|a| \text{ pro všecka } n > r.$$

Kdyby pro nějaké $n > r$ bylo $|a_n| \leqq \frac{1}{2}|a|$ neboli $|-a_n| \leqq \frac{1}{2}|a|$, pak by pro toto n bylo

$$|a| = |(a_n - a) + (-a_n)| \leqq |a_n - a| + |-a_n| < \tfrac{1}{2}|a| + \tfrac{1}{2}|a| = |a|,$$

t. j. $|a| < |a|$, což je nemožné. Tedy $|a_n| > \frac{1}{2}|a|$ pro $n > r$, takže

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} < \frac{2}{|a|} \text{ pro } n > r \tag{4}$$

podle věty VII. článku 1. Ze (4) soudíme snadno, že $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ je ohraničená posloupnost. Podle věty III. článku 3 je tedy také $\left\{-\frac{1}{aa_n}\right\}$ ohraničená posloupnost. Ježto $\{a_n - a\}$ je nulová posloupnost a jest

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{aa_n}(a_n - a),$$

je $\left\{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right\}$ nulová posloupnost podle věty VII. článku 3.

VII. **Budiž** $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. **Jestliže** $b_n \neq 0$ **pro všecka** n **a také** $b \neq 0$, **je též**

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Důkaz. Podle předcházející věty je $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Ježto $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, plyne naše věta z věty V.

Podle (2) je posloupnost $\{q^n\}$ konvergentní pro $q < 1$. Může býti posloupnost $\{q^n\}$ konvergentní i v případě $|q| \geqq 1$? Pro $q = 1$ je $q^n = 1$ pro všecka n, tedy $\lim q^n = 1$. Avšak

VIII. **Jestliže** $|q| \geqq 1$, $q \neq 1$, **pak posloupnost** $\{q^n\}$ **je divergentní.**

Důkaz. Předpokládejme, že $|q| \geqq 1$ a že $\lim q^n = c$. Máme dokázati, že $q = 1$. Ježto $|q| \geqq 1$ a ježto $|q^n| = |q|^n$, je $|q^n| \geqq 1$ pro všecka n; proto je $c \geqq 1$, tedy $c \neq 0$. Jestliže z nulové posloupnosti $\{q^n - c\}$ vynecháme první člen, dostaneme posloupnost $\{q^{n+1} - c\}$, která je zřejmě také nulová. Tedy

$$\lim q^n = c, \quad \lim q^{n+1} = c,$$

takže podle věty IV. je

$$\lim (q^{n+1} - q^n) = 0.$$

Na druhé straně je $q^{n+1} - q^n = q^n(q - 1)$, takže podle věty III. je

$$\lim (q^{n+1} - q^n) = (q - 1)\, c.$$

Tudíž $(q - 1)c = 0$, a ježto činitel c je různý od nuly, musí býti $q - 1 = 0$, t. j. $q = 1$.

IX. Jestliže $|q| < 1$, pak

$$\lim (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \frac{1}{1 - q}. \tag{5}$$

Důkaz. Podle vzorce (6') článku 3 v kapitole I. je

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

takže

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Máme tedy dokázat, že $\left\{- \frac{1}{1 - q} \cdot q^n\right\}$ je nulová posloupnost. To plyne z vět IV. a VIII. článku 3 této kapitoly.

Vzorec (5) se obyčejně píše ve tvaru

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1 - q}. \tag{5'}$$

Tečky na levé straně naznačují, že se má ve sčítání pokračovati bez jakéhokoli omezení. Sčítati nekonečně mnoho čísel nemá ovšem žádný význam; levá strana neznamená vůbec součet, nýbrž limitu součtu. Přesto se prakticky (z historických důvodů) často mluví o **nekonečných řadách,** o jejich **konvergenci** nebo **divergenci** a v případě konvergence o jejich **součtu.** Nekonečná řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{6}$$

není nic jiného nežli posloupnost částečných součtů $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ posloupnosti $\{a_n\}$; konvergence nebo divergence nekonečné řady (6) není nic jiného než konvergence posloupnosti $\{s_n\}$; v případě konvergence součet nekonečné řady (6) není nic jiného než $\lim s_n$.

Cvičení.

113. Je-li $\lim a_n = a$, pak $\lim |a_n| = |a|$. Dokažte.

114. Je-li $\lim a_n = a$ a $\lim b_n = b$, pak $\lim (ra_n + sb_n) = ra + sb$, kde r, s jsou libovolná čísla. Dokažte.

115. Je-li $\lim a_n = a$, pak $\lim a_n^r = a^r$, kde r je přirozené číslo. Dokažte matematickou indukcí.

116. Ze cvič. 115. odvoďte, že $\lim a_n^r = a^r$ i pro $r \leqq 0$ celé, ovšem za předpokladu, že $a \neq 0$, $a_n \neq 0$ pro všecka n.

117. Dokažte, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.

118. Je-li $a_n = r$ pro skoro všecka n, pak $\lim a_n = r$. Dokažte.

119. Jestliže v posloupnosti $\{a_n\}$ zaměníme *konečný* počet členů, dostaneme posloupnost $\{b_n\}$. Je-li $\lim a_n = a$, pak také $\lim b_n = a$. Dokažte.

120. Buď $\lim a_n = a \neq 0$ a nechť $a_n = 0$ nejvýše pro *konečný* počet členů. Utvořme posloupnost $\{b_n\}$ tak, že položíme $b_n = \frac{1}{a_n}$ je-li $a_n \neq 0$; je-li $a_n = 0$, zvolíme b_n libovolně. Dokažte, že $\lim b_n = \frac{1}{a}$.

121. Na základě vět II.–VII. vypočtěte: a) $\lim \frac{n}{n+1}$, b) $\lim \frac{an+b}{cn+d}$ pro $c \neq 0$; c) $\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^r$, r celé; d) $\lim \frac{n^2+1}{n^2-1}$; e) $\lim \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1}$; f) $\lim \frac{2n}{n^2+1}$.

122. Dokažte větu: Je-li $\lim a_n > \lim b_n$, je $a_n > b_n$ pro skoro všecka n.

123. Je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a $a_n \leqq b_n$ pro skoro všecka n, pak $a \leqq b$. Dokažte. — [Návod: Co by se stalo, kdyby bylo $a > b$?]

124. Pro která x je posloupnost $\{x^n\}$ konvergentní?

125. Rozhodněte, která z následujících řad je konvergentní, a je-li konvergentní, napište, jaký má součet:

a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$;

b) $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots$;

c) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \dots$;

d) $(1 - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^3 + (1 - \sqrt{2})^4 + \dots$;

e) $(1 + \sqrt{2}) - (1 + \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^3 - (1 + \sqrt{2})^4 + \dots$;

f) $1 + \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 + \dots$;

g) $1 + \frac{1-i}{2} + \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{2}\right)^3 + \dots$;

h) $1 - (1+i) + (1+i)^2 - (1+i)^3 + \dots$

126. Udejte, pro která x jsou konvergentní následující řady a jaký je jejich součet: a) $x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$; b) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots$; c) $x - 2x + 4x - 8x + \dots$; d) $-x - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \dots$

127. Pro která reálná x jsou konvergentní následující řady a jaký je jejich součet:

a) $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots$;

b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^4 x + \ldots$;

c) $1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + (\cos x + i \sin x)^3 + \ldots$;

d) $1 - \frac{1 - ix}{3} + \left(\frac{1 - ix}{3}\right)^2 - \left(\frac{1 - ix}{3}\right)^3 + \ldots$

5. Reálná čísla jako limity posloupnosti desetinných zlomků.

Při praktickém počítání nahrazujeme reálná čísla skoro vždy desetinnými zlomky tak jim blízkými, že chyba nemá praktický význam. Historicky je zajímavé, že ač desetinné zlomky byly známy mnohem dříve, užívá se jich soustavně teprve od 17. století. Zásluha o to patří především holandskému matematikovi Simonu Stevinovi (1584—1620). Naše generace, která se s desetinnými zlomky seznamuje již na národní škole, nemá náležité představy o tom, jak nepohodlné byly výpočty v době, která ještě neznala desetinné zlomky. Ostatně plné využití všech výhod, které poskytují desetinné zlomky, mohlo nastati až po zavedení desítkové soustavy měr a vah, jejíž nezbytnosti pro pokrok vědy si byl dobře vědom už Stevin, ale kterou prosadila teprve velká revoluce francouzská.

Theoreticky je důležité přesně odůvodnit, že veškeré počítání s reálnými čísly se dá převést na počítání s desetinnými zlomky. Nebudeme se zabývati všemi podrobnostmi tohoto odůvodnění. Za základní větu v této souvislosti lze považovat větu, že ke každému reálnému číslu a lze udat takovou posloupnost $\{a_n\}$ desetinných zlomků, že $a = \lim a_n$. Pomocí vět II., IV., V. a VII. článku 4 se potom odůvodní, že základní početní výkony s reálnými čísly se dají nahradit základními početními výkony s konečnými desetinnými zlomky tak, že chyba, které se při tom dopustíme, je tak malá, jak je předem předepsáno. Tím se nebudeme podrobněji zabývati. Zato si stručně promluvíme o nejjednodušším způsobu, jak napsati libovolné reálné číslo a ve tvaru $a = \lim a_n$, kde každé a_n je desetinné číslo. Tento nejjednodušší způsob pozůstává v tom, že za a_n volíme největší n-místný desetinný zlomek, který je buďto rovný anebo menší než a. Je-li na př. $a = \pi$, je

$$a_1 = 3{,}1;\ a_2 = 3{,}14;\ a_3 = 3{,}141;\ a_4 = 3{,}1415;\ a_5 = 3{,}14159;\ \ldots$$

Všecky rozdíly $\pi - a_1$, $\pi - a_2$, $\pi - a_3$, ... jsou kladné a jest

$$\pi - a_1 < \frac{1}{10}; \pi - a_2 < \frac{1}{10^2}; \pi - a_3 < \frac{1}{10^3}; \ldots,$$

takže skutečně $\lim a_n = \pi$. Stručně píšeme

$$\pi = 3{,}141592653589793 \ldots, \tag{1}$$

kde tečky znamenají, že se má napravo bez omezení pokračovati dál a dál; pravá strana v (1) je tedy stručné označení pro limitu posloupnosti $\{a_n\}$, jejíž n-tý člen a_n dostaneme, podržíme-li napravo pouze n prvých desetinných míst. V témž smyslu máme pro každé reálné číslo a:

$$a = c{,}c_1c_2c_3c_4c_5 \ldots, \tag{2}$$

kde c je libovolné celé číslo (kladné, záporné nebo rovné nule), kdežto c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, ... jsou číslice, (t. j. čísla, z nichž každé má jednu z hodnot 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Tedy (2) znamená, že

$$a = \lim a_n,$$

kde

$$a_n = c + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10^n}. \tag{3}$$

Výraz (2) se jmenuje d e s e t i n n ý r o z v o j č í s l a a.

Jestliže číslo a samo je r-místný desetinný zlomek, t. j. jestliže

$$a = c + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_r}{10^r},$$

kde opět c je celé číslo a c_1, c_2, ..., c_r jsou číslice, pak rozvoj (2) má tvar

$$a = c{,}c_1c_2 \ldots c_r00000 \ldots,$$

t. j. všecky číslice c_n pro $n > r$ jsou rovny nule.

Přistupme k případu, že a je kladné racionální číslo, tedy $a = \frac{m}{n}$, kde m, n jsou přirozená čísla, která můžeme předpokládati nesoudělná. Jestliže číslo n nemá jiné prvočinitele než 2 a 5, na př. $a = \frac{13}{250} = \frac{13}{2 \cdot 5^3}$, můžeme rozšířením uvésti a na tvar zlomku se jmenovatelem 10^r, na př.

$$\frac{13}{2 \cdot 5^3} = \frac{13 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{13 \cdot 4}{10^3} = \frac{52}{10^3} = 0{,}052 = 0{,}05200000\ldots;$$

a je v tomto případě r-místný desetinný zlomek. Jestliže však n má jiné prvočinitele než 2 a 5, jestliže na př. $a = \frac{5}{14}$, můžeme rozvoj (2) určit obyčejným dělením.

$$\begin{array}{l} 50 : 14 \doteq 0{,}3571428571 \\ \;80 \\ \;100 \\ \quad 20 \\ \quad\; 60 \\ \quad\;\; 40 \\ \quad\;\; 120 \\ \quad\quad 80 \\ \quad\quad 100 \\ \quad\quad\; 20 \end{array}$$

Všecky zbytky 8, 10, 2, 6, 4, 12 atd. při tomto dělení jsou menší než 14 a nezáporné, je tedy pouze 14 možných zbytků:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.$$

Z toho plyne, že musí jednou nastat okamžik, že se vyskytne znovu zbytek, který se vyskytl už dříve; v daném případě takový po prvé se opakující zbytek je 8. Jakmile se jednou opakuje zbytek, musí se opakovat také všecky následující zbytky a musí se také opakovat číslice podílu; v daném případě jest

$$\frac{5}{14} = 0{,}357142857142857142857 1428\ldots, \tag{4}$$

t. j. skupina číslic 571428 se stále opakuje. Říkáme, že desetinný rozvoj (4) je **periodický** (perioda je slovo řeckého původu znamenající cesta kolem dokola); číslice 571428 tvoří **periodu** rozvoje, číslice 3 tvoří **předperiodí**. Je patrné, že takový periodický rozvoj musíme dostat, kdykoli číslo a je racionální, i když a je záporné. Je-li však a irracionální, pak desetinný rozvoj (2) není periodický, neboť jestliže desetinný rozvoj

$$a = c, \overbrace{p_1 \ldots p_k} \overbrace{q_1 \ldots q_h} \overbrace{q_1 \ldots q_h} \overbrace{q_1 \ldots q_h} \ldots$$

je periodický, číslo a musí býti racionální.

Vskutku zřejmě

$$a = \lim a_{k+nh},$$

kde

$$a_{k+nh} = c, \overbrace{p_1 \ldots p_k} \overbrace{q_1 \ldots q_h} \ldots \overbrace{q_1 \ldots q_h},$$

při čemž skupina číslic $q_1 \ldots q_h$ se n-krát za sebou opakuje. Jestliže položíme

$$\frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_k}{10^k} = u,$$

$$\frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots + \frac{q_h}{10^h} = v,$$

jest

$$a_{k+nh} = c + u + \frac{v}{10^k} + \frac{v}{10^{k+h}} + \ldots + \frac{v}{10^{k+(n-1)h}}$$

neboli

$$a_{k+nh} = c + u + \frac{v}{10^k}\left(1 + \frac{1}{10^h} + \ldots + \frac{1}{10^{(n-1)h}}\right).$$

Podle věty IX. článku 4 je však

$$\lim \left(1 + \frac{1}{10^h} + \ldots + \frac{1}{10^{(n-1)h}}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^h}} = \frac{10^h}{10^h - 1},$$

tedy

$$a = \lim a_{k+nh} = c + u + \frac{v}{10^k} \cdot \frac{10^h}{10^h - 1} = c + u + \frac{v \cdot 10^{h-k}}{10^h - 1};$$

z toho je patrné, že číslo a je racionální.

Periodičnost desetinného rozvoje racionálního čísla a je zajímavý důsledek věty IX. článku 4; má však nepatrný praktický význam.

Cvičení.

128. Každé reálné číslo a lze psáti ve tvaru $a = c + u$, kde c je celé číslo a u vyhovuje nerovnostem $0 \leq u < 1$. Podobně číslo $10u = c_1 + u_1$, kde c_1 je celé a u_1 vyhovuje nerovnostem $0 \leq u_1 < 1$. Dále $10u_1 = c_2 + u_2$, kde c_2 je celé a $0 \leq u_2 < 1$. Pokračujeme-li takto bez omezení, dostaneme postupně další čísla $c_3, c_4, \ldots, u_3, u_4, \ldots$ týchž vlastností. Dokažte, že $c, c_1c_2c_3c_4 \ldots$ je desetinný rozvoj čísla a.

129. Každé reálné číslo a lze psáti ve tvaru $a = d + v$, kde d je celé číslo a v vyhovuje nerovnostem $0 < v \leq 1$. Podobně číslo $10v = d_1 + v_1$, kde d_1 je celé a v_1 vyhovuje nerovnostem $0 < v_1 \leq 1$. Dále $10\,v_1 = d_2 + v_2$, kde d_2 je celé a $0 < v_2 \leq 1$. Pokračujeme-li takto bez omezení, dostaneme postupně další čísla $d_3, d_4, \ldots, v_3, v_4, \ldots$ týchž vlastností. Dokažte, že $d, d_1d_2d_3d_4 \ldots$ je desetinný rozvoj čísla a.

130. Pokud žádné z čísel $u, u_1, u_2, u_3, \ldots$ ve cvič. 128 není rovno 0, není žádné z čísel $v, v_1, v_2, v_3, \ldots$ ve cvič. 129 rovno 1 a oba rozvoje jsou totožné. Dokažte.

131. Je-li ve cvič. 128 číslo $u_{k-1} \neq 0$ a $u_k = 0$, je ve cvič. 129 číslo $v_{k-1} \neq 1$ a $v_k = 1$, při čemž $c_k = d_k + 1$, $c_n = 0$, $d_n = 9$ pro všecka $n > k$. Pak je číslo a vyjádřeno dvěma různými rozvoji

$$a = c{,}c_1c_2c_3 \ldots c_k\underbrace{000\ldots}_{\text{samé nuly}} = c{,}c_1c_2c_3 \ldots (c_k - 1)\underbrace{999\ldots}_{\text{samé devítky}}$$

Dokažte.

132. Nepřipustíme-li, že $c_n = 9$ pro skoro všecka n, pak každé reálné číslo a má právě jeden desetinný rozvoj. Dokažte. — [Návod: Že má *aspoň* jeden desetinný rozvoj, plyne ze cv. 128. Že má *nejvýše* jeden, dokážeme matematickou indukcí takto: [1] Nechť $a = c{,}c_1c_2c_3 \ldots = d{,}d_1d_2d_3 \ldots$ jsou dva rozvoje čísla a, t. j. $c + u = d + v$, kde $0 \leqq u < 1$, $0 \leqq v < 1$. Pak $c - d = v - u$ je celé číslo. Ale $-1 < v - u < 1$, proto $v - u = 0$. [2] Je-li $c = d$, $c_k = d_k$ pro všecka $k < n$, musí $c_n \cdot 10^{-n} + u_n = d_n \cdot 10^{-n} + v_n$, kde $0 \leqq u_n < 10^{-n}$, $0 \leqq v_n < 10^{-n}$. Pak $c_n - d_n = (v_n - u_n) \cdot 10^n$ je celé číslo. Ale $-1 < (v_n - u_n) \cdot 10^n < 1$, proto $v_n - u_n = 0$.]

133. Pomocí součtu nekonečné řady převeďte na zlomky obyčejné:
a) $0{,}58\overline{3}$; b) $0{,}2\overline{27}$; c) $0{,}\overline{259}$.

134. Jestliže v periodickém rozvoji není předperiodí, říkáme, že rozvoj je ryze periodický; je-li v něm předperiodí, je rozvoj neryze periodický. Které zlomky v základním tvaru vedou k rozvojům ryze periodickým a které k rozvojům neryze periodickým?

135. Které zlomky v základním tvaru vedou k ryze periodickým rozvojům s periodou a) jednocifernou, b) dvojcifernou, c) trojcifernou, d) h-cifernou?

136. Které zlomky v základním tvaru vedou k neryze periodickým rozvojům s předperiodím k-ciferným?

137. Dokažte správnost vět: a) Ryze periodický rozvoj je roven zlomku, jehož čitatelem je perioda a jmenovatelem číslo mající tolik devítek, kolik má perioda číslic. b) Neryze periodický rozvoj je roven zlomku, jehož čitatele utvoříme tak, že napíšeme předperiodí, za ně připíšeme periodu a od vzniklého čísla odečteme předperiodí; jmenovatele pak utvoříme tak, že napíšeme tolik devítek, kolik číslic má perioda, a k nim připíšeme tolik nul, kolik číslic má předperiodí.

III. Kombinatorika.

1. Variace a permutace.

Na začátku 1. třídy jsme podrobně mluvili o čítání předmětů nějakého souboru. V tomto oddíle pojednáváme stručně o čítání **skupin předmětů.** Je-li dán soubor skládající se z r libovolných předmětů a je-li n

přirozené číslo, potom utvoříme **skupinu *n*-té třídy** z daných r předmětů, jestliže si z nich jakýmkoli způsobem vybereme n *různých* předmětů, což je ovšem možné pouze tehdy, jestliže $n \leq r$, neboť z r předmětů nelze vybrat více než r různých předmětů. Přitom můžeme vybírané předměty volit v určitém pořádku a všímat si tohoto pořádku; takové skupiny, u kterých záleží na pořádku vybraných předmětů, nazývají se **variace.** Ale také si můžeme myslit celou skupinu vybránu najednou a vůbec nepřihlížet k pořádku vybíraných předmětů; takové skupiny se jmenují **kombinace.** V tomto článku si budeme všímat pouze variací; kombinacemi se budeme zabývat ve článku 2. Variace a kombinace jsou slova latinského původu; variace = změna, kombinace = spojování, skládání.

Budiž dán libovolný soubor r předmětů; jednotlivé předměty souboru můžeme označit libovolnými značkami; nejpohodlnější jsou značky

$$(1);\ (2);\ (3);\ \ldots;\ (r). \tag{1}$$

Každý jednotlivý předmět tvoří sám o sobě variaci první třídy; je tedy zřejmé, že počet variací první třídy souboru r předmětů je roven r. Na př. pro $r = 5$ máme 5 variací 1. třídy:

$$(1);\ (2);\ (3);\ (4);\ (5). \tag{2}$$

Při variacích 2. třídy máme postupně zvolit 2 různé prvky z daného souboru, při čemž si všímáme pořádku vybíraných předmětů. Je-li už určitým způsobem zvolen první předmět, potom druhý předmět variace 2. třídy je kterýkoli z daných r předmětů, vyjma už zvolený první předmět, t. j. je-li první předmět nějak zvolen, máme pro druhý předmět ještě $r—1$ možností; na př. pro $r = 5$ máme při určité volbě prvního předmětu ještě $r — 1 = 4$ možnosti pro volbu druhého předmětu, t. j. z každé z pěti variací (2) první třídy vzniknou 4 variace druhé třídy a celkový počet variací druhé třídy je pro $r = 5$ roven $5 \cdot 4 = 20$; všecky tyto variace jsou

$$\left.\begin{array}{llll}
(1), (2); & (1), (3); & (1), (4); & (1), (5); \\
(2), (1); & (2), (3); & (2), (4); & (2), (5); \\
(3), (1); & (3), (2); & (3), (4); & (3), (5); \\
(4), (1); & (4), (2); & (4), (3); & (4). (5); \\
(5), (1); & (5), (2); & (5), (3); & (5)\ (4).
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Obecně máme pro každé $r > 1$ celkem $r(r — 1)$ variací 2. třídy r předmětů.

Stejně jako jsme z každé variace 1. třídy utvořili určitý počet (obecně $r-1$; tedy 4 pro $r=5$) variací druhé třídy, utvoříme z každé variace 2. třídy určitý počet variací třetí třídy. Při variaci 2. třídy jsme už zvolili dva z daných r předmětů; abychom utvořili variaci 3. třídy, musíme k oběma zvoleným předmětům přidat třetí předmět, který se musí lišit od obou předmětů již zvolených, takže v každém případě máme pro třetí předmět volbu z $r-2$ ještě nevybraných předmětů, t. j. z každé variace 2. třídy vznikne přidáním třetího předmětu $r-2$ variací 3. třídy. Počet všech variací 3. třídy tedy vznikne, jestliže počet všech variací 2. třídy znásobíme číslem $r-2$. Pro $r=5$ jsme měli celkem 20 variací 2. třídy; z každé z nich dostaneme 3 variace 3. třídy, na př. z variace 2. třídy (4), (2) dostaneme variace 3. třídy.

$$(4), (2), (1);\ (4), (2), (3);\ (4), (2), (5);$$

celkový počet variací 3. třídy 5 předmětů je tedy $3 \cdot 20$, t. j. 60.

Počet variací n-té třídy r předmětů označme $V_n(r)$. Je zřejmé, že

$$V_n(r) = 0,\ \text{jestliže}\ n > r, \tag{4}$$

neboť z r předmětů nemůžeme vybrat vůbec žádnou skupinu více než r předmětů. Již jsme si všimli, že

$$V_1(r) = r, \tag{5}$$
$$V_2(r) = r(r-1); \tag{6}$$

(6) platí i pro $r=1$. Dále platí rekurentní vzorec

$$V_{n+1}(r) = (r-n)V_n(r). \tag{7}$$

D ů k a z vzorce (7). Jestliže $n > r$, je také $n+1 > r$ a tedy podle (4) $V_n(r)=0$, $V_{n+1}(r)=0$, takže v tomto případě (7) platí.

Jestliže $n=r$, je $V_{n+1}(r)=0$, ale také $r-n=0$, takže i v tomto případě platí (7). Budiž posléze $n<r$. Z každé variace n-té třídy dostaneme variaci $(n+1)$-ní třídy přidáním takového z n předmětů, který ještě nebyl vybrán do variace n-té třídy. Takových předmětů je $r-n$, a proto z každé variace n-té třídy vznikne celkem $r-n$ variací $(n+1)$-ní třídy, z čehož plyne (7).

Počet variací n-té třídy r předmětů je roven součinu n činitelů, z nichž první je roven r a každý následující je o jedničku menší než předcházející. (To platí i pro $n=1$, jestliže součinem o jediném činiteli rovném r rozumíme číslo r.) Dříve než si tuto větu dokážeme, vyslovme si ji vzorcem. Za tím účelem uvažme, že činitelé našeho součinu tvoří aritmetickou posloupnost s prvním členem r a s diferencí rovnou -1, takže podle vzorce (3) článku 2 v kapitole I. r-tý (poslední) činitel je roven $r-(n-1)$ neboli $r-n+1$, takže věta je vyjádřena vzorcem

$$V_n(r) = r(r-1)\dots(r-n+1), \tag{8}$$

který pro $n = 1$ znamená (5), pro $n = 2$ znamená (6). Pro $n = 1$ víme, že vzorec je správný. Abychom jej dokázali matematickou indukcí, stačí dokázati, že jestliže pro nějaké n platí vzorec (8), potom platí také vzorec, který má nalevo $n + 1$ místo n, a napravo má o jednoho činitele více, při čemž tento nový činitel je o jedničku menší než $r - n + 1$, neboli nový činitel je roven $r - n$. To je však zřejmé podle (7).

Pozoruhodný zvláštní případ variací máme pro $r = n$. Zde máme z n různých předmětů postupně vybrat n různých předmětů, všímajíce si pořádku vybíraných předmětů. V tomto případě vybereme postupně všecky dané předměty v nějakém souboru, t. j. v daném případě variace znamená prostě jakékoli uspořádání všech daných předmětů. Místo slova variace se v tomto případě obyčejně užívá slova **permutace**; je to zase slovo latinského původu, které znamená přeměňování. Podle obecné věty o počtu variací počet všech permutací n předmětů je roven $n!$, při čemž $n!$ (čteme n faktoriálně, z latinského názvu faktor slova činitel) znamená součin všech přirozených čísel od jedničky až po n včetně, tedy

$$1! = 1;\ 2! = 2;\ 3! = 6;\ 4! = 24;\ 5! = 120 \text{ atd.}$$

Je tedy pro každé přirozené číslo n:

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! \tag{9}$$

Je účelné položiti

$$0! = 1. \tag{10}$$

Vzorec (9) platí potom také pro $n = 0$. Pro jiná čísla n než přirozená čísla a nulu značku $n!$ nedefinujeme.

Pomocí faktoriálů můžeme vyjádřit počet variací $V_n(r)$ také pro $n < r$. Potom je $r - n$ přirozené číslo, a jestliže obě strany vzorce (8) znásobíme číslem $(r-n)!$, dostaneme $(r-n)!\,V_n(r) = r!$, takže

$$V_n(r) = \frac{r!}{(r-n)!} \tag{11}$$

pro $n < r$. Podle (10) platí (11) také pro $n = r$. Pro $n > r$ je v (11) levá strana rovna nule a pravá není definována.

Cvičení.

138. Dokažte, že r předmětů lze umístiti na n míst (předpokládejte, že $r > n$, takže $r - n$ předmětů zůstane neumístěných) právě tolikrát, kolikrát lze umístiti n předmětů na r míst (při čemž $r - n$ míst zůstane volných).

139. Kolik různých (jedno až pěticiferných) přirozených čísel lze napsati číslicemi 0, 1, 2, 3, 4, nemá-li se v žádném čísle žádná číslice opakovati?

140. V rovině je dáno n bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Kolik je jimi určeno různých uzavřených lomených čar, jejichž vrcholy jsou ve všech daných bodech? ($n \geqq 3$.)

141. Zvětší-li se počet předmětů o dva, zvětší se počet permutací dvanáctkrát. Kolik je předmětů?

142. Dokažte, že a) $n[n! + (n-1)!] = (n+1)!$; b) $n! + n^2(n-1)! = (n+1)!$; c) $(n+1)! - n! = n \cdot n!$.

143. Vypočtěte: a) $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n-1)!}$; b) $\dfrac{(n+2)!}{n!} - 2 \cdot \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!}$.

144. Značí-li $V_n(r)$ počet variací n-té třídy r předmětů, dokažte, že platí rekurentní vzorce: a) $V_n(r) = r \cdot V_{n-1}(r-1)$; b) $V_n(r+1) = V_n(r) + n \cdot V_{n-1}(r)$. — [Návod: a) Počítejte, kolik variací má určitý pevně zvolený předmět na prvém místě. b) Počítejte, o kolik se zvětší počet variací, přidáme-li k r předmětům ještě další předmět.]

145. Dokažte, že a) $V_n(r) = V_m(r) \cdot V_{n-m}(r-m)$;
b) $V_n(r) = V_m(r-n+m) \cdot V_{n-m}(r)$.

[Návod: a) Počítejte, kolik variací má m určitých pevně zvolených předmětů v určitém pevně zvoleném pořadí na prvních m místech. b) Počítejte, kolik variací vznikné, když k určité pevně zvolené variaci $(n-m)$-té třídy přidáme dalších m předmětů.]

146. Značí-li $P(r)$ počet permutací r předmětů, dokažte, že platí rekurentní vzorec $P(r+1) = (r+1) \cdot P(r)$. Odvoďte odtud (matematickou indukcí), že $P(r) = r!$.

147. Je-li mezi r předměty k předmětů stejných ($k \leqq r$), lze z nich utvořiti $\dfrac{r!}{k!}$ permutací; je-li mimo to ještě dalších h předmětů stejných ($k + h \leqq r$), ale různých od předcházejících k předmětů, lze z nich utvořiti $\dfrac{r!}{k!h!}$ permutací. Dokažte.

148. Tvoříme-li z r předmětů skupiny po n předmětech, ale tak, že se každý předmět může v každé skupině libovolně mnohokrát opakovati, a přihlížíme-li při tom k pořádku předmětů, vznikají t. zv. variace s opakováním. Jejich počet označme $V'_n(r)$. Dokažte, že platí rekurentní vzorec $V'_n(r) = r \cdot V'_{n-1}(r)$. Odtud odvoďte (matematickou indukcí), že $V'_n(r) = r^n$.

149. Kolik čtyřciferných čísel lze sestaviti z číslic 0, 1, 2?

150. Kolik různých vrhů možno učiniti a) dvěma, b) třemi kostkami?

151. Každá značka slepeckého písma se skládá z jednoho až šesti hmatatelných bodů, které se sestavují nejvýše ve dva sloupce, z nichž v každém je nejvýše po třech bodech. Kolik je různých možných značek?

152. Kolik značek je možno utvořiti, sestavujeme-li body a čárky ve skupiny po 1 až n prvcích? Propočtěte pro $n = 4$.

2. Kombinace.

Z článku 1 víme, že utvořit z r předmětů kombinaci n-té třídy znamená z daných r předmětů vybrat nějakým způsobem n předmětů, při čemž nezáleží na pořádku vybíraných předmětů. Počet všech kombinací n-té třídy r předmětů je zvykem značit

$$\binom{r}{n}, \tag{1}$$

což čteme r nad n. Čísla (1) se jmenují kombinační čísla; z důvodu, který poznáme v článku 3, jmenují se také binomické koeficienty.

Pro $n = 1$ není rozdílu mezi kombinacemi a variacemi; jest

$$\binom{r}{1} = r \tag{2}$$

pro každé přirozené číslo r. Zřejmě

$$\binom{r}{n} = 0 \text{ pro } n > r; \tag{3}$$

rovněž tak je zřejmé, že

$$\binom{r}{r} = 1 \tag{4}$$

pro každé přirozené číslo r.

Jestliže $1 < n \leq r$, je počet kombinací menší než počet variací; abychom dostali všecky kombinace n-té třídy předmětů označených

$$(1), (2), (3), \ldots, (r), \tag{5}$$

stačí napsat všecky takové variace n-té třídy týchž předmětů, v kterých vybírané předměty jdou za sebou na př. při vzestupném uspořádání příslušných čísel. Na př. pro $r = 5$ všecky kombinace druhé třídy jsou:

(1), (2); (1), (3); (1), (4); (1), (5);
(2), (3); (2), (4); (2), (5);
(3), (4); (3), (5);
(4), (5);

celkem je jich 10. Kombinace třetí třídy týchž předmětů jsou:

(1), (2), (3); (1), (2), (4); (1), (2), (5);
(1), (3), (4); (1), (3), (5); (1), (4), (5);
(2), (3), (4), (2), (3), (5);
(2), (4), (5); (3), (4), (5);

je jich zase deset.

Z každé kombinace r předmětů dostaneme všecky ty variace, jež obsahují právě předměty obsažené v dané kombinaci, jestliže uspořádáme předměty obsažené v této kombinaci všemi možnými způsoby. Na př. z kombinace (2), (3), (5) dostaneme celkem 6 variací:

(2), (3), (5); (2), (5), (3);
(3), (2), (5); (3), (5), (2);
(5), (2), (3); (5), (3), (2).

Obecně z každé kombinace n-té třídy r prvků vznikne celkem $n!$ variací téže třídy týchž prvků, takže počet $V_n(r)$ všech variací je roven součinu čísla $n!$ s počtem $\binom{r}{n}$ všech kombinací, t. j.

$$V_n(r) = n! \binom{r}{n}.$$

Podle vzorce (8) článku 1 je tedy

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}, \tag{6}$$

kde v čitateli je součin n postupně o jedničku se zmenšujících činitelů. Pro $n > r$, jsou obě strany v (6) rovny nule; viz (3); pro $n \leq r$ můžeme podle vzorce (11) článku 1 také psáti

$$\binom{r}{n} = \frac{r!}{n!(r-n)!}. \tag{7}$$

Je-li přirozené číslo n menší než přirozené číslo r, je také $r - n$ přirozené číslo menší než r; ježto

$$r - (r - n) = n,$$

plyne ze (7), že

$$\binom{r}{n} = \binom{r}{r-n}. \tag{8}$$

O správnosti vzorce (8) se můžeme snadno přesvědčit bez jakéhokoli počítání, jestliže si uvědomíme význam obou stran vzorce (8). Mysleme si napsány všecky kombinace n-té třídy předmětů (5) vedle sebe do řádku. Pod každou napsanou kombinaci můžeme napsati do druhého řádku právě ty z předmětů (5), které *se nevyskytují* v kombinaci napsané v řádku prvním. Potom máme v druhém řádku zapsány všecky kombinace $(r - n)$-té třídy předmětů (5) a vidíme, že počet kombinací $(r - n)$-té třídy je roven počtu kombinací n-té třídy, což je právě vyjádřeno vzorcem (8).

Význam značky $\binom{r}{n}$ jsme definovali pro *přirozená čísla* r, n; je-li r přirozené číslo, je účelné definovati také

$$\binom{r}{0} = 1; \tag{9}$$

ježto $0! = 1$, je to v souhlase se vzorcem (7). Vzorec (8) odvozený za předpokladu, že $0 < n < r$, platí podle (4) a (9) také pro $n = 0$ a pro $n = r$.

Je-li však $r = 0$ a n přirozené číslo, definujeme

$$\binom{0}{n} = 0 \tag{3'}$$

a pro $r = 0$, $n = 0$ položíme ještě

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{9'}$$

opět v souhlase se vzorcem (7).

Vedle vzorce (8) platí o kombinačních číslech jiné vzorce, o jejichž správnosti se rovněž můžeme snadno přesvědčiti bez jakéhokoli počítání. Nejvýznamnější ze vzorců tohoto druhu je vzorec

$$\binom{r+1}{n+1} = \binom{r}{n} + \binom{r}{n+1} \tag{10}$$

platný pro libovolná přirozená čísla n, r, Je-li $n > r$, zní vzorec (10): $0 = 0 + 0$, což je správné. Je-li $n = r$, vzorec (10) podle (3) a (4) říká, že $1 = 1 + 0$, což je také správné. V případě $n < r$ se o správnosti vzorce (10) přesvědčíme takto. Levá strana znamená počet kombinací $(n + 1)$-ní třídy $r + 1$ předmětů

$$(0), (1), \ldots, (r). \tag{11}$$

Tyto kombinace rozdělíme na dva druhy tak, že počet kombinací každého druhu je roven jednomu sčítanci napravo v (10), čímž bude vzorec (10) odvozen. V kombinacích $(n + 1)$-ní třídy prvního druhu se vyskytuje předmět (0); tyto kombinace dostaneme, jestliže připojíme předmět (0) ke každé kombinaci n-té třídy r předmětů (5); proto počet kombinací prvního druhu je roven počtu $\binom{r}{n}$ všech kombinací n-té třídy r předmětů, t. j. je roven prvnímu sčítanci napravo v (10). V kombinacích $(n + 1)$-ní třídy druhého druhu předmětů (11) se nevyskytuje předmět (0); jsou to tedy prostě kombinace $(n + 1)$-ní třídy předmětů (5) a jejich počet je roven $\binom{r}{n+1}$, t. j. je roven druhému sčítanci napravo v (10).

Vzorec (10) jsme odvodili pro přirozená čísla r, n. Je správný pro každé přirozené číslo r i pro $n = 0$, což plyne okamžitě ze (2) a (9).

Vzorec (10) je však podle (2), (3') a (9') správný i pro $r = 0$, $n = 0$.

Kombinační čísla můžeme sestavit v trojúhelníkovou tabulku, jejíž každý řádek odpovídá určitému r a obsahuje za sebou $r + 1$ číslo:

$$\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \ldots, \binom{r}{r}.$$

Prvních jedenáct řádků tabulky, která se nazývá **Pascalův trojúhelník**, jest:

$$\begin{array}{l ccccccccccccccccccccc}
r = 0 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
r = 1 & & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
r = 2 & & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
r = 3 & & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
r = 4 & & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & \\
r = 5 & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
r = 6 & & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
r = 7 & & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & \\
r = 8 & & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & \\
r = 9 & & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & \\
r = 10 & 1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1
\end{array}$$

Podle (4) a (9) každý řádek Pascalova trojúhelníka začíná a končí číslem 1. Podle (8) každý řádek zůstane nezměněn, napíšeme-li jeho čísla v obráceném pořádku. Posléze podle (10) můžeme z čísel r-tého řádku vypočísti čísla $(r + 1)$-ního řádku; až na jedničky na počátku a na konci dostaneme každé číslo $(r + 1)$-ního řádku sečtením obou šikmo nad ním stojících čísel r-tého řádku.

Pascalův trojúhelník má několik zajímavých vlastností, z nichž si uvedeme pouze jednu. Zvolme přirozená čísla n, r $(n < r)$ a v každém řádku, počínaje n-tým, který je označen číslem $n-1$, a konče $(r+1)$-ním, který je označen číslem r, vybereme n-té číslo řádku. Sečteme-li všecka vybraná čísla, dostaneme číslo, které je v Pascalově trojúhelníku šikmo vpravo pod posledním z nich.

Příklad $(n = 4,\ r = 9)$: $1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 = 210$.
Obecně

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{r}{n} = \binom{r+1}{n+1}. \tag{12}$$

Vzorec (12) dokážeme takto. Pravá strana znamená počet kombinací $(n + 1)$-ní třídy předmětů

$$(1), (2), \ldots, (r), (r + 1). \tag{13}$$

Tyto kombinace si rozdělíme na druhy tak, že každý sčítanec nalevo ve (12) bude znamenat počet kombinací jednoho z těch druhů; tím bude vzorec (12) odvozen. Rozdělení se provede podle *největšího* čísla obsaženého v kombinaci $(n + 1)$-ní třídy prvků (13). Toto největší číslo má tvar $k + 1$, kde $n \leq k \leq r$. Při každém k ostatní čísla příslušné kombinace $(n + 1)$-ní třídy zřejmě tvoří zcela libovolnou kombinaci n-té třídy předmětů

$$(1), (2), \ldots, (k),$$

a proto počet všech kombinací příslušného druhu je roven $\binom{k}{n}$. Vzorec (12) platí zřejmě i pro $n = 0$.

Cvičení.

153. a) V kolika bodech se protíná n přímek roviny, z nichž žádné dvě nejsou spolu rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem?
b) Kolik přímek je určeno n body v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce?

154. a) V kolika bodech se protíná n rovin prostoru, z nichž žádné dvě nejsou spolu rovnoběžné, žádné tři neprocházejí jednou přímkou ani nejsou s jednou přímkou rovnoběžné a žádné čtyři neprocházejí jedním bodem? b) Kolik rovin je určeno n body v prostoru, neleží-li žádné tři z nich v přímce a žádné čtyři v rovině?

155. Je dáno n přímek roviny, z nichž žádné dvě nejsou spolu rovnoběžné; k těchto přímek ($k < n$) se protíná v jednom bodě a jinak se žádné tři neprotínají v jednom bodě. Kolik průsečíků je těmi přímkami určeno?

156. Je dáno n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Jimi je určeno $\binom{n}{2}$ přímek. Mohou tyto přímky kromě daných bodů míti ještě další průsečíky? Mohou-li, kolik nejvýše?

157. Je dáno 5 bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce a žádné čtyři na kružnici. a) Kolik kružnic je jimi určeno? b) Kolik ze zmíněných kružnic prochází každým z daných bodů? c) Mohou tyto kružnice vedle daných bodů mít ještě jiné průsečíky a kolik nejvýše?

158. Výraz $(a + b)^r$, kde r je přirozené číslo, můžete vypočítati tak, že utvoříte součin $(a + b_1)(a + b_2)(a + b_3) \ldots (a + b_r)$ a do výsledku dosadíte $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_r = b$. Proveďte to. Jaký koeficient bude u členu, který obsahuje výraz $a^{r-n}b^n$ $(0 \leq n \leq r)$?

159. Dokažte, že a) $\binom{r-1}{n-1} = \frac{n}{r}\binom{r}{n}$; b) $\binom{r}{n} = \frac{r-n+1}{n}\binom{r}{n-1}$.

[Návod: a) Počítejte, kolik je kombinací n-té třídy, které obsahují určitý pevně zvolený předmět. b) Počítejte, kolik vznikne kombinací, když k určité pevně zvolené kombinaci $(n - 1)$-ní třídy přidáme další předmět.]

160. Dokažte, že

$$\text{a)}\ \binom{r-m}{n-m} = \frac{\binom{n}{m}}{\binom{r}{m}}\binom{r}{n}; \quad \text{b)}\ \binom{r}{n} = \frac{\binom{r-n+m}{m}}{\binom{n}{m}}\binom{r}{n-m}.$$

[Návod: a) Počítejte, kolik je kombinací n-té třídy, které obsahují určitou pevně zvolenou skupinu m předmětů. b) Počítejte, kolik vznikne kombinací, když k určité pevně zvolené kombinaci $(n - m)$-té třídy přidáme dalších m předmětů.]

161. a) Dokažte, že

$$\binom{r+s}{n} = \binom{r}{n}\binom{s}{0} + \binom{r}{n-1}\binom{s}{1} + \binom{r}{n-2}\binom{s}{2} + \cdots$$
$$\cdots + \binom{r}{1}\binom{s}{n-1} + \binom{r}{0}\binom{s}{n}.$$

b) Z předcházejícího odvoďte, že

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2.$$

162. Počet kombinací $(n + 1)$-ní třídy $r + 1$ předmětů (0), (1), (2), ..., (r) můžeme spočítati takto: Nejprve vezmeme všecky kombinace, které obsahují předmět (0), potom ty, které neobsahují předmět (0), ale obsahují předmět (1), dále ty, které neobsahují předměty (0) a (1), ale obsahují předmět (2) atd., až nakonec ty, které neobsahují předměty (0), (1), (2), ..., $(r - n - 1)$, ale obsahují předmět $(r - n)$. Proveďte to. $(r \geqq n.)$

163. Tvoříme-li z r předmětů skupiny po n předmětech, ale tak, že se každý předmět v každé skupině může vyskytovati libovolně mnohokrát, při čemž nepřihlížíme k pořádku předmětů, vznikají t. zv. kombinace s opakováním. Jejich počet označíme $C'_n(r)$. Dokažte, že platí rekurentní vzorec

$$\frac{n \cdot C'_n(r)}{r} = C'_{n-1}(r) + \frac{(n-1) \cdot C'_{n-1}(r)}{r}.$$

[Návod: Zkoumejte, kolikrát se vyskytne určitý předmět, třeba předmět (1), v schematu, v němž jsou vypsány *všechny* kombinace n-té třídy. Dostanete číslo $\frac{n \cdot C'_n(r)}{r}$. Vynecháme-li v každé kombinaci, která obsahuje předmět (1), tento předmět, zbudou všecky kombinace s opakováním $(n - 1)$-ní třídy, jichž je $C'_{n-1}(r)$ a v nichž se podle předcházejícího prvek (1) vyskytne ještě

$$\frac{(n-1) \cdot C'_{n-1}(r)}{r} \text{ krát.]}$$

164. Z rekurentního vzorce odvozeného v předcházejícím cvičení dokažte matematickou indukcí, že počet kombinací s opakováním n-té třídy r předmětů je $C'_n(r) = \binom{r+n-1}{n}$.

165. Kolik podstatně různých početních spojů obsahuje malá násobilka?

166. Kolik kamenů obsahuje hra domina, jestliže počet bodů na každém poli je roven některému z čísel od 0 do a) 7, b) 8, c) 9?

167. Názvem Apolloniovy úlohy se označují úlohy, v nichž se žádá sestrojiti kružnici, jež vyhovuje daným třem podmínkám, z nichž každá může zníti: kružnice prochází daným bodem nebo kružnice se dotýká dané přímky nebo kružnice se dotýká dané kružnice. Kolik je těch úloh?

168. Mnohočlen, t. j. výraz vzniklý sečtením několika členů tvaru $Ax^k y^l z^m \ldots$, se nazývá homogenním, když součet mocnitelů $k + l + m + \ldots = n$ je u všech členů týž; čísla $x, y, z, \ldots$ se jmenují proměnné a číslo n je stupeň homogenního mnohočlenu. Má-li mnohočlen největší možný počet členů, z nichž žádné dva nemají tytéž proměnné s týmiž mocniteli, nazveme jej úplným. Kolik členů má úplný homogenní mnohočlen n-tého stupně v r proměnných?

169. Není-li mnohočlen homogenní, je jeho stupeň roven největšímu ze součtů $k + l + m + \ldots$ a) Kolik členů má úplný nehomogenní mnohočlen n-tého stupně v r proměnných? b) Dokažte větu: úplný mnohočlen n-tého stupně v r proměnných má právě tolik členů jako úplný mnohočlen r-tého stupně v n proměnných.

170. Rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n$, kde n je přirozené číslo, má celkem $\binom{r+n-1}{n}$ řešení celými nezápornými čísly. Dokažte.

3. Binomická věta.

Binomická věta dává výraz pro r-tou mocninu $(a + b)^r$ dvojčlenu $a + b$, kde r je číslo přirozené. Pro nejnižších pět hodnot $r = 1, 2, 3, 4, 5$ mocnitele r zní binomická věta

$$\begin{aligned}
(a + b)^1 &= a + b,\\
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\
(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,\\
(a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.
\end{aligned}$$

Na pravé straně obecného vzorce pro $(a + b)^r$ je $r + 1$ členů, z nichž prvý obsahuje a^r (neboli a^rb^0), druhý obsahuje $a^{r-1}b$ (neboli $a^{r-1}b^1$), třetí obsahuje $a^{r-2}b^2$ atd.; mocnitel při a po každé klesne o jedničku a zároveň mocnitel při b vzroste o jedničku. *Koeficienty jednotlivých členů tvoří ten řádek Pascalova trojúhelníka, který je označen číslem r,* takže obecná binomická věta zní:

$$(a + b)^r = a^r + \binom{r}{1}a^{r-1}b + \binom{r}{2}a^{r-2}b^2 + \ldots + \binom{r}{r-1}ab^{r-1} + b^r. \tag{1}$$

Důkaz správnosti binomické věty můžeme provésti matematickou indukcí. Správnost věty pro $r = 1$ je zřejmá. Je tedy třeba pouze při libovolně daném přirozeném čísle r ze vzorce (1) odvoditi vzorec

$$(a + b)^{r+1} = a^{r+1} + \binom{r+1}{1}a^rb + \binom{r+1}{2}a^{r-1}b^2 + \ldots + \binom{r+1}{r}ab^r + b^{r+1}. \tag{2}$$

Abychom to provedli, uvažme, že $(a + b)^{r+1} = (a + b)^r(a + b)$ neboli $(a + b)^{r+1} = (a + b)^r \cdot a + (a + b)^r \cdot b$. Podle (1) tedy je $(a + b)^{r+1}$ rovné výrazu

$$a^{r+1} + \binom{r}{1}a^r b + \binom{r}{2}a^{r-1}b^2 + \ldots + \binom{r}{r-1}a^2 b^{r-1} + ab^r +$$
$$+ a^r b + \binom{r}{1}a^{r-1}b^2 + \binom{r}{2}a^{r-2}b^3 + \ldots + \binom{r}{r-1}ab^r + b^{r+1},$$

který je roven

$$a^{r+1} + \left[\binom{r}{1} + \binom{r}{0}\right]a^r b + \left[\binom{r}{2} + \binom{r}{1}\right]a^{r-1}b^2 + \ldots +$$
$$+ \left[\binom{r}{r-1} + \binom{r}{r-2}\right]a^2 b^{r-1} + \left[\binom{r}{r} + \binom{r}{r-1}\right]ab^r + b^{r+1},$$

což se podle vzorce (10) článku 2 rovná pravé straně ve (2).

Počítáme-li koeficienty v (1) postupně pro řadu hodnot r, je nejkratší užití vlastnosti Pascalova trojúhelníka založené na vzorci (10) článku 2. Máme-li však počítati $(a + b)^r$ pro jedinou hodnotu r, užijeme k výpočtu koeficientů $\binom{r}{n}$ vzorce (6) článku 2. Podle tohoto vzorce počítáme $\binom{r}{n}$ postupně pro $n = 1, 2, 3, \ldots$; přejdeme-li od n k $n + 1$, připojí se v tomto vzorci napravo v čitateli činitel $r - n$, ve jmenovateli činitel $n + 1$, takže máme rekurentní vzorec

$$\binom{r}{n+1} = \frac{r-n}{n+1}\binom{r}{n}, \tag{3}$$

který je k výpočtu nejvhodnější. Pomocí vzorce (3) však počítáme pouze polovinu koeficientů $\binom{r}{n}$; druhá polovina je určena vzorcem (8) čl. 2.

Již v článku 2 jsme řekli, že kombinační čísla $\binom{r}{n}$ se také jmenují binomické koeficienty; důvod je nyní jasný.

V druhé třídě jsme poznali vzorec

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na. \tag{4}$$

(V. učebnici pro 2. třídu kapitola III., článek 3, vzorec (10).) Na základě tohoto vzorce můžeme najít pomocí binomické věty pro každé přirozené číslo n vyjádření $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$ pomocí $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Na př. pro $n = 4$ jest podle binomické věty

$$\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha = \cos^4\alpha + 4i \cos^3\alpha \sin\alpha - 6\cos^2\alpha \sin^2\alpha - \\ - 4i \cos\alpha \sin^3\alpha + \sin^4\alpha.$$

Porovnáme-li na obou stranách nejprve reálné a potom imaginární části, dostaneme jednak

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha,$$

jednak

$$\sin 4\alpha = \sin\alpha(4\cos^3\alpha - 4\cos\alpha \sin^2\alpha).$$

Jak známo, je

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

tedy

$$\sin^4\alpha = (1 - \cos^2\alpha)^2 = 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha.$$

Proto z předcházejících vzorců dostaneme po snadné úpravě

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1,$$
$$\sin 4\alpha = \sin\alpha\,(8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha).$$

Podobně se dají odvodit vzorce tvaru

$$\cos n\alpha = T_n, \quad \sin n\alpha = \sin\alpha \cdot S_n,$$

kde T_n, S_n jsou výrazy obsahující pouze $\cos\alpha$.

V praxi se často užívá přibližných vzorců

$$(1 + x)^r \doteq 1 + rx \tag{5}$$

nebo

$$(1 + x)^r \doteq 1 + rx + \tfrac{1}{2} r(r - 1)x^2 \tag{6}$$

pro ten případ, že číslo $|x|$ je malé. Vzorec (5) je jednodušší nežli (6); vzorec (6) je přesnější nežli (5).

Příklad. Podle binomické věty je

$$1{,}03^5 = \left(1 + \frac{3}{10^2}\right)^5 = 1 + 5 \cdot \frac{3}{10^2} + 10 \cdot \frac{3^2}{10^4} + 10 \cdot \frac{3^3}{10^6} + 5 \cdot \frac{3^4}{10^8} + \\ + \frac{3^5}{10^{10}} = 1 + 0{,}15 + 0{,}009 + 0{,}00027 + 0{,}00000405 + 0{,}0000000243.$$

Sečteme-li pouze první dva členy, máme $1{,}03^5 \doteq 1{,}15$ s chybou menší než 10^{-2}; sečteme-li první tři členy, máme $1{,}03^5 \doteq 1{,}159$ s chybou menší než $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

Abychom odhadli chybu ve vzorcích (5), (6), uvažme nejprve, že z (1) plyne pro $a = 1$, $b = 1$:

$$1 + \binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \ldots + \binom{r}{r-1} + 1 = 2^r. \tag{7}$$

Přesná hodnota $(1 + x)^r$ je podle binomické věty

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \tfrac{1}{2}r(r-1)x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \ldots +$$

$$+ \binom{r}{r-1}x^{r-1} + x^r.$$

Ve vzorci (5) se tedy dopouštíme chyby

$$\binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \ldots + \binom{r}{r-1}x^{r-1} + x^r,$$

jejíž absolutní hodnota je podle vzorce (11) článku 2 v kapitole II. nejvýš rovna

$$\binom{r}{2}|x|^2 + \binom{r}{3}|x|^3 + \ldots + \binom{r}{r-1}|x|^{r-1} + |x|^r.$$

Jestliže $|x| < 1$, je

$$|x|^2 > |x|^3 > |x|^4 > \ldots,$$

takže absolutní hodnota chyby v (5) je menší než

$$|x|^2 \cdot \left[\binom{r}{2} + \binom{r}{3} + \ldots + \binom{r}{r-1} + 1\right],$$

a tedy podle (7) je menší než $2^r . |x|^2$. Podobně absolutní hodnota chyby ve vzorci (6) je pro $|x| < 1$ menší než $2^r \cdot |x|^3$.

Cvičení.

171. Určete a) absolutní člen ve výrazu $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{12}$; b) největší koeficient ve výrazu $(5a + 3b)^{20}$.

172. Vypočtěte na 5 desetinných míst: a) $1{,}025^{15}$; b) $0{,}99^{10}$.

173. S použitím binomické věty vyjádřete $\cos 7\alpha$, $\sin 7\alpha$.

174. Označíme-li $\cos\alpha + i\sin\alpha = S$, $\cos\alpha - i\sin\alpha = \bar{S}$, je $\cos\alpha = \frac{1}{2}(S + \bar{S})$. Odtud lze vyjádřiti mocninu výrazu $\cos\alpha$ jako lineární funkci kosinů násobků úhlu α. Proveďte to pro a) $\cos^4\alpha$; b) $\cos^5\alpha$; c) $\cos^r\alpha$, kde r je přirozené číslo.

175. Dokažte: a) $\binom{r}{0} + 2\binom{r}{1} + 2^2\binom{r}{2} + 2^3\binom{r}{3} + \ldots + 2^r\binom{r}{r} = 3^r$;

b) $\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r\binom{r}{r} = 0.$

176. Dokažte: a) $\binom{r}{0} + \binom{r}{2} + \binom{r}{4} + \binom{r}{6} + \ldots = 2^{r-1}$;

b) $\binom{r}{1} + \binom{r}{3} + \binom{r}{5} + \binom{r}{7} + \ldots = 2^{r-1}$.

177. Dokažte: a) $\binom{r}{0} - \binom{r}{2} + \binom{r}{4} - \binom{r}{6} + \ldots = 2^{\frac{r}{2}} \cdot \cos\frac{1}{4}r\pi$;

b) $\binom{r}{1} - \binom{r}{3} + \binom{r}{5} - \binom{r}{7} + \ldots = 2^{\frac{r}{2}} \cdot \sin\frac{1}{4}r\pi$.

[Návod: Počítejte výraz $(1 + i)^r$.]

178. Označíme-li $s_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, můžeme ze vzorce pro $(h + 1)^r$, který napíšeme pro $h = 1, 2, 3, \ldots, n$ a všecky takto vzniklé rovnice sečteme, odvoditi rekurentní vzorec

$$(n + 1)^r = 1 + \binom{r}{1}s_{r-1} + \binom{r}{2}s_{r-2} + \binom{r}{3}s_{r-3} + \ldots + \\ + \binom{r}{r-1}s_1 + n.$$

Proveďte a vypočtěte odtud a) s_1; b) s_2; c) s_3.

179. Vyhovuje-li číslo x podmínce $0 < \frac{1}{2}(n - 1)x < q < 1$, kde q je vhodné číslo, pak $(1 + x)^n < 1 + \dfrac{nx}{1 - q}$. Dokažte a odhadněte podle toho chybu, jíž se dopustíme, když místo $(1 + x)^n$ přibližně položíme $1 + nx$.

IV. Počet pravděpodobnosti.

1. Úvod.

Předmětem počtu pravděpodobnosti je *studium zákonitosti, jimž jsou podrobeny jevy závislé na náhodě.* Na první pohled se zdá, že zákonitost a náhodovost se navzájem zcela vylučují, ale ve skutečnosti tomu je naopak, a počet pravděpodobnosti se ukázal velmi důležitým ve fysice, v biologii, ve výrobě zemědělské i průmyslové a jinde. Počátky počtu pravděpodobnosti naproti tomu, jak se o tom zmíníme v dalším, jsou v matematickém rozboru pravidelností, jež byly konstatovány při kdysi oblíbených hrách.

Počneme jednoduchým příkladem, abychom si objasnili, jakou pravidelnost lze očekávati při jevech závislých na náhodě. Příkladem jevu závislého na náhodě, který si nejdříve rozebereme, je házení kostkou.

Házíme-li kostkou, vyjde při každém vrhu jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Které z těchto čísel vyjde při jediném vrhu, nedá se vůbec předvídat. Provedeme-li několik vrhů za sebou a zapisujeme-li čísla, která vycházejí, zdá se na první pohled, že jednotlivá čísla následují za sebou bez ladu a skladu. Je-li počet vrhů malý, nepozorujeme ani při podrobnějším studiu žádnou pravidelnost. Zcela jinak tomu však je, zkoumáme-li výsledky dlouhé řady vrhů. Tu pozorujeme mimo jiné, že všecka čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 vycházejí *přibližně* stejněkrát; stupeň přibližnosti je při nepříliš velkém počtu vrhů málo uspokojivý, ale při velmi značném počtu vrhů je pozoruhodně přesný. Všimněme si některého z možných výsledků vrhu, na př. zkoumejme ten **náhodný jev,** že padne šestka. Provedeme-li r vrhů, tu při každém z nich buďto padne šestka nebo nepadne. Počet n těch vrhů, při kterých zkoumaný jev nastane (při kterých padne šestka), nazveme **absolutní četnost** zkoumaného náhodného jevu. Důležitější je **relativní četnost.** To je zlomek $\frac{n}{r}$, který vyjadřuje poměr počtu případů, v kterých zkoumaný jev nastane, k celkovému počtu všech provedených pokusů (v našem případě vrhů kostkou). Kdyby se v celkovém počtu každé ze šesti čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vyskytovalo stejněkrát, byla by relativní četnost rovna $\frac{1}{6}$. Toto číslo $\frac{1}{6}$ nazveme **pravděpodobnost** zkoumaného náhodného jevu. Zkušenost ukazuje, že i při velmi velkém počtu pokusů pouze zcela výjimečně je relativní četnost přesně rovná pravděpodobnosti, že však i při velkém počtu pokusů je relativní četnost skoro vždy velmi přibližně rovná pravděpodobnosti. Odchylku relativní četnosti c od pravděpodobnosti p je účelné vyjádřiti v procentech pravděpodobnosti p; počet procent je roven

$$100 \cdot \frac{|c - p|}{p}. \tag{1}$$

Počtu pravděpodobnosti nejlépe porozumíme, provedeme-li si sami pokusy a zjišťujeme-li velikost odchylky relativní četnosti od pravděpodobnosti.

R. 1938 provedl jeden z autorů této učebnice 1 800 vrhů kostkou. V následující tabulce 1 jsou seskupeny do 20 římskými číslicemi označených skupin po 90 vrzích. Pro každou skupinu je v tabulce zaznamenána absolutní četnost jedničky, dvojky, . . ., šestky.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
1	11	21	13	23	17	8	14	22	19	19	20	15	18	16	16	18	21	20	17	12
2	23	11	15	13	20	11	20	14	13	18	16	11	20	17	18	14	15	13	16	14
3	10	11	20	9	11	13	10	16	9	10	17	20	13	8	12	19	10	12	14	10
4	12	14	13	15	11	14	13	14	15	13	11	17	10	16	12	9	12	16	10	22
5	16	18	18	15	11	21	18	7	16	11	14	11	10	18	17	17	18	11	15	17
6	18	15	11	15	20	23	15	17	18	19	12	16	19	15	15	13	14	18	18	15

Tabulka 1.

Tabulka 1 jasně prokazuje, že při 90 pokusech odchylky relativní četnosti od pravděpodobnosti jsou často ještě značné. Relativní četnosti rovné pravděpodobnosti by odpovídala absolutní četnost rovná číslu 15. V tabulce se však vyskytují také absolutní četnosti rovné 7 nebo 23, pro které procentní odchylka (1) je asi 53,3%, *tedy velmi značná. Tyto nejnepříznivější* případy jsou arci zcela řídké (ze 120 případů popsaných v tabulce 1 se vyskytuje absolutní četnost 7 pouze jednou, absolutní četnost 23 pouze třikrát). Ale i když v tabulce 1 zanedbáme 25% všech 120 případů, budou se ještě v tabulce 1 vyskytovat absolutní četnosti rovné číslům 11 a 19, pro které procentní odchylka (1) je asi 26,7%, tedy stále ještě značná.

	I	II	III	IV
1	85	82	85	88
2	82	76	82	72
3	61	58	70	65
4	65	69	66	69
5	78	73	70	78
6	79	92	77	78

Tabulka 2.

Větší pravidelnost se už jeví, jestliže provedených 1800 vrhů rozdělíme jen na čtyři skupiny po 450 vrzích, t. j. jestliže každých 5 předchozích malých skupin shrneme v jednu větší skupinu. Místo tabulky 1 máme nyní tabulku 2. Kdyby byly relativní četnosti rovny pravděpodobnosti, byly by absolutní četnosti zaznamenané v tabulce 2 vesměs rovné číslu 75. Tomu tak není; dokonce se číslo 75 v tabulce 2 vůbec nevyskytuje. Ale poměrné odchylky relativních četností od pravděpodobnosti jsou už menší než v předchozím případě. Dříve největší odchylka přesahovala 50%, nyní činí 22,7%. Velikost jednotlivých odchylek v tabulce 2 a počet případů, kolikrát která odchylka nastane, uvádí tabulka 3; v prvním řádku jsou tu uvedeny jednotlivé odchylky v procentech, v druhém počet případů, kolikrát se která odchylka vyskytuje v tabulce 2.

22,7	18,7	17,3	13,3	12	9,3	8	6,7	5.3	4	2,7	1,3
2	1	1	4	1	3	2	2	1	4	2	1

Tabulka 3.

Shrneme-li posléze všech 1800 pokusů, dostáváme pro procentní odchylky relativní četnosti od pravděpodobnosti pro čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 tyto hodnoty: 13,3%; 4%; 15,3%; 10,3%; 0,3%; 8,7%. Abychom dostali podstatně menší procentní odchylky, musili bychom počet pokusů značně zvětšit. Dá se dokázati, že při stonásobném zvětšení počtu pokusů se procentní odchylky asi desetkrát zmenší.

Cvičení.

180. Bylo provedeno 257 pokusů, při nichž nastal jev o pravděpodobnosti $\frac{1}{3}$ celkem 92krát. Vypočtěte relativní četnost a její procentní odchylku od pravděpodobnosti.

181. Pokus o pravděpodobnosti 0,426 byl proveden celkem stokrát, při čemž procentní odchylka relativní četnosti od pravděpodobnosti činila 12,9 %. Kolikrát se pokus zdařil?

182. Jev, jehož pravděpodobnost je $\frac{2}{7}$, má býti opakován stokrát. V kolika asi případech jev nastane, očekáváme-li, že procentní odchylka relativní četnosti od pravděpodobnosti nepřesáhne 10 %?

183. Pravděpodobnost, že nějaký děj nastane, je 0,328. Kolikrát asi musíme děj opakovati, chceme-li, aby nastal stokrát, a očekáváme-li, že procentní odchylka relativní četnosti od pravděpodobnosti nepřesáhne 10 %?

184. Určitý děj byl opakován celkem tisíckrát, při čemž měl kladný výsledek celkem v 346 případech. Co lze říci o pravděpodobnosti toho děje, nečiní-li procentní odchylka relativní četnosti od pravděpodobnosti více než 12 %?

2. Výpočet pravděpodobností v jednoduchých případech.

Nejjednodušší partie počtu pravděpodobností, na kterou se v podstatě omezíme, dá se popsati takto. Provádíme opětovně nějaký pokus, jehož výsledek závisí na náhodě. Je vcelku možno k různých výsledků pokusu a máme důvody k předpokladu, že při provádění velmi velké řady pokusů každý z možných k případů se uskuteční stejněkrát. Tento předpoklad vyjadřujeme slovy, že **všecky možné případy jsou stejně pravdě-**

podobné. Nyní si všímáme určitého **náhodného jevu,** který v některých z k možných případů nastane, v jiných nenastane. Ty případy, v kterých zkoumaný jev nastane, nazveme **příznivé případy.** Je-li h počet příznivých případů a je-li, jak už řečeno, k počet všech možných případů, nazýváme číslo

$$p = \frac{h}{k}$$

pravděpodobností zkoumaného náhodného jevu. Očekáváme potom, že při velkém počtu provedených pokusů relativní četnost zkoumaného jevu bude přibližně rovna p; v tom je právě význam čísla p. Že toto očekávání je oprávněné, to bylo historicky prokázáno po prvé na hazardních hrách. Výpočet čísla p není vždy zcela jednoduchý a t. zv. kombinatorika, předmět předcházejícího oddílu této učebnice, vznikla z potřeb počtu pravděpodobností.

Jestliže na př. házíme kostkou, máme 6 možných výsledků pokusu, t. j. máme $k = 6$. Náhodný jev, který zkoumáme, může býti v tom, že padne určité z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, na př. že padne šestka. Ze 6 možných případů je jediný příznivý, t. j. máme $h = 1$ a pravděpodobnost je rovna $\frac{1}{6}$. Můžeme však při házení kostkou zkoumat také jiné jevy. Jako příklad vezměme ten náhodný jev, že při házení kostkou vyjde číslo liché; zde je $k = 6$, $h = 3$ a tedy pravděpodobnost $p = \frac{1}{2}$. Smysl rovnice $p = \frac{1}{2}$ je v tom, že při velkém počtu vrhů asi v polovině všech případů vyjde liché číslo. V příkladě znázorněném v tabulce 1 článku 1 v jednotlivých 20 skupinách I až XX máme tyto absolutní četnosti zkoumaného jevu ve 2. řádku následující tabulky; ve 3. řádku téže tabulky jsou udány v procentech odchylky relativní četnosti od pravděpodobnosti $p = \frac{1}{2}$:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
37	50	51	47	39	42	42	45	44	40	51	46	41	42	45	54	49	43	46	39
17,8	11,1	13,3	4,4	13,3	6,7	6,7	0	2,2	11,1	13,3	2,2	8,9	6,7	0	20	8,9	4,4	2,2	13,3

Tabulka 4.

Pozorujeme, že odchylky jsou poněkud menší než odchylky zkoumané v článku 1 pro výskyt určitého z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6; dá se dokázati, že při velkém počtu pokusů odchylky relativních četností od pravděpodobnosti jsou pro $p = \frac{1}{2}$ menší než v kterémkoli jiném případě. Jestliže podobně jako v tabulce 2 shrneme 1800 pokusů jen v čtyři skupiny po 450 pokusech, dostaneme místo tabulky 4 tabulku 5. Odchylky v tabulce 5 opět jsou menší než ty, které máme zaznamenány v tabulce 3.

Házíme-li *dvěma kostkami*, můžeme výsledek každého pokusu zaznamenati ve tvaru (a, b), kde a znamená číslo, které padne na první kostce, b znamená číslo, které padne na druhé kostce. Číslo a může nabýti kterékoli ze 6 hodnot 1, 2, 3, 4, 5, 6; totéž platí o čísle b. Máme tedy celkem $k = 6 \cdot 6 = 36$ možných případů, které právem považujeme za stejně pravděpodobné. Zkoumejme ten náhodný jev, že součet $a + b$ nabude určité hodnoty s. Číslo s musí býti aspoň rovné $1 + 1 = 2$ a nejvýš je rovné $6 + 6 = 12$. Přichází tedy v úvahu 11 hodnot čísla s; pro každou z těchto 11 hodnot je v následující tabulce uvedeno v prvním řádku číslo s, v druhém příslušný počet h možných případů, v třetím na setiny zaokrouhlená pravděpodobnost $p = h : 36$.

I	II	III	IV
224	213	225	231
0,4	5,3	0	2,7

Tabulka 5.

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
p	0,03	0,06	0,08	0,11	0,14	0,17	0,14	0,11	0,08	0,06	0,03

Tabulka 6.

Podobně při házení *třemi kostkami* můžeme výsledek každého pokusu zapsati ve tvaru (a, b, c), kde a znamená číslo, které padne na první kostce, b číslo, které padne na druhé kostce, c číslo, které padne na třetí kostce. Všech možných případů je $k = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ a všecky tyto případy jsou stejně pravděpodobné. Opět zkoumejme ten náhodný jev, který je v tom, že součet $a + b + c$ nabude určité hodnoty s, která musí býti aspoň rovna $1 + 1 + 1 = 3$ a nanejvýš je rovna $6 + 6 + 6 = 18$. Abychom při daném s určili počet h všech příznivých případů, sestavíme si všecky rozklady čísla s na tři sčítance, při čemž každý sčítanec je roven jednomu z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Zkusmo snadno najdeme:

$3 = 1 + 1 + 1;$

$4 = 2 + 1 + 1;$

$5 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1;$

$6 = 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2;$

$7 = 5 + 1 + 1 = 4 + 2 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 + 2 + 2;$

$8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2;$

$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3;$

$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3;$

$11 = 6 + 4 + 1 = 6 + 3 + 2 = 5 + 5 + 1 = 5 + 4 + 2 = 5 + 3 + 3 = 4 + 4 + 3;$

$12 = 6 + 5 + 1 = 6 + 4 + 2 = 6 + 3 + 3 = 5 + 5 + 2 = 5 + 4 + 3 = 4 + 4 + 4;$

$13 = 6 + 6 + 1 = 6 + 5 + 2 = 6 + 4 + 3 = 5 + 5 + 3 = 5 + 4 + 4;$

$14 = 6 + 6 + 2 = 6 + 5 + 3 = 6 + 4 + 4 = 5 + 5 + 4;$

$15 = 6 + 6 + 3 = 6 + 5 + 4 = 5 + 5 + 5;$

$16 = 6 + 6 + 4 = 6 + 5 + 5;$

$17 = 6 + 6 + 5;$

$18 = 6 + 6 + 6.$

Při tom ovšem na př. součet $2 + 1 + 1$ vzniká ze tří případů (2, 1, 1); (1, 2, 1); (1, 1, 2); součet $3 + 2 + 1$ vzniká ze šesti případů atd. V následující tabulce je udán jednak počet h příznivých případů, jednak na tisíciny zaokrouhlená pravděpodobnost $p = h : 216$. V posledním řádku čísla p^* znamenají na tisíciny zaokrouhlené relativní četnosti při 1000 vrzích třemi kostkami provedených jedním ze spisovatelů této učebnice.

s	3	4	5	6	7	8	9	10
h	1	3	6	10	15	21	25	27
p	0,005	0,014	0,028	0,046	0,069	0,097	0,116	0,125
p^*	0,009	0,019	0,028	0,054	0,673	0,116	0,101	0,109
s	11	12	13	14	15	16	17	18
h	27	25	21	15	10	6	3	1
p	0,125	0,116	0,097	0,069	0,046	0,028	0,014	0,005
p^*	0,148	0,114	0,096	0,049	0,036	0,029	0,013	0,006

Tabulka 7.

Čísla h v tabulce 6 i v tabulce 7 (a tudíž také pravděpodobnosti p) mají tu zajímavou vlastnost, že zůstanou beze změny, napíšeme-li je v obráceném pořádku. Proč tomu tak je, můžeme si snadno vysvětliti takto: Na hrací kostce máme proti číslu 1 číslo 6, proti číslu 2 číslo 5, proti číslu 3 číslo 4; obecně součet dvou protějších čísel je vždy roven 7. Jestliže na př. na třech kostkách padnou čísla a, b, c se součtem s, máme na protějších stěnách čísla a', b', c' se součtem s', při čemž $a + a' = 7$, $b + b' = 7$, $c + c' = 7$ a proto $s + s' = 21$. Počet příznivých případů pro součet s je tudíž týž jako pro součet s'.Velmi oblíbená byla kdysi hra passedix (francouzsky; znamená překročení desítky). Sázelo se na to, že při vrhu třemi kostkami vyjde součet $s = a + b + c$ větší než 10. Je to t. zv. *spravedlivá hra*; to znamená, že pravděpodobnost výhry je $\frac{1}{2}$ neboli, že počet případů příznivých je roven počtu případů nepříznivých. Spravedlivost plyne ze souměrnosti tabulky 7, o níž jsme právě mluvili.

Cvičení.

185. Která je pravděpodobnost, že při házení kostkou vyjde číslo a) dělitelné třemi, b) nedělitelné třemi?

186. Která je pravděpodobnost, že při házení dvěma kostkami vyjde součet a) dělitelný třemi, b) nedělitelný třemi?

187. Která je pravděpodobnost, že při házení třemi kostkami vyjde součet a) dělitelný čtyřmi, b) nedělitelný čtyřmi?

188. Která je pravděpodobnost, že namátkou napsané n-ciferné číslo celé je a) sudé, b) liché?

189. Která je pravděpodobnost, že namátkou napsané dvojciferné číslo celé je a) dělitelné třemi, b) dělitelné čtyřmi, c) dělitelné sedmi?

190. Která je pravděpodobnost, že pěticiferné číslo namátkou sestavené z číslic 1, 2, 3, 4, 5 tak, že každá se v něm vyskytuje právě jednou, bude dělitelné čtyřmi?

191. Při házení třemi kostkami může každý ze součtů 11 a 12 padnout celkem šesti způsoby. Přesto je pravděpodobnost každého z těchto dvou součtů jiná. Vysvětlete proč.

192. Která je pravděpodobnost, že a) při vrhu mincí padne líc, b) při vrhu dvěma mincemi padne na obou mincích líc, c) při vrhu třemi mincemi padne na dvou mincích líc?

193. Která je pravděpodobnost, že při vrhání dvěma kostkami padne a) právě jedna šestka, b) aspoň jedna šestka, c) nejvýše jedna šestka, d) žádná šestka, e) obě šestky?

194. Která je pravděpodobnost, že při vrhu třemi mincemi padne a) právě jeden líc, b) aspoň jeden líc, c) nejvýše jeden líc, d) žádný líc?

195. V sáčku je 12 kuliček červených a 8 modrých. Která je pravděpodobnost, že z pěti vytažených kuliček jsou a) 3 červené a 2 modré, b) 2 červené a 3 modré, c) všechny červené, d) všechny modré?

196. Z 32 žáků začínají jména 4 žáků písmenem R. Jaká je pravděpodobnost, že ze 4 vyvolaných žáků budou a) jeden žák, b) dva žáci, c) tři žáci d) čtyři žáci, e) žádný žák, jehož jméno začíná písmenem R?

197. Ze hry 32 karet bylo rozdáno 5 karet. Jaká je pravděpodobnost, že jsou mezi nimi a) čtyři esa, b) tři esa, c) dvě esa, d) jedno eso, e) žádné eso?

198. Je-li předem zaručeno, že nějaký jev nastane (jev je jistý), je jeho pravděpodobnost 1, je-li zaručeno, že jev nenastane (jev je nemožný), je jeho pravděpodobnost 0. Dokažte.

199. Je-li počet příznivých případů roven počtu nepříznivých případů, má jev pravděpodobnost $\frac{1}{2}$. Dokažte.

200. Je-li p pravděpodobnost, že nějaký jev nastane, je pravděpodobnost, že tento jev nenastane, rovna $1 - p$. Dokažte.

3. Pravděpodobnost úhrnná a složená.

Výpočet pravděpodobnosti náhodného jevu se dá někdy usnadnit pomocí obecných vět, které si odvodíme v tomto článku. K těmto větám dospějeme, jestliže při jednom a témž druhu pokusů zkoumáme několik náhodných jevů současně. O dvou náhodných jevech J_1, J_2 říkáme, že se **navzájem vylučují**, jestliže je nemožné, aby při nějakém pokuse nastaly oba jevy J_1, J_2 současně. Potom platí následující **věta o úhrnné pravděpodobnosti:**

I. Jestliže náhodné jevy J_1, J_2, které se navzájem vylučují, mají pravděpodobnosti p_1, p_2, a jestliže náhodný jev J je v tom, že nastane jeden z obou jevů J_1, J_2, potom pravděpodobnost jevu J je rovna $p_1 + p_2$.

Důkaz. Je-li k počet všech případů možných a je-li h_1 počet případů příznivých pro jev J_1, h_2 počet případů příznivých pro jev J_2, jest

$$p_1 = \frac{h_1}{k},\ p_2 = \frac{h_2}{k}. \tag{1}$$

Případy příznivé pro jev J jsou jednak ty, které jsou příznivé pro jev J_1, jednak ty, které jsou příznivé pro jev J_2. Jelikož žádný případ nemůže býti zároveň příznivý i pro jev J_1 i pro jev J_2, je počet h případů příznivých pro jev J roven

$$h = h_1 + h_2. \tag{2}$$

Jev J má však pravděpodobnost

$$p = \frac{h}{k}. \tag{3}$$

Z (1), (2), (3) plyne $p = p_1 + p_2$, což jsme měli dokázati. Jestliže není pravda, že jevy J_1 a J_2 se navzájem vylučují, nemůže rovnice (2) platit, nýbrž platí zřejmě nerovnost $h < h_1 + h_2$, z níž plyne podle (1) a (3) nerovnost $p < p_1 + p_2$. Tedy:

II. Jestliže náhodné jevy J_1, J_2 mají pravděpodobnosti p_1, p_2 a jestliže náhodný jev J je v tom, že nastane aspoň jeden z obou jevů J_1, J_2, potom pro pravděpodobnost p jevu J platí nerovnost $p \leq p_1 + p_2$.

Je-li J_1 libovolný náhodný jev, nazveme **opačným jevem** ten jev J_2, který je v tom, že jev J_1 *nenastane*. Oba jevy J_1, J_2 se navzájem vylučují, takže podle I. pro jejich pravděpodobnosti p_1, p_2 platí $p_1 + p_2 = p$, kde p znamená pravděpodobnost toho jevu J, který je v tom, že nastane aspoň jeden z obou jevů J_1, J_2. Zřejmě však je ten **jev jistý**, jehož pravděpodobnost $p = 1$. Tedy zvláštním případem věty I. je následující věta III., v jejímž znění pro jednoduchost je vynechán index 1.

III. Je-li p pravděpodobnost náhodného jevu J, je pravděpodobnost opačného jevu rovna $1 - p$.

Místo dvou náhodných jevů J_1, J_2 můžeme vyjít od více než dvou a dostaneme touž cestou obecnější věty.

I'. Jestliže náhodné jevy $J_1, J_2, \ldots, J_n$, z nichž každé dva se navzájem vylučují, mají pravděpodobnosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$, a jestliže náhodný jev J je v tom, že nastane jeden z jevů $J_1, J_2, \ldots, J_n$, potom pravděpodobnost jevu J je rovna $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

II'. Jestliže náhodné jevy $J_1, J_2, \ldots, J_n$ mají pravděpodobnosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$, a jestliže náhodný jev J je v tom, že nastane aspoň jeden z jevů $J_1, J_2, \ldots, J_n$, potom pro pravděpodobnost p jevu J platí nerovnost $p \leq p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Nyní je třeba, abychom si vysvětlili pojem **podmíněné pravděpodobnosti.** Zkoumejme opět při témž druhu pokusů dva náhodné jevy J_1, J_2. Označme opět k počet všech případů možných, h_1 počet případů, v nichž nastane jev J_1, h_2 počet případů, v nichž nastane jev J_2, dále p_1, p_2 pravděpodobnosti obou jevů, takže

$$p_1 = \frac{h_1}{k}, \quad p_2 = \frac{h_2}{k}. \tag{1}$$

Označme ještě h_{12} nebo h_{21} počet těch případů, v kterých nastanou *oba jevy* J_1 i J_2. Nyní budeme definovati *podmíněnou pravděpodobnost jevu* J_2

za hypothesy J_1 tak, že odtrhneme všecky případy, v kterých nenastane jev J_1 a ponecháme pouze případy, v kterých nastane J_1. Počet všech možných případů bude tedy pouze h_1 a počet případů příznivých pro jev J_2 bude h_{12}, takže podmíněná pravděpodobnost $p_2(J_1)$ jevu J_2 za hypothesy J_1 bude rovna:

$$p_2(J_1) = \frac{h_{12}}{h_1}. \tag{4}$$

Podobně bude

$$p_1(J_2) = \frac{h_{12}}{h_2} \tag{5}$$

podmíněná pravděpodobnost jevu J_1 za hypothesy J_2. Na př. při házení kostkou nechť jev J_1 je v tom, že nepadne šestka, a jev J_2 nechť je v tom, že padne číslo sudé. Nepodmíněné pravděpodobnosti jsou $p_1 = \frac{5}{6}$, $p_2 = \frac{1}{2}$. Podmíněná pravděpodobnost jevu J_2 za hypothesy J_1 je $p_2(J_1) = \frac{2}{5}$; podmíněná pravděpodobnost jevu J_1 za hypothesy J_2 je $p_1(J_2) = \frac{2}{3}$.

Nyní snadno dokážeme následující **větu o složené pravděpodobnosti.**

IV. Jsou-li J_1, J_2 libovolné dva náhodné jevy a jestliže náhodný jev J_{12} je v tom, že nastanou oba jevy J_1, J_2 zároveň, je pravděpodobnost jevu J_{12} rovna součinu

$$p_1 \cdot p_2(J_1), \tag{6}$$

jehož první činitel je (nepodmíněná) pravděpodobnost jevu J_1 a druhý činitel je podmíněná pravděpodobnost jevu J_2 za hypothesy J_1.

Důkaz. Pravděpodobnost jevu J_{12} je rovna

$$\frac{h_{12}}{k} \text{ neboli } \frac{h_1}{k} \cdot \frac{h_{12}}{h_1},$$

což je podle (1) a (4) rovné výrazu (6).

Věta IV. se dá zobecnit na libovolný počet $J_1, J_2, \ldots, J_n$ náhodných jevů. Omezíme se na případ $n = 3$: Pravděpodobnost, aby nastaly všecky tři jevy J_1, J_2, J_3 zároveň, je rovna součinu

$$p_1 \cdot p_2(J_1) \cdot p_3(J_1, J_2), \tag{7}$$

kde $p_3(J_1, J_2)$ je podmíněná pravděpodobnost jevu J_3 za hypothesy, že nastanou oba jevy J_1, J_2, neboť jev, jehož pravděpodobňost hledáme, je v tom, že nastanou zároveň oba jevy J_{12} a J_3, kde J_{12} má týž význam jako ve větě IV. Tedy hledaná pravděpodobnost je rovna součinu $p_{12} \cdot p_3(J_1, J_2)$, kde p_{12} je pravděpodobnost jevu J_{12}, která je rovna výrazu (6). Z toho plyne (7).

Pravíme, že náhodný jev J_2 je **nezávislý** na náhodném jevu J_1, jestliže podmíněná pravděpodobnost jevu J_2 za hypothesy J_1 je rovna nepodmíněné pravděpodobnosti téhož jevu J_2. Jestliže k, h_1, h_2, h_{12} mají týž význam jako na str. 71, potom podle (1) a (4) nezávislost jevu J_2 na jevu J_1 je vyjádřena podmínkou

$$\frac{h_2}{k} = \frac{h_{12}}{h_1},$$

kterou můžeme napsati také ve tvaru

$$k \cdot h_{12} = h_1 \cdot h_2.$$

Z tohoto tvaru podmínky je patrné, že jestliže jev J_2 je nezávislý na jevu J_1, je také jev J_1 nezávislý na jevu J_2; říkáme také, že oba jevy J_1, J_2 jsou *na sobě nezávislé.*

Pro nezávislé jevy zní věta IV. jednoduše takto:

IV'. Jsou-li p_1, p_2 pravděpodobnosti dvou nezávislých jevů J_1, J_2, je pravděpodobnost, aby oba jevy J_1, J_2 nastaly zároveň, rovna součinu $p_1 p_2$.

S nezávislými jevy se setkáváme zejména při *opakovaných pokusech.* Buďtež při určitém druhu pokusů nějakým způsobem definovány náhodné jevy $J_1, J_2, J_3, \ldots$ a buďtež $p_1, p_2, p_3, \ldots$ jejich pravděpodobnosti. Mysleme si nyní proveden libovolný počet n pokusů a označme P_n pravděpodobnost toho, aby pro každé k od jedné až po n při k-tém pokusu nastal jev J_k. Zřejmě

$$P_1 = p_1. \tag{8}$$

Na druhé straně, provedeme-li ještě $(n + 1)$-ní pokus, je pravděpodobnost toho, aby při $(n + 1)$-ním pokusu nastal jev J_{n+1}, zřejmě nezávislá na výsledcích předcházejících n pokusů. Z toho soudíme podle věty IV'., že

$$P_{n+1} = P_n \cdot p_{n+1}. \tag{9}$$

Na základě (8) a (9) se snadno dokáže matematickou indukcí, že pro každé n je

$$P_n = p_1 p_2 \ldots p_n. \tag{10}$$

Zejména si všimněme toho případu, že všecky jevy $J_1, J_2, \ldots$ jsou totožné; potom z (10) plyne: Pravděpodobnost, aby v každém z provedených pokusů nastal jev J, jehož pravděpodobnost je p, je rovna p^n. Z toho lze odvoditi: Pravděpodobnost, aby při žádném z provedených n pokusů nenastal jev J, jehož pravděpodobnost je p, je rovná $(1 - p)^n$. Neboť to, že při *žádném* pokuse nenastane jev J, znamená totéž jako to, že při *každém* pokuse nastane jev opačný k jevu J, jehož pravděpodobnost je $1 - p$. Obecněji platí:

V. Budiž p pravděpodobnost náhodného jevu J. Budiž $0 \leq k \leq n$ (n přirozené číslo, k přirozené číslo nebo nula). Pravděpodobnost, aby při provedených n pokusech jev J nastal právě k-krát, je rovna $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Důkaz. Pro $k = n$ a pro $k = 0$ je věta již dokázána. Jev, jehož pravděpodobnost máme počítat, se rozpadá na $\binom{n}{k}$ částečných jevů odpovídajících $\binom{n}{k}$ kombinacím k-té třídy n pokusů; částečný jev je v tom, že jev J *nastane* pro každý pokus patřící do zvolené kombinace a zároveň *nenastane* pro žádný pokus nepatřící do zvolené kombinace. Pravděpodobnost každého částečného jevu je rovna součinu (10), v kterém k činitelů (patřících ke zvolené kombinaci) je rovno p, kdežto ostatní činitelé jsou rovni $1 - p$, takže pravděpodobnost částečného jevu je $p^k(1 - p)^{n-k}$. Všecky částečné jevy se navzájem vylučují a proto podle věty I'. hledaná pravděpodobnost je rovna součtu $\binom{n}{k}$ sčítanců vesměs rovných $p^k(1 - p)^{n-k}$, t. j. je rovna $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Cvičení.

201. Která je pravděpodobnost, že při vrhu dvěma kostkami padne součet 5 nebo 6?

202. Která je pravděpodobnost, že při vrhu třemi kostkami nepadne ani součet 10, ani 11?

203. Z 32 figur šachové hry bylo ztraceno 7 figur. Jaká je pravděpodobnost, že mezi ztracenými figurami a) není žádná věž, b) je aspoň jedna věž, c) je nejvýše jedna věž, d) jsou aspoň dvě věže?

204. V tombole je 100 losů a 10 výher. a) Mám 2 losy; jaká je pravděpodobnost, že vyhraji aspoň na jeden? b) Jak je tomu, mám-li 3 losy? c) Jakou bych měl pravděpodobnost, že vyhraji aspoň na jeden, kdybych měl 10 losů?

205. V sáčku je 8 kuliček modrých, 10 červených, 12 zelených. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnu-li odtud 3 kuličky, budou a) téže barvy, b) dvou barev, c) tří barev?

206. Jaká je pravděpodobnost, že při vrhu třemi kostkami padne součet dělitelný dvěma nebo třemi?

207. Je-li p_1 pravděpodobnost, že nastane jev J_1, p_2 pravděpodobnost, že nastane jev J_2, p_{12} pravděpodobnost, že nastanou oba jevy, pak pravděpodobnost p, že nastane jev J_1 nebo jev J_2, je rovna výrazu $p = p_1 + p_2 - p_{12}$. Dokažte.

208. Která je pravděpodobnost, že při dvou vrzích dvěma kostkami padne a) nejprve sudé a pak liché číslo, b) jednou sudé a jednou liché číslo?

209. Která je pravděpodobnost, že při házení kostkou padne a) při prvém vrhu číslo 6 a při druhém vrhu jiné číslo, b) jednou číslo 6 a jednou jiné číslo?

210. Jaká je pravděpodobnost, že při dvou vrzích kostkou padne a) aspoň jedna šestka, b) nejvýše jedna šestka, c) právě jedna šestka?

211. Jsou-li J_1, J_2 dva jevy, které jsou navzájem nezávislé a jejichž pravděpodobnosti jsou p_1, p_2, pak pravděpodobnost, a) že nastane právě jeden z obou jevů, je $p_1 + p_2 - 2p_1p_2$; b) že nastane aspoň jeden z obou jevů, je $p_1 + p_2 - p_1p_2$; c) že nastane nejvýše jeden, je $1 - p_1p_2$; d) že nenastane žádný, je $1 - p_1 - p_2 + p_1p_2$. Dokažte.

212. Jsou-li J_1, J_2, J_3 tři jevy, které jsou navzájem nezávislé a jejichž pravděpodobnosti jsou p_1, p_2, p_3, pak pravděpodobnost, a) že nastane právě jeden z nich, je $p_1 + p_2 + p_3 - 2p_1p_2 - 2p_1p_3 - 2p_2p_3 + 3p_1p_2p_3$; b) že nastanou právě dva, je $p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 3p_1p_2p_3$; c) že nastane aspoň jeden, je $p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3$; d) že nastanou aspoň dva, je $p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3$; e) že nenastane žádný, je $1 - p_1 - p_2 - p_3 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - p_1p_2p_3$; f) že nastane nejvýše jeden, je $1 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + 2p_1p_2p_3$; g) že nastanou nejvýše dva, je $1 - p_1p_2p_3$.

213. V prodejně se vysypalo 10 párů stejné obuvi z krabiček. Prodavačka je namátkou zase narovnala do krabiček. Jaká je pravděpodobnost, že v každé krabičce je jedna pravá a jedna levá bota?

214. 5 mužů a 10 žen má utvořit skupiny po třech. Jaká je pravděpodobnost, že při zcela náhodném seskupení bude v každé skupině právě jeden muž?

215. Dva přátelé, A a B, si umluví tuto hru jednou kostkou: vyhraje ten, komu dříve padne šestka, při čemž házeti počne A. Jakou pravděpodobnost má každý z obou hráčů, že vyhraje a) při svém prvém vrhu, b) při svém druhém vrhu, c) při některém ze svých prvých tří vrhů, d) vůbec?

216. Na jedné hromádce je 20 ořechů, z nichž jsou 2 červivé; na druhé hromádce je 19 ořechů, z nichž jsou 3 červivé. Jeden ořech z první hromádky byl přendán na druhou. Vezmu-li nyní z druhé hromádky jeden ořech, jaká je pravděpodobnost, že nebude červivý?

217. a) V kapse mám čtyři mince, není známo jaké; je možné, že mezi nimi je buď jediná koruna nebo dvě nebo tři nebo čtyři nebo také žádná, a předpokládáme, že všecky tyto možnosti jsou stejně pravděpodobné. Jaká je pravděpodobnost, že namátkou vytažená mince je koruna? b) Proveďte touž úvahu pro n mincí.

218. Je-li p_1 pravděpodobnost jevu J_1, p_2 pravděpodobnost jevu J_2, p_{12} pravděpodobnost, že nastanou oba jevy zároveň, pak podmíněná pravděpodobnost jevu J_1 za hypothesy J_2 je $p_1(J_2) = \frac{p_{12}}{p_2}$ a podmíněná pravděpodobnost jevu J_2 za hypothesy J_1 je $p_2(J_1) = \frac{p_{12}}{p_1}$. Dokažte.

219. Házíme-li kostkou, která je pravděpodobnost, že při deseti vrzích padne šestka a) jednou, b) dvakrát, c) třikrát, d) čtyřikrát, e) pětkrát, f) šestkrát, g) sedmkrát, h) osmkrát, i) devětkrát, j) desetkrát, k) vůbec nepadne?

220. Pravděpodobnost, že některý den bude pršet, je $\frac{1}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že ze sedmi dnů budou aspoň 3 dny bez deště?

221. Která je pravděpodobnost, že při pěti vrzích třemi kostkami padne součet 12 a) aspoň dvakrát, b) nejvýše dvakrát?

222. Kolikrát je třeba hodit dvěma kostkami, aby pravděpodobnost, že padne aspoň jednou součet 12, byla větší než a) 0,5, b) 0,7, c) 0,9?

223. a) Házíme-li kostkou devadesátkrát, pro který počet šestek dostaneme největší pravděpodobnost? b) Která je ta pravděpodobnost? c) Odhadněte pravděpodobnost pro případ, že počet, kolikrát padne šestka, se odchýlí od nejpravděpodobnějšího počtu nejvýše o 7 %.

224. a) Při 900 vrzích kostkou má největší pravděpodobnost případ, že šestka padne 150krát. Vypočtěte tuto pravděpodobnost tak, že užijete přibližného vzorce $n! \doteq \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$, kde π je Ludolfovo číslo a $e \doteq 2{,}71828$ je t. zv. základ přirozených logaritmů. b) Odhadněte pravděpodobnost pro případ, že počet, kolikrát padne šestka, se odchýlí od nejpravděpodobnějšího počtu nejvýše o 7 % a porovnejte s výsledkem předcházejícího cvičení.

225. Opakujeme-li pokus r-krát, je jisté, že se podaří buď nulkrát nebo jednou nebo dvakrát atd. až r-krát. Odtud můžeme dokázati binomickou větu. Proveďte to.

VÝSLEDKY CVIČENÍ.

I. Posloupnosti.

1. a) $1, 1, 1, \ldots, 1$; b) $0, -1, -2, \ldots, -9$; c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{10}{11}$; d) $2, 6, 12, \ldots, 110$; e) $0, 1, 0, \ldots, 1$; f) $1+\mathrm{i}, 0, 1-\mathrm{i}, 2, \ldots, 0$. — **2.** a) $1, 2, 3, \ldots, 10$; b) $a, a^2, a^3, \ldots, a^{10}$; c) $0, 0, 0, \ldots, 0$; d) $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, \ldots, \mathrm{i}$; e) $a, a+d, a+2d, \ldots, a+9d$; f) $a, aq, aq^2, \ldots, aq^9$; g) $1, 2, 1, -1, -2, -1, \ldots, -1$; h) $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985$. — **3.** a) na; b) a^n; c) $\dfrac{n}{n+1}$; d) $\dfrac{n+1}{n}$; e) $(-1)^{n-1}$; f) $3n-2$; g) 2^{n-1}; h) $2 \cdot (-3)^{4-n}$. — **4.** a) $(-1)^{n-1}$; b) n; c) -1; d) $a+(n-1)d$; e) q^{n-1}; f) $\frac{1}{2}[1+(-1)^{n-1}]$. — **5.** a) $a_{n+1} = a_n$; b) $a_{n+1} = a_n - 1$; c) $a_{n+1} = -a_n$; d) $a_{n+1} = a_n + d$; e) $a_{n+1} = a_n \cdot q$; f) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+1}$; g) $a_{n+1} = 2 - a_n$. — **6.** a) $a_{n+2} = a_n$; b) $a_{n+2} = a_n - 4$; c) $a_{n+2} = a^2 \cdot a_n$; d) $a_{n+2} = 2 - a_n$. — **7.** a) Rostoucí pro $x > 0$, klesající pro $x < 0$; b) rostoucí pro $x > 1$, klesající pro $0 < x < 1$. — **8.** Sečtěte výraz pro a_{n+1} a pro a_n. — **9.** Uvědomte si, že

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1};$$

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. — **10.** Z rovnic $1 = k(x-y)$, $1 = k(x^2-y^2)$, $2 = k(x^3-y^3)$ vypočtěte k, x, y; dále viz cvič. 9. —

11. a) Sečtěte výraz pro a_{n+3} a pro a_{n+2}. b) Užijte dvakrát po sobě výsledku a). — **12.** Z rovnic $1 = k(x-y)$, $1 = k(x^2-y^2)$, $0 = k(x^3-y^3)$ vypočtěte k, x, y; výsledek $a_n = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\left[\left(\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$. Přesvědčte se, že skutečně $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. — **13.** a) $3, 5, 7, \ldots, 21$; b) $2, 1\frac{1}{2}, 1, \ldots, -2\frac{1}{2}$; c) $-3, -2{,}6, -2{,}2, \ldots, 0{,}6$; d) $0, -1, -2, \ldots, -9$. — **14.** a) $2, 5, 8, \ldots, 29$; b) $15, 8, 1, \ldots, -48$; c) $-2{,}2, -1{,}4, -0{,}6, \ldots, 5$; d) $3, 7, 11, \ldots, 39$; e) $18, 15, 12, \ldots, -9$. — **15.** a) -23; b) -10; c) 6; d) -2. — **16.** a) $1+3n$; b) $-2n$; c) $12n-53$; d) $40-3n$; e) $0{,}1n-9$. — **17.** a) $\frac{1}{2}, \frac{9}{2}+\frac{1}{2}n$; b) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}n$; c) $\frac{1}{90}, \frac{1}{90}n+\frac{8}{9}$; d) $-\frac{3}{19}, \frac{98}{19}-\frac{3}{19}n$; e) $\dfrac{y-x}{s-r}, \dfrac{sx-ry}{s-r} + \dfrac{y-x}{s-r} \cdot n$. — **18.** a) 165; b) 10; c) $42\frac{1}{2}$; d) 0. — **19.** a) 14; b) 45; c) 1414. — **20.** $1, 9, 17, 25, 33$; $8n-7$. —

21. a) $4-n$, $\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$; b) $\frac{17}{3}+\frac{1}{3}n$, $\frac{35}{6}n+\frac{1}{6}n^2$; c) $\frac{3}{2}n-3$, $\frac{3}{4}n^2-\frac{9}{4}n$. — **22.** a) Když $s_{n+1} > s_n$ čili $a_{n+1} > 0$ pro každé (přirozené) n, t. j. když $d > 0$,

$a_1 > -d$; b) když $d < 0$, $a_1 < -d$. — **23.** $r - \frac{x-y}{d}$; úloha má jediné řešení, když $d \neq 0$ a $x - y = ds$, kde $s < r$ je celé číslo. — **24.** $2s : (a+x)$; úloha má řešení, když $a + x \neq 0$, $s \neq 0$, obě tato čísla mají totéž znamení a podíl $2s : (a+x)$ je celé číslo. — **25.** 10. — **26.** $a_1 = \frac{2s}{r} - x$, $d = \frac{2(rx - s)}{r(r-1)}$; úloha má řešení, pokud $r \neq 1$. — **27.** $a_1 = \frac{r(r-1)y - s(s-1)x}{rs(r-s)}$, $d = \frac{2(sx - ry)}{rs(r-s)}$,
$a_r = \frac{s(2r-s-1)x - r(r-1)y}{rs(r-s)}$, $a_s = \frac{s(s-1)x - r(2s-r-1)y}{rs(r-s)}$; $r \neq s$.
— **29.** $(n+1)$-ní přímka protíná každou z předcházejících n přímek, které ji tedy rozdělí na $n+1$ částí; $A_n = 2 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$.
— **30.** a) 3, 6, 12, ..., 1536; b) 1, —1, 1, ..., —1; c) —437,4, —145,8, —48,6, ..., $-\frac{1}{45}$; d) —1, $-\sqrt{2}$, —2, ..., $-16\sqrt{2}$; e) 3, 3+3i, 6i, ..., 48 + 48i. —

31. a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \ldots, 32$; b) 625, —125, 25, ..., —0,00032; c) —512, —256, —128, ..., —1; d) 512, 768, 1152, ..., 19683; e) 300000, —30000, 3000, ..., —0,0003; f) 1 — i, —1 — i, —1 + i, ..., —1 — i. — **32.** a) 32; b) —7; c) —25,6; d) 5. — **33.** a) $0{,}6 \cdot 5^n$; b) $(-2)^n$; c) $-\frac{1024}{81} \cdot (-\frac{3}{2})^n$; d) $(-i)^n$. — **34.** a) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2^{n-1}}$ nebo $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}(-\sqrt{2})^{n-1}$; b) i, i^n nebo —i, $(-i)^n$; c) 2, $\frac{1}{2} \cdot 2^n$ nebo —2, $-\frac{1}{2} \cdot (-2)^n$ nebo 2i, $-\frac{1}{2}i \cdot (2i)^n$ nebo —2i, $\frac{1}{2}i \cdot (-2i)^n$. — **35.** a) 1023; b) 14762; c) $121(1+\sqrt{3})$; d) 50 nebo 0. — **36.** 1,9375, 1,99805, 1,99999809, 1,9999999999999983. — **37.** a) $3 \cdot 4^n$; b) $3a \cdot (\frac{4}{3})^n$; c) $[\frac{2}{5} - \frac{3}{20}(\frac{4}{9})^n]\, a^2\sqrt{3}$. — **38.** a) $4 \cdot (\frac{3}{2})^r - 4$; b) $5[(-1)^r - 1]$; c) $123\frac{37}{91} \cdot (1 - 0{,}9^r)$. — **39.** a) Je-li $a_1 q^n > 0$ pro každé (přirozené) n, t. j. pro $a_1 > 0$, $q > 0$; b) $a_1 < 0$, $q > 0$. — **40.** $r - (\log|x| - \log|y|) : \log|q|$ pro $|q| \neq 1$; úloha má řešení, když $x : y = q^s$, kde $s < r$ je celé číslo. —

41. 6. — **42.** 19683, —6561, 2187, ..., —9. — **43.** 8. — **44.** $\frac{\sin \frac{1}{2}ra \cos \frac{1}{2}(r+1)a}{\sin \frac{1}{2}a}$, $\frac{\sin \frac{1}{2}ra \sin \frac{1}{2}(r+1)a}{\sin \frac{1}{2}a}$. — **45.** a) $\frac{\sin 2na}{2 \sin a}$, b) $\frac{\sin^2 na}{\sin a}$. — **46.** a) 61,1%; b) 14,9%. — **47.** Za 35 let. — **48.** 0,96%. — **49.** a) 9804 Kčs; b) 9423 Kčs. — **50.** 53 050 Kčs. —

51. a) 22,7%; b) 13 nebo 14. — **52.** a) 627 mm; b) 19070 $(\log b_0 - \log b_1)$ m; c) 11,3%. — **53.** 258,7, 290,3, 325,9, 345,3, 387,5, 435,0, 488,3, 517,3. — **54.** a) 4,5%; b) po 15 kyvech. — **55.** $Kpm : [1200 + p(12 - m)]$. — **56.** 895,30 Kčs. — **57.** 117 230 Kčs. — **58.** 8982,60 Kčs. — **59.** 1128 Kčs. — **60.** 6,72%. —

61. 19 190 m³. — **62.** Za 29 let, poslední splátka je 3593 Kčs. — **63.** 5091 Kčs. — **64.** Přebylo by 9181 Kčs. —

65. $p_n = p_0\left[\frac{V}{V+P}\left(\frac{R}{R+V+P}\right)^n + \frac{P}{V+P}\right]$; b) 281 mm, 13,3 mm; c)

7,3 mm. — **69.** V čísle b) $n^4+2n^3+2n^2+n = n(n+1)(n^2+n+1)$; c) $n^6+3n^5+5n^4+5n^3+3n^2+n = n(n+1)(n^4+2n^3+3n^2+2n+1)$ je vždy jeden z činitelů dělitelný dvěma a jeden třemi. — **70.** Užijte vztahu a) $a^{n+1}-b^{n+1} = a^n(a-b)+b(a^n-b^n)$; b) $a^{n+2}+b^{n+2} = a^n(a^2-b^2)+b^2(a^n+b^n)$. —

71. Prvý krok pro $n=3$. — **72.** Prvý krok pro $n=2$. — **73.** Prvý krok pro $n=3$. — **74.** a) $a_{n+1}a_{n+3}-a_{n+2}^2 = a_{n+1}(a_{n+2}+a_{n+1}) - (a_{n+1}+a_n)\,a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_na_{n+2}$; b) $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = a_{n+3} - 1$. — **75.** a) $s_{n+1} = s_n + (n+1)x^{n+1}$; b) $s_{n+1} = s_n + \sin(n+1)\alpha$. —

II. Limity.

76. a) $x < -4{,}5$; b) $x \geqq \frac{5}{6}$; c) splněno pro každé x; d) nemá řešení. — **77.** a) $0{,}3 < x < \frac{4}{7}$; b) $x < -2$; c) nemá řešení. — **78.** a) $x > \frac{2}{3}$ nebo $x < \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; c) pro každé x; d) pro žádné x. — **79.** a) $4 < x < 12$; b) $5{,}2 \leq x < 7$; c) $x > 1$ nebo $x < -1$; d) $2-\sqrt{3} < x < 1$ nebo $3 < x < 2+\sqrt{3}$; e) $x > 4$ nebo $3 < x \leq 3\frac{3}{7}$. — **80.** Vyjděte z nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$.

81. Platí $1 \geqq 1-x^2$. — **82.** Z nerovnosti $a \geqq b$ plyne $2a \geqq a+b$; $(a-b)^2 \geqq 0$ a tedy také $(a+b)^2 \geqq 4ab$; dále $2a \geqq a+b$. Rovnost nastane na všech místech zároveň tehdy a jen tehdy, když $a = b$. — **83.** a) Z nerovnosti $a^n > 1$ plyne $a^{n+1} > a > 1$; b) z nerovnosti $a^n < 1$ plyne $a^{n+1} < a < 1$ a z nerovnosti $a^n > 0$ plyne $a^{n+1} > 0$. — **84.** $(1+x)^{n+1} \geqq (1+nx)(1+x) \geqq 1 + (n+1)\,x$; rovnost nastane buď pro $x=0$ nebo pro $n=1$. — **85.** a) $2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2n > n+1$; b) $2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2n^2$, ale $n \geqq 5$, proto $n^2 \geqq 5n = 2n+3n > 2n+1$, neboť $3n > 1$, takže $2n^2 > n^2+2n+1$; c) $2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2n^3$, ale $n \geqq 10$, proto $n^3 \geqq 10n^2 = 3n^2+7n^2 > 3n^2+3n+1$, neboť $7n^2 \geqq 70n > 3n+1$, takže $2n^3 > n^3+3n^2+3n+1$. — **86.** a) Každé x (rozeznávejte případy: $x \geqq -1, x < -1$); b) žádné x; c) $x < -\frac{1}{2}$; d) $x > -\frac{1}{2}$. — **87.** a) $x \geqq -\frac{1}{2}$ (rozeznávajte případy: $x \geqq 0$, $-1 \leq x < 0$, $x < -1$); b) $-1 \leq x \leq 1$; c) $x > 1$ nebo $x < 0$; d) pro žádné x; e) $0 < x \leq 2$. — **88.** a) $-1 < x \leq 1$ nebo $-5 < x < -3$; b) $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$. — **89.** a) $\frac{3}{4}$ nebo $-\frac{3}{4}$; b) 1. — **90.** $\frac{3}{2}$ a $-\frac{1}{2}$ nebo $-\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{2}$ nebo $\frac{1}{2}$ a $-\frac{3}{2}$ nebo $-\frac{3}{2}$ a $\frac{1}{2}$. —

91. $x > \frac{1}{2}$ nebo $-\frac{3}{2} < x < -1$ nebo $x < -3$. — **92.** Třeba dokázat: [1] z podmínky $|x-a| < b$ plyne $a-b < x < a+b$; [2] z podmínky $a-b < x < a+b$ plyne $|x-a| < b$. — **93.** Užije se vztahů a) $|x+y| \leqq |x|+|y|$, b) $|xy| = |x|\cdot|y|$. — **94.** Položte $a+b=x$, $b=y$ a rozeznávejte případy: [1] $|x| \geqq |y|$, [2] $|x| < |y|$. — **95.** Podle cvič. 94 $|x-a| \geqq |x|-|a|$ a zároveň $|x-a| \geqq |a|-|x|$. — **96.** a) Vnitřek kruhu o středu [0] a poloměru 1; b) vnějšek kruhu o středu [2] a poloměru $\sqrt{3}$; c) vnitřek mezikruží o středu [4] omezeného kružnicemi o poloměrech 1 a 2; d) osa úsečky s krajními body [0] a [-1]; e) levá polorovina omezená osou pořadnic (i s touto osou). — **97.** a) $\frac{3}{2}-2\mathrm{i}$; b) $\frac{3}{4}+\mathrm{i}$. — **98.** Dosaďte $x = x_1 + \mathrm{i}x_2$ a daný výraz upravte s použitím podmínky $x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{4}$. — **99.** $||a_n|| = |a_n|$. — **100.** Z nerovností $|a_n| < K$, $|b_n| < H$ plyne $|ra_n + sb_n| \leqq |ra_n| + |sb_n| < < |r| \cdot K + |s| \cdot H$. —

101. Je-li $|q| \leqq 1$, je $|q|^n < 1$ (cvič. 83) a také $|q^n| \leqq 1$ (cvič. 93b). — **102.** Je-li $|a_n| < K$ a je-li $|b_n| \leqq |a_n|$ pro každé $n > r$, je $|b_n| < H$, kde H je větší než *největší* z čísel $|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|, K$. — **103.** Je-li r největší index, pro který ještě $a_r \neq b_r$, potom $a_n = b_n$ pro každé $n > r$. — **104.** $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$; zvolíme-li libovolné číslo $k > 0$, je $\left|\frac{1}{n}\right| < k$ pro každé $n > \frac{1}{k}$. — **105.** $||a_n|| = |a_n|$. —

106. K libovolným kladným číslům k, h možno najíti indexy p, q tak, že platí $|a_n| < k$ pro každé $n > p$ a $|b_n| < h$ pro každé $n > q$. Potom a) $|ra_n + sb_n| \leqq \leqq |ra_n| + |sb_n| < |r| \cdot k + |s| \cdot h$ pro každé n, které je větší než *větší* z čísel p, q. Zvolíme-li libovolné kladné číslo l a určíme-li $k \leqq \frac{l}{|r| + |s|}$, $h \leqq \frac{l}{|r| + |s|}$, pak $|ra_n + sb_n| < l$ pro každé n větší než větší z příslušných čísel p, q. b) $|a_nb_n| = |a_n| \cdot |b_n| < kh$ pro každé n, které je větší než větší z čísel p, q. Zvolíme-li libovolné kladné l a určíme-li $k < \sqrt{l}$, $h \leqq \sqrt{l}$, pak $|a_nb_n| < l$ pro každé n větší než větší z obou příslušných čísel p, q. — **107.** Zvolíme-li libovolné kladné číslo k, existuje takový index r, že $|a_n| < k$ pro všecka $n > r$. Označme K libovolné číslo větší než největší z čísel $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_r|, k$; pak $|a_n| < K$ pro všecka n. — **108.** [1] Je-li k libovolné kladné číslo, platí $|a_n| < k$ pro skoro všecka n. [2] Zvolíme-li kladné k jakkoliv a platí-li $|a_n{}^r| < k$ pro skoro všecka n, platí $|a_n| < \sqrt[r]{k}$ pro skoro všecka n, neboť $|a_n{}^r| = |a_n|^r$ (cvič. 93b). Potom $|a_n{}^{r+1}| = |a_n{}^r| \cdot |a_n| < k \cdot \sqrt[r]{k}$. Zvolíme-li libovolné kladné číslo h a určíme-li k němu kladné číslo k tak, aby $k \cdot \sqrt[r]{k} \leqq h$ čili $k \leqq h^{\frac{r}{r+1}}$, pak $|a_n{}^{r+1}| < h$ pro skoro všecka n. — **109.** a) Ať zvolíme kladné číslo K jakkoli, existuje takový index n, že $|a_n| \geqq K$. b) Existuje takové kladné číslo k, že $|a_n| \geqq k$ pro skoro všecka n. — **110.** Existuje-li takové kladné číslo K, že $|a_n| < K$ pro všecka n, potom $\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{K}$ pro všecka n. —

111. Jestliže pro každé kladné číslo k platí $|a_n| < k$ pro skoro všecka n, potom $\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{1}{k}$ pro skoro všecka n. — **112.** Je-li $|a_n| < k$ pro všecka $n > r$ a je-li $|b_n| \leqq |a_n|$ pro všecka $n > s$, potom $|b_n| < k$ pro všecka n, která jsou větší než větší z čísel r a s. — **113.** $|a_n - a| \geqq ||a_n| - |a||$ (cvič. 94). — **114.** $\lim (ra_n + sb_n) = \lim ra_n + \lim sb_n = r \lim a_n + s \lim b_n$. — **115.** $\lim a_n{}^{r+1} = = \lim (a_n{}^r \cdot a) = \lim a_n{}^r \cdot \lim a_n$. — **116.** Pro $r = 0$ je $\{a_n{}^0 - 1\}$ nulová posloupnost. Pro $r < 0$ je $-r = s > 0$ a $\lim a_n{}^s = a^s$. Pak $\lim a_n{}^r = \lim \frac{1}{a_n{}^s} =$

$= \dfrac{1}{a^s} = a^r$. — **117.** Viz cvič. 104. — **118.** $a_n - r \approx 0$ pro skoro všecka n; ať zvolíme jakkoli kladné číslo k, je $|a_n - r| < k$ pro skoro všecka n. — **119.** Ať zvolíme kladné číslo k jakkoli, existuje takový index r, že $|a_n - a| < k$ pro všechna $n > r$. Nechť s je největší index, pro nějž $a_s \neq b_s$, kdežto $a_n = b_n$ pro všecka $n > s$. Pak $|b_n - a| < k$ pro všecka n, která jsou větší než větší z obou čísel r, s. — **120.** Ke každému kladnému číslu $k < |a|$ existuje takový index r, že $|a_n - a| < k$ a také $|a_n| > |a| - k$ (cvič. 95) pro všecka $n > r$. Buď s největší index, pro nějž $a_s = 0$, kdežto $a_n \neq 0$ pro všecka $n > s$. Potom pro všecka n větší než větší z obou čísel r, s platí $\left|b_n - \dfrac{1}{a}\right| = \left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a}\right| = \left|\dfrac{a - a_n}{aa_n}\right| < \dfrac{k}{|a|(|a| - k)}$. Zvolíme-li libovolné kladné číslo h a určíme-li kladné $k < |a|$ tak, aby $\dfrac{k}{|a|(|a| - k)} < h$, čili $k < \dfrac{h|a|^2}{h\,|a| + 1}$, je $\left|b_n - \dfrac{1}{a}\right| < h$ pro všecka n větší než příslušné r a současně větší než s. —

121. a) 1; b) $\dfrac{a}{c}$; c) 1; d) 1; e) $\frac{2}{3}$; f) 0. — **122.** Označme $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$; pak posloupnost $\{(a_n - a) - (b_n - b)\} = \{(a_n - b_n) - (a - b)\}$ je nulová, při čemž $a - b > 0$. To znamená, že pro každé kladné k je $|(a_n - b_n) - (a - b)| < k$, čili $a_n - b_n > a - b - k$ pro skoro všechna n (viz cvič. 92). Zvolme kladné $k < a - b$. Pak $a_n - b_n > 0$ pro skoro všechna n. — **123.** Kdyby bylo $a > b$, bylo by $a_n > b_n$ pro skoro všechna n (cvič. 122). — **124.** Pro $|x| < 1$ a pro $x = 1$; je-li $|x| < 1$, je $\lim x^n = 0$ (věta IV. čl. 3), je-li $x = 1$, je $\lim x^n = 1$ (věta VIII. čl. 4). — **125.** a) 3; b) diverguje; c) $-\frac{2}{9}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1$; e) diverguje; f) diverguje; g) $1 - i$; h) diverguje. — **126.** a) $|x| < 1$, $x : (1 - x)$; b) $|x| > 1$, $x : (x + 1)$; c) $x = 0$, 0; d) pro každé x, $-2x$. — **127.** a) $x \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$, k celé; $1 : (1 - \sin x)$; b) $\frac{1}{4}(4k - 1)\pi < \frac{1}{4}(4k + 1)\pi$, k celé; $\sin x : \sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$; c) diverguje pro každé x; d) $|x| < 2\sqrt{2}$; $\frac{2}{1}(4 + ix)$. — **128.** Rovnice $a = c + u$, $10u = c_1 + u_1$, $10u_1 = c_2 + u_2$, ..., $10u_{n-1} = c_n + u_n$ násobíme postupně čísly 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-n} a sečteme. Je-li $a_n = c{,}c_1c_2 \ldots c_n$, je $a - a_n < 10^{-n}$. — **129.** Rovnice $a = d + v$, $10v = d_1 + v_1$, $10v_1 = d_2 + v_2$, ..., $10v_{n-1} = d_n + v_n$ násobíme postupně čísly 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-n} a sečteme. Je-li $b_n = d{,}d_1d_2 \ldots d_n$, je $a - b_n \leq 10^{-n}$. — **130.** [1] Je-li $a = c + u = d + v$, je $c - d = v - u$ celé číslo. Je-li $u \neq 0$, není u celé; není tedy ani v celé, t. j. $v \neq 1$. Ježto $0 < u < 1$, $0 < v < 1$, je $-1 < v - u < 1$; tomu vyhovuje jediné celé číslo $v - u = 0$. Potom $c = d$. [2] Je-li $u_n = v_n$, je $c_{n+1} + u_{n+1} = d_{n+1} + v_{n+1}$, takže $c_{n+1} - d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$ je opět celé číslo. Protože $u_{n+1} \neq 0$, proto také $v_{n+1} \neq 1$, takže $-1 < v_{n+1} - u_{n+1} < 1$. Proto $v_{n+1} - u_{n+1} = 0$, $c_{n+1} = d_{n+1}$. —

131. Je-li $u_{k-1} \neq 0$, je na levé straně rovnice $c_{k-1} + u_{k-1} = d_{k-1} + v_{k-1}$ (cvič. 130) číslo, které není celé, proto i na pravé straně musí být číslo, které není celé, t. j. $v_{k-1} \neq 1$. Je-li $u_k = 0$, pak v rovnici $c_k + u_k = d_k + v_k$ je na levé straně celé číslo, proto musí být i na pravé straně celé číslo, t. j. $v_k = 1$. Je tedy $c_k = d_k + 1$. Pak pro každé $n > k$ je $c_n + u_n = 0$, z čehož plyne $c_n = 0$, $u_n = 0$; $d_n + v_n = 10$, $d_n = 9$, $v_n = 1$. — **133.** a) $\frac{7}{12}$; b) $\frac{5}{22}$; c) $\frac{7}{27}$. — **134.** Předpokládejme, že ve zlomku $\frac{x}{y}$ jsou x, y celá čísla taková, že $0 < x < y$. Je-li rozvoj zlomku ryze periodický s h-cifernou periodou q, dostaneme při dělení $x : y$ po připsání h nul k dělenci podíl q a zbytek x, t. j. $10^h \cdot x = qy + x$. Odtud $\frac{x}{y} = \frac{q}{10^h - 1}$. Číslo $10^h - 1$ není dělitelné žádným z prvočísel 2 nebo 5. Je-li rozvoj neryze periodický s k-ciferným předperiodím p a s h-cifernou periodou q, dostaneme po připsání k nul k dělenci podíl p a zbytek z a po připsání h nul ke zbytku z podíl q a opět týž zbytek z, t. j. $10^k \cdot x = py + z$, $10^h \cdot z = qy + z$. Odtud $\frac{x}{y} = \frac{p}{10^k} + \frac{q}{10^k(10^h - 1)}$. Protože $0 < p < 10^k$, proto po zkrácení lze prvý zlomek uvésti na tvar $\frac{p}{10^k} = \frac{r_1}{s_1}$, kde $s_1 \neq 1$ obsahuje pouze prvočísla 2 nebo 5 (ve vhodných mocninách); vedle toho je $0 < q < 10^h$, a protože q není složeno ze samých devítek (viz cvič. 132), je dokonce $q < 10^h - 1$; po zkrácení lze tedy druhý zlomek uvésti na tvar $\frac{q}{10^k(10^h - 1)} = \frac{r_2}{s_2 t}$, kde s_2 je buď rovno jedné nebo obsahuje pouze prvočinitele 2 nebo 5 a $t \neq 1$ neobsahuje ani prvočinitele 2 ani 5. Potom $\frac{x}{y} = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2 t} = \frac{1}{s}\left(\frac{r_1}{s_1'} + \frac{r_2}{s_2' t}\right)$, kde s je největší společný dělitel čísel s_1 a s_2 a z čísel s_1', s_2' je aspoň jedno rovno jedné. Zlomky v závorkách mají nesoudělné jmenovatele, proto jejich součet nelze krátit a dospíváme ke zlomku se jmenovatelem $s't$, který obsahuje aspoň jedno z prvočísel 2 nebo 5 a aspoň jedno prvočíslo různé od 2 a od 5. — **135.** Jde o zlomky tvaru $\frac{x}{y} = \frac{q}{10^h - 1}$ (cvič. 134). a) Je-li $h = 1$, je $\frac{x}{y} = \frac{q}{9}$; k jednociferné periodě vedou zlomky, které v základním tvaru mají jmenovatele 3 nebo 9 (neboť jen tyto lze psát s jmenovatelem 9). b) Je-li $h = 2$, je $\frac{x}{y} = \frac{q}{99}$; k dvojciferné periodě vedou zlomky, které v základním tvaru mají jmenovatele 11 nebo 33 nebo 99 (neboť jmenovatelé 3 a 9 vedou k periodě jednociferné). c) Pro $h = 3$ je $\frac{x}{y} = \frac{q}{999}$; k trojciferné periodě vedou zlomky, které v základním tvaru mají jmenovatele 27 nebo 37 nebo 111 nebo 333 nebo 999. d) K h-ciferné periodě vedou zlomky, jejichž jmenovatelé jsou děliteli čísla $10^h - 1$, ale nejsou děliteli žádného čísla tvaru $10^l - 1$, kde $l < h$. — **136.** Jde o zlomky tvaru

$\frac{x}{y} = \frac{p(10^h - 1) + q}{10^k(10^h - 1)}$ (cvič. 134). Po zkrácení musí ve jmenovateli zůstati aspoň jeden z prvočinitelů 2 nebo 5 v mocnině právě k-té; kdyby totiž bylo lze uvést zlomek $\frac{x}{y}$ na tvar $\frac{x}{y} = \frac{p'(10^h - 1) + q'}{10^l(10^h - 1)}$, kde $l < k$, znamenalo by to, že $10^l \cdot x = p'y + \frac{q'y}{10^h - 1}$. Poslední člen je však celé číslo; označme je z'. Je tedy $10^l \cdot x = p'y + z'$, $q'y = (10^h - 1)z'$ čili $10^h \cdot z' = q'y + z'$. To však značí, že zlomek $\frac{x}{y}$ vede k předperiodí l-cifernému proti předpokladu. — **137.** a) $\frac{q}{10^h - 1}$; b) $\frac{p}{10^k} + \frac{q}{10^k(10^h - 1)} = \frac{10^h \cdot p + q - p}{10^k(10^h - 1)}$. —

III. Kombinatorika.

138. V obou případech se tvoří variace n-té třídy r předmětů. — **139.** $4 + 4 \cdot V_1(4) + 4 \cdot V_2(4) + 4 \cdot V_3(4) + 4 \cdot V_4(4)$ nebo $4 + V_2(5) - V_1(4) + V_3(5) - V_2(4) + V_4(5) - V_3(4) + V_5(5) - V_4(4) = 260$. — **140.** $\frac{1}{2}(n-1)!$ —

141. 2. — **143.** a) 1; b) 2. — **146.** Počítejte, kolik permutací vznikne, přidáme-li k r předmětům ještě další předmět. — **147.** Měníme-li pořadí stejných předmětů, nemění se permutace. — **148.** Kolik variací s opakováním má určitý pevně zvolený předmět na prvním místě? — **149.** $V'_4(3) - V'_3(3)$ nebo $2 \cdot V'_3(3) = 54$. — **150.** a) $V'_2(6) = 36$; b) $V'_3(6) = 216$. —

151. $V'_6(2) - 1 = 63$. — **152.** $V'_1(2) + V'_2(2) + \ldots + V'_n(2) = 2(2^n - 1)$; 30. — **153.** $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. — **154.** $\binom{n}{3} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$. — **155.** $\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1 = \frac{1}{2}(n-k)(n+k-1) + 1$. — **156.** Mohou mít nejvýše $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\left[\binom{n}{2} - 1\right] - n\binom{n-1}{2} = \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ dalších průsečíků. — **157.** a) $\binom{5}{3} = 10$; b) $\binom{4}{2} = 6$; c) $2\binom{10}{2} - 5\binom{6}{2} = 35$. — **158.** $\binom{r}{n}$. — **159.** a) Všech předmětů ve všech kombinacích dohromady je $n\binom{r}{n}$; každý předmět je v nich zastoupen stejněkrát. b) Ke každé kombinaci $(n-1)$-ní třídy můžeme přidati kterýkoli z $r - (n-1)$ předmětů, které v ní nejsou zastoupeny; každou kombinaci n-té třídy tak dostaneme celkem n způsoby. — **160.** a) Z každé kombinace n-té třídy možno utvořit $\binom{n}{m}$ skupin po m předmětech; celkem tedy je $\binom{n}{m}\binom{r}{n}$ takových skupin, v kterémžto počtu je každá skupina zastoupena stejněkrát, a to $\binom{r}{m}$-krát. b) Ke každé kombinaci $(n - m)$-té třídy možno přidati kteroukoli skupinu m předmětů vybraných ze zbývajících $r - (n - m)$ předmětů; každou kombinaci n-té třídy dostaneme tolika způsoby, kolik je možno utvořit kombinací m-té třídy n prvků, t. j. $\binom{n}{m}$ způsoby. —

161. a) Mějme r předmětů, které nazveme „bílé", a s předmětů, které nazveme „červené". Všecky kombinace n-té třídy, které z těchto předmětů možno utvořit, obsahují buď n předmětů bílých a žádný červený nebo $n - 1$ předmětů bílých a 1 červený nebo $n - 2$ předměty bílé a 2 červené atd. až žádný předmět bílý a n červených. Musí při tom $r \geqq n$, $s \geqq n$? b) Položte $n = r = s$. — **162.** $\binom{r+1}{n+1} = \binom{r}{n} + \binom{r-1}{n} + \binom{r-2}{n} + \ldots + \binom{n}{n}$. —

164. [1] $C'_1(r) = r = \binom{r}{1}$. [2] Platí $C'_{n+1}(r) = \frac{r+n}{n+1} \cdot C'_n(r)$ (cvič. 163). Je-li $C'_n(r) = \binom{r+n-1}{n}$, je $C'_{n+1}(r) = \frac{r+n}{n+1} \cdot \binom{r+n-1}{n} = \binom{r+n}{n+1}$. — **165.** $C'_2(10) = 55$. — **166.** a) $C'_2(8) = 36$; b) $C'_2(9) = 45$; c) $C'_2(10) = 55$. — **167.** $C'_3(3) = 10$. — **168.** $C'_n(r) = \binom{r+n-1}{n}$. — **169.** a) Je-li u některého členu součet mocnitelů $k + l + m + \ldots = h < n$, doplníme tento člen činitelem 1^{n-h}; dostaneme tak mnohočlen, který má právě tolik členů jako úplný homogenní mnohočlen v $r+1$ proměnných $x, y, z, \ldots, t$, t. j. $C'_n(r+1) = \binom{n+r}{n}$. b) $\binom{n+r}{n} = \binom{n+r}{r}$. — **170.** Považujeme-li neznámé za mocnitele v homogenním mnohočlenu, vidíme, že rovnice má právě tolik řešení, kolik členů má úplný homogenní mnohočlen n-tého stupně v r proměnných (cvič. 168). —

171. a) $2^4 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 11$; b) $2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14} \cdot 17 \cdot 19$. — **172.** a) 1,44830; b) 0,90438. — **173.** a) $\cos 7\alpha = \cos\alpha\,(64\cos^6\alpha - 112\cos^4\alpha + 56\cos^2\alpha - 7)$, $\sin 7\alpha = \sin\alpha\,(64\cos^6\alpha - 80\cos^4\alpha + 24\cos^2\alpha - 1)$. — **174.** a) $\frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3)$; b) $\frac{1}{16}(\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha)$; c) $\frac{1}{2^r}\left[\cos r\alpha + \binom{r}{1}\cos(r-2)\alpha + \binom{r}{2}\cos(r-4)\alpha + \ldots + \binom{r}{r}\cos(r-2r)\alpha\right]$. — **175.** a) $(1+2)^r$; b) $(1-1)^r$. — **176.** Plyne z rovnice (7) a z cvič. 175b. — **177.** $1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{1}{4}\pi + i\sin\frac{1}{4}\pi)$. — **178.** a) pro $r = 2$ je $(n+1)^2 = 1 + 2s_1 + n$, $s_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$; b) pro $r = 3$ je $(n+1)^3 = 1 + 3s_2 + 3s_1 + n$, $s_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; c) pro $r = 4$ je $(n+1)^4 = 1 + 4s_3 + 6s_2 + 4s_1 + n$, $s_3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. — **179.** Ve výrazu $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$ je poměr dvou po sobě jdoucích členů

$\binom{n}{k+1} x^{k+1} : \binom{n}{k} x^k = \frac{n-k}{k+1} x < q$ pro $k \geqq 1$. Proto $(1+x)^n < 1 + nx + nxq + nxq^2 + \ldots + nxq^{n-1} < 1 + \frac{nx}{1-q}$. Chyba je menší než $\frac{nxq}{1-q}$.

IV. Počet pravděpodobnosti.

180. 0,358, 7,39%. — **181.** 48krát nebo 37krát. — **182.** Asi 26 až 31krát. — **183.** Asi 278 až 338 krát. — **184.** $0{,}309 < p < 0{,}393$. — **185.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$. — **186.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$. — **187.** a) $\frac{55}{216}$; b) $\frac{161}{216}$. — **188.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. — **189.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{11}{45}$; c) $\frac{13}{90}$. — **190.** $\frac{1}{5}$. —

191. Součet 11 může padnout 27 způsoby, kdežto součet 12 jen 25; je třeba vzít v úvahu, které číslo padne na každé kostce, a ne, z kterých sčítanců se součet skládá. — **192.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{8}$. — **193.** a) $\frac{10}{36}$; b) $\frac{11}{36}$; c) $\frac{35}{36}$; d) $\frac{25}{36}$; e) $\frac{1}{36}$. — **194.** a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{7}{8}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{8}$. — **195.** a) $\binom{12}{3}\binom{8}{2} : \binom{20}{5} \doteq 0{,}397$; b) $\binom{12}{2}\binom{8}{3} : \binom{20}{5} \doteq 0{,}238$; c) $\binom{12}{5} : \binom{20}{5} \doteq 0{,}051$; d) $\binom{8}{5} : \binom{20}{5} \doteq 0{,}007$. — **196.** a) $4 \cdot \binom{28}{3} : \binom{32}{4} \doteq 0{,}364$; b) $\binom{4}{2}\binom{28}{2} : \binom{32}{4} \doteq 0{,}064$; c) $\binom{4}{3} \cdot 28 : \binom{32}{4} \doteq 0{,}003$; d) $1 : \binom{32}{4} \doteq 0{,}00003$; e) $\binom{28}{4} : \binom{32}{4} \doteq 0{,}569$. — **197.** a) $28 : \binom{32}{5} \doteq 0{,}0001$; b) $\binom{4}{3}\binom{28}{2} : \binom{32}{5} \doteq 0{,}008$; c) $\binom{4}{2}\binom{28}{3} : \binom{32}{5} \doteq 0{,}097$; d) $4 \cdot \binom{2\ }{4} : \binom{32}{5} \doteq 0{,}407$; e) $\binom{28}{5} : \binom{32}{5} \doteq 0{,}488$. — **198.** Je-li $h = k$, je $p = 1$; je-li $h = 0$, je $p = 0$. — **199.** Je-li $h = k - h$, je $p = \frac{1}{2}$. — **200.** Je-li $p = \frac{h}{k}$, je $\frac{k-h}{k} = 1 - p$. —

201. $\frac{1}{4}$. — **202.** $\frac{3}{4}$. — **203.** a) $\binom{28}{7} : \binom{32}{7} \doteq 0{,}352$; b) 0,648; c) $\left[\binom{28}{7} + 4 \cdot \binom{28}{6}\right] : \binom{32}{7} \doteq 0{,}799$; d) 0,201. — **204.** a) $1 - p = \binom{90}{2} : \binom{100}{2}$, $p \doteq 0{,}191$; b) $1 - p = \binom{90}{3} : \binom{\ 00}{3}$, $p \doteq 0{,}273$; c) $1 - p = \binom{90}{10} : \binom{100}{10}$, $p \doteq 0{,}670$. — **205.** a) $\left[\binom{8}{3} + \binom{10}{3} + \binom{12}{3}\right] : \binom{30}{3} \doteq 0{,}098$; b) $\left[\binom{8}{2}(10+12) + \binom{10}{2}(8+12) + \binom{12}{2}(8+10)\right] : \binom{30}{3} \doteq 0{,}666$; c) $8 \cdot 10 \cdot 12 : \binom{30}{3} \doteq 0{,}236$. — **206.** $\frac{2}{3}$. — **207.** $p_1 = \frac{h_1}{k}$, $p_2 = \frac{h_2}{k}$, $p_{12} = \frac{h_{12}}{k}$, $p = \frac{h_1}{k}\left(1 - \frac{h_{12}}{h_1}\right) + \frac{h_2}{k}\left(1 - \frac{h_{12}}{h_2}\right) + \frac{h_{12}}{k}$. — **208.** a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. — **209.** a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$. — **210.** a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$ nebo $1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$. —

213. $\frac{10 \cdot 10}{\binom{20}{2}} \cdot \frac{9 \cdot 9}{\binom{18}{2}} \cdot \frac{8 \cdot 8}{\binom{16}{2}} \ldots \frac{2 \cdot 2}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1 \cdot 1}{\binom{2}{2}} \doteq 0{,}0055$. — **214.** $\frac{5 \cdot \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{4 \cdot \binom{8}{2}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{3 \cdot \binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} \cdot \frac{2 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1 \cdot \binom{2}{2}}{\binom{3}{3}} \doteq 0{,}0809$. — **215.** a) $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{36}$; b) $\frac{25}{216}$, $\frac{125}{1296}$; c) $\frac{1}{6}\left(1 + \frac{25}{36} + \frac{625}{1296}\right) \doteq 0{,}362$, $\frac{5}{36}\left(1 + \frac{25}{36} + \frac{625}{1296}\right) \doteq 0{,}302$; d) $\frac{6}{11}$, $\frac{5}{11}$. — **216.** $\frac{2}{20} \cdot \frac{16}{20} + \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{20} = 0{,}845$. — **217.** a) $\frac{1}{5}\left(0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right) = \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{n+1}\left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) = \frac{1}{2}$. — **218.** Plyne z věty IV. — **219.** $\binom{10}{n} \cdot \frac{5^{10-n}}{6^{10}}$; a) 0,32301; b) 0,29071; c) 0,15505; d) 0,05427; e) 0,01302; f) 0,00217; g) 0,00025; h) 0,00002; i) 0,0000008; j) 0,00000002; k) 0,16151. — **220.** 0,773. —

221. a) $1 - \left[\left(\frac{191}{216}\right)^5 + 5 \cdot \frac{25}{216} \cdot \left(\frac{191}{216}\right)^4\right] \doteq 0{,}116$; b) $\left(\frac{191}{216}\right)^5 + 5 \cdot \frac{25}{216} \cdot \left(\frac{191}{216}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{25}{216}\right)^2 \cdot \left(\frac{191}{216}\right)^3 \doteq 0{,}987$. — **222.** $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > p$; a) asi 25krát; b) asi 43krát; c) asi 82krát. — **223.** a) $\binom{90}{n} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{90-n} > \binom{90}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{91-n}$, $\binom{90}{n} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{90-n} > \binom{90}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{89-n}$; $n = 15$; b) $p_{15} \doteq 0{,}112$; c) $\binom{90}{14} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{76} + \binom{90}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{75} + \binom{90}{16} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{74} = \frac{889}{304} \cdot p_{15} \doteq 0{,}328$. — **224.** a) $\binom{900}{150} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{150} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{750} \doteq \frac{1}{5\sqrt{10\pi}} \doteq 0{,}0357$; b) dovolenou odchylku splňuje 21 případů, kdy šestka padne 140krát až 160krát; nejmenší pravděpodobnost má případ, že šestka padne 140krát, a to $\binom{900}{140} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{140} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{760} \doteq \frac{3}{\sqrt{2\pi \cdot 14 \cdot 76}} \cdot \left(\frac{15}{14}\right)^{140} \cdot \left(\frac{75}{76}\right)^{760} \doteq 0{,}027$; je tedy $0{,}57 < p < 0{,}75$. —

225. $1 = (1-p)^r + \binom{r}{1} p(1-p)^{r-1} + \binom{r}{2} p^2(1-p)^{r-2} + \ldots + p^r$; dosadíme $p = \frac{b}{a+b}$, $1 - p = \frac{a}{a+b}$, kde a, b jsou kladná čísla. —

GEOMETRIE

Rozvrh učiva.

Září:	Souřadnice bodu na přímce Pravoúhlé souřadnice bodu v rovině
Říjen:	Změna počátku. Vzdálenosti a směrové úhly Výpočet úhlů
Listopad:	Rovnice přímky Parametrické vyjádření úsečky
Prosinec:	Vzdálenost bodu od přímky
Leden:	Lineární celistvá funkce
Únor:	Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých Parabola
Březen:	Kvadratická celistvá funkce Kvadratická rovnice Kružnice
Duben:	Sinová věta Kosinová věta Základní úlohy o trojúhelníku
Květen:	Součet a rozdíl sinů a kosinů Goniometrické funkce polovičního úhlu Užití trigonometrie
Červen:	Dokončení látky Souhrnné opakování.

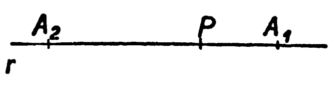
I. Základy analytické geometrie.

1. Souřadnice bodu na přímce.

Již v předcházející třídě jsme začali soustavně sledovat vztahy mezi aritmetikou a geometrií. Tyto vztahy budeme nyní sledovat ještě podrobněji a hlouběji. T. zv. **analytická geometrie,** která tvoří podstatnou část učiva této třídy, má za úkol nahradit každý geometrický pojem určitým pojmem aritmetickým a tím převésti geometrické úlohy na úlohy početní. Rozeznáváme rovinnou a prostorovou analytickou geometrii; na gymnasiu se probírá pouze rovinná analytická geometrie. Základy rovinné analytické geometrie jsou v nejužší souvislosti s naukou o komplexních číslech a jejich geometrickém znázornění, kterou jsme probírali ve 2. třídě v hodinách aritmetiky. Pro správné pochopení analytické geometrie bude však účelné říci si její základní pojmy podrobně znovu, ačkoli tu jde o poznatky vlastně již známé.

V celé analytické geometrii předpokládáme, že byla zvolena určitá **délková jednotka,** takže všecky délky vyjadřujeme nepojmenovanými čísly. Při rýsování v sešitě volíme obyčejně za jednotku 1 cm, při rýsování na tabuli 1 dm.

Nejprve si promluvíme o tom, jak lze pomocí t. zv. **souřadnice** početně vyjádřit polohu libovolného bodu na dané přímce *r*. Zvláště důležitý pro další je ten případ, že přímka *r* je buďto vodorovná (obr. 1) nebo svislá (obr. 2). Na přímce *r* si zvolíme určitý bod *P*, kterému říkáme **počátek.** Na přímce *r* zvolíme určitý smysl; počátek *P* rozdělí potom přímku *r* na kladnou část, obsahující body, které ve zvoleném smyslu následují za bodem *P* a na zápornou část, obsahující body, které ve zvoleném smyslu předcházejí před bodem *P*. Je-li přímka *r* vodorovná, volíme smysl skoro vždy tak, že kladná část leží napravo od počátku; je-li přímka *r* svislá, volíme smysl skoro vždy tak, že kladná část leží nad počátkem.



Obr. 1.

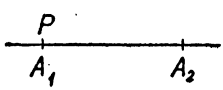
Obr. 2.

Je-li na přímce r zvolen počátek P a je-li zvolen smysl přímky P, můžeme polohu každého bodu A na přímce P početně vyjádřit pomocí jeho souřadnice; souřadnicí bodu A na přímce r rozumíme reálné číslo $\pm d$, při čemž $d = \overline{AP}$ je vzdálenost bodu A od počátku a platí znamení plus, jestliže A leží v kladné části přímky r, znamení minus, jestliže A leží v záporné části přímky r. Jestliže A splyne s počátkem P, je jeho souřadnice rovná nule. Každý bod A přímky r má určitou souřadnici a obráceně každé reálné číslo určuje na přímce r jediný bod A, jehož souřadnice je rovná danému číslu. V obr. 1. a 2. jsou vyznačeny ty body A_1, A_2, jejichž souřadnice jsou rovny číslům $+1$, -2.

Aby každý bod A přímky r měl určitou souřadnici, musí býti zvolen jednak počátek P, jednak smysl přímky r. Je důležité vědět, jaký vliv mají tyto volby na hodnotu souřadnice. Jestliže především při nezměněné volbě počátku změníme smysl přímky r, potom je-li x původní souřadnice a x' změněná souřadnice téhož (libovolného) bodu A, zřejmě jest

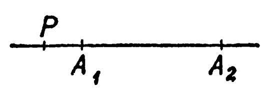
$$x' = -x. \tag{1}$$

Abychom vyšetřili, jaký vliv má (při nezměněném smyslu) volba počátku P, předpokládejme, že počátek byl jakkoli zvolen, a zvolme na přímce r libovolně dva různé body A_1, A_2, jejichž souřadnice označíme x_1, x_2. Předpokládejme prozatím, že ve zvoleném smyslu leží bod A_1 před bodem A_2; budiž $d = \overline{A_1A_2}$ vzdálenost obou bodů A_1, A_2. Vzhledem k těmto bodům může míti počátek P paterou polohu; jednotlivé možnosti jsou vyznačeny

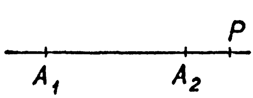


Obr. 2a.

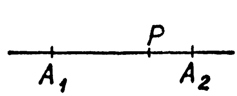
Obr. 2b.



Obr. 2c.



Obr. 2d.



Obr. 2e.

(pro vodorovnou přímku r, což ovšem není podstatné) v obr. 2a až 2e. V případě obr. 2a je $x_1 = 0$, $x_2 = d$; v případě obr. 2b je $x_1 = -d$, $x_2 = 0$. V obou případech je tedy

$$x_2 - x_1 = d. \tag{2}$$

Týž vztah (2) je správný i v ostatních třech případech. Neboť v případě obr. 2c jsou x_1, x_2 kladná čísla a jest $x_2 = x_1 + d$, tedy $x_2 - x_1 = d$; v případě obr. 2d jsou x_1, x_2 záporná čísla a jest $|x_1| = |x_2| + d$ neboli $-x_1 = -x_2 + d$, tedy zase $x_2 - x_1 = d$; v případě obr. 2e číslo x_1 je záporné, číslo x_2 je kladné a jest $|x_1| + x_2 = d$ neboli $-x_1 + x_2 = d$, t. j. opět $x_2 - x_1 = d$.

Vzorec (2) platí pouze tehdy, jestliže ve zvoleném smyslu leží bod A_1 před bodem A_2. Jestliže naopak leží bod A_2 před bodem A_1, potom místo (2) máme $x_1 - x_2 = d$ neboli

$$x_2 - x_1 = -d. \tag{3}$$

Jestliže oba body A_1, A_2 splynou, je $d = 0$, $x_1 = x_2$ a platí oba vzorce (2), (3).

Ze vzorců (2), (3) plyne, že kdežto souřadnice x jednoho bodu A na přímce r je ovšem závislá na volbě počátku P, **rozdíl $x_2 - x_1$ souřadnic x_1, x_2 dvou bodů přímky r je nezávislý na volbě počátku** a závisí pouze na zvoleném smyslu přímky r; při změně smyslu rozdíl $x_2 - x_1$ změní znamení. **Absolutní hodnota $|x_2 - x_1|$ je rovná vzdálenosti $\overline{A_1A_2}$ a je tedy nezávislá na volbě počátku a zároveň nezávislá na volbě smyslu přímky r.**

Užijeme předcházející úvahy k tomu, abychom dokázali, že jestliže dva různé body A_1, A_2 přímky r mají souřadnice x_1, x_2, potom střed S úsečky A_1A_2 má souřadnici

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{4}$$

Neboť obě úsečky SA_1, SA_2 jsou si jednak rovny, takže

$$|x - x_1| = |x - x_2|,$$

jednak mají opačný smysl, takže

$$x - x_1 = -(x - x_2).$$

Z této rovnice snadno vypočteme, že platí (4).

Cvičení.

Ve cvičeních analytické geometrie je počátek souřadnic označen P. Ve cvičeních 1 až 8 jde o body, které leží na přímce r, v níž jsme zvolili smysl, jejíž počátek je P a na níž je zvolena jednotka měření; je-li x_1 souřadnice bodu A_1 přímky r, píšeme stručně $A_1 \equiv [x_1]$.

1. Určete vzdálenost $\overline{A_1A_2}$ bodů A_1, A_2 přímky r a rozhodněte, zda pořádek A_1A_2 je souhlasný nebo nesouhlasný se zvoleným smyslem na

přímce r. Řešte úlohy pro tyto body (ke každé úloze načrtněte obrázek):

a) $A_1 \equiv [0]$; $A_2 \equiv [\sqrt{2}]$; b) $A_1 \equiv [5]$; $A_2 \equiv [0]$; c) $A_1 \equiv [0]$; $A_2 \equiv [-3]$; d) $A_1 \equiv [-6]$; $A_2 \equiv [0]$; e) $A_1 \equiv [2 - \sqrt{3}]$, $A_2 \equiv [\sqrt{3}]$; f) $A_1 \equiv [5\sqrt{3}]$; $A_2 \equiv [2\sqrt{3}]$; g) $A_1 \equiv [-7\sqrt{5}]$; $A_2 \equiv [-2\sqrt{5}]$; k) $A_1 \equiv [-2]$; $A_2 \equiv [-2\sqrt{2}]$; i) $A_1 \equiv [-\frac{3}{5}]$; $A_2 \equiv [\frac{3}{4}]$; j) $A_1 \equiv [4]$; $A_2 \equiv [-0,3]$.

2. Na přímce r jsou dány dva různé body $A_1 \equiv [x_1]$, $A_2 \equiv [x_2]$. Určete souřadnici x_0 bodu Q tak, aby:

   a) $x_0 = \frac{3}{4} \cdot \overline{A_1A_2}$; b) $x_0 = -\frac{3}{4} \cdot \overline{A_1A_2}$; c) $\overline{A_2Q} = \frac{2}{3} \cdot \overline{A_1A_2}$ (jsou dvě možnosti); d) $\overline{A_1Q} = \frac{3}{2} \cdot \overline{A_1A_2}$, při čemž A_1A_2, A_1Q jsou dvě opačné polopřímky; e) bod Q ležel na prodloužení úsečky A_1A_2 za bod A_2 a aby bylo $\overline{A_1Q} = m$, kde m je kladné dané číslo.

   Numerické výpočty proveďte pro $x_1 = 7$, $x_2 = -5$, $m = 3$.

3. Které podmínky splňují souřadnice x vnitřních bodů A úsečky A_1A_2, ležící na přímce r, jestliže souřadnice x_1, x_2 bodů A_1, A_2 jsou kořeny rovnice $x^2 - 2x - 15 = 0$? Jsou-li A, A' dva různé takové body, je $\overline{AA'} < \overline{A_1A_2}$; dokažte výpočtem.

4. Na přímce r jsou dány body $P' \equiv [-6]$, $A_1 \equiv [3]$, $A_2 \equiv [-4]$, $A_3 \equiv [-9]$; určete souřadnice x'_1, x'_2, x'_3 bodů A_1, A_2, A_3, jestliže počátkem souřadnic je bod P' a jestliže se smysl na přímce r a) nezměnil, b) změnil v opačný!

5. Stanovte bod $M \equiv [m]$, jestliže pro jeho vzdálenost $v \equiv \overline{MN}$ od daného bodu $N \equiv [n]$ platí $16v^2 - 6v - 1 = 0$. Kolik je takových bodů M a ve kterém pořádku následují?

6. Dokažte, že poloha středu $S \equiv [x]$ úsečky A_1A_2, ležící na přímce r, nezávisí a) na volbě počátku, b) na smyslu přímky r. Je dáno $A_1 \equiv [x_1]$, $A_2 \equiv [x_2]$.

7. Vyjádřete podmínky, které splňuje souřadnice x_0 bodu Q, který leží s body $A_1 \equiv [x_1]$, $A_2 \equiv [x_2]$ na přímce r, jestliže bod Q leží a) uvnitř úsečky A_1A_2, b) na prodloužení úsečky A_1A_2 za bod A_1, c) na prodloužení úsečky A_1A_2 za bod A_2.

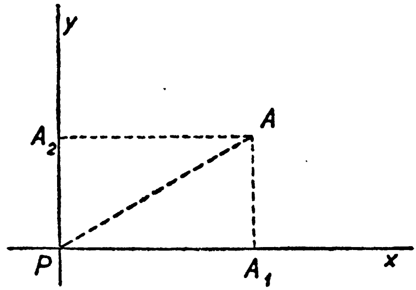
   Co je nutno předpokládat o daných číslech x_1, x_2?

8. Budtež $A \equiv [x_1]$, $B \equiv [x_2]$ dva různé body a $S \equiv [x]$ střed úsečky AB, která leží na přímce r. Dokažte:

   a) Jestliže bod $Q \equiv [x_0]$ leží uvnitř úsečky AB, potom platí
   $$\overline{SQ} = \tfrac{1}{2}\,|\,\overline{QA} - \overline{QB}\,|.$$
   b) Jestliže bod $Q \equiv [x_0]$ leží na prodloužení úsečky AB, potom platí:
   $$\overline{SQ} = \tfrac{1}{2}\,(\overline{QA} + \overline{QB}).$$
   Proveďte též důkaz planimetricky. [Sestrojte bod Q' souměrně sdružený k bodu Q vzhledem ke středu souměrnosti S.]

2. Pravoúhlé souřadnice bodu v rovině.

Abychom početně vyjádřili polohu libovolného bodu v rovině, zavedeme si **soustavu souřadnic**, která se skládá ze dvou navzájem kolmých přímek, na každé z nich je zvolen určitý smysl. Tyto dvě přímky se nazývají **první a druhá osa souřadnic** nebo také **osa** x a **osa** y. Průsečík P obou os souřadnic se nazývá **počátek** soustavy souřadnic. Obyčejně volíme osu x vodorovně a její smysl odleva doprava, osu y svisle a její smysl zdola nahoru (obr. 3). Je-li nyní dán v rovině libovolný bod A, vedeme jím jednak kolmici na osu x, jejíž patu označíme A_1, jednak kolmici na osu y, jejíž patu označíme A_2. Nazveme bod A_1 **prvým průmětem** a bod A_2 **druhým průmětem** bodu A. Na každé z obou souřadnicových os máme dán počátek P a máme na ní zvolen určitý smysl; proto bod A_1 má na první ose souřadnic určitou souřadnici



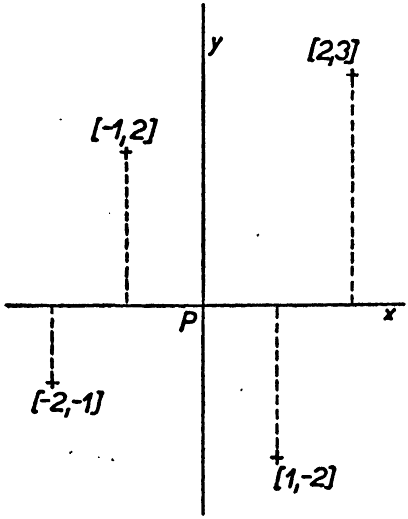
Obr. 3.

$$x = \pm \overline{PA_1}, \qquad (1)$$

bod A_2 má na druhé ose souřadnic určitou souřadnici

$$y = \pm \overline{PA_2}. \qquad (2)$$

Při tom v (1) platí znamení plus, jestliže bod A_1 leží napravo od počátku neboli jestliže bod A leží napravo od osy y, a znamení minus, jestliže bod A_1 leží nalevo od počátku neboli jestliže bod A leží nalevo od osy y; leží-li bod A na ose y, splyne bod A_1 s počátkem a máme $x = 0$. Podobně ve (2) platí znamení plus, jestliže bod A_2 leží nad počátkem neboli jestliže bod A leží nad osou x, a znamení minus, jestliže bod A_2 leží pod počátkem neboli jestliže bod A leží pod osou y; leží-li bod A na ose x, splyne bod A_2 s počátkem a máme $y = 0$. Při zvolené soustavě souřadnic určuje bod A jednoznačně hodnoty obou souřadnic x, y podle vzorců (1), (2); obráceně, známe-li obě souřadnice x, y, je jimi jednoznačně určena poloha bodu A v rovině, neboť souřadnice x určuje jednoznačně polohu bodu A_1 na ose x, souřadnice y určuje jednoznačně polohu bodu A_2 na ose y; tím je však také určena poloha bodu A, neboť A je průsečík přímky vedené bodem A_1 kolmo na osu x s přímkou vedenou bodem A_2 kolmo na osu y. Čísla x, y se jmenují **souřadnice bodu** A v rovině; číslo x se jmenuje **první souřadnice** nebo **souřadnice** x, také **úsečka** (latinsky **abscissa**) bodu A; číslo y se jmenuje **druhá souřadnice** nebo **souřadnice** y, také **pořadnice** (latinsky **ordináta**) bodu A. Názvy úsečka (abscissa), pořadnice (ordináta), kterých nebudeme užívati, bylo nutné zde uvésti z historických důvodů, neboť se dodnes často vyskytují v matematické literatuře; ale zejména název úsečka pro pojem zcela odlišný od úsečky ve smyslu elementární geometrie je velmi nevhodný a neúčelný. V následujícím píšeme $A \equiv [x; y]$ ($\equiv$ je znamení totožnosti), abychom naznačili, že bod A má souřadnice x, y. V obr. 4. jsou vyznačeny body $[2; 3]$; $[-1; 2]$; $[-2; -1]$; $[1, -2]$.



Obr. 4.

V matematické literatuře pojednávající o analytické geometrii je zakořeněným zvykem označovat první souřadnici písmenem x, druhou písmenem y, při čemž různé body se rozlišují indexy, t. j. je zvykem mluvit o bodech $[x_0; y_0]$, $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$ atd.

Zvolíme-li si v rovině určitou polohu obou os souřadnic a smysl každé osy, je podle předcházejícího poloha každého bodu roviny jednoznačně určena hodnotami obou souřadnic a obráceně jsou obě souřadnice libovolného bodu jednoznačně určeny polohou tohoto bodu. V matematické literatuře se studují také mnohé jiné způsoby, jak početně vystihnout polohu libovolného bodu v rovině pomocí dvou čísel, ač tyto jiné způsoby nejsou součástí osnov gymnasia; také při těchto jiných způsobech je zvykem mluvit o souřadnicích; souřadnice ve smyslu zde popsaném se potom určitěji nazývají **pravoúhlé souřadnice.** Budeme však říkat krátce jenom souřadnice, protože jiných souřadnic než pravoúhlých nebudeme užívat.

Body na první ose souřadnic mají *druhou* souřadnici rovnou nule; body na druhé ose souřadnic mají *první* souřadnici rovnou nule. Každá z obou os souřadnic dělí rovinu na dvě poloroviny: osa x dělí rovinu na horní a dolní polorovinu, při čemž bod $[x; y]$ leží uvnitř horní poloroviny je-li $y > 0$; uvnitř dolní, je-li $y < 0$. Osa y dělí rovinu na pravou a levou polorovinu, při čemž bod $[x; y]$ leží uvnitř pravé poloroviny, je-li $x > 0$;

uvnitř levé poloroviny, je-li $x < 0$. Příležitostně si všímáme také rozdělení roviny na čtyři části (pravé úhly) oběma osami souřadnic zároveň. Tyto části roviny se obyčejně nazývají **kvadranty** a mluví se o prvním až čtvrtém kvadrantu v pořadí naznačeném římskými číslicemi v obr. 5.

Z definice souřadnic je dále patrné:

I. Jestliže

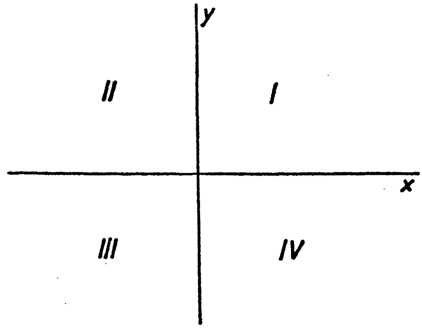
$$x' = x, \quad y' = -y, \tag{3}$$

je bod $[x'; y']$ souměrný obraz bodu $[x; y]$ podle osy x.

II. Jestliže

$$x' = -x, \quad y' = y, \tag{4}$$

je bod $[x'; y']$ souměrný obraz bodu $[x; y]$ podle osy y.



Obr. 5.

III. Jestliže

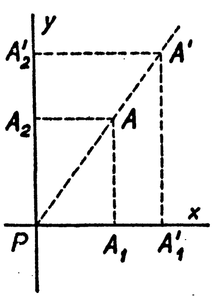
$$x' = -x, \quad y' = -y,$$

je bod $[x'; y']$ souměrný obraz bodu $[x; y]$ podle středu P.

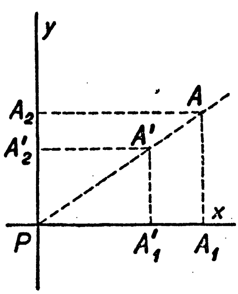
Dále si dokážeme, že je-li c libovolné číslo různé od nuly a je-li

$$x' = cx, \quad y' = cy, \tag{5}$$

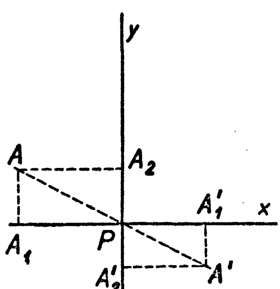
je $[x'; y']$ obraz bodu $[x, y]$ při stejnolehlosti (P, c), t.j. stejnolehlosti se středem P a koeficientem c (v učebnici pro 1. třídu). Budiž (obr. 6a pro $c > 1$, obr. 6b pro kladné $c < 1$, obr. 6c pro $c < 0$) $A' \equiv [x'; y']$ obraz bodu $A \equiv [x; y]$, potom obrazy průmětů A_1, A_2 bodu A jsou prů



Obr. 6a.



Obr. 6b.



Obr. 6c.

měty A_1', A_2' bodu A'. Protože při stejnolehlosti každá délka se znásobí číslem $|c|$, jest $\overline{PA_1'} = |c| \cdot \overline{PA_1}$, $\overline{PA_2'} = |c| \cdot \overline{PA_2}$ neboli $|x'| = |c| \cdot |x|$, $|y'| = |c| \cdot |y|$ a z pravidel pro znamení souřadnic bodu zjistíme snadno, že ve všech případech platí (5).

Poznámka 1. V analytické geometrii je poloha bodu $A \equiv [x; y]$ vystižena jeho pravoúhlými souřadnicemi x, y, t. j. dvěma reálnými čísly. Místo dvojice reálných čísel x, y můžeme užít také jediného komplexního čísla $x + \mathrm{i}\, y$, které nazveme **komplexní souřadnice** bodu A. Komplexních souřadnic jsme užívali v 2. třídě v hodinách aritmetiky.

Poznámka 2. Pochopení předepsané látky z analytické geometrie nezbytně vyžaduje rýsování obrazců s určitymi číselnými údaji; na druhé straně je však také třeba, aby práce spojená s přibližným určením polohy bodu na základě číselně předepsaných souřadnic a obráceně s přibližným určením velikosti souřadnic narýsovaného bodu nebyla zdlouhavá, neboť nesmí odváděti pozornost od zásadně důležitých poznatků. Proto se někdy doporučuje užívat při analytické geometrii sešitu se čtverečkovaným papírem. To není vhodné, neboť množství vytištěných čar značně ztěžuje přehlednost obrazce. Mnohem výhodnější je pracovat s nelinkovaným sešitem a užívat čtverečkované (půlcentimetrové nebo milimetrové) podložky.

Cvičení.

V dalších cvičeních analytické geometrie značí $A \equiv [x; y]$ bod A, jehož souřadnice jsou x, y. Potom $[x_1; y_1]$ $[x_2; y_2]$ značí přímku nebo úsečku určenou body $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$. Dále $A \equiv [x + \mathrm{i}y]$ značí bod $A \equiv [x; y]$, při čemž x, y jsou reálná čísla.

9. Budiž $[x; y]$ daný bod, který neleží na osách souřadnic a m, n dvě libovolná reálná čísla. Které podmínky splňují čísla m, n, jestliže bod $[x + m; y + n]$ leží uvnitř téhož kvadrantu jako bod $[x; y]$?

10. $[x; y]$, $[x'; y']$ jsou dva různé body.
a) Co tedy platí o jejich souřadnicích?
b) Co platí o souřadnicích těchto bodů, jestliže první bod má větší vzdálenost od osy y než druhý?
c) Co platí o souřadnicích bodu $[x'; y']$, jestliže leží od bodu $[x; y]$ (1) „napravo“, (2) „nahoru“? Vysvětlete tyto úmluvy!

11. Načrtněte v rovině souřadnicovou soustavu o počátku P a vyznačte body $[x; y]$, o jejichž souřadnicích platí:
a) $2 \leqq x \leqq 5$; $y \geqq 1{,}5$; b) $-5 \leqq x \leqq 2$; $y \leqq -1{,}5$;
c) $x = 6$; $2 < y \leqq 8$; d) x, y jsou čísla celá;
e) $-3 < x < 0$; $0 < y < 4$; f) $x = y$; g) $x = -y$.

12. Co je geometrickým místem bodů $[x; y]$, jestliže platí:
a) $y = 0$; x libovolné; b) $x = 0$; y libovolné; c) $x = -5$; $4 < y \leq 6$?

13. Jak poznáte, že bod $[x; y]$ leží: a) uvnitř některého z lichých kvadrantů I, III? b) uvnitř některého ze sudých kvadrantů II, IV?

14. Určete čísla a, b, jestliže víte, že body

$$[2a + 3;\ 3b - 5],\ [5\,a - 4;\ 5\,b + 7]$$

jsou souměrně sdružené podle a) počátku P souřadnic, b) osy x, c) osy y!

15. Užitím souřadnic bodu dokažte, že souměrný obraz U' útvaru U podle středu v počátku P souřadnic obdržíme také tak, že určíme obraz U_x útvaru U podle osy x a potom obraz U_0 útvaru U_x podle osy y; pak je $U_0 \equiv U'$. Také můžeme nejprve určit obraz U_y útvaru U podle osy y a poté obraz U' útvaru U_y podle osy x.

16. Body $A \equiv [-3; 4]$, $B \equiv [2; 5]$, $C \equiv [-2; -3]$ jsou vrcholy trojúhelníka ABC. Určete obraz $A'B'C'$ trojúhelníka ABC při stejnolehlosti (P, c), t. j. splývá-li střed stejnolehlosti s počátkem P souřadnic, a je-li $c \neq 0$ daný koeficient stejnolehlosti. Volte a) $c = \frac{5}{3}$, b) $c = -\frac{5}{3}$.

Jaký je vztah mezi oběma trojúhelníky $A'B'C'$, $A''B''C''$, které v těchto cvičeních obdržíte? Naznačte též konstruktivní řešení úlohy.

17. Je-li $A \equiv [x + iy]$ libovolný bod roviny, potom bod $A' \equiv c\,[(x + iy)]$ je jeho obraz při stejnolehlosti (P, c). Dokažte.
Může být $A \equiv P$?

18. Na přímce PX, kde $P \equiv [0; 0]$, $X \equiv [x; y]$ určete bod $X' \equiv [x'; y']$ tak, aby a) $\overline{PX'} = c \cdot \overline{PX}$, kde $c > 0$; b) $\overline{XX'} = m \cdot \overline{PX}$, kde $m > 0$.
Volte $X \equiv [-3; 4]$, $c = \frac{7}{2}$, $m = \frac{2}{3}$.

19. Užitím stejnolehlosti dokažte, že body $[-3; 4]$, $[6; -9]$, $[0; 0]$ neleží na jedné přímce.
Jak musíte změnit některou souřadnici druhého bodu, aby všechny tři body ležely v jedné přímce?

3. Změna počátku. Vzdálenosti a směrové úhly.

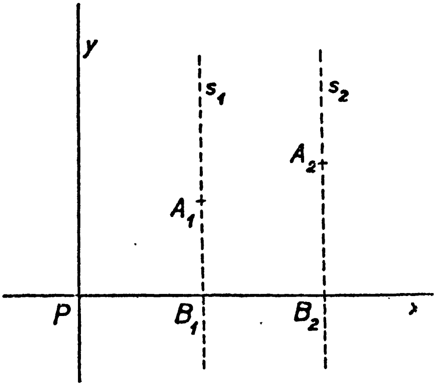
V předcházejícím jsme se rozhodli pro *jednoznačně určené směry obou os souřadnic*; naproti tomu volba *počátku* jest (a nutně musí býti) neurčitá. Vliv změny počátku na souřadnice je popsán následující větou, kterou můžeme považovat za *základní větu analytické geometrie*:

Jsou-li $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ jakékoli dva body, jsou rozdíly

$$x_2 - x_1, \qquad y_2 - y_1 \tag{1}$$

nezávislé na volbě počátku.

Důkaz stačí provésti pro rozdíl $x_2 - x_1$, neboť důkaz pro rozdíl $y_2 - y_1$ je úplně stejný.

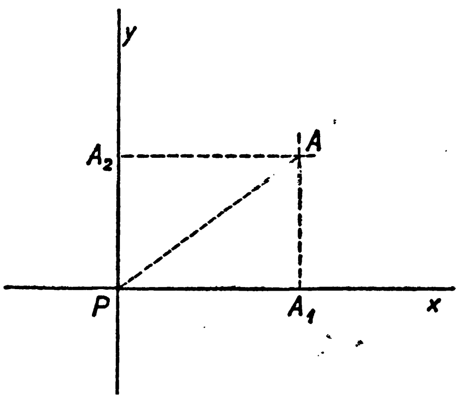


Obr. 7.

Označme (obr. 7) s_1, s_2 svislé přímky (rovnoběžky s osou y) vedené body A_1, A_2. Přímky s_1, s_2 jsou nezávislé na volbě počátku. Jsou-li B_1, B_2 průsečíky přímek s_1, s_2 s osou x, jsou čísla x_1, x_2 souřadnice bodů B_1, B_2 na ose x a podle článku 1 je $|x_2 - x_1|$ vzdálenost bodů B_1, B_2, která je zřejmě rovna vzdálenosti přímek s_1, s_2. Je tedy absolutní hodnota čísla $x_2 - x_1$ nezávislá na volbě počátku. Totéž však platí i o znamení čísla $x_2 - x_1$, neboť na př. $x_2 - x_1 > 0$ znamená, že bod B_2 leží napravo od bodu B_1 neboli že přímka s_2 leží napravo od přímky s_1; podobně $x_2 - x_1 < 0$ znamená, že přímka s_2 leží nalevo od přímky s_1; $x_2 - x_1 = 0$ znamená, že obě přímky s_1, s_2 splynou.

Jestliže bod P' má při počátku P souřadnice a, b, potom bod A, který má při počátku P souřadnice x, y, má při počátku P' souřadnice x', y', kde

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{2}$$



Obr. 8.

Jestliže totiž v základní větě zvolíme za A_1 bod P', za A_2 bod A, potom rozdíly (1) při počátku P jsou $x - a$, $y - b$; tytéž rozdíly při počátku P' jsou $x' - 0$, $y' - 0$ neboli x', y' a z toho plyne (2).

Vzdálenost bodu $A \equiv [x; y]$ od počátku je rovna $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Důkaz. Jestliže bod A neleží na žádné z obou souřadnicových os (obr. 8) a jestliže A_1, A_2 jsou oba průměty bodu A, jest PA_1AA_2 obdélník s rozměry $\overline{PA} = |x|$, $\overline{PA_2} = \overline{AA_1} = |y|$ a podle Pythagorovy věty je tedy $\overline{PA} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$ neboli $\overline{PA} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tím je věta dokázána pro $x \neq 0$, $y \neq 0$.
Ježto však

$$\sqrt{x^2 + 0^2} = |x|, \quad \sqrt{0^2 + y^2} = |y|,$$

je věta správná, i když $y = 0$ nebo $x = 0$.

Vzdálenost bodů $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ je rovna výrazu

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

Důkaz. Jelikož výraz (3) je nezávislý na volbě počátku, stačí provésti důkaz pro případ, že počátek je v bodě A_1, t. j. že $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Ale v tomto případě věta plyne z předchozí věty.

Nyní budeme definovat **směrový úhel přímky** p. Předpokládáme, že na přímce p je zvolen určitý smysl. Pojmu úhel dáváme ten výraz, který byl podrobně vysvětlen v učebnici pro 2. třídu v kap. III, čl. 2, tedy přihlížíme-li také ke *smyslu* směrového úhlu. Směrový úhel φ přímky p je úhel, jehož vrchol je v počátku P, jehož první rameno je kladná část osy x a jehož druhé rameno je souhlasně rovnoběžné s přímkou p. Číslo vyjadřující velikost úhlu φ (v obloukové míře) není jednoznačně stanoveno; je-li φ_0 jedna možná hodnota velikosti úhlu φ, jsou všecky možné hodnoty dány vzorcem

$$\varphi = \varphi_0 + 2n\pi; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{4}$$

Jednoznačně jsou stanovena čísla $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, Z definice funkcí sinus a kosinus podaných v učebnici pro 2. třídu kap. III, čl. 3, následuje, že bod s komplexní souřadnicí $\cos\varphi + i \sin\varphi$ neboli bod

$$[\cos\varphi; \sin\varphi] \tag{5}$$

leží na druhém rameni směrového úhlu ve vzdálenosti od počátku rovné jedné.

Předpokládejme nyní, že přímka p prochází počátkem P a je určena dalším svým bodem $A \equiv [x; y]$, při čemž nechť daný smysl je smysl PA. Potom druhé rameno směrového úhlu je polopřímka PA, která tedy obsaliuje bod (5). Je-li r vzdálenost $\overline{PA}$, je tudíž bod A obrazem bodu (5) při stejnolehlosti (P, r), takže podle vzorce (5) článku 2 (str. 95) jest

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{6}$$

Buďtež nyní $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ dva různé body, budiž r jejich vzdálenost a budiž φ směrový úhel přímky A_1A_2, při čemž máme na mysli smysl A_1A_2. Potom jest

$$x_2 - x_1 = r\cos\varphi, \quad y_2 - y_1 = r\sin\varphi. \tag{7}$$

Důkaz. Jestliže bod A_1 je počátkem, platí (7) podle (6). Avšak čísla r, φ jsou nezávislá na volbě počátku a podle základní věty platí totéž o levých stranách rovnic (7), takže (7) platí obecně.

Je-li přímka dána dvěma body, můžeme její směrový úhel φ vypočísti na základě (7). Můžeme nejprve určit r podle (3) a potom máme

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{r}. \tag{8}$$

Tedy k výpočtu čísel $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ je třeba napřed určit odmocninu (3). V analytické geometrii obyčejně nepočítáme $\cos\varphi$ ani $\sin\varphi$, nýbrž $\operatorname{tg}\varphi$. Podle (7) nebo (8) jest

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{9}$$

Číslo $\operatorname{tg}\varphi$ se jmenuje **směrnice přímky.** Je však si třeba všimnout, že číslo $\operatorname{tg}\varphi$ není definováno, jestliže $\cos\varphi = 0$, t. j. **přímky rovnoběžné s osou y nemají směrnici.**

Pojem směrového úhlu přímky p závisí na smyslu přímky p. Jestliže jednomu z obou smyslů přísluší směrový úhel φ, potom jednou z hodnot směrových úhlů příslušných opačnému smyslu je $\varphi + \pi$. Víme (v. učebnici pro 2. třídu, (11), kap. III, čl. 3), že $\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi$, $\sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$, takže čísla $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ změní znamení při změně smyslu přímky. To je v souhlase se vzorci (7), neboť změna smyslu odpovídá výměně obou bodů $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$. Protože $\operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi : \cos\varphi$, **je směrnice přímky táž při obou možných smyslech,** což je zase potvrzeno vzorcem (9).

Směrnici přímky nejčastěji značíme písmenem k; podle (9) máme tedy vzorec

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{10}$$

pro směrnici přímky určené dvěma body. Připomeňme si znovu, že přímky rovnoběžné s osou y nemají směrnici. Pro takovou přímku zřejmě souřadnice x všech bodů na přímce je konstanta (stálá veličina), t. j. máme $x_2 = x_1$, $x_2 - x_1 = 0$, a zlomek napravo v (10) nemá smyslu. Pro přímku rovnoběžnou s osou x zase souřadnice y všech bodů na přímce je konstanta, t. j. máme $y_2 = y_1$, $y_2 - y_1 = 0$, a zlomek napravo v (10) je roven 0. **Směrnice přímky rovnoběžné s osou x je rovna nule.** Jestliže však *přímka není rovnoběžná* s žádnou osou souřadnic, potom dva různé body přímky nemohou souhlasit ani v souřadnici x, ani v y, t. j. v (10) je $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$; přímka má směrnici a tato směrnice je rozdílna od nuly. Pro $x_2 > x_1$ neboli $x_2 - x_1 > 0$ je při kladném k také $y_2 - y_1 > 0$ neboli $y_2 > y_1$, při záporném k je $y_2 - y_1 < 0$ neboli $y_2 < y_1$. Tedy, **má-li přímka kladnou směrnici, potom smysl od levé strany k pravé je zároveň smysl zdola nahoru; má-li přímka zápornou směrnici, potom smysl od levé strany k pravé je zároveň smysl shora dolů.**

Cvičení.

20. Určete nové souřadnice vrcholů trojúhelníka ABC, kde $A \equiv [-5; 4]$, $B \equiv [4; 1]$, $C \equiv [3; -2]$, jestliže nový počátek je bod: a) $[-5; 0]$, b) $[0; -2]$; c) $[4; 1]$; d) střed úsečky AC.

21. Budiž $X' \equiv [x' + iy']$ libovolný bod a $P' \equiv [a + ib]$ určitý bod roviny. Potom bod $X \equiv [x + iy]$, kde $x = x' + a$, $y = y' + b$ je obrazem součtu komplexních čísel $x' + iy'$, $a + ib$. Bod X vznikne posunutím bodu X' o vektor o počátečním bodu P a koncovém bodu $P' \equiv [a + ib]$. Jestliže stejně posuneme i bod P do nové polohy P' a s ním i souřadnicové osy x, y do nové polohy x', y', bude mít v nové soustavě bod X stejné souřadnice x', y', jako měl bod X' v soustavě původní, je tedy $x' = x - a$, $y' = y - b$, čímž jsou znovu dokázány vztahy (2). Proveďte podrobně.

22. Jak je třeba zvolit nový počátek souřadnic P', aby bod $[u; v]$: a) padl na novou osu x'? b) padl na novou osu y'? c) měl v nové soustavě souřadnice $x' = 0$, $y' = 0$?

23. Určete vzdálenosti souřadnicového počátku P od těchto bodů: $[-3; 4]$, $[12; -5]$, $[0; -9]$, $[-\frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{1}{2}]$, $[-1; 1]$.

24. Určete druhou souřadnici bodu $A \equiv [x; y]$, jestliže $\overline{PA} = 5$ a je-li: a) $x = -4$; b) $y = -1$; c) $x = 0$; d) $x = -5$; e) $y = 6$. V kterém případě nemá úloha řešení?

25. Vypočtěte vzdálenost dvojice bodů: a) $[-3; 7]$; $[-3; -2]$; b) $[9; 0]$; $[6; -5]$; c) $[0; -3]$; $[0; 4]$.

26. a) Na ose x určete bod X tak, aby $\overline{XM} = 5$, je-li $M \equiv [3; 3]$. b) Na ose y určete bod Y tak, aby $\overline{YM} = 13$, je-li $M \equiv [-6; -5]$.

27. Úsečka $[7; 3]$ $[-2; 1]$ je základnou rovnoramenného trojúhelníka, jehož třetí vrchol leží: a) na ose x; b) na ose y. Určete jeho souřadnice.

28. Body $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ určují nenulovou úsečku. Buďtež A_1', A_2' pravoúhlé průměty daných bodů do osy x a A_1'', A_2'' pravoúhlé průměty daných bodů do osy y.

a) Určete souřadnice bodů A_1', A_2', A_1'', A_2''!
Kdy je $A_1' \equiv A_2'$ a kdy $A_1'' \equiv A_2''$? Může nastat obojí současně?

b) Budiž $S \equiv [x; y]$ střed úsečky A_1A_2 a S', S'' jeho pravoúhlé průměty do os souřadnic. Víme, že SS', SS'' jsou střední příčky v lichoběžnících $A_1A_2A_2'A_1'$ a $A_1A_2A_2''A_1''$, pokud ovšem není $A_1' \equiv A_2'$ nebo $A_1'' \equiv A_2''$. Protože souřadnice bodů S', S'' dovedete určit ze souřadnic bodů A_1', A_2' nebo A_1'', A_2'', určíte tím i souřadnice bodu S. Proveďte podrobně diskusi.

29. Víme, že úhly φ, φ' považujeme za stejné, jestliže se jejich velikosti liší o celistvý násobek úhlu 2π. Rozhodněte, které z těchto úhlů považujete za stejné:

a) 11π; -3π; -5π; b) $\frac{3}{2}\pi$; $-\frac{9}{2}\pi$; $2\pi - \frac{7}{2}\pi$;
c) $2 - \pi$; $3\pi + 2$; $4(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\pi)$; $4 - 3\pi$.

30. Narýsujte v rovině osy souřadnic a libovolnou přímku MN, jejíž smysl je MN. Je-li φ její směrový úhel, vyšetřte graficky hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. [Na př. kolem bodu M opište kružnici s poloměrem $r = 1$ dm a označte K její průsečík s polopřímkou MN; velikosti průmětů úsečky MK do os x, y opatřené vhodným znaménkem jsou hledané hodnoty.]

31. Bod $J \equiv [\cos\varphi; \sin\varphi]$ určuje přímku PJ, jejíž smysl je PJ a jejíž směrový úhel je φ nebo $\varphi + 2n\pi$ (kde $n = 0, \pm 1; \pm 2 \ldots$). Naproti tomu bod $J' \equiv [\cos\varphi', \sin\varphi']$, kde $\varphi' = \varphi + \pi$ určuje opačný smysl PJ' v přímce PJ; tento smysl odpovídá druhému směrovému úhlu φ' přímky PJ. Dokažte.

32. Na základě výsledku předchozího cvičení narýsujte v rovině, v níž jste zvolili soustavu souřadnic, přímku MN, která prochází bodem $M \equiv [-3; 2]$ a o jejímž směrovém úhlu φ platí: a) $\cos\varphi = \frac{3}{5}$; $\sin\varphi < 0$; b) $\cos\varphi = -1$; c) $\cos\varphi < 0$; $\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; d) $\sin\varphi = -1$; e) $\sin\varphi = -0{,}8$.
V kterém případě není úloha jednoznačná?

33. Daný bod A určuje přímku PA i co do smyslu. Určete hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ směrového úhlu φ přímky PA; jestliže je:

a) $A \equiv [-12; 5]$; b) $A \equiv [-8; 6]$; c) $A \equiv [1; -1]$; d) $A \equiv [-6; 0]$;
e) $A \equiv [0; -3]$.

34. Přímka MN je i co do smyslu určena pořádkem MN daných bodů M, N; budiž φ její směrový úhel. Určete hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ a $\operatorname{tg}\varphi$, je-li: a) $M \equiv [2; 3]$; $N \equiv [6; 6]$; b) $M \equiv [2; 3]$; $N \equiv [-10; -2]$; c) $M \equiv [-2; 6]$; $N \equiv [4; -2]$; d) $M \equiv [-4; 9]$; $N \equiv [6; 9]$.
Udejte pak bez výpočtů hodnoty $\cos\varphi'$, $\sin\varphi'$ směrového úhlu φ' přímky MN, který odpovídá smyslu určenému pořádkem NM.

35. Je-li $\varphi' = \varphi + \pi$, je $\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi$ a oba body $T' \equiv [1; \operatorname{tg}\varphi']$, $T \equiv [1; \operatorname{tg}\varphi]$ splývají. Nelze tedy pomoci směrnice $\operatorname{tg}\varphi$ přímky PT vyjádřit oba její smysly. Srovnejte se cvič. 31 a vysvětlete.

36. Narýsujte osy souřadnic, bod $M \equiv [-4; 3]$ a přímku r, která tímto bodem prochází a jejíž směrnice k je: a) $\frac{3}{4}$; b) $-\frac{3}{2}$; c) 3; d) -2; e) 0.
Pro kterou přímku procházející bodem M nelze udat směrnici?

37. Body $M \equiv [3; -4]$, $N \equiv [-1; 2]$ a $Q \equiv [1; y]$ leží v jedné přímce. Určete směrnici této přímky jednak užitím bodů M, N, jednak bodů M, Q; srovnáním obou výsledků snadno určíte neznámou souřadnici y bodu Q.

38. Jsou dány body $R \equiv [3; 4]$, $S = [-1; 2]$, $T \equiv [1; 3]$, $U = [-5; 0]$.
a) Je-li φ směrový úhel přímky RS, potom užitím hodnot $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ lze dokázat, že body T, U také leží na této přímce. Proveďte!
b) Je-li O střed úsečky TU, rozhodněte o pořádku bodů O, R, S, T, U.
c) Kterou část předchozích cvičení a), b) můžete řešit užitím směrnice přímky?

4. Výpočet úhlů.

Budeme počítati nejprve úhel*)

$$\alpha = \widehat{A_1PA_2}, \tag{1}$$

jehož vrchol je v počátku P a jehož ramena procházejí body $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$, jejichž souřadnice známe. Jsou-li r_1, r_2 vzdálenosti

$$\overline{PA_1} = r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \overline{PA_2} = r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \tag{2}$$

a jsou-li φ_1, φ_2 směrové úhly přímek PA_1, PA_2 (ve smyslu od P k A_1 nebo k A_2), máme podle vzorce (6) článku 3 (str. 100):

$$x_1 = r_1 \cos\varphi_1, \quad y_1 = r_1 \sin\varphi_1;$$
$$x_2 = r_2 \cos\varphi_2, \quad y_2 = r_2 \sin\varphi_2,$$

neboli s užitím komplexních čísel

$$x_1 + \mathrm{i}\, y_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + \mathrm{i} \sin\varphi_1),$$
$$x_2 + \mathrm{i}\, y_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + \mathrm{i} \sin\varphi_2) \tag{3}$$

---

*) Nepíšeme $\sphericalangle A_1PA_2$, nýbrž $\widehat{A_1PA_2}$, abychom naznačili, že jde o úhel ve smyslu popsaném v učebnici pro 2. třídu.

a také

$$x_1 - i\,y_1 = r_1 (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1). \tag{4}$$

Z bodu [$\cos \varphi_1$; $\sin \varphi_1$] vznikne však bod [$\cos \varphi_2$; $\sin \varphi_2$] otočením v kladném smyslu o úhel α. Proto je (v. učebnici pro 2. třídu)

$$\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2 = (\cos \alpha + i \sin \alpha)\ (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1).$$

Znásobíme na obou stranách číslem $\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1$ a všimneme-li si, že

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\ (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) = \cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1,$$

dostaneme

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1)\ (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

takže podle (3) a (4) jest

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = \frac{(x_1 - i\,y_1)\ (x_2 + i\,y_2)}{r_1 r_2}.$$

Ježto

$$(x_1 - i\,y_1)\ (x_2 + i\,y_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

máme posléze

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{r_1 r_2}, \quad \sin \alpha = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{r_1 r_2}. \tag{5}$$

Jestliže

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0, \tag{6}$$

je $\sin \alpha = 0$, t. j. obě ramena PA_1, PA_2 buďto splynou nebo jsou to opačné polopřímky neboli je buďto $\alpha = 0$ nebo $\alpha = \pi$; který z těchto dvou případů nastane, závisí na znamení čísla $\cos \alpha$, t. j. na znamení čísla $x_1 x_2 + y_1 y_2$, neboť čísla r_1, r_2 jsou jistě kladná. Jestliže

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, \tag{7}$$

je $\cos \alpha = 0$ a úhel α je pravý: $\alpha = \pm \frac{1}{2} \pi$, t. j. z ramene PA_1 vznikne rameno PA_2 otočením o pravý úhel v kladném nebo v záporném smyslu; který z obou případů nastane, závisí na znamení čísla $\sin \alpha$, t. j. na znamení čísla $x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Jestliže neplatí (7), je $\cos \alpha \neq 0$ a existuje $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha$; podle (5) jest

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2}. \tag{8}$$

Jestliže $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, t. j. jestliže žádná z obou přímek PA_1, PA_2 není svislá, můžeme do předcházejících vzorců zavést směrnice

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad k_2 = \frac{y_2}{x_2} \tag{9}$$

těchto přímek. Jest

$$x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2\,(1 + k_1k)_2, \qquad x_1y_2 - x_2y_1 = x_1x_2(k_2 - k_1),$$

takže podmínka (7) pro kolmost zní

$$1 + k_1k_2 = 0, \tag{10}$$

a rovnice (8) nabude tvaru

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{11}$$

Je důležité míti na paměti, že v předcházejícím α všude znamená úhel, o který je třeba otočiti *v kladném smyslu* (proti ručičkám hodinovým) polopřímku PA_1, aby přešla v polopřímku PA_2. Tento úhel α je určen (v obloukové míře) *až na násobky* 2π; chceme-li míti α *jednoznačně definováno*, můžeme žádati na př., aby bylo

$$-\pi < \alpha \leqq \pi. \tag{12}$$

K určení velikosti α nestačí znáti $\operatorname{tg} \alpha$, t. j. nestačí vzorec (8) nebo (11), nýbrž je třeba znáti ještě, jaké znamení má $\sin \alpha$ nebo $\cos \alpha$ (známe-li jedno z obou znamení, známe i druhé, protože známe $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha$). Ježto $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, podle (5) má $\sin \alpha$ totéž znamení jako čitatel a $\cos \alpha$ totéž znamení jako jmenovatel zlomku napravo v (8). O zlomku napravo v (11) platí totéž, je-li $x_1x_2 > 0$, t. j. mají-li obě čísla x_1, x_2 totéž znamení. Mají-li však čísla x_1, x_2 každé jiné znamení, má $\sin \alpha$ opačné znamení než čitatel a $\cos \alpha$ opačné znamení než jmenovatel zlomku napravo v (11). Zejména úhel α je ostrý nebo tupý podle toho, zdali $\cos \alpha > 0$ či $\cos \alpha < 0$; tedy úhel α je ostrý jestliže $1 + k_1k_2$ má totéž znamení jako x_1x_2, úhel α je tupý, jestliže $1 + k_1k_2$ má opačné znamení než x_1x_2.

V předcházejícím jsme probírali úhel $\widehat{A_1PA_2}$, jehož vrchol je v počátku. Ze základní věty analytické geometrie (str. 98) plyne, že jestliže jde o úhel $\alpha = \widehat{A_1A_0A_2}$ s libovolným vrcholem A_0, při čemž

$$A_0 \equiv [x_0; y_0], \quad A_1 \equiv [x_1; y_1], \quad A_2 \equiv [x_2; y_2],$$

všecky vzorce tohoto článku zůstanou v platnosti, jestliže do nich místo x_1, y_1, x_2, y_2 **dáme** $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $x_2 - x_0$, $y_2 - y_0$.

Cvičení.

39. Podobně jako v textu na str. 94 určete úhel $\alpha = \widehat{A_1PA_2}$, kde $A_1 \equiv [-3 - 4i]$, $A_2 \equiv [-12 + 5i]$, tím, že určíte jednotkové číslo $\cos\alpha + i\sin\alpha$, o němž by platilo
$$\frac{-3-4i}{\overline{PA_1}} \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{-12+5i}{\overline{PA_2}};$$
při tom se omezte na a) $0 \leq \alpha < 2\pi$, b) $-\pi < \alpha \leq \pi$.

40. Předchozí cvičení 39 řešte užitím: a) vzorců (5) na str. 104, b) vzorce (11) na str. 105.

41. Jsou dány body $A \equiv [3; -6]$; $B \equiv [6; -3]$; $C \equiv [1; 2]$.
a) Dokažte, že $\triangle ABC$ je pravoúhlý, a rozhodněte, který úhel je pravý. Udejte různé způsoby řešení.
b) O který úhel je třeba v kladném smyslu otočit polopřímku BA okolo bodu B, aby po prvé splynula s polopřímkou BC? Rozhodněte, zda v tomto úhlu leží vnitřek trojúhelníka ABC.

42. Víte, že úhly trojúhelníka jsou duté. Podle toho snadno určíte úhly trojúhelníka ABC, je-li $A \equiv [-2; 1]$, $B \equiv [-1; 1]$, $C \equiv [-3; 2]$.

43. Určete úhel, o který je třeba otočit přímku p_1, aby se i co do smyslu pokryla s přímkou p_2. Smysly přímek jsou udány polopřímkami PA_1, PA_2, kde $A_1 \equiv [\cos\varphi_1; \sin\varphi_1]$, $A_2 \equiv [\cos\varphi_2; \sin\varphi_2]$.

44. Buďtež φ_1, φ_2 směrové úhly přímek p_1, p_2. Smysly těchto přímek určují polopřímky PA_1, PA_2, kde $A_1 \equiv [\cos\varphi_1; \sin\varphi_1]$, $A_2 \equiv [\cos\varphi_2; \sin\varphi_2]$. Určete úhel α, o který je třeba otočit přímku p_1, aby byla souhlasně rovnoběžná s přímkou p_2, je-li:
a) $A_1 \equiv [-\frac{1}{2}\sqrt{3};\ \sin\varphi_1 > 0]$, $A_2 \equiv [\frac{1}{2};\ \sin\varphi_2 < 0]$;
b) $A_1 \equiv [\cos\varphi_1 > 0; -\frac{1}{2}\sqrt{3}]$, $A_2 \equiv [\cos\varphi_2 < 0; -\frac{1}{2}\sqrt{2}]$;
c) $A_1 \equiv [-\frac{4}{5};\ \sin\varphi_1 > 0]$, $A_3 \equiv [-\frac{12}{13};\ \sin\varphi_2 < 0]$.

45. Víme, že otočíme-li danou polopřímku AB o úhel $\frac{1}{3}\pi$, je souhlasně rovnoběžná s polopřímkou CD. Je dáno: $A \equiv [\sqrt{2}; 0]$, $B \equiv [0; -\sqrt{2}]$, $C \equiv [5; 5]$, $D \equiv [x; 2]$. Určete souřadnici x bodu D.

46. Buďtež φ_1, φ_2 směrové úhly polopřímek PA_1, PA_2, kde $A_1 \equiv [\cos\varphi_1 = -\frac{3}{5};\ \sin\varphi_1 < 0]$, $A_2 \equiv [\cos\varphi_2; \sin\varphi_2]$. Určete bod A_2 tak, aby $\widehat{A_1PA_2}$ byl a) $\frac{1}{2}\pi$, b) $\frac{3}{2}\pi$, c) $\frac{5}{6}\pi$; d) 0; e) π.

47. Předchozí cvič. 46. řešte užitím vzorce (11) na str. 105.

5. Rovnice přímky.

Budiž nejprve p svislá přímka (rovnoběžná s osou y). Přímka p protne osu x v bodě, jehož souřadnice na ose x budiž c. Pro každý bod $[x; y]$ na přímce p je potom
$$x = c \tag{1}$$

a obráceně každý bod $[x; y]$, pro který platí rovnice (1), leží na přímce p. Říkáme, že (1) je **rovnice přímky rovnoběžné s osou y.**

Budiž nyní p přímka, která *není rovnoběžná s osou y*. Přímka p má určitou směrnici, kterou označíme k. Předpokládejme nejprve, že přímka p prochází počátkem. Potom pro každý bod $[x; y]$ přímky p různý od počátku platí rovnice

$$\frac{y}{x} = k, \tag{2}$$

kterou můžeme psáti také ve tvaru

$$y = kx; \tag{3}$$

rovnice (3) platí pro *každý* bod přímky p, počátek nevyjímajíc. Obráceně každý bod $[x; y]$, pro který platí rovnice (3), leží na přímce p, neboť jsou-li dána dvě čísla x, y tak, že $y = kx$, tu protože přímka p není rovnoběžná s osou y, musí na ní ležet bod $[x; Y]$, jehož první souřadnice je rovná danému číslu x. Protože $[x; Y]$ leží na přímce p, jest $Y = kx$; ježto také $y = kx$, je $y = Y$, t. j. body $[x; y]$, $[x; Y]$ splynou a to znamená, že bod $[x; y]$ leží na přímce p. Pravíme, že (3) je **rovnice přímky, která prochází počátkem a má směrnici k.**

Předpokládejme nyní, že přímka p se směrnicí k prochází bodem $[x_1; y_1]$. Kdybychom počátek posunuli do bodu $[x_1; y_1]$, zůstala by hodnota směrnice nezměněna a rovnice přímky by byla

$$y' = kx',$$

kde x', y' jsou změněné souřadnice bodu $[x; y]$. Avšak mezi původními souřadnicemi x, y kteréhokoli bodu a změněnými souřadnicemi x', y' platí [v. (2) na str. 98] vztahy

$$x' = x - x_1, \quad y' = y - y_1.$$

Tedy

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{4}$$

je **rovnice přímky, která prochází bodem $[x_1; y_1]$ a má směrnici k.** Jestliže $x_1 = 0$, leží bod $[x_1; y_1] \equiv [0; y_1]$ na ose y. Položíme $y_1 = q$ a ze (4) dostaneme: **Rovnice přímky, která má směrnici k a která protne osu y v bodě $[0; q]$,** zní:

$$y = kx + q. \tag{5}$$

Nyní snadno určíme rovnici přímky p, která prochází dvěma danými body $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$, které ovšem musí býti různé. Jsou dva možné případy. Jestliže předně obě čísla x_1, x_2 jsou rovna témuž číslu c, přímka p je rovnoběžná s osou y a má rovnici (1). Jestliže za druhé čísla x_1, x_2 jsou navzájem různá, má přímka p směrnici

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

a její rovnice je (4), kde za k jest dosaditi hodnotu (6).

Každá přímka p je buďto rovnoběžná s osou y, takže má rovnici tvaru (1), nebo má určitou směrnici k a protne osu y v určitém bodě $[0; q]$, načež má rovnici tvaru (5). Obráceně každá rovnice tvaru (1) nebo (5) je rovnicí určité přímky: (1) je rovnice přímky, která jde bodem $[c; 0]$ rovnoběžně s osou y; (5) je rovnice přímky jdoucí dvěma různými body $[0, q]$, $[1; k + q]$.

Rovnice (1) a (5) lze psáti

$$1 \cdot x + 0 \cdot y - c = 0; \qquad -k \cdot x + 1 \cdot y - q = 0.$$

Jsou to tedy zvláštní případy **lineární rovnice,** jestliže lineární rovnicí rozumíme vztah mezi souřadnicemi x, y tvaru

$$ax + by + c = 0, \tag{7}$$

kde a, b, c jsou určitá čísla (konstanty) a aspoň jedno z obou čísel a, b je různé od nuly. Obráceně **každá lineární rovnice je rovnicí určité přímky.** Budiž dána lineární rovnice (7). Jestliže předně je $b = 0$, musí býti $a \neq 0$; rovnice (7) zní $ax + c = 0$ a dá se upravit na tvar $x = -\frac{c}{a}$; je to tedy rovnice přímky, která prochází bodem $\left[-\frac{c}{a};\ 0\right]$ rovnoběžně s osou y. Jestliže za druhé je $b \neq 0$, lze rovnici (7) upravit na tvar

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

t. j. na tvar (5). Tím je naše tvrzení dokázáno. Zároveň vidíme, že „přímka (7)“, t. j. přímka, určená rovnicí (7), má směrnici

$$k = -\frac{a}{b}, \tag{8}$$

je-li $b \neq 0$; je-li $b = 0$ (tedy $a \neq 0$), přímka (7) je rovnoběžná s osou y a nemá směrnici.

Důležité je poznat, kdy dvě lineární rovnice

$$a_1x + b_2y + c_1 = 0, \tag{7'}$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \tag{7''}$$

určují touž přímku. Jistě tomu tak je, jsou-li koeficienty obou rovnic sobě úměrné, t. j. existuje-li takové číslo s, že

$$a_2 = sa_1, \quad b_2 = sb_1, \quad c_2 = sc_1. \tag{9}$$

Jelikož aspoň jedno z čísel a_2, b_2 musí býti různé od nuly, je nutně $s \neq 0$ a rovnici (7'') lze psáti ve tvaru

$$s\,(a_1x + b_2y + c_1) = 0,$$

z čehož je patrné, že má naprosto stejný význam jako rovnice (7'), takže obě rovnice určují touž přímku. Obráceně, *jestliže dvě lineární rovnice (7'), (7'') určují touž přímku, potom jejich koeficienty jsou si úměrné.*

Důkaz. I. Budiž nejprve $b_1 = 0$, takže přímka (7') je rovnoběžná s osou y. Ježto přímka (7'') splyne s přímkou (7'), je také $b_2 = 0$. Potom však musí býti $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, takže lze určit číslo $s \neq 0$ tak, že $a_2 = sa_1$. Rovnice (7'), (7'') potom znějí

$$a_1x + c_1 = 0, \qquad sa_1x + c_2 = 0$$

a dají se upravit na tvar

$$x = -\frac{c_1}{a_1}, \qquad x = -\frac{c_2}{sa_1}.$$

Jelikož obě rovnice určují touž přímku, musí býti

$$-\frac{c_2}{sa_1} = -\frac{c_1}{a_1}, \quad \text{tedy } c_2 = sc_1,$$

t. j. platí všecky tři rovnice (9).

II. Budiž za druhé $b_1 \neq 0$, takže přímka (7') není rovnoběžná s osou y. Ježto přímka (7'') splyne s přímkou (7'), je také $b_2 \neq 0$. Lze tedy určit číslo $s \neq 0$ tak, že $b_2 = sb_1$. Rovnice (7'), (7'') se potom dají

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}, \qquad y = -\frac{a_2}{sb_1}x - \frac{c_2}{sb_1}.$$

Protože obě přímky splynou, mají jednak touž směrnici, tedy

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{sb_1}, \quad \text{t. j. } a_2 = sa_1,$$

jednak protnou osu y obě v témž bodě $[0; q]$, tedy

$$-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{sb_1}, \quad \text{t. j. } c_2 = sc_1.$$

Tedy platí všecky tři rovnice (9).

Nakonec si povězme několik slov o tom, jak sestrojit přímku p danou lineární rovnicí

$$ax + by + c = 0. \tag{7}$$

Je-li předně $b = 0$, lze (7) upravit na tvar

$$x = -\frac{c}{a};$$

přímka p je rovnoběžná s osou y a její průsečík s osou x umíme sestrojit. Je-li za druhé $a = 0$, lze (7) upravit na tvar

$$y = -\frac{c}{b};$$

přímka p je rovnoběžná s osou x a její průsečík s osou y umíme sestrojit. Je-li za třetí $a \neq 0$, $b \neq 0$, ale $c = 0$, pak rovnice (7) zní $ax + by = 0$. Přímka p prochází počátkem a mimo to na př. bodem $[b; -a]$ a bodem $[-b; a]$. Leží-li tento bod mimo nákresnu, sestrojíme místo něho bod $[\frac{1}{2}b; -\frac{1}{2}a]$ nebo $[\frac{1}{3}b; -\frac{1}{3}a]$ atd. Leží-li bod $[b; -a]$ příliš blízko počátku, sestrojíme místo něho bod $[2b; -2a]$ nebo $[3b; -3a]$ atd. Budiž za čtvrté $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Přímka p není rovnoběžná s žádnou osou souřadnic a neprochází počátkem; protne tedy obě osy souřadnic ve dvou různých bodech, které stačí sestrojit. Průsečík přímky p s osou x je bod $\left[-\frac{c}{a}; 0\right]$; dostaneme jej, jestliže do (7) dosadíme $y = 0$ a pak vypočteme x. Průsečík přímky p s osou y je bod $\left[0; -\frac{c}{b}\right]$; dostaneme jej, jestliže do (7) dosadíme $x = 0$ a pak vypočteme y. Může se stát, že některý z obou průsečíků přímky p padne mimo nákresnu nebo že oba průsečíky jsou si tak blízko, že je těžké pomocí jich přímku sestrojit. Pomůžeme si tím, že si opatříme nějaký jiný bod přímky tím, že vhodně zvolíme jednu z obou souřadnic x, y a druhou pak vypočteme z rovnice (7). Na př. u přímky $5x - 6y + 1 = 0$ průsečíky se souřadnicovými osami jsou $[-\frac{1}{5}; 0]$, $[0; \frac{1}{6}]$ a nejsou příliš vhodné ke konstrukci. Zvolíme-li však na př. $x = 1$, vypočteme $y = 1$; zvolíme-li $x = -2$, vypočteme $y = -\frac{3}{2}$; přímku sestrojíme výhodně jako spojnici bodů $[1; 1]$, $[-2; -\frac{3}{2}]$.

Cvičení.

48. Načrtněte geometrické místo bodů $[x; y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici: a) $y = x$; b) $y = -x$; c) $y = |x|$; d) $y = kx$, e) $y = |kx|$; f) $y = k \cdot |x|$; g) $y = |k| \cdot x$; h) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$. Provádějte diskusi.

49. Bod $M \equiv [x + iy]$ lze psát ve tvaru $M \equiv r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $r \geqq 0$. a) Co je geometrickým místem bodů M, jestliže je φ konstanta a $r \geqq 0$ nabývá všech možných reálných hodnot.
b) Co je geometrickým místem bodů $N \equiv [t \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)]$, kde φ je konstanta a $t \leqq 0$? (Srovnejte s bodem $N' \equiv [r(\cos\varphi' + i\sin\varphi')]$, kde $r = |t|$ a $\varphi' = \varphi + \pi$).
c) Co je geometrickým místem bodů $N \equiv [t(\cos\varphi + i\sin\varphi)]$, kde φ je konstanta a t nabývá všech reálných hodnot?
(Uvažujte stejnolehlost bodů $J \equiv [\cos\varphi; \sin\varphi]$ a N vzhledem ke středu stejnolehlosti P).

50. Napište rovnici přímky jdoucí souřadnicovým počátkem P a bodem: a) $[3; 4]$, b) $[-3;$ [illegible]$]$; c) $[-6; -8]$; d) $[1{,}5; -1]$.
Vysvětlete, jak na první pohled poznáte, že některé z těchto přímek splývají.

51. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $[-2; 3]$ a a) jejíž směrnice $k = -\frac{2}{3}$; b) jejíž směrnice $k = 0$; c) jejíž směrový úhel je $\frac{7}{4}\pi$.

52. Který směrový úhel $0 \leqq \varphi < 2\pi$ můžete přisoudit přímce o rovnici: a) $y = -x + 2$; b) $y = -4$; c) $x = -2$?

53. Narýsujte souřadnicové osy a libovolnou přímku. Napište její rovnici.

54. Určete, ve kterých bodech protíná přímka MN osy souřadnic a osy kvadrantů, je-li:
a) $M \equiv [2; 3]$; $N \equiv [6; 6]$; b) $M \equiv [-3; 4]$; $N \equiv [1{,}5; -2]$;
c) $M \equiv [-4; 9]$; $N \equiv [6; 9]$; d) $M \equiv [-5; 2]$; $N \equiv [-5; -3]$.

55. Rozhodněte, které z bodů $H \equiv [-1; y_1]$, $K \equiv [x_2; -3]$ mohou ležet na přímce MN ze cvič. 54; proč úloha nemá v některých případech řešení.

56. Rozhodněte, které z bodů $[4; \frac{9}{2}]$; $[0; 0]$; $[-2; 1]$ leží na přímce MN ze cvič. 54 a.

57. a) Dokažte, že na přímce o rovnici $3x - 2y + 14 = 0$ leží bod $M \equiv [-2; 4]$.
b) Znásobte rovnici z předchozího cvičení libovolným číslem $s \neq 0$ (na př. $s = -3$) a dokažte, že souřadnice bodu M rovněž nové rovnici vyhovují. Který z toho plyne geometrický důsledek?

58. Je dána přímka s o rovnici $ax + bx + c = 0$. Jestliže $P' \equiv [m; n]$ je nový počátek souřadnic, kterou rovnici má přímka s v nové soustavě souřadnic?

59. Určete neznámé konstanty m, n v rovnici
$$(3 - m)\,x + 12\,y + 2 - n = 0,$$
víte-li, že přímka určená touto rovnicí je totožná s přímkou o rovnici $y = \frac{2}{3}(x + 2)$.

60. Přímka prochází bodem $M \equiv [4; -3]$ a má směrnici k; napište její rovnici a určete průsečíky X, Y přímky s osami souřadnic. Určete hodnotu k tak, aby $\triangle\, PXY$ měl obsah 3.

61. Dokažte: Přímka, která prochází bodem $M \equiv [x_1; y_1]$ a jejíž směrnice je k, prochází také bodem $[x_1 + 1; y_1 + k]$ a bodem $[x_1 + n; y_1 + nk]$, kde $n \neq 0$ je libovolné reálné číslo.
Užijte toho k narýsování přímky určené bodem M a směrnicí k.

62. Narýsujte přímku, jejíž rovnice zní:
a) $4\,x - 3\,y + 10 = 0$; b) $5\,x + 3\,y = 39$; c) $\frac{2}{3}\,x - \frac{5}{2}\,y = 0$;
d) $\frac{2}{3}\,y - 5 = 0$; f) $\frac{2}{3}\,x + 4 = 0$.
Určete směrnice těchto přímek. Je to vždy možné?

63. Určete konstantu c v rovnici $3\,x - 4\,y + c = 0$, víte-li, že přímka vyjádřená touto rovnicí prochází bodem: a) $[-5; 4]$; b) $[0; 0]$.

64. a) Jestliže přímka o rovnici $ax + by + c = 0$ prochází bodem $[x_1; y_1]$, pak její rovnici lze psát ve tvaru $a\,(x - x_1) + b\,(y - y_1) = 0$. Dokažte.
b) Dokažte i obrácenou větu.
c) Co tedy platí o rovnici přímky, která prochází bodem $[0; 0]$?

65. Co soudíte o vzájemné poloze přímek o rovnicích:
a) $y = kx + q$; $y = kx + q'$?
b) $y = kx + q$; $y = -\dfrac{1}{k} \cdot x + q'$, kde $k \neq 0$? Co když je $q' = q$?
c) $ax + by + c = 0$; $ax + by + c' = 0$?
d) $ax + by + c = 0$; $bx - ay + c' = 0$?
e) $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, při čemž je $a' = s \cdot a$, $b' = s \cdot b$, kde $s \neq 0$. Kdy tyto přímky navzájem splývají?

66. Napište rovnici přímky, procházející bodem $[3; 5]$, a) rovnoběžné, b) kolmé k přímce o rovnici $2\,x - 7\,y + 3 = 0$. (Úlohu můžete řešit užitím výsledků předchozího cvičení 65).

6. Parametrické vyjádření úsečky.

Budiž dán bod $A_0 = [x_0; y_0]$ různý od počátku. Pomocí stejnolehlosti $(P; t)$ se středem v počátku, s koeficientem stejnolehlosti t kladným a menším než jedna, dostaneme z bodu A_0 libovolný bod $[x; y]$ ležící uvnitř úsečky PA_0. Podle vzorce (5) článku 2 (str. 95) jest

$$x = tx_0, \quad y = ty_0. \tag{1}$$

Vzorec (1) vyjadřuje souřadnice libovolného bodu uvnitř úsečky PA_0 na základě pomocné veličiny t, kterou nazýváme **parametr.** Abychom dostali celý vnitřek úsečky PA_0, je třeba dáti parametru t všecky možné hodnoty takové, že

$$0 < t < 1. \tag{2}$$

Říkáme, že rovnice (1) spolu s podmínkou (2) dávají parametrické vyjádření vnitřku úsečky PA_0. Parametrické vyjádření celé úsečky PA_0 (i s oběma krajními body) dostaneme, jestliže podmínku (2) nahradíme podmínkou

$$0 \leqq t \leqq 1, \tag{3}$$

neboť pro $t = 0$ dává (1) počátek P, pro $t = 1$ dává (1) bod A_0. Jestliže koeficient stejnolehlosti t probíhá všecka kladná čísla (ne tedy pouze kladná čísla menší než jedna), potom (1) s podmínkou

$$t > 0 \tag{4}$$

je parametrické vyjádření vnitřku polopřímky PA_0. Podobně (1) s podmínkou

$$t \geqq 0 \tag{5}$$

je parametrické vyjádření celé polopřímky PA_0 (i s jejím počátkem P). Jestliže posléze v (1) probíhá parametr t všecky reálné hodnoty $t > 0$, $t < 0$ i $t = 0$, jest (1) parametrické vyjádření přímky PA.

Buďtež nyní

$$A_1 \equiv [x_1; y_1], \qquad A_2 \equiv [x_2; y_2]$$

dva libovolné různé body. Snadno dokážeme, že

$$x = x_1 + t\,(x_2 - x_1), \qquad y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \tag{6}$$

je parametrické vyjádření

vnitřku úsečky A_1A_2,	jestliže $0 < t < 1$;
celé úsečky A_1A_2,	jestliže $0 \leqq t \leqq 1$;
vnitřku polopřímky A_1A_2,	jestliže $t > 0$;
celé polopřímky A_1A_2,	jestliže $t \geqq 0$,
přímky A_1A_2,	jestliže t probíhá všecka reálná čísla.

Rovnice (6) lze psáti ve tvaru

$$x - x_1 = t\,(x_2 - x_1), \qquad y - y_1 = t\,(y_2 - y_1);$$

v tomto tvaru se v nich vyskytují pouze rozdíly souřadnic

$$x_2 - x_1,\ y_2 - y_1; \quad x - x_1,\ y - y_1,$$

které podle základní věty analytické geometrie (str. 98) jsou nezávislé na volbě počátku. Jestliže však volíme počátek v bodě A_1, jest $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ a (6) přejde v (1) až na ten zcela nepodstatný rozdíl, že místo x_0, y_0 máme nyní x_2, y_2. Tím jsou veškerá učiněná tvrzení dokázána.

Budiž nyní

$$ax + by + c = 0 \tag{7}$$

rovnice přímky p, takže a, b, c, jsou konstanty, z nichž první obě dvě nejsou současně rovné nule. Jestliže bod $[x; y]$ leží na přímce p, je vyhověno rovnici (7). Jestliže však bod $[x; y]$ *neleží* na přímce p, není vyhověno rovnici (7), t. j. číslo

$$ax + by + c \tag{8}$$

je různé od nuly, tedy je buďto kladné nebo je záporné. Tím jsme vedeni k rozdělení těch bodů $[x; y]$, které neleží na přímce p, na dvě třídy podle toho, zda číslo (8) je kladné či záporné. Je nasnadě domněnka, že takto početně určené dvě třídy bodů nejsou nic jiného než vnitřky obou polorovin vyťatých přímkou p. Pomocí parametrického vyjádření úsečky snadno dokážeme, že tomu skutečně tak jest. Buďtež tedy $A_1 \equiv [x_1; y_1]$, $A_2 \equiv [x_2; y_2]$ dva různé body, z nichž žádný neleží na přímce p, takže obě čísla

$$s_1 = ax_1 + by_1 + c, \qquad s_2 = ax_2 + by_2 + c \tag{9}$$

jsou různá od nuly. Máme dokázati, že když obě čísla s_1, s_2 mají totéž znamení, úsečka A_1A_2 nemá žádný společný bod s přímkou p, kdežto v případě, že čísla s_1, s_2 mají opačná znamení, úsečka A_1A_2 protne přímku p. Za tím účelem užijeme parametrického vyjádření (6), v kterém $0 < t < 1$. Jde o to, zda lze určiti t tak, aby bylo vyhověno rovnici (7). Dosadíme-li do (7) hodnoty (6), dostaneme

$$ax_1 + at(x_2 - x_1) + by_1 + bt(y_2 - y_1) + c = 0,$$

což lze snadno uvésti na tvar

$$t(ax_2 + by_2 + c) + (1 - t)(ax_1 + by_1 + c) = 0,$$

neboli podle (9) na tvar

$$(1 - t)s_1 + ts_2 = 0. \tag{10}$$

Pro $0 < t < 1$ jsou obě čísla t, $1 - t$ kladná; jestliže také obě čísla s_1, s_2 jsou kladná, je levá strana v (10) stále kladná a rovnici (10) nelze vyhověti. Jestliže obě čísla s_1, s_2 jsou záporná, levá strana v (10) je stále záporná a opět rovnici (10) nelze vyhověti. Tedy jestliže obě čísla s_1, s_2 mají totéž znamení, nemá úsečka A_1A_2 žádný společný bod s přímkou p. Jestliže však z čísel s_1, s_2 jedno je kladné a druhé záporné, je

$$\frac{s_2}{s_1} = -c \text{ , při čemž je } c \text{ kladné,}$$

a rovnici (10) lze uvésti na tvar $1 - t - ct = 0$. Tato rovnice má kořen

$$t = \frac{1}{1 + c}$$

a jest $0 < t < 1$, takže tento kořen určuje bod (6) úsečky A_1A_2 ležící na přímce p.

Cvičení.

67. Napište parametrické vyjádření přímky PA, kde $P \equiv [0; 0]$, $A \equiv [3; -4]$ a určete, pro které hodnoty parametru t leží bod $[x; y]$ přímky PA uvnitř přímého pásu určeného rovnoběžkami: a) $x = -8$; $x = -3$; b) $y = -3$; $y = 2$.

68. Napište parametrické vyjádření přímky MN, kde $M \equiv [-7; 1]$, $N \equiv [2; -3]$, a to takové, aby hodnotě parametru $t = 0$ odpovídal bod N a hodnotě $t = 1$ bod M.
Rozhodněte, který z bodů $[20; -11]$, $[3; -2]$, $[11; 1]$ leží na dané přímce MN.

69. Narýsujte libovolnou přímku, která protíná osy souřadnic, a napište její parametrické vyjádření.

70. Z rovnic (6) na str. 113 přímky A_1A_2 vylučte parametr t. Kterou rovnici tak obdržíte? Proveďte diskusi.

71. Rovnici $y = kx + q$ přímky lze považovat za jednu parametrickou rovnici přímky, jestliže položíme $x = t$ nebo $x = -t$. Které přímky nelze takto vyjádřit?

72. a) Buďtež m, n dvě reálné konstanty, z nichž alespoň jedna je od nuly různá. Potom body $M \equiv [x; y]$ určené rovnicemi

$$x = x_0 + m \cdot t, \quad y = y_0 + n \cdot t,$$

kde x_0, y_0 jsou dané konstanty a t proměnný parametr, leží na přímce určené body $A_0 \equiv [x_0; y_0]$, $A' \equiv [x_0 + m; y_0 + n]$. Dokažte.
(Napište parametrické vyjádření přímky A_0A'.)
b) Zvolíme-li v přímce A_0A' smysl pořádkem A_0A' a označíme-li φ příslušný směrový úhel přímky, potom platí

$$\cos \varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Dokažte a vysvětlete význam konstant m, n.

c) Buďtež $t_1 < t_2$ dvě libovolné hodnoty parametru v parametrickém vyjádření přímky A_0A' v předchozím cvič. a) a M_1, M_2 k nim příslušné body přímky A_0A'. Dokažte, že pořádky A_0A' a M_1M_2 určují týž smysl v přímce. Odtud plyne, že roste-li parametr t, pohybuje se bod M ve smyslu polopřímky A_0A'.

(Vypočtěte hodnoty $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ směrového úhlu φ polopřímek A_0A' i M_1M_2.)

d) Dokažte, že vzdálenost $\overline{M_1M_2}$ obou bodů z předchozího cvičení c) je úměrná hodnotě $(t_2 - t_1)$.

e) Jestliže o číslech m, n platí $m^2 + n^2 = 1$, je $m = \cos \varphi$, $n = \sin \varphi$, při čemž φ je směrový úhel polopřímky A_0A'. Potom je-li M bod přímky příslušný parametru t, je $\overline{A_0M} = |t|$. Dokažte a vysvětlete geometrický význam konstant v parametrickém vyjádření přímky

$$x = x_0 + t \cdot \cos \varphi, \; y = y_0 + t \cdot \sin \varphi.$$

73. Napište parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem $[-3; 2]$ a o jejímž směrovém úhlu φ platí $\dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = -\dfrac{4}{3}$.

74. Dokažte, že přímky p, q, jejichž parametrické vyjádření je:

a) $x = x_1 + mt, \quad y = y_1 + nt \quad$ a $\; x = x_2 + mt', \quad y = y_2 + nt'$

jsou navzájem rovnoběžné.

b) $x = x_1 + mt, \quad y = y_2 + nt \quad$ a $\; x = x_2 - nt', \quad y = y_2 + mt'$

jsou k sobě kolmé. (Určete na př. směrnice přímek užitím bodů příslušných k hodnotám 0 a 1 parametru nebo užijte vztahů (6), (7) na str. 104; počátek souřadnic volte v bodě $[x_1; y_1]$.)

75. Parametrické vyjádření přímky p je $x = -3 + 3\,t$, $y = 4 + 4\,t$ a přímky q pak $x = 8 + 5\,t'$, $y = -12\,t'$.

a) Zobrazte obě přímky p, q. (Za jednotku volte 5 mm.)

b) Dokažte, že přímky p, q nejsou rovnoběžné a určete souřadnice jejich průsečíku A_0.

c) Určete na přímce p bod A_1 pro $t = 1$ a na přímce q bod A_2 pro $t' = 1$ a vypočítejte velikost úhlu $\widehat{A_1A_0A_2}$.

76. Planimetrické poučky můžeme dokázat užitím analytické geometrie, při čemž si vhodně volíme souřadnicovou soustavu; to jistě nemá vliv na obecnost výsledku. Dokažte tak známou poučku: Těžnice trojúhelníka ABC se protínají v jediném bodě T; je-li A_0 střed strany BC, potom dělící poměr $(AA_0T) = -2$. (Volte na př. $A \equiv [-2\,m; 0]$, $B \equiv [2\,m; 0]$, $C \equiv [2\,p; 2\,q]$, kde $q \neq 0$ a napište parametrické vyjádření úseček AA_0, BB_0, CC_0, kde A_0, B_0, C_0 jsou středy stran BC, CA, AB. Užijte výsledku cvičení 72 d.)

77. Je dána přímka l o rovnici $5x + 4y + 7 = 0$ a body $Q_1 = [-3; 2]$, $Q_2 = [-1; 3]$, $Q_3 = [-2; 1]$, $Q_4 = [1; -4]$. Rozhodněte, které dvojice daných bodů jsou přímkou l odděleny, které leží v téže polovině vyťaté přímkou l a který z bodů leží na přímce l.

78. Dokažte známé vlastnosti lichoběžníka $ABCD$ (kde je $AB \parallel DC$): Střední příčka je úsečka, která spojuje středy ramen lichoběžníka, je a) rovnoběžná s jeho základnami, b) je rovna polovičnímu součtu základen, c) leží uvnitř lichoběžníka.
(Lichoběžník je vypuklý čtyřúhelník; takový čtyřúhelník se skládá z těch bodů, které leží v opěrných polorovinách. Volte vhodně umístění bodů A, B, C, D vzhledem k souřadnicovým osám x, y.)

79. Body $A \equiv [2; 3]$, $B \equiv [-3; -1]$, $C \equiv [4; -4]$ jsou vrcholy trojúhelníka ABC. Přesvědčte se o tom!
a) Dokažte, že nejen body $M \equiv [1; 2]$, $N \equiv [-1; -1]$, ale i celá úsečka MN leží uvnitř trojúhelníka ABC.
b) Užitím parametrického vyjádření přímky MN rozhodněte, které její body neleží vně trojúhelníka ABC.
(Víte, že $\triangle ABC$ je společná část polorovin ABC, BCA, CAB.)

80. Které body úsečky $[-5; 3]$ $[7; 0]$ leží uvnitř přímého pásu určeného rovnoběžkami $y = x + 3$ a $y = x - 2$?

7. Vzdálenost bodu od přímky.

Budiž dána přímka p lineární rovnicí

$$ax + by + c = 0. \tag{1}$$

Potom **spojnice počátku s bodem $[a; b]$ stojí kolmo na přímce p.** Všimněme si napřed, že bod $[a; b]$ je jistě různý od počátku, protože v rovnici přímky nemohou býti oba koeficienty rovny nule.

Důkaz. I. Je-li $b = 0$, je přímka p rovnoběžná s osou y a bod $[a; b] \equiv [a; 0]$ leží na ose x, která stojí kolmo na přímce p.

II. Je-li $a = 0$, je přímka p rovnoběžná s osou x a bod $[a; b] \equiv [0; b]$ leží na ose y, která stojí kolmo na přímce p.

III. Budiž posléze $a \neq 0$, $b \neq 0$. Přímka p má směrnici $k = -\dfrac{a}{b}$. Spojnice počátku s bodem $[a; b]$ má směrnici $k' = \dfrac{a}{b}$. Je tedy $1 + kk' = 0$, takže obě přímky stojí na sobě kolmo [viz vzorec (10) na str. 105].

Kolmice $k \perp p$ vedená počátkem má tedy parametrické vyjádření

$$x = ta, \qquad y = tb. \tag{2}$$

Rovnice (2) znamenají souřadnice *paty kolmice k*, jestliže určíme t tak, aby bylo vyhověno rovnici (1), což dává podmínku

$$t\,(a^2 + b^2) + c = 0 \quad \text{neboli}\ t = -\frac{c}{a^2 + b^2}. \tag{3}$$

Je-li d vzdálenost počátku od přímky p, jest $d^2 = x^2 + y^2$, kde za x, y jest dosaditi ze (2) a (3). Tedy

$$d^2 = t^2\,(a^2 + b^2) = \frac{c^2}{(a^2 + b^2)^2}\cdot(a^2 + b^2) = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

a ježto d není záporné, jest

$$\frac{|\,c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{4}$$

vzdálenost počátku od přímky (1).

Hledejme nyní vzdálenost libovolného bodu $[x_1; y_1]$ od přímky (1). Jestliže místo původních souřadnic x, y zavedeme nové souřadnice x', y' s počátkem v daném bodě $[x_1; y_1]$, pak podle vzorce (2) na str. 98 jest $x' = x - x_1$, $y' = y - y_1$ neboli

$$x = x' + x_1, \qquad y = y' + y_1.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty x, y do rovnice (1), dostaneme po malé úpravě

$$ax' + by' + c' = 0,$$

kde

$$c' = ax_1 + by_1 + c.$$

Užijeme-li nyní vzorce (4) s tou změnou, že místo c dáme c', máme výsledek. **Vzdálenost bodu** $[x_1; y_1]$ **od přímky** $ax + by + c = 0$ **jest**

$$\frac{|\,ax_1 + by_1 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{5}$$

Všimněme si, že podle článku 6 výraz $ax_1 + by_1 + c$ je kladný uvnitř jedné z obou polorovin vyťatých přímkou (1), záporný uvnitř druhé z těchto polorovin.

Cvičení.

81. Určete vzdálenosti bodů $H \equiv [4; -2]$, $K \equiv [-3; 2]$, $L \equiv [0; -1]$ od přímky p o rovnici $8x - 15y - 11 = 0$ a rozhodněte, které dva z daných bodů přímka neodděluje.

82. Určete velikost výšek v trojúhelníku s vrcholy

$$A \equiv [5; 2],\ B \equiv [-2; 1],\ C \equiv [1; 5].$$

83. Přímky o rovnicích $ax + by + c = 0$, $ax + by + c' = 0$ jsou rovnoběžné. Dokažte, že jejich vzdálenost je rovna výrazu

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Proveďte výpočet pro přímky o rovnicích $3x - 4y + 10 = 0$, $8y - 15 = 6x$.

84. Určete geometrické místo bodů $[x_0; y_0]$, které mají od přímky o rovnici $12x + 5y - 52 = 0$ vzdálenost 3.

85. Určete rovnici přímky jdoucí bodem $H \equiv [5; 2]$, která má od bodu $L \equiv [-3; 1]$ vzdálenost 4. (Napište rovnici přímky jdoucí bodem H a určete její vzdálenost od bodu L; dvě možnosti.)

II. Užití analytické geometrie.

1. Lineární celistvá funkce.

Již ze střední školy víme, co znamená, že veličina y je **funkcí** jiné veličiny x (*nezávisle proměnné*). Rovněž víme ze střední školy, co je **grafické znázornění** neboli stručně **graf** funkce. Jestliže pro každou hodnotu nezávisle proměnné x zobrazíme bod $[x; y]$, jehož prvou souřadnicí je zvelená hodnota x a jehož druhou souřadnicí y je příslušná hodnota funkce, tu všecky tyto body $[x; y]$ vyplní čáru, kterou nazýváme grafem studované funkce. Pomocí grafů zachycujeme názorně důležité vlastnosti funkcí. Podrobně budeme studovati funkce a jejich grafy až ve 4. třídě. V této třídě se omezíme na lineární (v tomto článku) a kvadratickou (ve článku 3 na str. 124) celistvou funkci. **Lineární celistvá funkce** má tvar

$$y = ax + b, \tag{1}$$

kde a, b jsou daná čísla (konstanty). Ve 4. třídě budeme probírati mimo jiné *lineární lomenou funkci*, která má tvar

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

kde a, b, c, d jsou dané konstanty.

Víme, že *graf lineární celistvé funkce* (1) *je přímka, která není rovnoběžná s osou y* a že také obráceně *každá přímka, která není rovnoběžná s osou y, je grafem určité lineární celistvé funkce* (čl. 5, str. 106). Přímka rovnoběžná s osou y zřejmě nemůže býti grafem žádné funkce. Také geometrický význam obou konstant a, b v (1) je nám znám: **graf funkce (1) je přímka, která má směrnici rovnou a a která protne osu y v bodě $[0; b]$.**

Je-li $a = 0$, je funkce (1) konstanta; její graf je přímka rovnoběžná s osou x. Někdy je účelné konstanty nepočítat mezi lineární funkce.

Vyloučíme-li konstanty, jsou možné ještě dva případy podle toho, zda číslo a je kladné či záporné. Jaký geometrický význam mají tyto dva případy, o tom jsme se zmínili již na konci článku 3 na str. 101, ale bude účelné nyní se k tomu ještě vrátit.

Budiž dána libovolná funkce, která nemusí býti tvaru (1). Zvolíme-li si určitou hodnotu x_1 nezávisle proměnné a označíme-li y_1 příslušnou hodnotu funkce, máme na grafu určitý bod $[x_1; y_1]$. Je-li nyní x kterákoli jiná hodnota nezávisle proměnné a je-li y příslušná hodnota funkce, pak rozdíl $x - x_1$ (který může býti kladný nebo záporný) se nazývá **přírůstek nezávisle proměnné** a rozdíl $y - y_1$ (který může býti kladný, záporný nebo rovný nule) se nazývá **přírůstek funkce.**

Podíl

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{2}$$

nazveme **poměr přírůstků funkce.** Geometrický význam poměru přírůstků (2) je nám znám; je to směrnice přímky, která spojuje oba body grafu $[x_1; y_1], [x; y]$. Jestliže studovaná funkce *není* lineární celistvá funkce, potom hodnota poměru přírůstků (2) závisí na tom, jak byly zvoleny obě hodnoty x_1, x nezávisle proměnné. Naproti tomu u lineární celistvé funkce (1), jejíž graf je přímka, poměr přírůstků (2) je konstanta:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a \tag{3}$$

rovná směrnici přímky, která je grafem funkce.

Důležité jsou rostoucí a klesající funkce. U **rostoucí funkce** se zvětšením nezávisle proměnné se vždy zároveň zvětší také hodnota funkce a tudíž se zmenšením nezávisle proměnné se zmenší hodnota funkce. Jinak řečeno, rostoucí funkce má tu vlastnost, že kladnému přírůstku nezávisle proměnné odpovídá vždy kladný přírůstek funkce, a tudíž zápornému přírůstku nezávisle proměnné vždy odpovídá záporný přírůstek funkce. Tedy u rostoucí funkce poměr přírůstků (2) je kladný a obráceně, jestliže poměr přírůstků (2) je vždy kladný, ať jakkoli zvolíme obě různé hodnoty x_1, x nezávisle proměnné, máme rostoucí funkci. U **klesa-**

jící **funkce** naopak se zvětšením nezávisle proměnné se vždy zároveň zmenší hodnota funkce a se zmenšením nezávisle proměnné se zvětší. Přírůstek klesající funkce má vždy opačné znamení než přírůstek nezávisle proměnné. Poměr přírůstků je u klesající funkce vždy záporný; obráceně, jestliže poměr přírůstků (2) je vždy záporný, ať jakkoli zvolíme obě různé hodnoty x_1, x nezávisle proměnné, máme klesající funkci.

Ze (3) nyní plyne: **Lineární celistvá funkce (1) je rostoucí funkce, jestliže $a > 0$, a je to klesající funkce, jestliže $a < 0$.**

Cvičení.

86. Je dána funkce (1) $y = \frac{3}{2}x - 5$, (2) $y = -\frac{3}{4}x + 2$, (3) $y = -\frac{4}{5}$.
a) Zobrazte tuto funkci.
b) Který je přírůstek funkce, jestliže přírůstek nezávisle proměnné nabývá některé z těchto hodnot: ± 1; ± 2; ± 3; ... $\pm m$, kde je celé $m > 0$? Který je příslušný poměr přírůstků?

87. Určete poměry přírůstků funkcí z předchozího cvič. 86 a rozhodněte, která z funkcí je a) rostoucí, b) klesající. Co soudíte o funkci (3) ze cvič. 86 ?

88. Pro kterou hodnotu přírůstku nezávisle proměnné je přírůstek funkce $y = ax + b$ roven poměru přírůstků?
V grafech funkcí ze cvič. 86. vyznačte takové dva body $[x; y]$, $[x_1; y_1]$, pro které je předchozí požadavek splněn. Kolika způsoby to lze provést?

89. Zobrazte funkci $y = |x|$ a dokažte, že poměr přírůstků $\frac{y - y_1}{x - x_1}$:
a) je pro hodnoty $x \geqq 0$, $x_1 \geqq 0$ roven 1;
b) je pro hodnoty $x \leqq 0$, $x_1 \leqq 0$ roven -1;
c) pro hodnoty $x \geqq 0$, $x_1 < 0$ nebo pro hodnoty $x \leqq 0$, $x_1 \geqq 0$ není hodnota stálá a může nabýt kterékoli hodnoty mezi -1 a 1 včetně těchto hodnot. Na grafu funkce určete konstruktivně takové dva body $[x; y]$, $[x_1; y_1]$, aby příslušný poměr přírůstků měl předepsanou hodnotu, na př. $\frac{3}{4}$ nebo $-\frac{3}{4}$. (Narýsujte přímku o předepsané směrnici.) Proveďte také numerické řešení s diskusí.

2. Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

můžeme řešiti graficky. Každá z obou rovnic (1) sama o sobě znamená přímku; tyto přímky si můžeme narýsovat na základě jejich rovnic.

Protnou-li se obě přímky v bodě $[x; y]$, potom dvojice čísel x, y vyhovuje oběma rovnicím a tvoří jediné řešení soustavy (1). Může se však také státi, že obě přímky jsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod; také se může státi, že obě přímky splynou.

Takto docházíme pomocí analytické geometrie k obecnému výsledku o řešitelnosti a počtu řešení soustavy (1). Jsou tři možné případy; v prvém případě soustava (1) má **právě jedno řešení,** v druhém nemá **žádné řešení,** v třetím má **nekonečně mnoho řešení.**

Abychom poznali při dané soustavě (1), který ze tří případů nastane, je třeba rozhodnouti, kdy obě přímky dané rovnicemi (1) jsou rovnoběžné. To nastane jednak tehdy, jestliže obě přímky jsou rovnoběžné s osou y (a tedy nemají směrnice) neboli jestliže

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0 \tag{2}$$

nebo jestliže obě přímky mají směrnice, jež si jsou rovny, t. j. jestliže

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}. \tag{3}$$

V obou případech platí rovnice

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \tag{4}$$

Obráceně jestliže platí (4), jsou obě přímky dané rovnicemi (1) mezi sebou rovnoběžné, t. j. platí buďto (2) nebo (3). Neboť jestliže platí (4), máme dvě možnosti: buďto aspoň jedno z čísel b_1, b_2 je rovné nule nebo obě tato čísla jsou od nuly různá. Je-li však na př. $b_1 = 0$, tu se v první rovnici (1) nevyskytuje y, a proto se v ní vyskytuje x, t. j. máme $a_1 \neq 0$. Rovnice (4) pro $b_1 = 0$ však dává $a_1 b_2 = 0$ a ježto $a_1 \neq 0$, je $b_2 = 0$. Tedy pro $b_1 = 0$ je také $b_2 = 0$ a máme (2); podobně pro $b_2 = 0$ je také $b_1 = 0$ a zase máme (2). Je-li však $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, tu ze (4) snadno soudíme na (3).

Tedy v případě (4) soustava rovnic (1) buďto nemá žádné řešení (rovnice si navzájem odporují) nebo má nekonečně mnoho řešení (jedna z obou rovnic je důsledkem druhé). Naproti tomu v případě

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \tag{5}$$

soustava (1) má jediné řešení. Toto řešení se skládá ze dvou čísel x, y, souřadnic průsečíků $A \equiv [x; y]$ obou *různoběžných* přímek p_1, p_2, určených jednotlivě každá jednou z obou rovnic (1). Nejčastěji užívaná methoda k určení řešení je již ze střední školy známá **methoda sčítací.**

Při této methodě, jak známo, obě rovnice (1) se kombinují a utvoří se rovnice

$$r_1 (a_1x + b_1y + c_1) + r_2 (a_2x + b_2y + c_2) = 0. \tag{6}$$

Zvolíme-li jakkoli čísla r_1, r_2 (ne obě rovná nule), pak rovnice (6) znamená přímku, která prochází bodem A, protože dosadíme-li za x, y souřadnice bodu A, je vyhověno oběma rovnicím (1) a tudíž je vyhověno také rovnici (6). Při sčítací methodě volíme čísla r_1, r_2 tak, aby z rovnice (6) vypadlo buďto x nebo y, t. j. tak, aby přímka určená rovnicí (6) byla rovnoběžná s jednou z obou os souřadnic.

Cvičení.

90. Rozhodněte aniž provádíte řešení, které z následujících soustav mají jediné řešení, které žádné a které mají nekonečně mnoho řešení:

a) $x = \dfrac{7 + y}{2}$; $y = 2x - 5$; b) $2x - y = 8$; $4 - y = 2(2 + x)$;

c) $6(x + 1) + 5(1 - 3y) = 2$; $x + 2 = \dfrac{5y + 1}{2}$.

91. Pro které hodnoty reálných čísel m, n, p jsou přímky dané rovnicemi: (1) rovnoběžné různé, (2) splývající, (3) různoběžné:

a) $3x - 5y + 4 = 0$; $(2 - m)x - 3ny + 3 - p = 0$?

b) $5x - 7 = 0$; $(m - n)x + (m + n)y - m + p = 0$?

92. Co soudíte o vzájemné poloze přímek daných rovnicemi

$$(t + 1)x - 2ty - 2 = 0,$$

jestliže parametr t nabývá všech reálných hodnot?

93. Pro které hodnoty r_1, r_2 prochází přímka o rovnici

$$r_1 (x + 2y - 5) + r_2 (3x - y + 1) = 0$$

a) počátkem souřadnic? b) bodem $[-3; 2]$?

94. Určete rovnici přímky o směrnici 2, jestliže prochází průsečíkem přímek o rovnicích

$$x - 5y + 1 = 0,\ 2x + 3y + 4 = 0.$$

95. Určete geometrické místo m' obrazů bodů přímky m o rovnici $x + 2y - 1 = 0$ ve stejnolehlosti (P, c), ve které bodu M přímky m odpovídá bod $M' \equiv [3; 4]$.

96. Vypočítejte souřadnice průsečíku K úhlopříček čtyřúhelníka $ABCD$, kde $A \equiv [-4; 2]$, $B \equiv [1; -1]$, $C \equiv [5; -10]$, $D \equiv [-5; -3]$, a užitím poměru přírůstků lineární funkce dokažte, že bod K leží uvnitř úseček AC, BD. Pak jistě jde o vypuklý čtyřúhelník; toto zjištění dovedete užitím opěrných polorovin dokázat ještě jinak.

97. Průsečíkem přímek $3x - 2y + 4 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ prochází přímka a) rovnoběžná, b) kolmá k přímce o rovnici $4x - 5y = 0$. Určete její rovnici.

98. Vyčárkujte v rovině souřadnic tu její část, v níž leží body $[x; y]$, které vyhovují nerovnostem (jestliže úloze vyhovuje i určitá ohraničující úsečka nebo polopřímka, narýsujte ji silně):

a) $3x + 2y - 5 < 0$; $x - 2y + 1 > 0$;
b) $y + 3 \geqq 0$; $x + y - 5 < 0$; $4x - 5y + 10 \geqq 0$;
c) $x + 2y - 1 < 0$; $2x - 5y + 3 > 0$; $x + 2y - 5 \geqq 0$;
d) $x + y < 0$; $x - y > 0$; $x + 5y - 5 > 0$.

Je některá z těchto úloh neřešitelná?

99. Jsou dány funkce $y = 3x - 2$, $y = 2x + 1$. Napište funkci, která je a) součtem obou funkčních hodnot, b) rozdílem obou funkčních hodnot.

Potom dané funkce i funkci výslednou zobrazte a všimněte si těch bodů, v nichž graf výsledné funkce protíná grafy funkcí daných nebo osu x (jednotkou je 5 mm). Svá pozorování odůvodněte.

Který je poměr přírůstků výsledné funkce?

3. Parabola.

Funkce

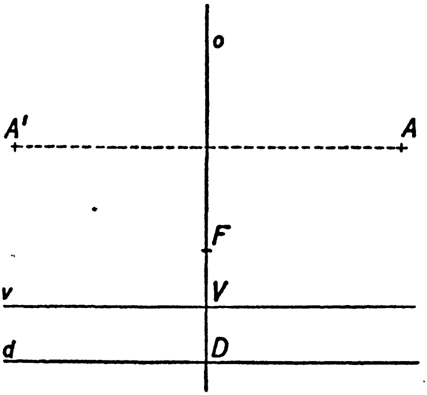
$$y = ax^2 + bx + c$$

se nazývá **kvadratická celistvá funkce**, jestliže a, b, c jsou konstanty takové, že $a \neq 0$. (V případě $a = 0$ bychom měli lineární celistvou funkci.) V článku*) si dokážeme, že graf kvadratické celistvé funkce je t. zv. parabola. **Parabola** vznikne takto: zvolíme libovolně bod F a mimo to přímku d, která neprochází bodem F. Parabola je křivka, která se skládá ze všech těch bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodu F jako od přímky d. Bod F se jmenuje **ohnisko paraboly** (latinsky focus, proto je zvykem užívati písmene F); přímka d se jmenuje **řídicí přímka** paraboly (latinsky directrix, proto je zvykem užívati písmene d).

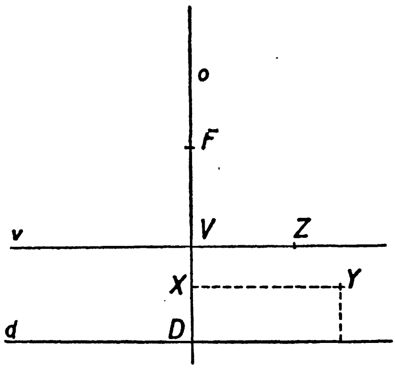
V následujícím budeme zkoumati parabolu za předpokladu, *že řídicí přímka d je vodorovná a ohnisko F leží nad přímkou d* (obr. 9). Budiž o kolmice spuštěná s bodu F na přímku d; budiž D pata této kolmice a budiž V střed úsečky FD; dále budiž v rovnoběžka s přímkou d vedená bodem V. Je-li A' souměrný obraz libovolného bodu A podle osy o, mají oba body A, A' stejnou vzdálenost od F a tytéž dva body A, A' mají také stejnou vzdálenost od d; proto jestliže bod A leží na parabole, platí totéž

*) Str. 128.

o bodu A'. Tedy parabola je souměrná podle osy o, a proto se přímka o nazývá **osa paraboly**. Zřejmě bod V leží na parabole; nazývá se **vrchol paraboly**. Mimo bod V neleží na ose o žádný jiný bod paraboly, neboť jestliže bod X leží na ose o, je jeho vzdálenost od přímky d rovna $\overline{XD}$; jestliže nyní bod X leží nad bodem V, t. j. uvnitř polopřímky VF, je $\overline{XD} > \overline{XF}$ a X neleží na parabole; jestliže bod X leží pod bodem V, t. j. uvnitř polopřímky VD, je $\overline{XD} < \overline{XF}$ a zase X neleží na parabole.



Obr. 9.

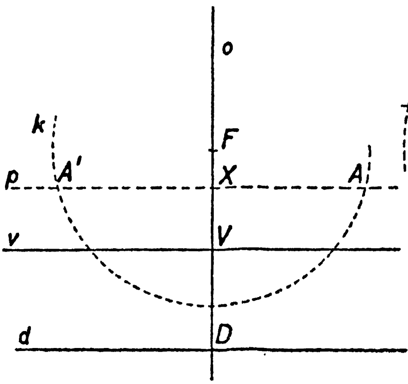


Obr. 10.

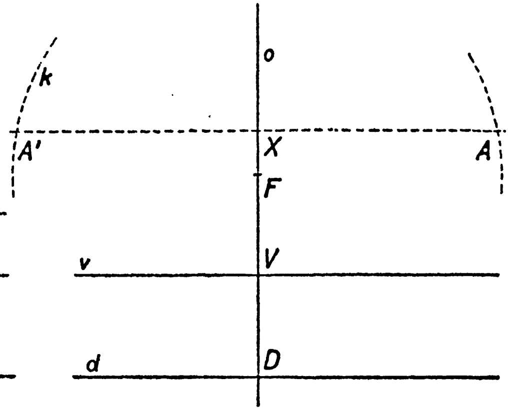
Vyšetřujme nyní body, které neleží na ose o. Především žádný bod Y ležící pod přímkou v nemůže ležet na parabole. Neboť (obr. 10) nechť X je pata kolmice spuštěné s bodu Y na přímku o. Vzdálenost bodu Y od přímky d je rovna vzdálenosti bodu X od přímky d neboli rovna úsečce XD, která je menší než XF, jež opět je menší než YF. Tedy vzdálenost Y od d je menší než vzdálenost Y od F, takže Y neleží na parabole. Podobně (obr. 10) žádný bod Z přímky v, mimo bod V, neleží na parabole. Neboť vzdálenost Z od d je rovna VD, tedy je rovna úsečce VF, která je menší než ZF. Přímka v se jmenuje **vrcholová tečna** paraboly.

Naproti tomu na každé vodorovné přímce p, která protne osu o v bodě X, ležícím nad bodem V, jsou dva body paraboly. Neboť (obr. 11 a, b) vzdálenost každého bodu přímky p od přímky d je rovna úsečce $\overline{XD} = r$, která je větší než XF, t. j. než vzdálenost bodu F od přímky p, která je tedy sečnou kružnice k opsané kolem bodu F s poloměrem r; kružnice k protne tedy přímku p ve dvou bodech A, A', které zřejmě leží na parabole.

Z toho je patrné, jak lze sestrojiti libovolný počet bodů paraboly (obr. 12). Vedeme nad přímkou v řadu přímek p_1, p_2, p_3 ... s ní rovnoběžných a na každé z nich sestrojíme na ní ležící body paraboly jako průsečíky této přímky s kružnicí opsanou kolem bodu F s poloměrem rov-



Obr. 11a.

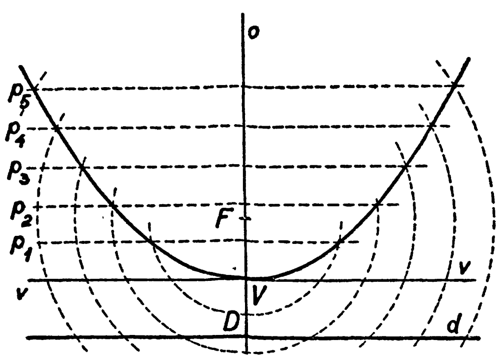


Obr. 11b.

ným vzdálenosti přímky od d. Spojením sestrojených bodů dostaneme přibližný průběh části paraboly.

Jednoduché vlastnosti paraboly, které jsme si v předcházejícím odvodili **syntheticky**, t. j. přímou geometrickou úvahou, můžeme si také odvoditi **analyticky**, t. j. pomocí souřadnic. Za tím účelem označíme p vzdálenost bodu F od přímky d (p se nazývá **parametr paraboly**); vrcholovou tečnu v zvolíme za osu x, přímku o za osu y. Pro bod F máme $F \equiv [0; \frac{1}{2} p]$; přímka d má rovnici $y = -\frac{1}{2} p$. Vzdálenost libovolného bodu $[x; y]$ od přímky d je rovna $|y + \frac{1}{2} p|$ a druhá mocnina této vzdálenosti je rovna $(y + \frac{1}{2} p)^2$; druhá mocnina vzdálenosti bodu $[x; y]$ od bodu F je rovna $x^2 + (y - \frac{1}{2} p)^2$. Tedy pro každý bod $[x; y]$ na parabole je splněna rovnice

$$x^2 + (y - \tfrac{1}{2} p)^2 = (y + \tfrac{1}{2} p)^2 \quad (1)$$



Obr. 12.

a obráceně každý bod $[x; y]$, jehož souřadnice vyhovují rovnici (1), leží na parabole. Tedy (1) je **rovnice paraboly** v neupraveném tvaru. Snadnou úpravu ji uvedeme na tvar

$$2\,py = x^2 \quad \text{neboli} \quad y = \frac{1}{2\,p} \cdot x^2. \tag{2}$$

Z rovnice (2) je patrné, že jestliže bod $[x; y]$ leží na parabole, platí totéž o bodu $[-x; y]$, který je podle str. 95 souměrným obrazem bodu $[x; y]$ podle osy o. Dále je ze (2) patrné, že bod $V \equiv [0; 0]$ leží na parabole, že pro všecky ostatní body paraboly je $y > 0$, t. j. že všecky tyto body leží nad vrcholovou tečnou v. Posléze je ze (2) patrné, že každá vodorovná přímka ležící nad přímkou v protne parabolu ve dvou bodech; neboť rovnice takové přímky je $y = c$, kde c je kladné číslo, a z rovnice (2) určíme dvě příslušné hodnoty souřadnice $x = \pm \sqrt{2\,pc}$.

Poznámka. Při odvození rovnice (2) jsme předpokládali, že ohnisko leží nad řídicí přímkou. Provedeme-li však osovou souměrnost s osou v, dostaneme novou parabolu, jejíž ohnisko $F' \equiv [0; -\frac{1}{2}\,p]$ leží pod novou řídicí přímkou d', jejíž rovnice je $y = \frac{1}{2}\,p$. Rovnice nové paraboly je [v. vzorec (3) na str. 95]

$$-2\,py = x^2 \quad \text{neboli} \quad y = -\frac{1}{2\,p}\,x^2. \tag{3}$$

Cvičení.

100. Narýsujte vrcholovou tečnu v paraboly a v jedné z obou polorovin vyťatých přímkou v zvolte ve vzdálenosti 1,5 ohnisko F.
a) Narýsujte body paraboly, které mají od vrcholové tečny vzdálenosti: 0; 1; 1, 5; 3.
b) Zvolte souřadnicovou soustavu tak, že je osa $x \equiv v$ a že osa y prochází ohniskem F; napište rovnici paraboly. (Jsou dvě možnosti.)
c) Vypočtěte souřadnice bodů paraboly, které jste sestrojili ve cvič. a).
d) Na parabole leží bod $M \equiv [6; y]$; vypočtěte jeho souřadnici y. Úlohu řešte také konstruktivně. (Je-li $D_1 \equiv [6; -1{,}5]$, uvažujte $\triangle\, MFD_1$.)

101. Načrtněte ohnisko a řídicí přímku paraboly o rovnici:
a) $4\,y = x^2$; b) $3\,x^2 + 5\,y = 0$; c) $7\,x^2 - 2\,y = 0$.

102. Určete souřadnice bodu paraboly o rovnici $8\,y = x^2$, jehož vzdálenost od ohniska paraboly je 20.

103. Buďtež dány odvěsny a, b trojúhelníka ABC; každou z nich rozdělte na n rovných dílů. Tak na odvěsně AC obdržíte body v pořádku $AA_1A_2 \ldots C$ a na odvěsně CB body v pořádku $CC_1C_2 \ldots B$. Označte

X_k průsečík přímky AC_k s kolmicí vztyčenou v bodě A_k na přímku AC. Dokažte, že body X_k a body A, B leží na parabole, která má přímku AC za vrcholovou tečnou. (Polopřímku AC zvolte za kladnou poloosu x; určete souřadnice bodu X_k a vylučte číslo n.)

104. Na základě výsledku předchozího cvičení narýsujte body paraboly o rovnici $y = \frac{3}{4} x^2$.

4. Kvadratická celistvá funkce.

Již v článku 3*) jsme si řekli, že kvadratická celistvá funkce má tvar

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

kde a, b, c jsou konstanty, $a \neq 0$. Počněme zvláštním případem $b = c = 0$, tedy

$$y = ax^2. \tag{2}$$

Ze vzorců (2) a (3) na str. 127 je patrné, že graf funkce (2) je parabola, jejíž osou je osa y a jejíž vrcholovou tečnou je osa x a že obráceně každá taková parabola je graf funkce tvaru (2), při čemž parametr paraboly se určí z toho, že

$$a = \pm \frac{1}{2p}, \quad p > 0, \tag{3}$$

tedy $p = \dfrac{1}{2|a|}$. Ohnisko je $F \equiv [0; \pm \frac{1}{2} p] \equiv \left[0; \dfrac{1}{4a}\right]$; řídicí přímka má rovnici $y = \mp \frac{1}{2} p$ neboli $1 + 4ay = 0$.

Mějme nyní parabolu s vodorovnou řídicí přímkou a s parametrem p, při čemž vrchol paraboly je $V \equiv [m; n]$. Přemístíme-li počátek do bodu V a označíme-li x', y' nové souřadnice bodu $[x; y]$, bude rovnice paraboly v nových souřadnicích znít $y' = a \cdot x'^2$, kde číslo a je dáno vzorcem (3) se znamením plus, je-li ohnisko nad řídicí přímkou, se znamením minus, je-li ohnisko pod řídicí přímkou. Avšak podle vzorce (2) na straně 98, je $x' = x - m$, $y' = y - n$, takže v původních souřadnicích rovnice paraboly zní

$$y - n = a(x - m)^2, \tag{4}$$

neboli

$$y = ax^2 - 2amx + am^2 + n, \tag{4'}$$

což je rovnice tvaru (1). Tedy každá parabola s vodorovnou řídicí přímkou je graf určité kvadratické celistvé funkce. Obráceně graf každé kvadratické celistvé funkce (1) je taková parabola. Abychom to dokázali, je

*) Str. 124.

třeba pouze zjistiti, že při daných a, b, c, při čemž $a \neq 0$, lze vždy určiti m, n tak, aby funkce (1) splynula s funkcí (4').
Podmínky pro m, n jsou

$$-2\,am = b, \qquad am^2 + n = c$$

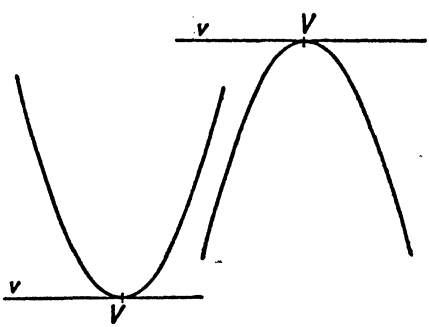
a vyhovíme jim tak, že položíme

$$m = -\frac{b}{2\,a}, \qquad n = -\frac{D}{4\,a}, \tag{5}$$

kde

$$D = b^2 - 4\,ac. \tag{6}$$

Vrchol paraboly je $[m; n]$, kde čísla m, n jsou dána vzorci (5). Parametr paraboly je dán pomocí (3). Ohnisko leží nad (pod) řídicí přímkou, jestliže číslo a je kladné (záporné). Rovnice vrcholové tečny v naší paraboly je $y = -\dfrac{D}{4\,a}$. Při kladném a (obr. 13 a) leží celá parabola až na vrchol nad vrcholovou tečnou, při záporném a (obr. 13b) leží celá parabola až na vrchol pod vrcholovou tečnou. To znamená aritmeticky, že pro $a > 0$ funkce (1) nabývá pro $x = -\dfrac{b}{2\,a}$ minima (**minimum** lat. nejmenší znamená nejmenší hodnotu funkce). Toto minimum je rovné $-\dfrac{D}{4\,a}$. Pro $a < 0$ funkce (1) nabývá pro $x = -\dfrac{b}{2\,a}$ maxima (**maximum** lat. největší znamená největší hodnotu funkce). K tomuto ryze početnímu výsledku jsme dospěli geometrickými úvahami, můžeme si jej však potvrdit počtem. Za tím účelem vypočteme přírůstek $y - y_1$ funkce (1) příslušný přírůstku $x - x_1$ nezávisle proměnné. Z rovnic



Obr. 13a. Obr. 13b.

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

vypočteme

$$y - y_1 = a\,(x^2 - x_1^2) + b\,(x - x_1),$$

neboli

$$y - y_1 = (x - x_1)\,[a\,(x + x_1) + b]. \tag{7}$$

Jestliže $[x_1; y_1] \equiv [m; n]$ je vrchol paraboly, máme pro $a > 0$ dokázati, že pro každé $x \neq x_1$ číslo (7) je kladné. Avšak

$$a(x + x_1) + b = a(x - x_1) + (2ax_1 + b)$$

a ježto $x_1 = m = -\frac{b}{2a}$, jest $2ax_1 + b = 0$, tedy

$$y - y_1 = a(x - x_1)^2,$$

což je skutečně kladné pro každé $x \neq x_1$.

Podobně pro $a < 0$, $[x_1; y_1] \equiv [m; n]$ je číslo $y - y_1$ záporné pro každé $x \neq x_1$.

Vraťme se ještě k rovnici (7) za předpokladu, že $[x_1; y_1]$ je zcela libovolný bod paraboly. Pro $x \neq x_1$ jest

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a(x + x_1) + b. \tag{8}$$

Výraz (8) je poměr přírůstků funkce y. Geometricky znamená *směrnici sečny paraboly,* t. j. směrnici přímky, která spojuje zvolený bod paraboly $[x_1; y_1]$ s kterýmkoli jiným bodem paraboly $[x; y]$. Položme

$$k = 2ax_1 + b. \tag{9}$$

Směrnice sečny procházejí zvoleným bodem, není nikdy rovná k, neboť jinak by bylo

$$a(x + x_1) + b = 2ax_1 + b, \quad \text{tedy } x = x_1,$$

což není možné, protože pro dva různé body $[x_1; y_1]$, $[x; y]$ na parabole musí býti $x \neq x_1$. Jestliže však bod $[x; y]$ na parabole je blízký zvolenému bodu $[x_1; y_1]$, je číslo x blízké číslu x_1 a směrnice (8) je blízká číslu (9). Proto přímka

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{10}$$

jejíž směrnice k je dána výrazem (9), není sice sečnou paraboly, t. j. nemá s parabolou mimo bod $[x_1; y_1]$ žádný jiný společný bod, ale je **limitou sečny** (viz aritmetiku, str. 37 a další) v tom smyslu, že sečny spojující bod $[x_1; y_1]$ s body paraboly dosti blízkými bodu $[x_1; y_1]$ mají směrnice, které se liší od čísla k o méně než libovolně předepsané kladné číslo. Pravíme, že přímka (10) je **tečna paraboly** v bodě $[x_1; y_1]$.

Podobnou úvahu můžeme provésti také pro grafy jiných funkcí než jsou kvadratické celistvé funkce. Směrnice tečny grafu funkce se jmenuje

derivace funkce. Tedy kvadratická funkce (1) má pro $x = x_1$ derivaci rovnou číslu (9). Podrobněji si promluvíme o derivacích ve 4. třídě.

Poznámka. Je-li $[x_1; y_1]$ vrchol paraboly, je $x_1 = -\frac{b}{2a}$ a směrnice (9) je rovna nule; to znamená, že tečna paraboly v jejím vrcholu je vodorovná přímka jdoucí vrcholem, kterou jsme již na str. 125 nazvali vrcholovou tečnou paraboly.

Cvičení.

105. Vrchol paraboly o rovnici $y = -2x^2 + 5x - 3$ lze určiti úpravou její rovnice na rovnici tvaru (4), jak je patrno z tohoto výpočtu:

$$y + 3 - \tfrac{25}{8} = -2\,[x^2 - 2 \cdot x \cdot (\tfrac{5}{4}) + (-\tfrac{5}{4})^2] \text{ a tedy}$$
$$y - \tfrac{1}{8} = -2\,(x - \tfrac{5}{4})^2;$$

vrchol $V \equiv [\frac{5}{4}; \frac{1}{8}]$, $\frac{1}{2p} = |-2|$, při čemž parabola leží pod řídicí přímkou.

Podobným způsobem vyšetřte vrchol V, ohnisko F a rovnici řídicí přímky paraboly o rovnici: a) $y = x^2 - 8x + 15$; b) $y = -x^2 + 9$; c) $y = -6x^2 - 11x + 10$; d) $y = -9x^2 + 12x + 4$.

106. Je dána parabola o rovnici $y = 3x^2 - 5x - 2$.

a) Který z bodů $[0; -2]$, $[-1; 3]$, $[-2; 20]$ leží na této parabole?
b) Body $[2; y_1]$, $[x_2; 10]$ leží na dané parabole; určete druhou souřadnici, vyšetřte hodnotu derivace funkce a napište rovnici tečny paraboly v daném bodě.

107. Zvolte nový počátek P' souřadnic tak, aby parabola ze cvič. 106 měla rovnici tvaru $y' = ax'^2$. Které vztahy platí mezi původními a novými souřadnicemi bodů roviny? [Úlohu řešte třeba tak, že položíte $x = x' + m$, $y = y' + n$ a zvolíte vhodná čísla m, n.]

108. Na parabole o rovnici $y = 3x^2 - 6x + 7$ je dán bod $A \equiv [x_1 = 2; y_1]$. Přímým výpočtem určete hodnotu poměru přírůstků $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ v bodě A pro hodnoty $x \neq x_1$. Odvoďte odtud podobně jako v textu hodnotu derivace v bodě A.

109. Body $M \equiv [x_1; y_1]$, $N \equiv [x_2; y_2]$ leží na parabole o rovnici $y = ax^2 + bx + c$; budiž $S \equiv [x'; y']$ střed úsečky MN.

a) Dokažte, že středy S všech úseček MN, které jsou navzájem rovnoběžné, leží na určité přímce p rovnoběžné s osou paraboly.

b) Dokažte, že v průsečíku přímky p s parabolou je tečna k parabole rovnoběžná s přímkou MN. [Užijte vztahu (8) na str. 130.]

5. Kvadratická rovnice.

Z 1. třídy je nám známo, že kvadratická rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

s reálnými koeficienty a, b, c ($a \neq 0$) má dva různé reálné kořeny pro $D > 0$, jediný reálný kořen pro $D = 0$ a nemá žádný reálný kořen pro $D < 0$, jestliže

$$D = b^2 - 4\,ac \tag{2}$$

znamená diskriminant rovnice (1). Je velmi dobrým příkladem na souvislosti mezi algebrou a geometrií zjistit, že připomenutý aritmetický výsledek se dá odvodit z geometrických výsledků předchozího článku. Při tom budeme pro určitost předpokládati, že číslo a je kladné. Všimněme si funkce

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{3}$$

Víme, že graf této funkce je parabola s vrcholem

$$\left[-\frac{b}{2\,a}; -\frac{D}{4\,a}\right], \tag{4}$$

jejíž vrcholová tečna má rovnici

$$y = -\frac{D}{4\,a}. \tag{5}$$

Ježto číslo a je kladné, leží celá parabola až na vrchol (4) nad vrcholovou tečnou a každá vodorovná přímka ležící nad vrcholovou tečnou má s parabolou dva společné body. Porovnáme-li však (1) a (3), vidíme, že jestliže x je kořen rovnice (1), je bod $[x; 0]$ průsečík osy x s parabolou a obráceně. Nyní osa x je vodorovná přímka, která pro $D > 0$ leží nad vrcholovou tečnou (5), a proto protne parabolu ve dvou bodech $[x; 0]$, odpovídajících dvěma různým kořenům rovnice (1), a pro $D < 0$ leží pod vrcholovou tečnou, a proto nemá s parabolou žádný společný bod v souhlase s tím, že rovnice (1) nemá žádný reálný kořen; pro $D = 0$ osa x splyne s vrcholovou tečnou a má s parabolou společný pouze vrchol $\left[-\frac{b}{2\,a}; 0\right]$ v souhlase s tím, že rovnice (1) má jediný kořen $x = -\frac{b}{2\,a}$.

Jestliže kvadratická rovnice (1) má reálné kořeny, je možné určit tyto kořeny graficky tak, že narýsujeme graf funkce (3) a změříme souřadnice jeho průsečíků s osou x. Je však výhodnější postupovat jinak.

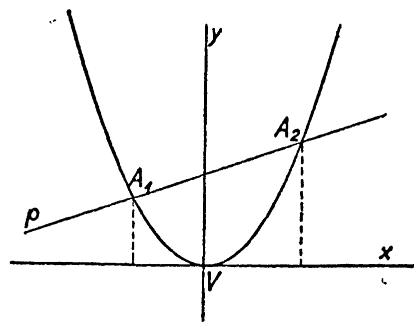
Pro určitost budiž $a > 0$. Narýsujeme si (obr. 14) graf funkce

$$y = ax^2 \tag{6}$$

a graf lineární funkce

$$y = -bx - c. \tag{7}$$

První graf je parabola v základní poloze (s vrcholem v počátku a s osou v ose y); druhý graf je přímka p. Je-li $A \equiv [x; y]$ průsečík paraboly s přímkou p, je vyhověno oběma rovnicím (6), (7) a z toho plyne ihned, že je vyhověno také rovnici (1), t. j. souřadnice x bodu A je kořenem rovnice (1). Obráceně, je-li číslo x kořenem rovnice (1), vypočteme y z jedné z obou rovnic (6), (7); pak je vyhověno také druhé z těchto rovnic a bod $[x; y]$ je průsečík paraboly s přímkou p.



Obr. 14.

Při tomto způsobu stačí narýsovat *jedinou parabolu* a můžeme graficky určit kořeny každé kvadratické rovnice (1), v které koeficient a má danou hodnotu, ať již koeficienty b, c jsou jakékoli. Při tom omezení, že hodnota koeficientu a je dána, je zcela nepodstatné; neboť rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má tytéž kořeny jako rovnice $rax^2 + rbx + rc = 0$, kde $r \neq 0$, a vhodnou volbou činitele r nabude koeficient ra jakékoli hodnoty různé od nuly.

Zkoumejme průsečíky paraboly dané rovnicí (6) se všemi přímkami danými rovnicí tvaru

$$y = kx + q, \tag{8}$$

kde směrnice k je dané číslo, ale konštanta q se od přímky k přímce mění. Všecky naše přímky jsou mezi sebou rovnoběžné, ale nejsou rovnoběžné s osou paraboly. Je-li $[x; y]$ průsečík paraboly (6) s přímkou (8), je číslo x kořenem kvadratické rovnice

$$ax^2 - kx - q = 0, \tag{9}$$

jejíž diskriminant je roven

$$k^2 + 4\,aq. \tag{10}$$

Je právě jedna hodnota čísla q, pro kterou diskriminant (10) je roven nule. Příslušná přímka (8) má rovnici

$$y = kx - \frac{k^2}{4a}. \tag{11}$$

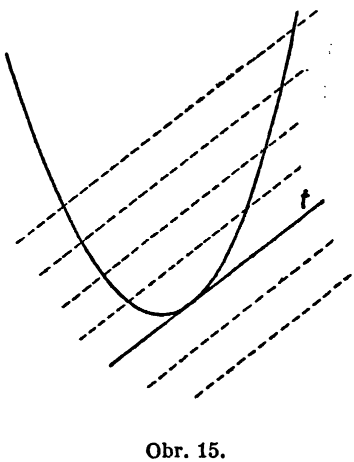
Z toho plyne, že *existuje právě jedna tečna t paraboly, která má předepsaný směr* daný směrnicí k; tento směr je libovolný až na to, že *to není směr osy paraboly*. Hodnota čísla q příslušná tečně t byla $q = -\frac{k^2}{4a}$; pro tuto hodnotu q je diskriminant roven nule. Ježto však číslo a je kladné, diskriminant (10) se zmenší, zmenšíme-li q. Proto pro

$$q > -\frac{k^2}{4a}$$

diskriminant (10) je kladný, rovnice (9) má dva různé reálné kořeny a přímka (8) je **sečna paraboly**; protne ji ve dvou bodech. Je-li však

$$q < -\frac{k^2}{4a},$$

diskriminant (10) je záporný, rovnice (9) nemá žádný reálný kořen a přímka (8) je **nesečna paraboly**; nemá s parabolou žádný společný bod. Tečna t dělí (obr. 15) rovinu na dvě poloroviny; každá přímka rovnoběžná s t, která leží uvnitř jedné z těchto polorovin (té, která je *nad* t), je sečnou paraboly, kdežto každá přímka rovnoběžná s t, která leží uvnitř druhé poloroviny, je nesečnou.



Obr. 15.

Cvičení.

110. Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou y a která protíná osu x v bodech $[x_1; 0]$, $[x_2; 0]$, při čemž čísla x_1, x_2 jsou kořeny rovnice:
a) $6x^2 + 5x - 6 = 0$; b) $-4x^2 + 12x - 9 = 0$; c) $2x^2 - 6x + 5 = 0$.
Kolik je takových parabol, které vyhovují úloze? Zobrazte některé z nich. Kde leží jejich vrcholy?

Ve cvič. c) jsou hodnoty x_1, x_2 imaginární čísla; jaký to má geometrický význam? (Nesměšujte imaginární souřadnice se zobrazením komplexních čísel!)

111. Rozhodněte, aniž počítáte souřadnice průsečíků, které z parabol ve cvič. 105, mají s osou x dva společné body nebo jediný nebo nemají žádný společný bod.

112. Všechny paraboly o rovnicích $ry = ax^2 + bx + c$ (pro každé reálné $r \neq 0$, při čemž $a \neq 0$, b, c jsou libovolná reálná čísla) protínají osu x v týchž bodech. Dokažte.

113. Pomocí paraboly o rovnici $y = x^2$ nebo $y = -\frac{1}{4}x^2$ a vhodné přímky určete graficky kořeny rovnice:

a) $2x^2 - x - 10 = 0$; b) $x^2 + x - 6 = 0$;
c) $3x^2 - x - 6 = 0$; d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
e) $2x^2 - 3x + 6 = 0$; f) $3x^2 - 2x - 9 = 0$.

114. Na parabole o rovnici $y = 3x^2 - 6x + 7$ je dán bod $A \equiv [x_1 = 2; y_1]$ (viz cvič. 108). Bodem A veďte přímku t o rovnici $y = kx + q$ a určete hodnotu směrnice tak, aby přímka t měla s parabolou společný pouze bod A; napište rovnici přímky. Vysvětlete, proč je tato přímka tečnou paraboly? [Řešte obě rovnice tak, že vyloučíte y a položte deskriminant výsledné rovnice rovný nule.]

115. Je dána parabola $y = -x^2 - 2x + 3$. a) V rovnici $y = -4x + q$ přímky určete hodnotu q tak, aby příslušná přímka t měla s parabolou jediný společný bod. Vysvětlete, proč je tato přímka tečnou paraboly. b) Dokažte, že přímka t rozděluje všechny přímky $s \parallel t$ na dvě skupiny, z nichž každá leží v jedné z obou polorovin vyťatých přímkou t. Přímky jedné skupiny jsou sečny a přímky druhé skupiny jsou nesečny.
Úlohu řešte také obecně.

116. Hmotný bod M byl vržen z bodu P vodorovně ve směru PX rychlostí c a současně začne svisle padati ve směru PY (bez odporu prostředí). Dokažte, že dráha bodu je polovina paraboly; tato parabola má přímku PX za vrcholovou tečnu v a přímku PY za osu. [Bod P zvolte za počátek soustavy souřadnic; polopřímka PX udává kladný smysl osy x a polopřímka PY udává záporný smysl osy y. Pro body $[x; y]$ hledané dráhy platí $x = ct$, $y = -\frac{1}{2}gt^2$ (kde g tíhové zrychlení; čas t proměnný parametr), jsou parametrickým vyjádřením paraboly, jejíž osou je osa y a jejíž vrchol je souřadnicový počátek.]

117. Při podobném umístění soustavy souřadnic jako v předchozím cvičení řešte úlohu: Hmotný bod $M \equiv [x; y]$ byl ve svislé rovině vržen z počátku P souřadnic v čase $t = 0$ rychlostí c pod výškovým úhlem φ. a) Vyšetřte dráhu bodu M za předpokladu, že není odporu prostředí. (Pohybuje-li se bod M nejprve v I. kvadrantu, platí $x = ct \cdot \cos\varphi$, $y = ct\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$).

b) Určete dobu T a výšku l výstupu.
c) Určete dálku vrhu, příslušnou dobu t' a úhel, pod nímž bod M dopadne na vodorovnou rovinu vedenou bodem P.

6. Kružnice.

Je-li dán bod $S \equiv [m; n]$ a kladné číslo r, potom kružnice (S, r) se středem S a poloměrem r se skládá z těch bodů $[x; y]$, jejichž vzdálenost od středu S se rovná poloměru r. Tedy jestliže bod $[x; y]$ leží na kružnici (S, r), platí rovnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \tag{1}$$

a obráceně, jestliže platí rovnice (1), leží bod $[x; y]$ na kružnici (S, r). Tedy (1) je **rovnice kružnice** (S, r). Rovnice (1) se dá upraviti na tvar

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \tag{2}$$

kde

$$a = -2m, \quad b = -2n, \tag{3}$$

$$c = m^2 + n^2 - r^2. \tag{4}$$

Obráceně, je-li dána rovnice tvaru (3), v které a, b, c jsou dané konstanty, hledejme podmínky, kdy (3) je rovnice kružnice. Za tím účelem se snažíme určit m, n, r z rovnic (3) a (4). Z rovnic (3) určíme vždy jednoznačně m, n:

$$m = -\tfrac{1}{2} a, \qquad n = -\tfrac{1}{2} b; \tag{5}$$

potom upravíme rovnici (4) na tvar

$$r^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 - 4c). \tag{6}$$

Je-li

$$a^2 + b^2 - 4c > 0, \tag{7}$$

lze kladné číslo r jednoznačně určit z rovnice (6). Tedy platí-li (7), je (2) rovnice kružnice; souřadnice středu jsou čísla (5) a poloměr $r > 0$ se určí ze (6). Není-li však splněna podmínka (7), není (2) rovnice kružnice a vůbec to není rovnice žádné čáry. Neboť rovnici (2) lze v každém případě upraviti na tvar

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - 4c\right). \tag{8}$$

Levá rovnice strana (8) je rovna nule, dosadíme-li za x, y souřadnice bodu $[-\tfrac{1}{2} a; -\tfrac{1}{2} b]$, a je kladná, dosadíme-li za x, y souřadnice kteréhokoli jiného bodu. Je-li tedy $a^2 + b^2 - 4c = 0$, vyhovují rovnici (8) pouze souřadnice jediného bodu, a je-li $a^2 + b^2 - 4c < 0$, nelze této rovnici vůbec nijak vyhovět reálnými čísly x, y.

Je-li dána jakákoli kružnice, můžeme její střed zvolit za počátek souřadnicové soustavy; rovnice kružnice má potom jednoduchý tvar

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{9}$$

Budiž dána ještě přímka lineární rovnicí

$$ax + by + c = 0. \tag{10}$$

Víme již ze střední školy, že vzájemná poloha kružnice (9) a přímky (10) může býti trojí. Přímka (10) je **sečnou kružnice** (má s ní dva společné body), je-li její vzdálenost od počátku P menší než r; přímka (10) je **tečnou kružnice** (má s ní jediný společný bod), je-li její vzdálenost od P rovna r; přímka (10) je **nesečnou kružnice** (nemá s ní žádný společný bod), je-li její vzdálenost od P větší než r. Je zajímavé potvrdit si správnost těchto výsledků methodou analytické geometrie. Provedeme to za předpokladu, že přímka (10) není rovnoběžná s osou y, t. j. že $b \neq 0$.

Máme zkoumat počet průsečíků dané kružnice a dané přímky. To znamená, že máme zkoumat počet reálných řešení soustavy dvou rovnic (9), (10) o dvou neznámých x, y, Každá z obou rovnic soustavy znamená určitou čáru (v našem případě rovnice (9) znamená kružnici, rovnice (10) znamená přímku). Každé řešení soustavy se skládá ze dvou čísel x, y, která jsou souřadnicemi jednoho průsečíku $[x; y]$ obou čar, a obráceně souřadnice každého průsečíku obou čar tvoří jedno řešení soustavy.

V našem případě jedna z obou rovnic (10) dané soustavy je lineární. V takovém případě se při hledání řešení postupuje tak, že se užije lineární rovnice k určení vyjádření jedné z obou veličin x, y pomocí druhé; toto vyjádření dosadíme do nelineární dané rovnice a dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé, kterou je třeba řešit. Tento způsob řešení soustavy se jmenuje **vyloučení jedné neznámé**; jestliže na př. užijeme lineární rovnice k tomu, abychom vyjádřili y pomocí x, vyloučíme neznámou y a pro neznámou x dostaneme v našem případě *kvadratickou rovnici*, kterou umíme řešit. Tohoto způsobu řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, z nichž jedna je lineární, můžeme užít i v tom případě, že nelineární rovnice má tvar

$$ux^2 + vxy + wy^2 + px + qy + s = 0,$$

kde písmena u, v, w, p, q, s znamenají daná čísla.

Vraťme se k soustavě rovnic (9), 10). Jelikož předpokládáme $b \neq 0$, můžeme vyloučit y. Z rovnice (10) najdeme

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \tag{11}$$

Dosadíme-li do rovnice (9), dostaneme po snadné úpravě kvadratickou rovnici

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2acx + c^2 - b^2r^2 = 0 \tag{12}$$

s diskriminantem

$$D = (2ac)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2r^2),$$

který snadno uvedeme na tvar

$$D = 4b^2[(a^2 + b^2)r^2 - c^2]. \tag{13}$$

Podle článku 7 na str. 118 je

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{14}$$

vzdálenost přímky (10) od počátku. Je-li tato vzdálenost menší než r, je

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} < r^2 \quad \text{neboli} \quad c^2 < (a^2 + b^2)r^2;$$

diskriminant (13) je kladný a rovnice (12) má dva reálné kořeny x; ke každému x určíme y podle (11) a obdržíme řešení soustavy (9), (10). Tedy tato soustava má dvě reálná řešení, přímka (10) má s kružnicí (9) dva průsečíky a je sečnou kružnice. Je-li vzdálenost (14) rovna r, je diskriminant (13) roven nule, rovnice (12) má jediné řešení a přímka (10) je tečnou kružnice (9). Je-li vzdálenost (14) větší než r, je diskriminant (13) záporný a přímka (10) je nesečnou kružnice (9).

Poznámka. Na řešení soustavy (9), (10) (v které nyní bude $r = 1$) lze převésti řešení **goniometrické rovnice**

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi + c = 0 \tag{15}$$

s neznámou φ. Položíme-li totiž

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \tag{16}$$

musí mezi x, y platit vztah

$$x^2 + y^2 = 1; \tag{17}$$

mimo to musí platit rovnice (15), která podle (16) nabude tvaru

$$ax + by + c = 0. \tag{18}$$

Řešení rovnice (15) je tím převedeno na řešení soustavy (17), (18).

Cvičení.

118. Napište rovnici kružnice k o středu S a poloměru r, jestliže je a) $S \equiv [0; 0]$; $r = 5$; b) $S = [-15; -9]$; $r = 13$. Vyšetřte, který z bodů $[-3; -4]$, $[-2; -9]$, $[4; -3]$ je bodem kružnice k.

119. Napište rovnici kružnice o středu S, která prochází daným bodem M, aniž budete počítat poloměr kružnice. Je dáno: a) $S \equiv [-6; 8]$, $M \equiv [0; 0]$; b) $S \equiv [m; 2m]$, $M \equiv [4m; -2m]$, kde m je dané reálné číslo.

120. Co je geometrickým místem bodů $x + iy$, o nichž platí a) $|x + iy| = r$; b) $|(x + iy) - (m + in)| = r$, kde x, y jsou reálná čísla a $m, n, r > 0$ jsou reálné konstanty?

121. Vyšetřte střed a poloměr kružnice o rovnici:

a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; b) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.

V kterém případě kružnice neexistuje? (Výpočty proveďte tak, že danou rovnici upravíte na rovnici (1); srovnej se cvič. 105.)

122. Jak z rovnice kružnice poznáte, že kružnice a) má střed na ose x, b) má střed na ose y, c) prochází počátkem souřadnic. Sledujte výsledky svých závěrů na kružnicích ze cvič. 121.

123. Rovnici $x^2 + y^2 = 0$ vyhovují souřadnice jediného bodu $[0; 0]$; odůvodněte. Někdy říkáme, že je to rovnice nulové kružnice; co tím rozumíme?

124. Bod $M \equiv [x_0; y_0]$ leží a) uvnitř, b) vně kružnice $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, jestliže platí a) $x^2_0 + y^2_0 < r^2$, b) $x^2_0 + y^2_0 > r^2$ a obráceně. Dokažte! Zobecněte tento výsledek užitím základní věty analytické geometrie i na kružnici o rovnici (2).

125. Určete rovnici kružnice jdoucí body $A \equiv [0; 1]$, $B \equiv [1; 1]$, $C \equiv [2; -2]$ a rozhodněte, zda počátek souřadnic P leží uvnitř kružnice.

126. Užitím analytické geometrie dokažte, že kruh je konvexní útvar. (Zvolte počátek souřadnic P ve středu kružnice a uvažujte úsečku $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$, jejíž krajní body patří kruhu; dokažte, že celá úsečka leží uvnitř kruhu. Užijte rovnic (6) ze str. 113.)

127. Rozhodněte, za kterých podmínek je přímka $ax + by + c = 0$: a) sečnou, b) tečnou, c) nesečnou kružnice o rovnici (1). [Přetvořte podmínku (14); bod $P' \equiv [m; n]$ zvolte za nový souřadnicový počátek a napište rovnice obou čar.]

128. Kružnice l má rovnici $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. a) Na kružnici l leží bod $T \equiv [-1; 1]$. Především se přesvědčte, že přímka o rovnici $x = -1$ protíná kružnici ve dvou různých bodech. Potom bodem T veďte přímku s o rovnici $y = kx + q$ a určete hodnotu směrnice tak, aby přímka s měla s kružnicí jediný společný bod. Dokažte, že takto určená přímka je tečnou kružnice.

b) Určete rovnici přímky, která má směrnici $-\frac{3}{4}$ a kružnici l protíná v jediném bodě.

129. Předchozí cvičení 130 řešte užitím parametrického vyjádření přímky.

130. Řešte goniometrickou rovnici $a \cos \varphi + b \sin \varphi + c = 0$ methodou naznačenou v textu; je dáno:

a) $a = 5, b = 5, c = -1$.

b) $a = 3, b = -4, c = -5$.

c) $a = b = 1, c = -2\sqrt{2}$.

131. Stanovte podmínky řešitelnosti goniometrické rovnice (15) ze str. 138. Vysvětlete geometrický význam těchto podmínek.

III. Trigonometrie.

1. Sinová věta.

Goniometrické funkce, s kterými jsme se průběhem vyučování opětovně setkali a jejichž největší důležitost je v tom, že se vyskytují při studiu periodických zjevů ve fysice, byly původně vymyšleny za účelem výpočtu základních prvků trojúhelníka (stran a, b, c, úhlů α, β, γ) na základě známých hodnot tří z nich. Vzorce, na kterých jsou založeny takové výpočty, tvoří t. zv. **trigonometrii** (slovo řeckého původu, znamená nauku o měření trojúhelníka). Seznámíme se nyní s hlavními trigonometrickými vzorci.

Především si připomeňme, že mezi třemi úhly trojúhelníka platí známý vztah

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi. \tag{1}$$

Ježto $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, plyne z (1), že aspoň dva ze tří úhlů α, β, γ jsou ostré (menší než $\frac{1}{2}\pi$). Třetí úhel je ostrý nebo pravý nebo tupý. Dále si připomeňme, že pro ostrý úhel φ čísla $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ jsou kladná a menší než 1, dále že pro pravý úhel $\frac{1}{2}\pi$ platí $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$, posléze že pro tupý úhel φ platí

$$\cos \varphi = -\cos(\pi - \varphi), \ \sin \varphi = \sin(\pi - \varphi),$$

takže číslo $\cos \varphi$ je záporné a číslo $\sin \varphi$ je kladné.

Jedním z nejzákladnějších trigonometrických vzorců je t. zv. **sinová věta**, která praví, že všecky tři zlomky

$$\frac{a}{\sin\alpha}, \quad \frac{b}{\sin\beta}, \quad \frac{c}{\sin\gamma} \tag{2}$$

jsou si rovny. Dokážeme si sinovou větu s tímto doplňkem: **Společná hodnota všech tří zlomků** (2) **je rovna** $2\,r$, kde r znamená poloměr kružnice opsané.

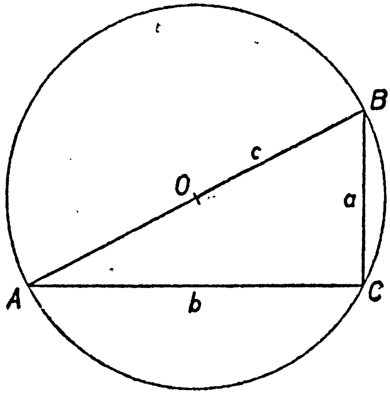
Vyšetřeme nejprve *pravoúhlý* trojúhelník s přeponou c, tedy $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, $\sin\gamma = 1$ (obr. 16). Máme dokázati, že

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = c = 2\,r.$$

Především je podle definice sinu ostrého úhlu

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \sin\beta = \frac{b}{c}.$$

Mimo to je nám známo již ze střední školy, že u pravoúhlého trojúhelníka střed O opsané kružnice je ve středu přepony, takže $c = 2\,r$. Tím je pro pravoúhlý trojúhelník vše dokázáno.

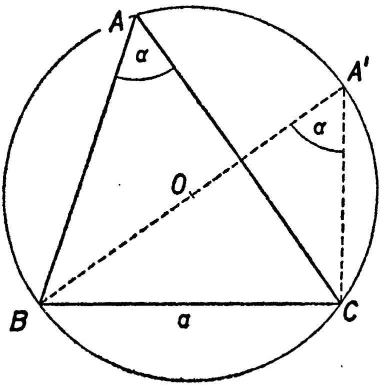


Obr. 16.

Obraťme se k obecnému případu! Máme vlastně dokázati tři vzorce, a to

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2\,r, \quad \frac{b}{\sin\beta} = 2\,r,$$

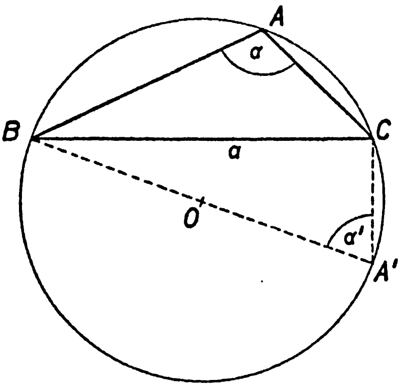
$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2\,r.$$



Obr. 17.

Avšak tyto tři vzorce se navzájem liší pouze označením a stačí tedy dokázati první z nich. Je-li α úhel pravý, je vzorec již dokázán. Je-li α úhel *ostrý* (obr. 17), vezmeme na pomoc bod A', který na kružnici opsané $\triangle ABC$ je protější k bodu B. Podle Thaletovy věty má $\triangle A'BC$ při vrcholu C úhel pravý; mimo to podle věty o obvodovém úhlu oba trojúhelníky $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$ mají proti společné straně $a = \overline{BC}$ co do velikosti týž úhel α. Ježto veličiny a, α, r jsou danému $\triangle ABC$ a pravoúhlému $\triangle A'BC$ společné a ježto pro pravoúhlý $\triangle A'BC$ vzorec $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2r$ je správný, musí býti správný i pro $\triangle ABC$.

Je-li α úhel *tupý* (obr. 18), je důkaz skoro stejný. V pravoúhlém $\triangle A'BC$ při vrcholu A' nyní sice nemáme úhel rovný α, nýbrž úhel rovný $\alpha' = \pi - \alpha$, takže $\sin\alpha = \sin\alpha'$ a jinak důkaz zůstává týž.



Obr. 18.

Chceme-li dokázati pouze sinovou větu bez doplňku, čemu se rovná společná hodnota všech tří zlomků (2), můžeme postupovati také jinak. Máme dokázat, že všecky tři zlomky (2) jsou si rovny. Stačí však dokázat jen jednu rovnost

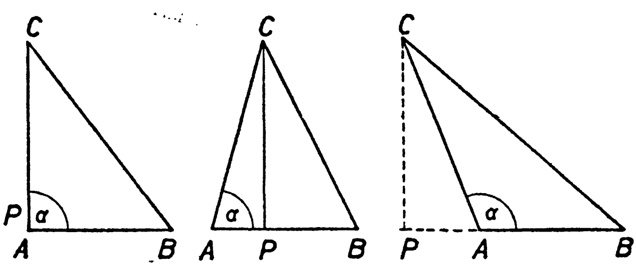
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \tag{3}$$

protože rovnosti

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \qquad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

jsou pouze formálně různé, t. j. liší se od rovnosti (3) pouze označením. Rovnost (3) však má týž význam jako rovnost $a\sin\beta = b\sin\alpha$. Stačí tedy dokázati, že

$$b\sin\alpha = v_c, \qquad a\sin\beta = v_c, \tag{4}$$



Obr. 19a. Obr. 19b. Obr. 19c.

kde v_c znamená výšku $\triangle ABC$ příslušnou straně c. Obě rovnosti (4) jsou opět pouze formálně různé, takže stačí dokázati pouze první z nich, tedy

$$b \sin \alpha = v_c. \tag{5}$$

Označme P patu výšky v_c, takže $v_c = \overline{CP}$ (obr. 19a pro $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, obr. 19b pro $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, obr. 19c pro $\alpha > \frac{1}{2}\pi$). V případě obr. 19a je $\sin \alpha = 1$ a výška v_c splyne se stranou b, takže (5) je zřejmé. V případě obr. 19b máme v pravoúhlém $\triangle ACP$ přeponu b, odvěsnu v_c a proti ní úhel α, takže (5) vyjde z definice $\sin \alpha$ pro ostrý úhel α. Týž postup dá v případě obr. 19c, že $b \sin \alpha' = v_c$, kde α' je úhel pravoúhlého $\triangle ACP$ proti odvěsně CP; jest $\alpha' = \pi - \alpha$, tedy $\sin \alpha' = \sin \alpha$, takže (5) platí i v tomto případě.

Jestliže Δ znamená obsah $\triangle ABC$, platí známý vzorec $\Delta = \frac{1}{2} c \cdot v_c$; dosadíme-li za v_c z (5), dostaneme vzorec

$$\Delta = \tfrac{1}{2} bc \sin \alpha. \tag{6}$$

Samozřejmě platí také vzorec

$$\Delta = \tfrac{1}{2} ac \sin \beta, \quad \Delta = \tfrac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

které jsou pouze formálně různé od (6).

Cvičení.

V dalších cvičeních, pokud není jinak uvedeno, jsou a, b, c strany, α, β, γ úhly trojúhelníka ABC; r, ϱ značí poloměry opsané a vepsané kružnice, Δ jeho obsah.

132. V kterém poměru jsou strany trojúhelníka ABC, jestliže platí:

a) $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$; b) $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$; c) $\sin \alpha = \frac{1}{5}\sqrt{10}$; $\sin \beta = \frac{1}{5}\sqrt{15}$?

133. Buďtež $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ středové úhly příslušné ke stranám $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$ tětivového čtyrúhelníka. Dokažte, že platí $a : b : c : d = \sin \frac{1}{2}\alpha' : \sin \frac{1}{2}\beta' : \sin \frac{1}{2}\gamma' : \sin \frac{1}{2}\delta'$!

134. Určete obsah rovnoběžníka $ABCD$, je-li dáno $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $\gamma = \sphericalangle BCD$.

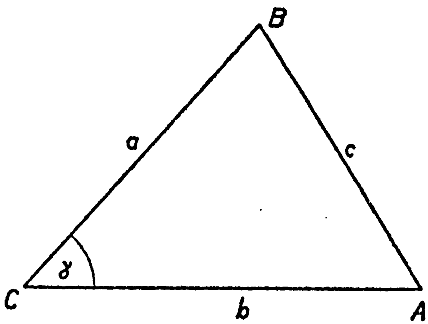
135. Ve vypuklém čtyrúhelníku $ABCD$ jsou dány úhlopříčky $e = \overline{AC}$, $f = \overline{BD}$ a jeden jejich úhel ω. Dokažte, že obsah čtyrúhelníka je $P = \frac{1}{2} ef \sin \omega$.

2. Kosinová věta. Základní úlohy o trojúhelníku.

Vedle sinové věty je v trigonometrii velmi důležitá také **kosinová věta** vyjádřená vzorci

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma, \tag{1}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha, \tag{1'}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta, \tag{1''}$$

které jsou pouze formálně různé, takže stačí odvodit pouze vzorec (1). Je-li $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, přejde vzorec (1) ve známou Pythagorovu větu $c^2 = a^2 + b^2$. Kosinová věta se dá odvoditi rozmanitými způsoby. Užijeme známých vzorců z analytické geometrie. Umístíme (obr. 20) $\triangle ABC$ tak, aby vrchol C byl počátkem souřadnicové soustavy, aby bod A ležel na kladné části osy x a aby bod B ležel nad osou x. Je tedy $C \equiv [0; 0]$, $A \equiv [b; 0]$ a podle vzorce (6) na stránce 100 je $B \equiv [a\cos\gamma;\ a\sin\gamma]$. Vzdálenost $c = \overline{AB}$ je dána vzorcem (3) článku 3, str. 99; je tedy



Obr. 20.

$$c^2 = (a\cos\gamma - b)^2 + (a\sin\gamma)^2.$$

Připomeneme-li si, že $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$, dostaneme po snadné úpravě vzorec (1).

Užitím sinové a kosinové věty snadno rozřešíme *základní úlohy o trojúhelníku* odpovídající známým větám sus, usu, sss, Ssu o určenosti trojúhelníka. Počneme větami usu, Ssu, u kterých vystačíme se sinovou větou.

I. Podle věty usu je $\triangle ABC$ určen, známe-li a, β, γ. Úhel α určíme pomocí vztahu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Potom určíme strany b, c podle sinové věty, která dává

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

II. Podle věty Ssu je $\triangle ABC$ určen, známe-li a, b, α, při čemž $a > b$. Pro výpočet úhlu β máme podle sinové věty

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha;$$

ježto $a > b$, není b největší strana, a proto β není největší úhel; je tedy β úhel ostrý a jeho velikost je jednoznačně určena, známe-li $\sin \beta$. Dále vypočteme úhel γ ze vztahu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ a posléze určíme c ze sinové věty

$$c = a\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \qquad \text{nebo } c = b\frac{\sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Dobrou zkouškou správnosti je vypočítat c oběma způsoby.

III. Podle věty sss je $\triangle ABC$ určen, známe-li a, b, c. Úhly α, β, γ lze určiti tak, že vypočteme jejich kosiny podle (1), (1′), (1″). Zkouškou správnosti je vztah $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Prakticky je pohodlnější určit podle kosinové věty pouze největší úhel (ten leží proti největší straně) a potom určit ostatní úlohy podle sinové věty jako ve II.

IV. Podle věty sus je $\triangle ABC$ určen, známe-li a, b, γ. Nejprve určíme c podle kosinové věty (1). Podle sinové věty je potom

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}\sin \gamma, \qquad \sin \beta = \frac{b}{c}\sin \gamma, \tag{2}$$

z čehož máme podle tabulek určit α, β. Jest uvážiti, že známe-li $\sin \alpha$, je úhel α určen dvojznačně, dokud nevíme, zda je ostrý či tupý. Avšak úhel trojúhelníka je ostrý, neleží-li proti největší straně. Je-li na př. $a \geqq b$, je úhel β jistě ostrý a je jednoznačně určen druhým ze vzorců (2). Známe-li β, vypočteme α ze vztahu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ a prvého ze vzorců (2) užijeme pouze ke kontrole správnosti. Jestliže ovšem úhel γ není ostrý, jsou oba úhly α, β jistě ostré a můžeme začít kterýmkoli z obou vzorců (2).

Násobení a dělení potřebná při výpočtech podle sinové věty provádíme obyčejně logaritmicky. Naproti tomu není kosinová věta vhodná pro logaritmické počítání, a proto se v praxi při úlohách III, IV užívá jiných vzorců, které poznáme v následujících článcích.

Pro zrychlení logaritmického počítání je ve vašich příručních tabulkách vedle známé tabulky hodnot goniometrických funkcí také tabulka logaritmů těchto funkcí, opět zaokrouhlených na 4 desetinná místa, pro ostré úhly postupující po 10′. Úprava tabulky je zcela obdobná úpravě tabulky goniometrických funkcí samotných. Jelikož pro každý ostrý úhel α jsou čísla $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ menší než 1, jsou jejich logaritmy záporné; rovněž čísla $\log \operatorname{tg} \alpha$ jsou záporná pro všecky úhly $\alpha < \frac{1}{4}\pi$. **Proto jsou v tabulce logaritmů goniometrických funkcí všecky uvedené logaritmy zvětšeny o 10; k tomu jest ve výpočtech přihlížeti.** Tabulky můžeme užít jednak k tomu, abychom k danému úhlu určili logaritmy jeho goniometrických funkcí, jednak k tomu, abychom ze známého logaritmu některé goniometrické funkce určili úhel.

Ačkoli v tabulce jsou přímo udány hodnoty logaritmů goniometrických funkcí pouze pro úhly postupující po $10'$, je možné užitím interpolace určit tyto logaritmy pro úhly postupující po $1'$; interpolace děje se stejně jako u jiných tabulek. Nebudeme se tím dále zabývati. Upozorníme pouze na to, že větší přesnosti výpočtů lze pohodlněji než interpolací docílit užitím přesnějších tabulek, že však přesnost početního výsledku nezávisí pouze na přesnosti tabulek, nýbrž hlavně a především na tom, s jakou přesností byly změřeny ty veličiny, na jejichž základě se pomocí matematických vzorců určují veličiny další. Nemá proto smyslu udávati velikosti úhlů s přesností větší než je ta, která odpovídá přesnosti délek. Dá se dokázati, že omezíme-li se na trojúhelníky, které nejsou příliš „ploché", přesněji řečeno, na trojúhelníky, jejichž každý úhel je větší než 10^0, nemá smyslu udávat úhly přesněji než na $10'$, jestliže při přímo měřených délkách se můžeme dopustit chyby dosahující $\frac{1}{2}$ % měřené délky; jestliže všecky úhly trojúhelníka jsou větší než 30^0, potom přesnost úhlů na $10'$ odpovídá chybám měřených délek nedosahujícím $\frac{1}{8}$ %.

Cvičení.

136. V trojúhelníku ABC je dáno a, b, γ. Budiž A' pata výšky v_1 spuštěné s bodu A na stranu BC; označte $p = \overline{A'B}$, $q = \overline{A'C}$. Podle Pythagorovy věty je $c^2 = v^2_1 + p^2$. Určete nejprve hodnoty v_1, q a potom p; nakonec vypočtěte c^2. Odvodíte tak znovu kosinovou větu. Proveďte diskusi pro případy a) $\gamma = R$, b) $\gamma < R$, c) $\gamma > R$.

137. a) O výšce v_1 příslušné vrcholu A trojúhelníka ABC platí $v_1 = b \sin \gamma = c \sin \beta$; dokažte!
b) O pravoúhlém průmětu a' strany a trojúhelníka ABC do přímky AB platí $a' = | a \cos \beta |$. Při tom průmět leží (až na bod B) uvnitř polopřímky BA, jestliže je $\beta < \frac{1}{2}\pi$ a leží na prodloužení strany AB za bod B, jestliže je $\beta > \frac{1}{2}\pi$; jak se to jeví na hodnotě $a \cos \beta$? Co případ $\beta = \frac{1}{2}\pi$?

Ve cvičeních 138—141 provádějte podrobné diskuse!

138. Určete třetí stranu trojúhelníka, je-li dáno:
a) $a = 5$; $c = 8$; $\beta = 60^0$; b) $b = 11$; $c = 24$; $\alpha = 120^0$.

139. Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) $c = 300$; $a = 30$; $\beta = 110^0$,
b) $a = 3$; $b = 6$; $\beta = \frac{2}{3}\pi$;

c) $a = 13$; $b = 15$; $\sin \alpha = 0{,}8$;
d) $a = 60$; $b = 70$; $\gamma = 24^0$;
e) $b = 5$; $c = 6$; $\alpha = 140^0$;
f) $a = 5$; $b = 9{,}6$; $c = 6$.

140. Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $r = 8$; $\alpha = 113^0$; $\beta = 48^0$; b) $a = 6$; $b = 8$; $\Delta = 12$;
c) $a = 0{,}23$; $b = 0{,}45$; $r = 0{,}25$.

141. Kosý kruhový kužel má podstavu o středu S a poloměru $r = 5$ dm, jeho vrchol je V. Buďtež VA, VB jeho největší a nejmenší strany. Určete objem kužele, jestliže je $\sphericalangle VAB = \alpha = 40^0$, $\sphericalangle VBA = \beta = 110^0$.

3. Součet a rozdíl sinů a kosinů.

Odvodíme si nejprve výrazy pro

$$\sin \alpha \pm \sin \beta, \qquad \cos \alpha \pm \cos \beta \tag{1}$$

ve tvaru součinů vhodných pro logaritmické počítání; potom si odvodíme úpravu sinové věty vhodnou pro výpočty týkající se trojúhelníků určených podle věty sus.

Jsou-li φ_1, φ_2 libovolné dva úhly, platí známá Moivreova věta $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, která shrnuje dva vzorce

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \tag{2}$$
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2. \tag{3}$$

Jelikož $\sin(-\varphi_2) = -\sin \varphi_2$, $\cos(-\varphi_2) = \cos \varphi_2$, platí také

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \tag{4}$$
$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2. \tag{5}$$

Ze (2) a (4) plyne

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \tag{6}$$
$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2; \tag{7}$$

ze (3) a (5) plyne

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \tag{8}$$
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2. \tag{9}$$

Jsou-li nyní α, β libovolné dva úhly, určeme φ_1, φ_2 z rovnic

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \beta,$$

které dávají

$$\varphi_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Vztahy (6) až (9) nabudou nyní tvaru

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \tag{10}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \tag{11}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \tag{12}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \tag{13}$$

Jsou-li nyní a, b, dvě strany $\triangle ABC$, α, β protější úhly, jsou čísla $\sin \alpha$, $\sin \beta$ kladná, takže $\sin \alpha + \sin \beta \neq 0$ a podle (12) také $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \neq 0$; mimo to je $0 < \alpha + \beta < \pi$, tedy $\frac{\alpha + \beta}{2}$ je úhel ostrý, takže také $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0$. Podle (12) a (13) jest

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Na druhé straně odvodíme snadno ze sinové věty, že

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta},$$

takže dostáváme vzorec

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}, \tag{14}$$

který se nazývá **tangentová věta.** Místo a, b, α, β můžeme ovšem psáti také na př.

$$a, c, \alpha, \gamma \text{ nebo } b, c, \beta, \gamma.$$

Ježto $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, je $\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$ a vzorec (14) lze psáti také ve tvaru

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}. \tag{15}$$

Jestliže nyní v $\triangle ABC$ známe a, b, γ, je výhodnější místo kosinové věty (v. str. 145, IV) užít tangentové věty. Budiž na př. $a > b$, tedy $\alpha > \beta$. Z (15) plyne

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

Ježto $0 < \frac{\alpha - \beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, je tím jednoznačně určen úhel $\frac{\alpha - \beta}{2}$. Ježto známe také $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, dostaneme

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Zbývá určit c, což se provede podle sinové věty

$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad \text{nebo } c = b\frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

Cvičení.

142. Upravte výrazy a) $\sin 75^0 + \sin 15^0$; b) $\sin 135^0 - \sin 15^0$; c) $\cos 240^0 - \cos 150^0$; d) $\cos 345^0 - \cos 165^0$; e) $\operatorname{tg} 70^0 + \operatorname{tg} 20^0$.

143. Jestliže je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, potom platí:

a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$;

b) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma$;

c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - 1$;

d) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} + 1$.

144. Určete obvod trojúhelníka ABC, je-li dáno r, α, β; výsledek upravte na tvar součinu.

145. Určete objem a povrch tělesa, které vznikne rotací trojúhelníka ABC kolem přímky AB, je-li dáno c, α, β. Výsledky upravte na tvar součinu. (Proveďte diskusi pro $\alpha \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$ a $\beta < \frac{1}{2}\pi$.)

146. Užitím tangentové věty řešte $\triangle ABC$ ze cvič. 139d), 139e) a 140b).

4. Goniometrické funkce polovičního úhlu.

Jestliže ve vzorci (2) na str. 147 volíme $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha}{2}$, kde α je libovolný úhel, máme

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha. \tag{1}$$

Vedle toho platí, jak známo

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1. \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \qquad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \tag{3}$$

Jestliže α je úhel trojúhelníka, je $0 < \alpha < \pi$, tedy $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, takže čísla $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\alpha}{2}$ jsou kladná a ze (3) plyne

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \tag{4}$$

a také

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \tag{5}$$

Podle kosinové věty je však

$$2\,bc \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2,$$

tedy také

$$2\,bc\,(1 + \cos \alpha) = (b^2 + 2\,bc + c^2) - a^2,$$
$$2\,bc\,(1 - \cos \alpha) = a^2 - (b^2 - 2\,bc + c^2)$$

neboli

$$2\,bc\,(1 + \cos \alpha) = (b + c)^2 - a^2, \tag{6}$$
$$2\,bc\,(1 - \cos \alpha) = a^2 - (b - c)^2. \tag{7}$$

Položme nyní

$$s = \tfrac{1}{2}\,(a + b + c), \tag{8}$$

takže $2\,s$ je obvod trojúhelníka. Zřejmě

$$s - a = \tfrac{1}{2}\,(b + c - a), \quad s - b = \tfrac{1}{2}\,(a + c - b), \quad s - c = \tfrac{1}{2}\,(a + b - c).$$

Podle známého vzorce $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ je však

$$(b + c)^2 - a^2 = (a + b + c)(b + c - a) = 4s(s - a),$$
$$a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c) = 4(s - b)(s - c),$$

takže ze (6) a (7) dostaneme

$$2bc(1 + \cos\alpha) = 4s(s - a),$$
$$2bc(1 - \cos\alpha) = 4(s - b)(s - c).$$

Podle (4) a (5) tedy jest

$$\text{a) } \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \text{b) } \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$
$$\text{c) } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}. \tag{9}$$

Podobně je ovšem také

$$\text{a) } \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \quad \text{b) } \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$
$$\text{c) } \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \tag{9'}$$
$$\text{a) } \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}, \quad \text{b) } \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$
$$\text{c) } \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \tag{9''}$$

Známe-li strany a, b, c trojúhelníka, určíme jeho úhly α, β, γ mnohem pohodlněji podle těchto vzorců než podle kosinové věty.

Jestliže ve vzorci (3) čl. na str. 147 volíme $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha}{2}$, máme

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha. \tag{10}$$

Víme však, že obsah Δ trojúhelníka je dán vzorcem

$$\Delta = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Podle (9) a (10) je tedy

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{11}$$

což je t. zv. **Heronův vzorec.**

Cvičení.

147. Uvažujte úhel α, o němž platí $0 \leqq \alpha < 2\pi$. Užitím vzorců (3) určete hodnoty $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, jestliže je dáno

a) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos \alpha > 0$; b) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$; $\alpha > \pi$;
c) $\operatorname{tg} \alpha = -3\frac{3}{7}$; $\alpha > \frac{3}{2}\pi$.

V diskusi rozhodněte, zda hledané hodnoty jsou určeny jednoznačně.

148. Vyjádřete funkce $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ pomocí funkce $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ a proveďte diskusi výsledků. [Pro $\cos \alpha$ dělte oba vztahy (1), (2) na str. 150. Pro $\sin \alpha$ dělte oba vztahy (10), (2) na str. 150 a 151.

149. Trojúhelník, jehož strany i obsah jsou vyjádřeny racionálními čísly, se jmenuje racionální (též Heronův). Dokažte, že trojúhelník o stranách a) $a = 4$; $b = 13$; $c = 15$, b) $a = 13$; $b = 14$; $c = 15$ je racionální.

150. Buďtež a, b, c strany, $2s$ obvod, Δ obsah, ϱ, r poloměry kružnice vepsané a opsané v trojúhelníku ABC. Dokažte tyto poučky:

a) $\varrho = \dfrac{\Delta}{s}$. [Je-li S střed kružnice trojúhelníku vepsané, vyjádřete obsahy trojúhelníků ABS, BCS, CAS pomocí a, b, c, ϱ.]

b) Budiž C' ten bod na přímce AB, v němž se jí dotýká vepsaná kružnice. Potom platí $x = \overline{AC'} = s - a$. [Užijte vzorců (9), (11) nebo určete c pomocí a, b, x.]

c) Platí $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\varrho}{s - a}$.

d) Platí $\Delta = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$; proveďte podrobnou diskusi pro $\gamma \geqq \frac{1}{2}\pi$. [Užijte středových úhlů, jejichž vrchol O je střed kružnice opsané a cvič. 143b.]

e) Platí $r = \dfrac{abc}{4\Delta}$. [Užijte výsledku cvič. d) a věty sinové.]

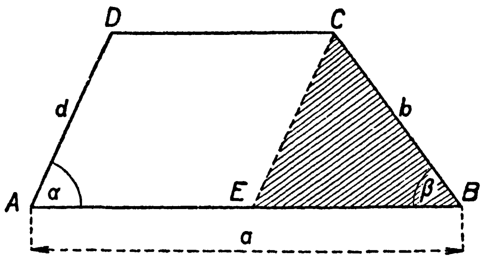
5. Užití trigonometrie.

Vzorců odvozených v tomto oddílu se užívá k výpočtu délek a úhlů v různých geometrických útvarech. Napřed musíme vyhledat trojúhelník, v němž se vyskytuje neznámá délka nebo úhel, který je určen známými prvky. Tento trojúhelník si nápadně vyznačíme v náčrtu pro přehlednost.

Příklad 1 (obr. 21) V lichoběžníku $ABCD$ známe základnu $\overline{AB} = a$, rameno $\overline{AD} = d$ a úhly při základně $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle ABC$. Máme určit rameno $\overline{BC} = b$.

Řešení. Přímka $CE \parallel DE$ vytne $\triangle EBC$, v kterém známe stranu $\overline{CE} = d$ a dva úhly $\sphericalangle EBC = \beta$, $\sphericalangle BEC = \alpha$. Podle sinové věty je

$$b = d \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

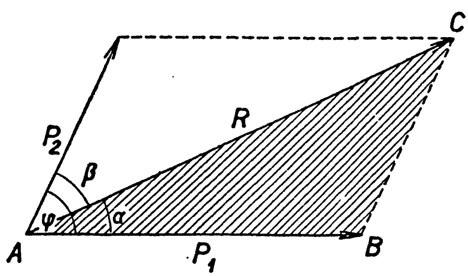


Obr. 21.

Příklad 2. Síly P_1, P_2 o společném působišti A svírají spolu úhel φ. Jak velká je jejich výslednice a jak velké úhly s nimi svírá?

Řešení. Sestrojíme a označíme náčrt (obr. 22). Hledaná výslednice R je stranou AC trojúhelníka ABC, který je určen dvěma stranami $\overline{AB} = P_1$, $\overline{BC} = P_2$ a úhlem $\sphericalangle ABC = \pi - \varphi$, jehož kosinus je roven $-\cos \varphi$. Podle kosinové věty je

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 \cos \varphi.$$



Obr. 22.

Úhly α, β, které výslednice R svírá se silami P_1, P_2, určíme podle sinové věty:

$$\sin \alpha = \frac{P_2 \sin \varphi}{R}, \quad \sin \beta = \frac{P_1 \sin \varphi}{R}.$$

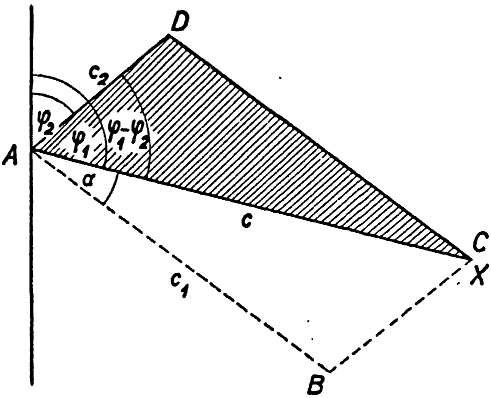
Příklad 3. Vlastní rychlost letadla je c_1, t. j. rychlost v klidném vzduchu. Touto rychlostí se má letadlo dostat z A do X, při čemž kurs AX je podle mapy dán úhlem φ_1. Vítr má směr φ_2 a rychlost c_2. Máme vypočítat a) úhel α, o který musí býti osa letadla odkloněna od směru trati, aby letadlo udržovalo předepsaný kurs, b) rychlost c letadla vzhledem k zemi.

Řešení. Letadlo koná současně dva pohyby, jejichž rychlosti se skládají podle rovnoběžníka rychlosti. Výsledná poloha letadla po 1 hod. letu je táž, jako kdyby se tyto pohyby konaly odděleně po sobě.

Sestrojíme a označíme náčrt (obr. 23). Hledaný úhel α leží v $\triangle ACD$, který je určen stranami $c_1 = \overline{CD}$, $c_2 = \overline{AD}$, a úhel $\varphi_1 - \varphi_2$ proti větší z nich, neboť $c_1 > c_2$. Podle sinové věty je

$$\sin \alpha = \frac{c_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{c_1}.$$

Z téhož trojúhelníka se určí také hledaná délka c zase podle sinové věty:



Obr. 23.

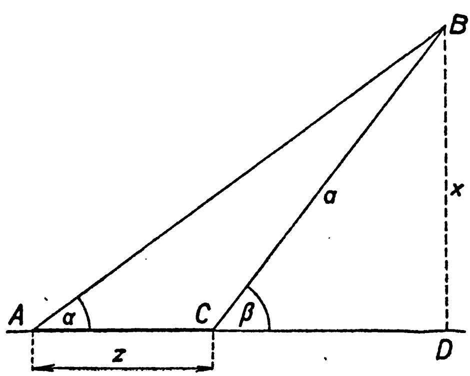
$$c = \frac{c_1 \sin \beta}{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)},$$

kde $\beta = \pi - (\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha)$, tedy $\sin \beta = \sin (\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha)$ a tudíž

$$c = \frac{c_1 \sin (\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha)}{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

V předcházejících příkladech se neznámá délka nebo úhel vyskytovaly v trojúhelníku, který byl určen danými prvky. V jiných úlohách se neznámý prvek vyskytuje v trojúhelníku, který není přímo určen, jehož scházející prvek se však dá vypočítat z jiného pomocného trojúhelníka.

Příklad 4. Aby geometr určil, oč je vrchol hory B (obr. 24) položen výše než pozorovací místo A, změřil vodorovnou vzdálenost $\overline{AC} = z$ (základnu), která leží s vrcholem hory v téže svislé rovině, a výškové úhly α, β, z nichž je vidět vrchol hory z krajních bodů základny. Jak vypočítá výšku hory $x = \overline{BD}$ nad pozorovacím místem?



Obr. 24.

Řešení. Hledaná výška x je odvěsnou pravoúhlého $\triangle BCD$, v němž známe úhel β. Aby byl $\triangle BCD$ určen, je třeba stanovit jeho přeponu $a = \overline{BC}$, která se určí z pomocného $\triangle ABC$ sinovou větou. Jest

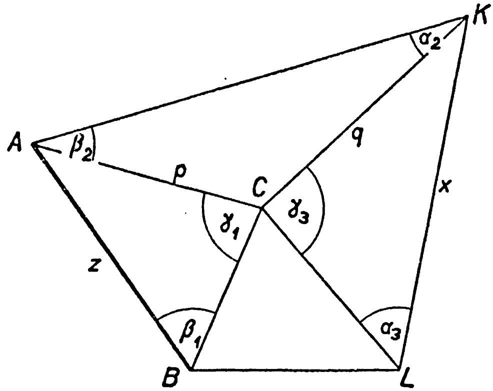
$$x = a \sin \beta, \qquad a = \frac{z \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)},$$

tedy

$$z = \frac{z \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

Příklad 5. (Obr. 25.) Ve vodorovné rovině jsou dány body A, B, C, K, L. Je dána vzdálenost $z = \overline{AB}$ a všecky úhly v obrazci vyznačené. Má se určit vzdálenost $x = \overline{KL}$.

Řešení. V $\triangle ABC$ známe úhly β_1, γ_1 a stranu z. Sinovou větou určíme stranu p. Potom v $\triangle ACK$ známe úhly α_2, β_2 a stranu p. Sinovou větou určíme stranu q. Posléze v $\triangle CKL$ známe úhly α_3, γ_3 a stranu q. Sinovou větou určíme stranu x. Máme



Obr. 25.

$$p = \frac{z \sin \beta_1}{\sin \gamma_1}, \quad q = \frac{p \sin \beta_2}{\sin \alpha_2},$$
$$x = \frac{q \sin \gamma_3}{\sin \alpha_3};$$

do druhé rovnice dosadíme za p z rovnice prvé a takto upravený výraz pro q dosadíme do rovnice třetí. Vyjde

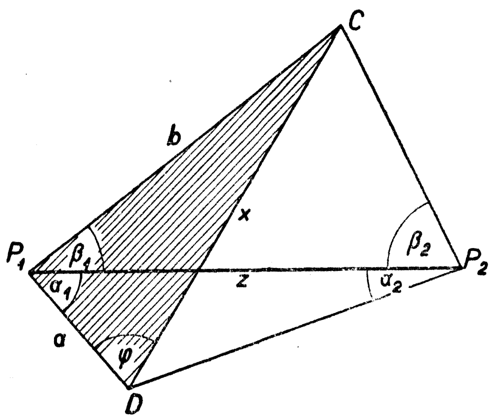
$$x = \frac{z \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \gamma_3}{\sin \gamma_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}.$$

Neznámá délka x byla spojena s danou délkou z (základnou) řetězem trojúhelníků, z nichž dva sousední mají vždy společnou stranu. Takový způsob určení neznámé délky se jmenuje **triangulace.** Užívá se ho proto, že přímé měření vzdáleností, zvláště větších, bývá obtížné, kdežto přímé měření vodorovných úhlů je poměrně snadné a přesné.

Při výpočtu x bylo možné také užít $\triangle BCL$ místo $\triangle ACK$. Vypočteme-li x oběma způsoby, slouží druhý ke zkoušce správnosti.

Příklad 6. (Obr. 26.) Dělo postavené v posici D se má zaměřit na zakrytý cíl C (mezi C a D je hustý les). K tomu je třeba určit vzdálenost $x = \overline{CD}$ a úhel φ. Proto byly zvoleny dvě pozorovatelny P_1, P_2, z nichž je vidět dělo i cíl, a byly změřeny úhly α_1, α_2, β_1, β_2, jakož i vzdálenost $z = \overline{P_1P_2}$. Pro jednoduchost předpokládáme, že všecky 4 body P_1, P_2, C, D leží v téže vodorovné rovině.

Řešení: x je stranou $\triangle CDP_1$, v kterém prozatím známe pouze úhel $\alpha_1 + \beta_1$. Jeho strana $a = \overline{P_1D}$ je však zároveň stranou $\triangle P_1P_2D$, v kterém je dána strana $z = \overline{P_1P_2}$ a úhly α_1, α_2; umíme tedy vypočítat stranu a. Podobně druhá strana $b = \overline{P_1C}$ trojúhelníka CDP_1 je zároveň stranou $\triangle P_1P_2C$ opět určeného stranou x a dvěma úhly β_1, β_2, takže také b umíme vypočítat. Podle sinové věty jest



Obr. 26,

$$a = \frac{z \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)},$$
$$b = \frac{z \sin \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}.$$

$\triangle CDP_1$ je nyní určen stranami a, b a sevřenými úhlem $\alpha_1 + \beta_1$, takže podle kosinové věty je

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos(\alpha_1 + \beta_1).$$

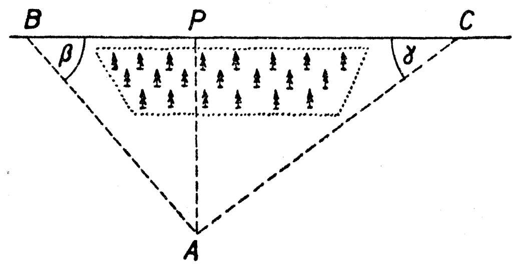
Cvičení.

151. Budiž $\alpha = 144^0$ úhel kosočtverce a $\varrho = 5$ poloměr kružnice kosočtverci vepsané. Určete obsah kosočtverce.

152. Budiž $\omega = 105^0$ jeden úhel úhlopříček obdélníka, jehož obsah je $P = 562\ \mathrm{m}^2$. Určete rozměry obdélníka.

153. Buďtež a, b vzdálenosti středu O rovnoběžníka od jeho dvou sousedních stran; dále budiž α jeden úhel rovnoběžníka. Určete úhlopříčky a obsah rovnoběžníka.

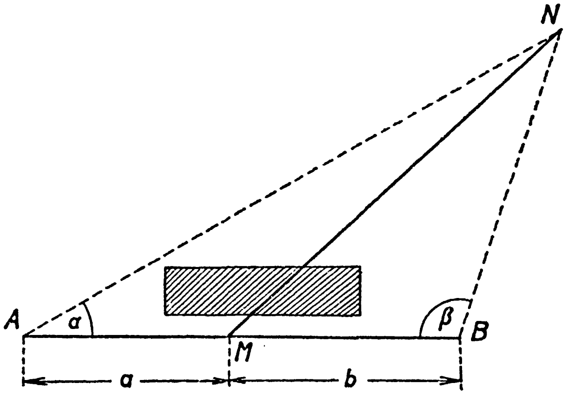
154. Obsah kruhové úseče o poloměru r, příslušné k středovému úhlu ω, je $P = \frac{1}{2} r^2 (\omega - \sin \omega)$. Dokažte! (Uvažujte případy $\omega \gtreqless \pi$.)



Obr. 27.

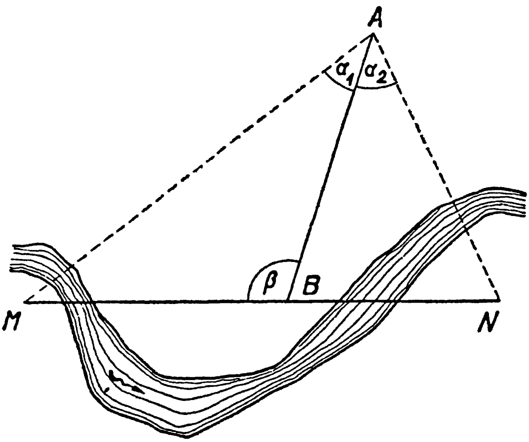
155. V kružnici jsou vedeny dvě rovnoběžné tětivy AB, CD, z nichž každá přísluší k témuž středovému úhlu $\omega < \pi$. Určete obsah částí příslušného kruhu, která leží v přímém pásu určeném rovnoběžkami AB, CD.

156. Máme určit vzdálenost AP bodu A od silnice BC (kde $AP \perp BC$ a P je příslušná pata, obr. 27). Místa A; P jsou od sebe oddělena lesíkem, takže z jednoho na druhé není vidět; proto byl na silnici změřen úsek $\overline{BC} = 1{,}2$ km, při čemž je $\beta = \sphericalangle ABC = 50^\circ$ a $\gamma = \sphericalangle ACB = 37^\circ$. Určete AP, leží-li pata P a) uvnitř, b) vně úsečky BC.



Obr. 28.

157. Určete vzdálenost $\overline{MN}$ (obr. 28) dvou bodů M, N, mezi nimiž je překážka, takže z místa M není místo N viditelné. Za tím účelem změřeny vzdálenosti $\overline{AM} = a$, $\overline{MB} = b$, které leží v jedné přímce, a úhly $\alpha = \sphericalangle NAB$, $\beta = \sphericalangle NBA$; místa A, B jsou totiž z N viditelná. Řešte numericky pro $a = 54$ m, $b = 60$ m, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 109\frac{1}{4}^\circ$.



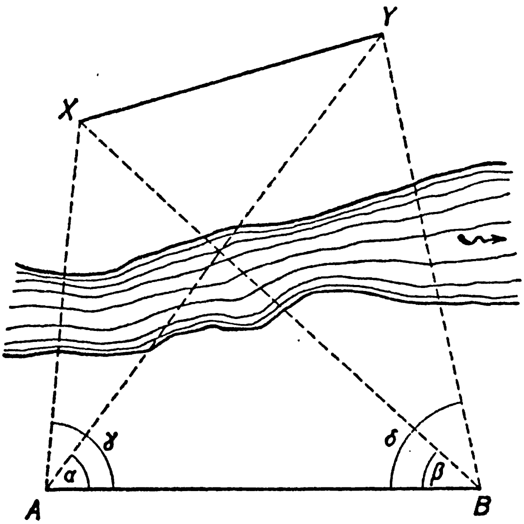
Obr. 29.

158. Určiti vzdálenost MN dvou nepřístupných bodů M, N (obr. 29). Na úsečce MN zvolíme vhodný bod B a mimo přímku MN bod A, z něhož jsou místa M, B, N viditelná. Změříme vzdálenost $\overline{AB} = a$ a úhly $\beta = \sphericalangle MBA$, $\alpha_1 = \sphericalangle MAB$, $\alpha_2 = \sphericalangle BAN$. Řešte numericky pro $a = 300$ m, $\alpha_1 = 32^\circ$, $\alpha_2 = 39^\circ$, $\alpha = 112^\circ$.

159. Letec spatřil pod hloubkovým úhlem $\alpha = 33^\circ$ na povrchu zemském

objekt O, dívaje se přesně na sever. Uletěv vzdálenost 3 km stále ve stejné výši k západu, spatřil týž objekt v hloubkovém úhlu $\beta = 21^0$. Jak vysoko letěl?

160. Z bodu M ležícího mezi dvěma stejně vysokými stožáry elektrického vedení vidíme vrchol prvního stožáru pod výškovým úhlem 50^0 a vrchol druhého pod výškovým úhlem 14^0. Která je vzdálenost obou stožárů, stojíme-li 8 m od prvního stožáru?

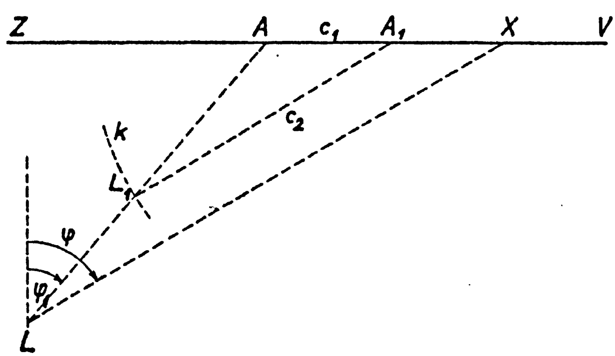


Obr. 30.

161. Abychom zjistili nepřístupnou vzdálenost XY (obr. 30), změřili jsme vzdálenost $d = \overline{AB}$ a úhly $\alpha = \sphericalangle YAB$, $\beta = \sphericalangle ABX$, $\gamma = \sphericalangle XAB$, $\delta = \sphericalangle ABY$. Proveďte řešení pro $d = 400$ m, $\alpha = 53^0$, $\beta = 42^0$, $\gamma = 86^0$, $\delta = 81^0$.

162. Na krajích letiště stojí dva světelné stožáry A, B, při čemž A je 500 m na západ od B. Letadlo letí v kursu $\varphi = 210^0$, měřeno od severu přes východ a jih. Pozorovatel v letadle vidí stožár B v azimutu $\varphi_2 = 190^0$ a stožár A v azimutu $\varphi_1 = 220^0$ (měřeno jako kurs). Jak daleko bude letoun od míst A, B, až se dostane mezi oba stožáry?

163. Po silnici ZV vedoucí od západu k východu (obr. 31) se pohybuje vo-



Obr. 31.

jenský útvar rychlostí $c_1 = 54$ km za hod. Z letiště L, které leží od silnice na jih, vzlétne letadlo, letící v neznámém kursu φ; letadlo má za úkol vejít co nejdříve ve styk s útvarem. Ve chvíli startu letadla je útvar v místě A, jehož azimut φ_1 vzhledem k letišti L je: a) 40°, b) 320°, při čemž vzdálenost $\overline{LA} = 150$ km. Určete kurs φ letadla a dobu jeho letu k místu setkání X, jestliže rychlost letadla $c_2 = 120$ km za hod. (Budiž A_1 bod na polopřímce AV takový, že $\overline{AA_1} = c_1$, a L_1 bod na úsečce LA takový, že $\overline{A_1L_1} = c_2$; dále je $LX \parallel L_1A_1$.)

164. Z počátku A a konce B úseku AB přímé silnice, která stoupá od A k B směrem ke kopci C (stoupání je 10 %), je kopec C vidět pod výškovými úhly $\alpha = 12^\circ$ a $\beta = 30^\circ$, při čemž body A, B, C leží v téže svislé rovině. Vzdálenost $\overline{AB} = 800$ m. Určete horizontální vzdálenosti místa C od míst A a B a výškové rozdíly jednotlivých míst. (Silnice má stoupání p %, když na 1 km stoupne o 10 p metrů. Jsou-li A', B' pravoúhlé průměty bodů A, B, C do vodorovné roviny, je $\overline{A'B'}$ horizontální vzdálenost bodů A, B.)

165. Letadlo L bylo současně pozorováno ze dvou míst A, B, která leží v téže horizontální rovině π. Letadlo je vidět z bodu A v azimutu $\varphi_1 = 225^\circ$ a pod výškovým úhlem $\alpha = 35{,}5^\circ$, kdežto z bodu B v azimutu $\varphi_2 = 202{,}5^\circ$ a pod výškovým úhlem $\beta = 18{,}25^\circ$. Určete výšku $x = \overline{LC}$ letadla nad rovinou π, kde C je pata výšky v rovině π. [Buďtež α', β', γ' úhly $\triangle ABC$. Užitím x vyjádřete $\overline{CA}$, $\overline{CB}$. Podle sinové věty je $\sin\alpha' = s \cdot \overline{CB}$, $\sin\beta' = s \cdot \overline{CA}$. Odtud určete hodnotu poměru $\dfrac{\sin\alpha' + \sin\beta'}{\sin\alpha' - \sin\beta'}$; z této rovnice určíte $\frac{1}{2}(\alpha' - \beta')$, kdežto $\frac{1}{2}(\alpha' + \beta')$ znáte.]

VÝSLEDKY CVIČENÍ.

1. a), d), e), g), i) souhlasný, ostatní nesouhlasné.

2. a) $\frac{3}{4} \cdot |x_2 - x_1|$; b) $- \frac{3}{4} \cdot |x_2 - x_1|$; c) $x_2 \pm \frac{2}{3} |x_2 - x_1|$; d) $x_1 - \frac{3}{2}(x_1 - x_2)$; e) $x_2 + \varepsilon m$, kde $\varepsilon = 1$, když je $x_2 - x_1 > 0$; pro $x_2 - x_1 < 0$ je $\varepsilon = -1$.

3. $x_1 = -3$; $x_2 = 5$; $\overline{A_1A_2} = 8$. Budiž $A \equiv [x]$, $A' \equiv [x']$, kde $x_1 < x' < x < x_2$. (1) Pro $x' \geqq 0$ je $\overline{A'A} = x - x' \leq x < 5 < 8$. (2) Pro $x' < 0$ je $x - x' = x + |x'| < 5 + 3 = 8$, neboť $|x'| < 3$.

4. a) 9; 2; -3; b) -9; -2; 3.

5. Dva; je $M_1 \equiv [m_1 = n - \frac{1}{2}]$; $M_2 \equiv [m_2 = n + \frac{1}{2}]$. Pořádek M_1NM_2.

6. Budiž $P \equiv [x_0]$ nový počátek souřadnic, pak je $x_1' = x_1 - x_0$, $x_2' = x_2 - x_0$. Budiž x' nová souřadnice bodu S. Je $\overline{AS} = |x_1' - x'| = |x_1 - x|$, $\overline{BS} = |x_2' - x'| = |x_1 - x|$. Nebo: $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$; $x' = x - x_0 = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) - 2x_0] = \frac{1}{2}[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_0)] = \frac{1}{2}(x_1' + x_2')$.

7. Je $x_1 \neq x_2$; na př. $x_2 > x_1$; a) $x_1 < x_0 < x_2$; b) $x_0 < x_1$; c) $x_2 < x_0$.

8. a) Budiž $x_1 < x_0 < x_2$; $\overline{SQ} = |x_0 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)| = |\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - x_0| = |\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} \cdot 2x_0| = \frac{1}{2}|(x_2 - x_0) - (x_0 - x_1)| = \frac{1}{2}|\overline{QB} - \overline{QA}| = \frac{1}{2}|\overline{QA} - \overline{QB}|$.

b) Budiž na př. $x_1 < x_2 < x_0$, je $\overline{SQ} = \frac{1}{2}|(x_0 - x_1) + (x_0 - x_2)| = \frac{1}{2}|\overline{QA} + \overline{QB}|$; pod. pro $x_0 < x_1 < x_2$.

9. Je $x \neq 0$, $y \neq 0$. Pokud jsou čísla x, m (nebo čísla y, n) týchž znamének, jsou libovolná. Je-li na př. znaménko čísla x opačné k znaménku čísla m, musí být $|m| < |x|$; v podobném případě musí být i $|n| < |y|$.

10. a) Je (1) buď $x \neq x'$, $y \neq y'$ nebo (2) $x = x'$, $y \neq y'$ nebo (3) $x \neq x'$, $y = y'$; b) $|x| > |x'|$; c) (1) $x < x'$; (2) $y < y'$.

11. a), b) Viz vyčárkované plochy (včetně hranic) v obr. 32a), b). c) Body úsečky AB, kde $A \equiv [6; 2]$, $B \equiv [6; 8]$ bez bodu A. e) Vnitřek obdélníka $ABCD$, kde $A \equiv [-3; 0]$, $B \equiv [0; 0]$; $C \equiv [0; 4]$, $D \equiv [-3; 4]$. f) Osa lichých kvadrantů. g) Osa sudých kvadrantů.

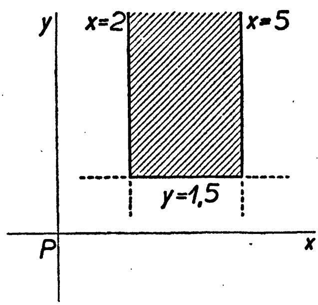
12. a) Osa x; b) osa y; c) úsečka MN, kde $M \equiv [-5; 4]$, $N \equiv [-5; 6]$, bez bodu M.

13. Čísla $x \neq 0$, $y \neq 0$ jsou a) týchž, b) opačných znamének.

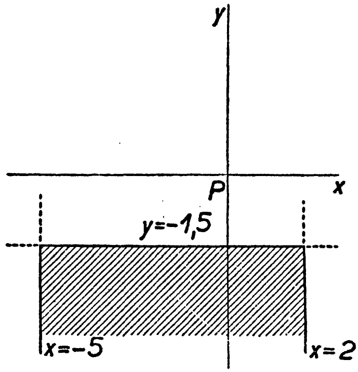
14. a) Řešte soustavu rovnic: a) $2a + 3 = -(2a + 3)$; $3b - 5 = -(5b + 7)$; b) $2a + 3 = 5a - 4$; $3b - 5 = 5b + 7$; c) $2a + 3 = -(5a - 4)$; $3b - 5 = 5b + 7$.

15. Budiž $M \equiv [x; y]$ bod útvaru U a $M' \equiv [x'; y']$ jeho obraz, který nutně patří útvaru U'. Obraz $M_x \equiv [x; -y]$ bodu M v souměrnosti podle osy x, pak $M_0 \equiv [-x; -y]$ je obraz bodu M_x v souměrnosti podle osy y. Je $M_0 \equiv M'$.

16. Označme po řadě $[x_i; y_i]$, kde $i = 1, 2, 3$, souřadnice vrcholů A, B, C a $[x_i'; y_i']$ souřadnice jejich obrazů A', B', C'. Ve stejnolehlosti (P, c) platí: $\overline{PA'} = |c| \cdot \overline{PA}$ atd., při čemž bod P: a) neodděluje body A, A' atd., když je $c > 0$; b) odděluje body A, A' atd., když je $c < 0$. V případě a) leží vzor a obraz bodu uvnitř téhož kvadrantu (po případě uvnitř téže poloosy souřadnic) a znaménka souřadnic x, x' (také souřadnic y, y') jsou stejná; v případě b) leží vzor a obraz bodu v různých kvadrantech (současně sudých nebo lichých), po případě v opačných poloosách souřadnic. Vždy je $x' = cx$, $y' = cy$. Body $A \equiv [cx; cy]$, $A' \equiv [-cx; -cy]$ jsou souměrné podle počátku P souřadnic.



Obr. 32a.



Obr. 32b.

17. (Viz cvič. 16.) Bod $A' \equiv [x' = xc; y' = cy]$ je obrazem bodu $A \equiv [x; y]$ ve stejnolehlosti (P, c), kde $c \neq 0$. Pro $x = y = 0$ je také $x' = y' = 0$ (jediný samodružný bod je bod P).

18. a) Je $x' = cx$, $y' = cy$. b) Jsou dvě možnosti: (1) Při pořádku PXX' jde o stejnolehlost $(P, c = 1 + m)$; při pořádku $PX'X$ o stejnolehlost $(P, c = 1 - m)$, kde $0 < m < 1$ nebo při pořádku XPX' o stejnolehlost $(P, c = m - 1)$, kde $m > 1$ (případ $m = 1$ vede k bodu $P \equiv X'$).

19. $6 = -2 \cdot (-3)$; $-9 \neq -2 \cdot (+4)$ [zkoušíme stejnolehlost $(P, c = -2)$]. Místo -9 volte -8 nebo místo 6 volte $\frac{27}{4}$.

20. a) [0; 4]; [9; 1]; [8; —2], b) [—5; 6]; [4; 3]; [3; 0]; c) [—9; 3]; [0; 0]; [—1; —3].

22. Budiž c libovolné reálné číslo; a) $P' \equiv [u; c]$; b) $P' \equiv [c; v]$; c) $P' \equiv [u; v]$.

23. 5; 13; 9; 1; $\sqrt{2}$.

24. a) ± 3; b) $\pm 2\sqrt{6}$; c) ± 5; d) 0; e) úloha nemožná.

25. a) 9; b) $\sqrt{34}$; c) 7.

26. a) [0; 7]; [0; — 1]; b) [0; $\pm \sqrt{105} - 5$].

27. a) [$\frac{53}{18}$; 0]; b) [0; $\frac{53}{8}$].

28. a) $A_1' \equiv [x_1, 0]$, $A_2' \equiv [x_2; 0]$; $A_1'' \equiv [0; y_1]$; $A_2'' \equiv [0; y_2]$. (1) Je-li $A_1' \equiv A_2'$, je $x_1 = x_2$; $y_1 \neq y_2$; (2) je-li $A_1'' \equiv A_2''$, je $x_1 \neq x_2$; $y_1 = y_2$; (3) nemůže být současně $A_1' \equiv A_2'$ a $A_1'' \equiv A_2''$, neboť je $A_1 \not\equiv A_2$ (nenulová úsečka), b) $S' \equiv [\frac{1}{2}(x_1 + x_2); 0]$, $S'' \equiv [0; \frac{1}{2}(y_1 + y_2)]$; $S \equiv [\frac{1}{2}(x_1 + x_2); \frac{1}{2}(y_1 + y_2)]$; je-li na př. $x_1 = x_2$, je $A'_1 \equiv A_2' \equiv S' \equiv$ $\equiv [x_1; 0]$ atd.

29. a) Všecky; b) první dva; c) první tři.

31. Na polopřímky PJ, PJ' užijte vzorců (8) na str. 100.

32. e) Je dvojznačná.

33. Hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$: a) $-\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; b) $-\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; d) -1; 0; e) 0; -1;

34. Hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$: a) $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; b) $-\frac{12}{13}$; $-\frac{5}{13}$; c) $\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$; d) 1; 0. Je $\cos\varphi' = -\cos\varphi$, $\sin\varphi' = -\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi$.

36. Je-li $r \parallel y$, směrnice neexistuje.

37. Směrnice přímek MN, MQ jsou si rovny; je $Q \equiv [1; -1]$.

38. a), b) Pořádek je $RTSOU$; srovnávejte hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ jednotlivých polopřímek. c) Část a) lze řešit pomocí směrnice.

39. Je $\overline{PA_1} = 5$; $\overline{PA_2} = 13$; po úpravě rovnice ve cvičení uvedené porovnáme reálné a imaginární části. Odtud plyne $\cos\alpha = \frac{16}{65}$, $\sin\alpha = -\frac{63}{65}$. a) $284\frac{1}{4}^\circ$; b) $-75\frac{1}{4}^\circ$.

41. (1) Užitím Pythagorovy věty (je $\overline{AB^2} = 18$, $\overline{BC^2} = 50$, $\overline{CA^2} = 68$). (2) Je $\cos\varphi_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi_{23} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\cos(\varphi_{23} - \varphi_{21}) = 0$, $\sin(\varphi_{23} - \varphi_{21}) = -1$, takže polopřímku BA je třeba otočit o $\frac{3}{2}\pi$ okolo bodu B, aby polopřímka BA splynula s polopřímkou BC.

42. $\alpha = 135^\circ$; $\beta \doteq 26\frac{1}{2}^\circ$.

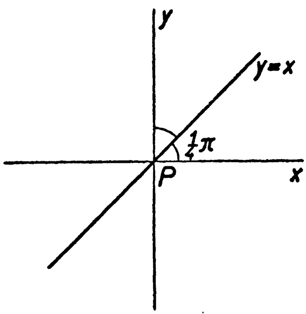
43. Pro hledaný úhel ω_{12} platí: $\cos\omega_{12} = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, $\sin\omega_{12} =$ $= \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$.

44. a) $\frac{3}{2}\pi$; b) -75°; c) $-59\frac{1}{2}^\circ$.

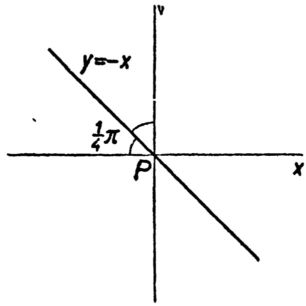
45. Pro směrový úhel φ platí: $\cos\varphi = -\frac{1}{2} = \frac{x - 5}{\overline{CD}}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{3} =$ $= -\frac{3}{\overline{CD}}$; odtud: $d = 2\sqrt{3}$; $x = 5 - \sqrt{3}$.

46. a) [$-\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$]; b) [$\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{5}$]; c) [$-\frac{1}{10}(3 - \sqrt{3})$; $\frac{1}{10}(4 + 3\sqrt{3})$]; d) $A_2 \equiv A_1$; e) [$\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$]. (Úlohu lze řešit také pomocí rovnice $(a + bi)(-\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}) = \cos\omega +$ $+ i\sin\omega$, kde a, b jsou hledané hodnoty a ω úhel daný v úloze.)

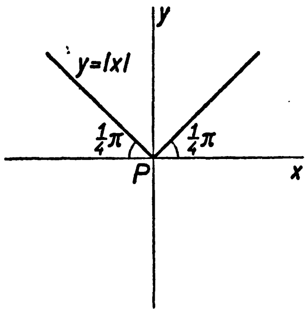
48. Viz obr. 33a) až h), (kde $|k| = \frac{3}{2}$); je-li ve cvič. d) až g) $k = 0$, jde o osu x.



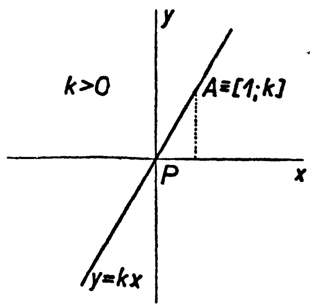
Obr. 33a.



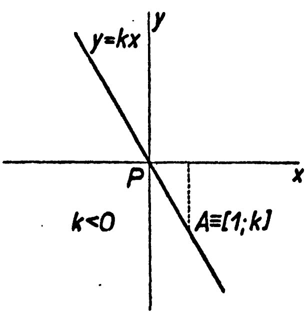
Obr. 33b.



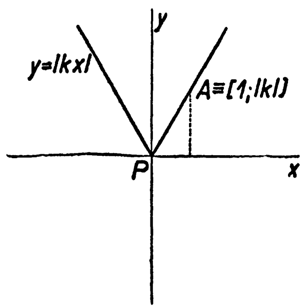
Obr. 33c.



Obr. 33d_1.



Obr. 33d_2.



Obr. 33e.

49. a) Polopřímka PM o směrovém úhlu φ.
b) Polopřímka PN o směrovém úhlu $\varphi + \pi$.
c) Přímka PN o směrovém úhlu φ nebo $\varphi + \pi$.

50. a), c) $y = \frac{4}{3}x$; b), d) $y = -\frac{2}{3}x$. Mají po páru rovné směrnice.

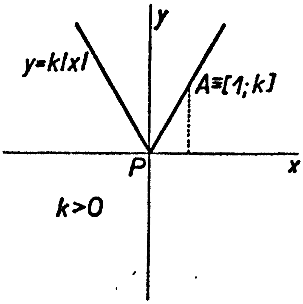
51. a) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$; b) $y = 3$; c) $y = -x + 1$.

52. a) $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{7}{4}\pi$; b) 0; π; c) $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$.

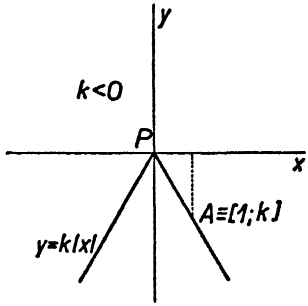
54. a) $[2; 0]$; $[0; \frac{3}{2}]$; $[6; 6]$; $[-\frac{6}{7}; \frac{6}{7}]$; b) $[0; 0]$; c) osu x neprotíná; $[0; 9]$; $[9; 9]$; $[-9; 9]$; d) $[-5; 0]$; osu y neprotíná; $[-5; -5]$; $[-5; 5]$.

55. a) H, K; b) H; K; c) H; K nikoli (všechny body přímky mají souřadnici $y = 9$); d) K; H nikoli (všechny body přímky mají souřadnici $x = -5$).

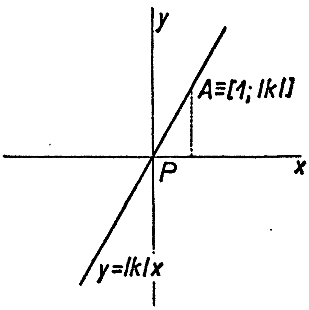
56. Jen první.



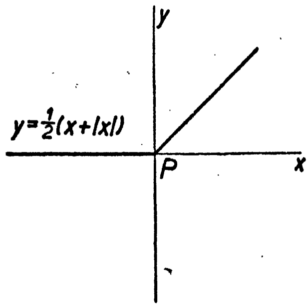
Obr. 33f$_1$.



Obr. 33f$_2$.



Obr. 33g.



Obr. 33h.

57. a) $-6 - 8 + 14 = 0$; b) je $3sx - 2sy + 14s = s(3x - 2y + 14)$ a pro souřadnice bodu M je výraz v závorce roven nule, takže bod M leží na přímce o rovnici $3sx - 4sy + 14s = 0$ (kde $s \neq 0$).

58. $ax' + by' + (am + bn + c) = 0$.

59. Z rovnic mezi koeficienty: $3 - m = 2s$; $12 = -3s$; $2 - n = 4s$ (kde $s \neq 0$) plyne $s = -4$; $m = 11$; $n = 18$.

60. $y = kx - (3 + 4k)$; $[4 + \frac{3}{k}; 0]$; $[0; -(3 + 4k)]$; $k = \frac{3}{2}; -\frac{3}{8}$.

61. Rovnici $y - y_1 = k(x - x_1)$ naší přímky vyhovují souřadnice bodu $[x_1 + m; y_1 + n]$.

62. Přímka p prochází: a) body $[-\frac{5}{2}; 0]$; $[0; \frac{10}{3}]$; b) body $[\frac{39}{5}; 0]$; $[0; 13]$; c) body $[0; 0]$; $[15m; 4m]$, kde $m \neq 0$ je libovolné reálné číslo; d) bodem $[0; \frac{15}{2}]$ a je $p \parallel x$; e) bodem $[6; 0]$ a je $p \parallel y$. Směrnice: a) $\frac{4}{3}$; b) $= \frac{5}{3}$; c) $\frac{4}{15}$; d) 0; e) neexistuje.

63. Souřadnice daného bodu musí vyhovovat dané rovnici; je: a) $c = 31$; b) $c = 0$.

64. a) Platí: $ax + by + c = 0$, $ax_1 + by_1 + c = 0$; odečtením máme $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$. b) Na přímce o rovnici $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ zřejmě leží bod $[x_1; y_1]$. c) Je $c = 0$.

65. a) Rovnoběžky (pro $q = q'$ splývají). b) Kolmice (pro $q = q'$ se protnou v bodě $[0; q]$). c) Rovnoběžky (splynou pro $c = c'$). d) Kolmice. e) Rovnoběžky: (1) s osou y pro $b = 0$; (2) směrnice jsou $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$ pro $b \neq 0$; přímky splynou pro $c' = sc$.

66. a) $c = 29$; b) $c = -31$.

67. $x = 3t$; $y = -4t$; a) pro $-\frac{8}{3} < t < -1$; b) pro $\frac{3}{4} > t > -\frac{1}{2}$.

68. $x = 2 - 9t$; $y = -3 + 4t$. Jen první bod leží na přímce MN.

70. Pro $x_2 - x_1 \neq 0$ obdržíme $y - y_1 = k(x_2 - x_1)$, kde k je směrnice přímky A_1A_2; pro $x_2 - x_1 = 0$ je $x - x_1 = 0$ (rovnoběžka s osou y).

71. Přímka je zřejmě určena dvojicí různých bodů: (1) $[0; q]$; $[1; k + q]$; (2) $[0; q]$; $[-1; -k + q]$.

72. b) Užijte vztahů (8) na str. 100 pro $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $x_2 = x_0 + m$, $y_2 = y_0 + n$. c) Je $M_k \equiv [x_0 + mt_k; y_0 + nt_k]$ pro $k = 1; 2$ a ke směrovému úhlu φ' polopřímky M_1M_2 přísluší $\cos\varphi' = \dfrac{m(t_2 - t_1)}{\overline{M_1M_2}}$, $\sin\varphi' = \dfrac{n(t_2 - t_1)}{\overline{M_1M_2}}$, kde $\overline{M_1M_2} = (t_2 - t_1) \cdot \sqrt{m^2 + n^2}$, neboť je $t_2 - t_1 > 0$. Proto je $\cos\varphi' = \cos\varphi$, $\sin\varphi' = \sin\varphi$, kde φ je směrový úhel polopřímky A_0A'. d) Je $\overline{M_1M_2} = (t_2 - t_1)\sqrt{m^2 + n^2}$. e) (1) Pro $t > 0$ položte ve výsledku cvič. d): $t = t_2 > t_1 = 0$, (2) pro $t < 0$ položte v témže cvičení: $t = t_1 < t_2 = 0$. Tu $|t|$ udává vzdálenost bodu M od bodu $A_0 \equiv [x_0; y_0]$; bod M je pro $t > 0$ uvnitř polopřímky o směrovém úhlu φ (určeném hodnotami $\cos\varphi$, $\sin\varphi$), pro $t < 0$ je uvnitř polopřímky opačné.

73. Přímku určíme pomocí bodů $[-3; 2]$, $[-3 - 4; 2 + 3]$. Je $x = -3 - 4t$; $y = 2 + 3t$.

74. a) Užijte výsledku cvič. 72b; b) o směrnicích platí $k = \dfrac{n}{m}$, $k' = -\dfrac{m}{n}$ a tedy $1 + kk' = 0$ (pro $m \neq 0$, $n \neq 0$), což značí kolmost. Je-li $m = 0$ nebo $n = 0$, je to zřejmé.

75. b) O směrnicích platí $\frac{4}{3} \neq -\frac{12}{5}$; průsečík $A_0 \equiv [3; 12]$ má parametry $t = 2$, $t' = -1$. c) $A_1 \equiv [0; 8]$ $A_2 \equiv [13; -12]$; $59\frac{1}{2}^0$.

76. Parametrické vyjádření úseček AA_0, BB_0, CC_0 po řadě je: $[x = -2m + (3m + p)t_1;\ y = qt_1]$; $[x = 2m + (-3m + p)t_2;\ y = q\,t_2]$; $[x = 2p\,(1 - t_3);\ y = 2q\,(1 - t_3)]$, kde t_1, t_2, t_3 jsou nezáporná čísla menší než 1. Z prvních dvou vyjádření pro bod T dostaneme $t_1 = t_2 = \frac{2}{3}$ a $T \equiv \equiv \left[\frac{2p}{3}; \frac{2q}{3}\right]$, což je i bod úsečky CC_0 pro $t_3 = \frac{2}{3}$. Podle cvič. 72d jsou rozdíly parametrů bodů A, T a bodů A_0, T úměrné velikostem $\overline{AT}$, $\overline{A_0T}$ a tedy $(AA_0T) = (-\frac{2}{3} - 0) : (1 - \frac{2}{3}) = -2$.

77. Q_1 leží na l; Q_4 je od bodů Q_2, Q_3 přímkou l oddělen.

78. Souřadnicovou soustavu zvolte takto: $A \equiv [0; 0]$; $B \equiv [a; 0]$; $C \equiv [x_1 + c; y_1]$; $D \equiv [x_1; y_1]$, kde $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$, $y_1 > 0$. Buďtež $S_1 \equiv \equiv [\frac{1}{2}x_1; \frac{1}{2}y_1]$, $S_2 \equiv [\frac{1}{2}(a + c + x_1); \frac{1}{2}y_1]$ středy ramen AD, BC; S_1S_2 je střední příčka a $V \equiv [\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}(a + c)\,t; \frac{1}{2}y_1]$ její vnitřní bod, kde $0 < t < < 1$. Odtud: a) $S_1S_2 \parallel AB$; b) $S_1S_2 = \frac{1}{2}(a + c)$. c) Rovnice přímek AB, BC, CD, DA po řadě jsou: (1) $y = 0$; (2) $y_1x + (a - c - x_1)\,y - ay_1 = 0$; (3) $y - y_1 = 0$; (4) $xy_1 - x_1y = 0$. Snadno vyšetříte, že všecka tři dosazení souřadnic bodů: (1) C, D, V; (2) D, A, V; (3) A, B, V; (4) B, C, V do levé strany rovnice stejně očíslované jsou týchž znamének [schematicky: (1) $+ + +$; (2) $- - -$; (3) $- - -$; (4) $+ + +$].

79. Body A, B, C neleží v přímce. a) Parametrické vyjádření přímky MN je $x = 1 - 2t$; $y = 2 - 3t$ (pro body U úsečky MN je $0 \leq t \leq 1$. Rovnice přímek AB, BC, CA po řadě jsou: (1) $4x - 5y + 7 = 0$; (2) $3x + 7y + 16 = 0$; (3) $7x + 2y - 20 = 0$. Dosazení bodů: (1) C, U; (2) A, U; (3) B, U do levé strany stejně očíslované rovnice přímky jsou týchž znamének [schematicky: (1) $+ +$; (2) $+ +$; (3) $- -$].

b) Ten bod V přímky MN leží uvnitř $\triangle ABC$, pro který je dosazení jeho souřadnic do levé strany rovnice (viz cvič. 79a): (1) kladné; (2) kladné; (3) záporné. Odtud plynou tyto podmínky pro t: (1) $-\frac{1}{7} < t$; (2) $t < \frac{11}{9}$; (3) $-\frac{9}{20} < t$, t. j. $-\frac{1}{7} < t < \frac{11}{9}$. Přímka MN protne strany AB, BC v bodech o parametrech $-\frac{1}{7}$; $\frac{11}{9}$.

80. $-0{,}8 < t < -0{,}3$.

81. 3; $\frac{65}{17}$; $\frac{4}{17}$. Body H, L leží v téže polorovině.

82. 5; 5; $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

83. Budiž $[x_0; y_0]$ bod druhé přímky, t. j. $ax_0 + by_0 + c' = 0$; jeho vzdálenost od první přímky je

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(ax_0 + by_0 + c') + (c - c')|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

84. $\frac{1}{13}\,|12x_0 + 5y_0 - 52| = 3$; podle toho zda je $12x_0 + 5y_0 - 52 \gtrless 0$, dostaneme $12x_0 + 5y_0 + c = 0$, kde c je -91 nebo -13 (rovnoběžky k dané přímce).

85. (Viz cvič. 6.) Rovnice má tvar $a(x - 5) + b(y - 2) = 0$ a o vzdálenosti platí $\frac{|-8a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4$ a po umocnění dostanete kvadratickou rovnici pro $\frac{a}{b}$ (je $b \neq 0$, jinak by i $a = 0$) a odtud kořeny $\left(\frac{a}{b}\right)_1 = \frac{5}{12}$; $\left(\frac{a}{b}\right)_2 = -\frac{3}{4}$.

86. b) Je-li přírůstek nezávisle proměnné $\pm m$, je přírůstek funkce: (1) $\pm \frac{3}{2} m$; (2) $\mp \frac{3}{4} m$; (3) 0 (platí současně horní nebo současně dolní znaménka). Poměr přírůstků je : (1) $\frac{3}{2}$; (2) $-\frac{3}{4}$; (3) 0.

87. Funkce: (1) je rostoucí; (2) je klesající; (3) je konstantní.

88. Je-li přírůstek $x - x_1 = 1$, je poměr přírůstků právě $y - y_1 = a$. Je-li $[x_1; y_1]$ libovolný bod grafu funkce, stačí volit $x = x_1 + \varepsilon$, $y = y_1 + \varepsilon a$, kde $\varepsilon = 1$ nebo $\varepsilon = -1$.

89. Grafem funkce jsou dvě polopřímky o počátku $P \equiv [0; 0]$, které půlí pravé úhly I. a II. kvadrantu (viz cvič. 47 a obr. 33c). V případě: a) jde o funkci $y = x$, kde $x \geqq 0$; b) jde o funkci $y = x$, kde $x < 0$. Případ c): Je-li na př. $x_1 \leqq 0$, $x \geqq 0$ (není možné, aby $x = x_1 = 0$), položme $x_1 = -a$, kde $a \geqq 0$. Potom přírůstek k lze psát $k = \frac{|x| - |x_1|}{x - x_1} = \frac{x - a}{x + a}$; nyní platí $k = \frac{(x + a) - 2a}{x + a} = 1 - z_1$ a také $k = \frac{-(x + a) + 2x}{x + a} = -1 + z_2$, kde $z_1 = \frac{2a}{x + a}$; $z_2 = \frac{2x}{x + a}$, při čemž je $0 \leqq z_1 \leqq 2$, $0 \leqq z_2 \leqq 2$. Je tedy $-1 \leqq k \leqq 1$. Jeden z obou hledaných bodů $[x; y]$, $[x_1; y_1]$, k nimž přísluší poměr přírůstků na př. $\frac{3}{4}$, lze zvolit libovolně, nikoli však v bodě $[0; 0]$.

90. Grafem každé z obou rovnic je přímka; rozhodnete snadno o jakou dvojici přímek se jedná. a) Žádné řešení; b) jediné řešení; c) nesčíslné množství řešení.

91. a) Označme $\frac{2 - m}{3} = z_1$, $\frac{3n}{5} = z_2$, $\frac{3 - p}{4} = z_3$. Nastane případ: (1) když je $z_1 = z_2 \neq z_3$; (2) když je $z_1 = z_2 = z_3$; (3) když je $z_1 \neq z_2$. b) Je $m : n : p = -5 : 5 : 9$.

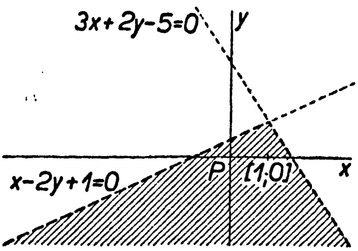
92. Rovnici lze psát ve tvaru $(x - 2) + t\,(x - 2y) = 0$; všechny přímky mají společný bod $[2; 1]$, který je průsečíkem přímek o rovnicích $x - 2 = 0$, $x - 2y = 0$.

93. a) Pro $-5r_1 + r_2 = 0$, t. j. $r_2 = 5r_1$; b) pro $2r_1 + 5r_2 = 0$, t. j. $r_2 = \frac{2}{5} r_1$.

94. Hledaná přímka má rovnici tvaru $r_1\,(x - 5y + 1) + r_2\,(2x + 3y + 4) = 0$; z podmínky pro směrnici odtud plyne $9r_1 - 8r_2 = 0$. Stačí volit $r_1 = 8$, $r_2 = 9$ a rovnice hledané přímky je $26x - 13y + 44 = 0$.

95. Je $M \equiv [\frac{3}{11}; \frac{4}{11}]$, t. j. $\overline{PM'} = 11 \cdot \overline{PM}$, takže $c = 11$. Je-li bod $[x'; y']$ obrazem bodu $[x; y]$, je $x' = 11x$, $y' = 11y$ a $x' + 2y' - 11 = 0$ je rovnice obrazu m' přímky m (je to tedy přímka a platí $m' \parallel n$).

96. $K \equiv [-\frac{6}{5}; -\frac{26}{15}]$; přímky AC, BD jsou dány lineárními funkcemi, svými rovnicemi, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$, $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$, z nichž první je klesající, druhá rostoucí. Při rostoucím x od -4 do 5 máme na přímce AC zřejmě pořádek AKC, při rostoucím x od -5 do 1 máme na přímce DB pořádek DKB. Jinak je třeba dokázat, že přímka AC odděluje body B, D a přímka BD body A, C.



Obr. 34a.

97. a) $4x - 5y + 9 = 0$; b) $35x + 28y - 34 = 0$.

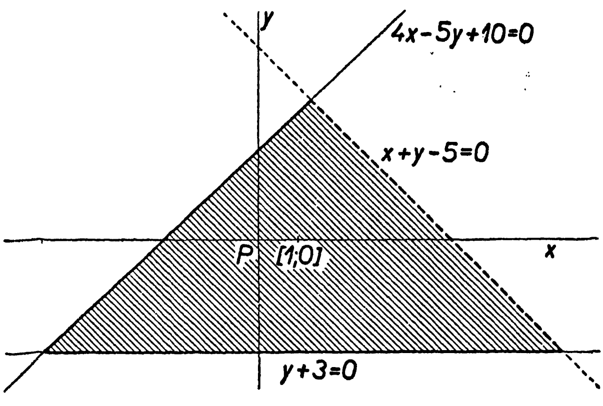
98. Viz obr.: a) 34a); b) 34b); d) 34d). Úloha c) nemá řešení.

99. a) $y = 5x - 1$; poměr přírůstků $k = 3 + 2$; b) $y = x - 3$; $k = 3 - 2$.

100. b) $y = \frac{1}{6}x^2$; c) $[0; 0]$; $[\pm \sqrt{6}; 1]$; $[\pm 3; 1{,}5]$; $[\pm 3\sqrt{2}; 3]$; d) $[6; 6]$.

101. Ohnisko: a) $[0; 1]$; b) $[0; -\frac{5}{12}]$; c) $[0; \frac{1}{14}]$.

102. $[\pm 12; 18]$.



Obr. 34b.

103. Je $A \equiv [0; 0]$; $B \equiv [b; a]$; $C \equiv [b; 0]$; $A_k \equiv \left[\frac{bk}{n}; 0\right]$;

$C_k \equiv \left[b; \frac{ak}{n}\right]$; $X_k \equiv \left[x = \frac{bk}{n}; \ y = \frac{ak}{bn} \cdot \frac{bk}{n}\right]$, t. j. $y = \frac{a}{b^2}x^2$.

105. a) $y + 1 = (x - 4)^2$; $V \equiv [4; -1]$; $F \equiv [4; -\frac{3}{4}]$; $y = -\frac{5}{4}$. b) $y - 9 = -x^2$; $V \equiv [0; 9]$; $F \equiv [0; 8\frac{3}{4}]$; $y = \frac{37}{4}$. c) $y - \frac{361}{24} =$

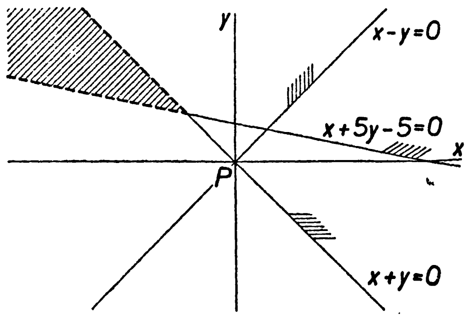
$= -6(x + \frac{11}{12})^2$; $V \equiv [-\frac{11}{12}; \frac{361}{24}]$; $F \equiv [-\frac{11}{12}; 15]$; $y = \frac{181}{12}$; d) $y - 8 = -9\,(x - \frac{2}{3})^2$; $V \equiv [\frac{2}{3}; 8]$; $F \equiv [\frac{2}{3}; 7\frac{35}{36}]$; $y = 8\frac{1}{36}$.

106. a) První, třetí; b) $y_1 = 0$; $x_2 = 3$ nebo $x_2 = -\frac{4}{3}$.

107. $y + \frac{49}{12} = 3\,(x - \frac{5}{6})^2$; $y' = 3x'^2$, kde $x' = x - \frac{5}{6}$; $y' = y + \frac{49}{12}$; nový počátek $P' \equiv [\frac{5}{6}; -\frac{49}{12}]$.

108. $y_1 = 7$; $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{3x^2 - 6x + 7 - 7}{x - 2} = 3x$ (pro $x \neq 2$); derivace v bodě A je 6.

109. a) Hodnota směrnice $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ rovnoběžných tětiv MN je podle předpokladu konstantní (není $MN \parallel y$); podle vztahu (8) na str. 130 je $k = a\,(x_2 + x_1) + b$ a tedy $x' = \frac{1}{2}\,(x_2 + x_1) = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{k - b}{a}$ (neboť $a \neq 0$), t. j. $x' =$ konst., což je rovnice přímky rovnoběžné s osou y.



Obr. 34d.

b) Dotykový bod $T \equiv \left[x' = \dfrac{k - b}{2a};\ y\right]$ a podle vztahu (9) na str. 130 směrnice tečny v bodě T je $2ax' + b = k$.

110. a) $y = a\,(6x^2 + 5x - 6)$; b) $y = a\,(-4x^2 + 18x - 9)$; c) $y = a\,(2x^2 - 6x + 5)$; všude je $a \neq 0$ libovolná reálná konstanta. Všechny takové paraboly mají společný vrchol a v něm společnou vrcholovou tečnu $v \parallel x$. V případě c) neprotíná parabola osu x.

111. Určete diskriminant kvadratické rovnice, kterou z dané rovnice obdržíte pro $y = 0$. Počet průsečíků v případě: a) dva různé; b) jediný; c) žádný.

112. Pro body $[x; y]$ osy x je $y = 0$ a tedy $ax^2 + bx + c = 0$ pro každé $r \neq 0$; tato kvadratická rovnice určuje souřadnice x obou průsečíků kterékoli z parabol s osou x.

114. Bod $A \equiv [2; 7]$ leží na t a proto: (1) $7 = 2k + q$. Vyloučením y z rovnice paraboly a přímky dostaneme rovnici $3x^2 - (k + 6)\,x + (7 - q) = 0$, která stanoví souřadnice x průsečíků. Položíme-li její diskriminant rovný nule, bude jediný průsečík; z této podmínky a z rovnice (1) vyloučením q dostaneme $(k - 6)^2 = 0$, t. j. $k = 6$ (což je zřejmě derivace v bodě A).

115. a) Pro souřadnice x průsečíků obdržíme rovnici (1) $\equiv x^2 - 2x + q - 3 = 0$; má-li být $x_1 = x_2$, musí být $q = 4$ a rovnice zní $(x - 1)^2 = 0$, t. j. $x_{1,2} = 1$; $y = 0$. Vskutku derivace v bodě $[1; 0]$ je -4. b) Přímka s

o rovnici $y = -4x + q$ jde bodem $Y \equiv [0; q]$; je to pro $q > 4$ sečna a pro $q < 4$ nesečna, jak ukazuje diskriminant $4 - q$ rovnice (1), který je v prvním případě kladný, v druhém záporný. Obojí přímky leží uvnitř opačných polovin vyťatých přímkou t, pro níž je $q = 4$.

116. a) Vyloučením t máme $y = \frac{g}{c^2} x^2$, což je rovnice paraboly.

117. a) Vyloučením t máme $y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2c^2 \cos^2\alpha} x^2$, což je rovnice paraboly.

b) Derivace $k = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{c^2 \cdot \cos^2\alpha}$. Pro $k = 0$ dostaneme $x_0 = \frac{c^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$, čímž je určen vrchol $V \equiv [x_0; y_0]$ paraboly; příslušný parametr $t_0 = T = \frac{c \cdot \sin\alpha}{g}$ a tedy $y_0 = l = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha}{2g}$. c) $2x_0$; $t' = 2T$ (ze cvič. 117b); $a' = 2R - a$.

118. a) $x^2 + y^2 = 25$; na ní leží první a třetí bod; b) $x^2 + y^2 + 30x + 18y + 37 = 0$; na ní leží bod první a druhý.

119. Rovnice má tvar: a) $x^2 + y^2 + 12x - 16y + c = 0$ a bod M ji splňuje; proto je $c = 0$. b) $x^2 + y^2 - 2mx - 4my + c = 0$ a bod M ji splňuje; odtud $c = -16m^2$.

120. a) Kružnice (P, r); b) kružnice (S, r), kde $S \equiv [m; n]$.

121. a) $(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$; b) $x^2 + (y + 3)^2 = 4^2$; c) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$; d) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$; e) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = -3^2$ (kružnice neexistuje).

122. Podle toho, že v rovnici kružnice chybí: a) lineární člen s proměnnou y; b) lineární člen s proměnnou x; c) absolutní člen.

123. Je-li alespoň jedno z reálných čísel x, y od nuly různé, je jeho čtverec kladné číslo a tudíž od nuly různý.

124. Plyne z planimetrické definice: Je-li dána kružnice (P, r), je bod M : (1) bodem kružnice, když je $\overline{PM} = r$; (2) bodem uvnitř kružnice, když je $\overline{PM} < r$; (3) bodem vně kružnice, když je $\overline{PM} > r$. Obráceně, když platí $x^2_0 + y_0^2 < r^2$, nemůže bod $[x_0; y_0]$ ležet ani na kružnici ani vně kružnice, jinak by platilo $x_0^2 + y_0^2 \geqq r^2$ atd.

125. Rovnice kružnice má tvar (2) (str. 136), kde a, b, c jsou zatím neznámé konstanty. Souřadnice daných bodů tuto rovnici (2) splňují; tím dostaneme tři lineární rovnice pro a, b, c. Kružnice má rovnici $x^2 + 3y^2 - 3x + 5y - 8 = 0$. Bod P leží uvnitř kružnice.

126. O bodech $M_1 \equiv [x_1; y_1] \not\equiv M_2 \equiv [x_2; y_2]$ kružnice především platí: (1) $z_1 = x_1^2 + y_1^2 = r^2$; (2) $z_2 = x_2^2 + y_2^2 = r^2$; (3) $|z_{12}| = |x_1x_2 + y_1y_2| < r^2$ jestliže není současně $x_1 = -x_2$, $y_1 = -y_2$, neboť platí: $(x_1 \pm x_2)^2 + (y_1 \pm y_2)^2 > 0$, když není současně $x_1 = \pm x_2$, $y_1 = \pm y_2$; odtud vzhledem k (1), (2) je

$\pm 2(x_1x_2 + y_1y_2) + 2r^2 > 0$ a odtud (3). — Budiž nyní $M \equiv [x_0; y_0]$ vnitřní bod úsečky M_1M_2, potom je $x_0 = x_1(1 - t) + x_2t$, $y_0 = y_1(1-t) + y_2t$, kde $0 < t < 1$. Dokážeme, že nezáporné číslo $V = x_0^2 + y_0^2$ je menší než r^2. Je $V = |V| = |z_1(1-t)^2 + z_2t^2 + 2z_{12}t(1-t)| \leq z_1(1-t)^2 + z_2t^2 + 2|z_{12}|t(1-t) < r^2[(1-t)^2 + t^2 + 2t(1-t)] = r^2$.

127. Zvolme střed $[m; n]$ kružnice (1) za nový počátek P'; budiž $M \equiv [x; y]$ libovolný bod roviny a buďtež x', y' jeho souřadnice v nové soustavě souřadnic, t. j. platí $x' = x - m$, $y' = y - n$ neboli $x = x' + m$, $y = y' + n$. Kružnice v nové soustavě má rovnici $x'^2 + y'^2 = r^2$ a rovnice přímky je $ax' + by' + c' = 0$, kde $c' = am + bn + c$. Tím je úloha převedena na úvahu v textu (str. 138); dosazením hodnoty c' do (14) místo c dostaneme, že $\frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} r$ podle toho, je-li přímka sečnou nebo tečnou nebo nesečnou kružnice a obráceně.

128. a) Přímka o rovnici $x = -1$ protne kružnici v bodě T a $[-1; -7]$. Každá jiná přímka s, jdoucí bodem T, má rovnici $y = bx + q$, kde $q = b + 1$. Vyloučením y z této rovnice a z rovnice kružnice dostaneme rovnici $x^2(1 + b^2) + 2x(bq + 3b - 2) + (q^2 + 6q - 12) = 0$ pro souřadnice $x_1 = x_2 = -1$ hledaného jediného průsečíku T. Víte, že absolutní člen této rovnice znásobené číslem $\frac{1}{1 + b^2}$ je právě roven x_1x_2, v našem případě 1. Odtud $q^2 + 6q - 12 = b^2 + 1$ a po dosazení $q = b + 1$ dostaneme $b = \frac{3}{4}$. Hledaná přímka má rovnici $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$, což je tečna v bodě T, neboť jde bodem T a stojí kolmo k přímce ST, kde $S \equiv [2; -3]$ je střed dané kružnice.

b) Hledaná přímka má rovnici tvaru $y = -\frac{3}{4}x + q$; konstantu q vhodně určíme. Vyloučením y z této rovnice a rovnice kružnice dostáváme rovnici $25x^2 - 8x(3q + 17) + 16(q^2 + 6q - 12) = 0$ pro souřadnice x_1, x_2 průsečíků. Bude-li diskriminant této rovnice roven nule, bude $x_1 = x_2$ a tím pro q máme rovnici $16q^2 + 48q - 589 = 0$ o kořenech $q_1 = \frac{19}{4}$, $q_2 = \frac{31}{4}$. Jiné řešení: Zvolte nový počátek P' souřadnic ve středu kružnice; tím se numerické výpočty zjednoduší.

129. a) Parametrické vyjádření hledané přímky je $x = -1 + mt$, $y = 1 + nt$ (viz cvič. 72), kde m, n jsou hledané konstanty; dosazením do rovnice kružnice dostaneme rovnici $t[t(m^2 + n^2) - 2(3m - 4n)] = 0$, při čemž víme, že není současně $m = n = 0$ a proto je $m^2 + n^2 \neq 0$. Odtud máme jednak $t_1 = 0$ (t. j. bod T), jednak lomená závorka je rovna nule; ale my žádáme, aby i $t_2 = 0$, což vede k podmínce $\frac{m}{n} = \frac{4}{3}$ a můžeme volit $m = 4$, $n = 3$.

b) Hledaná přímka má parametrické vyjádření tvaru $x = x_1 + 3t$, $y = y_1 - 4t$ (viz cvič. 72), kde bod $A_0 \equiv [x_1; y_1]$ leží na kružnici. Dosazením těchto hodnot do rovnice kružnice dostaneme rovnici $(x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 + 6y_1 + 12) + t(25t - 36 + 6x_1 + 8y_1) = 0$ pro parametry t hledaných průsečíků. Ale první člen je roven nule, A_0 je bodem kružnice a proto je $t_1 = 0$ (bod t_0); žádáme, aby také $t_2 = 0$, t. j. musí být $6x_1 - 8y_1 - 36 = 0$. Tato rovnice spolu s rovnicí kružnice určuje hledané body [5; 1], [—1; —7].

130. (n je celé číslo.) a) $\varphi_1 \doteq 324^0 8' + n \cdot 4R$; $\varphi_2 \doteq 126^0 52 + n \cdot 4R$; b) $\varphi_1 = \varphi_2 \doteq 306^0 52' + n \cdot 4R$; c) nemá řešení.

131. (Viz str. 138 textu.) Aby rovnice (15) měla dvě (jedno) řešení φ (kde $0 \leqq \varphi < 2\pi$), musí přímka o rovnici (18) protnout kružnici $x^2 + y^2 = 1$ ve dvou bodech (v jediném bodě) a podle (14) musí být $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqq 1$, t. j. $a^2 + b^2 - c^2 \geqq 0$.

132. a) $2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1)$; b) $1 : \sqrt{3} : 2$; c) je $\sin\gamma = \sin[\pi - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}\sqrt{6}$; $a : b : c = \sqrt{10} : \sqrt{15} : 2\sqrt{6}$.

133. V $\triangle ABC$ je $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\beta'$, $\sphericalangle BCA = \frac{1}{2}\alpha'$ (dutý obvodový úhel příslušný tětivě BC) a podle sinové věty je $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha'}{\sin\frac{1}{2}\beta'}$ atd.

134. Obsah $P = 2\varDelta$ (kde $\varDelta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ je obsah $\triangle ABC$), t. j. $P = ab \cdot \sin\gamma$.

135. Body B, D veďte $b' \parallel AC$, $d' \parallel AC$ a body A, C veďte $a' \parallel BD$, $c' \parallel BD$. Přímky a', b', c', d' určují rovnoběžník, jehož strany jsou e, f a jeden jeho úhel je ω; obsah rovnoběžníka je $ef \cdot \sin\omega$ (viz cvič. 134). Obsah daného čtyřúhelníka je polovina obsahu rovnoběžníka.

136. b) Odečtením rovnic $c^2 = v_1^2 + p^2$; $b^2 = v_1^2 + q^2$, kde $c - q = p$, dostaneme $c^2 - b^2 = p^2 - q^2 = (a - q)^2 - q^2 = a^2 - 2aq = a^2 - 2ab\cos\gamma$. c) Podobně jako ve cvič. 136b (je-li γ' vedlejší k úhlu γ platí $\cos\gamma' = \cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma$).

137. Buďtež A', B', C' po řadě paty kolmic spuštěných s bodů A, B, C na přímky BC, CA, AB a α', β', γ' vnější úhly $\triangle ABC$. a) Je vždy $\sin\alpha' = \sin\alpha$ atd. Uvažujte $\triangle ACA'$, $\triangle ABA'$ a pomocí hodnot b, c, γ určete v_1; rozeznávejte: (1) α, β, γ jsou vesměs ostré, (2) jeden z úhlů α, β, γ je pravý nebo (3) tupý. Odtud sinová věta.

b) Je-li: (1) $\beta = \frac{1}{2}\pi$, je $A' \equiv B$, $a' = 0$ (to souhlasí, neboť $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$); (2) $\beta < \frac{1}{2}\pi$; C' padne dovnitř polopřímky BA; $a' = a\cos\beta$; (3) $\beta > \frac{1}{2}\pi$, ale $\beta' < \frac{1}{2}\pi$; C' padne dovnitř polopřímky BD opačné k polopřímce BA. Je $a' = \overline{B'C'} = a \cdot \cos\beta' = a \cdot |\cos\beta|$, neboť $\cos\beta' = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$ a je $a\cos\beta < 0$.

138. a) $b = 7$; b) $a = 31$.

139. a) $a \doteq 233{,}4$; $b \doteq 438{,}5$; $\gamma \doteq 40^0$; b) $c \doteq 3{,}6$; $\alpha \doteq 25^0 43'$; $\gamma \doteq 34^0 17'$; c) $\alpha \doteq 53^0 8'$; $\beta \doteq 26^0 44'$; $\gamma \doteq 100^0 8'$; $c \doteq 15{,}95$. d) $c \doteq 28{,}75$;

$\alpha \doteq 58^0 10'$; $\beta \doteq 97^0 50'$; e) $a \doteq 107$; $\beta \doteq 18^0 7'$; $\gamma \doteq 21^0 53'$; f) $d \doteq 26^0 26'$; $\beta \doteq 121^0 17'$; $\gamma \doteq 32^0 17'$.

140. a) $\gamma = 19^0$; $a = 14{,}73$; $b = 11{,}89$; $c = 4{,}25$; b) dvojí řešení: (1) $\gamma = 30^0$; $\alpha = 46^0 56'$; $\beta = 103^0 4'$; $c = 4{,}106$; (2) $\gamma = 150^0$; $\alpha = 12^0 48'$; $\beta = 17^0 12'$; $c = 13{,}53$; c) $c = 0{,}4997$; $\alpha = 27^0 23'$; $\beta = 64^0 8'$; $\gamma = 88^0 29'$.

141. $V = 100{,}06\pi$ dm^3.

142. a) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; b) $\frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})$; c) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$; d) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; e) $\frac{2}{\cos 50^0}$.

144. $o = 8r \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma$ (užijte sinové věty a cvič. 143a).

145. Pro $\alpha < \frac{1}{2}\pi$. Objem $V = \frac{1}{3}\pi c^3 \left(\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right)^2$; povrch $S = 2\pi c^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$.

147. a) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$; b) $\cos\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$; $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = -2$; c) $\cos\frac{1}{2}\alpha = -\frac{4}{5}$; $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = -\frac{3}{4}$.

148. $\sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$; $\cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$.

149. a) $\Delta = 24$; b) $\Delta = 84$.

151. Obsah $P = a \cdot 2\varrho$, kde a je strana kosočtverce, která se určí z $\triangle ABO$, v němž $\sphericalangle OAB = \frac{1}{2}\alpha$ (bod O je střed kosočtverce); $P \doteq 170{,}1$.

152. Buďtež $a = \overline{AB} \geqq b = \overline{BC}$ rozměry daného obdélníka $ABCD$ a E bod na prodloužení úsečky AB za bod B, a to takový, že $\overline{BE} = a$; potom je obsah P roven obsahu $\triangle CAE$, t. j. $P = \frac{1}{2}u^2 \sin\omega$, kde $u = \overline{AC}$. Odtud je $a = \sqrt{P \operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega}$, $b = \sqrt{P \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\omega}$; $a = 26{,}18$; $b = 20{,}09$.

153. Budiž $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$; obsah $P = \frac{4\,ab}{\sin\alpha}$. Kosinovou větou se určí úhlopříčky $u_1^2 = \frac{4(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$; $u_2^2 = \frac{4(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$.

155. $P = r^2(\pi - \omega + \sin\omega)$ [viz cvič. 154].

156. Z daných hodnot plyne, že P leží uvnitř úsečky BC. Sinovou větou se určí $\overline{AP} = \overline{AC} \cdot \sin\gamma$; $\overline{AC} = \overline{BC} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$; $\overline{AP} \doteq 0{,}554$ (km).

157. $\overline{BN} = \frac{(a + b)\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ (sinová věta); $\overline{MN}^2 = b^2 + \overline{BN}^2 - 2b \cdot \overline{BN} \cdot \cos\beta$; $MN \doteq 102$.

158. Určíme $\overline{MB}$, $\overline{BN}$ (sinovou větou); $\overline{MN} \doteq 468$.

159. Letec letěl ve výši $v \doteq 1427$ m.

160. Vzdálenost $d \doteq 46{,}2$ m.

161. Užijte $\triangle ABX$, $\triangle ABY$ a určete $\sphericalangle BYX - \sphericalangle BXY$; $\overline{XY} \doteq$ $\doteq 323$ m.

162. Za předpokladu, že letadlo letí ve výši stožárů, jsou vzdálenosti asi $197\frac{1}{2}$ m, $302\frac{1}{2}$ m.

163. a) $\varphi \doteq 60^0 10'$; $t_1 = 1$ hod. $55\frac{1}{2}$ min. b) $\varphi = 340^0 10'$, $t_2 = 1$ hod. 1 min.

164. Horizontální vzdálenosti od A a od B jsou asi 1244 m, 442,3 m; výškové rozdíly po řadě mezi (A, B), (A, C), (B, C) jsou asi 7, 9 m, 264,3 m, 255,4 m.

OBSAH

MATEMATIKA

pro III. třídu gymnasií

Autoři: František Balada, prof. Dr Eduard Čech, Josef Holubář, Dr Karel Hruška, Dr Marta Chytilová, Dr Vanda Janová, Dr Bedřich König, Dr Emil Mastný, Dr Karel Rössler, Dr Antonín Srb, Dr Josef Šimek, Antonín Tuláček, Rudolf Zelinka

Odpovědný redaktor: prof. Dr František Vyčichlo

Technický redaktor: Ing. Antonín Langer

Korektor: Josef Sedlák

Plánovací skupina 301 20-521 - Schváleno výnosem ministerstva školství, věd a umění ze dne 26. října 1950, č. 65 499/50-I/1, v prvním vydání jako učebnice pro gymnasia - Povoleno MIO č. j. 43 023/51-7-III/1 ze dne 20. února 1951 - Čkm. G 355-III - Sazba: 31. 10. 1950 - Tisk: 3. 4. 1951 - Vydalo r. 1951 Státní nakladatelství učebnic, prvé vydání - Náklad 20 000 výt. (1.-20 000 výt.) - Plánovacích archů 11,13 - Autorských archů 9,82 - Vydavatelských archů 10,79 - Papír 2224/7 - Formát A 5 - Písmo Antiqua - Druh tisku: knihtisk - Všeobecná daň 1 % - Vytiskla Státní tiskárna, n. p., základní závod 01, Unie, Praha II.

CENA SEŠ. VÝTISKU KČS 22,—

B 77

Čkm. G 355-III

Cena Kčs 22,—

301 20-521