František Balada; Eduard Čech; a kol.

Matematika pro II. třídu gymnasií

Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 214 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501381

MATEMATIKA

PRO II. TŘÍDU GYMNASIÍ

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC · PRAHA

MATEMATIKA

PRO DRUHOU TŘÍDU GYMNASIÍ

1951

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC

PRAHA

Úvodní poznámky.

V první třídě se žáci poněkud hlouběji seznámili s oborem racionálních čísel a s čísly tvaru $a + b\sqrt{c}$ (kde a, b, $c > 0$ jsou racionální čísla). Tento číselný obor v 2. třídě rozšíříme o čísla irracionální, která jsou kladným řešením rovnice $x^n = a$ (pro $a > 0$ a n přirozené); proto je $\sqrt[n]{a}$ definována jednoznačně. V dalším odvodíme poučky pro počítání s těmito čísly. Těchto výsledků užijeme k rozšíření pojmu mocniny a^n pro případ, že $a > 0$ a n je racionální číslo; přitom vyjdeme z definice, která se opírá o zavedený pojem $\sqrt[n]{a}$. Pak dokážeme, že početní pravidla platná pro počítání s mocninami s přirozeným mocnitelem platí i pro tyto nově zavedené mocniny.

Těchto výsledků užijeme ke studiu funkce $y = a^x$, kde $a > 0$; při tom se též zmíníme, že je možno vypočítat hodnotu a^x i tehdy, když je x irracionální. Jestliže posloupnost hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots$ má stálý rozdíl, má posloupnost hodnot $a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots.$ stálý podíl; toho je možno dobře užít ke studiu průběhu exponenciální funkce. O tyto výsledky se opřeme při studiu logaritmů čísel; základní vlastnosti logaritmu lze bez nesnází odvodit pro libovolný základ $a > 1$. Na tabulce logaritmů seznámíme žáky s interpolací a poučíme je o přesnosti výsledků získaných pomocí logaritmů jakož i o významu těchto přibližných výsledků pro praxi.

Zavedením čísel komplexních dovršíme postupné rozšiřování číselného oboru. Později, v článku o řešení kvadratické rovnice, se ukáže, jaký význam mají komplexní čísla pro počet kořenů této rovnice. Čísla komplexní definujeme jako číselné dvojice, při čemž je od počátku znázorňujeme v rovině; z tohoto znázornění se hned ukáže, že čísla reálná jsou jen zvláštním případem čísel komplexních. Z definice sčítání a násobení komplexních čísel plyne, že známé početní zákony, platné pro čísla reálná, jsou jen zvláštním případem obecnějších zákonů, které platí pro sčítání a násobení čísel komplexních. Totéž plyne i z definice rozdílu a podílu dvou komplexních čísel. Upozorníme však na to, že ne všechna pravidla platná pro počítání s reálnými čísly lze zobecnit tak, aby platila i pro čísla komplexní. Příkladem toho je srovnávání reálných čísel podle jejich velikosti, což vedlo k uspořádání reálných čísel; srovnávání absolutních hodnot komplexních čísel má však zcela jiný význam a vede k pojmu komplexní jednotky a čísel komplexně sdružených.

Vzhledem k tomu, že hledáme vzájemné souvislosti aritmetiky a geometrie, znázorníme sčítání a násobení komplexních čísel geometricky; těchto výsledků užijeme ke studiu goniometrických funkcí, ačkoli jich lze užít i v některých partiích fysiky. Po rozšíření pojmu úhlu a po zavedení jeho komplexní míry snadno dospějeme ze zobecněné definice funkcí kosinus a sinus k pojmu periodičnosti těchto funkcí. V souvislosti se znázorněním součinu komplexních čísel odvodíme Moivreovu větu, z ní pak snadno odvodíme celou řadu vztahů pro funkce kosinus a sinus; tento postup má tu přednost, že vzorce takto odvozené mají platnost pro každou hodnotu úhlu. Pojem mocniny komplexního čísla omezíme na celistvého mocnitele.

Řešení goniometrických rovnic tvaru $f(x) =$ konst. podrobíme diskusi v souvislosti s jednotkovou kružnicí.

Na závěr jako příklad užití goniometrických funkcí provedeme si studium rovnoměrného pohybu po kružnici.

Těmito partiemi jednak vyzbrojíme žáka potřebným matematickým aparátem, jehož bude nezbytně potřebovat při studiu matematiky, zvláště pak geometrie, ve vyšších třídách a zároveň jej připravíme k hlubšímu zkoumání a chápání fysikálních pojmů.

Učivo a jeho methodické zpracování v textu je maximum, které lze probrat ve třídě za příznivých podmínek. Vyučující provede podle vyspělosti třídy a podle časového rozvrhu vhodný výběr učiva, zvláště důkazů.

Soustavným sledováním vzájemných vztahů mezi aritmetikou a geometrií a důslednou výchovou k přesnému logickému myšlení přispěje matematika příslušným dílem ke vzdělání nové inteligence naší socialistické společnosti. Tato nová inteligence svým pracovním nadšením a zevrubným promýšlením všech úkolů platně se zúčastní při budování socialismu v naší republice.

ARITMETIKA

Rozvrh učiva.

Září:	Odmocňování. Mocniny s racionálními mocniteli.
Říjen:	Exponenciální funkce. Pojem a vlastnosti logaritmu.
Listopad:	Tabulka logaritmů. Užití tabulky logaritmů.
Prosinec:	Zavedení komplexních čísel.
Leden:	Sčítání a násobení komplexních čísel. Sdružená komplexní čísla; absolutní hodnota.
Únor:	Kvadratické rovnice. Geometrický význam komplexních čísel.
Březen:	Vyjádření otáčení kolem počátku pomocí komplexních čísel. Pojem úhlu.
Duben:	Kosinus a sinus. Tangens a kotangens.
Květen:	Goniometrické rovnice. Rovnoměrný pohyb po kružnici.
Červen:	Shrnutí a opakování.

I. Obecná mocnina a logaritmus.

1. Odmocňování.

Již v první třídě jsme probírali druhé odmocniny. Je-li a kladné číslo, potom druhou odmocninou čísla a rozumíme to kladné číslo x, pro které platí $x^2 = a$. Podobně třetí odmocnina kladného čísla a je to kladné číslo x, pro které platí $x^3 = a$, a stejně můžeme definovati čtvrtou, pátou odmocninu atd. Obecně budiž dáno přirozené číslo $n > 1$. Je-li a libovolně zvolené *kladné* číslo, budeme se zajímat o *kladný* kořen rovnice

$$x^n = a. \tag{1}$$

Tato rovnice jistě nemůže mít víc než jeden kladný kořen. Neboť jsou-li x_1, x_2 dvě různá kladná čísla a je-li na př. $x_1 < x_2$, jest

$$x_1^n = x_1 \cdot x_1 \ldots x_1 \text{ (} n \text{ činitelů)} \tag{2}$$

$$x_2^n = x_2 \cdot x_2 \ldots x_2 \text{ (} n \text{ činitelů)} \tag{3}$$

Při přechodu od (2) ke (3) se každý činitel zvětší; tím se zvětší také součin, a proto je $x_1^n < x_2^n$ a nemohou proto obě čísla x_1^n, x_2^n býti rovná témuž číslu a, t. j. rovnice (1) nemůže míti více než jeden kladný kořen. Obtížnější je dokázat, že rovnice (1) má řešení při každé volbě kladného čísla a. Je to však správné a vyslovíme definici: **n-tá odmocnina kladného čísla a je to kladné číslo x, které vyhovuje rovnici** (1). Píšeme

$$x = \sqrt[n]{a} \tag{4}$$

a říkáme, že číslo a je **odmocněnec** a číslo n **odmocnitel** naší n-té odmocniny. Prakticky je případ $n = 2$ mnohem důležitější než ostatní případy, proto místo $\sqrt[2]{a}$ se skoro vždy píše $\sqrt{a}$, t. j. odmocnitel 2 se vynechává. Theoreticky je důležité nevylučovat z naší definice ani případ $n = 1$. Podle definice je ovšem

$$\sqrt[1]{a} = a$$

pro každé kladné číslo a. Značku $\sqrt[n]{a}$ *definujeme pouze v tom případě, že odmocněnec a je číslo kladné a odmocnitel n číslo přirozené.*

Pro $n = 2$ jsme v první třídě ještě měli

$$\sqrt[n]{0} = 0 \tag{5}$$

a není na závadu připustit definici (5) pro libovolné n, není to však příliš důležité. Při záporném a nebudeme se vůbec zabývat otázkou, je-li možné a účelné definovat odmocninu (4).

Z definice n-té odmocniny plyne snadno několik důležitých vět vyjádřených jednoduchými vzorci. Ve všech těchto větách znamená n libovolně dané přirozené číslo.

I. Jsou-li a, b kladná čísla, jest

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \tag{6}$$

Důkaz. Položme $x = \sqrt[n]{a}$, $y = \sqrt[n]{b}$. Podle definice jsou x, y kladná čísla a jest $x^n = a$, $y^n = b$. Jak víte z 1. třídy, je $x^n y^n = (xy)^n$. Tedy xy je kladné číslo a jest $(xy)^n = ab$. Vzhledem k významu písmen x, y to znamená, že platí (6).

Zcela stejně se dokáže pro více než dva činitele:

II. Jsou-li a_1, a_2, ..., a_s kladná čísla, jest

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_s} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_s}.$$

Jsou-li si rovna všecka čísla a_1, a_2, ..., a_s, máme další důležitý výsledek.

III. Je-li a kladné číslo, jest

$$\sqrt[n]{a^s} = (\sqrt[n]{a})^s \tag{7}$$

pro každé přirozené číslo s.

Další věty:

IV. Je-li a kladné číslo a jsou-li m, n přirozená čísla (stejná nebo nestejná), jest

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \tag{8}$$

Důkaz: Položme $z = \sqrt[mn]{a}$. Podle definice je z kladné číslo a jest $z^{mn} = a$. Jak víte z 1. třídy, jest $z^{mn} = (z^m)^n$. Položíme-li tedy $z^m = x$, je x kladné číslo a jest $x^n = z^{mn}$ neboli $x^n = a$. Tedy podle definice n-té odmocniny je

$x = \sqrt[n]{a}$. Na druhé straně bylo z kladné číslo a platilo $z^m = x$. Tedy podle definice m-té odmocniny je $z = \sqrt[m]{x}$. Tedy

$$x = \sqrt[n]{a}, \quad z = \sqrt[m]{x}, \text{ takže } z = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

Protože však $z = \sqrt[mn]{a}$, je vzorec (8) správný.

V. Je-li a kladné číslo, jest

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}. \tag{9}$$

Důkaz. Položme $x = \sqrt[n]{a}$. Podle definice je x kladné číslo a jest $x^n = a$. Pak je však také $\frac{1}{x}$ kladné číslo a z 1. třídy víte, že $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$ neboli $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{a}$, takže podle definice n-té odmocniny je $\frac{1}{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$. Vzhledem k významu písmene x to znamená, že vzorec (9) je správný.

VI. Je-li a kladné číslo, jest

$$\sqrt[n]{a^s} = (\sqrt[n]{a})^s \tag{7}$$

pro každé celé číslo s (kladné, záporné nebo rovné nule).

Důkaz. Pro kladné s je to již dokázaná věta III. Pro $s = 0$ zní (7): $\sqrt[n]{a^0} = (\sqrt[n]{a})^0$ a to je správné, protože jednak nultá mocnina každého čísla je rovna jedné, jednak

$$\sqrt[n]{1} = 1$$

podle definice n-té odmocniny. Zbývá případ, že $s = -r$ je záporné. Podle definice mocniny s celým záporným mocnitelem je jednak

$$(\sqrt[n]{a})^s = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^r}, \tag{10}$$

jednak

$$a^s = \frac{1}{a^r},$$

takže podle V je

$$\sqrt[n]{a^s} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^r}}. \tag{11}$$

Ježto podle III je $\sqrt[n]{a^r} = (\sqrt[n]{a})^r$, ze (10) a (11) plyne (7).

Při definici n-té odmocniny jsme vycházeli z faktu, že při každém kladném čísle a má rovnice (1) kladný kořen. Přesné odůvodnění tohoto faktu je obtížné zejména proto, že už při nejjednodušších volbách čísla a je kořen x rovnice (1) zpravidla iracionální a nedá se počítat přesně, nýbrž pouze přibližně. Nebudeme se tímto odůvodněním vůbec zabývat.

Cvičení.

1. Jak se přesvědčíte, že a) $\sqrt{529} = 23$; b) $\sqrt[3]{512} = 8$; c) $\sqrt[4]{625} = 5$; d) $\sqrt[5]{243} = 3$?

Ve cvič. 2—7 znamená n přirozené číslo.

2. Za jakých podmínek rovnice $\sqrt[n]{a} = b$ značí přesně totéž jako rovnice $a = b^n$?

3. Co znamená výraz: a) $\sqrt[n]{a^n}$; b) $(\sqrt[n]{a})^n$? Kdy mají oba výrazy týž význam?

4. Kdy má smysl výraz a) $\sqrt[n]{-a}$; b) $\sqrt[n]{ab}$?

5. Za jakých podmínek má smysl výraz a) $\sqrt[n]{a^r}$; b) $(\sqrt[n]{a})^r$, kde r je celé číslo?

6. Platí věty I až VI, když některý z odmocněnců, jež se v nich vyskytují, je roven nule?

7. Dokažte větu: Je-li $a \geqq 0$, $b > 0$, je $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

8. Rozkladem v prvočinitele stanovte: a) $\sqrt{48 \cdot 75}$; b) $\sqrt{30 \cdot 35 \cdot 42}$; c) $\sqrt[3]{12 \cdot 18}$; d) $\sqrt[3]{9 \cdot 15 \cdot 25}$; e) $\sqrt[3]{30 \cdot 42 \cdot 70 \cdot 105}$; f) $\sqrt[4]{128 \cdot 162}$.

9. Vypočtěte: a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; b) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{30}$; c) $\sqrt{19{,}2} \cdot \sqrt{10{,}8}$; d) $\sqrt[3]{45} \cdot \sqrt[3]{75}$; e) $\sqrt[3]{4{,}9} \cdot \sqrt[3]{5{,}6} \cdot \sqrt[3]{6{,}4}$; f) $\sqrt[3]{13\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{11\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{2}$.

10. Upravte na tvar součinu, jehož jedním činitelem je odmocnina co nej-

menšího přirozeného čísla: a) $\sqrt{125}$; b) $\sqrt{960}$; c) $\sqrt[3]{16}$; d) $\sqrt[3]{54}$;
e) $\sqrt[3]{128}$; f) $\sqrt[3]{320}$; g) $\sqrt[3]{500}$; h) $\sqrt[3]{648}$; i) $\sqrt[4]{80}$; j) $\sqrt[4]{162}$.

11. Vypočtěte: a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; c) $\sqrt{4\frac{25}{36}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; e) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; f) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; g) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

12. Upravte na tvar součinu zlomku a odmocniny co nejmenšího přirozeného čísla: a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; b) $\sqrt{\frac{1}{8}}$; c) $\sqrt{\frac{3}{8}}$; d) $\sqrt{2\frac{1}{2}}$; e) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; f) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; g) $\sqrt[3]{1\frac{2}{25}}$; h) $\sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$.

13. Upravte a po každé uveďte, kdy má daný výraz smysl: a) $\sqrt{a^2}$; b) $\sqrt{a^4}$;
c) $\sqrt{a^{-2}}$; d) $\sqrt[3]{a^3}$; e) $\sqrt[3]{a^6}$; f) $\sqrt[3]{a^{-3}}$; g) $\sqrt[4]{a^4}$; h) $\sqrt[4]{a^8}$; i) $\sqrt[4]{a^{-12}}$; j) $\sqrt[5]{a^{15}}$.

14. Upravte a po každé uveďte, kdy má daný výraz smysl: a) $\sqrt[4]{a^2}$; b) $\sqrt[4]{a^{-2}}$;
c) $\sqrt[6]{a^3}$; d) $\sqrt[8]{a^4}$; e) $\sqrt[6]{x^4}$; f) $\sqrt[6]{x^{-4}}$; g) $\sqrt[9]{y^6}$; h) $\sqrt[16]{b^4}$; i) $\sqrt[12]{u^{-9}}$; j) $\sqrt[15]{z^{10}}$.

15. Nalezněte hodnoty daných výrazů a po každé udejte, kdy mají tyto výrazy smysl: a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$; b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}$; c) $\sqrt[3]{u}\cdot\sqrt[3]{u^2}$; d) $\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[3]{ab^2}$;
e) $\sqrt{ax}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}$; f) $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$; g) $\sqrt[3]{a^2b^{-1}}\cdot\sqrt[3]{ab^{-2}}$; h) $\sqrt[4]{rt^{-1}}:\sqrt[4]{rt^{-3}}$.

16. Upravte a udejte, kdy má daný výraz smysl: a) $\sqrt[4]{9a^2b^2}$; b) $\sqrt[4]{25a^{-2}b^2}$;
c) $\sqrt[6]{8b^3c^3}$; d) $\sqrt[6]{27u^{-3}v^{-3}}$; e) $\sqrt[4]{\frac{a^6}{b^2}}$; f) $\sqrt[3]{\frac{27p^3q^6}{r^{12}}}$; g) $\sqrt[4]{\frac{16a^2}{b^6}}$; h) $\sqrt[6]{\frac{64x^3}{y^9}}$.

17. Nalezněte hodnotu výrazů: a) $\sqrt{\sqrt{2}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$; d) $\sqrt{2\sqrt{2}}$;
e) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$; f) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$.

18. Nalezněte hodnotu výrazů a po každé udejte, kdy má daný výraz smysl: a) $\sqrt{\sqrt{a}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$; c) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$; d) $\sqrt{x\sqrt{x}}$; e) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}$;
f) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$; g) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}$.

19. Pomocí tabulky druhých a třetích mocnin vypočtěte na čtyři platné číslice: a) $\sqrt{4{,}683}$; b) $\sqrt{46{,}83}$; c) $\sqrt{274{,}4}$; d) $\sqrt{2744}$; e) $\sqrt[3]{1{,}235}$; f) $\sqrt[3]{12{,}35}$;
g) $\sqrt[3]{123{,}5}$; h) $\sqrt[3]{4147}$; i) $\sqrt[3]{0{,}4147}$; j) $\sqrt[3]{0{,}04147}$.

20. Pomocí tabulek druhých a třetích mocnin určete na čtyři platné číslice: a) $\sqrt[4]{5}$; b) $\sqrt[4]{50}$; c) $\sqrt[4]{500}$; d) $\sqrt[4]{5000}$; e) $\sqrt[6]{10}$; f) $\sqrt[6]{100}$; g) $\sqrt[6]{1000}$; h) $\sqrt[6]{10\,000}$; i) $\sqrt[6]{100\,000}$; j) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$.

21. Zjednodušte: a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}$; b) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt{\frac{u}{v}}+\sqrt{\frac{v}{u}}$; d) $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

22. Vypočtěte: a) $(\sqrt{6}+\sqrt{15})\sqrt{3}$; b) $(\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81})\sqrt[3]{9}$; c) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$; d) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})$; e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{8})$; f) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{9})$.

23. Stanovte: a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3$; c) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2$; d) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3$.

24. Dokažte, že a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$; b) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}=2\sqrt{2}$; c) $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{2(a+b)}$, kde $a\geqq b\geqq 0$; d) $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{2(a-b)}$, kde $a\geqq b\geqq 0$.

2. Mocniny s racionálními mocniteli.

V 1. třídě jsme probírali mocninu a^n s tím omezením, že mocnitel n byl celé číslo (kladné, záporné nebo rovné nule). Naproti tomu mocněnec a byl zcela libovolné číslo s tím omezením, že pro $a=0$ nebylo možné definovat mocninu pro záporného mocnitele. Nyní *budeme předpokládat, že mocněnec a je číslo kladné;* naproti tomu předpoklad, že mocnitel n je celé číslo, nahradíme mnohem obecnějším předpokladem, že n je racionální číslo. Pro případ celého mocnitele jsme v 1. třídě odvodili vzorce

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s},\tag{1}$$

$$(a^r)^s=a^{rs},\tag{2}$$

$$a^r\cdot b^r=(ab)^r,\tag{3}$$

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}.\tag{4}$$

Uvidíme, že lze mocninu a^r s kladným mocněncem a a s racionálním mocnitelem r jediným způsobem definovat tak, aby bylo stále

$$a^r>0\tag{5}$$

a aby právě připomenutá pravidla (1) až (4) zůstala v platnosti. Každé racionální číslo r lze psáti ve tvaru zlomku

$$r = \frac{m}{n}, \tag{6}$$

jehož jmenovatel n je přirozené číslo (neboli celé kladné číslo) a jehož čitatel m je celé číslo (kladné, záporné nebo rovné nule). Jestliže zvolíme racionální číslo r ve tvaru (6), musíme definovat hodnotu a^r tak, aby pro všecka racionální čísla s platilo (2). Volíme-li $s = n$, bude $rs = m$ a (2) dá

$$(a^r)^n = a^m,$$

takže podle (6) musí býti

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{7}$$

Vztah (7) je definice mocniny s kladným mocněncem a a s racionálním mocnitelem (6). Definici (7) lze psáti také v poněkud jiném tvaru:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m. \tag{7'}$$

Že (7') a (7) dávají touž hodnotu pro $a^{\frac{m}{n}}$, plyne z článku 1, věta VI.

Dříve než přistoupíme k důkazu, že pro právě definovanou mocninu s kladným mocněncem a s racionálním mocnitelem platí pravidla (1), (2), (3), (4), musíme *předně* uvážit, že racionální číslo r můžeme *rozmanitými způsoby* uvésti na tvar (6), a musíme dokázati, že naše definice mocniny a^r je nezávislá na tom, pro který tvar (6) se rozhodneme. K tomu cíli uvažme, že ze všech možných tvarů (6) je jeden *základní tvar*, ve kterém čísla m, n jsou nesoudělná, a že jestliže (6) je základní tvar, potom kterýkoliv jiný tvar je

$$r = \frac{km}{kn},$$

kde $k > 1$ je přirozené číslo. Musíme tedy dokázati, že

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}. \tag{8}$$

Proto položme $\sqrt[n]{a^m} = x$, takže $x > 0$. Podle definice odmocniny je

$$x^n = a^m. \tag{9}$$

Z (9) však plyne

$$(x^n)^k = (a^m)^k, \tag{10}$$

a ježto čísla n, m, k jsou celá, můžeme užít pravidla (2) a místo (10) napsati

$$x^{kn} = a^{km}. \tag{11}$$

Protože $x > 0$, $a^{km} > 0$, znamená (11), že $x = \sqrt[kn]{a^{km}}$; tedy skutečně platí (8).

Za druhé musíme uvážit, že mezi racionální čísla patří také všecka čísla celá a že mocniny s celým mocnitelem jsme definovali už dříve; musíme dokázat, že po celé r nová definice čísla a^r souhlasí se starou. To je velmi snadné, neboť to stačí provésti za předpokladu, že číslo r je psáno v základním tvaru. Je-li však r celé, potom v základním tvaru (6) je $n = 1$, $m = r$ a pro $n = 1$ je (7) zřejmě správné.

Zbývá dokázati, že pro kladné mocněnce a racionální mocnitele platí pravidla (1), (2), (3), (4).

Důkaz pravidla (1). Racionální čísla r, s můžeme napsat se společným jmenovatelem:

$$r = \frac{m_1}{n}, \quad s = \frac{m_2}{n}, \quad \text{tedy } r + s = \frac{m_1 + m_2}{n}.$$

Při tom ovšem n je přirozené číslo a m_1, m_2 jsou celá čísla. Položme $x = a^{\frac{1}{n}}$. Podle definice (7′) je

$$a^r = x^{m_1}, \quad a^s = x^{m_2}, \quad a^{r+s} = x^{m_1+m_2}.$$

Protože však čísla m_1, m_2 jsou celá, víme, že

$$x^{m_1} \cdot x^{m_2} = x^{m_1+m_2},$$

a to znamená, že platí (1).

Důkaz pravidla (2). Položme

$$r = \frac{m_1}{n_1}, \quad s = \frac{m_2}{n_2}, \quad \text{tedy } rs = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Při tom n_1, n_2 jsou přirozená čísla; m_1, m_2 jsou celá čísla. Podle definice (7) jest

$$a^r = \sqrt[n_1]{a^{m_1}}; \tag{12}$$

podle definice (7′) jest

$$(a^r)^s = (\sqrt[n_2]{a^r})^{m_2}. \tag{13}$$

podle článku 1, věta IV jest

$$\sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a^{m_1}}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1}},$$

takže podle (12) je

$$\sqrt[n_2]{a^r} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1}},$$

takže podle (13) je

$$(a^r)^s = (\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1}})^{m_2}; \tag{14}$$

podle článku 1, věta III je však

$$(\sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1}})^{m_2} = \sqrt[n_1 n_2]{(a^{m_1})^{m_2}}, \tag{15}$$

a ježto m_1 m_2 jsou čísla celá, víme, že

$$(a^{m_1})^{m_2} = a^{m_1 m_2}. \tag{16}$$

Ze (14), (15) a (16) plyne, že

$$(a^r)^s = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}},$$

a podle definice (7) je také

$$a^{rs} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}},$$

takže platí (2).

D ů k a z p r a v i d l a (3) Budiž opět

$$r = \frac{m}{n},$$

kde n je přirozené číslo, m je celé číslo. Podle definice (7) je

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}, \quad b^r = \sqrt[n]{b^m}, \quad (ab)^r = \sqrt[n]{(ab)^m}.$$

Protože m je číslo celé, víme, že

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m,$$

a podle článku 1, věta I je

$$\sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m},$$

takže

$$(ab)^r = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m};$$

tedy platí (3).

Důkaz pravidla (4). Ježto součet čísel r, $-r$ je roven nule, je podle již dokázaného pravidla (1)

$$a^r \cdot a^{-r} = a^0 \text{ neboli } a^r \cdot a^{-r} = 1$$

a z toho plyne (4).

Cvičení.

25. Vypočtěte: a) $49^{\frac{1}{2}}$; b) $16^{\frac{3}{4}}$; c) $8^{\frac{5}{3}}$; d) $27^{\frac{2}{3}}$; e) $25^{-\frac{1}{2}}$; f) $32^{-\frac{3}{5}}$; g) $81^{-\frac{3}{4}}$; h) $125^{-\frac{4}{3}}$.

26. Pomocí tabulek stanovte: a) $10^{\frac{3}{2}}$; b) $10^{\frac{2}{3}}$; c) $5^{\frac{4}{3}}$; d) $5^{\frac{3}{4}}$; e) $12^{\frac{1}{6}}$; f) $20^{\frac{5}{6}}$.

27. Jako mocniny s lomenými mocniteli vyjádřete: a) $\sqrt{a^3}$; b) $\sqrt[3]{b^4}$; c) $\sqrt[6]{u^2}$; d) $\sqrt[4]{z^6}$; e) $\sqrt[5]{x^{-5}}$; f) $\sqrt{r^{-2}}$.

28. Odmocninami vyjádřete: a) $a^{\frac{3}{5}}$; b) $b^{\frac{5}{3}}$; c) $z^{-\frac{2}{3}}$; d) $u^{-\frac{3}{2}}$; e) $x^{\frac{12}{5}}$; f) $x^{-\frac{5}{12}}$.

29. Vypočtěte následující výrazy a výsledky vyjádřete odmocninami: a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$; b) $8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{3}{4}}$; c) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{-\frac{1}{3}}$; d) $12^{\frac{1}{2}} \cdot 12^{-\frac{1}{3}}$; e) $5^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$; f) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$; g) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{5}}$; h) $d^{\frac{1}{4}} \cdot d^{-\frac{1}{2}}$; i) $m^{-\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{3}{2}}$; j) $k^{-\frac{1}{3}} \cdot k^{-3}$.

30. Vypočtěte a výsledek vyjádřete odmocninou: a) $(2^{\frac{1}{2}})^3$; b) $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$; c) $(7^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{2}}$; d) $(9^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}}$; e) $(10^{-\frac{1}{4}})^{-\frac{4}{3}}$; f) $(a^{\frac{3}{4}})^2$; g) $(u^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$; h) $(z^{-\frac{4}{5}})^{\frac{15}{8}}$; i) $(m^{\frac{3}{5}})^{-\frac{5}{3}}$; j) $(p^{-\frac{8}{3}})^{-\frac{9}{4}}$.

31. Vypočtěte: a) $(ab)^{\frac{2}{3}}$; b) $(x^2y)^{\frac{3}{2}}$; c) $(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}$; d) $(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$; e) $(m^{\frac{1}{3}}n^{-\frac{5}{6}})^{\frac{3}{2}}$; f) $(3p^{-\frac{1}{4}}q^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{4}}$.

32. Vypočtěte: a) $5^{\frac{5}{4}} : 5^{\frac{3}{4}}$; b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{2}}$; c) $8^{-\frac{1}{6}} : 8^{\frac{1}{3}}$; d) $6^{\frac{1}{3}} : 6^{-\frac{3}{2}}$; e) $12^{-\frac{1}{5}} : 12^{-\frac{7}{10}}$; f) $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$; g) $u^{\frac{3}{4}} : u^{\frac{1}{2}}$; h) $z^{-\frac{1}{2}} : z^{\frac{1}{3}}$; i) $p^{\frac{3}{10}} : p^{-\frac{1}{2}}$; j) $h^{-\frac{3}{5}} : h^{-\frac{4}{15}}$.

33. Vyjádřete jako mocniny s lomenými mocniteli a potom vypočtěte: a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}$; b) $\sqrt[3]{6^2} : \sqrt{6^3}$; c) $\sqrt{2\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$; e) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; f) $\dfrac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[6]{12}}{\sqrt{12}}$; g) $\sqrt{\dfrac{3^2}{2^3}} : \sqrt{\dfrac{2^3}{3^2}}$; h) $\sqrt{\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{5}{2}}}$; i) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{5} : \sqrt{\dfrac{5}{3}}}$; j) $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5}}{\sqrt[3]{5}}}$.

34. Vyjádřete jako mocniny s lomenými mocniteli a potom vypočtěte:

a) $\sqrt{u^3}\cdot\sqrt[3]{u^2}$; b) $\sqrt[4]{a^3b} : \sqrt[3]{ab^2}$; c) $\sqrt{r\sqrt[3]{r^2}}$; d) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}} : \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$;

e) $\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m}}}$; f) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{b}}}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{\sqrt{a}}}$; g) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b\sqrt{ab}}}$.

35. Dokažte, že $1^r = 1$ pro každé racionální r.

36. Dokažte, že $a^r : a^s = a^{r-s}$ pro $a > 0$ a pro libovolné racionální mocnitele r, s.

37. Dokažte, že $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$ pro $a > 0$, $b > 0$ a libovolné racionální r.

3. Exponenciální funkce.

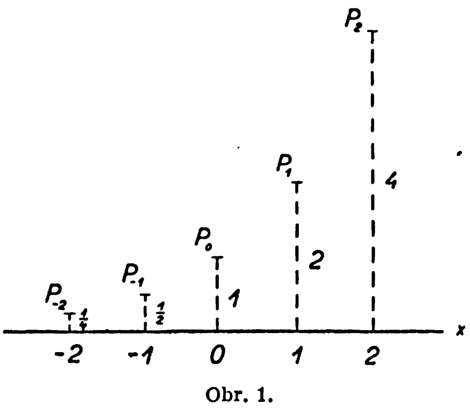
Zvolme kladné číslo a. Pro každé racionální číslo x jsme definovali hodnotu a^x; označme tuto hodnotu písmenem y, položme tedy

$$y = a^x. \tag{1}$$

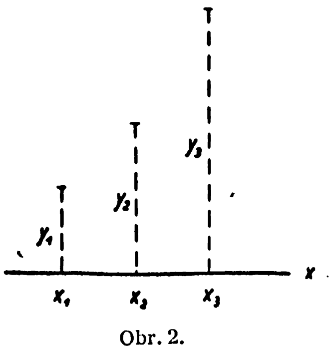
Ve vztahu (1) znamená písmeno a zcela určité dané číslo (kladné); říkáme, že a je **konstanta.** Naproti tomu písmena x, y znamenají **proměnné.**

Za hodnotu proměnné x můžeme zvolit libovolné racionální číslo; x je **nezávisle proměnná.** Jakmile zvolíme hodnotu proměnné x, je vztahem (1) určena také hodnota proměnné y; říkáme, že y je funkce proměnné x. Tato funkce a^x byla dosud definována pouze pro racionální hodnoty nezávisle proměnné x.

Již na střední škole jsme mluvili o **grafech** funkcí. Sestrojíme si graf funkce a^x, při čemž budeme volit $a = 2$. Zvolíme vodorovnou přímku,



Obr. 1.



Obr. 2.

zvanou osa x, jejíž body znázorňují číselné hodnoty nezávisle proměnné x; pro každé racionální číslo x naneseme od příslušného bodu osy x nahoru délku rovnou a^x a dostaneme příslušný bod grafu P_x. Protože a^x je vždy kladné, leží celý graf nad osou x. Nejprve dosadíme za x celá čísla 0, 1, 2, -1, -2 a dostaneme body grafu $P_0, P_1, P_2, P_{-1}, P_{-2}$ (obr. 1).

Abychom dostali body grafu odpovídající lomeným hodnotám proměnné x, proveďme tuto úvahu (obr. 2). Zvolíme tři racionální čísla x_1, x_2, x_3 tak, že $x_1 < x_2, x_2 < x_3$ a že oba rozdíly $x_2 - x_1, x_3 - x_2$ jsou rovny témuž číslu c. Potom na ose x obraz čísla x_2 leží uprostřed mezi obrazy čísel x_1, x_3. Položme

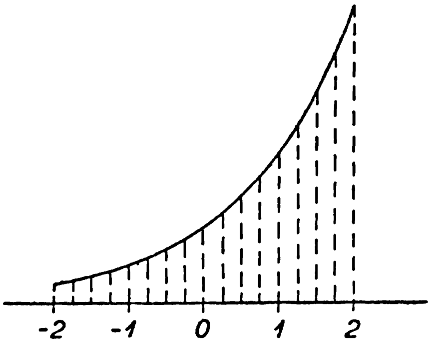
$$y_1 = a^{x_1}, \qquad y_2 = a^{x_2}, \qquad y_3 = a^{x_3}.$$

Protože $x_2 = x_1 + c$, $x_3 = x_2 + c$, jest

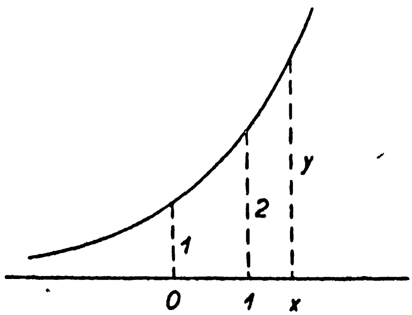
$$y_2 = a^{x_1+c} = a^{x_1} \cdot a^c = y_1 \cdot a^c,$$
$$y_3 = a^{x_2+c} = a^{x_2} \cdot a^c = y_2 \cdot a^c = y_1 a^{2c}$$

a tedy

$$y_2^2 = y_1 y_3, \quad y_2 = \sqrt{y_1 y_3}. \tag{2}$$



Obr. 3.



Obr. 4.

Kladné číslo y_2 spojené s kladnými čísly y_1, y_3 vztahem (2) nazývá se **střední geometrická úměrná** kladných čísel y_1, y_3 a její konstrukci jsme prováděli v první třídě.

Pomocí konstrukce střední geometrické úměrné můžeme graf funkce a^x doplnit dalšími body. Dosud (obr. 1) jsme měli na grafu pouze body odpovídající hodnotám $x = 0, 1, 2, -1, -2$; konstrukcí středních geometrických úměrných (obr. 3) doplníme nejprve body odpovídající hodnotám

$$x = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2};$$

potom stejnou konstrukcí doplníme body odpovídající hodnotám

$$x = \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}, \tfrac{7}{4}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{5}{4}, -\tfrac{7}{4}.$$

A tak bychom mohli pokračovat dále.

Spojíme-li sestrojené body čarou, dostaneme graf funkce a^x (obr. 4, stále pro $a = 2$). Je-li graf narýsován, můžeme hodnoty funkce a^x přibližně hledat pomocí narýsovaného grafu. Danému číslu x odpovídá určitý bod na ose x; v tomto bodě vztyčíme k ose x kolmici a naměříme-li na této kolmici vzdálenost od průsečíku s osou x až k průsečíku s grafem, dostaneme bez počítání číslo $y = a^x$. Tímto způsobem můžeme danému x určit číslo a^x jenom s nepříliš velkou přesností. Je však z našeho grafického způsobu patrné, že k tomu, abychom mohli číslo a^x vypočísti *přibližně*, nemusíme číslo x samo znáti přesně, nýbrž také jenom přibližně. To je velmi důležité theoreticky. Neboť dosud jsme definovali hodnotu a^x pouze pro *racionální* hodnotu čísla x. Je-li však x irracionální, je-li na př. x rovné Ludolfovu číslu $\pi = 3{,}141592653589\ldots$, můžeme přibližnou hodnotu čísla a^π (která nebyla dosud vůbec definována) počítati tak, že místo čísla π vezmeme racionální číslo velmi blízké číslu π. Dá se na př. vypočísti, že je přesně na tři desetinná místa

$$2^3 \doteq 8; \quad 2^{3,1} \doteq 8{,}574; \quad 2^{3,14} \doteq 8{,}816; \quad 2^{3,141} \doteq 8{,}821; \quad 2^{3,1415} \doteq 8{,}824,$$

kdežto všecka další čísla

$$2^{3,14159}; \quad 2^{3,141592}; \quad 2^{3,1415926}; \quad 2^{3,14159265} \text{ atd.},$$

zaokrouhlená na tři desetinná místa, rovnají se témuž číslu 8,825. Je tedy

$$2^\pi \doteq 8{,}825$$

přesně na tři desetinná místa.

Nebudeme se zabývat přesnou definicí hodnoty a^x pro irracionální x a spokojíme se s výslovným uvedením fakta, že je možné přesně definovat hodnotu a^x také pro irracionální x a že pravidla

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$
$$(a^x)^y = a^{xy},$$
$$a^x \cdot b^x = (ab)^x,$$
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$
$$1^x = 1,$$

odvozená v předcházejícím článku pro racionální mocnitele, jsou správná i když x, y jsou libovolná reálná čísla, ať racionální nebo iracionální. Písmena a, b znamenají stále *kladná čísla.*

Jestliže je $a > 1$ (jako v našich obrázcích, ve kterých $a = 2$), potom a^x je **rostoucí funkce** nezávislé proměnné x. To znamená, že zvětšíme-li x, zvětší se také a^x neboli

$$\text{je-li } x_1 < x_2, \text{ je } a^{x_1} < a^{x_2}. \tag{3}$$

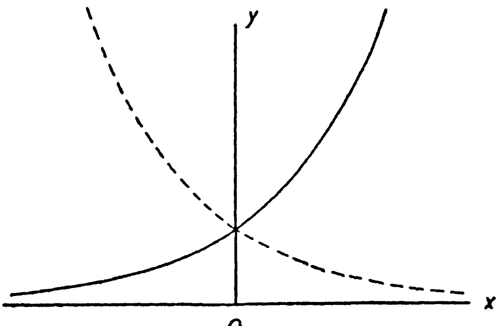
Dokážeme aritmeticky, že (3) platí pro *racionální* x_1, x_2 (za předpokladu, že $a > 1$). Nejprve je patrné, že pro přirozené číslo n je $\sqrt[n]{a} > 1$. Neboť je-li $b = \sqrt[n]{a}$, je $b > 0$ a platí rovnice $b^n = a$. Tedy číslo a je součin n činitelů vesměs rovných kladnému číslu b; tento součin a je větší než 1 a to je jen tak možno, že také činitelé $b = \sqrt[n]{a}$ jsou větší než 1. Je-li nyní x kladné racionální číslo, můžeme položit $x = \frac{m}{n}$ (m, n jsou přirozená čísla); potom je

$$a^x = \sqrt[n]{a^m}.$$

Je-li $a > 1$, je také $a^m > 1$ a tudíž i n-tá odmocnina čísla a^m je větší než 1, to je $a^x > 1$. Buďtež posléze x_1, x_2 dvě racionální čísla taková, že $x_1 < x_2$. Je-li $x = x_2 - x_1$, je x kladné racionální číslo, a proto je $a^x > 1$. Avšak $x_2 = x_1 + x$, tedy $a^{x_2} = a^{x_1} \cdot a^x$.

Tedy kladné číslo a^{x_2} vznikne z kladného čísla a^{x_1} tím, že je znásobíme činitelem $a^x > 1$, což má za následek zvětšení; tedy $a^{x_2} > a^{x_1}$, a to jsme měli dokázati.

Je-li však a kladné číslo menší než 1, je a^x klesající funkce, t. j.



Obr. 5.

$$\text{je-li } x_1 < x_2, \text{ je } a^{x_1} > a^{x_2}. \tag{4}$$

Abychom si to názorně uvědomili, označme b převrácenou hodnotu čísla a, takže číslo b je větší než 1 a jest $ab = 1$, tedy $(ab)^x = 1$ neboli $a^x \cdot b^x = 1$. To znamená, že číslo b^x je převrácená hodnota čísla a^x; víme však, že $a^{-x} \cdot a^x = 1$, že tedy také a^{-x} je převrácená hodnota čísla a^x.

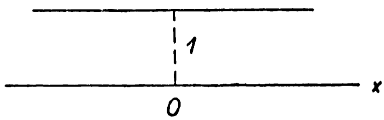
Je tedy

$$b^x = a^{-x}. \tag{5}$$

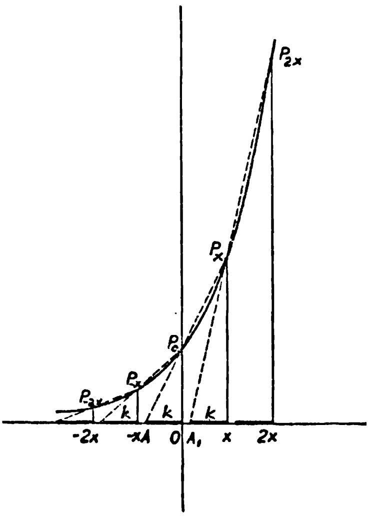
Z (5) je patrné, že grafy funkcí a^x, b^x jsou obrazy souměrně sdružené podle osy y; viz obr. 5, ve kterém je plně vytažen graf funkce b^x, a čárkovaně je vytažen graf funkce a^x. Ježto funkce b^x roste, je z grafu ihned patrné, že funkce a^x klesá, t. j. že platí (4). Z porovnání grafů obou funkcí je zřejmé, že platí (4).

Dosud jsme mluvili o grafu funkce a^x za předpokladu, že a je kladné číslo, které je buďto větší než 1 nebo menší než 1; je-li $a = 1$, je $1^x = 1$ pro každé x, proto (obr. 6) graf funkce 1^x je rovnoběžka s osou x, která leží nad osou x ve vzdálenosti rovné 1 od osy x.

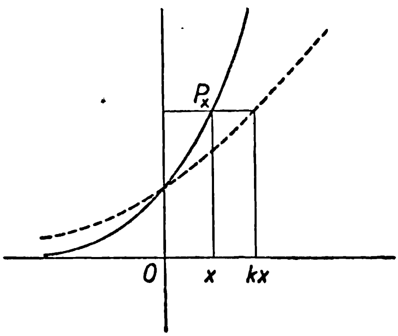
Studovaná funkce a^x se jmenuje exponenciální funkce, protože nezávisle proměnná x je exponentem neboli mocnitelem výrazu a^x.



Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.

Cvičení:

38. Je-li dán bod P_x grafu funkce $y = a^x$, odpovídající hodnotě x nezávisle proměnné, sestrojíme bod P_{2x}, odpovídající hodnotě $2x$, takto: Přímka P_xP_0 (při čemž $\overline{OP_0} = 1$, viz obr. 7) vytne na ose x úsek $k = \overline{OA}$. Tento úsek přeneseme na osu x od bodu odpovídajícího hodnotě x do bodu A_1 (zachovávajíce smysl); pak přímka A_1P_x protne rovnoběžku s osou

y vedenou ve vzdálenosti $2x$ od počátku v bodě P_{2x}. Dokažte! Jak sestrojíte body P_{3x}, P_{-x}, P_{-2x} atd.?

39. Máme-li sestrojeny body P_1, P_2 zobrazující hodnoty funkce $y = a^x$ pro $x = x_1$ a $x = x_1 + c$, dostaneme bod P_3 zobrazující hodnotu naší funkce pro $x = x_1 + 2c$ takto: Přímka P_1P_2 protne osu x v bodě A_1, úsek $\overline{x_1 A_1}$ přeneseme od obrazu čísla $x_1 + c$ (zachovávajíce smysl) do A_2; potom přímka A_1P_2 protne rovnoběžku s osou y, vedenou obrazem čísla $x_1 + 2c$ v bodě P_3. Dokažte!

40. Je-li narýsován graf funkce $y = a^x$ a jestliže každé x tohoto grafu zvětšíme k-krát (ponechávajíce příslušné y beze změny, viz obr. 8), dostaneme tak graf funkce $y = b^x$, kde $b = a^{\frac{1}{k}}$. Dokažte! Co vznikne pro $k = -1$?

41. Vypočtěte: a) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; b) $(3^{\sqrt[3]{3}})^{\sqrt[3]{9}}$; c) $(\sqrt{3}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; d) $(a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;
e) $(x^{2+\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}}$; f) $x^{2+\sqrt{2}} \cdot x^{2-\sqrt{2}}$; g) $x^{\sqrt{2}+1} : x^{\sqrt{2}-1}$;
h) $\dfrac{x^{\sqrt{2}-1} \cdot x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{x^{\sqrt{3}-1}}$; i) $\dfrac{(ab)^{\sqrt{2}}\,(bc)^{\sqrt{8}}}{(ac)^{\sqrt{32}}}$; j) $\left(\dfrac{y}{z}\right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \left(\dfrac{z}{y}\right)^{\sqrt{3}-1}$.

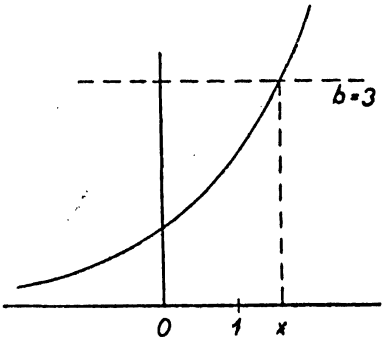
42. Srovnejte podle velikosti čísla 3^3, 3^4, $3^{3,1}$, $3^{3,2}$, $3^{3,14}$, $3^{3,15}$; $3^{3,141}$; $3^{3,142}$, $3^{3,1415}$, $3^{3,1416}$. Kam mezi ně zařadíte 3^π?

43. Vyložte význam symbolu $10^{\sqrt{2}}$.

4. Pojem a vlastnosti logaritmu.

Zvolíme číslo a *větší než 1*. Je-li dáno číslo b, můžeme hledati x z rovnice

$$a^x = b. \tag{1}$$



Obr. 9.

Je-li číslo b záporné nebo rovné nule, nemá rovnice (1) řešení. Je-li však b kladné číslo, má rovnice (1) právě jedno řešení; přibližná hodnota řešení se dá určit měřením, je-li narýsován graf funkce a^x; viz obr. 9 pro $a = 2$, $b = 3$. Kořen rovnice $2^x = 3$ je přibližně $x \doteq 1,58$.

Kořen x rovnice (1) se jmenuje logaritmus čísla b při základě a; píšeme

$$x = \log_a b.$$

Tedy **logaritmus čísla b je mocnitel, na který musíme umocnit základ a, abychom dostali mocninu rovnou b.** Protože $a^0 = 1$, $a^1 = a$, je **logaritmus jedné roven nule** (při každém základu). **Logaritmus základu je roven jedné.** *Logaritmus mají pouze kladná čísla.*

Protože o základu a předpokládáme, že je větší než 1, je a^x rostoucí funkce, tedy **větší hodnota logaritmu odpovídá větší hodnotě čísla,** t. j. je-li $b_1 > b_2$, $b_2 > 0$, a je-li základ $a > 1$, je $\log_a b_1 > \log_a b_2$.

Protože $\log_a 1 = 0$, plyne z toho:

Čísla větší než 1 mají kladné logaritmy, kladná čísla menší než 1 mají záporné logaritmy.

Ze známých vlastností exponencionální funkce plynou následující vlastnosti logaritmu.

I. Logaritmus součinu dvou nebo více kladných čísel je roven součtu logaritmů činitelů, t. j.

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy), \tag{2}$$

obecněji

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n = \log_a (x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Neboť je-li na př.

$$\log_a x = r, \quad \log_a y = s,$$

je

$$a^r = x, \; a^s = y,$$

a protože $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, je $a^{r+s} = xy$ neboli

$$\log_a(xy) = r + s, \text{ t. j. platí (2).}$$

II. Logaritmus podílu dvou kladných čísel dostaneme, jestliže od logaritmu dělence odečteme logaritmus dělitele, t. j.

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}. \tag{3}$$

Neboť

$$\text{je-li } \frac{x}{y} = z, \text{ je } x = yz,$$

tedy $\log_a x = \log_a y + \log_a z$ a z toho plyne (3).

III. Logaritmus libovolné mocniny dostaneme, jestliže logaritmus mocněnce znásobíme mocnitelem, t. j.

$$k \log_a x = \log_a(x^k). \tag{4}$$

Neboť budiž $\log_a x = r$, tedy $a^r = x$. Pak je

$$a^{rk} = (a^r)^k \text{ neboli } a^{rk} = x^k,$$

takže $\log_a (x^k) = kr$, t. j. platí (4).

Číslo k ve větě III nemusí býti celé. Je-li k převrácená hodnota přirozeného čísla n, je

$$x^k = x^{\frac{1}{n}} \text{ neboli } x^k = \sqrt[n]{x}.$$

Zvláštním případem věty III je tudíž věta:

IV. Logaritmus n-té odmocniny kladného čísla dostaneme, jestliže logaritmus odmocněnce dělíme odmocnitelem, t. j.

$$(\log_a x) : n = \log_a \sqrt[n]{x}.$$

Z věty III plyne souvislost logaritmů téhož čísla $x > 0$ při dvou různých základech $a > 1$, $b > 1$, vyjádřená vzorcem

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \tag{5}$$

Důkaz: Je-li

$$\log_b x = r, \text{ je } b^r = x. \tag{6}$$

Ježto oba výrazy v (6) si jsou rovny, jsou si rovny také jejich logaritmy při základu a, t. j.

$$r \log_a b = \log_a x \text{ neboli } r = \frac{\log_a x}{\log_a b},$$

což jest (5).

Cvičení.

44. Určete a) $\log_2 4$; b) $\log_2 8$; c) $\log_2 16$; d) $\log_2 \frac{1}{2}$; e) $\log_2 \frac{1}{4}$; f) $\log_2 \frac{1}{8}$; g) $\log_2 \sqrt{2}$; h) $\log_2 \sqrt[3]{2}$; i) $\log_2 \sqrt[3]{4}$; j) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$.

45. Určete: a) $\log_3 1$; b) $\log_3 3$; c) $\log_3 9$; d) $\log_3 27$; e) $\log_3 \frac{1}{3}$; f) $\log_3 \frac{1}{9}$; g) $\log_3 \sqrt{3}$; h) $\log_3 \sqrt[3]{9}$; i) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; j) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{81}}$.

46. Určete: a) $\log_5 1$; b) $\log_5 5$; c) $\log_5 125$; d) $\log_5 \frac{1}{25}$; e) $\log_5 \frac{1}{625}$; f) $\log_5 \sqrt[3]{5}$; g) $\log_5 \sqrt{125}$; h) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$; i) $\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$; j) $\log_5 \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$.

47. Stanovte x tak, aby a) $\log_2 x = 0$; b) $\log_2 x = 1$; c) $\log_2 x = 2$; d) $\log_2 x = 5$; e) $\log_2 x = -1$; f) $\log_2 x = -4$; g) $\log_2 x = \frac{1}{5}$; h) $\log_2 x = \frac{4}{3}$; i) $\log_2 x = -\frac{1}{3}$; j) $\log_2 x = -\frac{3}{5}$.

48. Stanovte x tak, aby a) $\log_3 x = 0$; b) $\log_3 x = 1$; c) $\log_3 x = 2$; d) $\log_3 x = 4$; e) $\log_3 x = -1$; f) $\log_3 x = -3$; g) $\log_3 x = \frac{1}{3}$; h) $\log_3 x = \frac{5}{4}$; i) $\log_3 x = -\frac{1}{3}$; j) $\log_3 x = -\frac{3}{2}$.

49. Stanovte x tak, aby a) $\log_5 x = 0$; b) $\log_5 x = 1$; c) $\log_5 x = 3$; d) $\log_5 x = -1$; e) $\log_5 x = -2$; f) $\log_5 x = -3$; g) $\log_5 x = \frac{1}{3}$; h) $\log_5 x = \frac{3}{2}$; i) $\log_5 x = -\frac{3}{4}$; j) $\log_5 x = -\frac{2}{5}$.

50. Stanovte z tak, aby a) $\log_z 4 = 2$; b) $\log_z 8 = 3$; c) $\log_z 7 = 1$; d) $\log_z \frac{1}{9} = -2$; e) $\log_z 0{,}001 = -3$; f) $\log_z 5 = \frac{1}{2}$; g) $\log_z 3 = \frac{1}{3}$; h) $\log_z 1 = 0$; i) $\log_z 10 = 2$; j) $\log_z 2 = 10$.

51. Vypočtěte: a) $\log_z z$; b) $\log_z z^2$; c) $\log_z z^3$; d) $\log_z \dfrac{1}{z}$; e) $\log_z \dfrac{1}{z^3}$; f) $\log_z \sqrt{z}$; g) $\log_z \sqrt[3]{z}$; h) $\log_z \sqrt[4]{z^3}$; i) $\log_z \dfrac{1}{\sqrt{z}}$; j $\quad$ og$_z \dfrac{1}{\sqrt[3]{z^2}}$.

52. Vyjádřete pomocí $\log_z a$: a) $\log_z az$; b) $\log_z az^2$; c) $\log_z az^3$; d) $\log_z \dfrac{a}{z}$; e) $\log_z \dfrac{a}{z^2}$.

53. Pomocí $\log_z a$, $\log_z b$ vyjádřete: a) $\log_z a^2 b$; b) $\log_z (ab)^3$; c) $\log_z a\sqrt{b}$; d) $\log_z \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^5}$; e) $\log_z \dfrac{\sqrt[3]{a}}{b^2}$; f) $\log_z \dfrac{az}{b}$; g) $\log_z \dfrac{z}{ab^2}$; h) $\log_z \dfrac{z^2}{a\sqrt{b}}$; i) $\log_z \sqrt{abz}$; j) $\log_z a \sqrt[3]{\dfrac{b^2}{z}}$.

54. Nalezněte x, je-li a) $\log_z x = \log_z a + \log_z b - \log_z c$; b) $\log_z x = 2 \log_z a + 3 \log_z b$; c) $\log_z x = \log_z a - \frac{1}{2} \log_z b$; d) $\log_z x = \frac{1}{3} (\log_z a + \frac{1}{2} \log_z b)$; e) $\log_z x = 1$; f) $\log_z x = 2 + \log_z a$; g) $\log_z x = \frac{1}{2} - \log_z a$; h) $\log_z x = \log_z (a+1) + \log_z (a-1)$; i) $\log_z x = \log_z (a+2) + \log_z (a-1)$; j) $\log_z x = \log_z a + \log_z \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)$.

55. Dokažte, že $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

56. Dokažte, že a) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$; b) $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$.

57. Dokažte, že $\log_{ab} x = \dfrac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$.

58. Při kterém základě z je $\log_z a$ o n větší než $\log_z b$? (Příklad: $a = 500$, $b = 256$, $n = 3$.)

5. Tabulka logaritmů.

V praxi se užívá výhradně logaritmů dekadických, t. j. logaritmů se základem 10. Píšeme stručně

$$\log x \quad \text{místo} \quad \log_{10} x.$$

Tedy rovnice $\log x = r$ znamená totéž jako rovnice $10^r = x$. Zejména jest

$$\log 1 = 0;\ \log 10 = 1;\ \log 100 = 2;\ \log 1000 = 3 \text{ atd.};$$
$$\log 0{,}1 = -1;\ \log 0{,}01 = -2;\ \log 0{,}001 = -3 \text{ atd.}$$

Ze článku 4 víme, že zvětší-li se číslo, zvětší se jeho logaritmus. Tedy

čísla mezi	1 a 10	mají logaritmy mezi	0 a 1,
„ „	10 a 100	„ „ „	1 a 2,
„ „	100 a 1000	„ „ „	2 a 3 atd.,
„ „	0,1 a 1	„ „ „	-1 a 0,
„ „	0,01 a 0,1	„ „ „	-2 a -1,
„ „	0,001 a 0,01	„ „ „	-3 a -2 atd.

Všimněme si zejména čísel mezi 1 a 10, tedy čísel, jejichž nejvyšší číslice má řád nula. Jejich logaritmy leží mezi 0 a 1, jsou to tedy kladná čísla, která mají před desetinnou čárkou pouze 0. Jestliže číslo mezi 1 a 10 má tři cifry, jako na př. číslo $N = 3{,}14$, je v tabulce udán jeho logaritmus zaokrouhlený na čtyři desetinná místa. Tento logaritmus má, jak víme, před desetinnou čárkou pouze nulu, a tato nula není v tabulce uvedena. V tabulce čteme pouze číslice za desetinnou čárkou, které tvoří t. zv. **mantisu** logaritmu. Každý řádek tabulky obsahuje deset mantis; jsou to mantisy logaritmů čísel s týmiž prvými dvěma číslicemi. Na př. mantisu logaritmu čísla $N = 3{,}14$ najdeme v řádku 31 a v sloupci 4; mantisa je 4969, tedy

$$\log 3{,}14 \doteq 0{,}4969$$

na čtyři desetinná místa. U čísla $N = 4$ hledáme v řádku 40 a sloupci 0; jest $\log 4 \doteq 0{,}6021$. Podobně třeba $\log 7{,}7 \doteq 0{,}886\bar{5}$; víme, že pruh nad pětkou znamená, že zaokrouhlení je vzestupné, že tedy $\log 7{,}7 \doteq 0{,}886$ na tři desetinná místa.

Jestliže číslo N mezi 1 a 10 má více než 3 cifry jako na př. číslo $N = 5{,}728$, nenajdeme $\log N$ přímo v tabulce a užíváme interpolace podobně jako na př. u tabulek goniometrických funkcí. Číslo N je mezi čísly 5,72 a 5,73, jejichž logaritmy podle tabulky jsou

$$\log 5{,}72 \doteq 0{,}7574;\ \log 5{,}73 \doteq 0{,}7582;$$

přitom je číslo N blíže číslu 5,73 než číslu 5,72, a proto očekáváme, že také $\log N$ bude blíže číslu log 5,73 než číslu log 5,72. Protože N je menší než 5,73, je také $\log N$ menší než log 5,73. Kdybychom od čísla 5,73 přešli k číslu 5,72 zmenšením o 0,01, zmenšil by se logaritmus o $0{,}0008 = 8 \cdot 10^{-4}$; jestliže od čísla 5,73 přejdeme k číslu 5,728, bude zmenšení čísla 2 desetiny z 0,01 a interpolaci provádíme tak, že log 5,73 zmenšíme o 2 desetiny z $8 \cdot 10^{-4}$, t. j. o $1{,}6 \cdot 10^{-4} \doteq 2 \cdot 10^{-4}$. Proto položíme $\log 5{,}728 \doteq 0{,}7580$, což je skutečně správné na 4 desetinná místa. Podobně hledáme na př. log 2,023. Při přechodu od čísla 2,02 k číslu 2,023 činí zvětšení 3 desetiny z 0,01, proto $\log 2{,}02 \doteq 0{,}3054$ zvětšíme o 3 desetiny tabulkového rozdílu $(3075 - 3054) \cdot 10^{-4} = 21 \cdot 10^{-4}$; zvětšení činí $6{,}3 \cdot 10^{-4} \doteq 6 \cdot 10^{-4}$, tedy $\log 2{,}023 \doteq 0{,}3060$, což je zase správné na 4 desetinná místa. Při velkých tabulkových diferencích popsaná interpolace někdy může udat čtvrté desetinné místo logaritmu poněkud nesprávně; proto jsou zejména logaritmy čísel 1,001; 1,002; . . .; 1,109 udány přímo v tabulce.

Dosud jsme mluvili pouze o logaritmech těch čísel N, která jsou mezi 1 a 10; ale jakmile umíme určit dekadické logaritmy takových čísel N, určíme už velmi lehko dekadický logaritmus kteréhokoli kladného čísla. Neboť každé kladné číslo x se dá psáti ve tvaru

$$x = 10^k \cdot N, \tag{1}$$

kde k je celé číslo (kladné, záporné nebo rovné nule) a N je číslo mezi 1 a 10, jehož logaritmus je mezi 0 a 1. Na př.

$$314 \doteq 10^2 \cdot 3{,}14;\ 0{,}000314 = 10^{-4} \cdot 3{,}14 \text{ atd.}$$

Zřejmě k **je řád nejvyšší číslice v čísle** x. Protože běží o logaritmy se základem 10, je $\log 10 = 1$, tedy $\log 10^k = k$ a podle (1) je

$$\log x = k + \log N; \tag{2}$$

na př.

$$\log 314 \doteq 2{,}4969,\ \log 0{,}000314 \doteq 0{,}4969 - 4 \text{ atd.}$$

Celé číslo k se nazývá **charakteristika logaritmu** kladného čísla x.

Jestliže číslo x je větší než 1, je jeho logaritmus kladný a má tvar

$$\log x \doteq k{,}****, \tag{3}$$

kde před desetinnou čárkou stojí charakteristika k, rovná řádu nejvyšší číslice čísla x; hodnota charakteristiky je nezávislá na číslicích v čísle x a závisí pouze na umístění desetinné čárky. Naproti tomu mantisa, naznačená hvězdičkami ve (3), závisí pouze na sledu číslic v čísle x a nemění se při posunutí desetinné čárky.

Jestliže číslo x je menší než 1, je jeho logaritmus záporný a píšeme jej ve tvaru
$$\log x \doteq 0{,}_{****} - h, \tag{4}$$
kde $h = |k|$ je přirozené číslo a hvězdičky opět značí mantisu. Tedy na př.
$$\log 0{,}000314 \doteq 0{,}4969 - 4; \ \log 0{,}314 \doteq 0{,}4969 - 1 \text{ atd.}$$
(4) není obvyklý tvar psaní záporného čísla; v obvyklém tvaru měli bychom na př.
$$\log 0{,}000314 \doteq -3{,}5031; \ \log 0{,}314 \doteq -0{,}5031 \text{ atd.}$$
Ale tvar (4), ve kterém můžeme logaritmus kladného čísla $x<1$ přímo napsat, jakmile známe charakteristiku a mantisu, je pro logaritmus velmi účelný a budeme zásadně psát záporné logaritmy jen v tomto tvaru. Jestliže číslo x má více než tři cifry, užíváme zase interpolace, na př.
$$\log 202300 \doteq 5{,}3060; \ \log 0{,}5728 \doteq 0{,}7580 - 1 \text{ atd.}$$

Dosud jsme mluvili pouze o určení logaritmu daného kladného čísla podle tabulky. Ale jako jiných tabulek můžeme užít také tabulky logaritmů i k obrácenému úkolu: *určit číslo, je-li znám jeho logaritmus.*

Příklad 1. $\log x \doteq 3{,}9425$. V tabulce najdeme, že mantisa 9425 odpovídá číslicím 876; řád nejvyšší číslice je roven charakteristice, tedy v našem případě třem a proto číslice 8 znamená tisíce. Tedy $x \doteq 8760$.

Příklad 2. $\log x \doteq 0{,}8854 - 2$ neboli $\log x \doteq -1{,}1146$. Ale druhý tvar je pro nás nevhodný, a kdyby číslo $\log x$ bylo dáno původně ve tvaru $-1{,}1146$, převedli bychom je napřed na prvý tvar $0{,}8854 - 2$. Mantisa 8854 dá číslice 768 a nejvyšší číslice 7 má řád -2, znamená tedy setiny; tudíž $x \doteq 0{,}0768$.

V obou dosavadních příkladech jsme našli mantisu v tabulce; ve většině případů však daná mantisa v tabulce nebude. Nahradíme ji potom nejbližší tabulkovou mantisou a dostaneme hodnotu x zaokrouhlenou na tři platné číslice, která pro praxi v mnoha případech postačí. Ale pomocí interpolace můžeme určit také čtvrtou platnou číslici, ačkoliv zejména v případech malého tabulkového rozdílu mantis může ve čtvrté číslici čísla x být neurčitost o jedničku.

Příklad 3. $\log x \doteq 0{,}4702$. Mantisa 4702 v tabulce není; nejbližší tabulková mantisa 4698 je poněkud menší a dá číslice 295, z nichž nejvyšší má řád 0 (rovný charakteristice) a tedy znamená jednotky. Je tudíž na tři platné číslice $x \doteq 2{,}95^+$, při čemž malé znamení plus naznačuje, že zaokrouhlení 2,95 je sestupné. Při určení čtvrté platné číslice si v tabulce všimněme vedle zmíněné již mantisy ještě druhé tabulkové mantisy 4713, která je naopak větší než daná mantisa 4702. Rozdíl obou tabulkových mantis je $4713 - 4698 = 15$. Na čtvrtou číslici rovnou n připadá n desetin tohoto rozdílu mantis, tedy n-krát $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ jako rozdíl logaritmů.

Daná mantisa jest 4702; protože $4702 - 4698 = 4$, určí se n tím, že $n \cdot 1{,}5$ má být co nejblíže číslu 4; to dá $n \doteq 3$, neboť $3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$, a proto $x \doteq 2{,}953$ na čtyři platné číslice.

Příklad 4. $\log x \doteq 0{,}4575 - 1$. Nejbližší tabulková mantisa je 4579; daná mantisa je poněkud menší. Z mantisy 4579 čteme z tabulky číslice 287; nejvyšší číslice má řád -1. Tedy na tři platné číslice je $x \doteq 0{,}287^-$; malé minus naznačuje, že skutečná hodnota x je poněkud menší. Tabulkový rozdíl mantis $4579 - 4564 = 15$ porovnáváme s daným rozdílem mantis $4579 - 4575 = 4$. Podmínka $n \cdot 1{,}5 \doteq 4$ dá přibližně $n = 3$. Tedy na čtyři platné číslice je $x \doteq 0{,}287 - 0{,}0003$ t. j. $x \doteq 0{,}2867$.

Příklad 5. $\log x \doteq 0{,}900 - 3$. Tabulková mantisa 8998 dá číslice 794; nejvyšší řád je -3 a proto $x \doteq 0{,}00794$. Tabulkový rozdíl $9004 - 8998 \doteq 6$ porovnáme s daným rozdílem $9000 - 8998 = 2$ dá $n \cdot 0{,}6 \doteq 2$, tedy $n \doteq 3$, takže $x \doteq 0{,}007943$. Ale není vyloučeno, že zaokrouhlení čísla x na čtyři platné číslice ve skutečnosti je $x \doteq 0{,}007944$. O tom by se dalo rozhodnouti teprve, kdybychom hodnotu $\log x$ znali přesněji a i potom by bylo k tomu třeba přesnějších tabulek.

K urychlení interpolace slouží v tabulce poslední sloupec nadepsaný P. P. (latinsky partes proportionales = úměrné díly). Tím se nebudeme zabývati.

Cvičení.

59. Nalezněte dekadické logaritmy čísel: a) 2,63; b) 8,37; c) 1,52; d) 4,02; e) 1,032; f) 7,7; g) 4,2; h) 3,8; i) 5; j) 9.

60. Nalezněte dekadické logaritmy čísel: a) 3,452; b) 7,546; c) 8,888; d) 5,503; e) 4,308; f) 2,034; g) 6,057; h) 4,003; i) 9,007; j) 1,0434.

61. Nalezněte dekadické logaritmy čísel: a) 23,6; b) 457; c) 8700; d) 0,172; e) 0,003; f) 48,42; g) 530,7; h) 8765; i) 0,6089; j) 0,007006.

62. K daným dekadickým logaritmům nalezněte čísla: a) 0,5119; b) 0,7505; c) 0,9196; d) 0,9566; e) 0,0282; f) 0,4472; g) 0,1761; h) 0,8808; i) 0,7782; j) 0,9542.

63. K daným dekadickým logaritmům nalezněte čísla: a) 0,1113; b) 0,5228; c) 0,6596; d) 0,0419; e) 0,4846; f) 0,7040; g) 0,5568; h) 0,9195; i) 0,6993; j) 0,3027.

64. K daným dekadickým logaritmům nalezněte čísla: a) 1,8222; b) 2,5752; c) 4,4440; d) 0,2718 — 1; e) 0,0233 — 2; f) 1,7777; g) 2,5000; h) 3,0180; i) 0,4177 — 1; j) 0,3456 — 3.

65. Nalezněte číslo, jehož dekadický logaritmus je: a) —0,3782; b) —1,1409; c) — 2,2222; d) — 3,3; e) — $\frac{1}{4}$; f) — $\frac{2}{3}$.

66. Vypočtěte (na dvě desetinná místa) dekadické logaritmy přirozených čísel od 1 do 10 z přibližných vztahů: $2^{10} \doteq 1000$; $3^4 \doteq 10 \cdot 2^3$; $5 = 10 : 2$; $7^2 \doteq 50$.

67. Platí přibližné rovnosti: $2 \,.\, 3^{35} \doteq 10^{17}$, $2^{16} \doteq 10 \cdot 3^8$. Vypočtěte odtud (na čtyři desetinná místa) dekadické logaritmy čísel 2 a 3.

68. Zvětší-li se číslo x k-krát, zvětší se jeho dekadický logaritmus o $\log k$. Dokažte.

69. Zvětší-li se číslo x o h, zvětší se jeho dekadický logaritmus o $\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$. Dokažte.

70. Zvětší-li se dekadický logaritmus čísla x o m, zvětší se toto číslo o $x\,(10^m — 1)$. Dokažte.

6. Užití tabulky logaritmů.

Pomocí naší tabulky se dají rychle a pohodlně řešit rozmanité početní úkoly, při čemž přesnost řešení je závislá na přesnosti tabulky. Čtyrmístná tabulka dovoluje zpravidla určit čtyři platné číslice výsledku, při čemž čtvrtá číslice zpravidla není zcela spolehlivá. Tato přesnost však zcela postačuje při běžných fysikálních úlohách, neboť přesnost výsledků závisí především na přesnosti přímo měřených hodnot a už měření na tři platné číslice je prakticky obtížné.

Logaritmy dovolují předně převésti násobení na sčítání.

P ř í k l a d 1. Vypočísti $x = 0{,}2364 \cdot 0{,}3481$. Podle tabulky je

$$\begin{array}{ll} \log 0{,}2364 & \doteq 0{,}3736 - 1 \\ \log 0{,}3481 & \doteq 0{,}5417 - 1 \\ \hline \log x & \doteq 0{,}9153 - 2 \text{ tedy } x \doteq 0{,}08229 \text{ nebo } x \doteq 0{,}08228. \end{array}$$

Přesvědčte se, že přesná hodnota je $x = 0{,}08229084$.

Logaritmy dále dovolují převésti dělení na odčítání.

Příklad 2. Vypočísti $x = 3{,}489 : 1564$. Podle tabulky je

$$\begin{array}{ll} \log 3{,}489 & \doteq 0{,}5427 \\ \log 1564 & \doteq 3{,}1942 \\ \hline \log x & \doteq 0{,}3485 - 3. \end{array}$$ Tedy $x \doteq 0{,}002231$.

Přesvědčte se dělením.

Umocňování se převede na násobení.

Příklad 3. Vypočísti přibližnou hodnotu mocniny 3^{17}. Jest $\log 3 \doteq 0{,}4771$, tedy $\log 3^{17} \doteq 8{,}1107$, takže $3^{17} \doteq 1{,}29 \cdot 10^8$. Udali jsme hodnotu čísla 3^{17} na tři platné číslice. Budeme zkoumati spolehlivost výsledku. Údaj $\log 3 \doteq 0{,}4771$ znamená, že

$$\log 3 > 0{,}47705; \ \log 3 < 0{,}47715;$$

protože $\log 3^{17} = 17 \cdot \log 3$, jest

$$\log 3^{17} > 8{,}10985; \ \log 3^{17} < 8{,}11155.$$

A tedy podle tabulky $3^{17} > 1{,}288 \cdot 10^8$; $3^{17} < 1{,}293 \cdot 10^8$. Je tedy náš údaj $3^{17} \doteq 1{,}29 \cdot 10^8$ v podstatě spolehlivý.

Odmocňování se převede na dělení.

Příklad 4. $x = \sqrt[7]{100}$. Jest $\log 100 = 2$, tedy $\log x \doteq 0{,}2857$, takže $x \doteq 1{,}930$ nebo $x \doteq 1{,}931$.

Příklad 5. $x = \sqrt[3]{0{,}000243}$. Jest $\log 0{,}000243 \doteq 0{,}3856 - 4$; toto číslo máme děliti třemi. Převedeme je nejprve na tvar $2{,}3856 - 6$ a potom dělíme. Dostaneme $\log x \doteq 0{,}7952 - 2$, z čehož $x \doteq 0{,}06240$.

Naznačili jsme si na příkladech, jak se pomocí logaritmů provádí násobení, dělení, umocňování a odmocňování. Provedeme ještě složitější příklad s těmito výkony.

Příklad 6. $x = \sqrt{\dfrac{11{,}2 \cdot 23{,}4 \cdot 37{,}6}{256{,}4 \cdot 97{,}6}}$

$$\begin{array}{ll} \log 11{,}2 & \doteq 1{,}0492 \\ \log 23{,}4 & \doteq 1{,}3692 \\ \log 37{,}6 & \doteq 1{,}5752 \\ \hline \log \text{čitatele} & \doteq 3{,}9936 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \log 256{,}4 & \doteq 2{,}4089 \\ \log 97{,}6 & \doteq 1{,}9894 \\ \hline \log \text{jmenovatele} & \doteq 4{,}3983 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3{,}9936 \\ -4{,}3983 \\ \hline \log \text{zlomku} = 0{,}5953 - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (1{,}5953 - 2) : 2 \\ \hline \log x \doteq 0{,}7976 - 1, \quad x \doteq 0{,}6274. \end{array}$$

Všimněte si, že jsme nepočítali čitatele, jmenovatele, zlomek, nýbrž pouze jejich logaritmy.

Cvičení.

71. Vypočtěte: a) $2{,}47 \cdot 1{,}86$; b) $704 \cdot 14{,}2$; c) $0{,}3724 \cdot 1{,}276$; d) $54{,}26 \cdot 0{,}02873$; e) $3{,}05 \cdot 0{,}468 \cdot 0{,}256$.

72. Vypočtěte: a) $56{,}2 : 4{,}81$; b) $6{,}254 : 9{,}236$; c) $0{,}2487 : 5{,}602$; d) $1 : 3{,}874$; e) $10 : 0{,}07438$.

73. Vypočtěte: a) $3{,}25^2$; b) $48{,}7^3$; c) $1{,}032^5$; d) $0{,}5683^2$; e) $0{,}2154^3$.

74. Vypočtěte: a) $\sqrt{5{,}64}$; b) $\sqrt[3]{12{,}8}$; c) $\sqrt{456{,}8}$; d) $\sqrt{0{,}2345}$; e) $\sqrt[5]{10}$; f) $\sqrt[3]{0{,}1}$.

75. Vypočtěte: a) $\sqrt{2{,}262 \cdot 0{,}3186}$; b) $\sqrt{5{,}426^2 - 4{,}862^2}$; c) $2 \cdot 3{,}872^2$; d) $\sqrt[3]{7} : \sqrt{5}$; e) $\left(\frac{56{,}28}{61{,}05}\right)^3$.

76. S jakou přesností lze pomocí čtyrmístné tabulky logaritmů vypočísti: a) $(7^7)^7$; b) $7^{(7^7)}$?

77. Vypočtěte: a) $\sqrt[5]{7} - \sqrt[7]{5}$; b) $\sqrt{0{,}3253^2 + 0{,}4867^2}$; c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$; d) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

78. Určete obsah trojúhelníka o stranách $a = 9{,}65$ dm, $b = 6{,}38$ dm, $c = 5{,}84$ dm.

79. a) Nalezněte délku kružnice o poloměru $r = 31{,}2$ cm. b) Nalezněte obsah kruhu o průměru $d = 26{,}3$ dm.

80. a) Obvod kruhu je 1 m. Stanovte jeho obsah. b) Obsah kruhu je 1 m². Stanovte jeho obvod.

81. Povrch krychle je 1 m². Vypočtěte její objem.

82. Litrová nádoba má podobu válce, jehož výška je rovna dvojnásobnému průměru podstavy. Určete rozměry nádoby.

83. Určete a) povrch, b) objem Země (poloměr 6371 km).

84. Určete poměr a) povrchů, b) objemů Měsíce a Země (poloměry 1741 km a 6371 km).

85. a) Určete, kolik procent objemu koule zaujímá krychle do ní vepsaná. b) Řešte touž úlohu pro povrch.

86. a) Jak velký je poloměr koule, jejíž objem je 1 m³? b) Jak velký je poloměr koule, jejíž povrch je 1 m²?

87. V pravoúhlém trojúhelníku je odvěsna dlouhá 15,2 cm, přepona 25,7 cm. Určete druhou odvěsnu.

88. Tětiva dlouhá 32,7 cm je vzdálena o 12,6 cm od středu kružnice. Stanovte poloměr kružnice.

89. Hrany kvádru měří 26,3 cm, 42,5 cm, 56,8 cm. Vypočtěte jeho a) povrch, b) úhlopříčku.

90. Je-li dáno $\log a = 3{,}2683$, $\log b = 2{,}3548$ a chceme-li určit $\log(a + b)$, můžeme počítat buď tak, že stanovíme čísla a, b, tato čísla sečteme a nalezneme logaritmus jejich součtu, nebo také tak, že užijeme rovnosti $\log(a + b) = \log a + \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, při čemž nejprve stanovíme logaritmicky hodnotu $\frac{b}{a}$ a pak určíme $\log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$. Proveďte oba způsoby a rozmyslete si, který z nich je výhodnější.

II. Komplexní čísla.

1. Zavedení komplexních čísel.

Slovem číslo jsme dosud stále rozuměli reálné číslo. Reálná čísla se dělí na racionální a irracionální. Vlastnosti početních výkonů s racionálními čísly jsme podrobně popisovali a odůvodňovali v prvé třídě; u irracionálních čísel jsme vycházeli ze skutečnosti, že každé irracionální číslo lze nahradit racionálním číslem, které se od něho liší tak málo, že na tom prakticky nezáleží. S irracionálními čísly jsme počítali tak, že jsme je nahrazovali jim přibližně rovnými racionálními čísly speciálního tvaru, totiž desetinnými zlomky. Že všecka početní pravidla, která jsme si odůvodnili v oboru čísel racionálních, zůstávají správná i v širším oboru čísel reálných (racionálních a irracionálních dohromady), je pravda; ale neodůvodňovali jsme to a nebudeme odůvodňovat jednak proto, že je to zdlouhavé a obtížné, jednak proto, že při praktických úkolech jde v převážné řadě případů pouze o výpočty přibližné, a jak bylo již řečeno, každé irracionální číslo můžeme nahradit racionálním číslem, které se od něho liší tak málo, že při přibližném výpočtu na tom nezáleží.

Pojem reálného čísla se však ukázal pro matematiku příliš úzkým a jedním z největších pokroků v matematice bylo zavedení obecnějšího druhu čísel, která se jmenují **čísla komplexní.** Tato čísla si nyní budeme definovat a naučíme se s nimi počítat.

Že matematika nevystačí s oborem reálných čísel, ukázalo se historicky nejprve v tom, že i zcela jednoduché rovnice nemají v oboru reálných čísel kořen. Jsou to především známé nám kvadratické rovnice se záporným diskriminantem, t. j. rovnice tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (a \neq 0) \tag{1}$$

u kterých $b^2 - 4ac < 0$. Nejjednodušší taková rovnice je

$$x^2 + 1 = 0, \tag{2}$$

u které je patrné na první pohled, že nemá v oboru reálných čísel žádný kořen. V rozšířeném oboru komplexních čísel bude mít kořen nejen rovnice (2), nýbrž vůbec každá kvadratická rovnice. Ostatně důležitost zavedení komplexních čísel spočívá mimo jiné v tom, že v oboru komplexních čísel nejen každá kvadratická rovnice, nýbrž také každá algebraická rovnice třetího, čtvrtého, pátého a vůbec libovolného stupně má vždy kořen. To je t. zv. základní věta algebry, která však není v učebním programu gymnasia.

Obor komplexních čísel musí tedy vedle reálných čísel obsahovat především číslo, které označíme i a které bude kořenem rovnice (2). Číslo i se jmenuje **imaginární jednotka**; písmeno i je počáteční písmeno slova imaginární, které je latinského původu a znamená obrazný; ve starší české matematické literatuře se slovo imaginární zčešťovalo slovem pomyslný. Název imaginární je jakýsi protiklad názvu reálný, který vlastně znamená skutečný. Uvidíme později, že komplexní čísla nejsou o nic méně skutečná než čísla reálná. Zatím poznamenejme, že jsme písmen dosud užívali ve významu reálných čísel; tato písmena a, b, c atd. byla tištěna t. zv. kursivou, nikoli antikvou (a, b, c atd.) Písmeno i však neznamená reálné číslo a v dalším je stále tištěno antikvou. Kursivních písmen a, b, c atd. budeme prozatím užívat pouze ve významu reálných čísel. Vedle reálných čísel zavedeme především t. zv. ryze imaginární čísla tvaru

$$a\mathrm{i},\ a \neq 0, \tag{3}$$

kde písmeno a znamená libovolné reálné číslo různé od nuly. Jaký je skutečný význam ryze imaginárních čísel a komplexních čísel vůbec, o tom bude účelnější si promluvit až později, až po definici sčítání a násobení těchto čísel. Bude však účelné již nyní zavésti *geometrické znázornění*, které je u komplexních čísel velice důležité. Jak víte, znázorňujeme si reálná čísla pomocí bodů na vodorovné přímce, které jsme dosud říkali číselná osa; protože však na číselné ose jsou znázorněna pouze reálná čísla a nám půjde nyní také o nová, jiná čísla, budeme místo číselná osa raději říkat **reálná osa.** Počátkem, t. j. obrazem čísla 0, povedeme nyní ještě svislou přímku, které budeme říkat **imaginární osa.** Na této imaginární ose si budeme znázorňovat ryze imaginární čísla (3), a to tak, že obraz čísla (3) leží na imaginární ose ve vzdálenosti rovné $|a|$ od počátku

nad reálnou osou, jestliže $a > 0$,
pod reálnou osou, jestliže $a < 0$.

Pro $a = 0$ položíme

$$0\mathrm{i} = 0;$$

toto číslo je reálné a nepočítáme je mezi ryze imaginární čísla. Ryze imaginární čísla nejsou reálná a jsou geometricky znázorněna jinde než čísla reálná. Jak lze očekávat, položíme

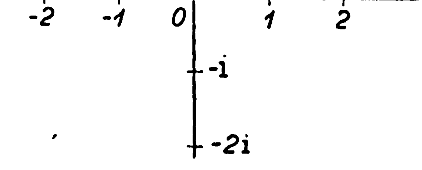
$$1\mathrm{i} = \mathrm{i}, \tag{4}$$

t. j. mezi ryze imaginární čísla patří také imaginární jednotka i, znázorněná bodem, který je svisle nad počátkem ve vzdálenosti od počátku rovné zvolené jednotce délky. Podobně položíme ještě

$$-1\mathrm{i} = -\mathrm{i}. \tag{5}$$

V obr. 10. jsou znázorněna reálná čísla $0, 1, 2, -1, -2$ a ryze imaginární čísla $\mathrm{i}, 2\mathrm{i}, -\mathrm{i}, -2\mathrm{i}$.

Nyní si zavedeme obecný pojem **komplexního čísla**; slovo komplexní je latinského původu a česky znamená složený. **Komplexní číslo je dvojice složená z reálného čísla a_1 a z ryze imaginárního čísla a_2i nebo z čísla** $0\mathrm{i} = 0$; reálné číslo a_1 se jmenuje **reálná část** komplexního čísla, reálné číslo a_2 se jmenuje **imaginární část** komplexního čísla. Mezi komplexní čísla však počítáme také všecka reálná čísla a, a to tak, že reálnou částí čísla a je číslo a samo, kdežto imaginární částí je v tomto případě číslo 0. Mezi komplexní čísla počítáme za druhé také všecka ryze imaginární čísla ai, a to tak, že tentokráte je reálná část rovna nule, imaginární část rovna a. Komplexní číslo s reálnou částí a_1 a s imaginární částí $a_2 \neq 0$ znázorňujeme geometricky bodem, který je průsečíkem svislé přímky vedené obrazem reálného čísla a_1 s vodorovnou přímkou vedenou obrazem ryze imaginárního čísla a_2i. Komplexní číslo s imaginární částí



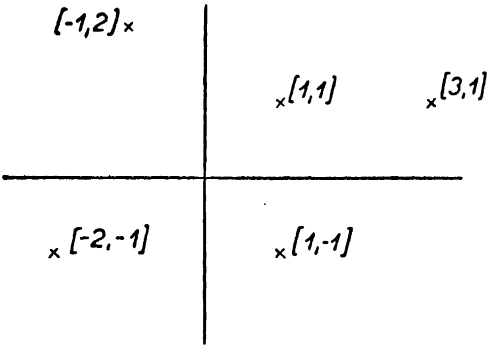
Obr. 10.

rovnou nule znázorňujeme bodem, který je obrazem reálného čísla a_1 na reálné ose. Komplexní číslo budeme prozatím značit

$$[a_1, a_2]; \tag{6}$$

malá písmena (kursivou psaná; písmeno i psané antikvou sem nepatří) budou prozatím znamenat jen reálná čísla. Komplexní čísla budeme pro jasnost výkladu prozatím značit velkými písmeny, a to tak, že reálná a imaginární část budou označeny příslušným malým písmenem s indexem 1 u části reálné, s indexem 2 u části imaginární, na př.

$$A = [a_1, a_2],$$
$$B = [b_1, b_2],$$
$$C = [c_1, c_2].$$



Obr. 11.

V obr. 11 jsou znázorněna komplexní čísla [1, 1]; [3, 1]; [1, —1]; [—1, 2]; [—2, —1].

Protože jak reálná čísla, tak ryze imaginární čísla jsou zvláštní případy komplexních čísel, můžeme podle obecného označení (6) psáti

$$a = [a, 0] \quad \text{pro reálná čísla } a,$$
$$ai = [0, a] \quad \text{pro ryze imaginární čísla } ai, \text{ kde } a \neq 0,$$

tedy

$$\mathrm{i} = [0, 1] \quad \text{pro imaginární jednotku i}$$

a mimo to na př.

$$0 = [0, 0], \qquad 1 = [1, 0].$$

Poslední definice: **imaginární číslo** je takové komplexni číslo, které není reálné, tedy komplexní číslo je imaginární, jestliže $a_2 \neq 0$. Mezi imaginární čísla patří mimo jiné všecka ryze imaginární čísla.

Cvičení.

91. Existuje komplexní číslo, jež je současně a) reálným, b) ryze imaginárním, c) imaginárním číslem?

92. Existuje reálné číslo, jež je současně a) komplexním, b) ryze imaginárním, c) imaginárním číslem?

93. Existuje ryze imaginární číslo, jež je současně a) komplexním, b) reálným, c) imaginárním číslem?

94. Existuje imaginární číslo, jež je současně a) komplexním, b) reálným, c) ryze imaginárním číslem?

95. Komplexní číslo $[a_1, a_2]$ je zobrazeno bodem M. Které komplexní číslo je zobrazeno bodem souměrným k bodu M a) podle reálné osy, b) podle imaginární osy, c) podle počátku?

96. Dvě komplexní čísla $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ považujeme za sobě rovná, je-li jejich obrazem týž bod. Dokažte, že to nastane tehdy a jen tehdy, když $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

97. Je možné, aby pro nějaké komplexní číslo platilo a) $[a_1, a_2] = [a_1, -a_2]$; b) $[a_1, a_2] = [-a_1, a_2]$; c) $[a_1, a_2] = [-a_1, -a_2]$? Které je to číslo a kde leží jeho obraz?

98. Je možné, aby pro nějaké komplexní číslo platilo a) $[a_1, a_2] = [a_2, a_1]$; b) $[a_1, a_2] = [-a_2, -a_1]$? Kde leží obraz takového čísla?

99. Která komplexní čísla zobrazují vrcholy čtverce, jehož jeden vrchol leží v počátku a jedna jeho strana o délce 1 leží v reálné ose? Je některé ze zobrazených čísel a) reálné, b) ryze imaginární, c) imaginární? (Celkem čtvero řešení.)

100. Která komplexní čísla zobrazují vrcholy pravidelného šestiúhelníka, jehož střed leží v počátku a jeden vrchol leží ve vzdálenosti 1 od počátku a) na reálné ose, b) na imaginární ose?

101. Čtverec má střed v počátku a jeden vrchol v bodě, jenž je obrazem čísla $[a_1, a_2]$. Která komplexní čísla zobrazují ostatní vrcholy toho čtverce?

102. V jakém vzájemném vztahu jsou obrazy čísel a) $[a_1, a_2]$ a $[a_2, a_1]$; b) $[a_1, a_2]$ a $[-a_2, -a_1]$?

2. Sčítání a násobení komplexních čísel.

Jsou-li dána dvě komplexní čísla

$$A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2],$$

definujeme jejich součet $A + B$ takto:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \tag{1}$$

t. j. **dvě komplexní čísla sečteme tak, že sečteme jejich reálné části a také sečteme jejich imaginární části.** Definice (1) uvádí sčítání komplexních čísel tak jednoduchým způsobem, že je z definice přímo patrné, že známé základní vlastnosti sčítání reálných čísel platí i pro sčítání čísel komplexních. Především platí

$$A + B = B + A, \tag{2}$$

t. j. komutativní zákon sčítání platí i pro čísla komplexní. Dále máme pro tři komplexní čísla

$$A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2],\ C = [c_1, c_2]$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{3}$$

t. j. asociativní zákon sčítání platí i pro čísla komplexní, takže můžeme psáti $A + B + C$ bez závorky a podobně pro více než tři sčítance. Dále poznamenejme, že také pro každé komplexní číslo A platí, že

$$A + 0 = A. \tag{4}$$

Stejně jako u reálných čísel máme i ke každému komplexnímu číslu $A = [a_1, a_2]$ **opačné komplexní číslo**

$$-A = [-a_1, -a_2],$$

které má tu vlastnost, že

$$(-A) + A = 0.$$

Jsou-li A, B daná komplexní čísla, existuje právě jedno komplexní číslo X, které je kořenem rovnice

$$A + X = B; \tag{5}$$

je to číslo

$$X = B + (-A),$$

které značíme jednodušeji $X = B - A$ a nazýváme rozdílem s menšencem B a menšitelem A. Tím jsme zjistili, že všecky základní vlastnosti sčítání reálných čísel platí beze změny i v oboru čísel komplexních.

Poznamenejme ještě toto: Mezi komplexní čísla patří také všecka čísla reálná. Jsou-li

$$A = [a, 0],\ B = [b, 0]$$

dvě reálná čísla, pak podle definice (1) je $A + B = [a + b, 0]$ t. j. obecná definice součtu dvou komplexních čísel v tom zvláštním případě, že oba sčítanci jsou čísla reálná, vede znovu na obyčejnou definici součtu reálných čísel. Podobně v případě dvou ryze imaginárních sčítanců $A = [0, a]$, $B = [0, b]$ definice (1) dá $A + B = [0, a + b]$ neboli

$$a\mathrm{i} + b\mathrm{i} = (a + b)\mathrm{i}, \tag{6}$$

což zase potvrzuje účelnost definice (1). Posléze si všimněme případu, že v (1) první sčítanec

$$A = [a_1, 0] = a_1$$

je číslo reálné a druhý sčítanec

$$B = [0, a_2] = a_2\mathrm{i}$$

je číslo ryze imaginární nebo nula. Podle definice (1) je

$$A + B = [a_1, a_2]$$

neboli

$$[a_1, a_2] \text{ je totéž jako } a_1 + a_2\mathrm{i}. \tag{7}$$

Proto v následujících článcích už nebudeme užívat pro komplexní čísla označení $[a_1, a_2]$, nýbrž místo $[a_1, a_2]$ budeme psáti, jak je všeobecně obvyklé, $a_1 + a_2\mathrm{i}$.

Přistupme k definici násobení dvou komplexních čísel! Již ve článku 1 jsme poznamenali, že v oboru komplexních čísel rovnice $x^2 + 1 = 0$ má kořen $x = \mathrm{i}$. Aby tomu skutečně tak bylo, musí definice násobení dvou komplexních čísel býti taková, aby z ní plynulo

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{8}$$

v tom smyslu, že i^2 znamená součin $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}$. Budiž nyní opět

$$A = [a_1, a_2], \; B = [b_1, b_2] \tag{9}$$

neboli

$$A = a_1 + a_2\mathrm{i}, \; B = b_1 + b_2\mathrm{i}.$$

Jestliže součin AB bude definován tak, aby zůstala v platnosti všecka pravidla, která známe pro počítání s reálnými čísly, a aby mimo to platilo (8), bude

$$(a_1 + a_2\mathrm{i})(b_1 + b_2\mathrm{i}) = a_1b_1 + a_2b_1\mathrm{i} + a_1b_2\mathrm{i} + a_2b_2 \cdot (-1)$$

neboli

$$(a_1 + a_2\mathrm{i})(b_1 + b_2\mathrm{i}) = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)\,\mathrm{i}.$$

Tím jsme vedeni k následující definici součinu dvou komplexních čísel (9):

$$AB = [a_1b_1 - a_2b_2, \; a_2b_1 + a_1b_2] \tag{10}$$

a naším úkolem bude se přesvědčit, že v důsledku definice (10) bude násobení komplexních čísel skutečně míti ty vlastnosti, které známe pro násobení reálných čísel. Především si všimněme, že ve zvláštním případě $A = [a, 0]$, $B = [b, 0]$ z definice (10) vychází $AB = [ab, 0]$, t. j. obecná definice součinu dvou komplexních čísel v tom zvláštním případě, že oba činitelé jsou čísla reálná, vede znovu na obyčejnou definici součinu dvou reálných čísel. V případě $A = [0, 1]$, $B = [0, 1]$ neboli $A = B = \mathrm{i}$ z definice (10) plyne, že $AB = [-1, 0]$. Tedy podle definice (10) skutečně platí základní vzorec (8). Je bezprostředně patrné, že z definice (10) plyne $AB = BA$, t. j. komutativní zákon násobení platí i pro čísla komplexní. Jsou-li dána 3 komplexní čísla

$$A = [a_1, a_2], \; B = [b_1, b_2], \; C = [c_1, c_2],$$

potom v důsledku definice (10) jest

$$(AB)\cdot C = [(a_1b_1 - a_2b_2)\,c_1 - (a_2b_1 + a_1b_2)\,c_2,\quad (a_2b_1 + a_1b_2)\,c_1 + \\ + (a_1b_1 - a_2b_2)\,c_2],$$

$$A\cdot(BC) = [a_1\,(b_1c_1 - b_2c_2) - a_2\,(b_2c_1 + b_1c_2),\quad a_2\,(b_1c_1 - b_2c_2) + \\ + a_1\,(b_2c_1 + b_1c_2)].$$

Podle známých pravidel o počítání s reálnými čísly z toho usoudíme, že

$$A\cdot(BC) = (AB)\cdot C, \tag{11}$$

t. j. **asociativní zákon násobení platí i pro čísla komplexní**, takže můžeme psáti ABC bez závorky a podobně pro více než tři činitele. Jestliže $B=[1, 0]=1$ nebo $B=[0, 0]=0$, plyne z (10):

$$A\cdot 1 = A, \tag{12}$$

$$A\cdot 0 = 0, \tag{13}$$

pro každé komplexní číslo A. Dále budiž

$$A = [a_1, a_2],\ A' = [a'_1, a'_2],\ B = [b_1, b_2].$$

Podle definic sčítání a násobení jest

$$AB + A'B = [(a_1b_1 - a_2b_2) + (a'_1b_1 - a_2'b_2),\ (a_2b_1 + a_1b_2) + (a'_2b_1 + a'_1b_2)],$$

$$(A + A')\,B = [(a_1 + a'_1)\,b_1 - (a_2 + a'_2)\,b_2,\ (a_2 + a'_2)\,b_1 + (a_1 + a'_1)\,b_2].$$

Podle známých pravidel o počítání s reálnými čísly z toho soudíme, že

$$AB + A'B = (A + A')\,B, \tag{14}$$

t. j. **distributivní zákon platí také pro čísla komplexní.**

Definovali jsme sčítání a násobení komplexních čísel a zjistili jsme především, že u sčítání platí pro komplexní čísla přesně táž pravidla jako pro reálná čísla. U násobení jsme také zjistili souhlas u většiny základních pravidel, ale u násobení nejsme ještě hotovi. Všimněme si pravidla (13): $A\cdot 0 = 0$; podle komutativního zákona je také $0\cdot A = 0$ a můžeme říci: **Součin dvou komplexních čísel je roven nule, je-li aspoň jeden činitel roven nule.** Je otázka, zdali také obráceně, jestliže $AB=0$, můžeme souditi, že aspoň jeden činitel je roven nule. Pro reálné činitele víme, že tomu tak je; pro komplexní činitele je to také správné, ale dosud jsme to nedokázali, a to je v našich dosavadních výsledcích podstatnou mezerou. Druhá mezera, která těsně souvisí s první, je v tom, že dosud nic nevíme o možnosti dělení v oboru komplexních čísel.

Cvičení.

103. Stanovte: a) [2, 3] + [3, 1]; b) [8, 5] + [2, 0]; c) [3, — 2] + [— 1, 3]; d) [2, 1] + [— 3, — 1]; e) [— 4, — 3] + [— 2, — 1]; f) [2, 3] — [— 1, 5]; g) [2, 1] — [0, 2]; h) [3, 1] — [— 1, — 2]; i) [— 3, 5] — [— 2, 4]; j) [— 3, — 1] — [— 3, — 2].

104. Stanovte: a) $(2 + 3i) + (1 + 2i)$; b) $(2 - i) + 2i$; c) $(2 - 3i) + (-3 + 2i)$; d) $(-2 - i) + (2 - i)$; e) $(-1 - i) + (-2 - 3i)$; f) $(3 + 2i) - (2 + 3i)$; g) $(4 - 3i) - 5$; h) $(4 - 5i) - (2 - 3i)$; i) $(3 + i) - (-2 - i)$; j) $(-1 - i) - (-2 - 3i)$.

105. Je možné, aby a) součet, b) rozdíl dvou komplexních čísel byl reálný? Kdy to nastane?

106. Je možné, aby a) součet, b) rozdíl dvou komplexních čísel byl ryze imaginární? Kdy to nastane?

107. Je možné, aby a) součet, b) rozdíl dvou komplexních čísel byl imaginární? Kdy to nastane?

108. Stanovte: a) [3, 3] [2, 1]; b) [2, 1] [3, 0]; c) [3, — 2] [1, 2]; d) [3, 0] [0, 2]; e) [4, — 3] [0, — 1]; f) [4, — 2] [2, 1]; g) [— 2, 4] [— 2, — 4]; h) [3, — 2] [2, — 3]; i) [— 3, 1] [3, 1]; j) [— 2, — 3] [— 1, — 1].

109. Vypočtěte: a) $(4 + 3i)\,2$; b) $(3 + 5i)\,i$; c) $(2 + 3i)(4 + 5i)$; d) $(2 - 3i)(2 + i)$; e) $(-3 + 4i)(4 - 3i)$; f) $(-6 + 3i)(-4 - 2i)$; g) $(-1 - i)(1 - i)$; h) $(1 + i)^2$; i) $(2 - 3i)^2$; j) $(-2 - i)^2$.

110. Vypočtěte: a) i^2; b) i^3; c) i^4; d) i^5; e) i^6; f) i^7; g) i^8.

111. Vypočtěte: a) $(1 + i)(2 + i) + (1 + i)(1 + 2i)$; b) $(2 + 3i)(1 - 4i) - (2 - 3i)(1 + 4i)$; c) $(5 + i)(i - 3)(8 + i)$; d) $(1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i)$; e) $(1 + i)^3$; f) $(-1 + i\sqrt{3})^3$; g) $(1 - i)^4$; h) $(1 + i)^6$.

112. Je možné, aby součin dvou komplexních čísel byl reálný? Kdy to nastane?

113. Je možné, aby součin dvou komplexních čísel byl ryze imaginární? Kdy to nastane?

114. Je možné, aby součin dvou komplexních čísel byl imaginární? Kdy to nastane?

3. Sdružená komplexní čísla; absolutní hodnota.

S komplexním číslem $A = a_1 + a_2 i$ **sdružené komplexní číslo** je $a_1 - a_2 i$; budeme je značit $\overline{A}$ (čteme A s pruhem). Zřejmě také obráceně komplexní číslo sdružené s číslem $\overline{A}$ je původní komplexní číslo A. Je-li číslo A reálné, je $\overline{A} = A$; je-li číslo A ryze imaginární, je $\overline{A} = -A$. Obráceně: Jeli $A = \overline{A}$, je číslo A reálné; je-li $\overline{A} = -A$, je číslo A ryze imaginární nebo nula. Při geometrickém znázornění komplexních čísel, které jsme zavedli ve článku 1, a které bude v dalším míti důležitou úlohu, je $\bar{A}$ souměrný obraz bodu A podle reálné osy.

Zřejmé, ale leckdy důležité jsou vzorce:

Je-li $A = a_1 + a_2 i$, je

$$A + \bar{A} = 2a_1, \quad \bar{A} - A = 2a_2 i. \tag{1}$$

Tedy číslo $A + \bar{A}$ je reálné, číslo $A - \bar{A}$ je ryze imaginární nebo nula.

Z definice součtu a součinu dvou komplexních čísel je přímo patrné, že

$$\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}; \tag{2}$$

podobně je na př.

$$\overline{(-A)} = -\bar{A}, \quad \overline{A - B} = \bar{A} - \bar{B}. \tag{3}$$

Z toho plyne, že jestliže z daných komplexních čísel $A, B, C \dots$ sčítáním, odčítáním, násobením odvodíme komplexní číslo K, potom ze sdružených komplexních čísel $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ vznikne týmiž početními výkony komplexní číslo $\bar{K}$ sdružené s komplexním číslem K. Jestliže na př. vypočteme, že

$$(2 + 3i)(3 - i) - (1 + 2i)(2 - i) + (1 + 3i)(2 + 5i) = -8 + 15i,$$

víme bez nového výpočtu, že je také

$$(2 - 3i)(3 + i) - (1 - 2i)(2 + i) + (1 - 3i)(2 - 5i) = -8 - 15i.$$

Po zavedení dělení komplexních čísel poznáme, že tento výkon nečiní výjimku: jestliže z komplexních čísel $A, B, C \dots$ sčítáním, odčítáním, násobením a dělením odvodíme komplexní číslo K, potom ze sdružených čísel $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ vznikne týmiž výkony sdružené číslo $\bar{K}$.

Zvláště důležitý je součin $A\bar{A}$ dvou sdružených komplexních čísel

$$A = a_1 + a_2 i, \quad \bar{A} = a_1 - a_2 i.$$

Podle známých definic vypočteme snadno, že

$$A\bar{A} = a_1^2 + a_2^2. \tag{4}$$

Číslo $A\bar{A}$ je tedy vždycky reálné a zpravidla je kladné; jediná výjimka nastane pro $A = 0$; v tomto případě je $A\bar{A} = 0$. Důležitější než číslo $A\bar{A}$ samo je jeho druhá odmocnina $\sqrt{A\bar{A}}$; je-li A reálné, tedy $A = a_1$, $a_2 = 0$, je $A\bar{A} = a_1^2$, $\sqrt{A\bar{A}} = \sqrt{a_1^2} = |a_1|$. Proto i v případě libovolného komplexního čísla $A = a_1 + a_2 i$ píšeme

$$|A| = \sqrt{A\bar{A}} \tag{5}$$

a nazveme číslo $|A|$ **absolutní hodnotou komplexního čísla** A. Je tedy

$$|a_1 + a_2 i| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \tag{6}$$

Absolutní hodnotou čísla 0 je číslo 0; absolutní hodnota každého jiného komplexního čísla je reálné kladné číslo.

Při znázornění komplexních čísel body v rovině číslo $|A|$ znamená vzdálenost bodu A od počátku; tato důležitá věc plyne ze známé Pythagorovy věty. Buďtež nyní

$$A = a_1 + a_2 i, \quad B = b_1 + b_2 i$$

dvě libovolná komplexní čísla. Podle již dokázaných pravidel je především $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$; dále je tedy

$$AB \cdot \overline{AB} = AB \cdot \bar{A}\bar{B} = A\bar{A} \cdot B\bar{B},$$

a protože

$$|A| = \sqrt{A\bar{A}}, \quad |B| = \sqrt{B\bar{B}}, \quad |AB| = \sqrt{AB \cdot \overline{AB}},$$

$$\sqrt{A\bar{A}} \cdot \sqrt{B\bar{B}} = \sqrt{A\bar{A} \cdot B\bar{B}},$$

dostaneme

$$|AB| = |A| \cdot |B|, \tag{7}$$

t. j. **absolutní hodnota součinu dvou komplexních čísel je rovna součinu absolutních hodnot obou činitelů.** Věta o absolutní hodnotě součinu platí i pro více než dva činitele.

Nyní snadno doplníme dosud neprobrané vlastnosti násobení komplexních čísel (viz konec článku 2). Především máme dokázati, že **jestliže součin AB dvou komplexních čísel je roven nule, je aspoň jeden činitel roven nule.** Důkaz: Je-li $AB = 0$, je také $|AB| = 0$ a podle (7) je $|A| \cdot |B| = 0$; avšak absolutní hodnoty jsou *reálná* čísla; proto z $|A| \cdot |B| = 0$ plyne, že buďto $|A| = 0$ nebo $|B| = 0$, a to znamená, že buďto $A = 0$ nebo $B = 0$.

Dále si dokážeme, že je-li A komplexní číslo různé od nuly, existuje k němu **převrácená hodnota,** t. j. takové komplexní číslo X, které splňuje rovnici

$$AX = 1. \tag{8}$$

Postupujeme takto. Nejprve předpokládejme, že X splňuje (8). Potom je také

$$A\bar{A} \cdot X = \bar{A}$$

a číslo $A\bar{A} = |A|^2$ je kladné reálné číslo, k němuž jistě existuje převrácená hodnota $\frac{1}{A\bar{A}}$; jestliže jí násobíme na obou stranách, dostaneme

$$X = \frac{1}{A\bar{A}} \cdot \bar{A}. \tag{9}$$

Obráceně se přesvědčíme dosazením, že číslo (9) splňuje rovnici (8). Tedy každé komplexní číslo různé od nuly má převrácenou hodnotu, a to jen jedinou; značíme ji $\frac{1}{A}$.

Obecněji si všimněme rovnice

$$AX = B, \tag{10}$$

ve které A, B jsou daná komplexní čísla a X je neznámá. Je-li především $A = 0$, tu v případě, že také $B = 0$, splňuje rovnici (10) každé komplexní číslo X; je-li však $A = 0$, $B \neq 0$, rovnice (10) je neřešitelná. Je-li $A \neq 0$, má (10) právě jedno řešení.

Neboť platí-li (10), je zřejmě

$$X = \frac{1}{A} \cdot B \tag{11}$$

a obráceně z (11) dosazením vyjde (10). Řešení (11) rovnice (10) značíme obvykle

$$X = \frac{B}{A}; \tag{12}$$

znak $\frac{B}{A}$ má tedy význam pouze v případě $A \neq 0$. Praktický postup je patrný z příkladu:

$$\frac{3+i}{2-3i} = \frac{(3+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{3+11i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{11}{13}i.$$

V předcházejícím jsme pro komplexní čísla definovali sčítání a násobení a zjistili jsme, že platí táž početní pravidla, která jsou nám běžná v oboru čísel reálných. Zejména jsme shledali, že i v oboru komplexních čísel je možné definovat také obrácené početní výkony odčítání a dělení s tím omezením, že **dělit nulou nelze** ani v oboru čísel komplexních.

Ale mezi reálnými a komplexními čísly je ten podstatný rozdíl, že reálná čísla můžeme porovnávat podle velikosti (ze dvou různých reálných čísel jedno je menší a druhé větší), což u komplexních čísel není možné. *U komplexních čísel porovnáváme pouze velikosti absolutních hodnot.* Zejména rozlišování kladných a záporných čísel v oboru čísel komplexních odpadá.

Ty partie aritmetiky, ve kterých se vychází pouze od vlastností základních početních výkonů a ve kterých pojmy větší, menší, kladný, záporný nemají žádnou úlohu, přenesou se beze změny i na čísla komplexní. Příkladem takové partie je nauka o mocninách s celými exponenty.

Je-li n přirozené číslo větší než 1, pak A^n znamená pro každé komplexní číslo A součin n činitelů vesměs rovných A; mimo to je

$$A^1 = A, \; A^0 = 1$$

pro každé komplexní číslo A. Jest $0^n = 0$ pro každé celé kladné číslo n (ale $0^0 = 1$); naproti tomu pro $A \neq 0$ je také $A^n \neq 0$ pro každé celé kladné n (i pro $n = 0$). Proto v případě $A \neq 0$ definujeme mocninu A^{-n} s celým záporným mocnitelem jako převrácenou hodnotu komplexního čísla A^n (kdežto 0^{-n} nedefinujeme). Podle těchto definic, které úplně souhlasí s dřívějšími definicemi pro reálné mocněnce, máme i pro komplexní mocněnce pravidla

$$A^r \cdot A^s = A^{r+s},$$
$$(A^r)^s = A^{rs},$$
$$A^{-r} = \frac{1}{A^r},$$
$$A^r \cdot B^r = (AB)^r$$

za předpokladu, že mocnitelé jsou čísla celá; mocněnci jsou libovolná komplexní čísla s podmínkou, že mocněnec nula je vyloučen, je-li mocnitel záporný. Důkazy těchto pravidel jsou pro komplexní čísla doslova stejné jako pro reálná čísla, a je proto zbytečné znova je probírat.

Cvičení.

115. Nalezněte komplexní čísla sdružená s čísly: a) $5 + 2i$; b) $4 - 3i$; c) $-2 + i$; d) $-3 - i$; e) 8; f) i; g) $-5i$. Zobrazte tato čísla.

116. Rozepsáním ve složky dokažte, že a) $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$; b) $\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

117. Je-li $[A]$ obraz čísla A, v jakém vztahu k němu jsou obrazy čísel $-A$, $\bar{A}$, $-\bar{A}$? Dokažte odtud, že $\overline{-A} = -\bar{A}$ a dále, že $\overline{A - B} = \bar{A} - \bar{B}$.

118. a) Jaký význam má symbol $\bar{\bar{A}}$? b) Co značí $\overline{\bar{A} + \bar{B}}$?

119. Vypočtěte: $(2 + i)(3 - i) + (1 + 2i)(1 - 3i)$. Dovedete bez dalšího výpočtu napsati, kolik je $(2 - i)(3 + i) + (1 - 2i)(1 + 3i)$?

120. Dokažte, že z podmínky $|A| = 0$ plyne $A = 0$.

121. Které je geometrické místo bodů, jež zobrazují všecka komplexní čísla dané absolutní hodnoty?

122. Která komplexní čísla jsou rovna své absolutní hodnotě?

123. Rozepsáním ve složky dokažte, že $|AB| = |A| \cdot |B|$.

124. Rozepsáním ve složky dokažte, že z podmínky $AB = 0$ plyne buď $A = 0$, nebo $B = 0$, nebo obojí.

125. Vypočtěte: a) $\frac{50}{3 + 4i}$; b) $\frac{2}{1 + 3i}$; c) $\frac{i}{1 + i}$; d) $\frac{1}{i}$; e) $\frac{1 + i}{1 - i}$; f) $\frac{1 + i}{1 + 2i}$;

g) $\frac{2-i}{2+i}$; h) $\frac{-2+3i}{3-2i}$; i) $\frac{-1-2i}{-1-3i}$; j) $\frac{a+i}{1-ai}$.

126. Vypočtěte: a) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$; b) $\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1-i)^2}$; c) $\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$;

d) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$.

127. Je možné, aby podíl dvou komplexních čísel byl číslo a) reálné, b) ryze imaginární, c) imaginární? Kdy to nastane?

128. Která komplexní čísla jsou rovna své převrácené hodnotě?

129. Která komplexní čísla mají tu vlastnost, že jsou rovna své a) druhé, b) třetí mocnině?

130. Jakých hodnot může nabývati i^n, kde n je celé číslo? Dokažte, že $i^n = i^{n-4}$.

131. Dokažte, že a) $\overline{1:A} = 1:\overline{A}$; b) $\overline{A:B} = \overline{A}:\overline{B}$.

132. Dokažte, že $|\overline{A}| = |A|$.

133. Je možné, aby a) $\overline{A} = \frac{1}{A}$; b) $\overline{A} = iA$; c) $\overline{A} = -iA$? Kdy to nastane?

4. Kvadratické rovnice.

Již ve článku 1 jsme uvedli, že objev komplexních čísel historicky vznikl ze skutečnosti, že některé kvadratické rovnice s reálnými koeficienty jsou v oboru reálných čísel neřešitelné. Jak jsme také již uvedli a jak nyní dokážeme, v oboru komplexních čísel je řešitelná každá kvadratická rovnice. Počneme ryze kvadratickou rovnicí

$$X^2 = A; \tag{1}$$

zde A je dané komplexní číslo, které může a nemusí býti reálné, X je neznámá. Jestliže $A = 0$, má rovnice (1) kořen $X = 0$; to je v tomto případě *jediný* kořen rovnice (1), neboť součin dvou komplexních čísel různých od nuly nemůže se rovnati nule. Jestliže A je kladné reálné číslo, má rovnice (1) reálný kořen $X = \sqrt{A}$ (a také kořen $X = -\sqrt{A}$); jestliže A je záporné reálné číslo, má rovnice (1) ryze imaginární kořen $X = \sqrt{|A|}\cdot i$ (a také kořen $X = -\sqrt{|A|}\cdot i$). Zbývá případ, že číslo

$$A = a_1 + a_2 i$$

je imaginární, takže $a_2 \neq 0$, tedy $a_2^2 > 0$. V tomto případě vyjdeme od rovnice

$$\frac{a_2^2}{4z} - z = a_1, \tag{2}$$

kterou můžeme uvésti na tvar

$$z^2 + a_1 z - \frac{a_2^2}{4} = 0; \qquad (3)$$

(3) je kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a s diskriminantem $a_1^2 + a_2^2 > 0$, má tedy dva reálné kořeny, jejichž součin je roven zápornému číslu $-\frac{1}{4}a_2^2$ a proto jeden kořen je kladný a druhý záporný. Budiž z kladný kořen rovnice (3), tudíž i rovnice (2) a položme

$$X = \frac{a_2}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z} \cdot \mathrm{i}. \qquad (4)$$

Snadno vypočteme, že

$$X^2 = \left(\frac{a_2^2}{4z} - z\right) + a_2 \mathrm{i};$$

podle (2) je tedy $X^2 = a_1 + a_2 \mathrm{i}$, t, j. X je kořen rovnice (1).

Dokázali jsme, že při každé volbě komplexního čísla A rovnice (1) má v oboru komplexních čísel apoň jeden kořen $X = C$. Je-li $A = 0$, je $C = 0$ a víme, že v tomto případě 0 je jediný kořen rovnice (1). Je-li $A \neq 0$, je $C \neq 0$, a proto číslo $-C$ je různé od čísla C; ježto $(-C)^2 = C^2$, také číslo $-C$ je kořenem rovnice (1). Jiný kořen však rovnice (1) nemá; neboť ježto $X = C$ je kořen, je $C^2 = A$ a rovnici (1) lze uvésti na tvar $X^2 - C^2 = 0$ nebo na tvar

$$(X - C)(X + C) = 0. \qquad (5)$$

Jestliže však X splňuje rovnici (5), máme nalevo součin rovný nule, takže aspoň jeden činitel je roven nule; je-li $X - C = 0$, je $X = C$, je-li $X + C = 0$, je $X = -C$.

Závěr: **Ryze kvadratická rovnice (1) má v oboru komplexních čísel pro $A = 0$ jediný kořen $X = 0$, pro $A \neq 0$ právě dva kořeny, navzájem opačné.**

Další postup je úplně stejný jako u reálných rovnic probíraných v 1. třídě. Můžeme předpokládati, že nejvyšší koeficient je roven jedné. Kvadratická rovnice potom zní

$$X^2 + PX + Q = 0$$

neboli

$$(X + \tfrac{1}{2}P)^2 = \tfrac{1}{4}P^2 - Q \qquad (6)$$

a má jediný kořen, je-li v (6) napravo nula, jinak dva kořeny, jejichž součet je roven $-P$, součin je roven Q. Můžeme také kvadratickou rovnici

$$AX^2 + BX + C = 0 \tag{7}$$

řešiti vzorcem

$$X = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} \tag{8}$$

kde $D = B^2 - 4AC$ je diskriminant rovnice. Je-li $D = 0$, je $\sqrt{D} = 0$ a rovnice (7) má jediný kořen. Je-li $D \neq 0$, má rovnice (7) právě dva kořeny, které jsou dány vzorcem (8), jestliže v něm $\sqrt{D}$ znamená kterýkoli z obou kořenů rovnice

$$Y^2 = D.$$

Je-li D reálné, dáváme symbolu $\sqrt{D}$ obvyklý význam pro $D > 0$ a pro $D < 0$ klademe $\sqrt{D} = \sqrt{|D|} \cdot \mathrm{i}$. Podle této dohody je zejména $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$. Také pro imaginární D by bylo možné udat určitý předpis, který by jednoznačně popsal $\sqrt{D}$, na př. tak, že předepíšeme, že imaginární část čísla $\sqrt{D}$ je kladná. To však nemá velký význam.

Cvičení.

134. Jsou-li a_1, a_2 racionální čísla, jak zní podmínka, aby rovnice $z^2 + a_1 z - \frac{1}{4} a_2^2 = 0$, o níž je řeč v textu, měla racionální kořen?

135. Podle návodu v textu řešte rovnice: a) $X^2 = 4 + 3\mathrm{i}$; b) $X^2 = 9 - 40\mathrm{i}$; c) $X^2 = \mathrm{i}$; d) $X^2 = 1 + \mathrm{i}$; e) $X^2 = 1 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$; f) $X^2 = 4\mathrm{i}\sqrt{5} - 1$.

136. Stanovte: a) $\sqrt{32 + 126\mathrm{i}}$; b) $\sqrt{15 - 8\mathrm{i}}$; c) $\sqrt{1 + 2\mathrm{i}\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{2\mathrm{i}\sqrt{6} - 1}$; e) $\sqrt{-1 - \mathrm{i}}$. (Z obou možných hodnot zvolte tu, která má imaginární část kladnou.)

137. Řešte rovnice: a) $X^2 - X + 1 = 0$; b) $X^2 - 2X + 2 = 0$; c) $4X^2 + 8X + 13 = 0$; d) $X^2 - 2X\sqrt{2} + 5 = 0$; e) $X^2 - \mathrm{i}X + 2 = 0$; f) $X^2 - 3X + 3 + \mathrm{i} = 0$; g) $X^2 + 3X + 10\mathrm{i} = 0$; h) $X^2 + (2 - 3\mathrm{i}) X - 5(1 + \mathrm{i}) = 0$.

138. Má-li rovnice $AX^2 + BX + C = 0$ kořeny R, S, napište rovnici, která má kořeny $\overline{R}$, $\overline{S}$.

139. Má-li rovnice $aX^2 + bX + c = 0$ s reálnými koeficienty imaginární kořeny, mají čísla a, c totéž znamení. Dokažte.

140. Má-li rovnice $aX^2 + bX + c = 0$ s reálnými koeficienty kořen R, má také kořen $\overline{R}$. Dokažte.

141. Má-li rovnice $aX^2 + bX + c = 0$ s celočíselnými reálnými koeficienty imaginární kořeny, jejichž reálná i imaginární část jsou čísla racionální, je b sudé. Dokažte.

5. Geometrický význam komplexních čísel.

V praktickém životě setkáváme se zpravidla s kladnými reálnými čísly. Taková čísla vznikají jednak čítáním — a to pouze kladná *celá čísla* (neboli přirozená čísla) — jednak měřením. Při měření se vyskytují nutně také čísla, která nejsou celá. Praktická měření jsou vždy přibližná, a proto výsledky praktických měření udáváme racionálními čísly, zpravidla desetinnými zlomky s malým počtem míst. Theoreticky některá iracionální čísla vystupují při měření velmi přirozeným způsobem, na př. $\sqrt{2}$ (délka úhlopříčky čtverce, jehož strana je jednotka délky) nebo π (polovina délky kružnice, jejíž poloměr je jednotka délky).

V matematice, jejímž úkolem není pouhý záznam čísel získaných čítáním nebo měřením, nýbrž mimo jiné studium method, jimiž na základě přímo měřených čísel docházíme k novým číslům, jejichž přímé měření by bylo obtížné nebo i nemožné, nemůžeme vystačit s oborem kladných reálných čísel. Již na střední škole jste poznali čísla záporná a nyní jsme se seznámili také s čísly imaginárními. Je vám známo, jakého zjednodušení dosáhneme pomocí záporných čísel na př. v nauce o rovnicích (pravidlo o převádění členů s jedné strany rovnice na druhou); bez záporných čísel bychom musili místo jednoho typu kvadratických rovnic $x^2 + px + q = 0$ rozeznávat trojí typ $x^2 = px + q$, $x^2 + px = q$, $x^2 + q = px$.

Kladné reálné číslo vyjadřuje velikost nějaké veličiny. Naproti tomu relativní číslo vyjadřuje nejen velikost, ale zároveň také jeden ze dvou navzájem opačných směrů (nahoru nebo dolů, vzrůst nebo pokles, budoucnost nebo minulost a pod.). Relativní čísla jsme si znázorňovali na přímce (číselné ose) a tak jsme na př. nejsnáze pochopili pravidla sčítání relativních čísel. Význam komplexních čísel je zcela podobný; komplexní číslo vyjadřuje nejen velikost, ale zároveň také určitý směr, při čemž na rozdíl od relativních čísel tentokrát nejde pouze o dva navzájem opačné směry na přímce, nýbrž o všecky možné směry v rovině, kterých je nekonečně mnoho.

Dva různé body A, B můžeme spojit úsečkou AB; úsečka má určitou polohu a určitou velikost. Nezajímá-li nás poloha úsečky, potřebujeme znát pouze její velikost (neboli vzdálenost bodů A, B) a tuto velikost vyjadřujeme (po zavedení délkové jednotky) kladným reálným číslem. Jsou však mnohé případy, kdy sice nezáleží na určité poloze úsečky AB, ale přece jen je třeba vedle velikosti úsečky znáti také směr od bodu A do bodu B. Úsečka, na jejíž určité poloze sice nezáleží, ale u které je vedle její velikosti předepsán také *směr* od **počátečního bodu** A ke **koncovému bodu** B, nazývá se **vektor.** Dvě úsečky AB, $A'B'$ určují týž vektor, mají-li obě touž velikost a je-li zároveň

$$AB \parallel A'B',$$

při čemž $\parallel$ znamená přímou rovnoběžnost. Přitom poloha počátečního bodu je zcela libovolná. Jestliže v jedné poloze počáteční bod je A, koncový bod B, a jestliže si zvolíme jiný počáteční bod téhož vektoru A', potom nový koncový bod B' je obrazem bodu B při tom posouvání, při kterém obrazem bodu A je bod A'. Je-li počáteční bod A (a tudíž i koncový bod B) vektoru určitě zvolen, mluvíme o určitém **umístění vektoru.** Všimněte si, že u vektoru musíme pečlivě rozeznávati mezi počátečním a koncovým bodem; vyměníme-li role obou bodů, dostaneme **opačný vektor.** Tak jako je velmi účelné mezi čísla počítati také **nulu,** stejně je účelné mezi vektory počítati také **nulový vektor;** u nulového vektoru při každém umístění počáteční a koncový bod splynou.

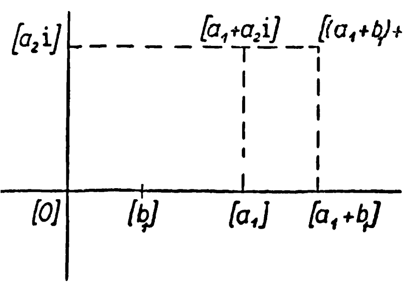
Vektory, které tedy mají nejen určitou velikost, nýbrž i určitý směr, jsou velmi důležité ve fysice. Zde si všimneme jako příkladu pouze pojmu rychlosti. Víme-li na př. pouze, že se letadlo pohybuje rychlostí 360 km za hodinu, nemůžeme ze znalosti polohy letadla v jednom okamžiku vypočísti polohu letadla v jiném okamžiku; aby výpočet byl možný, musíme znáti rychlost jako vektor, t. j. nestačí znát pouze velikost rychlosti, nýbrž je třeba znát také její směr.

Nás budou dále zajímat pouze vektory, které leží všecky v určité rovině. Zvolíme si v rovině určitý bod O, který nazveme p o č á t e k. Základním umístěním vektoru nazveme takové umístění, jehož počátečním bodem bude zvolený bod O. Zvolíme si ještě určitý základní směr; bude to vodorovný směr odleva doprava. Nyní můžeme každému komplexnímu číslu přiřadit určitý vektor tak, že také obráceně bude každému vektoru přiřazeno určité komplexní číslo. Komplexnímu číslu

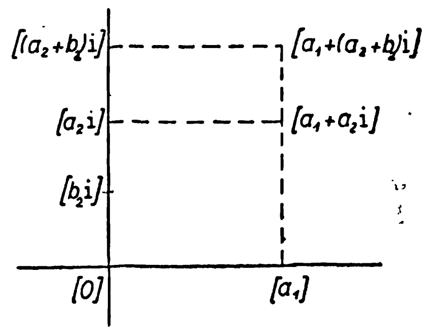
$$A = a_1 + a_2 i$$

přiřadíme ten vektor, který při svém základním umístění bude míti svůj koncový bod v tom bodě, který jsme zavedli již ve článku 1 jako geometrické znázornění komplexního čísla A; budiž $[A]$ značka pro tento bod. Číslo 0 je tedy přiřazené nulovému vektoru; kladná reálná čísla jsou přiřazena těm vektorům, jejichž směr je základní směr; záporná reálná čísla jsou přiřazena těm vektorům, jejichž směr je opačný k základnímu směru; jestliže posléze ani směr daného vektoru ani směr opačný není směr základní, pak přiřazené číslo je imaginární; zejména ryze imaginární čísla jsou přiřazena těm vektorům, jejichž směr je kolmý na základní směr.

Obraz $[a_1 + a_2\mathrm{i}]$ komplexního čísla $a_1 + a_2\mathrm{i}$ byl v průsečíku svislé přímky vedené obrazem $[a_1]$ reálného čísla a_1 (který leží na reálné ose) s vodorovnou přímkou vedenou obrazem $[a_2\mathrm{i}]$ ryze imaginárního čísla $a_2\mathrm{i}$ (který leží na imaginární ose). Zvolme nyní (obr. 12) reálné číslo b_1 a proveďme vodorovné posunutí, kterým počátek $[0]$ přejde v bod $[b_1]$; zřejmě



Obr. 12.



Obr. 13.

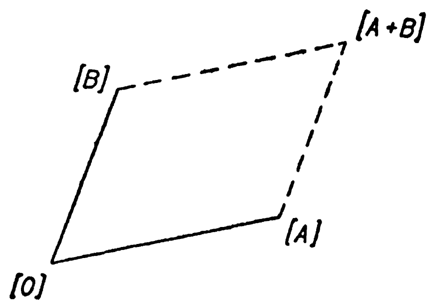
bod $[a_1]$ přejde v bod $[a_1 + b_1]$, vodorovná přímka vedená bodem $[a_2\mathrm{i}]$ zůstane na svém místě a tedy bod $[a_1 + a_2\mathrm{i}]$ přejde v bod $[(a_1 + b_1) + a_2\mathrm{i}]$. Zvolíme-li opět (obr. 13) reálné číslo b_2, ale provedeme-li tentokráte svislé posunutí, kterým počátek $[0]$ přejde v bod $[b_2\mathrm{i}]$, přejde nyní bod $[a_2\mathrm{i}]$ v bod $[(a_2 + b_2)\mathrm{i}]$ a svislá přímka vedená bodem $[a_1]$ zůstane na svém místě, takže bod $[a_1 + a_2\mathrm{i}]$ přejde v bod $[a_1 + (a_2 + b_2)\mathrm{i}]$.

Proveďme nejdříve vodorovné a potom svislé posunutí! Při vodorovném posunutí přejde bod $[0]$ v bod $[b_1]$, bod $[a_1 + a_2\mathrm{i}]$ v bod $[(a_1 + b_1) + a_2\mathrm{i}]$; při svislém posunutí přejde bod $[b_1]$ v bod $[b_1 + b_2\mathrm{i}]$, bod $[(a_1 + b_1) + a_2\mathrm{i}]$ v bod $[(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\mathrm{i}]$. Položíme-li $A = a_1 + a_2\mathrm{i}$, $B = b_1 + b_2\mathrm{i}$, tedy $A + B = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\mathrm{i}$, můžeme říci, že celkový výsledek obojího posunutí je ten, že bod $[0]$ přejde v bod $[B]$, bod $[A]$ přejde v bod $[A + B]$. Nyní komplexnímu číslu A je přiřazen vektor, který v základním umístění má počáteční bod $[0]$ a koncový bod $[A]$. Při posunutí se vektor nemění, nýbrž mění se pouze jeho umístění; tedy týž vektor umístěný tak, aby počátečním bodem byl bod $[B]$, bude míti koncový bod $[A + B]$. Můžeme také položiti

$$A + B = C, \text{ tedy } A = C - B.$$

Potom můžeme říci: **Vektor, který při jednom umístění má počáteční bod $[B]$ a koncový bod $[C]$, má při základním umístění koncový bod $[C - B]$.** Z toho plyne: **Vektor s počátečním bodem B a koncovým bodem C má velikost $|C - B|$.**

Z předcházejícího výkladu je patrné, že **sčítání komplexních čísel je geometricky znázorněno skládáním vektorů,** které znáte z fysiky. Jsou-li A, B libovolná dvě komplexní čísla, je každému z nich přiřazen vektor. Prvý vektor má v základním umístění počáteční bod $[0]$ a koncový bod $[A]$; druhý umístíme tak, aby počátečním bodem byl koncový bod předcházejícího, t. j. bod $[A]$; koncovým bodem bude podle předcházejícího výkladu bod $[A + B]$. Jako výsledek skládání dostaneme vektor s počátečním bodem $[0]$ a s koncovým bodem $[A + B]$. Můžeme ovšem vyměnit také pořádek obou vektorů (viz obr. 14).



Obr. 14.

Jsou-li $[A]$, $[B]$ dva různé body a je-li $[X]$ střed úsečky $[A]\,[B]$, potom vektor s počátečním bodem $[A]$ a s koncovým bodem $[X]$ je roven vektoru s počátečním bodem $[X]$ a koncovým bodem $[B]$. Podle předcházejícího je tedy

$$X - A = B - X$$

a z toho plyne

$$X = \tfrac{1}{2}(A + B). \tag{1}$$

Vzorec (1) vyjadřuje střed úsečky pomocí komplexních čísel.

S geometrickým významem násobení komplexních čísel se seznámíme až ve článku 3 v kapitole III.

Cvičení.

142. Pomocí vektorů znázorněte: a) $(2 - 3i) + (-1 + 2i)$; b) $(-4 + 2i) + (3 - 2i)$; c) $(2 + 3i) - (2 - i)$; d) $(3 - 2i) - (-2 - i)$.

143. a) Je dán vektor v základní poloze přiřazený číslu $A = 2 + 3i$. Který je koncový bod tohoto vektoru při takovém umístění, při němž je jeho počátečním bodem bod $[B]$ zobrazující číslo $B = 3 - i$? b) Je dán vektor v základní poloze přiřazený číslu $B = 3 - i$. Který je koncový bod tohoto vektoru při takovém umístění, při němž je jeho počátečním bodem bod $[A]$ zobrazující číslo $A = 2 + 3i$? Proveďte náčrtek.

144. a) Je dán vektor v základní poloze přiřazený číslu $A = 2 + 3i$. Který je počáteční bod tohoto vektoru při takovém umístění, při němž je jeho koncovým bodem bod $[B]$ zobrazující číslo $B = 3 - i$? b) Je dán vektor v základní poloze přiřazený číslu $B = 3 - i$. Který je počáteční bod tohoto vektoru při takovém umístění, při němž je jeho koncovým bodem bod $[A]$ zobrazující číslo $A = 2 + 3i$? Proveďte náčrtek.

145. Body $[0]$, $[A]$, $[B]$, které neleží v jedné přímce, jsou obrazy komplexních čísel 0, A, B a tvoří tři vrcholy rovnoběžníka. Obrazem kterého čísla je čtvrtý vrchol toho rovnoběžníka? (Trojí řešení.)

146. Sčítáním vektorů dokažte, že a) $|A + B| \leqq |A| + |B|$; b) $|A - B| \geqq \geqq ||A| - |B||$.

147. Je-li číslu A přiřazen určitý vektor v základní poloze, jaký vektor je přiřazen číslu a) $-A$; b) $\overline{A}$; c) $-\overline{A}$? Odtud odůvodněte, že $A + \overline{A}$ je reálné, $A - \overline{A}$ ryze imaginární nebo nula.

148. Nalezněte střed úsečky $[A]\,[B]$, je-li a) $A = 6 - 3i$, $B = -1 - 2i$; b) $A = 3 + 2i$; $B = 5 - 2i$; c) $A = 2 - 5i$, $B = -2 + 5i$.

149. Komplexní čísla A, B $(A \neq B)$ jsou zobrazena body $[A]$, $[B]$. Která komplexní čísla zobrazují body $[C]$, $[D]$, $]E]$ ležící na polopřímce $[A]\,[B]$, jejímž krajním bodem je bod $[A]$, a mající tu vlastnost, že $[A]\,[B] = [B]\,[C] = [C]\,[D] = [D]\,[E]$?

150. Body $[0]$, $[A]$, $[A + B]$, $[B]$ jsou obrazy komplexních čísel 0, A, $A + B$, B a tvoří vrcholy rovnoběžníka. Stanovte středy úseček omezených vždy dvěma nesousedními vrcholy toho rovnoběžníka. Kterou větu lze vyčísti z výsledku?

151. Podobně body $[0]$, $[A]$, $[A + B]$, $[A + B + C]$, $[B + C]$, $[C]$ jsou obrazy komplexních čísel 0, A, $A + B$, $A + B + C$, $B + C$, C a tvoří vrcholy šestiúhelníka, jehož každé dvě protější strany jsou spolu rovnoběžné. Stanovte středy úseček omezených vždy dvěma protilehlými vrcholy, jakož i středy úseček omezených vždy středy dvou protějších stran. Výsledek vyslovte geometricky.

152. Jsou dána čtyři navzájem různá komplexní čísla A, B, C, D, která se zobrazují body $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$. Tyto body lze (celkem třemi způsoby) rozděliti ve dvě dvojice, čímž dostáváme celkem tři dvojice úseček. Úsečky každé dvojice nazveme protějšími. Dokažte, že úsečky omezené středy protějších úseček se navzájem půlí.

153. Jsou dána dvě komplexní čísla A, B ($A \neq B$), jež jsou zobrazena body $[A]$, $[B]$. Nalezněte číslo C, jehož obraz $[C]$ a) leží na úsečce $[A][B]$ a dělí ji v poměru $[A][C] : [B][C] = k : h$; b) leží na prodloužené úsečce $[A][B]$ tak, že $[A][C] : [B][C] = k : h$, při čemž $k \neq h$.

154. Jsou dána tři komplexní čísla A, B, C, jejichž obrazy tvoří trojúhelník $[A][B][C]$. Nalezněte bod, který leží na úsečce spojující kterýkoli vrchol toho trojúhelníka se středem protější strany a dělí tuto úsečku v poměru 2 : 1 (větší část při vrcholu). Která věta je tím dokázána?

III. Goniometrie.

1. Vyjádření otáčení kolem počátku pomocí komplexních čísel.

Poznali jste, že školská matematika se dělí ve dva velké celky: v aritmetiku, ve které studujeme vlastnosti čísel, a v geometrii, ve které studujeme vlastnosti prostoru. Mezi oběma těmito celky se příležitostně objevily jisté souvislosti: na př. v aritmetice bylo při nauce o relativních číslech velmi užitečné geometrické znázornění, v geometrii pak při nauce o obsazích a objemech měly výpočty důležitou roli. Přesto se však vcelku při vyučování jevily aritmetika a geometrie v podstatě jako dvě různé nauky. To neodpovídá současnému stavu matematické vědy, ve které dnes aritmetika s geometrií tvoří jediný souvislý celek. Nauka o komplexních číslech, s níž jste se právě seznámili, poskytuje výbornou příležitost k poznání, že vztahy mezi aritmetikou a geometrií jsou mnohem hlubší, než jste si dosud mohli uvědomit.

Komplexní číslo S, jehož absolutní hodnota je rovna jedné, t. j.

$$|S| = 1, \tag{1}$$

nazýváme **komplexní jednotkou.** Mezi komplexními jednotkami jsou dvě reálné, a to $S = 1$, $S = -1$; všecky ostatní komplexní jednotky jsou imaginární a je jich nekonečně mnoho. Při našem obvyklém geometrickém znázornění odpovídá komplexní jednotce S bod $[S]$, jehož vzdálenost od počátku O je rovna jednotce délky; všecky tyto body vyplní kružnici se středem v počátku a s poloměrem rovným jedné, která se nazývá **jednotková kružnice.**

Nyní nás budou zajímati shodnosti, při kterých počátek O je samodružným bodem. Taková shodnost je jednoznačně určena, známe-li obraz ještě jednoho bodu různého od počátku, na př. bodu $[1]$ a víme-li, zda jde o shodnost přímou či nepřímou. Protože se vzdálenosti při shodnosti nemění, musí obraz $[S]$ bodu $[1]$ ležet na jednotkové kružnici, t. j. S musí býti komplexní jednotka. Je-li $S = 1$, je bod $[1]$ samodružný; přímá shodnost je v tomto případě identita a nepřímá shodnost je osová souměrnost s osou souměrnosti v reálné ose. Jestliže $S \neq 1$, je nepřímá shodnost zase osová souměrnost s osou souměrnosti v ose úsečky $[1][S]$; neboť tato osová souměrnost, jak je nám známo, je nepřímá shodnost a je lehko patrné, že bod $[0]$ je samodružný a že obrazem bodu $[1]$ je bod $[S]$. Přímá shodnost je otáčení kolem počátku o úhel, jehož rameny jsou polopřímky $[0][1]$, $[0][S]$. V dalším nás bude zajímati pouze otáčení. Dokážeme, že obraz $[X']$ libovolného bodu $[X]$ je dán jednoduchým vzorcem

$$X' = SX. \tag{2}$$

Nejprve dokážeme, že vzorec (2) definuje shodnost. Za tím účelem zvolme dva libovolné body $[X_1]$, $[X_2]$; jejich obrazy jsou $[X'_1]$, $[X'_2]$, kde

$$X'_1 = SX_1, \; X'_2 = SX_2. \tag{3}$$

Vzdálenost bodů $[X_1]$, $[X_2]$ je podle článku 5 v kapitole II rovna $|X_2 - X_1|$; podobně vzdálenost obrazů je rovna $|X'_2 - X'_1|$, t. j. podle (3) je rovna $|S(X_2 - X_1)|$. Víme však z článku 3 v kapitole II, že

$$|S(X_2 - X_1)| = |S| \cdot |X_2 - X_1|;$$

podle (1) je tudíž $|X'_2 - X'_1| = |X_2 - X_1|$. Tím jsme dokázali, že při zobrazení definovaném vzorcem (2) velikosti úseček se nemění; z toho však plyne, že se nemění ani velikosti úhlů; neboť je-li dán $\sphericalangle [X_1][X_2][X_3]$, jsou trojúhelníky $\triangle [X_1][X_2][X_3]$, $\triangle [X'_1][X'_2][X'_3]$ shodné podle *sss* a z toho plyne, že

$$\sphericalangle [X'_1][X'_2][X'_3] = \sphericalangle [X_1][X_2][X_3].$$

Tedy zobrazení definované vzorcem (2) je shodnost. Je zřejmé, že obrazem bodu $[1]$ je bod $[S]$ a že bod $[0]$ je samodružný; dokonce je $[0]$ jediný samodružný bod, a proto naše shodnost nemůže býti nepřímá, neboť pak by to byla osová souměrnost, která má více než jeden samodružný bod. Tedy vzorec (2) vyjadřuje pomocí komplexních čísel otáčení kolem počátku, při kterém obrazem bodu $[1]$ je bod $[S]$; přitom je S libovolná komplexní jednotka; pro $S = 1$ znamená (2) identitu.

Cvičení.

155. Dokažte, že čísla a) i, b) $-$i, c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$, d) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$ jsou komplexní jednotky.

156. Znamená-li násobení komplexní jednotkou S otáčení kolem počátku o úhel α, znamená násobení sdruženou jednotkou $\bar{S}$ otáčení kolem počátku o týž úhel α v opačném smyslu. Dokažte.

157. Napište komplexní jednotky, které mají tu vlastnost, že násobení těmito jednotkami znamená otáčení kolem počátku o úhel a) $45°$, b) $30°$, c) $60°$ v kladném nebo záporném smyslu.

158. Body [0] a [A], kde $A = a_1 + a_2\mathrm{i}$, jsou dva vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Stanovte jeho třetí vrchol. (Dvojí řešení.)

159. Je-li [A] obraz čísla $A = a_1 + a_2\mathrm{i} \neq 0$, jaký útvar tvoří obrazy čísel A, $A\mathrm{i}$, $A\mathrm{i}^2$, $A\mathrm{i}^3$?

160. Jaké otáčení je určeno násobením komplexní jednotkou -1?

161. Násobiti komplexní jednotkou S značí provésti otáčení kolem počátku o jakýsi úhel α. Jsou-li dána dvě komplexní čísla A, B ($A \neq B$), jak dostaneme číslo, jehož obrazem je bod, který vznikne otáčením a) bodu [B] o úhel α kolem bodu [A]; b) bodu [A] o úhel α kolem bodu [B]?

162. Jsou dány body [A], [B] jako obrazy komplexních čísel A, B ($A \neq B$). Která komplexní čísla zobrazují další dva vrcholy čtverce, jehož dva vrcholy jsou v bodech [A], [B]? (Celkem trojí řešení.)

163. Je-li $S = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})\sqrt{2}$ a $A = a_1 + a_2\mathrm{i} \neq 0$, jakou vlastnost mají body [A], [AS], [AS^2], [AS^3], ..., [AS^7]? Kde leží bod [AS^8]?

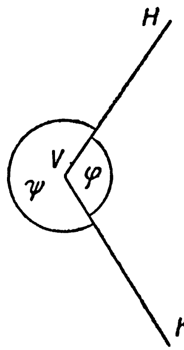
164. Je-li S komplexní jednotka, jakou vlastnost mají obrazy čísel 1, S, S^2, S^3, ..., S^n? Co značí podmínka $S^n = 1$?

2. Pojem úhlu.

Nadále bude důležité všímati si u úhlů soustavně také jejich **smyslu,** kterého jsme si dosud všímali pouze příležitostně. Budeme rozeznávati **počáteční rameno** a **koncové rameno** úhlu; úhel vznikne otáčením polopřímky kolem vrcholu tak, že první poloha pohyblivé polopřímky je počáteční rameno, poslední poloha je koncové rameno. Jestliže se toto otáčení děje v kladném smyslu (proti pohybu hodinových ručiček), máme **úhel kladný;** jestliže se otáčení děje v záporném smyslu, máme **úhel záporný.** Velikost úhlu budeme vyjadřovati relativními čísly (kladnými pro kladné úhly, zápornými pro záporné úhly); přitom budeme užívat obloukové míry, jako již v 1. třídě v geometrii; tedy na př. velikost pravého úhlu bude $+\frac{1}{2}\pi$ v případě kladného smyslu, $-\frac{1}{2}\pi$ v případě záporného smyslu. Vyměníme-li počáteční a koncové rameno úhlu, změní se jeho smysl a tedy se změní znamení čísla, které vyjadřuje velikost úhlu.

Bude nás zajímat především velikost úhlu, nikoli jeho poloha. Chceme-li míti úhel dané velikosti v určité poloze, zvolíme libovolně polohu počátečního ramene; poloha koncového ramene je pak jednoznačně určena, známe-li velikost úhlu vyjádřenou relativním číslem, t. j. známe-li nejen velikost úhlu vyjádřenou kladným číslem, nýbrž také smysl úhlu. V obr. 15 je dutý úhel $\varphi = \sphericalangle HVK$ rovný $120°$; je-li VK počáteční rameno, je smysl úhlu kladný a podle učiněné dohody je $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; je-li však VH počáteční rameno, je smysl úhlu záporný a máme $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$. V obojím případě šlo o dutý úhel. Je-li ψ vypuklý úhel s týmiž rameny, je $\psi = -\frac{4}{3}\pi$ v případě, že VK je počáteční rameno, $\psi = \frac{4}{3}\pi$ v případě, že počáteční rameno je VH. V každém případě je velikost dutého úhlu vyjádřena číslem φ, jehož absolutní hodnota je menší než π a které může býti kladné nebo záporné podle toho, jaký je smysl úhlu; velikost vypuklého úhlu je vyjádřena číslem ψ, jehož absolutní hodnota je větší než π, ale menší než 2π a které zase může býti kladné nebo záporné; velikost přímého úhlu je vyjádřena číslem π nebo číslem $-\pi$ podle toho, jaký je smysl úhlu. Jestliže dutý úhel φ a vypuklý úhel ψ mají táž ramena, je $|\varphi| + |\psi| = 2\pi$; je-li počáteční rameno totéž pro oba úhly, je jeden z nich kladný a druhý záporný a máme

$$\psi = \varphi - 2\pi \text{ v případě } \varphi > 0,$$
$$\psi = \varphi + 2\pi \text{ v případě } \varphi < 0.$$



Obr. 15.

Dosud jsme mluvili o dutých, přímých a vypuklých úhlech, při čemž jsme přihlíželi také ke smyslu úhlu; velikost úhlu byla vyjádřena číslem kladným nebo záporným s absolutní hodnotou menší než 2π. Kdybychom se drželi tohoto omezení i nadále, pak by reálné číslo φ mohlo vyjadřovati velikost úhlu pouze v tom případě, že je různé od nuly a že jeho absolutní hodnota je menší než 2π; to jest aritmeticky velmi nepohodlné, protože na př. sčítání úhlů a násobení úhlu číslem je potom možné pouze za nepohodlných podmínek.

Z názoru je však patrné, že se pojem úhlu dá zobecnit tak, že velikost úhlu bude vyjádřena zcela libovolným reálným číslem. Na př. úhel velikosti $\frac{8}{3}\pi$ vznikne, jestliže osmkrát za sebou otočíme o úhel $\frac{1}{3}\pi$ v kladném smyslu. Jestliže počáteční rameno je opět VK (obr. 15), bude koncové rameno VH totéž, jako při velikosti $\frac{2}{3}\pi$; jediný rozdíl je v tom, že se polopřímka, která má vytvořit úhel velikosti $\frac{8}{3}\pi$, napřed ve svazku polopřímek s počátkem V otočí kolem dokola v kladném smyslu, při čemž se vrátí do počáteční polohy VK (otočení o úhel 2π), a potom se ještě dále otočí v kladném smyslu o dutý úhel $\frac{2}{3}\pi$.

Jestliže záleží na tom, jakými polohami postupně projde otáčející se polopřímka, vytvářejíc úhel s počátečním ramenem VK a s koncovým ramenem VH, je velikost úhlu vyjádřena zcela určitým reálným číslem α. Zpravidla však na postupných polohách otáčející se polopřímky nezáleží a **záleží** tedy **pouze na poloze počátečního ramene** VK **a koncového ramene** VH. Této dohody se budeme nadále držet. Číslo vyjadřující velikost úhlu není potom jednoznačně stanoveno; je-li α jedna z jeho možných hodnot, jsou všecky možné hodnoty shrnuty vzorcem

$$\alpha + 2k\pi,$$

ve kterém k probíhá všecka čísla celá (kladná, záporná i nulu). Na př. velikost úhlu s počátečním ramenem VK a koncovým ramenem VH v obr. 15 je vyjádřena kterýmkoli z čísel

$$\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \frac{20\pi}{3}, \ldots,$$

$$-\frac{4\pi}{3}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{16\pi}{3}, -\frac{22\pi}{3}, \ldots.$$

Přitom nevylučujeme ten případ, že počáteční a koncové rameno splynou; v tomto případě mluvíme o **nulovém úhlu**; jeho velikost je tvaru $2k\pi$ (k celé), t. j. je dána kterýmkoli z čísel

$$0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \ldots,$$

$$-2\pi, -4\pi, -6\pi, -8\pi, \ldots.$$

Vyložený pojem úhlu se poněkud liší od pojmu úhlu známého z elementární geometrie; je velmi důležitý mimo jiné pro studium goniometrických funkcí, které bude provedeno v následujících článcích. **Sčítání úhlů** se pro úhly ve smyslu zde vyloženém dá definovati takto: Počáteční rameno VK_1 prvního sčítance zvolíme v libovolné poloze; je-li dána velikost α prvního sčítance, je potom jednoznačně určena poloha VK_2 jeho koncového ramene; touž polopřímku VK_2 zvolíme za počáteční rameno druhého sčítance a z velikosti β tohoto sčítance určíme jeho koncové rameno VK_3. Součet obou daných úhlů má počáteční rameno VK_1 a koncové rameno VK_3. Jeho velikost γ je dána vzorcem

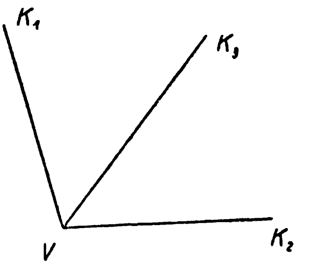
$$\gamma = \alpha + \beta,$$

jehož přesný smysl je ten, že je-li α kterékoli z čísel vyjadřujících velikost prvního sčítance a je-li β kterékoli z čísel vyjadřujících velikost druhého sčítance, je $\alpha + \beta$ jedno z čísel vyjadřujících velikost součtu. V obr. 16 může býti na př.

$$\alpha = -\tfrac{2}{3}\pi,\ \beta = \tfrac{1}{4}\pi,\ \gamma = -\tfrac{5}{12}\pi$$

nebo také na př.

$$\alpha = \tfrac{4}{3}\pi,\ \beta = \tfrac{1}{4}\pi,\ \gamma = \tfrac{19}{12}\pi.$$



Obr. 16.

Podobně jako pro dva úhly můžeme definovat součet libovolného počtu úhlů; součet n úhlů vesměs rovných α je **n-násobek úhlu** α; jedno z čísel vyjadřujících velikost n-násobku úhlu α je číslo $n\alpha$; ale také každé číslo tvaru $n\alpha + 2k\pi$ (k celé) vyjadřuje velikost téhož n-násobku. Na př. pro $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ velikost desetinásobku úhlu α můžeme vyjádřit číslem $\frac{4}{3}\pi$ a sedminásobek úhlu α je roven úhlu α.

Cvičení.

165. Jestliže považujeme za stejné dva úhly, které se liší o násobek úhlu 2π, můžeme velikost každého úhlu vyjádřiti vhodným číslem, jež má tu vlastnost, že $0 \leqq \alpha < 2\pi$. Dokažte.

166. Velikosti následujících úhlů vyjádřete číslem α tak, aby $0 \leqq \alpha < 2\pi$; a) 9π; b) 12π; c) $-\pi$; d) -6π; e) $\frac{9}{2}\pi$; f) $\frac{10}{3}\pi$; g) $\frac{23}{4}\pi$; h) $-\frac{1}{6}\pi$; i) $-\frac{13}{5}\pi$; j) $-\frac{21}{8}\pi$.

167. Číslem α, které má tu vlastnost, že $0 \leqq \alpha < 2\pi$, vyjádřete následující úhly: a) $\frac{1}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi$; b) $\frac{7}{4}\pi + \pi$; c) $\frac{4}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi$; d) $\frac{3}{2}\pi + \frac{5}{3}\pi$; e) $-\frac{7}{4}\pi + \frac{7}{6}\pi + \frac{7}{12}\pi$; f) $\frac{1}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi$; g) $\frac{4}{5}\pi - \pi$; h) $\frac{2}{3}\pi - \frac{3}{2}\pi$; i) $-\frac{11}{8}\pi - \frac{11}{6}\pi$; j) $-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi$.

168. Podobně jako v předcházejícím cvičení vyjádřete: a) $\frac{3}{2}\pi \cdot 3$; b) $\frac{5}{6}\pi \cdot 6$; c) $\frac{3}{10}\pi \cdot 15$; d) $-\frac{5}{6}\pi \cdot 8$; e) $\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{7}{2}$; f) $\frac{9}{10}\pi \cdot 3\frac{1}{3}$; g) $-\frac{4}{15}\pi \cdot \frac{5}{6}$; h) $-\frac{1}{7}\pi \cdot 1\frac{5}{4}$.

169. Považujete-li za stejné dva úhly, které se liší o násobek úhlu 2π, nalezněte všecka x, která mají tu vlastnost, že $0 \leqq x < 2\pi$, a vyhovují rovnicím: a) $2x = \pi$; b) $2x = \frac{3}{4}\pi$; c) $3x = 0$; d) $3x = \frac{4}{3}\pi$; e) $5x = \frac{5}{3}\pi$; f) $4x = \frac{3}{4}\pi$; g) $10x = 0$; h) $2x + \pi = 0$; i) $3x + \frac{4}{3}\pi = 0$; j) $6x + \frac{3}{4}\pi = 0$.

170. Je-li n přirozené číslo a značí-li x úhel, má rovnice $nx = c$, kde c je daný úhel, právě n takových řešení x, pro něž $0 \leqq x < 2\pi$. Dokažte a udejte všechna tato řešení.

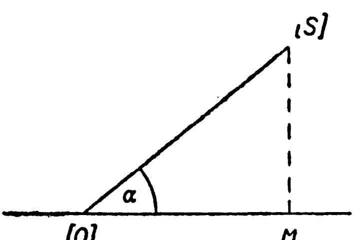
171. Za týchž podmínek jako v předcházejících cvičeních řešte soustavy rovnic: a) $x + y = \pi,\ x - y = 0$; b) $2x + y = \frac{4}{3}\pi,\ 3x - y = \frac{2}{3}\pi$; c) $3x + 2y = \pi,\ 2x + 3y = \pi$.

172. Kolik je hodin, svírají-li ručičky na hodinách daný úhel ω (stupňů)? ($0 \leqq \omega \leqq 180°$.)

3. Kosinus a sinus.

Nyní nám nebude záležeti na poloze úhlu, nýbrž pouze na jeho velikosti. Nazveme **základní polohou úhlu** tu polohu, ve které počátečním ramenem je polopřímka [0] [1]; koncovým ramenem úhlu v základní poloze je polopřímka s počátkem [0], která protne jednotkovou kružnici v bodě $[S]$, kde číslo S je komplexní jednotka jednoznačně určená velikostí úhlu a jednoznačně určující tuto velikost. Komplexní jednotku S nazveme **komplexní měrou** úhlu. Nezapomínejme, že výraz velikost úhlu zahrnuje v sobě také smysl úhlu. Změníme-li smysl úhlu, potom nový úhel v základní poloze bude souměrný obraz původního úhlu podle reálné osy, takže jeho komplexní měrou bude číslo $\bar{S}$ sdružené s číslem S. Ježto $|S|=1$, jest $S\bar{S}=1$ (viz článek 3 v kapitole II). Tedy: **Je-li S komplexní míra úhlu α, je $\bar{S}$ neboli $\frac{1}{S}$ komplexní míra úhlu** — α. Zřejmě:

$$\begin{aligned} &\text{pro } \alpha = 0 \text{ je } S = 1, && \text{pro } \alpha = \pi \text{ je } S = -1, \\ &\text{pro } \alpha = \tfrac{1}{2}\pi \text{ je } S = \mathrm{i}, && \text{pro } \alpha = -\tfrac{1}{2}\pi \text{ je } S = -\mathrm{i}. \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 17.

Budiž nyní α kladné a menší než $\frac{1}{2}\pi$, takže α je ostrý úhel, jehož počáteční rameno jde vodorovně vpravo a koncové rameno jde šikmo vpravo vzhůru. Je-li M pata kolmice spuštěné s bodu $[S]$ na reálnou osu, vznikne $\triangle[0]M[S]$ s pravým úhlem při vrcholu M. Velikost $[0][S]$ je rovna jedné, a proto podle známé definice goniometrických funkcí ostrého úhlu je $[0]M = \cos\alpha$, $M[S] = \sin\alpha$ (obr. 17).

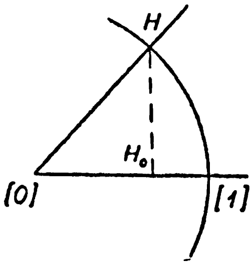
Z toho plyne*)

$$S = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha. \tag{2}$$

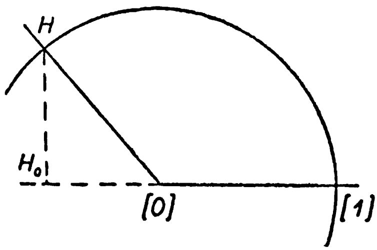
Pro libovolný úhel α definujeme funkce $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ **vzorcem** (2), **ve kterém S znamená komplexní míru úhlu α.** Z této aritmetické definice funkcí kosinus a sinus odvodíme jejich základní vlastnosti rychleji a pohodlněji, než je to možné kterýmkoli jiným způsobem. Napřed si však vyslovíme naši definici ryze geometricky: Úhel α umístíme v základ-

*) Píšeme raději $\mathrm{i}\sin\alpha$ místo $\sin\alpha\,\mathrm{i}$, aby nevznikla pochybnost o tom, že by snad $\sin\alpha\,\mathrm{i}$ znamenalo sinus součinu čísel α, i.

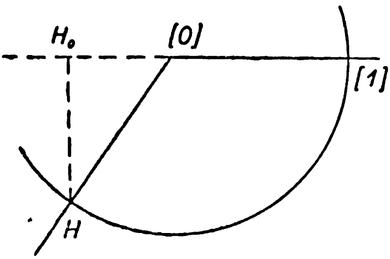
ní poloze. Budiž H průsečík jednotkové kružnice s koncovým ramenem a budiž H_0 pata kolmice spuštěné s bodu H na počáteční rameno. Potom je $\cos\alpha = \pm [0]H_0$ se znamením plus (obr. 18 a 21), padne-li H_0 do počátečního ramene, se znamením minus (obr. 19 a 20), padne-li H_0 na polopřímku opačnou. Dále je $\sin\alpha = \pm H_0H$ se znamením plus (obr. 18 a 19), leží-li H nad počátečním ramenem, se znamením minus (obr. 20 a 21), leží-li H pod počátečním ramenem.



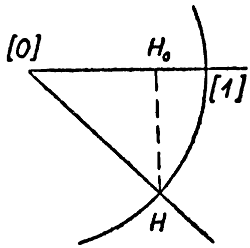
Obr. 18.



Obr. 19.



Obr. 20.



Obr. 21.

Protože změna α o násobek čísla 2π nemá vlivu na umístění ramen, jest

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha, \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \tag{3}$$

a obecněji

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \tag{3'}$$

pro každé celé k. Říkáme, že funkce kosinus a sinus mají **periodu** 2π. Z (1) a (2) plyne

$$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0;\ \cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0;$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1;\ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1. \tag{4}$$

Podle (2) jest

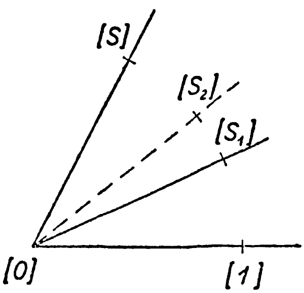
$$\overline{S} = \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha. \tag{5}$$

Poněvadž S je komplexní míra úhlu $-\alpha$, plyne z (5):

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \tag{6}$$

slovy: změna znamení při α nemá vlivu na $\cos\alpha$, ale způsobí změnu znamení při $\sin\alpha$. Jelikož S je komplexní jednotka, je $S\overline{S} = 1$, takže ze (2) a (5) plyne důležitá identita:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{7}$$



Obr. 22.

Odtud dostáváme

$$\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = |\cos\alpha|,$$
$$\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = |\sin\alpha|$$

Nejdůležitější vlastnost funkcí kosinus a sinus plyne ze článku 1. Buďtež dány dva úhly α, β. Budiž S_1 komplexní míra úhlu α, S_2 komplexní míra úhlu β, S komplexní míra úhlu $\alpha + \beta$; takže

$$S_1 = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha,\quad S_2 = \cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta,$$
$$S = \cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha + \beta). \tag{8}$$

Úhel α v základní poloze má počáteční rameno [0] [1], koncové rameno [0] [S_1] (obr. 22). Úhel β v základní poloze má počáteční rameno [0] [1], koncové rameno [0] [S_2]. Abychom dostali úhel $\alpha + \beta$ v základní poloze, musíme polohu úhlu β otočením kolem počátku změnit tak, aby bod [1] přešel v bod [S_1]. Při tomto otočení přejde však podle článku 1 libovolný bod [X] v bod [X'], kde $X' = S_1X$. Zejména tedy přejde bod [S_2] v bod [S_1S_2], a to znamená, že úhel $\alpha + \beta$ v základní poloze má druhé rameno v polopřímce [0] [S_1S_2] neboli že polopřímky [0] [S_1S_2], [0] [S] splynou. Avšak protože $|S_1| = 1$, $|S_2| = 1$, je také $|S_1S_2| = 1$ podle článku 3 v kapitole II, a mimo to je ovšem též $|S| = 1$. Proto splynou i body [S], [S_1S_2] a to znamená, že $S = S_1S_2$. Výsledek, ke kterému jsme dospěli, jmenuje se **Moivreova věta.** Podle (8) je Moivreova věta vyjádřena vzorcem:

$$\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \tag{9}$$

Stejně se dá odvodit obecnější vzorec, který praví, že komplexní jednotka

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

je součin komplexních jednotek

$$\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1,\ \cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2,\ \dots,\ \cos\alpha_n + i\sin\alpha_n.$$

Nejdůležitější případ obecného vzorce je ten, ve kterém všecky úhly α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ si jsou rovny. Tento případ je vyjádřen vzorcem

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha. \tag{10}$$

Smysl vzorce (9) dá se vyjádřiti takto: Z komplexní jednotky $\cos\alpha + i\sin\alpha$ vznikne komplexní jednotka $\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$ znásobením komplexní měrou úhlu β. Nejdůležitější zvláštní případy jsou: $\beta = \pi$ (komplexní míra rovná -1), $\beta = \frac{\pi}{2}$ (komplexní míra rovná i). Tedy zvláštními případy vzorce (9) jsou vzorce

$$\cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi) = -(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = i(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

které po oddělení reálných a imaginárních částí dají

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha, \quad \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha, \tag{11}$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha, \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha. \tag{12}$$

Píšeme-li v těchto vzorcích $-\alpha$ místo α, dostaneme podle (6)

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \tag{13}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \tag{14}$$

Všecky vzorce (11) až (14) plynou velmi snadno přímo z definice funkcí kosinus a sinus (viz obr. 18 až 21).

Z obecného Moivreova vzorce (9) dostaneme oddělením reálných a imaginárních částí

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{15}$$

Jediný vzorec (9) říká přesně totéž, co oba vzorce (15) dohromady; již z toho je velmi dobře patrná výhoda zavedení komplexních čísel v goniometrii.

Je-li $\alpha = \beta$, dají vzorce (15):

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (16)$$

To plyne také ze vzorce (10) pro $n = 2$. Vzorcem (10) pro $n > 2$ se budeme zabývat až v následující třídě.

Je-li A komplexní číslo různé od nuly, můžeme definovati jednoznačně komplexní číslo S pomocí rovnice $A = |A| \cdot S$, ze které plyne, že S je komplexní jednotka, kterou můžeme napsat ve tvaru (2). Položme ještě $|A| = r$. Máme tedy

$$A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha). \qquad (17)$$

Geometricky znamená r vzdálenost bodu od počátku, α je úhel s počátečním ramenem [0] [1] a s koncovým ramenem [0] [A], který se nazývá **amplituda** komplexního čísla A; místo α můžeme ovšem vzíti také $\alpha + 2k\pi$ s libovolným celým k. Je-li také A' komplexní číslo různé od nuly, máme podobně

$$A' = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha'). \qquad (18)$$

Ze (17) a (18) plyne, že

$$AA' = rr'[\cos(\alpha + \alpha') + i\sin(\alpha + \alpha')]. \qquad (19)$$

Ze (17), (18) a (19) snadno vyčteme geometrický význam násobení komplexních čísel. Z (10) a (17) plyne ještě

$$A^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) \qquad (20)$$

pro každé přirozené číslo n.

Cvičení.

173. Určete (bez tabulek) hodnoty sinu a kosinu těchto úhlů: a) 120°; b) 135°; c) 150°; d) 210°; e) 225°; f) 240°; g) 270°; h) 300°; i) 315°; j) 330°.

174. Pro která α platí: a) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; b) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$?

175. Kdy je a) $\sin\alpha > \cos\alpha$; b) $\sin\alpha < \cos\alpha$; c) $\sin\alpha = \cos\alpha$; d) $\sin\alpha > -\cos\alpha$; e) $\sin\alpha < -\cos\alpha$; f) $\sin\alpha = -\cos\alpha$?

176. Určete komplexní míru úhlů: a) 30°; b) 45°; c) 90°; d) 135°; e) 150°; f) 180°; g) 225°; h) 240°; i) 270°; j) 300°.

177. Víte-li, že komplexní míra úhlu 15° je $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} i$, stanovte komplexní míru úhlů: a) 105°; b) 195°; c) 285°; d) 345°; e) 255°; f) 165°; g) 75°.

178. Zjednodušte: a) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$; b) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$; c) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha} + \dfrac{1}{1-\sin\alpha}$; d) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; e) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; f) $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}$. Kdy mají dané výrazy smysl?

179. Dokažte, že a) $\sin^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\beta - \cos^2\alpha$; b) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; c) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Pro která α mají výrazy smysl?

180. Dokažte, že a) $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$; b) $\dfrac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\beta - i\sin\beta} = \cos(\beta-\alpha) + i\sin(\beta-\alpha)$.

181. Dokažte, že a) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$; b) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

182. Dokažte, že a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \alpha)$; b) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ)$; c) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; d) $\cos(30^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$; e) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$; f) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

183. Dokažte, že a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; b) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha$; c) $2\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta = 1 + \cos 2\alpha\cos 2\beta$; d) $-\frac{1}{2} \leq \sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$.

184. Dokažte, že a) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; b) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

185. Dokažte, že a) $|\cos\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$; b) $|\sin\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$.

186. Dokažte, že a) $1 + \sin\alpha = 2\sin^2(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$; b) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$.

187. Dokažte, že a) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; b) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; c) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; d) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

188. Podle cvič. 187 upravte: a) $\sin 50^\circ - \sin 40^\circ$; b) $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ$; c) $\cos 240^\circ - \cos 150^\circ$; d) $\cos 135^\circ + \cos 225^\circ$.

189. Dokažte, že pro $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ platí: a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$; c) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$; d) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$.

190. Které je geometrické místo bodů, jež zobrazují všechna komplexní čísla dané amplitudy?

191. Jsou-li komplexní čísla $A \neq 0$, $B \neq 0$, která nejsou obě reálná, zobrazena body $[A]$, $[B]$, udejte konstrukci bodu, který zobrazuje jejich součin AB. (Užijte vlastností podobných trojúhelníků.)

192. Je-li komplexní číslo $A \neq 0$ zobrazeno bodem $[A]$, udejte konstrukci bodu, který zobrazuje číslo $\frac{1}{A}$.

193. Jakou absolutní hodnotu r a jakou amplitudu α, pro niž platí $0 \leqq \alpha < 360°$, mají čísla: a) 1; b) $-\sqrt{2}$; c) i; d) $-2i$; e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}$; f) $1 - i$; g) $-\sqrt{3} + i$; h) $-2 - \sqrt{3} - i$.

194. Vypočtěte: a) $(1 + i)^{25}$; b) $(\sqrt{3} - i)^{10}$; c) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$.

195. Jakou absolutní hodnotu a jakou amplitudu mají čísla: a) $1 + \cos\alpha + i \sin\alpha$; b) $1 + \sin\alpha - i \cos\alpha$? $(0 \leqq \alpha < 2\pi)$.

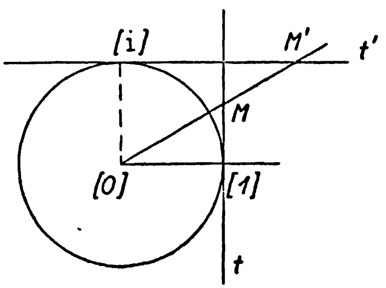
196. Je-li $A = \cos\alpha + i \sin\alpha$, $B = \cos\beta + i \sin\beta$; stanovte absolutní hodnotu a amplitudu čísel a) $A + B$; b) $A - B$ $(0 \leqq \alpha < 2\pi, 0 \leqq \beta < 2\pi)$.

4. Tangens a kotangens.

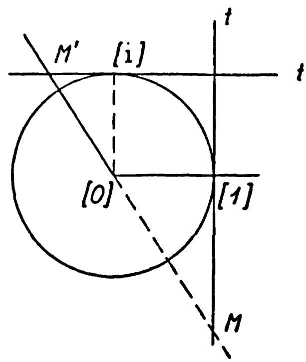
Funkce tangens a kotangens jsou pro obecný úhel definovány pomocí vztahů

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1}$$

které nám jsou známy z první třídy pro ostrý úhel α. Na rozdíl od funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ nejsou funkce $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ definovány pro všecka α, nýbrž pouze



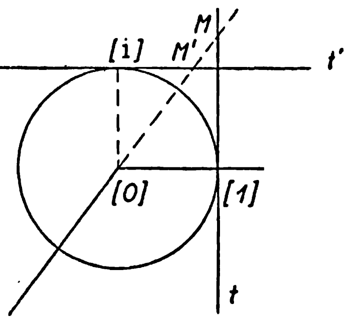
Obr. 23.



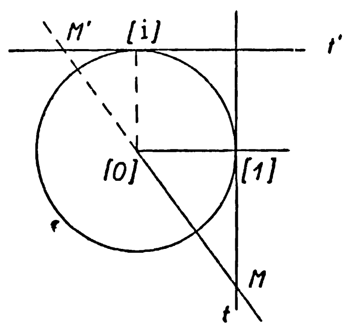
Obr. 24.

pro ta α, pro která ve jmenovateli není nula. Taková α nazveme **přípustná**. Pro $\operatorname{tg}\alpha$ nepřípustné hodnoty jsou $\alpha = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k celé, kladné, záporné nebo nula); pro $\operatorname{cotg}\alpha$ nepřípustné hodnoty jsou $\alpha = k\pi$ (k celé, kladné, záporné nebo nula).

Z geometrické definice funkcí kosinus a sinus (viz obr. 18 až 21) se odvodí pomocí (1) bez nesnází následující geometrické definice funkcí tangens a kotangens: Úhel α umístíme v základní poloze. Budiž t tečna jednotkové kružnice v bodě [1], t' tečna jednotkové kružnice v bodě [i]. Přímka obsahující koncové rameno úhlu α protne tečnu t v bodě M, tečnu t' v bodě M'. Potom je $\text{tg}\alpha = \pm [1]M$ se znamením plus (obr. 23 a 25), leží-li bod M nad bodem [1], se znamením minus (obr. 24 a 26), leží-li bod M pod bodem [1]. Dále je $\text{cotg}\alpha = \pm [i]M'$ se znamením plus (obr. 23 a 25), leží-li bod M' napravo od bodu [i], se znamením minus (obr. 24 a 26), leží-li bod M' nalevo od bodu [i].



Obr. 25.



Obr. 26.

Vlastnosti funkcí $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$ plynou přímo z odvozených již vlastností funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Nejdůležitější z těchto vlastností jsou shrnuty v následujícím výčtu vzorců. U každého z nich je třeba udati, které jsou přípustné hodnoty úhlů; to není uvedeno v textu učebnice, nýbrž je to cvičením. Rovněž odvození vzorců ze vzorců předcházejícího článku je snadným cvičením a není proto v textu uvedeno:

Vzorce:

$$\text{tg}\alpha \cdot \text{cotg}\alpha = 1. \tag{2}$$

$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha, \qquad \text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\alpha. \tag{3}$$

$$\text{tg}(\alpha + \pi) = \text{tg}\alpha, \qquad \text{cotg}(\alpha + \pi) = \text{cotg}\alpha. \tag{4}$$

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\alpha, \qquad \text{cotg}(\pi - \alpha) = -\text{cotg}\alpha. \tag{5}$$

$$\text{tg}(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) = -\text{cotg}\alpha, \qquad \text{cotg}(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi) = -\text{tg}\alpha. \tag{6}$$

$$\text{tg}(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \text{cotg}\alpha, \qquad \text{cotg}(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \text{tg}\alpha. \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - 1}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}. \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}2 = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \operatorname{cotg}2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}. \tag{9}$$

Cvičení.

V následujících cvičeních udejte sami, které hodnoty úhlů jsou přípustné.

197. Určete (bez tabulek) tangens a kotangens těchto úhlů: a) 120°; b) 135°; c) 150°; d) 210°; e) 225°; f) 240°; g) 270°; h) 300°; i) 315°; j) 330°.

198. Pro která α platí a) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$; b) $|\operatorname{cotg}\alpha| = \operatorname{cotg}\alpha$?

199. Kdy je a) $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{cotg}\alpha$; b) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{cotg}\alpha$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha$; d) $\operatorname{tg}\alpha > -\operatorname{cotg}\alpha$; e) $\operatorname{tg}\alpha < -\operatorname{cotg}\alpha$; f) $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{cotg}\alpha$?

200. Dokažte, že funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou π.

201. Upravte: a) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$; b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{cotg}\alpha + 1}$; d) $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$; e) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$; f) $\dfrac{\sin\alpha - \sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha}$.

202. Dokažte, že a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$; b) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$; c) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha$; d) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\operatorname{cotg}\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$.

203. Dokažte, že $|\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha| \geq 2$. Může platit rovnost?

204. Vypočtěte: a) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$; b) $\dfrac{1+i\operatorname{cotg}\alpha}{1-i\operatorname{cotg}\alpha}$; c) $\dfrac{1-i\operatorname{tg}\alpha}{1+i\operatorname{cotg}\alpha}$.

205. Dokažte, že a) $\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \alpha)\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \alpha) = 1$; b) $\operatorname{cotg}(\frac{1}{6}\pi + \alpha)\cdot\operatorname{cotg}(\frac{1}{3}\pi - \alpha) = 1$; c) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \frac{1}{4}\pi)$; d) $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha + 1}{\operatorname{cotg}\alpha - 1} = \operatorname{cotg}(\frac{1}{4}\pi - \alpha)$.

206. Dokažte, že a) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; b) $\operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \dfrac{1+\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha}$.

207. Dokažte, že $\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}3\alpha \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

208. Dokažte, že a) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; b) $|\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; c) $|\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

209. Dokažte, že a) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha} = \cos\alpha$; b) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha} = \sin\alpha$.

210. Dokažte, že a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$; b) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$.

211. Dokažte, že pro $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ platí: a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$; b) $\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\gamma + \operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} 2\gamma$; c) $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma$.

5. Goniometrické rovnice.

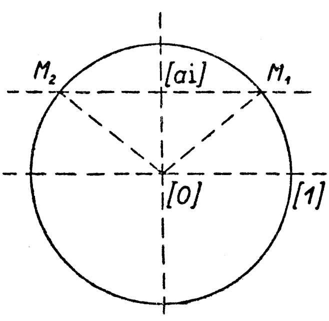
Takto se nazývají rovnice, ve kterých se vyskytují goniometrické funkce neznámého úhlu. Nejjednodušší jsou ty goniometrické rovnice, ve kterých je přímo dána hodnota některé goniometrické funkce neznámého úhlu α a má se určit velikost úhlu α. Jestliže daná hodnota goniometrické funkce je kladná, můžeme, jak jsme to probírali loni v geometrii, určit z tabulek přibližnou hodnotu toho řešení α, které vyhovuje nerovnostem

$$0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi \text{ (to znamená: } 0 < \alpha \text{ a mimo to } \alpha < \tfrac{1}{2}\pi).$$

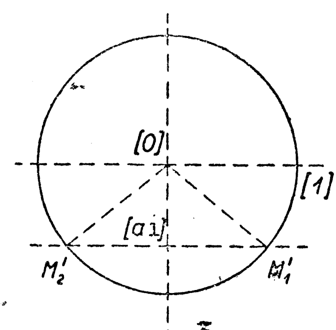
Řešení jsme udávali ve stupních; znamená-li α° velikost úhlu ve stupních, α velikost téhož úhlu v obloukové míře, jest, jak známo

$$\alpha = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180}.$$

Stupně na obloukovou míru lze převáděti rychle pomocí tabulky převodu, které lze užíti také k obrácenému převodu obloukové míry na stupně.



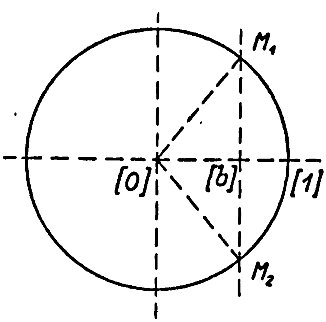
Obr. 27.



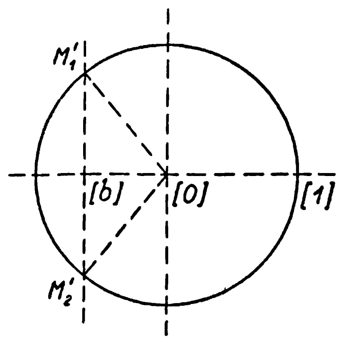
Obr. 28.

Goniometrické rovnice uvedeného tvaru můžeme řešit graficky na základě geometrické definice goniometrických funkcí, naznačené v obr. 18 až 21 a 23 až 26. Hledaný úhel α si myslíme v základní poloze, takže počátečním ramenem je polopřímka [0] [1]; koncové rameno protne jednotkovou kružnici v bodě M, jehož poloha se dá určit z dané rovnice jednoduchou konstrukcí, kterou ve všech případech nyní popíšeme. Poznamenejme, že po každé vyjdou dvě polohy M_1, M_2 bodu M, jimž odpovídají dvě hodnoty α_1, α_2 hledaného úhlu α. Místo čísel α_1, α_2 můžeme, jak známo, za míru úhlu vzíti také čísla $\alpha_1 + 2k\pi$, $\alpha_2 + 2k\pi$ (s libovolným celým k), ve stupních $\alpha_1{}^\circ + k \cdot 360^\circ$, $\alpha_2{}^\circ + k \cdot 360^\circ$.

I. $\sin\alpha = a$ (obr. 27 pro kladné a, obr. 28 pro záporné a). Na imaginární ose si určíme bod $[ai]$; je-li $|a| < 1$, padne tento bod dovnitř jednotkové kružnice. Rovnoběžka s reálnou osou protne jednotkovou kružnici ve dvou bodech (M_1, M_2 v obr. 27, M_1', M'_2 v obr. 28), jež určují žádané úhly. Tyto úhly označíme α_1, α_2 pro kladné a, α'_1, α'_2 pro záporné a. Body



Obr. 29.



Obr. 30.

M_1, M_2 a tudíž i úhly α_1, α_2 jsou navzájem souměrné podle imaginární osy; je-li absolutní hodnota $|a|$ čísla a v obou obrazcích 27 a 28 táž, jsou oba obrazce navzájem souměrné podle reálné osy; souměrným obrazem úhlu α_1 je úhel α'_1, souměrným obrazem úhlu α_2 je úhel α'_2. Je tedy

$$\alpha_2 = \pi - \alpha_1, \quad \alpha'_1 = -\alpha_1, \quad \alpha'_2 = -\alpha_2,$$

takže stačí určit α_1, což se provede pomocí tabulek. Mějme na př. rovnice $\sin\alpha = \pm 0{,}7528$. Podle tabulek je $\alpha_1{}^\circ = 48^\circ 50'$, tedy $\alpha_2{}^\circ = 180^\circ - \alpha_2{}^\circ \doteq \doteq 131^\circ 10'$. V obloukové míře: $\alpha_1 \doteq 0{,}8523$, $\alpha_2 \doteq 2{,}2893$.

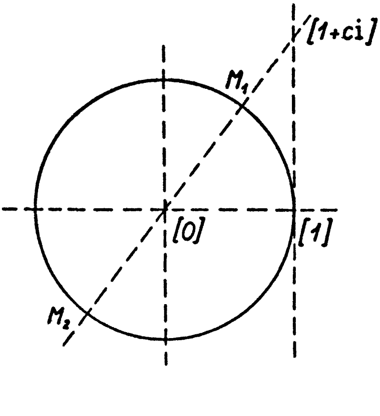
Pro $a = 0$ máme rovnici $\sin\alpha = 0$, které vyhovují úhly $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$; přímka M_1M_2 v tomto případě splyne s reálnou osou. Pro $a = \pm 1$ máme rovnici $\sin\alpha = \pm 1$; v tomto případě oba body M_1, M_2 splynou v bod [i], oba body M'_1, M'_2 splynou v bod [— i]; jediným řešením rovnice $\sin\alpha = 1$ je úhel $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, jediným řešením rovnice $\sin\alpha = -1$ je úhel $\alpha = -\frac{1}{2}\pi$.

Je-li $|a| > 1$, leží bod $[ai]$ vně jednotkové kružnice a rovnici $\sin\alpha = a$ nevyhovuje žádný úhel α.

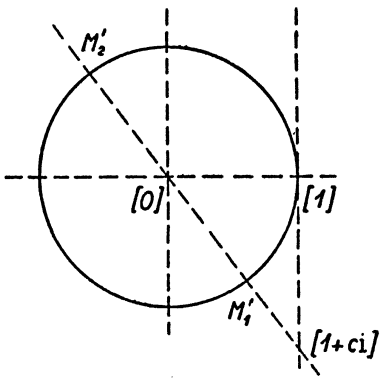
II. $\cos\alpha = b$ (obr. 29 pro kladné b, obr. 30 pro záporné b, číslo $|b|$ v obojím případě stejné). Na reálné ose určíme bod $[b]$; je-li $|b| < 1$, padne tento bod dovnitř jednotkové kružnice. Rovnoběžka s imaginární osou protne jednotkovou kružnici v bodech M_1, M_2 (obr. 29) nebo M'_1, M'_2 (obr. 30), které určují dva úhly α_1, α_2 nebo α'_1, α'_2. Nyní je

$$\alpha_2 = -\alpha_1, \quad \alpha'_1 = \pi - \alpha_1, \quad \alpha'_2 = -\alpha'_1;$$

α_1 se opět určí z tabulek. Pro $a = 0$ máme rovnici $\cos\alpha = 0$; řešení $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}\pi$. Rovnici $\cos\alpha = 1$ vyhovuje jediný úhel $\alpha = 0$; rovnici $\cos\alpha = -1$



Obr. 31.



Obr. 32.

vyhovuje jediný úhel $\alpha = \pi$. Pro $|b| > 1$ nevyhovuje žádný úhel rovnici $\cos\alpha = b$.

III. $\mathrm{tg}\alpha = c$ (obr. 31 pro kladné c, obr. 32 pro záporné c); číslo $|c|$ v obojím případě stejné. Sestrojíme bod $[1 + ci]$, který leží na tečně jednotkové kružnice s bodem dotyku $[1]$ ve vzdálenosti $|c|$ od bodu dotyku. Přímka $[0]\,[1 + ci]$ protne jednotkovou kružnici ve dvou bodech (M_1, M_2 v obr. 31, M'_1, M'_2 v obr. 32), které určí hledané úhly (α_1, α_2 pro $c > 0$, α'_1, α'_2 pro $c < 0$), Jest

$$\alpha'_1 = -\alpha_1, \quad \alpha'_2 = \pi - \alpha_1, \quad \alpha_2 = -\alpha'_2;$$

α_1 se určí z tabulek. Pro $c = 0$ máme rovnici $\mathrm{tg}\alpha = 0$, která má řešení $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. Pro žádné c nevyjde $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ neboť hodnoty $\pm\frac{1}{2}\pi$ nejsou pro funkci tangens přípustné.

IV. Podobně řešíme rovnici $\cotg a = d$.

Jiné goniometrické rovnice budeme probírat až ve třetí třídě.

Cvičení.

Ve cvič. 212 až 218 určete (na stupně a minuty) takové hodnoty x, pro něž platí $0 \leq x < 2\pi$ a jež vyhovují daným rovnicím.

212. a) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; b) $\sin x = -\frac{1}{3}$; c) $\cos x = 0{,}6$; d) $\cos x = -\frac{3}{4}$; e) $\operatorname{tg} x = 1$; f) $\operatorname{tg} x = -2$; g) $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{4}$; h) $\operatorname{cotg} x = -10$.

213. a) $\sin(x + 30°) = 0{,}4567$; b) $\sin(120° - x) = \frac{1}{4}$; c) $\cos(x - 52°) = 1$; d) $\cos(150° + x) = -0{,}625$; e) $\operatorname{tg}(x - 20°) = 1{,}3785$; f) $\operatorname{tg}(135° + x) = -0{,}5678$; g) $\operatorname{cotg}(x + 100°) = 3{,}8$; h) $\operatorname{cotg}(12° - x) = -0{,}1$.

214. a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; b) $\sin 3x = -1$; c) $\cos 2x = \frac{5}{6}$; d) $\cos 4x = 0{,}96$; e) $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{3}$; f) $\operatorname{tg} 3x = -5$; g) $\operatorname{cotg} 10x = 1$; h) $\operatorname{cotg} 6x = -3{,}2$.

215. a) $\sin x = \sin 2x$; b) $\cos 3x = \cos x$; c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 10x$; d) $\operatorname{cotg} 5x = \operatorname{cotg} 2x$.

216. a) $\sin x = \sin(3x + 20°)$; b) $\sin 2x = \sin(45° - 3x)$; c) $\cos 3x = \cos(2x + 60°)$; d) $\cos(30° - x) = \cos x$; e) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg}(3x - 90°)$; f) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(-7x)$; g) $\operatorname{cotg}(x + 135°) = \operatorname{cotg} 4x$; h) $\operatorname{cotg}(100° - 5x) = \operatorname{cotg} 3x$.

217. a) $\sin x = \cos 35°$; b) $\cos x = -\sin 27°$; c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} 125°$; d) $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} 54° = 0$.

218. a) $\sin x = \cos 2x$; b) $\cos 3x = \sin(20° - x)$; c) $\cos x = \sin(45° - x)$; d) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{cotg} 5x$; e) $\operatorname{cotg} 2x = -\operatorname{tg} 7x$; f) $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}(120° + 3x)$.

219. Jaké vztahy mezi x a y určují rovnice: a) $\sin x = \sin y$; b) $\sin x = \cos y$; c) $\cos x = -\cos y$; d) $\cos x = -\sin y$; e) $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} y$; f) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} y$; g) $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} y$; h) $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{tg} y$.

6. Rovnoměrný pohyb po kružnici.

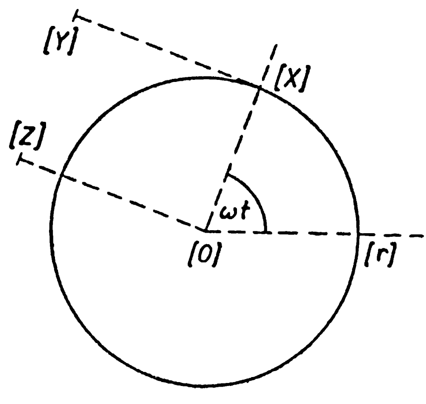
Z goniometrických funkcí jsou nejdůležitější funkce sinus a kosinus, které se vyskytují v nejdůležitějších otázkách mechaniky a fysiky vůbec. V tomto článku rozřešíme jednoduchou, ale důležitou úlohu vyjádřit početně rychlost bodu, který se pohybuje rovnoměrně po kružnici k. Střed kružnice budiž v počátku; poloměr označíme r. Jako obvykle označíme čas (ve vteřinách) písmenem t a předpokládáme, že pro $t=0$ pohyblivý bod je vodorovně napravo od počátku a že se otáčení děje v kladném smyslu. Polopřímka vycházející z počátku [0] a procházející pohyblivým bodem opíše úhel, jehož velikost je přímo úměrná době; koeficient úměrnosti označíme ω, předpokládajíce, že úhly měříme v obloukové míře; číslo ω se jmenuje *úhlová rychlost* pohybu. Pohyblivý bod [X] odpovídá komplexnímu číslu X, jehož absolutní hodnota je rovna r a jehož amplituda (viz konec článku 3) je rovna ωt, takže

$$X = r(\cos\omega t + i\sin\omega t).$$

Od okamžiku $t = t_1$ do okamžiku $t = t_2$ opíše bod $[X]$ oblouk kružnice k; kdyby bylo $r = 1$, byla by velikost tohoto oblouku rovna velikosti úhlu (v obloukové míře), který opíše polopřímka $[0][X]$, t. j. byla by rovna $\omega(t_2 - t_1)$. Při libovolném r opíše bod $[X]$ r-násobek $\omega(t_2 - t_1)$, t. j. $r\omega(t_2 - t_1)$. Podíl.

$$\frac{r\omega(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = r\omega$$

udává velikost rychlosti pohyblivého bodu (t. zv. *postupná rychlost*). Tato velikost je konstantní, ale rychlost sama není konstantní, neboť rychlost je vektor, jehož směrem je okamžitý směr pohybu, a tento směr se stále mění. V obr. 33 je vektor rychlosti ten vektor, jehož počátečním bodem je bod $[X]$ a jehož koncový bod $[Y]$ leží na tečně kružnice k ve vzdálenosti $r\omega$ od $[X]$ ve směru odpovídajícím otáčení v kladném smyslu. Umístíme raději vektor rychlosti tak, aby jeho počátečním bodem byl počátek $[0]$; koncový bod podle článku 5 v kapitole II bude bod $[Z]$, kde $Z = Y - X$. Běží tedy pouze o výraz pro komplexní číslo Z. Zřejmě však je $|Z| = r\omega$ a amplituda čísla Z je rovna amplitudě čísla X zvětšené o $\frac{1}{2}\pi$, t. j.



Obr. 33.

$$Z = r\omega[\cos(\omega t + \tfrac{1}{2}\pi) + i\sin(\omega t + \tfrac{1}{2}\pi)]$$

neboli podle vzorců (12) článku 3:

$$Z = -r\omega\cdot\sin\omega t + i\,r\omega\cdot\cos\omega t.$$

Cvičení.

220. a) Znáte-li úhlovou rychlost ω rovnoměrného pohybu po kružnici, vypočtěte dobu t_0 potřebnou k vykonání jednoho oběhu. b) Znáte-li dobu oběhu t_0, vypočtěte úhlovou rychlost.

221. Místo úhlové rychlosti ω zavádíme někdy při rovnoměrném pohybu po kružnici t. zv. frekvenci f, t. j. počet oběhů, které vykoná pohybující se těleso za 1 vteř. Udejte, jak se vypočte a) frekvence z úhlové rychlosti, b) úhlová rychlost z frekvence.

222. Motocyklista na kruhové závodní dráze, jejíž délka je právě 1 km, jede rovnoměrně rychlostí 90 km/hod. Jak velká je jeho úhlová rychlost (za 1 vteř.)?

223. Země při svém oběhu kolem Slunce koná přibližně rovnoměrný pohyb kruhový, při čemž průměrná vzdálenost Země od Slunce je $149{,}5 \cdot 10^6$ km. Vypočtěte postupnou i úhlovou rychlost tohoto pohybu (za 1 vteř.).

224. Bod na povrchu Země koná při otáčení Země kolem osy rovnoměrný pohyb kruhový. Je-li φ zeměpisná šířka tohoto bodu a r poloměr Země, vypočtěte postupnou i úhlovou rychlost tohoto pohybu (za 1 vteř.).

225. Kolo setrvačníku o průměru 1 m koná 100 obrátek za 1 min. Vypočtěte postupnou i úhlovou rychlost, s níž se pohybuje bod na obvodu kola (za 1 vteř.).

226. Jestliže bod konající rovnoměrný pohyb kruhový kolem počátku je v čase $t=1$ v bodě $[3-4i]$, jaký je poloměr jeho dráhy a jaká je úhlová rychlost?

227. Bod konající rovnoměrný pohyb kruhový kolem počátku nabude po uplynutí 1 vteřiny rychlosti vyjádřené vektorem $[0]\,[Z]$, kde $Z=1-i$. Určete poloměr dráhy a úhlovou rychlost, jakož i polohu pohybujícího se bodu v čase t.

VÝSLEDKY CVIČENÍ.

I. Obecná mocnina a logaritmus.

1. a) $23^2 = 529$; b) $8^3 = 512$; c) $5^4 = 625$; d) $3^5 = 243$. — **2.** $a = 0$ (a pak také $b = 0$) nebo $a > 0$, n liché (a pak také $b > 0$). — **3.** Je-li $a \geqq 0$, značí oba výrazy číslo a; je-li $a < 0$ a n sudé, značí výraz a) $|a|$ a výraz b) není definován; je-li $a < 0$ a n liché, není žádný z výrazů definován. — **4.** a) Je-li $a \leqq 0$; b) je-li aspoň jedno z čísel a, b rovno nule nebo jsou-li obě různá od nuly a téhož znamení. — **5.** a) Je-li $r \geqq 0$ sudé, pro každé a; je-li $r < 0$ sudé, pro $a \neq 0$; je-li $r > 0$ liché, pro $a \geqq 0$; je-li $r < 0$ liché, pro $a > 0$; b) pro $a \geqq 0$. — **6.** I až IV a VI platí, V nemá smysl. — **7.** Označíme-li $\frac{a}{b} = x$, je $a = bx$; pak $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{x}$ a $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$. — **8.** a) 60; b) 210; c) 6; d) 15; e) 210; f) 12. — **9.** a) 6; b) 120; c) 14,4; d) 15; e) 5,6; f) $6\frac{2}{3}$. — **10.** a) $5\sqrt{5}$; b) $8\sqrt{15}$; c) $2\sqrt[3]{2}$; d) $3\sqrt[3]{2}$; e) $4\sqrt[3]{2}$; f) $4\sqrt[3]{5}$; g) $5\sqrt[3]{4}$; h) $6\sqrt[3]{3}$; i) $2\sqrt[4]{5}$; j) $3\sqrt[4]{2}$. —

11. a) $\frac{4}{5}$; b) $1\frac{1}{4}$; c) $2\frac{1}{6}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $1\frac{1}{2}$; f) $1\frac{1}{3}$; g) $1\frac{1}{2}$. — **12.** a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; b) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{4}\sqrt{6}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$; e) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$; f) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$; g) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{5}$; h) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{75}$. — **13.** a) $|a|$ pro každé a; b) a^2 pro každé a; c) $1 : |a|$ pro $a \neq 0$; d) a pro $a \geqq 0$; e) a^2 pro každé a; f) $1 : a$ pro $a > 0$; g) $|a|$ pro každé a; h) a^2 pro každé a; i) $1 : |a|^3$ pro $a \neq 0$; j) a^3 pro $a \geqq 0$. — **14.** a) $\sqrt{|a|}$ pro každé a; b) $1 : \sqrt{|a|}$ pro $a \neq 0$; c) $\sqrt{a}$ pro $a \geqq 0$; d) $\sqrt{|a|}$ pro každé a; e) $\sqrt[3]{x^2}$ pro každé x; f) $1 : \sqrt[3]{x^2}$ pro $x \neq 0$; g) $\sqrt[3]{y^2}$ pro každé y; h) $\sqrt[4]{|b|}$ pro každé b; i) $1 : \sqrt[4]{u^3}$ pro $u > 0$; j) $\sqrt[3]{z^2}$ pro každé z. — **15.** a) a pro $a \geqq 0$; b) $\sqrt[3]{x^2}$ pro $x \geqq 0$; c) u pro $u \geqq 0$; d) ab pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$; e) $|a|$ pro $ax > 0$ nebo pro $a = 0$, $x \neq 0$; f) 1 pro $ab > 0$; g) $a : b$ pro $a \geqq 0$, $b > 0$; h) $\sqrt{|t|}$ pro $rt > 0$. — **16.** a) $\sqrt{3|ab|}$ pro každé a a každé b; b) $\sqrt{5|b : a|}$ pro $a \neq 0$, b libovolné; c) $\sqrt{2bc}$ pro $bc \geqq 0$; d) $\sqrt{3 : uv}$ pro $uv > 0$; e) $\sqrt{|a^3 : b|}$ pro $b \neq 0$, a libovolné; f) $|q|\sqrt{3p} : r^2$ pro $p \geqq 0$, q libovolné, $r \neq 0$; g) $\frac{2}{b^2}\sqrt{|ab|}$ pro $b \neq 0$, a libovolné; h) $\frac{2}{y^2}\sqrt{xy}$ pro $xy > 0$ nebo $x = 0$, $y \neq 0$. — **17.** a) $\sqrt[4]{2}$; b) $\sqrt[6]{2}$; c) $\sqrt[6]{2}$; d) $\sqrt[4]{8}$; e) $\sqrt{2}$; f) $\sqrt[3]{4}$. — **18.** a) $\sqrt[4]{a}$ pro $a \geqq 0$; b) $\sqrt[6]{a}$ pro $a \geqq 0$; c) $\sqrt[6]{a}$ pro $a \geqq 0$; d) $\sqrt[4]{x^3}$ pro $x \geqq 0$; e) $\sqrt[4]{a : b}$ pro $ab > 0$; f) $\sqrt[3]{a : b}$ pro $ab > 0$; g) $\sqrt[6]{a : b}$ pro $ab > 0$. — **19.** a) 2,164; b) 6,843; c) 16,56; d) 52,38; e) 1,073; f) 2,311; g) 4,980; h) 16,07;

i) 0,7457; j) 0,3461. — **20.** a) 1,495; b) 2,659; c) 4,729; d) 8,409; e) 1,468; f) 2,155; g) 3,162; h) 4,642; i) 6,813; j) 10. —

21. a) $3\sqrt[3]{3}$; b) $4\sqrt[3]{2}$; c) $\dfrac{|u|+|v|}{uv}\sqrt{uv}$ pro $uv > 0$; d) $\dfrac{a+b}{ab}\sqrt[3]{a^2b^2}$ pro $a > 0$, $b > 0$. — **22.** a) $3\sqrt{2}+3\sqrt{5}$; b) 15; c) 2; d) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4}$; e) $4+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$; f) $5-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{36}$. — **23.** a) $a+2\sqrt{ab}+b$ pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$; b) $(a+3b)\sqrt{a}+(3a+b)\sqrt{b}$ pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$; c) $\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$; d) $a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b$ pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. — **24.** a) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2=12$; b) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2=8$; c), d) $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\pm\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2=2(a\pm b)^2$. — **25.** a) 7; b) 8; c) 32; d) 9; e) $\frac{1}{5}$; f) $\frac{1}{8}$; g) $\frac{1}{27}$; h) $\frac{1}{625}$. — **26.** a) 31,62; b) 4,642; c) 8,550; d) 3,343; e) 1,513; f) 12,14. — **27.** a) $a^{\frac{3}{2}}$; b) $b^{\frac{4}{3}}$; c) $|u|^{\frac{1}{3}}$; d) $|z|^{\frac{3}{2}}$; e) $x^{-\frac{5}{2}}$; f) $r^{-\frac{2}{5}}$. — **28.** a) $\sqrt[5]{a^3}$; b) $\sqrt[3]{b^5}$; c) $1:\sqrt[3]{z^2}$; d) $1:\sqrt{u^3}$; e) $\sqrt[5]{x^{12}}$; f) $1:\sqrt[12]{x^5}$. — **29.** a) 3; b) $8\sqrt[4]{8}$; c) $\sqrt[3]{7}$; d) $\sqrt[6]{12}$; e) $1:5\sqrt[4]{5}$; f) $a\sqrt[6]{a}$; g) $\sqrt[15]{x^2}$; h) $1:\sqrt[4]{d}$; i) $\sqrt[6]{m^5}$; j) $1:k^3\cdot\sqrt[3]{k}$. — **30.** a) $2\sqrt{2}$; b) $\sqrt[6]{5}$; c) $7\sqrt{7}$; d) $\frac{1}{9}$; e) $\sqrt[3]{10}$; f) $a\sqrt{a}$; g) $\sqrt{u}$; h) $1:z\sqrt{z}$; i) $1:m$; j) p^6. —

31. a) $\sqrt[3]{a^2b^2}$; b) $|x|^3y\sqrt{y}$; c) $\sqrt[3]{|a|}\cdot\sqrt{b}$; d) $\sqrt[8]{u^3}\cdot\sqrt{v}$; e) $\sqrt[4]{m}:n\sqrt{n}$; f) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[16]{p^3}\cdot\sqrt{q}$. — **32.** a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt[6]{3}$; c) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; d) $6\sqrt[6]{6^5}$; e) $2\sqrt{3}$; f) $\sqrt[3]{a}$; g) $\sqrt[4]{u}$; h) $1:\sqrt[6]{z^5}$; i) $\sqrt[5]{p^4}$; j) $1:\sqrt[3]{h}$. — **33.** a) $3\sqrt[12]{3^{11}}$; b) $\frac{1}{6}\sqrt[6]{6}$; c) $\sqrt[4]{8}$; d) $\sqrt[3]{4}$; e) $\sqrt[8]{128}$; f) 1; g) $3\sqrt[3]{9}:4\sqrt{2}$; h) $\sqrt[4]{0{,}4}$; i) $\sqrt{0{,}6}$; j) $\sqrt[12]{5}$. — **34.** a) $u^2\sqrt[6]{u}$; b) $\sqrt[12]{(a:b)^5}$; c) $\sqrt[6]{r^5}$; d) $\sqrt[6]{x}$; e) $\sqrt[27]{m^{13}}$; f) $\sqrt[4]{ab}$; g) $\sqrt{a:b}$. — **35.** Je-li $r=\dfrac{p}{q}$, kde p, q jsou celá čísla a $q > 0$, a $1^r = x$, je $x^q = 1^{rq} = 1^p = 1$; potom $x = \sqrt[q]{1} = 1$. — **36.** $a^{r-s}\cdot a^s = a^r$. — **37.** Je-li $\dfrac{a}{b} = x$, je $a = bx$. Potom $a^r = b^rx^r$, takže $x^r = a^r : b^r$. — **38.** $\overline{OP_0} : \overline{xP_x} = \overline{OA} : \overline{xA}$, $\overline{xP_x} : \overline{2xP_{2x}} = \overline{xA_1} : \overline{2xA_1}$; proto $\overline{OP_0} : \overline{xP_x} = \overline{xP_x} : \overline{2xP_{2x}}$, čili $1 : a^x = a^x : \overline{2xP_{2x}}$, takže $\overline{2xP_{2x}} = (a^x)^2 = a^{2x}$. — **39.** Viz cvič. 38. — **40.** Hodnotě $x' = kx$ odpovídá hodnota $y = a^x = a^{\frac{x'}{k}} = (a^{\frac{1}{k}})^{x'}$. —

41. a) 4; b) 27; c) 3; d) a; e) x^2; f) x^4; g) x^2; h) 1; i) $\left(\dfrac{b^3}{a^3c^2}\right)^{\sqrt{2}}$; j) $y^2 : z^2$. — **42.** $3^3 < 3^{3,1} < 3^{3,14} < 3^{3,141} < 3^{3,1415} < 3^\pi < 3^{3,1416} < 3^{3,142} < 3^{3,15} < 3^{3,2} < 3^4$. — **43.** Je to hodnota větší než každá mocnina 10^k, kde $k < \sqrt{2}$, a menší než každá mocnina 10^h, kde $h > \sqrt{2}$; k, h jsou čísla racionální. — **44.** a) 2; b) 3; c) 4; d) —1; e) —2; f) —3; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{3}$; i) $\frac{2}{3}$; j) —$\frac{1}{2}$. — **45.** a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) —1; f) —2; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{2}{3}$; i) —$\frac{1}{2}$; j) —$\frac{4}{3}$. — **46.** a) 0; b) 1; c) 3; d) —2; e) —4; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{3}{2}$; h) —$\frac{1}{2}$; i) —$\frac{2}{3}$; j) —$\frac{3}{4}$. — **47.** a) 1; b) 2; c) 4; d) 32; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{16}$; g) $\sqrt[5]{2}$; h) $2\sqrt[3]{2}$; i) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$; j) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{4}$. — **48.** a) 1; b) 3; c) 9; d) 81; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{27}$; g) $\sqrt[3]{3}$; h) $3\sqrt[4]{3}$; i) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$; j) $\frac{1}{9}\sqrt{3}$. — **49.** a) 1; b) 5; c) 125; d) 0,2; e) 0,04; f) 0,008; g) $\sqrt[3]{5}$; h) $5\sqrt{5}$; i) $\frac{1}{5}\sqrt[4]{5}$; j) $\frac{1}{5}\sqrt[5]{125}$. — **50.** a) 2; b) 2; c) 7; d) 3; e) 10; f) 25; g) 27; h) každé $z > 1$; i) $\sqrt[10]{10}$; j) $\sqrt{2}$. —

51. a) 1; b) 2; c) 3; d) —1; e) —3; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{3}$; h) $\frac{3}{4}$; i) —$\frac{1}{2}$; j) —$\frac{2}{3}$. — **52.** a) $1 + \log_z a$; b) $2 + \log_z a$; c) $3 + \log_z a$; d) $\log_z a - 1$; e) $\log_z a - 2$. — **53.** a) $2\log_z a + \log_z b$; b) $3\log_z a + 3\log_z b$; c) $\log_z a + \frac{1}{2}\log_z b$; d) $\frac{2}{3}\log_z a + \frac{5}{4}\log_z b$; e) $\frac{1}{3}\log_z a - 2\log_z b$; f) $1 + \log_z a - \log_z b$; g) $1 - \log_z a - 2\log_z b$; h) $2 - \log_z a - \frac{1}{2}\log_z b$; i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_z a + \frac{1}{2}\log_z b$; j) $\log_z a + \frac{2}{3}\log_z b - \frac{1}{3}$. —

54. a) $ab : c$; b) a^2b^3; c) $a : \sqrt{b}$; d) $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$; e) z; f) az^2; g) $\sqrt{z} : a$; h) $a^2 - 1$; i) $a^2 + a - 2$; j) $a + b$. — **55.** Je-li $\log_a b = x$, $\log_b a = y$, je $a^x = b$, $b^y = a$; odtud $a = a^{xy}$, takže $xy = 1$. — **56.** a) Je-li $\log_a b = x$, $\log_b c = y$, $\log_c a = z$, je $a^x = b$, $b^y = c$, $c^z = a$, takže $a = a^{xyz}$, $xyz = 1$. b) Podle cvič. 56a) a 55. — **57.** Je-li $\log_a x = u$, $\log_b x = v$, $\log_{ab} x = z$, je $a^u = x$, $b^v = x$, $(ab)^z = x$. Potom $a = x^{\frac{1}{u}}$, $b = x^{\frac{1}{v}}$, takže $(x^{\frac{1}{u}} \cdot x^{\frac{1}{v}})^z = x$. Odtud $\left(\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}\right)z = 1$, $z = \dfrac{uv}{u + v}$. — **58.** $\log_z a - \log_z b = n$, $z^n = \dfrac{a}{b}$, $z = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; ve zvl. případě $z = 1{,}25$. — **59.** a) 0,4200; b) 0,9227; c) 0,1818; d) 0,6042; e) 0,0137; f) 0,8865; g) 0,6232; h) 0,5798; i) 0,6990; j) 0,9542. — **60.** a) 0,5381; b) 0,8777; c) 0,9488; d) 0,7406; e) 0,6343; f) 0,3083; g) 0,7823; h) 0,6024; i) 0,9546; j) 0,0185. —

61. a) 1,3729; b) 2,6599; c) 3,9395; d) 0,2355 — 1; e) 0,4771 — 3; f) 1,6850; g) 2,7249; h) 3,9428; i) 0,7845 — 1; j) 0,8455 — 3. — **62.** a) 3,25; b) 5,63; c) 8,31; d) 9,05; e) 1,067; f) 2,8; g) 1,5; h) 7,6; i) 6; j) 9. — **63.** a) 1,292; b) 3,333; c) 4,567; d) 1,1012 nebo 1,1013; e) 3,052; f) 5,058; g) 3,604; h) 8,308 nebo 8,309; i) 5,004; j) 2,008. — **64.** a) 66,4; b) 376; c) 27 800; d) 0,187; e) 0,01055; f) 59,94; g) 316,2; h) 1042,2 nebo 1042,3; i) 0,2616 nebo 0,2617; j) 0,002216. — **65.** a) 0,4186; b) 0,0723; c) 0,005995;

d) 0,0005012; e) 0,5624; f) 0,2154. — **66.** 0; 0,30; 0,48; 0,60; 0,70; 0,78; 0,85; 0,90; 0,95; 1. — **67.** $\log 2 + 35 \log 3 \doteq 17$, $16 \log 2 - 8 \log 3 \doteq 1$; 0,3011, 0,4771. — **68.** $\log kx - \log x = \log k$. — **69.** $\log(x + h) - \log x = \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)$. — **70.** $\log x = a$, $\log(x + n) = a + m$, t. j. $x = 10^a$, $x + n = 10^{a+m}$; odtud $n = 10^{a+m} - 10^a = x(10^m - 1)$. —

71. a) 4,594; b) 9997; c) 0,4751; d) 1,559; e) 0,3653. — **72.** a) 11,68; b) 0,6771; c) 0,04439; d) 0,2582; e) 134,4. — **73.** a) 10,562; b) 115 500; c) 1,171; d) 0,3229; e) 0,00999. — **74.** a) 2,375; b) 2,340; c) 21,37; d) 0,4843; e) 1,585; f) 0,4642. — **75.** a) 0,8489; b) 2,409; c) 29,98; d) 1,547; e) 0,783. — **76.** a) $2{,}555 \cdot 10^{41} < (7^7)^7 < 2{,}584 \cdot 10^{41}$; b) $10^{695000} < 7^{(7^7)} < 10^{697000}$, t. j. $7^{(7^7)}$ je číslo mající 695 000 až 697 000 číslic. — **77.** a) 0,217; b) 0,5854; c) 1,786; d) 1,962. — **78.** 18,06 dm^2. — **79.** a) 196 cm; b) 543,2 dm^2. — **80.** a) $1 : 4\pi \doteq 0{,}07958$ m^2; b) $2\sqrt{\pi} \doteq 3{,}545$ m. —

81. $1 : \sqrt{216} \doteq 0{,}06804$. — **82.** $r \doteq 0{,}4301$ dm, $v \doteq 1{,}7204$ dm. — **83.** a) $5{,}10 \cdot 10^8$ km^2; b) $1{,}083 \cdot 10^{12}$ km^3. — **84.** a) 0,07468; b) 0,02041. — **85.** a) $200 : \pi\sqrt{3} \doteq 36{,}8$; b) $200 : \pi \doteq 63{,}7$. — **86.** a) 0,6203 m; b) 0,2821 m. — **87.** 20,72 cm. — **88.** 20,64 cm. — **89.** a) 10 052 cm^2; b) 75,7 cm. — **90.** 3,3183; při prvém způsobu hledáme třikrát v tabulce a jednou sčítáme, při druhém způsobu hledáme pouze dvakrát v tabulce a jednou sčítáme (nepočítáme-li přičítání jedničky); každé hledání v tabulce má za následek ztrátu přesnosti. —

II. Komplexní čísla.

91. Jde o číslo $A = [a_1, a_2]$, kde a) $a_2 = 0$, b) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, c) $a_2 \neq 0$. — **92.** a) Každé reálné číslo; b) neexistuje; c) neexistuje. — **93.** a) Každé ryze imaginární číslo; b) neexistuje; c) každé ryze imaginární číslo. — **94.** a) Každé imaginární číslo; b) neexistuje; c) $ai \neq 0$. — **95.** a) $[a_1, -a_2]$; b) $[-a_1, a_2]$; c) $[-a_1, -a_2]$. — **97.** a) $a_2 = 0$; b) $a_1 = 0$; c) $a_1 = a_2 = 0$. — **98.** a) $a_1 = a_2$; b) $a_1 = -a_2$; obraz čísla leží na přímkách, které půlí úhly sevřené reálnou a imaginární osou. — **99.** [0, 0], [1, 0], [1, 1], [0, 1] nebo [0, 0], [1, 0], [1, — 1], [0, — 1] nebo [0, 0], [— 1, 0], [— 1, 1], [0, 1] nebo [0, 0], [— 1, 0], [— 1, — 1], [0, — 1]. — **100.** a) [1, 0], $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}]$, $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}]$, $[-1, 0]$, $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}]$, $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}]$; b) [0, 1], $[-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}]$, $[0, -1]$, $[\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}]$. —

101. $[-a_2, a_1]$, $[-a_1, -a_2]$, $[a_2, -a_1]$. — **102.** Jsou souměrně položené vzhledem k přímkám, které půlí úhly sevřené oběma osami. — **103.** a) [5, 4]; b) [10, 5]; c) [2, 1]; d) [— 1, 0]; e) [— 6, — 4]; f) [3, — 2]; g) [2, — 1]; h) [4, 3]; i) [— 1, 1]; j) [0, 1]. — **104.** a) $3 + 5i$; b) $2 + i$; c) $-1 - i$; d) $-2i$; e) $-3 - 4i$; f) $1 - i$; g) $-1 - 3i$; h) $2 - 2i$;

i) $5 + 2i$; j) $1 + 2i$. — **105.** a) Součet čísel $a_1 + a_2i$, $b_1 + b_2i$ je reálný, když $b_2 = -a_2$; b) rozdíl je reálný, když $b_2 = a_2$. — **106.** a) Součet čísel $a_1 + a_2i$, $b_1 + b_2i$ je ryze imaginární, když $b_1 = -a_1$, ale $b_2 \neq -a_2$; b) rozdíl je ryze imaginární, když $b_1 = a_1$, ale $a_2 \neq b_2$. — **107.** a) Součet čísel $a_1 + a_2i$, $b_1 + b_2i$ je imaginární, když $b_2 \neq -a_2$; b) rozdíl je imaginární, když $b_2 \neq a_2$. — **108.** a) [3, 9]; b) [6, 3]; c) [7, 4]; d) [0, 6]; e) [— 3, — 4]; f) [10, 0]; g) [20, 0]; h) [0, — 13]; i) [— 10, 0]; j) [— 1, 5]. — **109.** a) $8 + 6i$; b) $-5 + 3i$; c) $-7 + 22i$; d) $7 - 4i$; e) $25i$; f) 30; g) -2; h) $2i$; i) $-5 - 12i$; j) $3 + 4i$. — **110.** a) -1; b) $-i$; c) 1; d) i; e) -1; f) $-i$; g) 1. —

111. a) $6i$; b) $-10i$; c) -130; d) -10; e) $-2 + 2i$; f) 8; g) -4; h) $-8i$. — **112.** Jsou-li obě reálná nebo obě ryze imaginární nebo aspoň jedno rovno nule nebo obě neryze imaginární a poměr reálné a imaginární části je co do absolutní hodnoty týž, ale opačného znamení. — **113.** Je-li jedno reálné a různé od nuly a druhé ryze imaginární nebo jsou-li obě neryze imaginární a jsou-li poměry reálné a imaginární části každého čísla navzájem převrácené. — **114.** Je-li jedno reálné a různé od nuly a druhé imaginární nebo jsou-li obě imaginární a nejvýše jedno ryze imaginární, při čemž poměr reálné a imaginární části obou čísel se buď liší absolutní hodnotou nebo je týž (co do absolutní hodnoty i co do znamení). — **115.** a) $5 - 2i$; b) $4 + 3i$; c) $-2 - i$; d) $-3 + i$; e) 8; f) $-i$; g) $5i$. — **116.** a) $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)i = (a_1 - a_2i) + (b_1 - b_2i)$; b) $(a_1b_1 - a_2b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i = (a_1 - a_2i)(b_1 - b_2i)$. — **117.** Body $[A]$, $[-A]$ jsou souměrné podle počátku, body $[A]$, $[\overline{A}]$ podle reálné osy, body $[A]$, $[-\overline{A}]$ podle imaginární osy; $\overline{A - B} = \overline{A} + (-\overline{B})$. — **118.** a) A; b) $A + B$. — **119.** 14. — **120.** Je-li $|A| = 0$, je také $|A|^2 = A\overline{A} = 0$. To lze splnit, když buď $A = 0$ nebo $\overline{A} = 0$ a pak též $A = 0$. —

121. Kružnice se středem v počátku a s poloměrem rovným dané absolutní hodnotě. — **122.** Nula a kladná (reálná) čísla, neboť z rovnosti $|A| = a_1 + a_2i$ plyne nejprve $a_2 = 0$ a pak $|a_1| = a_1$. To lze splnit, když buď $a_1 = 0$ nebo $a_1 > 0$. — **123.** $(a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2)$. — **124.** Z rovnic $a_1b_1 - a_2b_2 = 0$, $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$ po vyloučení čísla a_2 plyne $a_1(b_1^2 + b_2^2) = 0$. To lze splnit, když buď $a_1 = 0$ (a pak buď $b_1 = b_2 = 0$ nebo $a_2 = 0$) nebo $b_1^2 + b_2^2 = 0$. — **125.** a) $6 - 8i$; b) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$; c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; d) $-i$; e) i; f) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$; g) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$; h) $-\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$; i) $\frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$; j) i. — **126.** a) 1; b) 0; c) $2i$; d) 0. — **127.** a) Je-li dělenec roven nule nebo jsou-li obě čísla reálná a dělitel různý od nuly nebo jsou-li obě ryze imaginární nebo jsou-li obě neryze imaginární a je-li poměr reálné a imaginární části u obou čísel týž. b) Je-li jedno z obou čísel reálné a různé od nuly a druhé ryze imaginární nebo jsou-li obě neryze imaginární a jsou-li poměry reálné a imaginární části navzájem převrácené a opačných znamení. c) Je-li jedno z čísel reálné a různé od nuly a druhé imaginární nebo jsou-li obě imaginární, při čemž nejvýše jedno ryze imaginární, a je-li poměr reálné a imaginární části u obou čísel různý. — **128.** 1 a — 1. — **129.** a) 0 a 1; b) 0, 1 a — 1. — **130.** i, — 1, — i, 1; $i^n = i^{n-4} \cdot i^4$.

131. a) Je-li $1 : A = X$ čili $AX = 1$, je také $\overline{A}\,\overline{X} = 1$ čili $\overline{X} = 1 : \overline{A}$. b) Je-li $A : B = X$ čili $A = BX$, je také $\overline{A} = \overline{B}\,\overline{X}$ čili $\overline{X} = \overline{A} : \overline{B}$. — **132.** $|\overline{A}|^2 = \overline{A}A = |A|^2$. — **133.** a) Je-li $|A| = 1$. b) Z rovnice $a_1 - a_2 i = i\,(a_1 + a_2 i)$ plyne $a_2 = -a_1$. c) Z rovnice $a_1 - a_2 i = -i\,(a_1 + a_2 i)$ plyne $a_1 = a_2$. — **134.** $a_1^2 + a_2^2$ je rovno druhé mocnině racionálního čísla. — **135.** a) $\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$, $-\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$; b) $5 - 4i$, $-5 + 4i$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$; d) $\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)}$, $-\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)} - \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)}$; e) $2 + i\sqrt{3}$, $-2 - i\sqrt{3}$; f) $2 + i\sqrt{5}$, $-2 - i\sqrt{5}$. — **136.** a) $9 + 7i$; b) $-4 + i$; c) $\sqrt{2} + i$; d) $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$; e) $i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)} - \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)}$. — **137.** a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$; b) $1 + i$, $1 - i$; c) $-1 + \frac{3}{2}i$, $-1 - \frac{3}{2}i$; d) $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$, $\sqrt{2} - i\sqrt{3}$; e) $2i$, $-i$; f) $2 - i$, $1 + i$; g) $1 - 2i$, $-4 + 2i$; h) $1 + 2i$, $-3 + i$. — **138.** $R + S = -B : A$, $RS = C : A$, proto $\overline{R} + \overline{S} = -\overline{B} : \overline{A}$, $\overline{R}\,\overline{S} = \overline{C} : \overline{A}$; $\overline{A}Y^2 + \overline{B}Y + \overline{C} = 0$. — **139.** $b^2 - 4ac < 0$ je možné, jen když $ac > 0$. — **140.** Je-li $aR^2 + bR + c = 0$, je také $a\overline{R}^2 + b\overline{R} + c = \overline{aR^2 + bR + c} = 0$. —

141. Musí platit $b^2 - 4ac = -n^2$, kde n je přirozené číslo, čili $b^2 + n^2 = 4ac$. Kdyby bylo b liché, t. j. kdyby bylo $b = 2k + 1$, bylo by n také liché, t. j. $n = 2h + 1$, neboť pravá strana je sudá. Ale $b^2 + n^2 = 4(k^2 + k + h^2 + h) + 2$ není dělitelné čtyřmi. — **143.** $5 + 2i$. — **144.** a) $1 - 4i$; b) $-1 + 4i$. — **145.** $A + B$, $B - A$, $A - B$. — **146.** Buď body $[0]$, $[A]$, $[B]$ leží v přímce nebo tvoří trojúhelník. V prvém případě jde o sčítání úseček a v druhém případě o nerovnosti mezi délkami stran trojúhelníka. — **147.** a) Vektor opačný; b) vektor symetrický podle reálné osy; c) vektor symetrický podle imaginární osy. — **148.** a) $\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$; b) 4; c) 0. — **149.** $C = 2B - A$, $D = 3B - 2A$, $E = 4B - 3A$. — **150.** $\frac{1}{2}(A + B)$; úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí.

151. $\frac{1}{2}(A + B + C)$; v šestiúhelníku, jehož každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné, úsečky spojující protilehlé vrcholy, jakož i úsečky omezené středy protilehlých stran se protínají v jednom bodě a navzájem se půlí. — **152.** $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(C + D)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(B + D)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(A + D) + \frac{1}{2}(B + C)]$. — **153.** a) $(Ah + Bk) : (h + k)$; b) $(Ah - Bk) : (h - k)$. — **154.** $\frac{1}{3}(A + B + C)$; těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který dělí každou těžnici v poměru 2 : 1.

III. Goniometrie.

156. Rovnice $X' = SX$ přiřazuje bodu $[X]$ bod $[X']$ a značí otáčení kolem počátku o úhel α; rovnice $X = TX'$, kde T je opět komplexní jednotka, přiřazuje bodu $[X']$ bod $[X]$ a značí tedy otočení kolem počátku o týž úhel α v opačném smyslu. Odtud $X' = STX'$ pro každé X', takže $ST = 1$, $T = \bar{S}$. — **157.** a) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$; c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. — **158.** Třetí vrchol je $[AS]$, kde $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ nebo $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. — **159.** Čtverec o středu v počátku. — **160.** Otáčení o úhel π, t. j. souměrnost podle počátku. —

161. a) $A + (B - A)S$; b) $B + (A - B)S$. — **162.** $A + (B - A)i$, $B + (B - A)i$ nebo $A - (B - A)i$, $B - (B - A)i$ nebo $\frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(B - A)i$, $\frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(B - A)i$. — **163.** Tvoří vrcholy pravidelného osmiúhelníka se středem v počátku. — **164.** Jsou vrcholy lomené čáry, která vznikne, nanášíme-li na kružnici se středem v počátku a s poloměrem 1 od bodu [1] tětivu délky $|S - 1|$. Je-li $S^n = 1$ vznikne pravidelný n-úhelník. — **165.** Pro každé β je $\beta = 2k\pi + \alpha$, kde k je celé a $0 \leqq \alpha < 2\pi$ (dělení čísla β číslem 2π). — **166.** a) π; b) 0; c) π; d) 0; e) $\frac{1}{2}\pi$; f) $\frac{4}{3}\pi$; g) $\frac{7}{4}\pi$; h) $\frac{11}{6}\pi$; i) $\frac{7}{5}\pi$; j) $\frac{11}{8}\pi$. — **167.** a) 0; b) $\frac{3}{4}\pi$; c) $\frac{1}{6}\pi$; d) $\frac{7}{6}\pi$; e) $\frac{3}{2}\pi$; f) π; g) $\frac{9}{5}\pi$; h) $\frac{7}{6}\pi$; i) $\frac{19}{24}\pi$; j) $\frac{11}{12}\pi$. — **168.** a) $\frac{1}{2}\pi$; b) π; c) $\frac{1}{2}\pi$; d) $\frac{4}{3}\pi$; e) $\frac{2}{3}\pi$; f) π; g) $\frac{16}{9}\pi$; h) $\frac{16}{9}\pi$. — **169.** a) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; b) $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{11}{8}\pi$; c) 0, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$; d) $\frac{4}{9}\pi$, $\frac{10}{9}\pi$, $\frac{16}{9}\pi$; e) $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{11}{15}\pi$, $\frac{17}{15}\pi$, $\frac{23}{15}\pi$, $\frac{29}{15}\pi$; f) $\frac{3}{16}\pi$, $\frac{11}{16}\pi$, $\frac{19}{16}\pi$, $\frac{27}{16}\pi$; g) 0, $\frac{1}{5}\pi$, $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$, π, $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{7}{5}\pi$, $\frac{8}{5}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$; h) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; i) $\frac{2}{9}\pi$, $\frac{8}{9}\pi$, $\frac{14}{9}\pi$; j) $\frac{5}{14}\pi$, $\frac{13}{24}\pi$, $\frac{21}{24}\pi$, $\frac{29}{24}\pi$, $\frac{37}{24}\pi$, $\frac{45}{24}\pi$. — **170.** $= (c + 2k\pi) : n$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$. —

171. a) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; b) 0, $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{8}{15}\pi$; $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{26}{15}\pi$; $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{14}{15}\pi$; $\frac{8}{5}\pi$, $\frac{2}{15}\pi$; c) $\frac{1}{5}\pi$, $\frac{1}{5}\pi$; $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{3}{5}\pi$; π, π; $\frac{7}{5}\pi$, $\frac{7}{5}\pi$; $\frac{9}{5}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$. — **172.** $\frac{12}{11}(\frac{1}{360}\omega + k)$, $0 \leqq k \leqq 10$ celé nebo $\frac{12}{11}(k - \frac{1}{360}\omega)$, $1 \leqq k \leqq 11$ celé. — **173.** a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; d) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; e) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; f) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}$; g) -1, 0; h) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$; i) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; j) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. — **174.** a) $2k\pi \leqq \alpha \leqq (2k + 1)\pi$; b) $\frac{1}{2}(4k - 1)\pi \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$, k celé. — **175.** a) $\frac{1}{4}(8k - 1)\pi < \alpha < \frac{1}{4}(8k + 5)\pi$; b) $\frac{1}{4}(8k - 3)\pi < \alpha < \frac{1}{4}(8k + 1)\pi$; c) $\alpha = \frac{1}{4}(8k + 1)\pi$ nebo $\alpha = \frac{1}{4}(8k + 5)\pi$; d) $\frac{1}{4}(8k - 1)\pi < \alpha < \frac{1}{4}(8k + 3)\pi$; e) $\frac{1}{4}(8k + 3)\pi < \alpha < \frac{1}{4}(8k + 7)\pi$; f) $\alpha = \frac{1}{4}(8k - 1)\pi$ nebo $\alpha = \frac{1}{4}(8k + 3)\pi$, k celé. — **176.** a) $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$; c) i; d) $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$; e) $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$; f) -1; g) $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$; h) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$; i) $-i$; j) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. — **177.** a) $-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})i$; b) $-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})i$; c) $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})i$; d) $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})i$; e) $-\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})i$; f) $-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})i$; g) $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})i$. — **178.** a) $\sin^3\alpha$; b) 2; c) $2 : \cos^2\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$; d) $2 : \sin\alpha$, $\alpha \neq k\pi$; e) $2 : \sin\alpha$, $\alpha \neq k\pi$; f) -1, $\alpha + \beta \neq k\pi$, $\alpha - \beta \neq k\pi$, k celé. — **179.** b) $\alpha \neq k\pi$; c) $\alpha \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$, k celé. — **180.** $1 : (\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(-\beta) + i\sin(-\beta)$. —

181. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. — **182.** a) $\alpha = (45° + \alpha) - 45°$; b) $\alpha = (\alpha - 45°) + 45°$. — **185.** Ze vztahu $\cos\alpha = \cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$. — **186.** a) $1 + \sin\alpha = 1 - \cos(90° + \alpha)$, b) $1 - \sin\alpha =$

$= 1 - \cos(90° - \alpha)$; dále podle cvič. 185b. — **187.** Do vzorců pro $\sin(\varphi + \psi)$, $\sin(\varphi - \psi)$, resp. $\cos(\varphi + \psi)$, $\cos(\varphi - \psi)$ dosaďte $\varphi + \psi = \alpha$, $\varphi - \psi = \beta$. — **188.** a) $\sqrt{2}\sin 5°$; b) $2\cos 15°$; c) $\sqrt{2}\sin 15°$; d) $-\sqrt{2}$. — **190.** Polopřímka procházející počátkem. —

191. $\Delta\,[0]\,[1]\,[A] \sim \Delta\,[0]\,[B]\,[AB]$ nebo $\Delta\,[0]\,[1]\,[B] \sim \Delta\,[0]\,[A]\,[AB]$. — **192.** $\Delta\,[0]\,[1]\,[A] \sim \Delta\,[0]\,[1 : A]\,[1]$ nebo je-li $\Delta\,[0]\,[M]\,[X]$ trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem při $[M]$ a s odvěsnou $[O][M] = 1$ a $[Y]$ pata jeho výšky, je pro $|A| \neq 1$ buď $X = A$, $\overline{Y} = 1 : A$ nebo $Y = A$ a $\overline{X} = 1 : A$. — **193.** a) 1, 0°; b) $\sqrt{2}$, 180°; c) 1, 90°; d) 2, 270°; e) 1, 60°; f) $\sqrt{2}$, 315°; g) 2, 150°; h) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, 195°. — **194.** a) $4096(1 + i)$; b) $512\,(1 + i\sqrt{3})$; c) $512(1 - i\sqrt{3})$. — **195.** a) $2|\cos\frac{1}{2}\alpha|$, $\frac{1}{2}\alpha$ pro $\alpha \leqq \pi$, $\frac{1}{2}\alpha + \pi$ pro $\alpha > \pi$; b) $2|\sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)|$, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\pi$ pro $\alpha \leqq \frac{3}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{4}\pi$ pro $\alpha > \frac{3}{2}\pi$. — **196.** a) $2|\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)|$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, pokud $|\alpha - \beta| \leqq \pi$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \pi$, pokud $|\alpha - \beta| > \pi$; b) $2|\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)|$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \pi)$, pokud $\alpha \geqq \beta$, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \pi)$, pokud $\alpha < \beta$. — **197.** a) $-\sqrt{3}$, $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; b) -1, -1; c) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; d) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$; e) 1, 1; f) $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; g) neexistuje, 0; h) $-\sqrt{3}$, $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; i) -1, -1; j) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. — **198.** a) $k\pi \leqq \alpha < (k + \frac{1}{2})\pi$; b) $k\pi < \alpha \leqq (k + \frac{1}{2})\pi$, k celé. — **199.** a) $\frac{1}{2}(k - \frac{1}{2})\pi < \alpha < \frac{1}{2}k\pi$; b) $\frac{1}{2}k\pi < \alpha < \frac{1}{2}(k + \frac{1}{2})\pi$; c) $\alpha = \frac{1}{2}(k - \frac{1}{2})\pi$; d) $k\pi < \alpha < (k + \frac{1}{2})\pi$; e) $(k - \frac{1}{2})\pi < \alpha < k\pi$; f) nikdy ($k$ celé). — **200.** $\mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{cotg}(\alpha + \pi) = \mathrm{cotg}\alpha$. —

201. a) $2\,\mathrm{tg}\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$; b) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$; c) $\mathrm{tg}\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$, $\alpha \neq (\frac{3}{4} + k)\pi$; d) $-\mathrm{cotg}\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$, $\alpha \neq (\frac{1}{4} + k)\pi$; e) $\cos\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$, $\alpha \neq (\frac{1}{4} + k)\pi$; f) $\mathrm{cotg}\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$ (k celé). — **202.** a) $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$; b) $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$, $\beta \neq \frac{1}{2}k\pi$; $\alpha + \beta \neq k\pi$; c) $\alpha \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$; d) $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$, $\alpha \neq \frac{1}{4}(4k + 1)\pi$ (k celé). — **203.** Úpravou vztahu $(\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{cotg}\alpha)^2 \geqq 0$, $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$; rovnost platí pro $\alpha = \frac{1}{4}(2k - 1)\pi$, k celé. **204.** a) $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$; b) $-\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$, $\alpha \neq k\pi$; c) $-i\,\mathrm{tg}\alpha$, $\alpha \neq \frac{1}{2}k\pi$, k celé. — **205.** a) $\alpha \neq \frac{1}{4}(2k - 1)\pi$; b) $\alpha \neq \frac{1}{6}(3k - 1)\pi$; c) $\alpha \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$, $\alpha \neq (\frac{1}{4} + k)\pi$; d) $\alpha \neq k\pi$, $\alpha \neq (\frac{1}{4} + k)\pi$, k celé. — **206.** a) $\alpha \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$, $\beta \neq \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$, $\beta \neq \alpha + \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$; b) $\alpha \neq k\pi$, $\beta \neq k\pi$, $\beta \neq \alpha + k\pi$, k celé. — **207.** $\mathrm{tg}\,3\alpha = (\mathrm{tg}\,2\alpha + \mathrm{tg}\alpha) : (1 - \mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha)$, proto $\mathrm{tg}\,2\alpha + \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\,3\alpha(1 - \mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha)$, což dosadíme do levé strany; $\alpha \neq \frac{1}{6}(2k - 1)\pi$, $\alpha \neq \frac{1}{4}(2k - 1)\pi$. — **208.** a) Rozšiřte výrazem $\cos\frac{1}{2}\alpha$, resp. $\sin\frac{1}{2}\alpha$; $\alpha \neq (2k - 1)\pi$, resp. $\alpha \neq k\pi$; b) plyne z předchozího, $\alpha \neq (2k - 1)\pi$; c) $\alpha \neq 2k\pi$, k celé. —

211. Viz 207. — **212.** a) 45°, 135°; b) 199°28′, 340°32′; c) 53°8′, 306°52′; d) 131°25′, 228°35′; e) 45°, 225°; f) 116°34′, 296°34′; g) 76°5′, 256°5′; h) 174°18′, 354°18′. — **213.** a) 122°49′, 357°11′; b) 105°39′, 314°21′; c) 52°; d) 68°41′, 351°19′; e) 74°2′, 354°2′; f) 15°25′, 195°25′; g) 94°45′, 274°45′; h) 96°17′, 276°17′. **214.** a) 15°, 75°, 195°, 225°; b) 90°, 210°, 330°; c) 42°37′, 137°23′, 222°37′, 317°23′; d) 4°4′, 85°56′, 94°4′, 175°56′, 184°4′, 265°56′, 274°4′, 355°56′

e) 9°13′, 99°13′, 189°13′, 279°13′; f) 33°46′, 93°46′, 153°46′, 213°46′, 273°46′, 333°46′; g) 4°30′, 22°30′, 40°30′, 58°30′, 76°30′, 94°30′, 112°30′, 130°30′, 148°30′, 166°30′, 184°30′, 202°30′, 220°30′, 238°30′, 256°30′, 274°30′, 292°30′, 310°30′, 328°30′, 346°30′; h) 27°6′, 57°6′, 87°6′, 117°6′, 147°6′, 177°6′, 207°6′, 237°6′, 267°6′, 297°6′, 327°6′, 357°6′. — **215.** a) 0°, 60°, 180°, 300°; b) 0°, 90°, 180°, 270°; c) 0°, 20°, 40°, 60°, 80°, 100°, 120°, 140°, 160°, 180°, 200°, 220°, 240°, 260°, 280°, 300°, 320°, 340°; d) 60°, 120°, 240°, 300°. — **216.** a) 40°, 130°, 170°, 220°, 310°, 350°; b) 9°, 81°, 153°, 225°, 297°; c) 60°, 132°, 204°, 276°, 348°; d) 15°, 195°; e) 45°, 135°, 225°, 315°; f) 0°, 18°, 36°, 54°, 72°, 108°, 126°, 144°, 162°, 180°, 198°, 216°, 234°, 252°, 288°, 306°, 324°, 342°; g) 105°, 165°, h) 12°30′, 35°, 57°30′, 80°, 102°30′, 125°, 147°30′, 170°, 192°30′, 215°, 237°30′, 260°, 282°30′, 305°, 327°30′, 350°. — **217.** a) 55°, 125°; b) 117°, 243°; c) 145°, 325°; d) 144°, 324°. — **218.** a) 30°, 150°, 270°; b) 35°, 72°30′, 162°30′, 215°, 252°30′, 342°30′; c) 157°30′, 337°30′; d) 11°15′, 33°45′, 56°15′, 78°45′, 101°15′, 123°45′, 146°15′, 168°45′, 191°15′, 213°45′, 236°15′, 258°45′, 281°15′, 303°45′, 326°15′, 348°45′; e) 18°, 54°, 126°, 162°, 198°, 234°, 306°, 342°; f) 37°30′, 82°30′, 127°30′, 172°30′, 217°30′, 262°30′, 307°30′, 352°30′. — **219.** a) $x - y = 2k\pi$ nebo $x + y = (2k + 1)\pi$; b) $x + y = \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$ nebo $x - y = \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$; c) $x + y = (2k + 1)\pi$ nebo $x - y = (2k + 1)\pi$; d) $x - y = \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$ nebo $x + y = \frac{1}{2}(4k + 3)\pi$; e) $x - y = k\pi$; f) $x + y = k\pi$; g) $x + y = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$; h) $x - y = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, k celé. — **220.** a) $t_0 = 2\pi : \omega$; b) $\omega = 2\pi : t_0$. —

221. a) $f = \omega : 2\pi$; b) $\omega = 2\pi f$. — **222.** $\frac{1}{20}\pi$. — **223.** Postupná rychlost 29,8 km/vt, úhlová rychlost 0,041 úhlových vteřin za časovou vteřinu, t. j. $\omega \doteq 0{,}000000199$. — **224.** Postupná rychlost $0{,}463 \cdot \cos\varphi$ km/vt, úhlová rychlost 15 úhlových vteřin za časovou vteřinu, t. j. $\omega \doteq 0{,}0000727$. — **225.** $c \doteq 5{,}24$ m/vt, $\omega \doteq 10{,}47$. — **226.** $r = 5$, $\omega \doteq 2k\pi - 0{,}927$, kde k značí, kolikátý oběh koná bod v čase $t = 1$. — **227.** $\omega = (2k - \frac{3}{4})\pi$, $r = \sqrt{2} : (2k - \frac{3}{4})\pi$, kde k značí, kolikátý oběh koná bod v čase $t = 1$, $X = r(\cos\omega t + i \sin\omega t)$.

GEOMETRIE

Rozvrh učiva.

Září:	Incidence bodů, přímek a rovin. Vzájemná poloha přímek a rovin. Rovnoběžnost přímek a rovin.
Říjen:	Poloprostor. Úhel dvou přímek a rovin. Přímka kolmá k rovině. Roviny k sobě kolmé. Úhel přímky s rovinou.
Listopad:	Konvexní útvary. Klín, trojhran. Souměrnost podle roviny. Shodnost v prostoru. Rovnoběžné posunutí, souměrnost podle osy a středu.
Prosinec:	Hranolová plocha, hranolový prostor, hranol. Jehlanová plocha, jehlanový prostor, jehlan.
Leden:	Válcová a kuželová plocha. Kruhový válec a kužel. Kulová plocha a koule.
Únor:	Základní vlastnosti obsahu. Obsah mnohoúhelníka. Obsah jiných obrazců.
Březen:	Obsah a podobnost. Obsah kruhu. Délka oblouku kružnice.
Duben:	Základní vlastnosti objemu. Objem hranolu a válce. Cavalieriův princip.
Květen:	Objem jehlanu a kužele. Objem a povrch koule a jejích částí.
Červen:	Shrnutí a opakování.

I. Základy stereometrie.

1. Incidence bodů, přímek a rovin.

Ve čtvrté třídě střední školy jste se seznámili se základy prostorové geometrie (stereometrie); probereme si je nyní znovu v jiném uspořádání a doplníme je novými poznatky. Budeme při tom vycházet z jistých základních pouček, které nedokazujeme a jejichž správnost si ověřujeme názorem; takovým poučkám říkáme **axiomy.** Další poučky budeme z nich odvozovat usuzováním za pomoci známých vět z planimetrie. Při všech výsledcích i úvahách si však budeme stále uvědomovat jejich názorný význam.

Základní útvary planimetrie jsou bod a přímka; o rovině se tu nehovoří, neboť je jediná a v ní všecky útvary leží. Ve stereometrii přistupuje rovina jako další základní útvar. Prvním naším úkolem tedy bude definovat rovinu. To učiníme tak, že vyslovíme několik axiomů, které vyjadřují vztahy mezi body, přímkami a rovinami. Přitom rovinou i přímkou rozumíme soubory bodů, podobně jako tomu bylo v planimetrii s přímkou. Nejdůležitější z těchto axiomů jsou následující tři:

A1. Leží-li dva různé body na přímce p i v rovině ϱ, pak přímka p (t. j. všecky její body) leží v rovině ϱ.

A2. Budiž dána přímka p a bod A ležící mimo ni. Pak existuje jediná rovina, která obsahuje přímku p i bod A.

A3. Obsahují-li dvě různé roviny ϱ, σ týž bod A, pak obsahují celou přímku.

Uvědomte si názorný význam axiomů A1, A2, A3. Všimněte si, že v axiomech se stále opakují výroky: bod nebo přímka leží v rovině, bod leží na přímce, rovina obsahuje bod nebo přímku, přímka obsahuje bod; někdy také říkáme, že rovina nebo přímka prochází bodem a pod. Všecky takové výroky se dají nahradit jediným označením — **incidovati.** Tak na př. místo výroků: bod A leží v rovině ϱ, rovina ϱ obsahuje bod A, rovina ϱ prochází bodem A, říkáme stručně: **bod A a rovina ϱ incidují;** a podobně v ostatních případech. Axiomy A1, A2, A3 jsou tedy axiomy o incidenci. Jiný axiom o incidenci je vám znám z planimetrie:

A4. Dvěma různými body prochází jediná přímka.

Tohoto axiomu budeme užívat i ve stereometrii.

Geometrické vlastnosti, které se netýkají jiných vztahů než incidence, se jmenují **vlastnosti incidence.** Některé věty o incidenci vyslovujeme někdy jiným způsobem jako **věty o určenosti.** Tak na př. axiom A4 vyslovujeme takto **Dvěma různými body je určena jediná přímka.** To znamená: existuje jediná přímka, která s oběma body inciduje. Podobně axiom A2 vyslovujeme takto: **Přímkou a bodem, které nejsou incidentní, je určena jediná rovina.** Rovina je jednoznačně určena i jinými způsoby; platí totiž známé poučky:

V1. Třemi body, které neleží v přímce, je určena jediná rovina.

V2. Dvěma (různými) přímkami, které mají společný jediný bod, je určena jediná rovina.

Poučky V1 a V2 si dokážete snadno sami: v prvním případě spojíte dva z daných bodů přímkou, v druhém zvolíte na jedné z daných přímek bod rozdílný od průsečíku obou přímek; tím převedete poučky V1, V2 na axiom A2.

I z axiomu A3 lze odvoditi větu o určenosti:

V3. Dvěma různými rovinami se společným bodem je určena jediná přímka.

Neboť podle A3 taková přímka existuje; podle A2 nemají obě roviny mimo tuto přímku žádný další společný bod, je tedy tato přímka jediná.

Při výkladu a řešení úloh, hlavně důkazových a konstruktivních, potřebujeme často názorně zobrazit situaci v prostoru. To se týká hlavně úloh o tělesech, které budeme řešit soustavně v dalších odstavcích. K tomu účelu používáme způsobu zobrazení, který je vám znám už ze střední školy a který se nazývá **volné rovnoběžné promítání.** Při sestrojování obrazců, které znázorňují útvary v prostoru, zachováváme tyto zásady:

1. Rovinné obrazce, jejichž roviny jsou rovnoběžné s naší nákresnou, zobrazujeme ve skutečném tvaru i velikosti.
2. Rovnoběžné přímky (úsečky) zobrazujeme rovnoběžkami.
3. Stejně dlouhé úsečky zobrazujeme stejně dlouhými úsečkami.
4. Body na přímce zobrazujeme tak, že se dělicí poměr zachovává.

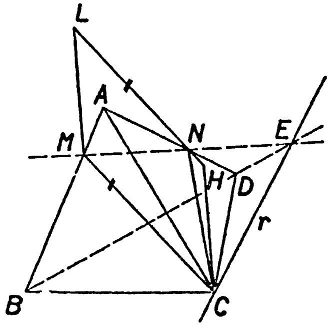
Úhly a úsečky, které neleží v rovinách rovnoběžných s nákresnou, svou velikost zpravidla nezachovávají.

Při řešení všech cvičení kreslete náčrtky tímto způsobem.

Příklad. (Obr. 1.) Jsou dány čtyři body A, B, C, D, které neleží v jedné rovině; spojnice těchto bodů jsou hrany čtyřstěnu $ABCD$. Tohoto čtyřstěnu budeme užívat jako pomůcky k zobrazení některých konstrukcí; místo čtyřstěnu můžeme užít také jiného jednoduchého tělesa.

Zobrazte průsečnici r rovin $\pi \equiv BCD$ a $\varrho \equiv CMN$. V rovině ϱ sestrojte rovnoběžník $CMLH$, jehož strana $HL \parallel CM$ prochází daným bodem N. Dané body M, N zvolte po řadě uvnitř hran AB, AD.

Řešení. Jedním bodem hledané průsečnice r je bod C; druhý bod E průsečnice r je průsečík přímek BD a MN, pokud ovšem nejsou tyto přímky navzájem rovnoběžné. Další konstrukce plyne z obrázku.



Obr. 1.

Cvičení.

1. Kolik přímek je určeno n body A_1, A_2 ..., A_n, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce?
2. V rovině ϱ je dán různoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v bodě P. Mimo rovinu ϱ je dán bod E; na přímce EP jsou dány další body F, G tak, že leží v pořádku $EFGP$. Které trojice vybrané z bodů A, B, C, D, E, F, G určují roviny a které z těchto rovin splývají?
3. Je dáno n různých přímek, z nichž každé dvě se spolu protínají. Dokažte, že tyto přímky buď všechny procházejí jedním bodem, nebo všechny leží v jedné rovině.
4. Ve dvou různých rovinách ϱ, ϱ' leží trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, při čemž $A \not\equiv A'$, $B \not\equiv B'$, $C \not\equiv C'$.*)
Přímky AA', BB', CC' procházejí určitým bodem V. Přímky AB, $A'B'$ se protínají v bodě C_0, přímky BC, $B'C'$ v bodě A_0 a přímky CA, $C'A'$ v bodě B_0. Dokažte, že body A_0, B_0, C_0 leží v jedné přímce.

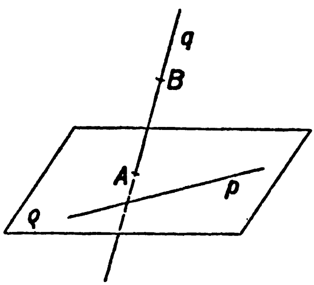
2. Vzájemná poloha přímek a rovin.

Další skupinou úloh o incidenci je vyšetření vzájemné polohy přímek a rovin.

*) Symbol $A \not\equiv A'$ značí, že A, A' jsou dva různé body.

a) **Dvě roviny** buď splývají nebo jsou různé. Dvě různé roviny buď nemají společný bod, anebo mají podle A3 společnou přímku. Mimo tuto přímku už nemají společný bod; jinak by totiž podle A2 splynuly. V tomto posledním případě se roviny nazývají **různoběžné,** společná přímka je jejich **průsečnicí.** Dvě roviny splývající nebo dvě roviny bez společných bodů se jmenují **rovnoběžné.**

V předchozí úvaze jsou úsudkem stanoveny možnosti vzájemné polohy dvou rovin a na základě toho jsou vysloveny definice rovnoběžných a různoběžných rovin. Aby tyto definice měly smysl, je třeba ukázat, že příslušné případy skutečně nastanou, t. j., že na př. existují dvě roviny bez společných bodů. Z názoru se to zdá být zřejmé, je ovšem třeba provést důkaz úsudkem. Tak je tomu i při jiných definicích. Nebudeme se zpravidla při výkladech zabývat těmito důkazy existence; některé z nich si provedete snadno sami ve cvičeních.



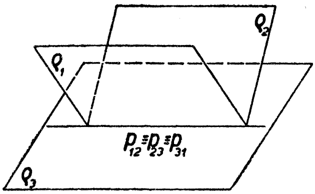
Obr. 2.

b) **Přímka a rovina.** Neleží-li přímka v rovině, má s ní podle axiomu A1 nejvýše jeden společný bod (t. j. buď jeden nebo žádný). Mají-li přímka a rovina společný jediný bod, nazývají se **různoběžné,** společný bod je jejich **průsečík.** V ostatních případech, t. j. leží-li přímka v rovině, nebo nemají-li rovina a přímka společný bod, říkáme, že jsou **rovnoběžné.**

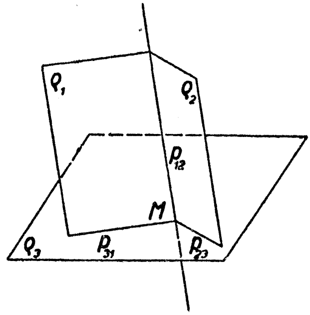
c) **Dvě přímky.** Dvě (různé) přímky, které mají jediný společný bod, leží podle poučky V2 v jisté rovině. Takové dvě přímky se jmenují **různoběžky,** společný bod je jejich **průsečík.** Dvě (různé) přímky bez společného bodu buď leží v téže rovině a nazývají se **rovnoběžky,** nebo neleží obě v žádné rovině a nazývají se **mimoběžky.** Splývající přímky počítáme také mezi rovnoběžky.

Dokážeme si existenci mimoběžek (obr. 2). Danou přímkou p položme rovinu ϱ, v rovině ϱ zvolme bod A tak, aby neležel na přímce p a dále zvolme bod B mimo rovinu ϱ. Přímka q určená body A, B je mimoběžná s přímkou p. Neboť každá rovina, která má obsahovati přímky p, q, musí obsahovati přímku p i bod A; taková rovina je však podle A2 jediná, a to rovina ϱ. Rovina ϱ však neobsahuje bod B, a proto také neobsahuje přímku q. Provedený důkaz je nepřímý; vyložte, na čem se zakládá.

d) **Tři roviny.** Mějme tři různé roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. Buď jsou každé dvě z nich rovnoběžné, nebo jsou některé dvě, na př. ϱ_1, ϱ_2, různoběžné; jejich průsečnici označme p_{12}. Přímka p_{12} může míti vzhledem k rovině ϱ_3 trojí vzájemnou polohu:



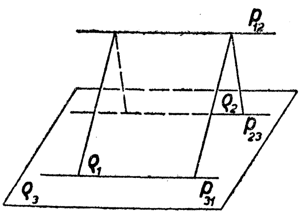
Obr. 3a.



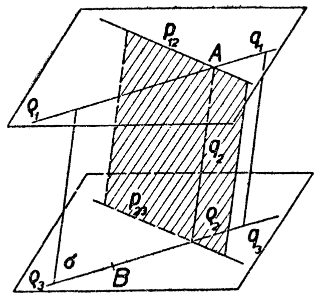
Obr. 3b.

(1) (Obr. 3a.) Přímka p_{12} leží v ϱ_3; roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 obsahují pak společnou přímku.

(2) (Obr. 3b.) Přímka p_{12} protíná ϱ_3 v bodě M; tento bod je pak společný všem třem rovinám; každé dvě z nich jsou různoběžné a všecky tři průsečnice p_{12}, p_{23}, p_{31} procházejí bodem M.



Obr. 3c.



Obr. 3d.

(3) Přímka p_{12} nemá s rovinou ϱ_3 společný bod. Pak buď je rovina ϱ_3 různoběžná i s rovinou ϱ_1 i s rovinou ϱ_2 a každé dvě z průsečnic p_{12}, p_{23}, p_{31} jsou navzájem rovnoběžné (proč?) (obr. 3c). Nebo je rovina ϱ_3 rovnoběžná s rovinou ϱ_1; pak jsou však ϱ_2, ϱ_3 různoběžné. To dokážeme

takto (obr. 3d): zvolíme bod A na přímce p_{12} a bod B v rovině ϱ_3 a mimo rovinu ϱ_2. Body A, B položíme libovolnou rovinu σ. Tato rovina σ je patrně rozdílná od rovin ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 (odůvodněte podrobně!), ale s každou z nich má společný bod. Průsečnice roviny σ s rovinami ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 označíme po řadě q_1, q_2, q_3. Přímky q_1, q_3 leží v téže rovině (σ) a nemají společný bod (proč?). Jsou tedy rovnoběžné. Protože přímka q_2 je různoběžná s q_1 (obě jdou bodem A), je q_2 také různoběžná s q_3. Jejich průsečík je bod společný rovinám ϱ_2, ϱ_3, proto jsou ϱ_2, ϱ_3 různoběžné, jak jsme chtěli dokázati. Pro vzájemnou polohu tří různých rovin máme tedy tyto čtyři možnosti:

1° Každé dvě z daných rovin jsou rovnoběžné.

2° Dvě z daných rovin jsou rovnoběžné, třetí je s oběma různoběžná; příslušné průsečnice jsou navzájem rovnoběžné.

3° Každé dvě z rovin jsou různoběžné, ale všecky tři průsečnice jsou navzájem rovnoběžné (ve zvláštním případě splynou).

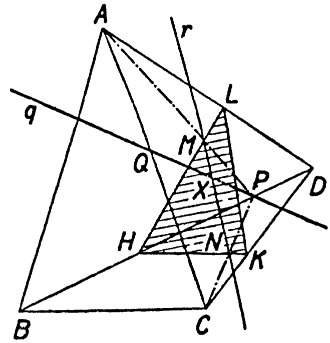
4° Každé dvě z rovin jsou různoběžné, každé dvě průsečnice jsou také různoběžné. Všecky tři roviny i jejich průsečnice procházejí týmž bodem.

Předchozí úvahou jsme provedli úplnou diskusi vzájemné polohy tří různých rovin. Proveďte sami diskusi vzájemné polohy tří rovin, z nichž dvě splývají.

Na tomto místě uvedeme obvyklá označení. Rovnoběžnost rovin a přímek označíme takto: $\varrho \| \sigma$, $p \| \varrho$ nebo $\varrho \| p$, $p \| q$. Aby označení bylo jednotné, budeme na rozdíl od učebnice pro I. třídu značit i rovnoběžnost přímek takto: $p \| q$. Souhlasně rovnoběžné přímky AB, CD zapíšeme symbolem $AB \uparrow\uparrow CD$, nesouhlasně rovnoběžné přímky symbolem $AB \downarrow\uparrow EF$. Přímku p určenou dvěma body (jako spojnici) nebo dvěma rovinami (jako průsečnici) označíme prostě $p \equiv AB$ nebo $p = \varrho \cdot \sigma$. Rovinu ϱ určenou třemi body nebo bodem a přímkou nebo dvěma různoběžkami označíme $\varrho \equiv ABC$, $\varrho \equiv Ap$, $\varrho \equiv pq$. Bod A určený jako průsečík tří rovin nebo jako průsečík přímky s rovinou nebo jako průsečík dvou různoběžek označíme $A \equiv \varrho \cdot \sigma \cdot \tau$, $A \equiv \varrho \cdot a$, $A \equiv p \cdot q$.

Příklad (obr. 4): je dán čtyrstěn $ABCD$. Zobrazte průsečík X přímky $q \equiv PQ$ s rovinou $\varrho \equiv HKL$. Dané body H, K, L a P, Q zvolte po řadě na přímkách BD, CD, DA a BD, AC podle obr. 4.

Řešení: Přímkou q položme pomocnou rovinu σ, na př. $\sigma \equiv PQA$. Hledaný průsečík X leží také v této rovině; leží tedy také na průsečnici $r \equiv MN$ rovin ϱ, σ. Přitom je $M \equiv AP \cdot HL$, $N \equiv HK \cdot CP$ (odůvodněte). Je tedy $X \equiv q \cdot r$.



Obr. 4.

Cvičení.

5. Jsou dány body A, B, C, D, které neleží všechny v jedné rovině. a) Mohou některé z těchto bodů ležet v jedné přímce? b) Kolik přímek a kolik rovin je těmito body určeno? c) Jak jmenujeme těleso těmito body určené? Zobrazte toto těleso. d) Vyhledejte tři dvojice mimoběžek určených danými body.
6. Zobrazte čtyrstěn $ABCD$. Uvnitř hrany DA zvolte bod A' a uvnitř hrany DB bod B'. a) Zobrazte průsečnici rovin $AB'C$, $A'BC$. b) Budiž C' bod na prodloužení hrany DC za bod C; dokažte, že existuje průsečnice p rovin ABC, $A'B'C'$ a zobrazte ji. Dále dokažte, že přímky AB, $A'B'$ jsou s přímkou p buď rovnoběžné, nebo ji protínají v témže bodě.
7. Předchozí cvič. 6 řešte znovu takto (rýsujte na půlarch papíru): Hrany daného čtyrstěnu jsou: $\overline{AB}=8$; $\overline{BC}=7$; $\overline{CA}=6$; $\overline{AD}=6{,}8$; $\overline{BD}=8{,}2$; $\overline{CD}=7{,}6$; sestrojte jeho síť. Dále zvolte $\overline{DA'}=2{,}5$; $\overline{DB'}=7$; $\overline{DC'}=10$. a) Ve cvič. 6. a) vyšetřete velikost úsečky na průsečnici rovin $AB'C$, $A'BC$, která vyjímajíc krajní body leží uvnitř tělesa. b) Ve cvič. 6. b) vyšetřte průsečíky prodloužených stran trojúhelníka $A'B'C'$ s rovinou ABC. c) Cvič. 6. b) opakujte pro případ, že $\overline{DA'}=4$ a $A'B' \parallel AB$.
8. Příčkou dvou mimoběžek nazýváme přímku, která protíná obě dané mimoběžky. Bodem M, který leží mimo dané mimoběžky a, b prochází nejvýše jedna příčka mimoběžek a, b. Dokažte.
9. Uvnitř hran $C'D'$, BB' základního kvádru $ABCD\,A'B'C'D'$ zvolte body M, N. a) Zobrazte rovnoběžky $CM // NP$, kde P je bod přímky $A'B'$ a vyšetřte průsečnice p, p' roviny $\varrho = CMN$ s rovinami obou podstav kvádru. b) Určete příčku XY mimoběžek BD, $A'C'$, které leží v rovině ϱ ze cvič. a). c) Cvič. a), b) řešte konstruktivně užitím sítě daného kvádru a určete velikost úsečky XY.
(Volte: $\overline{AB}=5$; $\overline{AD}=3$; $\overline{AA'}=6$; $\overline{C'M}=3{,}5$; $\overline{BN}=3{,}5$).
10. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Středy hran AD, BD, CD nazveme po řadě T, U, V. Vyšetřete vzájemnou polohu trojic rovin: a) ABU, TUV, BCD; b) ABC, BCD, AUV; c) ABD, ABC, ABV; d) ABC, TUV, BCD. V úloze d) dokažte nepřímo, že roviny ABC, TUV jsou rovnoběžné.

3. Rovnoběžnost přímek a rovin.

Zkoumání incidenčních vlastností nás vedlo k zavedení pojmu rovnoběžnosti; tím je dán počátek nového uspořádání stereometrických poznatků, kterým se budeme napříště říditi.

První skupinu tvoří **vlastnosti incidence**, druhou **vlastnosti rovnoběžnosti.** Třetí skupinu tvoří t. zv. **vlastnosti uspořádání bodů v prostoru.** V planimetrii jste se seznámili se vztahem: bod C leží mezi dvěma body A, B. Víte, že na tomto vztahu se zakládá uspořádání bodů na přímce, o něj se opírá rozdělení roviny přímkou na poloroviny a obdobné rozdělení prostoru na poloprostory. Konečně čtvrtou skupinu tvoří vlastnosti, které se týkají pojmu velikosti úhlu a velikosti úsečky. Tyto **vlastnosti** nazýváme **metrické.** V tomto odstavci si odvodíme několik základních pouček o rovnoběžnosti.

V4. Je-li $p \| \varrho$, pak každá rovina σ, obsahující přímku p a různoběžná s rovinou ϱ, protne rovinu ϱ v přímce $\varrho \cdot \sigma$ rovnoběžné s p. Všecky tyto průsečnice $\sigma \cdot \varrho$ jsou navzájem rovnoběžné.

Správnost V4 je zřejmá, leží-li přímka p v rovině ϱ. Neleží-li přímka p v rovině ϱ, zvolíme dvě různé roviny σ_1, σ_2 obsahující přímku p a různoběžné s rovinou ϱ. Roviny ϱ, σ_1, σ_2 jsou ve vzájemné poloze 3° (str. 92); vzájemná poloha 4 je vyloučena, neboť přímka $p \equiv \sigma_1 \cdot \sigma_2$ nemá s rovinou ϱ společný bod. Z toho vyplývá, že každé dvě z průsečnic $p \equiv \sigma_1 \cdot \sigma_2$, $\varrho \cdot \sigma_1$, $\varrho \cdot \sigma_2$ jsou navzájem rovnoběžné, což jsme chtěli dokázat.

Jistým obrácením předchozí poučky je tato poučka:

V5. Je-li přímka p rovnoběžná s aspoň jednou přímkou q roviny ϱ, je $p \| \varrho$.

Důkaz: Je-li $p \| q$, pak buď přímka p splyne s přímkou q a věta je dokázána, nebo p, q nemají společný bod, a proto i p, ϱ nemají společný bod. Odůvodněte podrobně.

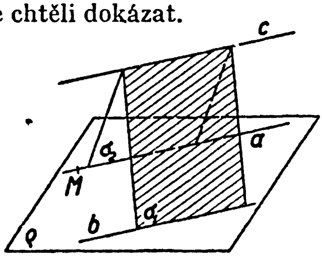
Smysl pouček V4, V5 je v tom, že převádějí pojem přímky rovnoběžné s rovinou na pojem dvou rovnoběžek. Z nich také vyplývá existence přímky rovnoběžné s rovinou.

V6. Každým bodem v prostoru lze vésti k dané přímce jedinou rovnoběžku.

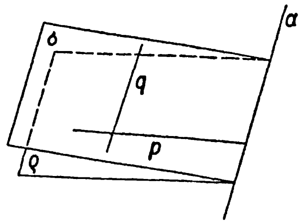
Tato poučka v podstatě říká, že známý axiom o rovnoběžkách platí i v prostoru. Dokažte si ji sami; rozeznávejte přitom dva přídy: a) daný bod leží na dané přímce, b) daný bod leží mimo danou přímku.

V7. Je-li $a \| b$ a $b \| c$, pak je $a \| c$.

Důkaz: Leží-li všecky tři přímky v téže rovině (to nastane také v případě, když některé dvě splynou), je V7 známá poučka z planimetrie. Můžeme se při důkaze tedy omezit na případ, že přímka c leží mimo rovinu ϱ rovnoběžek a, b, které jsou ovšem navzájem různé (obr. 5). Podle V5 je pak $c \| \varrho$. Na přímce a zvolme bod M mimo přímku c. Rovina σ_1 rovnoběžek b, c a rovina $\sigma_2 \equiv Mc$ protnou podle poučky V4 rovinu ϱ ve dvou rovnoběžkách: jedna z nich, $\sigma_1 \cdot \varrho$, je přímka b, druhá, $\sigma_2 \cdot \varrho$, prochází bodem M a splyne tedy s přímkou a. Protože je podle V4 také $\sigma_2 \cdot \varrho \| c$, je $a \| c$, jak jsme chtěli dokázat.



Obr. 5.



Obr. 6.

Poučka V7 vyjadřuje, že t. zv. **transitivnost rovnoběžnosti** přímek, která platila v rovině, platí i v prostoru. Také rovnoběžnost rovin má obdobnou vlastnost, vyslovíme ji poučkou.

V8. Je-li $\varrho \| \sigma$ a $\sigma \| \tau$, pak je $\varrho \| \tau$.

Z diskuse vzájemné polohy tří rovin je zřejmé, že jediný případ, kde se vyskytují dvě dvojice rovnoběžných rovin, je případ 1° (str. 92). Pak jsou i roviny třetí dvojice rovnoběžné a tím je poučka V8 dokázána.

Další poučka je důležité **kriterium pro rovnoběžnost rovin:** podle ní poznáme, jsou-li dvě roviny rovnoběžné.

V9. Obsahuje-li rovina σ dvě přímky p, q navzájem různoběžné, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou ϱ, pak je $\sigma \| \varrho$.

Důkaz: Roviny ϱ, σ jsou buď bez společných bodů a pak je poučka správná. Mají-li společný bod, pak musíme dokázat, že splynou (obr. 6). Roviny mají v tomto případě společnou přímku a. Přímka a je různoběžná s aspoň jednou z přímek p, q (proč?), na př. s přímkou p. Ježto je $p \| \varrho$ a mimo to má přímka p s rovinou ϱ společný bod $a \cdot p$, leží p v rovině ϱ. Avšak dvěma různoběžkami a, p je určena podle V2 jediná rovina. Proto roviny ϱ, σ splynou, čili jsou též rovnoběžné.

V10. Všecky přímky, které procházejí daným bodem A a jsou rovnoběžné s danou rovinou ϱ, vyplňují rovinu $\sigma \| \varrho$.

Důkaz: Leží-li bod A v rovině ϱ, je poučka zřejmě správná; odůvodněte podrobně. Leží-li bod A mimo rovinu ϱ, vedeme jím dvě určité různé přímky $p \| \varrho$, $q \| \varrho$ a libovolnou další přímku $x \| \varrho$. Roviny pq, px jsou obě podle V9 rovnoběžné s rovinou ϱ, a proto jsou podle V8 rovnoběžné navzájem. Ježto však mají společný bod A, splynou, t. j. přímka x leží v rovině $\sigma \equiv pq$.

Důležitý důsledek poučky V10 je věta

V11. Daným bodem A v prostoru lze k dané rovině ϱ vésti jedinou rovinu rovnoběžnou.

Že taková rovina σ existuje, nám ukazuje poučka V10. Zbývá dokázat, že je jediná. Označme si τ libovolnou rovinu, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou ϱ. Každá přímka roviny τ, která jde bodem A, je rovnoběžná s rovinou ϱ; odůvodněte. Proto roviny τ, σ splynou.

Poučka V11 znamená, že pro rovnoběžné roviny platí obdobná základní vlastnost jako pro rovnoběžné přímky (viz poučku V6).

Vyslovíme ještě dvě poučky o rovnoběžných rovinách a přímkách, kterých se v stereometrii velmi často užívá.

V12. Je-li $\varrho \| \sigma$ a je-li rovina τ různoběžná s rovinou ϱ, je různoběžná také s rovinou σ a platí, že $\varrho \cdot \tau \| \sigma \cdot \tau$.

V13. Je-li přímka p rovnoběžná s dvěma navzájem různoběžnými rovinami ϱ, σ, pak je $p \| \varrho \cdot \sigma$.

Poučku V12 jsme vlastně již dokázali při diskusi vzájemné polohy tří rovin (str. 92); vyložte podrobně.

Poučku V13 odůvodníme takto: V13 je správná podle V4, leží-li přímka p v jedné z obou rovin. Leží-li p mimo ϱ i σ, zvolíme bod M na průsečnici $\varrho \cdot \sigma$. Rovina $\tau \equiv Mp$ protne roviny ϱ, σ v průsečnicích $\varrho \cdot \tau$, $\sigma \cdot \tau$, které jsou podle V4, 7 navzájem rovnoběžné, a ježto mají společný bod M, splynou. Je tedy $\varrho \cdot \tau \equiv \sigma \cdot \tau \equiv \varrho \cdot \sigma$ a tato přímka je podle V4 rovnoběžná s přímkou p.

Cvičení.

11. a) Přímky a, b, c protínají danou přímku m; přitom platí $a \parallel b$, $b \parallel c$. Dokažte, že přímky a, b, c, m leží v jedné rovině.
    b) a, m jsou dvě různoběžky. Geom. místo přímek x rovnoběžných s přímkou a a protínajících přímku m je rovina. Dokažte.

12. a, b jsou dvě mimoběžky. Dokažte, že žádné dvě různé jejich příčky nejsou rovnoběžné.

13. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Na hraně AD určete bod M tak, aby dělící poměr $(ADM) = -\frac{1}{3}$, a na hraně BC určete bod N tak, aby $(BCN) = \frac{3}{2}$. Zobrazte příčku p mimoběžek AB, CD takovou, aby bylo $p \parallel MN$.

    Kolik řešení má tato úloha? Kdy nemá úloha řešení?
    Úlohu řešte konstruktivně jako ve cvič. 6.

14. Budiž dána rovina ϱ a v ní různoběžník $ABCD$. Dále budiž a přímka, která prochází bodem A, ale neleží v rovině ϱ; dále budiž $c \parallel a$ přímka, která prochází bodem C.

    Dokažte, že roviny Ba, Dc, jakož i roviny Bc, Da, se protínají v přímkách u a v, při čemž je $u \parallel v \parallel a$.

15. Je dána rovina ϱ a dvě přímky $p \parallel q$. Dokažte:
    a) Když je $p \parallel \varrho$, je také $q \parallel \varrho$.
    b) Jestliže přímka p protíná rovinu ϱ, protíná ji i přímka q.

16. Roviny ϱ, σ se protínají v přímce p. Budiž $r \parallel p$ přímka roviny ϱ různá od přímky p a $s \parallel p$ přímka roviny σ rovněž různá od přímky p. Dokažte, že přímkami r, s je určena rovina π, která je různá od rovin ϱ, σ a že platí $\pi \parallel p$.

17. Jsou dány dvě různoběžné roviny $\varrho \equiv ABC$, $\sigma \equiv BCD$; budiž $P \not\equiv D$ bod na přímce AD.
    a) Bodem P veďte přímku p tak, aby platilo $p \parallel \varrho$, $p \parallel \sigma$. Zobrazte užitím čtyrstěnu.
    b) Přímkou p a bodem D je určena rovina τ. Zobrazte její průsečnici s rovinami ϱ a σ.

18. Je dán jehlan $V(MNPQ)$, jehož podstavou je lichoběžník $MNPQ$, kde $MN \parallel PQ$. Určete průsečnice rovin VMQ, VNP a rovin VMN, VPQ. Proveďte konstruktivní řešení užitím sítě jehlanu.

19. Jsou dány roviny $\varrho \parallel \varrho'$ a přímka p. Dokažte:
    a) Když je $p \parallel \varrho$, je také $p \parallel \varrho'$. Když o přímce q platí $q \parallel p$, platí také $q \parallel \varrho$, $q \parallel \varrho'$.
    b) Jestliže přímka p protíná rovinu ϱ, pak protíná i rovinu ϱ'.

20. Roviny ϱ_1, σ_1 mají průsečnici p_1. Dále jsou dány roviny ϱ_2, σ_2, o nichž platí $\varrho_2 \parallel \varrho_1$, $\sigma_2 \parallel \sigma_1$. Dokažte, že roviny ϱ_2, σ_2 jsou různoběžné; o jejich průsečnici p_2 pak platí $p_2 \parallel p_1$.

21. Dvě rovnoběžné roviny ϱ, ϱ' protněte přímkami $r \parallel s$ a označte R, S průsečíky těchto přímek s rovinou ϱ a R', S' průsečíky s rovinou ϱ'. Dokažte, že platí $RR' \uparrow\uparrow SS'$ a $\overline{RR'} = \overline{SS'}$.

22. Zobrazte čtyrstěn $VABC$. Bodem V veďte přímky $a' \parallel BC$, $b' \parallel CA$, $c' \parallel AB$. Dokažte, že přímky a', b', c' leží v jedné rovině, která je rovnoběžná s rovinou trojúhelníka ABC. [Užijte věty V6.]

23. V rovině ϱ je dán trojúhelník ABC, jeho vrcholy jsou vedeny rovnoběžky $a \parallel b \parallel c$, které neleží v rovině ϱ. Na přímkách a, b, c sestrojíme v témž poloprostoru vyťatém rovinou ϱ tři body A', B', C' tak, že $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$. Dokažte, že rovina $A'B'C'$ je rovnoběžná s rovinou ϱ.

24. Je dán jehlan $VABC$. Po přímce BC se pohybuje bod M.

a) Jaké útvary vyplní jednotlivé těžnice trojúhelníků VAM?

b) Co je geometrickým místem těžišť těchto trojúhelníků?

4. Poloprostor.

V planimetrii jste poznali důležitou vlastnost uspořádání bodů roviny: Každá přímka rozděluje rovinu ve dvě **poloroviny**, a to tak, že každý bod roviny náleží buď jedné nebo druhé polorovině, nebo dané, t. z. hraniční přímce. Obdobným způsobem rozděluje rovina prostor; to si vyložíme v tomto odstavci.

Definice: Budiž dána rovina ϱ a bod A mimo ni ležící. Nazveme **poloprostorem** $(\varrho\, A)$ soubor všech bodů X v prostoru, které mají tu vlastnost, že uvnitř úsečky AX neleží žádný bod roviny ϱ. Podle této definice náleží ovšem rovina ϱ poloprostoru $(\varrho\, A)$; tuto rovinu nazýváme **hraniční rovinou poloprostoru.** Body poloprostoru $(\varrho\, A)$, které neleží v hraniční rovině, jsou t. zv. **vnitřní body poloprostoru,** jejich soubor je **vnitřek poloprostoru.**

Uvědomte si názorný smysl této definice i vět, které následují.

V14. Budiž B bod poloprostoru (ϱA), ležící mimo rovinu ϱ; pak poloprostory (ϱA), (ϱB), jsou totožné.

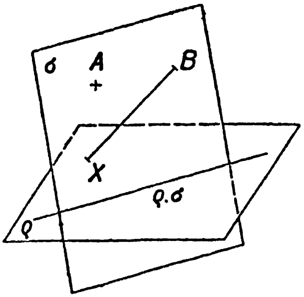
Důkaz: Máme-li dokázat totožnost dvou souborů bodů, musíme dokázat, že každý bod X poloprostoru $(\varrho\, A)$ je obsažen v poloprostoru $(\varrho\, B)$ a obráceně, že každý bod Y poloprostoru $(\varrho\, B)$ je obsažen v poloprostoru $(\varrho\, A)$.

Budiž tedy X bod z poloprostoru $(\varrho\, A)$, rozdílný od A, B. Body A, B, X buď leží v přímce, nebo tvoří trojúhelník. Leží-li v přímce, pak úsečku BX dostaneme vždy buď jako součet, nebo jako rozdíl úseček AX,

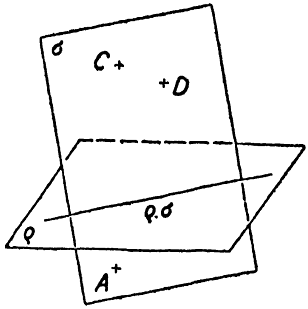
AB; poslední dvě úsečky podle předpokladu nemají s rovinou ϱ společný vnitřní bod, proto také úsečka BX nemá s rovinou ϱ společný vnitřní bod a bod X náleží poloprostoru $(\varrho\, B)$.

Tvoří-li body A, B, X trojúhelník, určují podle V1 jistou rovinu σ. Jsou-li roviny $\sigma \| \varrho$ rovnoběžné, pak nemají společný bod, neboť jsou navzájem různé. Proto také přímka BX i úsečka BX nemají s rovinou ϱ společný bod a bod X opět náleží poloprostoru $(\varrho\, B)$.

Jestliže jsou roviny ϱ, σ různoběžné (obr. 7), pak průsečnice $\varrho \cdot \sigma$ dělí rovinu σ ve dvě poloroviny, a body A, B, X náležejí téže polorovině. Proto také v tomto případě nemá úsečka BX s rovinou ϱ společný vnitřní bod a bod X náleží opět poloprostoru $(\varrho\, B)$.



Obr. 7.



Obr. 8.

Tím jsme dokázali, že každý bod X poloprostoru $(\varrho\, A)$ je obsažen v poloprostoru $(\varrho\, B)$, neboli že celý poloprostor $(\varrho\, A)$ je obsažen v poloprostoru $(\varrho\, B)$. Protože bod A zřejmě náleží poloprostoru $(\varrho\, B)$, vyplývá z předchozího (záměnou písmen A, B), že také celý poloprostor $(\varrho\, B)$ je obsažen v poloprostoru $(\varrho\, A)$ a tím je totožnost obou poloprostorů dokázána.

V15. Buďte C, D dva body, které nenáležejí poloprostoru $(\varrho\, A)$. Pak bod D náleží poloprostoru $(\varrho\, C)$.

Důkaz: Body A, C, D buď leží v přímce nebo tvoří trojúhelník. Leží-li v přímce, pak tato přímka je různoběžná s rovinou ϱ (proč?) a má s rovinou ϱ jediný společný bod. Tento bod však leží i uvnitř úsečky AC i uvnitř úsečky AD (neboť každá z těchto úseček obsahuje uvnitř podle předpokladu bod roviny ϱ). Z toho vyplývá, že bod A leží vně úsečky CD;

úsečka CD neobsahuje tedy žádný bod roviny ϱ, neboli bod D náleží poloprostoru $(\varrho\, C)$.

Tvoří-li body A, C, D trojúhelník, pak určují podle V1 jistou rovinu σ (obr. 8). Tato rovina ovšem nesplyne s rovinou ϱ, ale má s ní společné body (které?). Jsou tedy roviny ϱ, σ různoběžné a průsečnice $\varrho \cdot \sigma$ rozděluje rovinu σ ve dvě poloroviny. Z předpokladu plyne, že body A, C i A, D náležejí do různých polorovin, proto body C, D náležejí do téže poloroviny. Úsečka CD neobsahuje tedy žádný bod přímky $\varrho \cdot \sigma$, t. j. žádný bod roviny ϱ, a tudíž bod D náleží poloprostoru $(\varrho\, C)$.

Z pouček V14 a V15 vyplývá rozdělení **prostoru rovinou ve dva poloprostory.** Budiž dána rovina ϱ, zvolme bod A mimo ni a dále bod C, který nenáleží poloprostoru $(\varrho\, A)$. Takový bod C lze snadno určit. Spojíme bod A s některým bodem R roviny ϱ a zvolíme bod C na prodloužení úsečky AR za bod R. Každý bod X v prostoru, který neleží v rovině ϱ, náleží buď poloprostoru $(\varrho\, A)$, nebo podle poučky V15 poloprostoru $(\varrho\, C)$. Oba poloprostory $(\varrho\, A)$, $(\varrho\, C)$ mají společnou rovinu ϱ a oba dohromady skládají celý prostor.

Toto rozdělení prostoru rovinou ϱ je zdánlivě závislé na volbě bodů A, C. Avšak zvolíme-li místo bodu A libovolný jiný bod A' poloprostoru $(\varrho\, A)$ ležící mimo ϱ a místo bodu C libovolný jiný bod C', který nenáleží do $(\varrho\, A')$, dojdeme k týmž dvěma poloprostorům. Neboť podle poučky V14 jsou poloprostory $(\varrho\, A)$, $(\varrho\, A')$ totožné, to znamená, že bod C' náleží podle V15 do poloprostoru $(\varrho\, C)$ a pak jsou podle V14 také poloprostory $(\varrho\, C)$, $(\varrho\, C')$ totožné. Říkáme, že poloprostory $(\varrho\, A)$, $(\varrho\, C)$ **jsou oba vyťaty** touž **rovinou** ϱ; někdy je nazýváme **opačné.**

Z řady vět o poloprostorech uvedeme tyto nejběžnější:

V16. Je-li přímka p (rovina σ) rovnoběžná s rovinou ϱ, pak celá přímka p (rovina σ) náleží témuž poloprostoru vyťatému rovinou ϱ.

V17. Je-li přímka p (rovina σ) různoběžná s rovinou ϱ, dělí ji průsečík (průsečnice) ve dvě polopřímky (poloroviny), z nichž každá náleží jednomu poloprostoru vyťatému rovinou ϱ.

V18. Je-li bod A mimo rovinu ϱ a je-li bod B roviny ϱ, pak polopřímka BA (i s počátkem B) náleží poloprostoru $(\varrho\, A)$.

Poučky V16, V17, V18 si dokážete snadno sami.

25. Na hranách AB, CD, $C'D'$ krychle $ABCDA'B'C'D'$ jsou dány body P, Q, R tak, že $\overline{AP} = \frac{1}{4}\overline{AB}$, $\overline{CQ} = \frac{1}{5}\overline{CD}$, $\overline{C'R} = \frac{1}{3}\overline{C'D'}$. Označme M, M' středy stěn $ABCD$, $A'B'C'D'$, S střed krychle. Zjistěte, které z bodů M, M', S leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou PQR.
26. Je dán čtyrstěn $ABCD$, M je střed hrany AB. a) Dokažte, že těžiště T trojúhelníka BCD a vrchol A leží v opačných poloprostorech vyťatých rovinou CDM. b) Je-li U těžiště trojúhelníka ABC, dokažte, že úsečky AT, DU mají společný vnitřní bod.
27. Jestliže rovina $\sigma \| \varrho$ nenáleží poloprostoru (ϱA), pak celý poloprostor (ϱA) je obsažen v poloprostoru (σA). Dokažte.
28. Polopřímka AX má s rovinou ϱ společný jediný bod. Určete rovinu σ tak, aby rovina ϱ i polopřímku AX ležely v témž poloprostoru vyťatém rovinou σ.
29. Trojúhelníky ABC, ADE mají jediný společný bod A a leží v různých rovinách. Určete rovinu ϱ tak, aby oba trojúhelníky ležely v poloprostoru (ϱA).
30. Leží-li všecky vrcholy vypuklého mnohoúhelníka v poloprostoru (ϱA), leží všecky body mnohoúhelníka v tomto poloprostoru. Dokažte.
31. Dvě poloroviny, které mají společnou jedinou přímku, leží vždy v témž poloprostoru. Dokažte.
32. Dvě poloroviny mají společný jediný bod. Dokažte, že leží v různoběžných rovinách a že jejich hraniční přímky jsou různoběžné.
33. Je dána úsečka AA', jejíž krajní bod A leží v dané rovině ϱ, kdežto bod A' v rovině ϱ neleží. Budiž R libovolný bod roviny ϱ; dále budiž R' bod poloprostoru $(\varrho A')$, při čemž platí $RR' \uparrow\uparrow AA'$, $\overline{RR'} = \overline{AA'}$. Co je geometrickým místem bodu R', jestliže bod R probíhá rovinu ϱ?
34. Jestliže 5 různých bodů leží mimo rovinu ϱ, kolik úseček spojujících dva z nich protne rovinu ϱ? (Jsou 3 možnosti.)

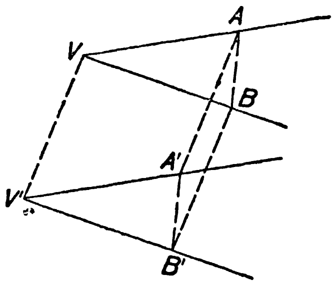
5. Úhel dvou přímek a rovin.

V tomto odstavci se začneme zabývat vlastnostmi metrickými. V planimetrii jste poznali pojem **souhlasných rovnoběžek** a odvodili jste si výsledek, že úhly s rameny souhlasně rovnoběžnými jsou stejně velké. Převezmeme pojem souhlasných rovnoběžek i ve stereometrii (zopakujte si definici!); pak i zde platí poučka:

V19. Budiž dán úhel AVB (rozumíme dutý úhel) a nechť přímky VA, $V'A'$; VB, $V'B'$ jsou souhlasně rovnoběžné

($VA \uparrow\uparrow V'A'$; $VB \uparrow\uparrow V'B'$). Pak úhly AVB, $A'V'B'$ jsou si rovny.

Důkaz (obr. 9): Protože v planimetrii byla poučka dokázána, můžeme předpokládat, že roviny ABV, $A'B'V'$ nesplynou, ale podle poučky V9 jsou rovnoběžné. Víme, že body A', B' mohou být zvoleny tak, že $\overline{VA} = \overline{V'A'}$, $\overline{VB} = \overline{V'B'}$. Z předpokladu poučky pak vyplývá, že čtyrúhelníky $VAA'V'$ a $VBB'V'$ jsou rovnoběžníky; proto je $VV' \| AA'$, $VV' \| BB'$ a podle V7 též $AA' \| BB'$. Rovina rovnoběžek AA', BB' protne roviny ABV, $A'B'V'$ podle V12 ve dvou rovnoběžkách, t. j. $AB \| A'B'$. Je tedy také čtyrúhelník $AA'B'B$ rovnoběžníkem, t. j. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Trojúhelníky ABV, $A'B'V'$ jsou podle věty *sss* shodné a tedy $\sphericalangle AVB = \sphericalangle A'V'B'$.



Obr. 9.

Z poučky V19 vyplývají přímo další důsledky:

V20. Budiž dán úhel $\sphericalangle AVB$ a nechť platí $VA \uparrow\uparrow V'A'$, $VB \uparrow\downarrow V'B'$. Pak úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$ jsou výplňkové.

V21. Budiž dán úhel $\sphericalangle AVB$ a nechť platí $VA \uparrow\downarrow V'A'$, $VB \uparrow\downarrow V'B'$. Pak úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$ jsou stejně velké.

Správnost obou vět nahlédnete snadno sami, přejdete-li v prvním případě k úhlu vedlejšímu a v druhém případě k úhlu vrcholovému vzhledem k $\sphericalangle A'V'B'$ a použijete V19.

Na základě poučky V19 můžeme vysloviti definici:

Velikost úhlu dvou přímek*) a, b, které nejsou rovnoběžné (ale mohou být mimoběžné) je velikost úhlu přímek $a' \| a$, $b' \| b$, vedených libovolným bodem X v prostoru.

K této definici je třeba několika poznámek.

1. Velikost úhlu dvou přímek v prostoru je definována pomocí velikosti úhlu dvou různoběžek; protože velikost úhlu dvou různoběžek je určena s výjimkou kolmic dvojznačně, platí to i o velikosti úhlu libovolných dvou přímek. Zdůrazněme, že ovšem stále jde o duté úhly.

2. Aby definice měla smysl, nesmí velikost úhlu dvou přímek a, b záviseti na volbě pomocného bodu X. Zvolíme-li si dva libovolné body

*) Někdy místo velikost úhlu říkáme krátce úhel.

X_1, X_2 a vedeme-li jimi příslušné rovnoběžky $a_1 \| a$, $b_1 \| b$, $a_2 \| a$, $b_2 \| b$, pak podle V19 jsou úhly různoběžek a_1, b_1 a a_2, b_2 stejné; tím je nezávislost prokázána.

3. Velikost dvou přímek (různoběžek) byla definována již v planimetrii. Je zřejmé, že tato nová definice není s původní definicí ve sporu, naopak, že je jejím zobecněním.

4. Abychom nemusili vylučovat rovnoběžky, doplňujeme vyslovenou definici tak, že rovnoběžky (splývající nebo různé) určují také dvě velikosti úhlu; a to úhel nulový a úhel přímý.

Dvě přímky nazýváme **(prostorově) kolmé,** jestliže jejich úhel je pravý.

Úhel dvou různoběžných rovin ϱ, σ definujeme takto: v rovině ϱ sestrojíme libovolnou kolmici r k průsečnici $\varrho . \sigma$ a v rovině σ libovolnou kolmici s k průsečnici $\varrho . \sigma$. Úhel přímek r, s se nazývá úhlem rovin ϱ, σ.

Poznámky k předchozí definici:

1. Jako úhel dvou přímek je i úhel dvou rovin definován dvojznačně s výjimkou případu, kdy r, s jsou kolmice.

2. Také při této definici plyne z poučky V19 její nezávislost na volbě kolmic r, s.

3. Definici úhlu dvou rovin doplňujeme i pro roviny rovnoběžné: jejich úhel je nulový a přímý.

Dvě **roviny** se nazývají k sobě **kolmé,** je-li jejich úhel pravý.

Pro kolmé přímky a roviny používáme obvyklého označení $p \perp q$, $\varrho \perp \sigma$. Že existují kolmé přímky, je známo z planimetrie; existence kolmých rovin bude prokázána později.

Cvičení.

35. Buďte AB, CD dvě dané mimoběžky; potom body A, B, C, D určují čtyrstěn $ABCD$; zobrazte tento čtyrstěn a zobrazte také úhly obou mimoběžek AB, CD, a to tak, aby jednou vrchol těchto úhlů padl do bodu A, po druhé do bodu D. Dokažte dále, že je možné mimoběžkou AB položit rovinu ϱ a mimoběžkou CD rovinu σ tak, aby bylo $\varrho \| \sigma$.

36. Zobrazte základní kvádr $ABCDA'B'C'D'$. Přímky AB', CD' jsou dvě mimoběžky, které jsou rovnoběžné s nákresnou; proto můžete určit skutečnou velikost úhlů těchto mimoběžek. Proveďte!

37. Buďte $\varrho_1 \equiv rA_1$, $\varrho_2 \equiv rA_2$ dvě různé, ale nikoli opačné poloroviny. Dále budiž α rovina, která není rovnoběžná s přímkou r, takže protíná poloroviny ϱ_1, ϱ_2 ve dvou různých polopřímkách AA_1, AA_2. Potom rovina $\beta \parallel \alpha$ protne poloroviny ϱ_1, ϱ_2 také v různých polopřímkách BB_1, BB_2, při čemž platí $\sphericalangle A_1AA_2 = \sphericalangle B_1BB_2$; dokažte!

38. Buďte ϱ, σ dvě různoběžné roviny a r, s různoběžné kolmice vztyčené v těchto rovinách k jejich průsečnici $\varrho \,.\, \sigma$; potom přímky r, s určují úhly rovin ϱ, σ. Z výsledku předchozího cvičení dokažte znovu, že velikost úhlů obou rovin ϱ, σ není závislá na poloze průsečíku přímek r, s.

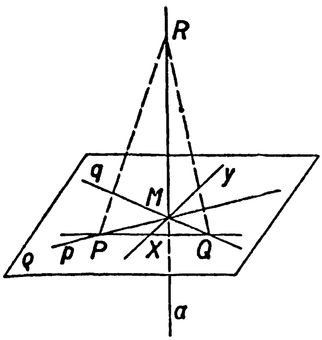
39. Zobrazte čtyrstěn $VABC$ a označte $\varrho \equiv ABC$. Uvnitř hrany VA zvolte bod A' a dokažte, že rovina $\varrho' \parallel \varrho$ vedená bodem A' protíná úsečky VB, VC v jejich vnitřních bodech B', C'.

Jestliže je $c = \dfrac{\overline{VA'}}{\overline{VA}}$, potom platí $\overline{VB'} = c \cdot \overline{VB}$, $\overline{VC'} = c \cdot \overline{VC}$ a $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, přitom c je koeficient podobnosti.

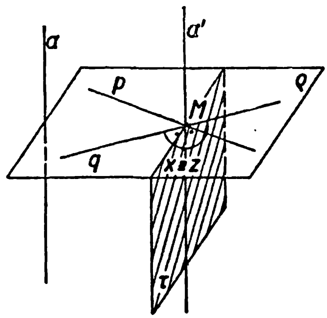
40. Buďte dány roviny $\varrho \parallel \varrho'$, $\sigma \parallel \sigma'$, kde ϱ, σ jsou dvě různoběžné roviny.
a) Dokažte, že také roviny ϱ', σ' jsou různoběžné.
b) Ke každému z úhlů rovin ϱ', σ' lze najít úhel rovin ϱ, σ, který je mu roven. Dokažte.

6. Přímka kolmá k rovině. Vzdálenost bodu od roviny.

V22. Bodem M přímky a nechť procházejí dvě různé přímky p, q obě kolmé k přímce a. Pak přímka a je kolmá ke všem přímkám roviny $\varrho \equiv pq$.



Obr. 10,



Obr. 11.

Důkaz: (Obr. 10.) Na přímce a zvolme bod $R \not\equiv M$ a v rovině ϱ libovolný bod $X \not\equiv M$. Bodem X veďme v rovině ϱ přímku tak, aby na přímkách p, q vyťala stejně dlouhé úseky $\overline{MP} = \overline{MQ}$ (jak to provedeme?). Trojúhelník $\triangle_1 \equiv RPQ$ je rovnoramenný s rameny $\overline{RP} = \overline{RQ}$; neboť trojúhelníky MRP a MRQ jsou shodné podle věty sus. Z trojúhelníků MRP a MRQ složíme nový rovnoramenný trojúhelník $\triangle_2$ se základnou $\overline{PM} + \overline{MQ}$. Trojúhelníky $\triangle_1$, $\triangle_2$ mají stejně dlouhá ramena, ale základna prvního je kratší než základna druhého (proč?). Proto je výška v_1 prvního delší než výška v_2 druhého trojúhelníku. Avšak zřejmě je $\overline{RX} \geqq v_1$, $v_2 = \overline{RM}$; proto $\overline{RX} > \overline{RM}$. Bod M je tedy bod roviny ϱ nejbližší bodu R.

Je-li nyní y libovolná přímka roviny ϱ procházející bodem M, je M bod přímky y nejbližší bodu R, proto je $RM \perp y$, neboli $a \perp y$. Z toho vyplývá, že přímka a je kolmá ke všem přímkám roviny ϱ, jak jsme chtěli dokázat.

V23. Všecky přímky procházející daným bodem M a kolmé k dané přímce a vyplní jistou rovinu ϱ, kterou nazýváme rovinou kolmou k přímce a. Přímka a je ovšem kolmá ke všem přímkám roviny ϱ.

Důkaz: (Obr. 11.) Bodem M veďme přímku $a' \| a$ a přímky $p \perp a'$, $q \perp a'$. Přímka a' i přímka a jsou podle poučky V22 kolmé ke všem přímkám roviny $\varrho \equiv pq$. Budiž nyní $x \perp a'$ jiná přímka procházející bodem M. Rovina $\tau \equiv a'x$ protne rovinu ϱ v jisté přímce z a podle věty V22 je $z \perp a'$. Avšak v rovině ϱ lze bodem M vésti jen jednu kolmici k přímce a'; proto je $x \equiv z$. Všecky kolmice $x \perp a'$ procházející bodem M leží tedy v rovině $\varrho \equiv pq$. Tím je poučka V23 dokázána.

Větu V23 vyslovujeme někdy také takto: **Daným bodem prochází jediná rovina kolmá k dané přímce.** Pro označení roviny kolmé k přímce budeme užívat znaku $\varrho \perp a$.

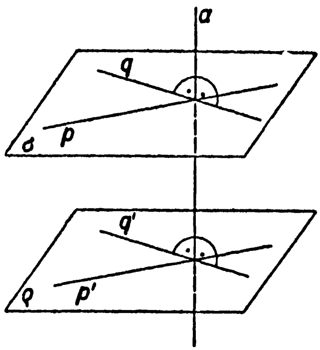
V24. Je-li $\varrho \| \sigma$ a $\sigma \perp a$, pak je $\varrho \perp a$.

Důkaz: (Obr. 12.) Rovina σ a přímka a jsou různoběžné; jejich průsečíkem veďme v rovině σ dvě různoběžky p, q. Patrně je $p \perp a$, $q \perp a$. Také rovina ϱ a přímka a jsou různoběžné (odůvodněte). Proto roviny pa, qa protínají rovinu ϱ v jistých přímkách p', q' a podle V12 je $p \| p'$, $q \| q'$, t. j. $p' \perp a$, $q' \perp a$, t. j. $\varrho \perp a$.

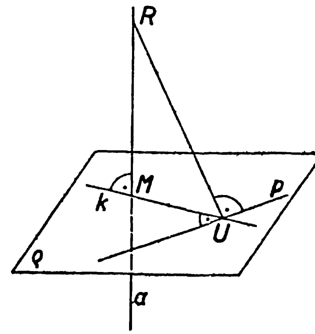
Předchozí poučky se týkaly roviny kolmé k dané přímce. Je otázka, zda obráceně k dané rovině ϱ lze daným bodem R vésti kolmici, t. j. přímku kolmou ke všem přímkám roviny ϱ, a kolik je takových kolmic. **Dokážeme nejprve, že taková kolmice může být nejvýše jedna.** Je-li totiž $a \perp \varrho$, je přímka a kolmá ke všem přímkám roviny ϱ, a proto podle V4 není $a \| \varrho$. Procházejí-li bodem R dvě různé kolmice k rovině, pak jejich rovina τ je podle A3 různoběžná s rovinou ϱ a protíná ji v přímce $s \equiv \varrho \cdot \tau$.

Ale pak v rovině τ procházejí bodem R dvě různé přímky kolmé k přímce s, což není možné. Zbývá tedy dokázat jen existenci kolmic.

V25. Z bodu R ležícího mimo rovinu ϱ lze spustiti na rovinu ϱ jedinou kolmici; její průsečík M s rovinou nazýváme patou této kolmice.



Obr. 12.



Obr. 13.

Důkaz: (Obr. 13.) V rovině ϱ zvolme přímku p, v rovině Rp spusťme z bodu R kolmici na přímku p; její patu označme U. Bodem U veďme v rovině ϱ přímku $k \perp p$. V rovině Rk spusťme z bodu R kolmici a na přímku k. Podle konstrukce je $p \perp k$, $p \perp RU$, t. j. $p \perp kR$. Ježto přímka a leží v rovině kR, je také $p \perp a$. Avšak podle konstrukce je též $a \perp k$, t. j. $a \perp pk$, neboli $a \perp \varrho$, což jsme chtěli dokázat.

Postup v důkazu V25 udává zároveň cestu, jak spustíme kolmici z bodu na rovinu: můžeme místo jedné přímky p v rovině ϱ použít dvou různoběžných přímek p_1, p_2; příslušné kolmice k_1, k_2 (které jsou různoběžné) se pak protnou v patě M hledané kolmice.

V26. V bodě R dané roviny ϱ lze vztyčit k rovině ϱ jedinou kolmici.

Důkaz: Sestrojme rovinu $\sigma \parallel \varrho$ (a nesplývající s ϱ). Z bodu R spusťme kolmici a na rovinu σ podle V25. Podle V24 je $a \perp \varrho$.

V27. Všecky přímky kolmé k téže rovině jsou navzájem rovnoběžné.

Důkaz: Budiž $a \perp \varrho$. Libovolným bodem X roviny ϱ veďme přímku $x \parallel a$. Ježto přímka a je kolmá ke všem přímkám roviny ϱ, platí totéž o přímce x, proto $x \perp \varrho$.

V28. Budiž dána rovina ϱ a bod R (v ní nebo mimo ni). Pak existuje bod R_0 roviny ϱ nejbližší bodu R. Leží-li bod R v rovině ϱ, je $R_0 \equiv R$, leží-li bod R mimo rovinu ϱ, je R_0 pata kolmice spuštěné z bodu R na rovinu ϱ. Délka úsečky RR_0 se nazývá vzdálenost bodu R od roviny ϱ.

Důkaz této poučky si provedete snadno sami.

Cvičení.

41. Buďte dány přímky $k \parallel l \parallel m$, které neleží v jedné rovině. Označme K libovolný bod přímky k a L, M paty kolmic KL, KM spuštěných z bodu K na přímky l, m. Dokažte, že úsečka LM udává vzdálenost přímek l a m.

42. Budiž $ABCD$ rovnoběžník se středem O; mimo rovinu ϱ rovnoběžníka je dán bod V, o němž platí $\overline{VA} = \overline{VC}$, $\overline{VB} = \overline{VD}$. Dokažte, že $OV \perp \varrho$.

43. Je dán bod C' a dvě přímky m, n. Bodem C' veďte přímku k, která je kolmá k přímce m a protíná přímku n.
a) Stanovte podmínku řešitelnosti.
b) Úlohu zobrazte na základním kvádru $ABCDA'B'C'D'$ tak, že zvolíte $m \equiv BA'$, $n \equiv AC$. (Víte, že přímka $B'C'$ je kolmá k nákresně.)

44. Budiž dána rovina ϱ a v ní bod R; budiž dále q přímka různoběžná s rovinou ϱ. V rovině ϱ veďte bodem R přímku k tak, aby byla kolmá k přímce q.
Zobrazte úlohu na základním kvádru $ABCDA'B'C'D'$ (volte $\overline{AD}$ dosti veliké). Volte: $R \equiv C'$, $\varrho \equiv CDC'D'$, $q \equiv CA'$.

45. Budiž C' pata kolmice spuštěné z bodu C na rovinu π, při čemž bod C v rovině π neleží. Dále buďte X, Y body roviny π, o nichž platí $\overline{CX} = 255$ cm, $\overline{CY} = 150$ cm; přitom je $\overline{C'X} : \overline{C'Y} = 5 : 2$. Určete vzdálenost bodu C od roviny π. (Položte $\overline{C'X} = 5x$, $\overline{C'Y} = 2x$ a vyjádřete dvojím způsobem $\overline{CC'}$.)

46. Je dána rovina ϱ a přímka $p \parallel \varrho$. Dokažte, že kterýkoli bod přímky p má od roviny ϱ touž vzdálenost v (t. z. vzdálenost přímky od roviny).

47. Na přímce a leží tři různé body P, Q, R, jejichž vzdálenost od roviny ϱ je stejná. Dokažte, že $a \parallel \varrho$. (Uvažte, že aspoň dva z bodů P, Q, R leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou ϱ).

48. Jsou dány roviny $\varrho \parallel \varrho'$. Dokažte, že kterýkoli bod roviny ϱ má od roviny ϱ' touž vzdálenost v a kterýkoli bod roviny ϱ' má od roviny ϱ vzdálenost rovněž v (t. zv. vzdálenost rovnoběžných rovin).
(Užijte výsledku cvič. 46 a poučky V27.)

49. Vztyčíme-li v bodech A, B, C, ... roviny ϱ kolmé úsečky AA', BB', CC', ..., které jsou si vesměs rovny, při čemž body A', B', C', ... leží v témže poloprostoru vyťatém rovinou ϱ, potom body A', B', C' ... leží v určité rovině $\varrho' \parallel \varrho$. Dokažte.

50. Určete geometrické místo bodů, které mají od roviny ϱ vzdálenost velikosti v.

51. Buďte dány roviny $\varrho \parallel \sigma$ a v nich body R, S, R', S', při čemž je $RS \perp \varrho$ a $\overline{RS} < \overline{R'S'}$. Potom přímka $R'S'$ není kolmá k žádné z rovin ϱ, σ.

7. Roviny k sobě kolmé. Úhel přímky s rovinou.

V odstavci 5 jsme definovali roviny k sobě kolmé, jejich existenci jsme však výslovně neprokázali. To nyní můžeme učinit s pomocí poznatků odstavce 6. Sestrojme dvě různoběžné kolmice a, b; k jejich rovině $\varrho \equiv ab$ vztyčme v bodě $a \cdot b$ kolmici c a označme $\sigma \equiv ac$, $\tau \equiv bc$. Pak každé dvě z rovin ϱ, σ, τ jsou patrně navzájem kolmé. Takováto trojice rovin, z nichž každé dvě jsou navzájem kolmé, má velké použití.

Vyslovíme ještě tři vlastnosti kolmých rovin:

V29. Je-li $\varrho \perp \sigma$, pak každým bodem roviny ϱ prochází jedna přímka kolmá k rovině σ.

Dokažte poučku sami tak, že z libovolného bodu X roviny ϱ spustíte kolmici k na rovinu σ, a odůvodněte, že přímka k leží v rovině ϱ.

V30. Obsahuje-li rovina ϱ jednu přímku $a \perp \sigma$, pak je $\varrho \perp \sigma$. Tato věta je jakýmsi obrácením věty 29 a užívá se jí nejčastěji jako kriteria kolmosti rovin. Dokažte sami její správnost!

V31. Jsou-li dvě různoběžné roviny ϱ, σ obě kolmé k třetí rovině τ, pak je i jejich průsečnice kolmá k rovině τ.

Dokažte poučku sami tak, že z bodu průsečnice $\varrho \cdot \sigma$ spustíte kolmici k na rovinu τ, a odůvodněte, že k leží v rovinách ϱ i σ.

Přímkou a, která je kolmá k rovině ϱ, lze podle poučky V30 položiti nesčíslné množství rovin kolmých k rovině ϱ. Jak je tomu, není-li přímka a kolmá k rovině ϱ?

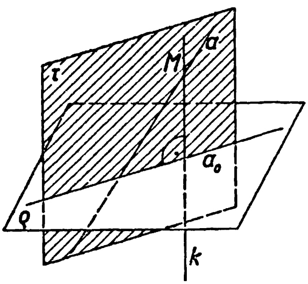
V32. Není-li přímka a kolmá k rovině ϱ, pak existuje jediná rovina τ kolmá k rovině ϱ, která obsahuje přímku a. Průsečnice a_0 rovin ϱ, τ se nazývá pravoúhlým průmětem přímky a do roviny ϱ.

Důkaz: (Obr. 14.) Zvolme na přímce a bod M. Existuje-li rovina $\tau \perp \varrho$, která obsahuje a, obsahuje tato rovina τ podle V29 i kolmici k sestrojenou bodem M k rovině ϱ. Rovina ak však je podle V30 skutečně kolmá k rovině ϱ. Tím je V32 dokázána.

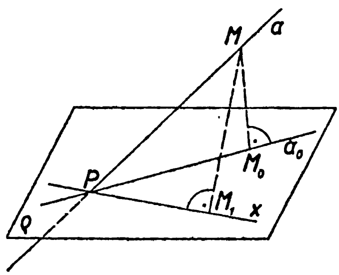
Definice. Budiž dána přímka a a rovina ϱ s ní různoběžná, ale nikoli k ní kolmá. **Úhel přímky** a **s rovinou** ϱ je úhel přímky a s jejím pravoúhlým průmětem a_0 do roviny ϱ.

Poznámky k předchozí definici:

1. Protože úhel dvou přímek, které nejsou navzájem kolmé, je určen dvojznačně, je také úhel přímky s rovinou určen dvojznačně. Odůvodněte, proč přímka a, která není kolmá k rovině ϱ, nemůže být kolmá k svému pravoúhlému průmětu a_0.



Obr. 14.



Obr. 15.

2. Vyslovenou definici doplňujeme pro přímku $a \perp \varrho$ tak, že úhel této přímky s rovinou ϱ je pravý (definován jednoznačně).

3. Definici doplňujeme i pro přímku $a \parallel \varrho$. Její úhel s rovinou ϱ je nulový a přímý.

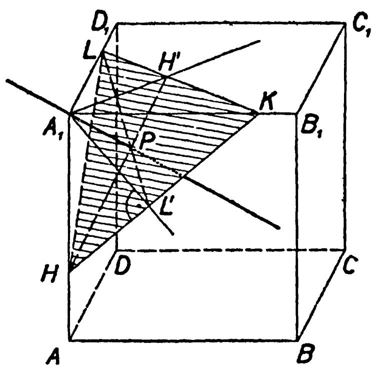
V33. *Budiž a přímka různoběžná s rovinou ϱ a nikoli k ní kolmá. Označme a_0 její pravoúhlý průmět do roviny ϱ a x libovolnou jinou přímku roviny ϱ vedenou průsečíkem $P \equiv a \cdot \varrho$. Pak ostrý úhel přímek a, x je větší než ostrý úhel přímek a, a_0*) a tupý úhel přímek a, x je menší než tupý úhel přímek a, a_0.*

Důkaz: (Obr. 15.) Postačí, dokážeme-li tvrzení o ostrých úhlech. Na přímce a zvolme bod $M \not\equiv P$ a spusťme z něho kolmice na přímky a_0,

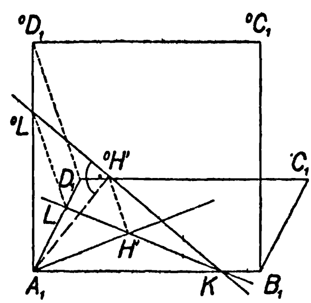
*) t. j. než ostrý úhel přímky a s rovinou ϱ.

x; jejich paty označme po řadě M_0, M_1. Máme porovnati (ostré) úhly $\sphericalangle MPM_0$, $\sphericalangle MPM_1$. Ježto $MM_0 \perp \varrho$ (odůvodněte!), je M_0 bod roviny ϱ nejbližší bodu M; proto $\overline{MM_1} > \overline{MM_0}$. Pravoúhlé trojúhelníky PMM_0 a PMM_1 mají společnou přeponu PM a o odvěsnách platí $\overline{MM_1} > \overline{MM_0}$ Proto jsou protější příslušné úhly ve vztahu $\sphericalangle MPM_1 > \sphericalangle MPM_0$ (na př. podle věty, že v dané kružnici k delší tětivě přísluší větší středový úhel). Tím je tvrzení V33 dokázáno.

Příklad: Z vrcholu A_1 krychle $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (obr. 16a) spusťte kolmici k k rovině $\varrho \equiv HKL$ a vyšetřte její patu P. Body H, K, L zvolte uvnitř hran A_1A, A_1B_1, A_1D_1. Úlohu řešte ve volném rovnoběžném promítání.



Obr. 16a.



Obr. 16b.

Řešení: Hledaná kolmice k je na př. průsečnicí dvou různých rovin σ_1, σ_2, které procházejí bodem A_1, při čemž je $\sigma_1 \perp HK$, $\sigma_2 \perp KL$. Protože hrany A_1A, A_1B_1, A_1D_1 krychle jsou navzájem kolmé, obsahuje rovina σ_1 bod L (je $A_1D_1 \perp HK$) a rovina σ_2 bod H (je $A_1A \perp LK$).

Rovina σ_1 je určena body A_1, L', L, kde L' je pata kolmice $A_1L' \perp HK$; na výšce LL' trojúhelníka HKL bude ležet bod P. Úhel $\sphericalangle A_1L'H = \frac{1}{2}\pi$ se zobrazí ve skutečné velikosti (rovina A_1B_1BA je rovnoběžná s nákresnou).

Rovina σ_2 je podobně určena body A_1, H', H, kde H' je pata kolmice $A_1H' \perp KL$; na výšce HH' trojúhelníka HKL bude ležet bod P, který je tedy průsečíkem přímek LL' a HH', takže $k \equiv A_1P$. Bod H' nelze přímo sestrojit. Určíme jej takto (obr. 16b): Stěnu $A_1B_1C_1D_1$ krychle uvedeme do polohy $A_1B_1{}^\circ C_1{}^\circ D_1$ rovnoběžné s nákresnou; pak bude ve skutečné velikosti, t. j. $\overline{A_1{}^\circ D_1} = \overline{A_1B_1}$, $A_1{}^\circ D_1 \perp A_1B_1$. Bod L se při tom dostane do polohy $^\circ L$, při čemž je $L{}^\circ L \parallel D_1{}^\circ D_1$ (dělicí poměr se zachová); přímka KL se dostane do polohy $K{}^\circ L$. Patou $^\circ H'$ kolmice $A_1{}^\circ H' \perp K{}^\circ L$ vedeme přímku $^\circ H'H' \parallel {}^\circ D_1D$, která na přímce KL vytne hledaný obraz H'. Tím je úloha řešena.

Cvičení.

52. Buďte dány dvě roviny $\varrho \perp \sigma$ a jejich průsečnice p; dále budiž dána přímka r roviny ϱ kolmá k p. Dokažte, že je $r \perp \sigma$.

53. Budiž dán čtyrstěn $VABC$; označme ϱ rovinu ABC. Buďte α, β, γ roviny, které procházejí bodem V a o nichž platí $\alpha \perp BC$, $\beta \perp CA$, $\gamma \perp AC$; průsečíky rovin α, β, γ s přímkami BC, CA, AC po řadě označte A_1, B_1, C_1. Dále budiž V_1 pata kolmice $VV_1 \perp \varrho$. Dokažte:
   a) $\alpha \perp \varrho$, $\beta \perp \varrho$, $\gamma \perp \varrho$.
   b) Roviny α, β, γ se protínají v přímce VV_1.
   c) Průsečnice A_1V_1, B_1V_1, C_1V_1 rovin α, β, γ stojí po řadě kolmo k přímkám BC, CA, AB.

54. Užitím cvič. 53 řešte úlohu: Určete pomocí sítě čtyrstěnu $VABC$ patu V_1 kolmice VV_1 spuštěné z bodu V na rovinu $\varrho \equiv ABC$. Je dáno $\overline{AB} = 8$; $\overline{BC} = 7$; $\overline{CA} = 6$; a dále a) $\overline{VA} = 6{,}8$; $\overline{VB} = 8{,}2$; $\overline{VC} = 7{,}6$. b) $\overline{VA} = 7$; $\overline{VB} = 10{,}5$; $\overline{VC} = 5$.

55. Budiž dán $\triangle\, ABC$ a mimo jeho rovinu ϱ bod V tak, že platí $\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC}$. Je-li V_1 pata kolmice $VV_1 \perp \varrho$, potom je bod V_1 středem kružnice trojúhelníku ABC opsané; dokažte.

56. V rovině ϱ leží pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona je c; mimo rovinu ϱ je dán bod V, který má ode všech tří vrcholů trojúhelníka ABC touž vzdálenost v. Určete vzdálenost bodu V od roviny ϱ.

57. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníka ABC, který leží v rovině ϱ, jsou a, b. Ve středu S přepony byla vztyčena kolmice SV k rovině ϱ, při čemž je $\overline{SV} = v$. Určete vzdálenost bodu V od vrcholů trojúhelníka ABC.

58. Pravoúhlým průmětem A_1 bodu A na rovinu ϱ rozumíme patu A_1 kolmice spuštěné z bodu A na rovinu ϱ; jestliže bod A leží v rovině ϱ, je $A_1 \equiv A$. Buďte A_1, B_1 pravoúhlé průměty bodů A, B na rovinu ϱ. O kterou délku je třeba prodloužit úsečku AB, aby protala rovinu ϱ v bodě R, jestliže je dáno $\overline{AA_1} = m$, $\overline{BB_1} = n$, $\overline{A_1B_1} = d_1$. Proveďte diskusi, v jakém pořádku leží body A, B, R, po případě za kterých podmínek je úloha neřešitelná.

59. Budiž A_1B_1 pravoúhlý průmět úsečky AB do roviny π. Obdržíme jej na průmětu A_1B_1 přímky AB jako spojnici průmětů krajních bodů

A, B, pokud ovšem není $AB \perp \pi$; je-li $AB \perp \pi$, potom je $A_1 \equiv B_1$. Dokažte:

a) Je-li φ jeden z ostrých úhlů přímky AB s rovinou π, je $\overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cdot \cos\varphi$.

b) Je-li $AB \perp \pi$, je $\overline{A_1B_1} = 0$.

c) Je-li $AB \parallel \pi$, je $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$.

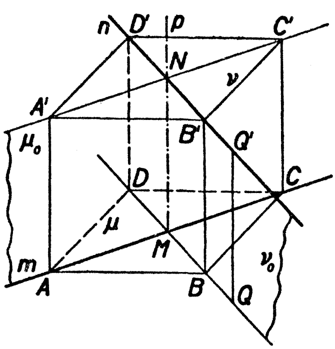
60. Pravoúhlé průměty p_1, q_1 dvou rovnoběžek p, q na rovinu ϱ jsou buď dvě rovnoběžky, nebo dva body. Dokažte. Jak je tomu s průměty dvou různoběžek?

61. Budiž $\sphericalangle\ AOP$ pravý úhel, který leží v rovině σ a jehož rameno OP leží v rovině ϱ. Pravoúhlý průmět úhlu $\sphericalangle AOP$ do roviny ϱ je opět úhel pravý, jestliže roviny ϱ, σ nejsou k sobě kolmé. Dokažte a zobecněte tuto poučku.

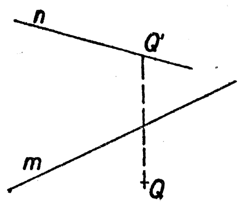
62. Dokažte, že pravoúhlými průměty p_1. q_1, mimoběžek p, q na rovinu ϱ mohou být:

a) různoběžky p_1, q_1; b) dvě různé rovnoběžky $p_1 \parallel q_1$; c) bod p_1 a přímka q_1, která jím neprochází.

Zobrazte tyto případy na základním kvádru $ABCDA'B'C'D'$ tak, že zvolíte $\varrho \equiv ABCD$ a dále a) $p \equiv AC'$, $q \equiv B'D'$, b) AD', CB', c) AA', BC'.



Obr. 17.



Obr. 18.

63. Zobrazte základní kvádr $ABCDA'B'C'D'$, při čemž je $m \equiv AC$, $n \equiv B'D'$. Dokažte:

a) Přímkami m, n je možno položit jediný pár rovin μ, ν tak, aby $\mu \parallel \nu$.

b) Budiž $\mu_0 \perp \mu$ rovina, která obsahuje přímku m, a $\nu_0 \perp \nu$ rovina, která obsahuje přímku n. Roviny μ_0, ν_0 se protínají v přímce $p \perp \mu$, která protíná přímky m, n v bodech M, N, takže $p \perp m$, $p \perp n$, Úsečka MN je nejkratší vzdálenost dvou bodů mimoběžek m. n.

c) V obr. 17 zobrazte úhel obou mimoběžek m, n.

64. Nad mimoběžkami m, n (z obr. 18) sestrojte kvádr $ABCD\,A'B'C'D'$, podobně jako v obr. 17 z předchozího cvič. 63. Předpokládejte, že rovina $\mu \equiv Qm$ je rovnoběžná s přímkou n.

8. Konvexní útvary. Klín, trojhran.

Pojem konvexního útvaru, který znáte z planimetrie, přeneseme si do stereometrie.

Geometrický útvar K (soubor bodů) budeme nazývat **konvexním,** jestliže má tuto vlastnost: *jsou-li X, Y libovolné dva body z* **K**, *pak celá úsečka XY náleží útvaru* **K**.

Podle této definice všecky útvary, které byly konvexní ve smyslu planimetrickém, na př. úsečka, úhel, polopřímka, vypuklý mnohoúhelník, kruh a j., jsou také konvexní ve smyslu stereometrickém. Příklad konvexního útvaru, který není rovinný, je poloprostor nebo vnitřek poloprostoru. Dokažte! Poznáme však ještě jiné důležité prostorové konvexní útvary.

K planimetrickému pojmu (dutého) úhlu lze ve stereometrii definovati dva obdobné pojmy. Dutý úhel je konvexní část roviny omezená dvěma polopřímkami, které mají společný počátek a neleží v téže přímce.

Jestliže místo dvou polopřímek se společným počátkem vezmeme dvě poloroviny se společnou hraniční přímkou, dostaneme t. zv. **klín.** Jestliže místo dvou polopřímek se společným počátkem, které neleží v jedné přímce, vezmeme tři polopřímky se společným počátkem, které neleží v jedné rovině, dostaneme t. zv. **trojhran.** Vyslovíme v dalším přesné definice.

V34. Buďte dány dvě různoběžné roviny ϱ, σ s průsečnicí p, dále bod A v rovině ϱ, bod B v rovině σ, oba mimo přímku p. Společné body poloprostorů (ϱB), (σA) (neboli t. zv. průnik těchto poloprostorů) tvoří konvexní útvar **K**. Průnik vnitřků obou poloprostorů je také konvexní útvar **V**. Ty body prostoru, které nenáležejí útvaru **K**, tvoří útvar nekonvexní.

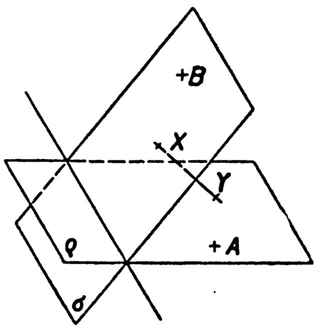
Útvar **K** nazýváme **klínem,** útvar **V vnitřkem klínu.** Poloroviny pA, pB jsou t. zv. **stěny klínu,** přímka p je **hrana klínu.**

Důkaz V34 (obr. 19): 1. Poloprostory ϱB i σA jsou konvexní. Jsou-li X, Y dva body, které náležejí oba oběma poloprostorům, pak úsečka XY náleží také oběma poloprostorům, t. j. útvaru **K**.

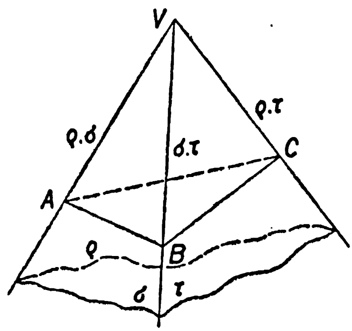
2. Vnitřky poloprostorů (ϱB) i (σA) jsou konvexní útvary, proto jejich průnik **V**, t. j. vnitřek klínu, je také konvexní útvar. Klín **K** zřejmě dostaneme, připojíme-li k vnitřku **V** obě jeho stěny pA a pB.

3. Na prodloužení úsečky AB za bod A zvolme bod C, na jejím prodloužení za bod B zvolme bod D. Body C, D zřejmě nenáležejí útvaru **K**, avšak část úsečky CD útvaru **K** náleží. Proto zbytek prostoru (po odebrání útvaru **K**) je útvar nekonvexní.

Definice. Budiž dán klín **K**. V jeho stěnách sestrojme polopřímky, vycházející z téhož bodu X hrany klínu a kolmé k této hraně. Obě polopřímky určují úhel, který se jmenuje **úhel klínu.** Je zřejmé, že jeho velikost nezávisí na volbě bodu X.



Obr. 19.



Obr. 20.

V35. Buďte dány tři roviny ϱ, σ, τ s jediným společným bodem V a dále body A, B, C po řadě na průsečnicích $\varrho \cdot \sigma$, $\sigma . \tau$, $\varrho . \tau$, ale mimo vrchol V. Průnik poloprostorů (ϱB), (σC), (τA) je konvexní útvar **T**. Také průnik vnitřků poloprostorů (ϱB), (ϱC), (τA) je konvexní útvar **V**. Útvar T dostaneme, připojíme-li k útvaru **V** úhly AVB, BVC, CVA (i s rameny). Body prostoru, které nenáležejí útvaru σ, tvoří útvar nekonvexní (obr. 20).

Útvar **T** nazýváme **trojhranem,** útvar **V** jeho **vnitřkem.** Úhly AVB, BVC, CVA jsou t. zv. **stěny trojhranu,** jejich velikost jsou **strany trojhranu.** Polopřímky VA, VB, VC jsou t. zv. **hrany trojhranu, T** je jeho **vrchol.**

Důkaz poučky V35 je obdobný důkazu poučky V34 a provedete si jej snadno sami.

Definice. Budiž dán trojhran **T** s vrcholem V a s hranami VA, VB, VC. Poloroviny VAB, VAC jsou stěnami jistého klínu; úhel tohoto klínu se nazývá **(vnitřním) úhlem trojhranu** při hraně VA. Podobně definujeme (vnitřní) úhly trojhranu při hranách VB, VC.

Trojhran může míti všecky úhly i všecky strany pravé. Model takového trojhranu jsme sestrojili na začátku odst. 7. Theorie trojhranu je v mnoha směrech prostorovou obdobou theorie trojúhelníku a je podkladem sférické geometrie (t. j. geometrie na ploše kulové).

Cvičení.

65. Průnik klínu s rovinou, která je různoběžná s hranou klínu, je dutý úhel. Dokažte.

66. Budiž dán klín, jehož úhel je a) ostrý, b) tupý. Rovina různoběžná s hranou klínu a kolmá jen k jedné jeho stěně, protne klín v úhlu a) menším nebo rovném, b) větším nebo rovném, než je úhel klínu. Rovnost nastane v případech jen tehdy, je-li rovina kolmá k hraně klínu. Dokažte.

67. Trojhran je průnik poloprostorů (ϱA), (σA), (πA). Co je průnikem doplňkových poloprostorů? Popište tento nový trojhran.

68. Je dán trojúhelník ABC a bod V ležící mimo jeho rovinu. Soubor polopřímek s počátkem V, které protínají rovinu ABC v bodech trojúhelníka ABC, je trojhran s hranami VA, VB, VC. Dokažte. Kterými poloprostory je tento trojhran určen?

69. Tři přímky, které procházejí týmž bodem a neleží v jedné rovině, určují čtyři dvojice trojhranů t. zv. vrcholových. Popište, jak.

70. Tři roviny, které procházejí týmž bodem a neobsahují jednu přímku, určují osm trojhranů. Popište, jak.

71. Pravidelný jehlan čtyrboký má podstavnou hranu 4 cm, pobočnou hranu 7 cm. Určete úhel klínu, jehož stěny obsahují dvě sousední pobočné stěny jehlanu.

72. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, střed hrany BC je M. Trojhran má hrany v polopřímkách $A'A$, $A'M$, $A'D$.

a) Sestrojte jeho strany a úhly.

b) Do náčrtku zakreslete trojhran souměrný podle přímky DM k danému trojhranu.

c) Do náčrtku zakreslete trojhran souměrný k danému trojhranu podle středu stěny $CC'D'D$.

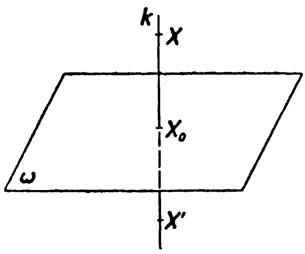
73. Součet stran trojhranu je menší než úhel plný. Dokažte. (Naneste na hrany trojhranu stejné úsečky a na podstavu vzniklého jehlanu spusťte výšku z vrcholu trojhranu.)

74. Trojhran má hrany $VA \perp VB \perp VC$; body V sestrojíme roviny $\varrho \perp VA$, $\sigma \perp VB$, $\tau \perp VC$. Roviny ϱ, σ, τ určí osm trojhranů (cv. 70). Určete vztah mezi stranami (úhly) původního trojhranu a úhly (stranami) nových trojhranů.

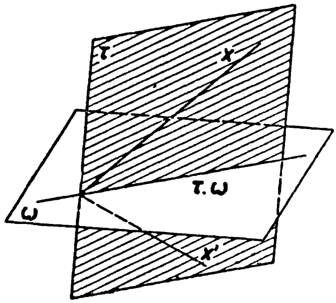
75. Pravidelný trojhran je takový, který má všecky strany stejně velké. Dokažte, že úhly pravidelného trojhranu jsou také stejně velké. (Naneste od vrcholu na jeho hrany stejně dlouhé úsečky a veďte jejich krajními body roviny kolmé k příslušným hranám; dokažte, že dostanete tři shodné trojúhelníky.)

9. Souměrnost podle roviny. Shodnost v prostoru.

Nejdůležitější zobrazení, které jste poznali v planimetrii, byla **osová souměrnost**. V prostoru má obdobný význam **souměrnost podle roviny (rovinová souměrnost)**.



Obr. 21.



Obr. 22.

Definice. (Obr. 21.) Budiž dána rovina ω, t. zv. **rovina souměrnosti.** Ke každému bodu X v prostoru sestrojíme jeho obraz X' takto: bodem X vedeme přímku $k \perp \omega$ a její průsečík s rovinou ω označíme X_0. Na přímce k sestrojíme k bodu X bod X' souměrně sdružený podle středu X_0. Tím je definováno zobrazení, zvané **souměrnost podle roviny** ω.

Jediné body, které splývají se svými obrazy v souměrnosti podle roviny, jsou body roviny ω. Tyto body, pro něž $X \equiv X'$, jmenují se **samodružné body.**

V36. Obrazem přímky (jako souboru bodů) v souměrnosti podle roviny je opět přímka.

Důkaz (obr. 22): Je-li přímka x kolmá k rovině souměrnosti, je jejím obrazem zřejmě táž přímka. Není-li $x \perp \omega$, pak podle V32 existuje rovina $\tau \perp \omega$, která obsahuje přímku x. Obraz přímky x v osové souměrnosti s osou $\tau \cdot \omega$ je jistá přímka x'; táž přímka je obrazem přímky x v souměrnosti podle roviny ω; odůvodněte!

Přímka, která splývá se svým obrazem, se jmenuje také samodružná. Snadno dokážeme větu:

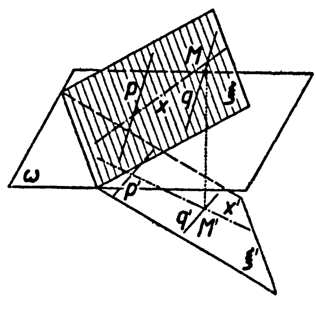
V37. **Jediné samodružné přímky v souměrnosti podle roviny ω jsou kolmice k rovině ω a přímky roviny ω.**

Důkaz: Budiž $x \equiv x'$ samodružná přímka. Buď obsahuje aspoň jeden bod A, který není samodružný, t. j. obsahuje také bod $A' \not\equiv A$ a splývá podle axiomu A4 s přímkou AA', která je kolmá k rovině ω. Nebo přímka x obsahuje jenom samodružné body, a pak leží v rovině ω. Uvedené přímky jsou skutečně samodružné.

Obdobným postupem jako ve větě 36 dokážete sami další vlastnosti souměrnosti podle roviny: obrazem polopřímky je polopřímka, obrazem úsečky je úsečka stejně dlouhá.

V38. **Obrazem roviny (jako souboru bodů) v souměrnosti podle roviny je opět rovina.**

Důkaz (obr. 23): V dané rovině ξ zvolme přímku p a mimo ni bod M. Rovina ξ je geometrické místo přímek x, které procházejí bodem M a protínají přímku p, doplněné přímkou $q \parallel p$ vedenou bodem M. Obraz ξ' roviny ξ dostaneme, sestrojíme-li obrazy x' všech přímek x a obraz q' přímky q. Tyto přímky x' procházejí bodem M' (t. j. obrazem bodu M) a protínají přímku p' (obraz přímky p). Přímka q' prochází také bodem M' a je $q' \parallel p'$, neboť bylo $q \parallel p$ (odůvodněte podrobně!). Přímky x' spolu s přímkou q' však vyplňují rovinu $M'p'$ a ta je hledaným obrazem ξ' roviny ξ.



Obr. 23.

Rovina, která splývá se svým obrazem, se jmenuje také samodružná rovina.

V39. **Jediné samodružné roviny v souměrnosti podle roviny ω jsou rovina ω sama a všecky roviny k ní kolmé.**

Důkaz: Budiž $\xi \equiv \xi'$ samodružná rovina. Buď obsahuje aspoň jeden bod A, který není samodružný, t. j. obsahuje také bod $A' \not\equiv A$, neboli podle axiomu A1 obsahuje přímku AA'. Podle věty V30 je pak $\xi \perp \omega$. Obsahuje-li ξ vesměs samodružné body, splyne s rovinou ω.

Snadno sami dokážete, že obrazem poloroviny v souměrnosti podle roviny je polorovina, obrazem poloprostoru je poloprostor. Vyslovíme ještě jednu důležitou poučku.

V40. Obrazem úhlu v souměrnosti podle roviny je úhel rovný danému úhlu.

Dokažte sami; nejprve odůvodněte, že obrazem úhlu je úhel, pak že obrazem trojúhelníka je trojúhelník s ním shodný (podle věty sss).

Jak je tomu s obrazem klínu a trojhranu?

Jako v planimetrii jsme zkoumali u daného geometrického útvaru jeho souměrnost podle osy, tak ve stereometrii zkoumáme **souměrnost útvaru podle roviny.**

Definujeme: **Útvar U** (jako soubor bodů) je **souměrný podle roviny** ω, jestliže jeho obraz **U**$'$ (t. j. soubor obrazů všech bodů útvaru **U**) je s ním totožný.

Tedy na př. přímka je souměrná podle každé roviny k ní kolmé, úsečka je souměrná jen podle takové roviny, která jde jejím středem.

Základní úlohou je, k danému útvaru nalézti všecky jeho roviny souměrnosti. Ukážeme si na příkladě dvou různoběžných rovin, jak takovou úlohu řešíme.

Máme nalézti všecky roviny souměrnosti útvaru, složeného ze dvou různoběžných rovin ϱ, σ. Podle věty V38 je ϱ' opět jedna z rovin ϱ, σ, tedy buď $\varrho' \equiv \varrho$, $\sigma' \equiv \sigma$, nebo $\varrho' \equiv \sigma$, $\sigma' \equiv \varrho$. V prvním případě jsou obě roviny samodružné, rovina souměrnosti ω je k oběma kolmá, a podle V31 je kolmá k jejich průsečnici. V druhém případě je samodružná jen průsečnice $p \equiv \varrho \cdot \sigma$. Rovina souměrnosti ω není však v tomto případě kolmá k p (neboť pak by bylo $\varrho \perp \omega$, $\sigma \perp \omega$, t. j. $\varrho' \equiv \varrho$, $\sigma' \equiv \sigma$ proti předpokladu). Proto podle V37 obsahuje rovina ω přímku p; půlí úhly všech čtyř klínů určených rovinami ϱ, σ; odůvodněte podrobně! Dvojice rovin má tedy tyto možné roviny souměrnosti: *a*) roviny kolmé k průsečnici obou rovin; *b*) roviny půlící úhly čtyř klínů. Všecky uvedené roviny jsou skutečně rovinami souměrnosti.

Pojem shodnosti v rovině jako zobrazení byl nejobecněji definován takto: dva rovinné útvary jsou shodné, lze-li jeden v druhý převést konečným počtem osových souměrností.

Vyslovíme obdobnou definici pro útvary prostorové:

Dva prostorové útvary jsou shodné, lze-li jeden v druhý převést konečným počtem souměrností podle rovin.

Je ovšem třeba ukázat, že tato definice shodnosti je rozšířením definice zavedené v planimetrii, t. j. že každé dva útvary shodné podle planimetrické definice shodnosti jsou také shodné podle této nové definice.

Buďte dva útvary $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ v rovině ϱ shodné podle planimetrické definice. To znamená, že máme konečný počet osových souměrností s osami $o_1, o_2, \ldots, o_n$, ležícími v rovině ϱ tak, že jimi lze převést útvar $\mathbf{U}_1$ v útvar $\mathbf{U}_2$. Utvoříme souměrnosti podle rovin $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, které procházejí přímkami $o_1, o_2, \ldots, o_n$ a jsou kolmé k rovině ϱ; těmito souměrnostmi přechází útvar $\mathbf{U}_1$ v útvar $\mathbf{U}_2$, a tím je důkaz proveden.

Souměrnosti podle rovin se skládají ovšem v jiné, složitější shodnosti. Tak jako v planimetrii na př. dvě osové souměrnosti s různoběžnými osami se skládají v otáčení kolem středu, tak dvě souměrnosti podle dvou navzájem různoběžných rovin se skládají v otáčení kolem osy (průsečnice obou rovin souměrnosti). Tyto složitější shodnosti nebudeme podrobněji vyšetřovati.

Vlastnosti shodných útvarů vyplývají přímo z vlastností souměrnosti podle roviny. Některé vlastnosti shodných útvarů si dokážete sami ve cvičeních.

Cvičení.

76. Dokažte, že v rovinové souměrnosti jsou obrazy dvou rovnoběžných přímek (rovin) dvě rovnoběžné přímky (roviny).

77. Přímka (rovina) a její obraz v rovinové souměrnosti jsou buď rovnoběžné navzájem i s rovinou souměrnosti, nebo jejich společné body leží v rovině souměrnosti. Dokažte!

78. Je dána krychle $ABCD\,A'B'C'D'$; P je bod hrany AB takový, že $\overline{AP} = 2\overline{BP}$. V náčrtku krychle zobrazte obrazec souměrně položený a) k čtverci $BCC'B'$, b) k trojúhelníku $BC'A'$ podle roviny $CC'P$.

79. Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$; V je jeho hlavní vrchol, S střed podstavy, bod M dělí úsečku AB v poměru 3 : 1. Sestrojte v náčrtku jehlanu těleso souměrné k němu sdružené podle roviny VSM.

80. Najděte všecky roviny souměrnosti dvojice mimoběžek.

81. Určete všecky roviny souměrnosti útvaru složeného z roviny ϱ a z přímky p s ní různoběžné.

82. Stanovte všecky roviny souměrnosti dvojice navzájem rovnoběžných polorovin. Proveďte diskusi vzhledem ke vzájemné poloze polorovin.

83. Stanovte všecky roviny souměrnosti pravidelného jehlanu čtyrbokého.

84. Existuje jediná rovina souměrnosti úsečky AB, která tuto úsečku neobsahuje. Tato rovina se obyčejně jmenuje krátce rovina souměrnosti úsečky. Prochází středem úsečky AB a je k ní kolmá; je geometrickým místem bodů, které mají od obou krajních bodů úsečky AB stejné vzdálenosti. Dokažte!

85. Existuje jediná rovina souměrnosti dutého úhlu, která tento úhel neobsahuje. Tato rovina se obyčejně krátce jmenuje rovina souměrnosti úhlu. Prochází osou daného úhlu a je kolmá k jeho rovině; je částí geometrického místa bodů, které mají od obou přímek, v nichž leží ramena úhlu, stejné vzdálenosti. Dokažte!

86. Roviny souměrnosti všech tří stěn trojhranu se protínají v přímce, která prochází vrcholem trojhranu. Dokažte s použitím výsledku cvič. 85.

87. Existuje jediná rovina souměrnosti klínu, která obsahuje jeho hranu. Je to jedna z rovin souměrnosti dvojice rovin, v nichž leží stěny klínu. Rovina ω je částí geometrického místa bodů, které mají od rovin stěn klínu stejné vzdálenosti. Dokažte!

88. Jsou-li dva klíny shodné, jsou jejich úhly stejně velké. Dokažte! (Převeďte na důkaz shodnosti dvou trojúhelníků!)

89. a) Je dán trojúhelník ABC a bod $A' \not\equiv A$. Určete rovinovou souměrnost, která převádí $\triangle ABC$ ve shodný trojúhelník s jedním vrcholem v A'.

b) Je dán trojúhelník ABC a takový bod $B' \not\equiv B$, že $\overline{AB} = \overline{AB'}$. Určete rovinovou souměrnost, která převádí trojúhelník ABC ve shodný trojúhelník s jednou stranou v AB'.

c) Je dán trojúhelník ABC a takový bod $C' \not\equiv C$, že $\overline{AC} = \overline{AC'}$, $\overline{BC} = \overline{BC'}$. Určete rovinovou souměrnost, která převádí trojúhelník ABC ve shodný trojúhelník ABC'.

90. Jsou dány takové dva trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, že $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CA} = \overline{C'A'}$. Dokažte, že jsou shodné! (Určete příslušné rovinové souměrnosti podle cvič. 89.)

91. a) Je dán čtyrstěn $ABCD$ a bod $E \not\equiv D$ tak, že $\overline{AD} = \overline{AE}$, $\overline{BD} = \overline{BE}$, $\overline{CD} = \overline{CE}$. Dokažte, že rovina ABC je rovinou souměrnosti úsečky DE.

b) $ABCD$, $A'B'C'D'$ jsou takové dva čtyrstěny, že platí: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CA} = \overline{C'A'}$, $\overline{AD} = \overline{A'D'}$, $\overline{BD} = \overline{B'D'}$, $\overline{CD} = \overline{C'D'}$. S použitím výsledku a) dokažte, že oba čtyrstěny jsou shodné!

10. Rovnoběžné posunutí, souměrnost podle osy a středu.

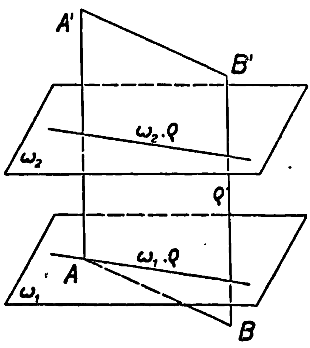
V planimetrii jste poznali, že z osových souměrností se skládají zobrazení, která mají jednoduché a velmi názorné vlastnosti a která každý útvar převádějí v útvar shodný; proto se nazývají shodnosti. Tak na př. dvě osové souměrnosti s různoběžnými osami se skládají v zobrazení, které nazýváme otáčením kolem středu.

Podobně je tomu v prostoru: z rovinových souměrností skládáme nová zobrazení, která budeme nazývat souhrnně **shodnosti v prostoru.**

Musíme ovšem definovat, kdy pokládáme dvě shodnosti za totožné. **Dvě shodnosti v prostoru jsou totožné,** jestliže každému bodu X přiřaďují obě týž bod X'. Nezáleží tedy na tom, jsou-li složeny různým způsobem z rovinových souměrností. Všimneme si blíže tří shodností, které budeme v dalších výkladech potřebovat.

Definice. Buďte dány dvě rovinové souměrnosti, jejichž roviny ω_1, ω_2 jsou rovnoběžné a různé. Složením těchto souměrností (v určitém pořádku) vzniká zobrazení, které nazveme **rovnoběžným posunutím v prostoru.**

Přitom skládáním rovinových souměrností rozumíme podobnou operaci jako v rovině: k libovolnému bodu X prostoru najdeme jeho obraz X_1 v první souměrnosti a k tomuto obrazu X_1 najdeme obraz X_2 v druhé souměrnosti. Tímto způsobem je každému bodu X přiřaděn jistý bod X_2 a vzniká tedy zobrazení. Říkáme, že toto zobrazení vzniklo složením obou rovinových souměrností (v určitém pořádku).



Obr. 24.

V41. Jsou-li A', B' obrazy bodů A, B v rovnoběžném posunutí v prostoru, pak platí $AA' \uparrow\uparrow BB'$, $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Speciálně: leží-li bod B mimo přímku AA', pak čtyrúhelník $AA'B'B$ je rovnoběžník.

Důkaz (obr. 24): Ježto $AA' \perp \omega_1$, $BB' \perp \omega_1$ (ω_1, ω_2 jsou roviny souměrností), je podle V27 $AA' \| BB'$. Přímkami AA', BB' lze položit (aspoň jednu) rovinu ϱ, která je podle V30 kolmá k ω_1 i k ω_2. Obě rovinové souměrnosti dávají v rovině ϱ vznik dvěma osovým souměrnostem s osami $\varrho \cdot \omega_1$ a $\varrho \cdot \omega_2$ (popište, jak).

Tyto osové souměrnosti se skládají v rovnoběžné posunutí v rovině ϱ, a tu víme z planimetrie, že platí $AA' \uparrow\uparrow BB'$, $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

Směr AA' se někdy nazývá **směrem posunutí,** délka $\overline{AA'}$ **délkou posunutí.**

V42. Rovnoběžné posunutí je jednoznačně určeno, je-li dán obraz A' daného bodu A.

Důkaz: Sestrojme roviny ω_1, ω_2 obě kolmé k přímce AA' tak, aby ω_1 šla bodem A, ω_2 středem úsečky AA'. Rovnoběžné posunutí vzniklé složením rovinových souměrností s rovinami ω_1 ω_2 (v tomto pořádku) převádí bod A v bod A'. Avšak každé rovnoběžné posunutí, které převádí bod A v bod A', převádí libovolný bod X v určitý bod X' (viz V41). Proto je rovnoběžné posunutí určeno dvojicí A, A' jednoznačně.

Na základě vět V41 a V42 si uvědomte názorný význam rovnoběžného posunutí.

Ježto rovnoběžné posunutí vzniká složením dvou rovinových souměrností, je v něm podle V36 a V38 obrazem přímky opět přímka a obrazem rovina opět rovina. Lze však říci určitěji:

V43. V rovnoběžném posunutí v prostoru je obrazem přímky x přímka $x' \uparrow\uparrow x$, obrazem roviny ϱ rovina $\varrho' \parallel \varrho$.

Důkaz: Tvrzení, týkající se přímky vyplývá z V41. Vysvětlete podrobně! Abychom nalezli obraz roviny ϱ, zvolíme v ní trojúhelník ABC; pak je zřejmě $\varrho' \equiv A'B'C'$. Ježto je $A'B' \parallel AB$, $A'C' \parallel AC$, je podle V5 $A'B' \parallel \varrho$, $A'C' \parallel \varrho$ a podle V9 je $\varrho' \parallel \varrho$.

Jako při rovinové souměrnosti lze i při rovnoběžném posunutí zjistiti samodružné body, přímky a roviny. Platí poučka:

V44. Rovnoběžné posunutí v prostoru nemá samodružných bodů. Samodružné jsou jen ty přímky a roviny, které jsou rovnoběžné se směrem posunutí.

Poučku si dokážete snadno sami s použitím vět V41, V43.

Další shodnost v prostoru je t. zv. **osová souměrnost v prostoru.** Budiž dána dvojice kolmých rovin ω_1, ω_2. Složením rovinových souměrností s rovinami ω_1, ω_2 dostaneme shodnost, zvanou osová souměrnost v prostoru. Průsečnice $o \equiv \omega_1 \cdot \omega_2$ se nazývá její **osou.**

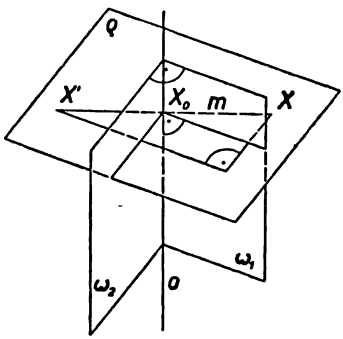
K danému bodu X sestrojíme v této souměrnosti obraz X' takto (obr. 25):

Vedeme bodem X přímku $m \perp o$ a různoběžnou s o; označíme X_0

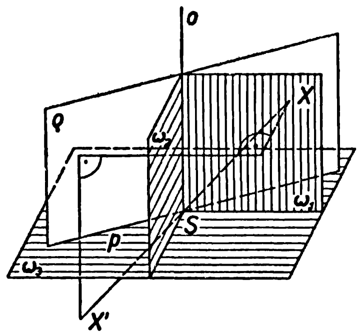
průsečík přímek m, o; na přímce m sestrojíme bod X' souměrně položený k bodu X podle středu X_0. Odůvodnění této konstrukce je jednoduché: Bodem X položme rovinu $\varrho \perp o$ (viz V23); naše osová souměrnost v prostoru dává v rovině ϱ vznik středové souměrnosti se středem X_0 (popište, jak). Tím je konstrukce odůvodněna.

Osová souměrnost v prostoru je patrně podle předchozího výkladu **jednoznačně určena svou osou** o. Táž souměrnost ovšem může vzniknout složením různých dvojic rovinových souměrností, jejichž roviny jsou k sobě kolmé a obsahují přímku o.

Právě tak jako při rovnoběžném posunutí je také **v osové souměrnosti v prostoru obrazem přímky přímka, obrazem roviny rovina** (proč?) a lze tedy zkoumati, které body, přímky a roviny jsou samodružné.



Obr. 25.



Obr. 26.

Třetí shodnost, o které se zmíníme, je t. zv. **středová souměrnost v prostoru.** Buďte dány tři roviny ω_1, ω_2, ω_3, z nichž každé dvě jsou k sobě kolmé (viz počátek odst. 7). Tyto roviny se protínají v jediném bodě S (odůvodněte). Složíme rovinové souměrnosti s rovinami ω_1, ω_2, ω_3 v libovolném pořádku; vznikne shodnost, zvaná souměrnost (v prostoru) podle středu S.

K danému bodu X sestrojíme v této souměrnosti obraz X' takto (obr. 26): Je-li $X \equiv S$, je také $X' \equiv S$; je-li $X \not\equiv S$, určíme na prodloužení úsečky XS za bod S bod X' tak, aby bylo $\overline{X'S} = \overline{XS}$. Odůvodnění konstrukce: označme o průsečnici rovin ω_1, ω_2. Přímkou o a bodem X lze položit (aspoň jednu) rovinu ϱ. Označme dále p průsečnici $\varrho \cdot \omega_3$. Osová souměrnost v prostoru s osou o dává v rovině ϱ vznik osové souměrnosti s osou o, rovinová souměrnost s rovinou ω_3 dává v rovině ϱ vznik osové souměrnosti s osou p. Podle V31 je $o \perp p$. Z planimetrie víme, že dvě osové souměrnosti v rovině s osami navzájem kolmými skládají středovou souměrnost; je tedy X' obraz bodu X ve středové souměrnosti v rovině a tím je uvedena konstrukce dokázána.

Také **ve středové souměrnosti je obrazem přímky přímka, obrazem roviny rovina a lze řešit otázku samodružných bodů, přímek a rovin.**

Jestliže některý **geometrický útvar** se převádí rovinovou nebo osobou nebo středovou souměrností sám v sebe (vysvětlete podrobně, co to znamená), říkáme, že se touto souměrností **reprodukuje,** neboli že **je souměrný podle roviny nebo přímky (osy) nebo bodu (středu).** Uveďte jednoduché příklady útvaru souměrného podle osy a útvaru souměrného podle středu. Zpravidla se setkáváme s úlohou nalézti k danému útvaru jeho osy souměrnosti a středy souměrnosti (existují-li ovšem vůbec); některé takové úlohy rozřešíte ve cvičeních.

Cvičení.

92. Zobrazení, které vznikne složením dvou rovnoběžných posunutí určených dvojicemi A, A' a A', A'', je rovnoběžné posunutí určené dvojicí A, A''. Dokažte.

93. Dokažte, že jediné přímky a roviny samodružné v rovnoběžném posunutí jsou přímky a roviny rovnoběžné se směrem posunutí.

94. Je dán čtyrstěn $ABCD$, T je těžiště trojúhelníka BCD. Do náčrtku čtyrstěnu zakreslete čtyrstěn, který je obrazem daného čtyrstěnu v rovnoběžném posunutí, daném dvojicí A, T.

95. Určete všecka rovnoběžná posunutí, jimiž se reprodukuje soustava nekonečně mnoha rovnoběžných rovin, z nichž každé dvě sousední mají vzdálenost rovnou jedné.

96. Určete samodružné body, přímky a roviny osové souměrnosti.

97. Přímka a její obraz v osové souměrnosti jsou buď rovnoběžné s osou souměrnosti, nebo se na ní protínají. Zjistěte obdobnou vlastnost roviny a jejího obrazu.

98. Vyslovte podmínku, aby rovina (přímka) a její obraz v osové souměrnosti byly navzájem rovnoběžné.

99. Určete všecky osy souměrnosti a) dvojice mimoběžek, b) dvou různoběžných rovin.

100. Určete všecky osy souměrnosti a) krychle, b) plochy kulové.

101. Určete samodružné body, přímky a roviny středové souměrnosti.

102. a) Útvar souměrný podle dvou různých středů se reprodukuje posunutím ve směru jejich spojnice. Dokažte!
b) Kvádr má jediný střed souměrnosti. Dokažte!

103. V náčrtku kvádru $ABCDA'B'C'D'$ sestrojte kvádr souměrný a) podle osy o, b) podle středu P. Za osu o zvolte přímku rovnoběžnou s hranou AA', která rozděluje obdélník $ABB'A'$ v poměru 1 : 2, za bod P zvolte bod ležící v třetině úsečky BC!

104. Útvar souměrný podle dvou os k sobě kolmých a navzájem různoběžných je souměrný také podle osy kolmé k oběma daným a s nimi různoběžné. Dokažte a uveďte příklad!

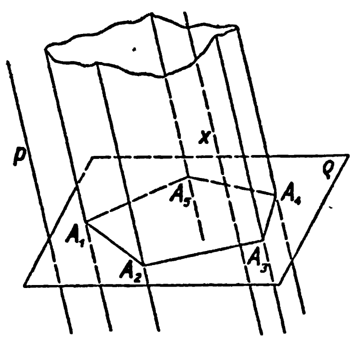
105. Útvar souměrný podle dvou rovin k sobě kolmých a podle bodu S, který leží na jejich průsečnici, je souměrný také podle třetí roviny, kolmé k oběma daným a procházející bodem S. Dokažte a uveďte příklad!

11. Hranolová plocha, hranolový prostor; hranol.

Ve všech dosavadních stereometrických výkladech jsme se takřka vůbec nezabývali tělesy, t. j. útvary obdobnými k rovinným obrazcům. Na střední škole jste řešili již řadu úloh o jednoduchých tělesech; při tom jste si však tělesa definovali jen popsáním jejich povrchu (tak na př. krychle je část prostoru omezená šesti shodnými čtverci). Mlčky se předpokládalo, že takové těleso existuje, jak tomu nasvědčoval model.

Nyní však máme dostatečné množství stereometrických poznatků odvozených usuzováním a s jejich pomocí dovedeme přesně definovat základní tělesa, dokázat jejich existenci i vlastnosti.

Definice. (Obr. 27.) Budiž dán vypuklý n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ ležící v rovině ϱ a dále přímka p různoběžná s rovinou ϱ. Soubor bodů všech přímek $x \parallel p$, které protínají obvod n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$, se nazývá **hranolovou plochou;** tyto přímky x se nazývají **přímkami hranolové plochy.** Soubor bodů všech přímek $x \parallel p$, které protínají rovinu v bodech n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$, se nazývá **hranolovým prostorem.** Ubráním hranolové plochy od hranolového prostoru dostaneme t. zv. **vnitřek hranolového prostoru.**



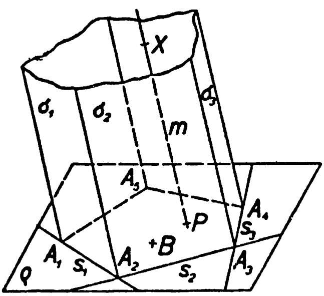
Obr. 27.

Mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ se jmenuje **řídicí mnohoúhelník hranolové plochy;** přímky hranolové plochy, které jdou vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_n$, jsou t. zv. **hrany hranolové plochy.** Je-li počet hran n, nazývá se hranolová plocha n**-boká.** Pásy rovin, omezené dvěma sousedními hranami, jsou t. zv. **stěny hranolové plochy;** roviny těchto stěn nazveme opěrné roviny hranolové plochy.

V45. Hranolový prostor je průnik poloprostorů, které jsou vyťaty opěrnými rovinami příslušné hranolové plochy, při čemž tyto poloprostory obsahují jeden libovolný vnitřní bod řídicího mnohoúhelníka.

Důkaz: Máme dokázat totožnost dvou souborů: musíme tedy dokázat, že každý bod X hranolového prostoru **H** náleží všem uvedeným poloprostorům, a za druhé, že každý bod Y průniku těchto poloprostorů náleží hranolovému prostoru **H**.

a) (Obr. 28.) Označme ϱ rovinu řídicího mnohoúhelníka, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ jsou opěrné roviny, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ jejich průsečnice s rovinou ϱ, B je vnitřní bod řídicího mnohoúhelníka a X bod hranolového prostoru **H**. Jak víme z planimetrie, je řídicí mnohoúhelník průnik polorovin $(s_1B), (s_2B), \ldots, (s_nB)$. Bodem X veďme přímku m rovnoběžnou s přímkami hranolové plochy a označme P průsečík $m \cdot \varrho$. Bod P je podle definice bodu hranolového prostoru bodem řídicího mnohoúhelníka, proto náleží všem polorovinám $(s_1B), (s_2B), \ldots, (s_nB)$. Avšak polorovina (s_1B) je obsažena v poloprostoru (σ_1B) a podobně ostatní; náleží tedy bod P všem poloprostorům $(\sigma_1B), (\sigma_2B), \ldots, (\sigma_nB)$. Podle věty V4 je přímka m rovnoběžná se všemi opěrnými rovinami: podle věty V16 náleží tedy přímka m, t. j. i bod X všem poloprostorům $(\sigma_1B), (\sigma_2B), \ldots, (\sigma_nB)$.



Obr. 28.

b) Budiž Y bod průniku poloprostorů $(\sigma_1B), (o_2B), \ldots, (\sigma_nB)$. Vedeme tímto bodem opět přímku q rovnoběžnou s přímkami hranolové plochy a označíme R průsečík $q \cdot \varrho$. Celá přímka q, a tudíž i bod R, náležejí poloprostorům $(\sigma_1B), (\sigma_2B), \ldots, (\sigma_nB)$. Bod R náleží tedy všem polorovinám $(s_1, B), (s_2B), \ldots, (s_nB)$ neboli řídicímu mnohoúhelníku. Proto je přímka q jednou z přímek tvořících hranolový prostor **H**. Proveďte důkaz podrobně!

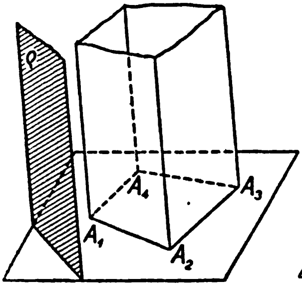
V46. Vnitřek hranolového prostoru i hranolový prostor jsou útvary konvexní.

Poučka je, co se týče hranolového prostoru, přímým důsledkem poučky V45. Protože vnitřek **V** hranolového prostoru je průnikem vnitřků všech poloprostorů $(\sigma_1 B)$ ..., $(\sigma_n B)$ a ty jsou konvexní, je také **V** konvexní útvar. Dokažte podrobně!

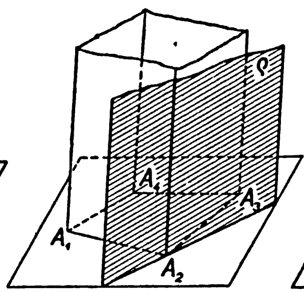
Nyní prozkoumáme vzájemnou polohu roviny a hranolové plochy (prostoru). Napřed však odlišíme zvláštní skupinu rovin (přímek) definicí:

Rovina (přímka) rovnoběžná s přímkami hranolové plochy se nazývá **vrcholová.**

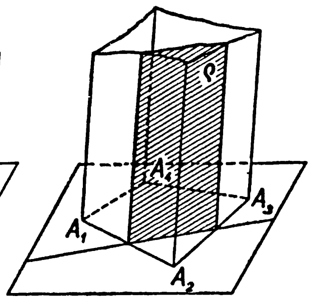
V47. Vzájemná poloha vrcholové roviny a hranolové plochy může být čtverá (obr. 29abc).



Obr. 29a.



Obr. 29b.



Obr. 29c.

1° Rovina nemá s hranolovou plochou společný bod.

2° Rovina je opěrná.

3° Rovina má s hranolovou plochou společnou jedinou přímku, a to hranu.

4° Rovina má s hranolovou plochou společné dvě různé přímky.

Poučku dokážete snadno sami: protněte danou vrcholovou rovinou rovinu řídicího mnohoúhelníka a užijte tôho, co víte o vzájemné poloze přímky a konvexního mnohoúhelníka.

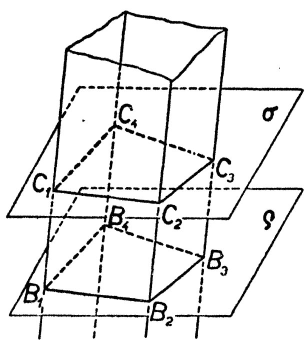
Nastane-li případ 2° nebo 3°, nazýváme někdy takovou vrcholovou rovinu **styčnou rovinou hranolové plochy.**

Prozkoumejte sami vzájemnou polohu a) vrcholové roviny a hranolového prostoru; b) vrcholové přímky a hranolové plochy; c) přímky nikoli vrcholové a hranolové plochy; d) přímky nikoli vrcholové a hranolového prostoru. V případech c) a d) položte danou přímkou vrcholovou rovinu.

V48. Rovina ϱ, která není vrcholová, protíná*) hranolový prostor ve vypuklém mnohoúhelníku a příslušnou hranolovou plochu v obvodu tohoto mnohoúhelníka. Roviny navzájem rovnoběžné protínají hranolový prostor v shodných mnohoúhelnících.

Důkaz: a) Poloprostory vyťaté opěrnými rovinami, jejichž průnik je hranolový prostor, protnou rovinu ϱ ve vypuklém mnohoúhelníku. hranolová plocha protne rovinu ϱ v obvodu tohoto mnohoúhelníka, Dokažte podrobně.

b) (Obr. 30). Nechť jsou ϱ, σ dvě rovnoběžné, nikoli však vrcholové roviny, $B_1B_2 \ldots B_n$ a $C_1C_2 \ldots C_n$ příslušné průsečné mnohoúhelníky. Pak čtyrúhelníky $B_1C_1C_2B_2$ a další jsou rovnoběžníky (proč?). Rovnoběžné posunutí, které převádí vrchol B_1 ve vrchol C_1, převádí podle poučky V41 také vrchol B_2 ve vrchol C_2, ..., vrchol B_n ve vrchol C_n. Mnohoúhelník $C_1C_2 \ldots C_n$ vznikne tedy z mnohoúhelníka $B_1B_2 \ldots B_n$ rovnoběžným posunutím a jsou proto oba mnohoúhelníky shodné.



Obr. 30.

Definice. Budiž dán hranolový prostor: na jedné jeho hraně zvolme dva různé body A, A' a jimi veďme dvě roviny ϱ, ϱ' navzájem rovnoběžné, ale nikoli vrcholové. Tyto roviny protnou hranolový prostor v mnohoúhelnících $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$.

Průnik hranolového prostoru s poloprostory $(\varrho A')$ a $(\varrho' A)$ nazýváme **hranolem.** $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ jsou jeho **podstavy,** části stěn příslušné hranolové plochy, které mu náležejí, jsou t. zv. **pobočné stěny.** Podstavy a pobočné stěny tvoří **povrch.** Ty body hranolu, které nenáležejí jeho povrchu, tvoří t. zv. **vnitřek hranolu.**

Vyslovte sami definici kolmého hranolu, kosého hranolu, pravidelného hranolu n-bokého, kvádru, krychle. Vyslovte definici výšky hranolu.

---

*) Slovem „protíná“ rozumíme: určí jakýsi soubor bodů hranolového prostoru.

V49. Hranol i vnitřek hranolu jsou konvexní útvary. Tuto poučku dokážete snadno sami z věty V46.

Cvičení.

106. Řídicí mnohoúhelník hranolové plochy je čtverec, její přímky jsou kolmé k rovině čtverce. Určete všecky a) rovinové souměrnosti, b) osové souměrnosti, c) středové souměrnosti, d) rovnoběžná posunutí, jimiž se hranolová plocha reprodukuje.

107. Dvě sousední stěny hranolové plochy určují klín; jeho úhel se nazývá úhlem (vnitřním) hranolové plochy. Dokažte: součet (vnitřních) úhlů n-boké hranolové plochy je $(n - 2) \cdot 2R$.

108. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, S je střed stěny $ABCD$, M střed hrany AD. Hranolová plocha má za řídicí mnohoúhelník čtyrúhelník $ABSM$, směr přímek je AA'. Do náčrtku zakreslete průsek hranolové plochy

a) s přímkou $A'C$.
b) s rovinou $A'BC$!

109. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$; P je střed hrany $C'D'$; Q střed hrany AB. Hranolová plocha má řídicí trojúhelník ABD, směr přímek je AP.

a) Zakreslete do náčrtku průsečíky této plochy s přímkou $D'Q$.
b) Vypočtěte úhel přímek hranolové plochy s rovinou ABD; určete jej konstruktivně!
c) Určete úhel, který svírá přímka $D'Q$ s přímkami hranolové plochy.
d) Určete skutečnou velikost úsečky, kterou vytíná na přímce $D'Q$ hranolová plocha.

110. Tělesové úhlopříčky kvádru jsou po dvou k sobě kolmé. Jaký vztah platí mezi délkami hran kvádru?

111. Podmínka pro to, aby čtyři body A_1, B_1, C_1, D_1 na pobočných hranách kvádru ležely v rovině, je, aby platilo $\overline{AA_1} + \overline{CC_1} = \overline{BB_1} + \overline{DD_1}$. Při tom předpokládáme, že body A_1, B_1, C_1, D_1 leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou $ABCD$. Jak by se změnil vztah, kdyby některý z bodů A_1, B_1, C_1, D_1 ležel v jiném poloprostoru?

112. Rozměry kvádru jsou x, $2x$, $3x$. Určete velikost tělesové úhlopříčky a její úhly s hranami.

113. Najděte všecky roviny, osy a středy souměrnosti kvádru.

114. Opakujte cvič. 113 pro pravidelný hranol n-boký (rozlište n sudé a n liché).

115. Určete počet tělesových úhlopříček n-bokého hranolu a dokažte, že každý vnitřní bod tělesové úhlopříčky leží uvnitř hranolu.

116. Pravidelný šestiboký hranol má dva druhy tělesových úhlopříček. Určete jejich velikosti, jsou-li a, v velikosti podstavné hrany a výšky tělesa.

117. Je-li řídicí mnohoúhelník hranolové plochy rovnoběžník, nazývá se hranolová plocha rovnoběžnostěnová plocha. Dokažte:

a) Protější stěny rovnoběžnostěnové plochy jsou shodné pásy rovin.
b) Protější klíny jsou shodné, protější úhly jsou stejně velké.

118. Hranol vytvořený z rovnoběžnostěnové plochy je t. zv. rovnoběžnostěn. Dokažte:

a) Povrch rovnoběžnostěnu se skládá ze šesti rovnoběžníků, z nichž dva a dva protější jsou shodné. Rovnoběžnostěn lze pokládat trojím způsobem za hranol; vysvětlete!
b) Každé dvě tělesové úhlopříčky se navzájem půlí. Všecky procházejí jedním bodem, zvaným střed rovnoběžnostěnu. Rovnoběžnostěn je souměrný podle svého středu.

119. Je dán rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$.

a) Dokažte, že roviny BDA', $CB'D'$ dělí tělesovou úhlopříčku AC' ve tři rovné části.
b) Dokažte, že tělesová úhlopříčka AC' prochází těžištěm trojúhelníka $A'BD$.
c) Dokažte, že v případě krychle je úhlopříčka AC' kolmá k rovinám BDA', $CB'D'$

120. Dokažte, že existuje rovnoběžnostěn, zvaný klenec, omezený šesti navzájem shodnými kosočtverci.

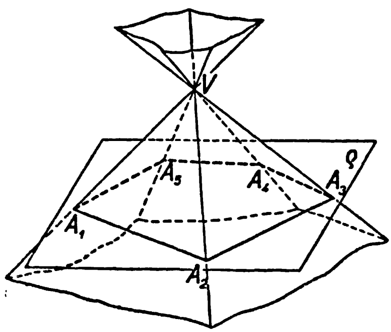
12. Jehlanová plocha, jehlanový prostor; jehlan.

Definice. (Obr. 31.) Budiž dán vypuklý n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ ležící v rovině ϱ a dále bod V ležící mimo rovinu ϱ. Soubor všech přímek x, které procházejí bodem V a protínají obvod n-úhelníka $A_1A_2 \dots A_n$, nazývá se **jehlanovou plochou** a tyto přímky x se nazývají **přímkami jehlanové plochy.** Soubor bodů všech přímek x, které procházejí bodem V a protínají rovinu ϱ v bodech n-úhelníka $A_1A_2 \dots A_n$, nazývá se **jehlanovým prostorem.** Ubráním jehlanové plochy od jehlanového prostoru dostaneme t. zv. **vnitřek jehlanového prostoru.**

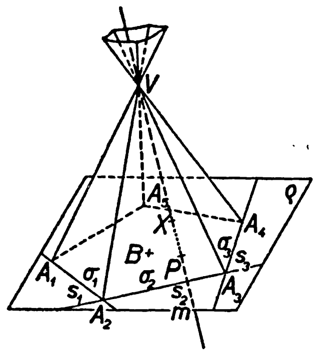
Mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_n$ se jmenuje **řídicí,** přímky jehlanové plochy, které jdou vrcholy $A_1A_2 \dots A_n$, jsou t. zv. **hrany jehlanové plochy.** Je-li počet hran n, nazývá se **jehlanová plocha** n**-boká.** Úhel (dutý) A_1VA_2 a úhel k němu vrcholový tvoří t. zv. **stěnu jehlanové plochy.** Bod V se jmenuje **vrchol jehlanové plochy.** Jako u hranolové plochy budeme nazývati roviny stěn jehlanové plochy **rovinami opěrnými.**

Každá z přímek, které jdou vrcholem V a tvoří jehlanový prostor (plochu), je vrcholem V rozdělena ve dvě polopřímky. Ty polopřímky vycházející z vrcholu V, které protínají řídicí mnohoúhelník (jeho obvod), tvoří část jehlanového prostoru (plochy), kterou nazveme **část přilehlá k řídicímu mnohoúhelníku.**

V50. Část **J** jehlanového prostoru přilehlá k řídicímu mnohoúhelníku je průnik poloprostorů, které jsou vyťaty opěrnými rovinami příslušné jehlanové plochy a které obsahují jeden vnitřní bod řídicího mnohoúhelníka.



Obr. 31.



Obr. 32.

Zbývající část jehlanového prostoru, doplněná vrcholem V, je průnikem opačných poloprostorů.

a) (Obr. 32.) Důkaz je obdobný důkazu V45. Písmena ϱ, σ_1, σ_2, ..., σ_n, s_1, s_2, ..., s_n, B nechť mají obdobný význam jako v důkazu V45, X budiž bod útvaru **J**, který nesplyne s vrcholem V. Polopřímka VX protne rovinu ϱ v bodě P, který náleží řídicímu mnohoúhelníku a tedy průniku polorovin (s_1B), (s_2B), ... (s_nB), i průniku poloprostorů (σ_1B), (σ_2B), ..., (σ_nB). Podle věty V18 náleží celá polopřímka VP, t. j. i bod X průniku těchto poloprostorů.

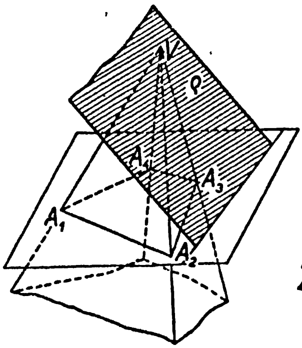
b) Budiž Y bod průniku poloprostorů (σ_1B), (σ_2B), ..., (σ_nB), který nesplyne s vrcholem V. Polopřímka VY náleží podle V18 všem těmto poloprostorům a její průsečík R s rovinou ϱ všem polorovinám (s_1B), (s_2B),

..., (s_nB), neboli řídicímu mnohoúhelníku. Proto je bod Y obsažen v útvaru **J**.

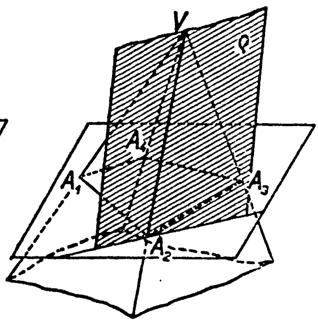
c) Použijeme středové souměrnosti se středem V. Touto souměrností přejde část **J** ve zbývající část jehlanového prostoru doplněnou vrcholem V; poloprostory (σ_1B), (σ_2B), ..., (σ_nB) přejdou v poloprostory opačné. Proveďte podrobný důkaz!

V51. Část jehlanového prostoru přilehlá k řídicímu mnohoúhelníku i zbývající část doplněná vrcholem V, jsou útvary konvexní.

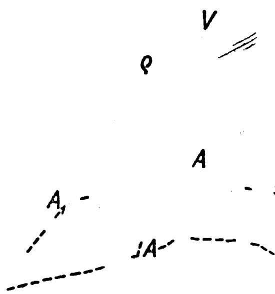
Tato poučka je přímý důsledek poučky V50.



Obr. 33a.



Obr. 33b.



Obr. 33c.

Vrcholová rovina (přímka) jehlanové plochy je taková, která prochází jejím vrcholem.

V52. Vzájemná poloha vrcholové roviny a jehlanové plochy může být čtverá (obr. 33abc):

1° Rovina nemá s jehlanovou plochou mimo vrchol žádný společný bod.

2° Rovina je opěrná.

3° Rovina má s jehlanovou plochou společnou jedinou přímku, a to hranu.

4° Rovina má s jehlanovou plochou společné dvě různé přímky.

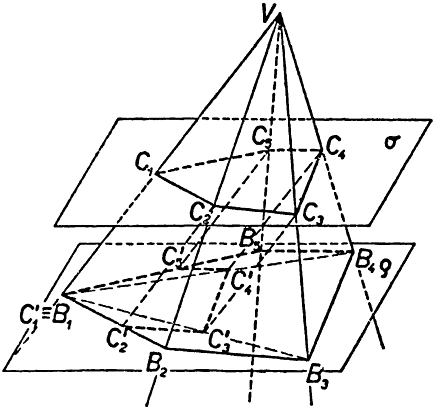
Poučku dokážeme stejně jako poučku V47. Také u jehlanové plochy zahrnujeme případy 2°, 3° pod názvem **roviny styčné.**

Prozkoumejte sami vzájemnou polohu a) vrcholové roviny a jehlanového prostoru; b) přímky nikoli vrcholové a jehlanové plochy.

V53. Budiž $A_1A_2 \ldots A_n$ řídicí mnohoúhelník jehlanové plochy, V její vrchol, dále ϱ rovina, která není vrcholová a která protíná buď všecky polopřímky $VA_1, VA_2 \ldots VA_n$, nebo všecky polopřímky k nim opačné. Pak rovina ϱ protne příslušný jehlanový prostor ve vypuklém mnohoúhelníku, jehlanovou plochu pak v obvodu tohoto mnohoúhelníku. Roviny navzájem rovnoběžné protnou jehlanový prostor v mnohoúhelnících navzájem podobných.

a) Důkaz první části věty je obdobný jako důkaz V48.

b) (Obr. 34.) Nechť ϱ, σ jsou dvě rovnoběžné roviny nikoli vrcholové, $B_1B_2 \ldots B_n$, $C_1C_2 \ldots C_n$ příslušné průsečné mnohoúhelníky. Rovnoběžné posunutí, které převádí bod C_1 v bod $C'_1 \equiv B_1$, převede mnohoúhelník $C_1C_2 \ldots C_n$ v mnohoúhelník s ním shodný $C'_1C'_2 \ldots C'_n$, který leží v rovině ϱ. Podle V12 platí vztahy $B_1B_2 \parallel C_1C_2$, $B_1B_3 \parallel C_1C_3$, $B_2B_3 \parallel C_2C_3$. Podle vět V43 a V7 je $C'_1C'_2 \parallel B_1B_2$, $C'_1C'_3 \parallel B_1B_3$, $C'_2C'_3 \parallel B_2B_3$. Body C'_2 a C'_3 leží tedy na spojnicích B_1B_2, B_1B_3. Stejnolehlost v rovině ϱ se středem B_1, která převádí bod B_2 v bod C'_2, převádí tedy bod B_3 v bod C'_3. Podobně můžeme usoudit i o dalších dvojicích vrcholů $B_4, C'_4, \ldots, B_n, C'_n$. Mnohoúhelníky $B_1B_2 \ldots B_n$, $C'_1C'_2 \ldots C'_n$ jsou tedy stejnolehlé; proto jsou mnohoúhelníky $B_1B_2 \ldots B_n$, $C_1C_2 \ldots C_n$ podobné.



Obr. 34.

Definice. Budiž dána část **J** jehlanového prostoru přilehlá k řídicímu mnohoúhelníku. Označme ϱ jeho rovinu, V vrchol jehlanového prostoru. Průnik útvaru **J** a poloprostoru ϱV nazýváme **jehlanem.**

Řídicí mnohoúhelník je jeho **podstava,** části stěn příslušné jehlanové plochy, které mu náležejí, jsou t. zv. **pobočné stěny.** Podstava a pobočné stěny tvoří **povrch.** Ty body jehlanu, které nenáležejí jeho povrchu, tvoří t. zv. **vnitřek jehlanu.**

Vyslovte sami definice čtyrstěnu a pravidelného jehlanu n-bokého. Vyslovte definici výšky jehlanu, stěnové výšky jehlanu.

V54. Jehlan i jeho vnitřek jsou konvexní útvary.

Tuto poučku dokážete snadno sami z věty 51.

Cvičení.

121. Buďte M, N dva body uvnitř jehlanu. Dokažte, že přímka MN protne povrch jehlanu ve dvou různých bodech.

122. Zobrazte jehlan, jehož podstavou je obdélník $ABCD$ se středem S a jehož vrchol V leží na kolmici vztyčené v bodě S k rovině $(ABCD)$. Na prodloužení hrany BC za bod B zvolte bod M a v jedné třetině úsečky SV od bodu S zvolte bod N. Určete obrazy průsečíků přímky MN s povrchem jehlanu.

123. Zobrazte čtyrstěn $VABC$ a uvažujte jehlanovou plochu s vrcholem V a s řídicím trojúhelníkem ABC. Na přímkách AB, BC, CA zvolte po řadě body C', A', B'; bodem V a dvěma z bodů A', B', C' je určena vrcholová rovina ω uvažované jehlanové plochy. Body A', B', C' a rovinu ω volte postupně tak, abyste dostali čtyri polohy vrcholové roviny ω, které odpovídají poučce V52; rovinu ω zobrazte a vyšetřete její průsečnice se všemi čtyřmi rovinami stěn čtyřstěnu.

124. a) Definujte pravidelnou jehlanovou plochu a její úhly (jsou-li VA_1, VA_2, VA_3 tři sousední hrany plochy, je to na př. úhel trojhranu o hranách VA_1, VA_2, VA_3 příslušný hraně VA_2).
b) Určete všechny rovinové souměrnosti, osové souměrnosti a středové souměrnosti, jimiž se tato plocha reprodukuje.

125. Definujte komolý jehlan a dokažte, že je to konvexní útvar.

126. Rovina ϱ' rovnoběžná s podstavnou rovinou ϱ jehlanu a protínající jeho pobočnou hranu v jejím vnitřním bodě rozdělí jehlan v nový jehlan a v jehlan komolý. Dokažte:
a) Obě podstavy komolého jehlanu jsou mnohoúhelníky podobné.
b) Velikosti stran, které leží v téže stěně původního jehlanu, jsou ve stejném poměru jako výšky obou jehlanů.

127. V pravidelném čtyrbokém komolém jehlanu jsou dány podstavné hrany $a=20$, $a'=8$ a výška tělesa $v=17$. Určete a) velikost pobočné hrany, b) velikost tělesové úhlopříčky, c) vzdálenost průsečíku V pobočných hran od rovin obou podstav.

128. a) V rovině ϱ je dán obdélník $ABCD$ o rozměrech $a=12$, $b=8$; mimo rovinu ϱ zvolte bod O tak, aby jeho vzdálenost od roviny ϱ byla $v=20$. Uvnitř poloprostoru (ϱO) veďte rovinu ϱ', jejíž vzdálenost od bodu O je $v'=15$. Rovina ϱ' protne jehlanovou plochu $\mathbf{J}$, jejímž vrcholem je bod O a jejímž řídicím čtyrúhelníkem je obdélník

$ABCD$, v obdélníku $A'B'C'D'$; při tom platí $A'B'C'D' \sim ABCD$. Určete příslušný koeficient podobnosti.

b) Přímky AC', BD', CA', DB' procházejí určitým bodem O'; určete, ve kterém poměru dělí bod O' tyto úsečky a vypočtěte jeho vzdálenosti od rovin ϱ, ϱ'.

129. Čím se liší pravidelný čtyrstěn a pravidelný jehlan trojboký?

130. Vyjádřete výšku pravidelného čtyrstěnu pomocí délky a jeho hrany.

131. Předchozí cvič. 130 proveďte pro pravidelný trojboký jehlan, jehož podstavná hrana je a a pobočná hrana b.

132. Budiž rovina ϱ, která je rovnoběžná ke dvěma mimoběžným hranám čtyrstěnu a obsahuje vnitřní bod jedné z jeho zbývajících hran; tato rovina protne čtyrstěn v rovnoběžníku; dokažte.
Označte a, b velikosti obou mimoběžných hran, x, y velikosti stran řezu, které jsou po řadě s nimi rovnoběžné. Potom platí $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
Který z těchto rovnoběžníků má největší obsah?

133. Vyslovte definici plochy kulové, opsané čtyrstěnu. Dokažte, že čtyrstěnu lze opsat kulovou plochu.

134. a) Spojnice středů dvou dvojic mimoběžných hran čtyrstěnu leží v rovině rovnoběžné ke třetí dvojici hran čtyrstěnu a tvoří rovnoběžník.

b) Spojnice středů dvojice mimoběžných hran čtyrstěnu procházejí určitým bodem T (těžiště čtyrstěnu).

c) Spojnice AT_1 vrcholu A čtyrstěnu $ABCD$ s těžištěm T_1 protější stěny prochází rovněž bodem T, při čemž je dělicí poměr $(AT_1T) = -3$.

d) Vzdálenost bodu T od každé stěny čtyrstěnu je rovna $\frac{1}{4}$ výšky příslušné k této stěně.

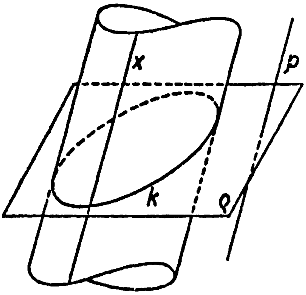
135. Určete roviny souměrnosti pravidelného čtyrstěnu a dokažte, že se protínají v bodě T z cvič. 134b. Jsou-li U, V středy jedné dvojice protějších hran, potom přímka UV prochází bodem T a je osou souměrnosti čtyrstěnu. (Uvažujte rovnoběžník ze cvič. 134a.)

13. Válcová a kuželová plocha. Kruhový válec a kužel.

Budiž dána kružnice k v rovině ϱ a dále přímka p různoběžná s rovinou ϱ (obr. 35). Soubor všech přímek $x \parallel p$, které protínají kružnici k, nazývá se **(kruhová) plocha válcová*)** a tyto přímky x se nazývají **přímkami válcové plochy.** Soubor všech přímek $x \parallel p$, které protínají

*) Přívlastek „kruhová“ budeme zpravidla vynechávat.

rovinu ϱ v bodech **kruhu** k, se nazývá **válcovým prostorem.** Ubráním válcové plochy od válcového prostoru dostaneme t. zv. **vnitřek válcového prostoru.** Kružnici k nazýváme řídicí kružnicí válcové plochy.

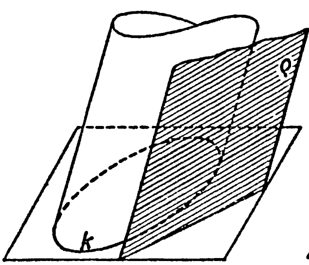


Obr. 35.

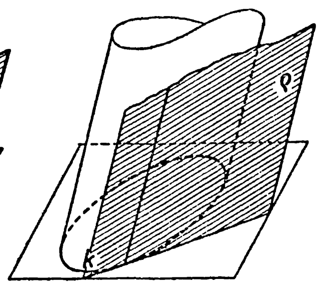
Válcová plocha se nazývá **rotační,** jsou-li její přímky kolmé k rovině řídicí kružnice.

V55. Válcový prostor i jeho vnitřek jsou konvexní útvary.

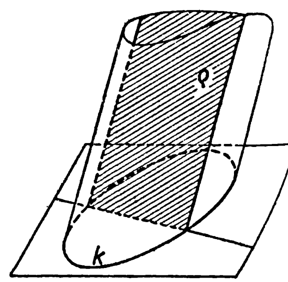
Důkaz: Buďte X, Y dva body válcového prostoru C; máme dokázat, že všechny body úsečky XY náležejí útvaru C. Body X, Y vedeme přímky $r \| s \| p$ (směr přímek válcové plochy). Splynou-li přímky r, s je tvrzení dokázáno, Jsou-li r, s různé, označíme X_1, Y_1 jejich průsečíky s rovinou řídicí kružnice k. Body X_1, Y_1 náležejí kruhu k, a proto úsečka X_1Y_1 náleží celá tomuto kruhu. Je-li Z vnitřní bod úsečky XY, $t \| p$ přímka procházející bodem Z, Z_1 průsečík $t \cdot \varrho$, pak Z_1 je vnitřní bod úsečky X_1Y_1 (odůvodněte). Proto celá přímka t, t. j. i bod Z náleží válcovému prostoru. Tím je věta dokázána.



Obr. 36a.



Obr. 36b.



Obr. 36c.

Obdobný důkaz se provede pro vnitřek válcového prostoru.

Vrcholová rovina (přímka) válcové plochy je rovina (přímka) rovnoběžná s přímkami této plochy.

V56. Vzájemná poloha vrcholové roviny s válcovou plochou je trojí: (obr. 36abc):

1° Rovina nemá s válcovou plochou společný bod (t. zv. rovina nesečná).

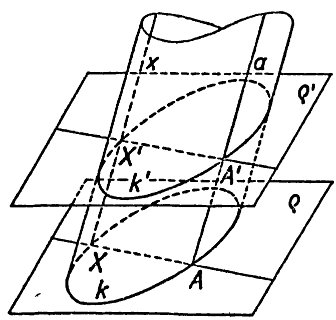
2° Rovina má s válcovou plochou společnou jedinou přímku (t. zv. rovina tečná).

3° Rovina má s válcovou plochou společné dvě různé přímky (t. zv. rovina sečná).

Důkaz se provede jako důkaz V47.

V57. Rovina rovnoběžná s rovinou řídicí kružnice protíná válcovou plochu v kružnici shodné s řídicí kružnicí.

Důkaz (obr. 37:) Budiž ϱ' rovina rovnoběžná s rovinou ϱ řídicí kružnice k. Označme na kružnici k určitý bod A a jiný bod X a veďme těmito body přímky a, x, rovnoběžné s přímkami válcové plochy. Označme dále průsečíky $A' \equiv \varrho' \cdot a$, $X' \equiv \varrho' \cdot x$. Podle V12 je $AX \| A'X'$, t. j. čtyrúhelník $AA'X'X$ je rovnoběžník. Rovnoběžné posunutí, které převádí bod A v bod A', převádí podle V41 bod X v bod X'. Rovina ϱ' protíná tedy válcovou plochu v křivce, která je obrazem kružnice k v tomto posunutí a je s ní tedy shodná. Tato křivka je kružnice.



Obr. 37.

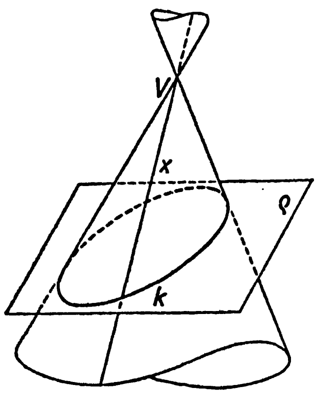
Definice. Budiž dán válcový prostor; na jedné přímce příslušné válcové plochy zvolme dva různé body A, A' a jimi veďme dvě roviny ϱ, ϱ', rovnoběžné s rovinou řídicí kružnice. Tyto roviny protnou válcový prostor v kruzích **k**, **k**'.

Průnik válcového prostoru s poloprostory $(\varrho A')$, $(\varrho' A)$ nazýváme **(kruhovým) válcem,** kruhy **k**, **k**' jsou jeho **podstavy.**

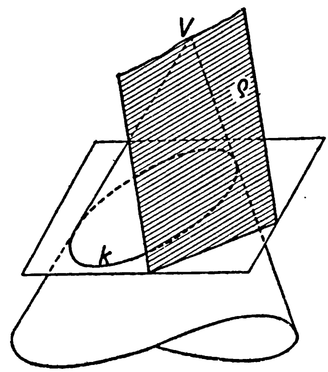
Vyslovte definice kolmého rotačního a kosého válce, definici pláště a strany válce, výšky válce. Dokažte, že všecky strany válce jsou stejně dlouhé. Dokažte, že válec je konvexní útvar.

Definice. Budiž dána kružnice k v rovině ϱ a dále bod V ležící mimo rovinu ϱ (obr. 38). Soubor všech přímek x, které procházejí bodem V a protínají kružnici k, se nazývá **(kruhová) plocha kuželová** a tyto přímky x se nazývají **přímkami kuželové plochy.** Soubor všech přímek x, které procházejí bodem V a protínají rovinu ϱ v bodech kruhu **k**, nazývá se **kuželovým prostorem.** Ubráním kuželové plochy od kuželového prostoru dostaneme t. zv. **vnitřek kuželového prostoru.** Kružnici k nazýváme **řídicí kružnicí kuželové plochy,** bod V je **vrchol** plochy. Kuželová plocha se nazývá **rotační,** je-li spojnice vrcholu se středem řídicí kružnice kolmá k rovině řídicí kružnice.

Všechny přímky, které jsou vrcholem V a tvoří kuželový prostor (plochu), jsou vrcholem V rozděleny ve dvě polopřímky. Polopřímky vycházející z vrcholu V, které protínají řídicí kruh (řídicí kružnici), tvoří část kuželového prostoru (plochy), kterou nazveme **část přilehlá k řídicí kružnici.**



Obr. 38.



Obr. 39a.

V58. Část **K** kuželového prostoru přilehlá k řídicí kružnici i zbývající část doplněná vrcholem V, jsou konvexní útvary.

Důkaz. Postupujeme jako při důkaze V55; avšak místo přímek r, s, t uvažujeme o polopřímkách VX, VX, VZ (body X, Y, Z mají obdobný význam jako v důkaze V55).

Vrcholová rovina (přímka) kuželové plochy je taková, která prochází jejím vrcholem.

V59. Vzájemná poloha vrcholové roviny s kuželovou plochou může býti trojí (obr. 39 abc):

1° Rovina nemá s kuželovou plochou mimo vrchol žádný bod společný (t. zv. rovina nesečná).

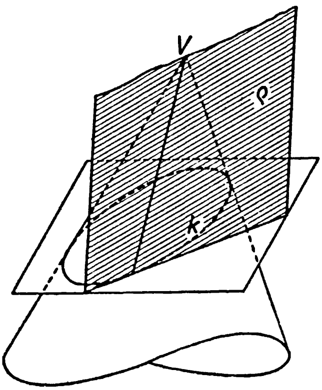
2° Rovina má s kuželovou plochou společnou jedinou přímku (t. zv. rovina tečná).

3° Rovina má s kuželovou plochou společné dvě přímky (t. zv. rovina sečná).

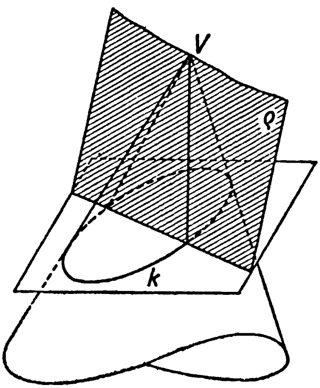
Poučku dokážete snadno sami stejně jako V52.

Definice. Vrcholová rovina kuželové (válcové) plochy, která obsahuje střed řídicí kružnice a je kolmá k její rovině, nazývá se **hlavní vrcholová rovina kuželové (válcové) plochy.**

V60. Hlavní vrcholová rovina je rovinou souměrnosti kuželové (válcové) plochy. Rotační kuželová (válcová) plocha má nesčíslné množství hlavních rovin, nerotační kuželová (válcová) plocha jedinou.



Obr. 39b.



Obr. 39c.

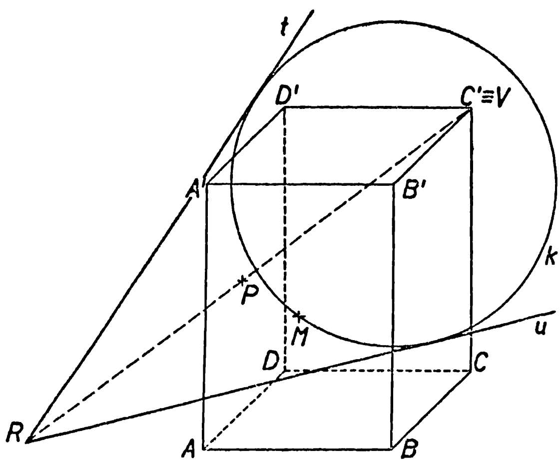
Poučku si snadno odůvodníte, uvědomíte-li si, že řídicí kružnice je souměrná podle hlavní vrcholové roviny. Druhou část poučky odvodíte z toho, kolik rovin kolmých k dané rovině lze vésti danou přímkou (viz V32).

Definice. Budiž dána část **K** kuželového prostoru, přilehlá k řídicí kružnici. Označme ϱ rovinu řídicí kružnice, V vrchol kuželového prostoru. Průnik útvaru **K** a poloprostoru ϱV nazýváme **(kruhovým) kuželem.**

Vyslovte sami definici podstavy, pláště, strany a výšky kužele. Který kužel je rotační, který kosý? Dokažte, že kužel je konvexní útvar!

Příklad: (Obr. 40.) Je dán základní kvádr $ABCDA'B'C'D'$. Body M, P jsou po řadě středy stěn $ABB'A'$, $ADD'A'$. Kuželová plocha má vrchol v bodě C', její řídicí kružnice leží v rovině ABB', má střed B' a prochází bodem M. Máme určit tečné roviny této kuželové plochy, které procházejí bodem P (krátce říkáme: vésti z bodu P tečné roviny k dané kuželové ploše).

Ježto každá tečná rovina je vrcholová, obsahují všechny hledané tečné roviny přímku VP (viz axiom A1). Každá z nich je tedy různoběžná s rovinou ABB' řídicí kružnice (neboť přímka PV je různoběžná s rovinou ABB') a příslušná průsečnice je tečnou řídicí kružnice. Úlohu tedy rozřešíme tak, že z průsečíku R přímky PV a roviny ABB' vedeme tečny t, u k řídicí kružnici; roviny tV, uV jsou zřejmě tečné roviny kuželové plochy a obsahují skutečně bod P.



Obr. 40.

Cvičení.

136. Kolik rovin souměrnosti, os souměrnosti, středů souměrnosti má: (1) rotační plocha válcová, (2) rotační plocha kuželová, (3) rotační válec, (4) rotační kužel.

137. Určete rovnoběžná posunutí, jimiž se reprodukuje kruhová plocha válcová.

138. Každá rovina kolmá k přímce kruhové plochy válcové, je její rovinou souměrnosti; dokažte.

139. Dokažte, že hlavní vrcholová rovina kruhového válce nebo kužele je rovinou souměrnosti tohoto tělesa.

140. Budiž q vrcholová přímka kruhové válcové plochy. Potom všechny její body leží *a*) buď na ploše, b) uvnitř plochy, c) vně plochy. Dokažte.

141. Budiž q vrcholová přímka kruhové kuželové plochy. Potom všechny její body, nejvýš s výjimkou bodu V, leží a) na ploše kuželové, b) uvnitř kuželové plochy, c) vně kuželové plochy. Dokažte.

142. Buďte M, N dva různé body uvnitř a) kruhového válce, b) kruhového kužele; dokažte, že přímka MN protne povrch tělesa ve dvou různých bodech.

143. Buďte dány dvě různé rovnoběžky r, s; přímkou r položte rovinu ϱ a přímkou s rovinu σ tak, aby bylo $\sigma \perp \varrho$. Jaký útvar vyplní průsečnice p rovin ϱ a σ, když rovina ϱ mění svou polohu? Patří i přímky r, s tomuto útvaru?

144. a) Jestliže přímka m má s kruhovou plochou válcovou tři různé body společné, pak je m přímkou plochy; dokažte.
b) Jestliže přímka m má s kruhovou plochou kuželovou tři různé body společné, pak je m přímkou plochy; dokažte.

145. Budiž r poloměr a $v=2r$ výška rotačního válce (t. zv. rovnostranný válec); dále budiž A bod dolní a A' bod horní kruhové hrany.
a) Určete nejkratší vzdálenost osy válce a přímky AA', jestliže úhel přímky AA' s rovinou podstavy válce je $\frac{1}{3}\pi$.
b) Buďte S, S' středy podstav válce a SA, $S'A'$ určité poloměry v těchto podstavách. Určete úhel osy válce s přímkou AA', jestliže úhel polopřímek SA, $S'A'$, je $\frac{1}{3}\pi$.

146. Budiž ω hlavní vrcholová rovina kruhového válce nebo kruhového kužele.
a) Budiž $\varrho \perp \omega$ rovina, která obsahuje osu válce; dokažte, že rovina ϱ protíná válec v obdélníku.
b) Které další roviny protínají kruhový válec v obdélníku?
c) Budiž $\varrho \perp \omega$ rovina, která obsahuje vrchol a střed řídicí kružnice kužele; dokažte, že rovina ϱ protíná kužel v rovnoramenném trojúhelníku.
d) Které další roviny protnou kruhový kužel v rovnoramenném trojúhelníku?

147. Budiž V vrchol, S střed a r poloměr řídicí kružnice k kosého kruhového kužele, takže pata V_1 kolmice, spuštěné z bodu V na rovinu podstavy kužele, padne mimo bod S. Buďte dále B, A nejbližší a nejvzdálenější body kružnice k vzhledem k bodu V_1 a X další bod této kružnice; platí tedy $\overline{V_1A} > \overline{V_1X} > \overline{V_1B}$. Dokažte:
a) VAB je hlavní vrcholová rovina.
b) O stranách kužele platí $\overline{VA} > \overline{VX} > \overline{VB}$. (Uvažujte $\triangle VV_1A$, $\triangle VV_1X$, $\triangle VV_1B$.).

148. Budiž V vrchol, S střed a r poloměr řídicí kružnice kosého kužele, jehož výška je v. Vypočtěte velikost největší a nejmenší strany, je-li dáno $r=10$, $v=21$, $\overline{VS}=29$.

149. Definujte rotační komolý kužel **K** s výškou v a s poloměry podstav $r_1 \neq r_2$.

a) Určete vzdálenosti v_1, v_2 vrcholu příslušné rotační kuželové plochy od rovin obou podstav.

b) Dokažte, že existuje ještě jedna rotační kuželová plocha $\mathbf{K}'$ s vrcholem O, která obsahuje obě kruhové hrany kužele $\mathbf{K}$, určete vzdálenosti bodu O od rovin obou podstav kužele $\mathbf{K}$.

c) Určete poloměr kruhového řezu, jehož rovina má od roviny větší podstavy kužele $\mathbf{K}$ vzdálenost x, a to (1) na kuželové ploše $\mathbf{K}$, (2) na kuželové ploše $\mathbf{K}'$.

150. Zobrazte kruhový válec o kruhových hranách k, k', jejichž středy jsou S, S', a řešte konstruktivně úlohu:

a) Daným bodem M' položte tečnou rovinu k válcové ploše; proveďte diskusi. (Bodem M' veďte přímku m rovnoběžnou s přímkou plochy a označte M'' její průsečík s rovinou řídicí kružnice k; z bodu M veďte tečny ke k.)

b) K válcové ploše sestrojte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s danou přímkou q; proveďte diskusi. (Volte $q \equiv SK'$, kde K' je libovolný bod druhé zobrazené kružnice k'; veďte ke kružnici k' tečnu t'.)

151. Zobrazte kruhový kužel s kruhovou hranou k a s vrcholem V; řešte pro kuželovou plochu konstruktivně podobné dvě úlohy jako v předchozím cvič. 150. Proveďte diskusi.

a) Určete průsečík M přímky VM' s rovinou řídicí kružnice k plochy a z bodu M k ní veďte tečny.

b) Bodem V veďte přímku $VQ \| q$ a označte Q její průsečík s rovinou řídicí kružnice; z bodu Q veďte ke kružnici k tečny.)

14. Kulová plocha a koule.

Vyslovte definici kulové plochy a definici koule. Charakterisujte vnitřní a vnější body kulové plochy; co je vnitřek koule? Dokažte, že koule i její vnitřek jsou konvexní útvary.

V61. Vzájemná poloha přímky a kulové plochy může být trojí (obr. 41):

1° Přímka nemá s kulovou plochou společný bod (t. zv. nesečna).

2° Přímka má s kulovou plochou jediný společný bod (t. zv. tečna).

3° Přímka má s kulovou plochou dva různé společné body (t. zv. sečna).

Dokažte sami. Položte danou přímkou p a středem S kulové plochy rovinu a rozlište, zda vzdálenost přímky p od bodu S je větší než poloměr, je rovna poloměru, či je menší než poloměr kulové plochy.

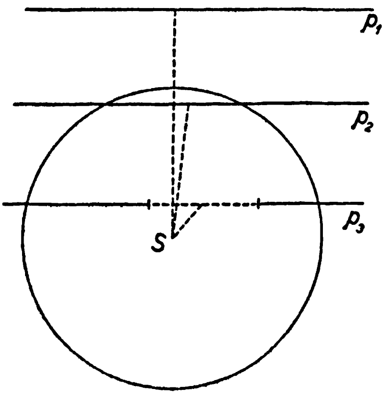
V62. Vzájemná poloha roviny a kulové plochy může být trojí (obr. 42):

1° Rovina nemá s kulovou plochou společný bod (t. zv. rovina nesečná).

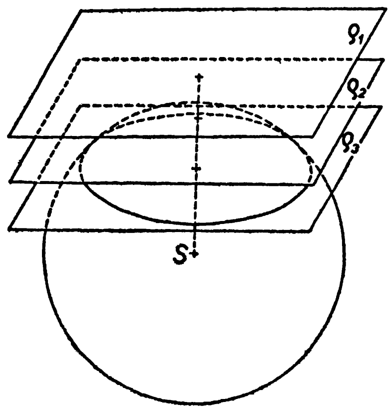
2° Rovina má s kulovou plochou společný jediný bod (t. zv. rovina tečná).

3° Rovina má s kulovou plochou společnou kružnici (t. zv. rovina sečná).

Dokažte sami. Spusťte ze středu S kulové plochy kolmici na danou rovinu ϱ a označte její patu P. Zkoumejte vzájemnou polohu kulové



Obr. 41.



Obr. 42.

plochy a přímek roviny ϱ, které procházejí bodem P. Přitom rozlište tři případy: $\overline{SP}$ je větší než poloměr kulové plochy, nebo je rovno poloměru, nebo je menší než poloměr.

V63. Tečná rovina kulové plochy je vyplněna všemi jejími tečnami, které jdou bodem dotyku.

Dokažte sami!

Vyslovte definici hlavní a vedlejší kružnice; dokažte, že žádná kružnice na kulové ploše nemá větší poloměr než kulová plocha.

Cvičení.

152. Obsahuje-li plocha kulová tři body A, B, C, obsahuje i kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Dokažte.

153. Je dán pravidelný čtyrstěn $ABCD$ o hraně 6 cm. Plocha kulová obsahuje kružnici vepsanou trojúhelníku ABC a prochází těžištěm trojúhelníka ABD. Určete konstruktivně její střed a poloměr.

154. Všechny tečny vedené k ploše kulové vnějším bodem V vyplňují rotační kuželovou plochu s vrcholem V. Dotykové jejich body vyplňují vedlejší kružnici (t. zv. dotykovou kružnici), jejíž rovina je kolmá ke spojnici středu plochy kulové a bodu V a střed leží na této spojnici. Dokažte.

155. Je dán čtyrstěn $ABCD$; $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=6$, $\overline{AD}=5$, $\overline{BD}=7$, $\overline{CD}=8$. Plocha kulová má střed C a jde body A, B. Určete konstruktivně poloměr dotykové kružnice kužele tečen vedených z bodu D k ploše kulové a délku tečen.

156. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, bod P je střed hrany $C'D'$, bod Q je střed hrany $D'A'$. Určete střed a poloměr plochy kulové, která se dotýká roviny ABC v bodě B a mimo to a) prochází bodem C'; b) dotýká se přímky AC'; c) dotýká se roviny DPQ; d) dotýká se přímky QC'.

157. Tečné roviny plochy kulové v bodech U, T se protínají v přímce q. Dokažte, že je $TU \perp q$.

158. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, bod M je střed podstavy $ABCD$, bod S je střed hrany AB. Přímkou $B'D'$ veďte tečné roviny k ploše kulové, která má střed v bodě S a prochází bodem M.

159. Zvolte si libovolný čtyrstěn $ABCD$. Popište, jak se konstruktivně určí střed plochy kulové, která se dotýká hran AB, CD v jejich středech.

160. Je dána plocha kulová (S, r) a její vnější bod V; $\overline{SV}=a$. V průsečících plochy kulové s přímkou SV sestrojíme tečné roviny ϱ, ϱ'. Vyšetřete, co je průsekem těchto rovin s kuželem tečen, vedených z bodu V k ploše kulové.

161. Pozorovatel letec, který je ve výšce v nad povrchem zeměkoule (S, r), vidí jistou část povrchu, ohraničenou vedlejší kružnicí o poloměru ϱ. Určete vztah mezi veličinami v, r, ϱ.

162. Jsou dány dvě plochy kulové $(S_1\, r_1)$, (S_2, r_2) a platí vztahy $|r_1 - r_2| < \overline{S_1S_2} < r_1 + r_2$. Dokažte, že společné body obou ploch kulových vyplní kružnici, jejíž rovina je kolmá k přímce S_1S_2 (středné) a jejíž střed leží na středné. Napište podmínku, aby tato kružnice byla hlavní na první kulové ploše. (Proložte rovinu přímkou S_1S_2.)

163. Jsou dány dvě plochy kulové (S_1, r_1), (S_2, r_2). Platí-li jeden ze vztahů $\overline{S_1S_2} = |r_1 - r_2|$ nebo $\overline{S_1S_2} = r_1 + r_2$, mají obě plochy kulové společný jediný bod (dotýkají se). Dokažte. Převeďte na dotyk dvou hlavních kulovou plochu.

164. Jsou dány dvě plochy kulové (S_1r_1), (S_2, r_2). Platí-li jeden ze vztahů $\overline{S_1S_2} < |r_1 - r_2|$ nebo $\overline{S_1S_2} > r_1 + r_2$, jsou obě plochy bez společných bodů. Dokažte. Převeďte opět na vzájemnou polohu hlavních kružnic.

165. Na základě cvičení 162 až 164 proveďte úplnou diskusi vzájemné polohy dvou kulových ploch.

II. Obsah mnohoúhelníka. Obvod a obsah kruhu.

1. Základní vlastnosti obsahu.

V první třídě jsme porovnávali velikosti jednak úseček, jednak úhlů. Nyní budeme porovnávati velikosti mnohoúhelníků. Dvě stejně veliké úsečky jsou vždy shodné, t. j. pouhou změnou polohy lze dosáhnouti, aby se navzájem kryly. Rovněž tak dva stejně veliké úhly jsou vždy shodné. Naproti tomu dva stejně veliké mnohoúhelníky se nemusí od sebe lišit pouze polohou, nýbrž mohou mít naprosto odlišný tvar. Z tohoto důvodu je nauka o velikosti mnohoúhelníků složitější než nauka o velikosti úseček nebo úhlů. Proto nebudeme v této nauce dokazovat všecko, co by se dokázati dalo.

Velikost úseček je možno (volbou délkové jednotky) vyjadřovat číselně, t. j. je možné každé úsečce přiřadit určité kladné číslo (racionální nebo irracionální) tak, že dvěma stejně velikým úsečkám je přiřazeno totéž číslo, kdežto dvěma různě velikým úsečkám jsou přiřazena různá čísla: větší úsečce je přiřazeno větší číslo. Toto přiřazení má tyto vlastnosti:

[1] Dvěma shodným úsečkám je přiřazeno totéž číslo.

[2] Jestliže se úsečka AB skládá ze dvou úseček AC, CB, potom číslo přiřazené úsečce AB je součtem čísel přiřazených úsečkám AC, CB.

Podobně je možné každému mnohoúhelníku přiřadit kladné číslo, zvané **obsah mnohoúhelníka,** tak, že platí tyťo vlastnosti:

[1] Dva shodné mnohoúhelníky mají týž obsah.

[2] Jestliže se mnohoúhelník M skládá ze dvou mnohoúhelníků M_1, M_2, které se navzájem nepřekrývají, t. j. nemají žádný společný vnitřní bod, potom obsah mnohoúhelníka M je součtem obsahů obou mnohoúhelníků M_1, M_2.

Dá se dokázati, že z vlastnosti [2] plyne další vlastnost:

[3] Je-li mnohoúhelník M' různý od mnohoúhelníka M

částí mnohoúhelníka M, potom je obsah mnohoúhelníka M větší než obsah mnohoúhelníka M'.

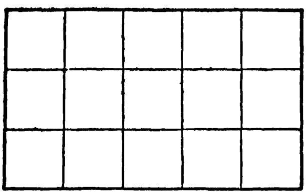
Vědecká nauka o velikosti mnohoúhelníků dokazuje, že takové přiřazení s vlastnostmi [1], [2], a tedy i [3], je možné. Tento důkaz je však příliš dlouhý a nebudeme jej probírati. Budeme tedy bez důkazu pokládat za správné, že je možné definovat obsah každého mnohoúhelníka tak, aby byly splněny vlastnosti [1], [2], [3].

Obsah mnohoúhelníka se ovšem nedá vlastnostmi [1], [2], [3], definovati *jednoznačně*. Neboť jestliže je obsah už nějak definován tak, že všecky tři vlastnosti platí, můžeme definovat nový obsah, který je u každého mnohoúhelníka na př. roven dvojnásobku původního obsahu. Je jasné, že tato změna pojmu obsahu nemá vlivu na správnost vlastností [1], [2], [3]. Abychom dospěli k jednoznačně definovanému obsahu, stačí k vlastnostem [1], [2], [3] ještě připojiti:

[4] Obsah čtverce, jehož strana je jednotka délky, je roven jedné.

Že je obsah mnohoúhelníka jednoznačně určen vlastnostmi [1] až [4], plyne z toho, že se z těchto vlastností dá odvodit zcela určitý způsob výpočtu obsahu mnohoúhelníka. Provedeme to v příštím článku. V tomto článku se omezíme na obdélník. Dokážeme, že **obsah obdélníka s rozměry a, b je roven součinu ab.** Důkaz rozdělíme v 6 částí.

I. Je-li $a = b = 1$, je daný obdélník čtverec, jehož strana je jednotka délky; nazveme jej *jednotkový čtverec.* Podle [4] je jeho obsah rovný jedné, tedy rovný součinu ab.



Obr. 43.

II. Jsou-li rozměry a, b čísla celá, dá se (viz obr. 43) obdélník rozdělit na $a \cdot b$ jednotkových čtverců, které se navzájem nepřekrývají. Obsah obdélníka je podle [2] roven součtu obsahů všech těch čtverců, t. j. je roven součinu $a \cdot b$.

III. Jsou-li rozměry tvaru $a = hc$, $b = kc$, kde h, k jsou kladná čísla celá a c je libovolné kladné číslo, dokáže se stejně, že obsah obdélníka je roven $hk . C$, kde C znamená obsah čtverce se stranou rovnou c.

IV. Je-li n přirozené číslo, pak obsah čtverce se stranou rovnou $\frac{1}{n}$ je roven $\frac{1}{n^2}$. Neboť označíme-li C hledaný obsah, dostaneme z III (pro

$a = 1$, $b = 1$, $h = n$, $k = n$, $c = \frac{1}{n}$), že obsah jednotkového čtverce je roven n^2C, takže $C = \frac{1}{n^2}$ podle I.

V. Jsou-li rozměry a, b racionální čísla, můžeme je napsati ve tvaru

$$a = \frac{h}{n}, \quad b = \frac{k}{n},$$

kde h, k, n jsou přirozená čísla. Obsah obdélníka je podle III a IV roven

$$hk \cdot \frac{1}{n^2} \text{ neboli } ab.$$

VI. Posléze buďtež rozměry a, b daného obdélníka libovolná kladná čísla; je-li P jeho obsah, máme dokázati, že je $P = ab$. Za tím účelem dokážeme, že číslo P nemůže býti ani větší, ani menší než součin ab. Předpokládejme nejprve, že je $P < ab$. Součin ab můžeme vypočísti s libovolnou přesností, nahradíme-li a, b desetinnými zlomky nepatrně menšími, než jsou čísla a, b. Zejména můžeme udat desetinné zlomky $a' < a$, $b' < b$ tak, že součin $a'\,b'$ se liší od součinu ab o méně, než je rozdíl $ab - P$, který je podle předpokladu kladný. Potom bude $P < P'$, kde $P' = a'b'$. Avšak P' je obsah obdélníka s rozměry a', b', který můžeme umístiti tak, aby byl částí původního obdélníka, takže podle [3] je naopak $P > P'$. Tím je dokázáno, že nemůže býti $P < ab$. Předpokládáme-li, že je $P > ab$, dojdeme velmi podobnou úvahou k závěru, že i to je nemožné. Tentokrát nahradíme při výpočtu součinu ab činitele a', b' tak nepatrně *většími* než a, b, aby se součin $a'b'$ lišil od součinu ab o méně, než je rozdíl $P - ab$, který je podle předpokladu kladný.

Cvičení.

166. Jsou dány dva čtverce o obsazích m^2, n^2 (kde $m \geqq n > 0$). Sestrojte čtverec, jehož obsah je a) $m^2 + n^2$, b) $m^2 - n^2$.

167. Obsahy čtverců jsou v poměru 9 : 16. a) V jakém poměru jsou jejich strany? b) Je-li jeden ze čtverců narýsován, narýsujte druhý!

168. Na kolik čtverců obsahu 3 cm² lze rozdělit obdélník o rozměrech $h\sqrt{3}$ cm, $k\sqrt{3}$ cm, kde h, k jsou přirozená čísla?

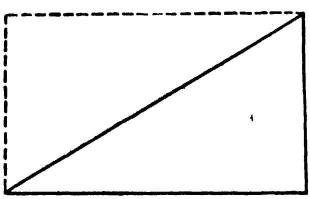
169. Jak se změní obsah obdélníka o rozměrech a, b, jestliže
a) délku zvětšíme m-krát a šířku n-krát?
b) oba rozměry a, b zvětšíme, a to o p%?
c) oba rozměry a, b zmenšíme, a to o p%?
d) rozměr a zvětšíme o p% a rozměr b zmenšíme o p%?
Proveďte numericky pro $a = 60$ m, $b = 50$ m, $p = 2$%.

170. Obdélník o rozměrech a, b má obsah P. Zvětšíme-li rozměry o kladné hodnoty ε, ε', má obsah P'.
a) Určete, oč je větší P' než P.
b) Určete, oč je větší P' než P v případě, že $\varepsilon' = \varepsilon$.
c) Jestliže $\varepsilon' = \varepsilon$ je číslo, které je velmi malé proti hodnotám a, b, je $P' - P$ přibližně rovno $(a + b)\,\varepsilon$; dokažte.

171. Určete přibližně obsah P obdélníka o rozměrech $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ tak, že daná iracionální čísla zaokrouhlíte sestupně nebo vzestupně na setiny.
a) Pak lze dojít ke čtyřem různým hodnotám pro velikost obsahu; která z nich je nejmenší (P_1) a která největší (P_2)?
b) Položíte-li ve cvič. 170b) $\varepsilon = 10^{-2}$, potom z výsledku tohoto cvičení plyne, že $P_2 - P_1 = (P_2 - P) + (P - P_1) = 2\,(a + b)\,\varepsilon$. Zobrazte hodnoty P_1, P_2 na ose číselné body P_1, P_2; která je přibližná vzdálenost P_1P_2?
c) Pro které číslo ε budou obě hodnoty P_1, P_2 skoro souhlasit na setiny?

2. Obsah mnohoúhelníka.

I. Obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami a, b je roven $\frac{1}{2}\,ab$. Neboť především všecky takové pravoúhlé trojúhelníky jsou navzájem shodné a mají tedy týž obsah. Za druhé obdélník s rozměry a, b (obr. 44) se skládá ze dvou takových trojúhelníků a jeho obsah, který je roven ab, je tudíž dvojnásobkem obsahu trojúhelníka.



Obr. 44.

Výškou trojúhelníka $\triangle\,ABC$ příslušnou straně BC rozumíme úsečku AP, kde P je pata kolmice $AP \perp BC$. Víme, že bod P padne: [1] dovnitř úsečky BC (obr. 45), jsou-li oba úhly β, γ ostré; [2] do krajního bodu úsečky BC (obr. 46), je-li jeden z úhlů β, γ pravý; [3] na prodloužení úsečky BC (obr. 47), je-li jeden z úhlů β, γ tupý.

II. Obsah trojúhelníka je roven polovině součinu zvolené strany a příslušné výšky.

Důkaz. V $\triangle\,ABC$ zvolme stranu $\overline{BC} = a$; příslušná výška budiž $\overline{AP} = b$. Je-li jeden z obou úhlů β, γ pravý, plyne naše věta přímo z věty I. Jsou-li za druhé oba úhly β, γ ostré (obr. 45), skládá se $\triangle\,ABC$ ze dvou nepřekrývajících se pravoúhlých $\triangle\,ABP$, $\triangle\,ACP$, jejichž obsahy podle věty I jsou $\frac{1}{2}\,\overline{BP} \cdot v$, $\frac{1}{2}\,\overline{CP} \cdot v$. Tudíž obsah $\triangle\,ABC$ je roven

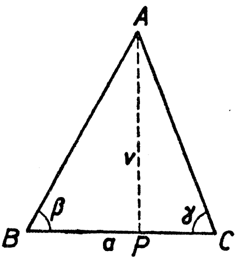
$$\tfrac{1}{2}\,\overline{BP} \cdot v + \tfrac{1}{2}\,\overline{CP} \cdot v = \tfrac{1}{2}\,(\overline{BP} + \overline{CP}) \cdot v = \tfrac{1}{2}\,\overline{BC} \cdot v = \tfrac{1}{2}\,av.$$

Budiž posléze na př. γ úhel tupý (obr. 47). Pravoúhlý $\triangle ABP$ s obsahem $\frac{1}{2}\overline{BP}\cdot v$ se potom skládá ze dvou nepřekrývajících se trojúhelníků: z pravoúhlého $\triangle ACP$ s obsahem $\frac{1}{2}\overline{CP}\cdot v$ a z daného $\triangle ABC$, jehož obsah označíme x. Je tudíž

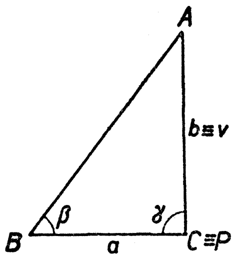
$$\tfrac{1}{2}\overline{BP}\cdot v = \tfrac{1}{2}\overline{CP}\cdot v + x$$

a z toho plyne

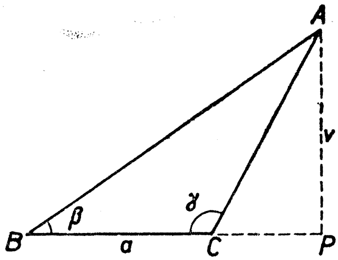
$$x = \tfrac{1}{2}\overline{BP}\cdot v - \tfrac{1}{2}\overline{CP}\cdot v = \tfrac{1}{2}(\overline{BP} - \overline{CP})\cdot v = \tfrac{1}{2}\overline{BC}\cdot v = \tfrac{1}{2}av.$$



Obr. 45.



Obr. 46.

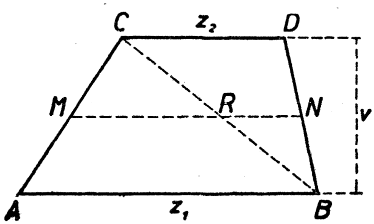


Obr. 47.

Výškou lichoběžníka $ABDC$ se základnami AB, CD (obr. 48) rozumíme vzdálenost obou rovnoběžek AB, CD.

III. Obsah lichoběžníka se základnami rovnými z_1, z_2 a s výškou rovnou v je roven $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)v$.

Důkaz (obr. 48). Úhlopříčka BC rozdělí lichoběžník ve dva nepřekrývající trojúhelníky: $\triangle ABC$, $\triangle BCD$. Protože vzdálenost rovnoběžek můžeme měřit na kterékoli společné kolmici, výška $\triangle ABC$ příslušná straně $\overline{AB} = z_1$ je rovna v, a výška $\triangle BCD$ příslušná straně $\overline{CD} = z_2$ je rovněž rovna v. Tedy obsah $\triangle ABC$ je roven $\frac{1}{2}z_1 v$, obsah $\triangle BCD$ je roven $\frac{1}{2}z_2 v$, obsah lichoběžníka je roven



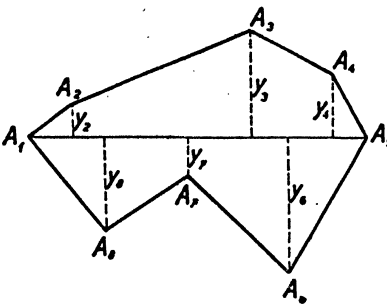
Obr. 48.

$$\tfrac{1}{2}z_1 v + \tfrac{1}{2}z_2 v = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)v.$$

Středy M, N ramen AC, BD určují úsečku MN zvanou střední příčkou lichoběžníka. Průsečík R úsečky MN s úhlopříčkou BC rozdělí MN ve dvě úsečky MR, RN, které jsou středními příčkami v $\triangle ABC$, $\triangle BCD$. Protože střední příčka trojúhelníka je rovna polovině strany s ní rovnoběžné, je $\overline{MR} = \frac{1}{2} z_1$, $\overline{RN} = \frac{1}{2} z_2$, tedy $\overline{MN} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$. Větu III můžeme proto vysloviti také ve tvaru:

III'. Obsah lichoběžníka je roven součinu výšky se střední příčkou.

Theoreticky důležitá je především věta II. Z ní plyne, že obsah trojúhelníka je jednoznačně určen vlastnostmi [1] až [4], vyjmenovanými ve článku 13, neboť při důkaze věty II jsme neužili jiné vlastnosti obsahu než těch, které jsou důsledky uvedených vlastností. *Jednoznačná určenost obsahu vlastnostmi* [1] *až* [4] *platí pro libovolný mnohoúhelník*, neboť každý mnohoúhelník se dá rozdělit v nepřekrývající se trojúhelníky a jeho obsah je podle vlastnosti [2] roven součtu obsahů takových mnohoúhelníků.



Obr. 49.

V praxi, zejména v zeměměřictví, je důležitá věta III. Máme-li na př. určit obsah osmiúhelníka $A_1A_2A_3A_4$ $A_5A_6A_7A_8$ v obr. 49, rozdělíme jej nejprve úhlopříčkou A_1A_5 a potom kolmicemi y_2, y_3, y_4, y_6, y_7, y_8 spuštěnými s ostatních vrcholů na přímku A_1A_5. Osmiúhelník je potom rozložen ve čtyři pravoúhlé trojúhelníky, jejichž obsah určíme podle věty I, a ve čtyři lichoběžníky, jejichž obsah určíme podle věty III. Každý z lichoběžníků má dva úhly pravé a jeho výška je rovna rameni ležícímu v úsečce A_1A_5. Výpočet vyžaduje změření kolmic $y_2, y_3, \ldots, y_8$ a změření úseček, na které paty těchto kolmic rozdělí úsečku A_1A_5.

Všimněme si ještě pravidelného n-úhelníka (obr. 50 pro $n = 5$) $A_1A_2 \ldots A_n$ se středem O. Úsečky $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ rozdělí n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků; obsah n-úhelníka je tedy n-násobek obsahu kteréhokoli z těchto trojúhelníků. Označme Q_n společnou velikost všech stran A_1A_2, A_2A_3, ... n-úhelníka; dále označme r_n poloměr opsané kružnice, t. j. společnou velikost úseček OA_1, OA_2 ...; posléze označme ϱ_n poloměr vepsané kružnice, tedy společnou velikost úseček OB_1, OB_2 ..., kde na př. OB_1 je výška $\triangle\, OA_1A_2$ příslušná straně A_1A_2. Obsah $\triangle\, OA_1A_2$ podle věty I je $\frac{1}{2} Q_n\varrho_n$, obsah pravidelného n-úhelníka je n-násobný, je tedy roven

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot n\, Q_n \cdot \varrho_n. \tag{1}$$

Přitom je $n\,Q_n$ obvod n-úhelníka, tedy obsah pravidelného n-úhelníka je roven polovině součinu obvodu s poloměrem vepsané kružnice.

Jiný výraz pro obsah $\triangle\, OA_1A_2$ dostaneme na základě strany $\overline{OA_1} = r_n$ a příslušné výšky A_1C (obr. 50); v pravoúhlém $\triangle\, OA_1C$ máme při vrcholu O úhel $\frac{2\pi}{n}$, takže $\overline{A_1C} = r_n \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$; tedy obsah $\triangle\, OA_1A_2$ je $\frac{1}{2} r_n \cdot \overline{A_1C} = \frac{1}{2} r_n^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$, tudíž obsah pravidelného n-úhelníka je

$$P_n = \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n} \cdot r_n^2. \tag{2}$$

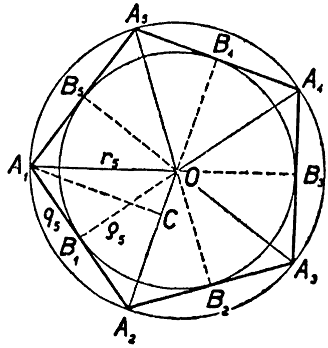
V pravoúhlém $\triangle\, OA_1B_1$ máme při vrcholu O úhel $\frac{\pi}{n}$; tedy

$$\frac{1}{2} Q_n = \varrho_n \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}; \quad \varrho_n = \frac{1}{2} Q_n \cdot \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

Z (1) obdržíme tedy další dva výrazy pro P_n:

$$P_n = n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \cdot \varrho_n^2; \tag{3}$$

$$P_n = \frac{1}{4} n \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} \cdot Q_n^2. \tag{4}$$



Obr. 50.

Poznámka. Při odvození vzorce (2) jsme předpokládali, že v pravoúhlém OA_1C máme při vrcholu O úhel $\frac{2\pi}{n}$. To je správné pouze pro $n \geq 5$. Ostatně ve vzorci (2) se vyskytuje $\sin\alpha$ pro $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ a hodnotu $\sin\alpha$ máme dosud definovanou pouze pro $\alpha < \frac{\pi}{n}$, což zase vyžaduje $n \geq 5$.

Cvičení.

172. Dokažte,

a) že rovnoběžník je svými úhlopříčkami rozdělen ve čtyři rovnoploché trojúhelníky.

b) Spojnice středu S přepony AB pravoúhlého trojúhelníka ABC s protějším vrcholem C dělí trojúhelník ve dva rovnoploché trojúhelníky.

c) Trojúhelník je svou těžnicí rozdělen ve dva rovnoploché trojúhelníky.

d) Spojnice těžiště T trojúhelníka ABC s jeho vrcholy rozděluje trojúhelník ve tři rovnoploché trojúhelníky.

e) Všechny tři těžnice trojúhelníka rozdělují tento trojúhelník v šest rovnoplochých trojúhelníků.

173. a) Jsou dány trojúhelníky ABC, $AB'C'$; bod B' leží na polopřímce AB a bod C' na polopřímce AC, při čemž je $BC' \parallel B'C$. Dokažte, že oba trojúhelníky jsou rovnoploché.

b) Stejnou úvahu jako ve cvič. a) proveďte se dvěma rovnoběžníky $ABCD$, $AB'C'D'$, kde bod B' leží na polopřímce AB a bod D' na polopřímce AD, při čemž je $BD' \parallel B'D$.

174. Jak se změní obsah trojúhelníka,

a) vzroste-li m-krát jeho strana a?

b) vzroste-li n-krát jeho výška v?

c) vzroste-li jeho strana a m-krát a zároveň jeho výška v n-krát?

175. Polokružnice s průměrem $\overline{AB}=2r$ je body C, D rozdělena ve tři navzájem rovné oblouky. Určete obsah trojúhelníka ACD.

176. $\triangle ABC$ má stranu $\overline{BC}=a$ a příslušnou výšku v. Na stranách AC, AB určete body B_0, C_0 tak, aby o dělících poměrech platilo $(ACB_0)=$ $=(ABC_0)=-\frac{3}{4}$. Označte O průsečík úseček BB_0, CC_0 a vypočtěte obsah trojúhelníka OBC užitím hodnot a, v.

177. Víte, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC, v němž je úhel $\alpha=30°$, $\beta=60°$, platí $a : b : c=1 : \sqrt{3} : 2$.

a) Určete obsah rovnostranného trojúhelníka o straně a.

b) Určete obsah pravidelného šestiúhelníka o straně a.

178. Trojúhelník ABC má vnitřní úhel γ a vedlejší vnější úhel γ'. Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC, je-li dáno a, b, γ. (Rozeznávejte případy (1) $\gamma<R$; (2) $\gamma=R$; (3) $\gamma>R$ a určete vždy výšku k jedné dané straně).

179. Vypočtěte

a) obsah čtyrúhelníka $ABCD$, v němž je $AC \perp BD$. (Každým vrcholem čtyrúhelníka veďte rovnoběžku se spojnicí obou sousedních vrcholů.)

b) obsah rovnoběžníka, jsou-li dány velikosti v_1, v_2 jeho výšek a jeho obvod $2s$.

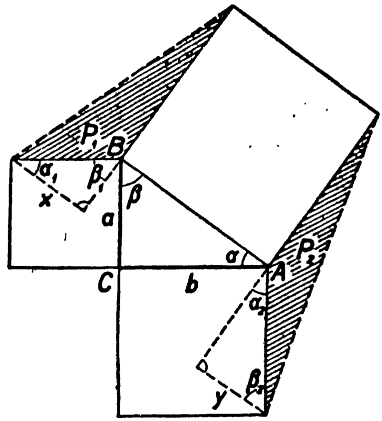
180. Body A_0, B_0, C_0, D_0 nechť jsou středy stran AB, BC, CD, DA čtverce $ABCD$. Potom přímky AB_0, BC_0, CD_0, DA_0 určují čtverec, jehož obsah je roveň $\frac{1}{5}$ obsahu daného čtverce. Dokažte!

181. Shodné pravoúhlé trojúhelníky ABC, ABD, kde $\sphericalangle C = \sphericalangle D=\frac{1}{2}\pi$, leží v téže polorovině ABC. Jest $\overline{AD}=\overline{BC}=12$, $\overline{AC}=\overline{BD}=16$. Určete obsah trojúhelníka, který je společnou částí obou daných trojúhelníků.

182. Nade všemi třemi stranami rovnostranného trojúhelníka sestrojte čtverce tak, aby neobsahovaly vnitřní bod trojúhelníka. Dokažte, že vrcholy čtverců, které nesplývají s vrcholy trojúhelníka, určují šestiúhelník, který má tři osy souměrnosti. Potom určete obsah šestiúhelníka, jestliže je dána velikost a strany rovnostranného trojúhelníka. (Strany dvou sousedních čtverců tvoří rovnoramenný trojúhelník; určete úhel jeho ramen a výšku příslušnou k rameni.)

183. Nad stranami pravoúhlého trojúhelníka ABC ($\sphericalangle C = \frac{1}{2}\pi$) sestrojte čtverce, které neobsahují vnitřní bod trojúhelníka. Vrcholy čtverců, které nesplývají s vrcholy trojúhelníka, tvoří šestiúhelník; určete jeho obsah, jsou-li dány odvěsny a, b trojúhelníka ABC.

(Dokažte, že v obr. 51. je $a_1 = a_2 = a$; určete výšky x, y trojúhelníků P_1, P_2. Je $P_1 = P_2$?)



Obr. 51.

184. Buďte $a > c$ základny a v výška lichoběžníka $ABCD$ (kde $AB \parallel DC$). Vypočtěte obsahy trojúhelníků ABE, CDE, kde E je průsečík obou prodloužení ramen AD, BC. Odvoďte odtud vzorec pro obsah lichoběžníka.

185. Budiž M střed ramene AD lichoběžníka $ABCD$ (kde $AB \parallel DC$). Obsah trojúhelníka MBC je roveň polovině obsahu lichoběžníka $ABCD$; dokažte.

186. a) Obsah lichoběžníka je roven součinu jednoho ramene a vzdálenosti středu druhého ramene od ramene prvního; dokažte.

b) Na kružnici jsou dány body A, B. Veďte tětivy $AM \parallel BN$ tak, aby lichoběžník $ABNM$ měl daný obsah P. (Lichoběžník je rovnoramenný. Viz cvič. a).

187. Budiž O průsečík úhlopříček lichoběžníka $ABCD$ (kde $AB \parallel DC$).

a) Dokažte, že obsahy trojúhelníků AOD, BOC jsou si rovny. (Uvažujte $\triangle ABD$, $\triangle ABC$.)

b) Budiž p^2 obsah trojúhelníka ABO a q^2 obsah trojúhelníka CDO (je $p > O$, $q > O$). Vyjádřete obsahy trojúhelníků AOD, BOC a lichoběžníka $ABCD$ jako funkce čísel p, q. (Označte $\overline{OA} = x$, $\overline{OC} = y$ a m, n vzdálenosti bodů D, B od přímky AC, vyjádřete těmito hodnotami obsahy $\triangle COD$, $\triangle AOB$ a $\triangle AOD$, $\triangle BOC$.) Co když je $x = 2p$, $y = 2q$, $n = p$, $m = q$?)

188. Obsah mnohoúhelníka tečnového je 240 cm², jeho obvod je 60 cm. Určete poloměr kružnice vepsané.

189. Kružnici o poloměru 25 cm je opsán mnohoúhelník s obsahem 20 dm². Určete obvod mnohoúhelníka.

190. Je dána kružnice o poloměru r.

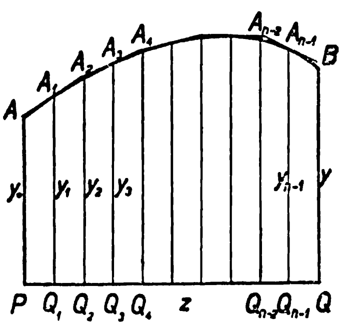
a) Označte s_n, s'_n poloviční obvody pravidelných n-úhelníků, z nichž první je kružnici vepsán, druhý opsán. K vyjádření užijte poloměru r a funkcí poloviny příslušného středového úhlu n-úhelníka.

b) Užitím tabulek hodnot goniometrických funkcí určete numerické hodnoty s_n, s'_n pro $r=1$ a $n=6$; 12; 24; 48; 96 a sestavte z nich tabulku.

191. Určete obsah osmiúhelníka, jehož vrcholy jsou dány pravoúhlými souřadnicemi: $A_1 \equiv (0;\ 0)$, $A_2 \equiv (0{,}7;\ 0{,}4)$, $A_3 \equiv (6{,}7;\ 5{,}2)$, $A_4 \equiv (7{,}9;\ 3{,}6)$, $A_5 \equiv (9;\ 0)$, $A_6 \equiv (7{,}2;\ 5)$, $A_7 \equiv (4{,}7;\ 0{,}8)$, $A_8 \equiv (2{,}7;\ 0)$.

3. Obsah jiných obrazců.

Pomocí vlastností [1] až [4] ze článku 1 se dá jednoznačně definovat a určit také obsah jiných obrazců, než jsou mnohoúhelníky. Postupujeme při tom tak, že daný obrazec sevřeme mezi dva mnohoúhelníky, které jsou si tak blízké, že se jejich obsahy od sebe liší tak málo, že na tom prakticky nezáleží. Protože podle vlastnosti [3] obsah daného obrazce leží mezi obsahy obou mnohoúhelníků, je tím i obsah tohoto obrazce určen s dostatečnou přesností.



Obr. 52.

V praxi se často vyskytuje takový obrazec, jaký je naznačen v obr. 52. Je omezen vodorovnou úsečkou PQ, dvěma svislými úsečkami AP, BQ a křivou čarou s krajními body A, B. Obsah tohoto obrazce označme V.

Označme $\overline{PQ} = z$ a rozdělme tuto úsečku na sudý počet n stejných dílů (v obr. 52 je $n = 10$). Dělícími body $Q_1, Q_2, \dots Q_{n-1}$ veďme svislé úsečky nahoru až k narýsované křivé čáře, do bodů $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$; délky těchto úseček označme $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$; položme ještě $y_0 = \overline{AP}$, $y = \overline{BQ}$. Nahradíme-li narýsovanou křivou čáru lomenou čarou složenou z úseček $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}B$, dostaneme „vepsaný“ mnohoúhelník složený z lichoběžníků APQ_1A_1, $A_1Q_1Q_2A_2$, $A_2Q_2Q_3A_3$, ...,

$A_{n-1}Q_{n-1}QB$, které mají svislé základny a výšky jejich se vesměs rovnají $\frac{1}{n} \cdot z$. Obsahy těchto lichoběžníků jsou

$$\frac{1}{2n} z(y_0 + y_1),\ \frac{1}{2n} z(y_1 + y_2),\ \frac{1}{2n} z(y_2 + y_3),\ \ldots,\ \frac{1}{2n} z(y_{n-1} + y)$$

a součet těchto obsahů neboli obsah V' vepsaného mnohoúhelníka je roveň

$$V' = \frac{1}{2n} z(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y); \tag{1}$$

podle vlastnosti [3] článku 13 je $V' < V$. Z názoru je patrné, že rozdíl mezi V' a V je malý, je-li n velké.

Sestrojme nyní tečny narýsované čáry v bodech $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$ (s lichým indexem). Tyto tečny spolu s vodorovnými úsečkami PQ_2, $Q_2Q_4, \ldots, Q_{n-2}Q$ a se svislými úsečkami vycházejícími z bodů $P, Q_2, Q_4, \ldots, Q$ určují lichoběžníky, které dohromady tvoří „opsaný" mnohoúhelník, jenž zpravidla nebude vypuklý. Všecky naše lichoběžníky mají společnou výšku $\overline{PQ_2} = \overline{Q_2Q_4} = \ldots$, t. j. rovnou $\frac{2}{n} \cdot z$, a jejich střední příčky jsou $y_1, y_3, \ldots, y_{n-1}$. Podle věty III' článku 2 obsahy našich lichoběžníků jsou

$$\frac{2}{n} zy_1,\ \frac{2}{n} zy_3,\ \ldots,\ \frac{2}{n} zy_{n-1}$$

a součet těchto obsahů neboli obsah V'' opsaného mnohoúhelníka je roven

$$V'' = \frac{2}{n} z(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}); \tag{2}$$

podle vlastnosti [3] článku 13 je $V'' > V$. Z názoru je opět patrné, že rozdíl mezi V'' a V je malý, je-li n velké. Pomocí vyšší matematiky se dá dokázati, že jestliže křivá čára v obr. 52 není příliš nepravidelná, potom je při velkém n hledanému obsahu V blíže než V' i než V'' číslo

$$V^* = \frac{1}{3}(2V' + V''),$$

které podle (1) a (2) je rovné

$$V^* = \frac{1}{n} z(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{n-1} + y). \tag{3}$$

Cvičení.

192. Narýsujte kružnici (S; 10) a v ní poloměry SA, SB tak, aby $\sphericalangle ASB = \frac{1}{4}\pi$. V polorovině SAB sestrojte polopřímku $SC \perp SA$ a spusťte k ní z bodu B kolmici $BC \perp CS$; označte C její patu. Úsečku SC rozdělte na $n = 10$ rovných dílů.

Stanovte, jak je naznačeno v textu, obsahy V', V'' „vepsaného" a „opsaného" mnohoúhelníka, jakož i hodnotu V^*.

193. Stranu AB trojúhelníka ABC, jehož úhly α, β jsou ostré, rozdělte na n rovných dílů; jednotlivými body B_k, které tak obdržíte, veďte rovnoběžky ke straně BC (je $B_0 \equiv A$, $B_n \equiv B$). Body B_k veďte rovnoběžky ke straně BC a sestrojte.

(1) obdélníky, jejichž žádný bod neleží vně trojúhelníka ABC;

(2) obdélníky, které přesahují i do vnějšku trojúhelníka ABC.

a) Označte P' součet obsahů obdélníků ze skupiny (1) a P'' součet obsahů obdélníků ze skupiny (2); dokažte, že rozdíl $P'' - P'$ je kladné číslo, které můžeme vhodnou volbou čísla n učinit libovolně malé. Která nerovnost platí mezi hodnotami P', P'', P, kde P je obsah trojúhelníka ABC?

b) Je-li $\overline{BC} = a$ a v příslušná výška trojúhelníka ABC, určete číslo n tak, aby bylo $P'' - P' < 10^{-6}$.

194. V soustavě pravoúhlých souřadnic zobrazte funkci

a) $y = 2x$, b) $y = \dfrac{1}{x}$. Podle vzoru naznačeného v obr. 52 určete obsahy V', V'' „mnohoúhelníka vepsaného" a „mnohoúhelníka opsaného", jestliže $P \equiv (1; 0)$ $Q \equiv (11; 0)$; volte $n = 10$.

Určete též hodnotu V^* a ve cvič. a) určete, oč se tato hodnota liší od správné hodnoty.

Ve cvič. b) určíte přibližnou hodnotu t. zv. přirozeného logaritmu čísla 10 (t. j. $l_n 10$; čti logarithmus naturalis), což nebudete dokazovat. Základem těchto logaritmů je t. zv. přirozené číslo $e = 2{,}718\ldots$; je to číslo iracionální. Podle definice logaritmů v našem příkladě platí $e^{l_n 10} = 10$; užitím dekadických logaritmů a výsledku tohoto cvič. b) určíte snadno přibližnou hodnotu čísla e.

4. Obsah a podobnost.

Přiřaďme každému mnohoúhelníku M jako obraz podobný mnohoúhelník M', při čemž koeficient podobnosti budiž k. K libovolnému mnohoúhelníku M' máme potom určitý mnohoúhelník M jako vzor, totiž ten mnohoúhelník, jehož obrazem je mnohoúhelník M'. Platí potom věta:

Je-li M' obraz mnohoúhelníka M při podobnosti s koeficientem k, pak obsah mnohoúhelníka M' je roven součinu čísla k^2 s obsahem mnohoúhelníka M. Je-li na př. $k = \frac{1}{10}$, t. j. je-li každá úsečka v obrazu desetkrát menší než příslušná úsečka ve vzoru, je $k^2 = \frac{1}{100}$, t. j. každá plocha v obrazu je nikoli desetkrát, nýbrž stokrát menší než příslušná plocha ve vzoru.

Důkaz. Protože se každý mnohoúhelník skládá z trojúhelníků, stačí provésti důkaz pro trojúhelník. Avšak obsah $\triangle ABC$ je roven $\frac{1}{2}av$, kde v znamená výšku příslušnou straně a. Protože při podobnosti se velikost každé úsečky znásobí koeficientem k, bude obrazem strany $\overline{BC} = a$ strana $B'C'$ s velikostí ka a příslušná výška $\triangle A'B'C'$ bude míti velikost kv. Tedy obsah $\triangle A'B'C'$ bude roven $\frac{1}{2} ka \cdot kv = k^2 \cdot \frac{1}{2} av$, t. j. bude roven součinu čísla k^2 s obsahem $\triangle ABC$.

Právě dokázaná věta není ve skutečnosti omezena na mnohoúhelníky. Neboť, jak jsme naznačili ve článku 3, obrazce omezené křivými čarami můžeme nahradit mnohoúhelníky jim tak blízkými, že rozdíl mezi obsahem původního obrazce a obsahem mnohoúhelníka je menší než libovolně předepsané číslo. Proto, je-li V obsah původního obrazce, V' obsah podobného obrazce (s koeficientem podobnosti k), musí vzorec $V' = k^2 V$ platit s takovou přesností, jakou si předem předpíšeme, a to je jen tak možné, že vztah $V' = k^2 V$ je správný bez jakékoli chyby.

Cvičení.

195. Jsou-li A_0, B_0, C_0 středy stran trojúhelníka ABC (proti A je A_0 atd.), je $\triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle ABC$. V kterém poměru jsou obsahy obou trojúhelníků?

196. Užitím podobnosti obrazců vysvětlete, proč je mnitelem plošných měr v metrické soustavě číslo 100.

197. Jeden plán pozemku je zhotoven v měřítku 1 : 100, druhý plán v měřítku 1 : 250. V kterém poměru jsou obsahy obrazů téhož mnohoúhelníka na plánech zobrazeného?

198. Dva podobné trojúhelníky mají obsahy $P = 294$ dm², $P' = 864$ dm². Strana a prvního trojúhelníka měří 30 dm; určete příslušnou výšku v a pak vypočítejte odpovídající stranu a' a výšku v' trojúhelníka druhého.

199. Buďte dány kružnice $k_1 \equiv (S; r_1)$, $k_2 \equiv (S; r_2)$. Kružnici k_1 (1) vpište, (2) opište pravidelný n-úhelník $A_1B_1C_1 \ldots N_1$.

a) Průsečík polopřímky SA_1 s kružnicí k_2 budiž A_2; sestrojte obrazy kružnice k_1 a n-úhelníka $A_1B_1C_1 \ldots N_1$ ve stejnolehlosti o středu S tak, aby bod A_2 byl obrazem bodu A_1. Ve kterém vztahu je kružnice k_2 k těmto obrazům?

b) V kterém vztahu jsou obvody a ve kterém obsahy obou n-úhelníků?

200. a) Čtverec má úhlopříčku e; určete velikost x jeho strany.

b) Buďte $a > b$ dané rozměry obdélníka. Osy vnitřních úhlů tohoto obdélníka určují jeden čtverec a osy vnějších úhlů obdélníka určují druhý čtverec. Dokažte, že oba čtverce jsou stejnolehlé vzhledem ke středu S daného obdélníka a určete koeficient k této stejnolehlosti.

c) Určete velikost x, x' stran a velikosti P, P' obsahů čtverců ze cvič. b) a přesvědčte se, že platí $P' = k^2 \cdot P$.

201. Jsou dány dvě různé rovnoběžky $p \| q$, jejichž vzdálenost je 10 cm. Na první leží úsečka AB, na druhé úsečka CD; je $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 12$ cm a smysly AB, CD jsou souhlasné.

a) Budiž O průsečík přímek AC, BD a S průsečík přímek AD, BC. Co je geometrickým místem bodů O a co bodů S, jestliže se úsečka AB pohybuje po přímce p?

b) V jakém vztahu jsou obsahy trojúhelníků SAB, SCD a v jakém obsahy trojúhelníků OAB, OCD? (Určete jejich výšky.)

202. Je dán kosočtverec $ABCD$ s úhlopříčkami $e = 20$ cm, $f = 15$ cm.

a) Určete velikost jeho výšky v.

b) Z vrcholu B tupého úhlu kosočtverce spusťte výšky ke stranám AD, CD a označte M, N jejich paty. Určete obsah trojúhelníka BMN. $\left(\text{Je } \triangle BMN \sim \triangle ABD \text{ (sus); koeficient podobnosti } k = \frac{v}{a}.\right)$

203. Ke straně BC trojúhelníka ABC byly vedeny rovnoběžky $r \| s$, které rozdělily trojúhelník ve tři obrazce, jejichž obsahy jsou v poměru 9 : 55 : 161. V kterém poměru je přímkami r, s rozdělena strana AB?

204. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně a. Prodlužte jeho strany v jednom smyslu (AB za bod B, BC na bod C, . . ., FA za bod A) a určete na nich po řadě body B_0, C_0, . . ., A_0 tak, aby $\overline{BB_0} = \overline{CC_0} = \ldots = \overline{AA_0} = x$.

a) Dokažte, že $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ je pravidelný šestiúhelník.

b) Jestliže obsahy nového a původního mnohoúhelníka jsou v poměru 9 : 4, jak veliká je hodnota x?

205. Je dán $\triangle ABC$ a přímka $p \| BC$, která protíná úsečku AB v bodě B' a úsečku AC v bodě C'.

a) Jak musíte zvolit bod B', aby přímka p dělila trojúhelník ve dva rovnoploché obrazce?

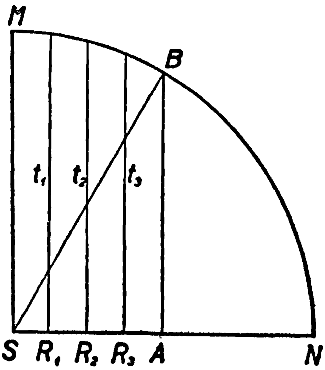
b) Jak musíte zvolit bod B', aby obsahy obrazců $AB'C'$, $BCC'B'$ byly v poměru q? (Uvažujte poměr obsahů $\triangle AB'C'$, $\triangle ABC$. Je-li na př. $\frac{h}{k} = \frac{l}{m}$, je také $\frac{h}{k} - 1 = \frac{l}{m} - 1$ atd.)

5. Obsah kruhu.

Obsah kruhu, jehož poloměr se rovná jednotce délky, značíme řeckým písmenem π. Z kružnice, jejíž poloměr je roven jedné, vznikne kružnice libovolného poloměru r pomocí podobnosti s koeficientem r. Tedy podle předcházejícího článku: Obsah kruhu s poloměrem r se rovná πr^2. Číslo π je iracionální a nedá se proto přesně vyjádřit zlomkem; rovněž tak nelze π přesně vyjádřit výrazem složeným z odmocnin. Důkazy jsou obtížné a nebudeme je prováděti.

Přibližně se dá číslo π vypočítat mimo jiné užitím methody článku 3. V obr. 53 máme čtvrtkruh s poloměrem, který zvolíme za jednotku délky. Bod A je střed poloměru SN. Snadno uvážíme, že $\triangle BSN$ je rovnostranný a z toho plyne, že $\sphericalangle BSM = 30°$. Tedy kruhová výseč MBS je $\frac{1}{12}$ kruhu a její obsah je roven $\frac{1}{12}\pi$. Pravoúhlý $\triangle ABS$ má přeponu $\overline{BS} = 1$, odvěsnu $\overline{AS} = \frac{1}{2}$ a tedy (podle Pythagorovy věty) druhou odvěsnu $\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; obsah $\triangle ABS$ je tudíž $\frac{1}{8}\sqrt{3}$. Připojíme-li k $\triangle ABS$ zmíně-nou kruhovou výseč, dostaneme obrazec, jehož obsah je

$$V = \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}. \tag{1}$$



Obr. 53.

Avšak tento obrazec má právě takový tvar, jaký jsme studovali ve článku 15. Proto dovedeme přibližně vypočísti číslo π. Rozdělme úsečku SA na 4 stejné díly pomocí bodů R_1, R_2, R_3 a veďme jimi svislé úsečky t_1, t_2, t_3 jako v obr. 53. Podle Pythagorovy věty je

$$t_1^2 + (\tfrac{1}{8})^2 = 1, \quad t_2^2 + (\tfrac{1}{4})^2 = 1, \quad t_3^2 + (\tfrac{3}{8})^2 = 1,$$

tedy

$$t_1 = \tfrac{1}{8}\sqrt{63}, \quad t_2 = \tfrac{1}{8}\sqrt{60}, \quad t_3 = \tfrac{1}{8}\sqrt{55}. \tag{2}$$

Mimo to je

$$\overline{SM} = 1, \qquad AB = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{3}$$

Podle článku 3 je však

$$V' < V < V'' \tag{4}$$

kde

$$V' = \tfrac{1}{16}(\overline{SM} + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \overline{AB}),$$
$$V'' = \tfrac{1}{4}(t_1 + t_3).$$

Podle (2) a (3) je tudíž

$$V' = \tfrac{1}{64}(4 + \sqrt{63} + \sqrt{60} + \sqrt{55} + \sqrt{12}),$$

$$V'' = \tfrac{1}{32}(\sqrt{63} + \sqrt{55}).$$

Podle tabulek druhých mocnin je

$$\sqrt{63} \doteq 7{,}937;\quad \sqrt{60} \doteq 7{,}746;\quad \sqrt{55} \doteq 7{,}416;\quad \sqrt{12} \doteq 3{,}464.$$

Je tudíž

$$V' \doteq \tfrac{1}{64}\cdot 30{,}563 \doteq 0{,}4775;\quad V'' \doteq \tfrac{1}{32}\cdot 15{,}353 \doteq 0{,}4798.$$

Podle (1) je však

$$\pi = 12V - \tfrac{3}{2}\sqrt{3} \doteq 12V - 2{,}5981. \tag{5}$$

Podle (4) je tedy jednak

$$\pi > 12V' - 2{,}5981 \doteq 3{,}132; \tag{6}$$

jednak

$$\pi < 12V'' - 2{,}5981 \doteq 3{,}159. \tag{7}$$

Ve článku 3 jsme poznamenali, že blíže než čísla V', V'' je číslu V číslo

$$V^* = \tfrac{1}{3}(2V' + V'') \doteq 0{,}4783.$$

Jestliže ve vztahu (5) nahradíme V přibližnou hodnotou V^*, dostaneme

$$\pi \doteq 12\cdot 0{,}4783 - 2{,}5981 \doteq 3{,}1415,$$

což je mnohem lepší přiblížení číslu π než hodnoty (6) a (7). Na patnáct desetinných míst jest

$$\pi \doteq 3{,}141\,592\,653\,589\,793. \tag{8}$$

Pro praxi zpravidla vystačíme s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$. Někdy je výhodná přibližná hodnota $\pi \doteq 3\frac{1}{7}$; číslo $3\frac{1}{7}$ je poněkud blíže číslu π než 3,14 a je o něco větší než π. Hodnotu $\pi \doteq 3\frac{1}{7}$ znal již slavný starověký matematik Archimedes (287 až 212 před naším letopočtem), který přesně dokázal, že

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}.$$

Archimedova methoda je založena na pravidelných mnohoúhelnících, o nichž jsme mluvili ve článku 2. Jestliže do kružnice poloměru r vpíšeme pravidelný n-úhelník, je jeho obsah podle (2) ve článku 2 roven $\dfrac{1}{2} n \sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot r^2$, což tedy je menší než πr^2, t. j.

$$\pi < \frac{1}{2} n \sin\frac{2\pi}{n} \text{ pro } n = 3, 4, 5, \ldots. \tag{9}$$

Jestliže však téže kružnici opíšeme pravidelný n-úhelník, je jeho obsah podle (3) ve článku 2 roven $n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot r^2$, což tedy je větší než πr^2, t. j.

$$\pi > n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \text{ pro } n = 3, 4, 5, \ldots. \tag{10}$$

Při velkém n se pravé strany nerovností (9), (10) liší jen nepatrně od čísla π, t. j. máme přibližné vzorce

$$\pi \doteq \frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}, \tag{9'}$$

$$\pi \doteq n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \tag{10'}$$

při čemž při dosti velkém n rozdíl mezi π a přibližnými hodnotami (9′) a (10′) je libovolně malý. Je-li n tvaru $3 \cdot 2^k$ ($n = 3, 6, 12, \ldots$), dají se tyto přibližné hodnoty vyjádřiti pomocí druhých odmocnin, o nichž je nám známo z prvé třídy, jak je lze s libovolně vysokou přesností počítat. Takto v podstatě postupoval Archimedes, který volil $k = 5$, tedy $n = 96$. Jeho výpočty byly pracné především proto, že Archimedes neznal desetinná čísla. Po objevu desetinných čísel bylo snadné vypočítat Archimedovou methodou číslo π na větší počet míst, než je prakticky užitečné. Holandský matematik Ludolph van Ceulen (1540—1610), po němž se číslo π dodnes nazývá Ludolfovo, vypočítal π na 32 a později na 35 míst methodou v podstatě Archimedovou. Vyšší matematika poskytuje mnohem pohodlnější prostředky výpočtu čísla π. Nejznámější způsob pochází od anglického astronoma Machina (zemřel 1751) a zní:

$$\frac{1}{4}\pi = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\right),$$

kde v závorkách se počítá tak dlouho, až se dojde ke členům, jež jsou menší než je žádaný stupeň přesnosti. Často čteme, že Shanks vypočetl r. 1873 a 1874 číslo π na 707 míst, ale teprve r. 1946 zjistil Ferguson, že pouze 525 míst u Shankse je správně.

Cvičení.

206. Je dán poloměr r kruhu. Určete poloměr x druhého kruhu tak, aby poměr obsahu prvého kruhu k obsahu druhého kruhu byl: a) 1:2; b) q.

207. Jsou dány dvě soustředné kružnice. Velikost tětivy AB větší kružnice je 6 cm, při čemž přímka AB je tečnou menší kružnice. Vypočítejte obsah mezikruží určeného oběma kružnicemi.

208. Tětiva AB kružnice, jejíž poloměr je 2 cm, dělí kružnici ve dva oblouky, jejichž velikosti jsou v poměru 5 : 7. Určete: a) obsah trojúhelníka ABS, kde S je střed dané kružnice; b) obsah jedné z obou úsečí příslušných k tětivě AB.

209. a) Určete poloměr ϱ kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku o odvěsnách a, b. (Buďte A_1, B_1, C_1 dotykové body vepsané kružnice na stranách a, b, c; pak je $c = a - \varrho + b - \varrho$.)

b) Budiž D pata výšky CD v pravoúhlém trojúhelníku ABC (kde $\sphericalangle C = \frac{1}{2}\pi$). Dokažte, že poměr obsahů kruhů vepsaných trojúhelníkům ACD, BCD je roven poměru obsahů těchto trojúhelníků.

210. Určete graficky poloměr kruhu, jehož obsah je roven obsahu mezikruží o poloměrech R, r, kde $R > r$.

211. a) Oč se zvětší obsah kruhu, když jeho poloměr r zvětšíme o hodnotu ε?

b) Oč se zmenší obsah kruhu, když jeho poloměr r zmenšíme o hodnotu ε?

c) Který je obsah mezikruží určeného kružnicemi o poloměrech $r + \varepsilon$, $r - \varepsilon$?

212. Mezikruží o poloměrech R, r (je $R > r$) je soustřednou kružnicí o poloměru x rozděleno ve dvě rovnoplochá mezikruží.

a) Vypočtěte x.

b) Řešte úlohu graficky.

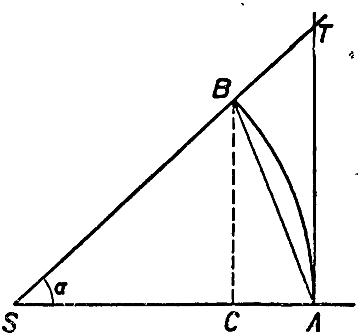
6. Délka oblouku kružnice.

Pomocí čísla π se dá vyjádřiti také obvod kruhu. Opíšeme-li kružnici poloměru r pravidelný n-úhelník, je při velkém n jeho obvod O_n velmi přibližně roven obvodu kruhu (délce kružnice), kdežto jeho obsah P_n je velmi přibližně roven obsahu kruhu, t. j. číslu πr^2. Avšak ze článku 2 je nám známo, že $P_n = \frac{1}{2} O_n \cdot r$; ježto $P_n \doteq \pi r^2$, je tedy $O_n \doteq 2\pi r$ a stupeň přiblížení je libovolně vysoký, je-li n dosti veliké. Proto obvod kruhu je roven $2\pi r$.

Zvolme si na kružnici oblouk, kterému přísluší středový úhel α. Zvětšíme-li úhel α, ve stejném poměru se zvětší i oblouk, t. j. délka oblouku kružnice je přímo úměrná středovému úhlu α. Celá kružnice je oblouk, kterému přísluší středový úhel 360°. Středovému úhlu 1° přísluší oblouk kružnice 360°, t. j. oblouk délky $\frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$. Středovému úhlu velikosti x stupňů přísluší oblouk délky $\frac{\pi r x}{180}$; zejména na kružnici s poloměrem rovným délkové jednotce středovému úhlu velikosti x stupňů přísluší oblouk délky $\frac{\pi x}{180}$. Toto číslo $\frac{\pi x}{180}$ je velikost úhlu v obloukové míře. Velikost úhlu α v obloukové míře jste na střední škole značili arcα (čteme arkusα); budeme ji značiti prostě α, kdežto α° bude znamenati velikost úhlu α ve stupních, takže

$$\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180}, \quad \alpha^\circ = \frac{180\alpha}{\pi}.$$

Oblouková míra na stupně a obráceně se v praxi převádí pomocí tabulek, jak je známo už ze střední školy. Velikost oblouku kružnice s poloměrem r příslušného středovému úhlu α je podle předcházejícího dána jednoduchým výrazem $\alpha \cdot r$, kde α znamená velikost úhlu v obloukové míře.



Obr. 54.

Podobně jako délka oblouku je i obsah kruhové výseče přímo úměrný středovému úhlu α; z výrazu πr^2 pro obsah celého kruhu obdržíme tedy výraz $\frac{1}{2}\alpha r^2$ pro obsah výseče se středovým úhlem α (v obloukové míře).

Oblouková míra se vyskytuje často ve fysice, a to zejména pro velmi malé úhly. Přitom je důležité umět pro malé úhly porovnat α a sinα; α tu ovšem znamená velikost úhlu α v obloukové míře. Budiž nejprve α libovolný ostrý úhel, tedy $\alpha < \frac{1}{2}\pi$. V obr. 54 máme především kruhovou výseč SAB se středovým úhlem α. Volíme-li poloměr za jednotku, je obsah výseče prostě $\frac{1}{2}\alpha$. Je-li C pata kolmice spuštěné z bodu B na přímku SA, padne C na polopřímku SA, protože $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, takže vznikne pravoúhlý $\triangle SBC$ s přeponou $\overline{SB} = 1$ a s úhlem α při vrcholu S, takže

$$\overline{BC} = \sin\alpha, \quad \overline{BC} = \cos\alpha.$$

Dále máme v obr. 54 rovnoramenný $\triangle SAB$, který je částí výseče, takže jeho obsah je menší než $\frac{1}{2}\alpha$. Avšak straně $\overline{SA} = 1$ tohoto trojúhelníka přísluší výška $\overline{BC} = \sin\alpha$, takže obsah je roven $\frac{1}{2}\sin\alpha$. Tudíž $\frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{1}{2}\alpha$ neboli

$$\sin\alpha < \alpha \text{ pro } \alpha < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{1}$$

Vedle toho máme v obr. 54 ještě $\triangle SAT$ s úhlem α při vrcholu S a s pravým úhlem při vrcholu A; ježto $\overline{SA} = 1$, je $\overline{AT} = \mathrm{tg}\alpha$ a obsah $\triangle SAT$

je roven $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Avšak naše výseč s obsahem $\frac{1}{2}\alpha$ je zřejmě částí $\triangle SAT$, takže $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$ neboli

$$\alpha < \operatorname{tg}\alpha \text{ pro } \alpha < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{2}$$

Položme nyní

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = x; \tag{3}$$

podle (1) kladné číslo x je menší než 1 pro každý ostrý úhel α. Z (3) plyne, že $\sin\alpha = \alpha x$; podle (2) je však $\alpha x < x\operatorname{tg}\alpha$, takže $\sin\alpha < x\operatorname{tg}\alpha$ neboli číslo $x\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$ je kladné. Avšak

$$x\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha = x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha = \sin\alpha\frac{x - \cos\alpha}{\cos\alpha},$$

a protože toto číslo je kladné, je $x > \cos\alpha$. Tedy

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1. \tag{4}$$

Jestliže nyní úhel α je velmi malý, je číslo $\cos\alpha$ velmi blízké číslu 1, a proto podle (4) také číslo $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ je velmi blízké číslu 1. Proto pro malé úhly α lze každé z obou čísel α, $\sin\alpha$ nahradit druhým z nich nejen v tom smyslu, že rozdíl obou čísel je malý, nýbrž v tom smyslu, že i poměrná chyba, které se tím dopustíme, je malá. Je-li na př. úhel α menší než 1°, je $\cos\alpha > 0{,}9998$ a proto $\sin\alpha > \alpha \,.\, 0{,}9998$; to znamená, že $\sin\alpha$ je sice menší než α, ale o méně než o 0,2‰.

Cvičení.

213. a) Obsah kruhu je P; určete jeho obvod o.
b) Obvod kruhu je o; určete jeho obsah P.

214. Jak se změní obsah kruhu, vzroste-li obvod k-krát?

215. V kterém poměru jsou obsahy P_1, P_2 dvou kruhů, jejichž obvody jsou o_1, o_2?

216. Na trati se jedno kolo vozu otočilo m-krát, druhé n-krát. Určete poměr poloměrů obou kol.

217. Rozdíl velikostí dvou kružnic je m, poměr jejich průměrů je n. Určete velikosti poloměrů. Proveďte pro $m=20$, $n=5$.

218. Oblouk k na kružnici o poloměru r je roven velikosti kružnice, která má r za průměr. Určete velikost středového úhlu příslušného oblouku k.

219. Určete velikost kružnice, jejíž velikost je o 5 dm větší než její průměr.

220. Menší kružnice mezikruží má poloměr r. Obvod větší kružnice je o m větší než obvod menší kružnice.

Určete šířku x mezikruží a dokažte, že pro danou hodnotu m je šířka x nezávislá na volbě kladného čísla r. (Šířka mezikruží je rozdíl poloměrů obou kružnic.)

221. Velikost daného úhlu v míře stupňové vyjádřete v míře obloukové:
α) 180°; 90°; 270°; 45°; 135°; 60°; 30°; 225°; 330° (přímým výpočtem).
β) 26°35′; 149°50′; 312°45′ (užitím tabulek nebo přímým výpočtem).

222. Velikost úhlu daného v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové:
a) 2π; π; $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{1}{6}\pi$; $\frac{4}{5}\pi$ (přímým výpočtem).
b) 0,75; 1; 2,35; 3 (užitím tabulek nebo přímým výpočtem).

223. V kružnici s poloměrem 5 cm jsou dány dvě tětivy $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm. Určete velikosti tětivy AC a příslušného středového úhlu.

224. Mezikruží určené kružnicí pravidelnému mnohoúhelníku vepsanou a opsanou má obsah π. Určete velikost a strany mnohoúhelníka. Dále určete poloměry r, ϱ obou kružnic, je-li n počet stran mnohoúhelníka.

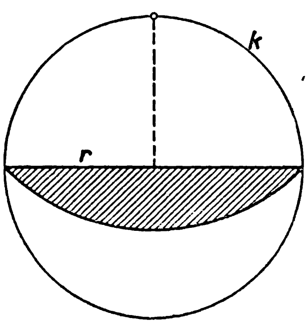
225. Buďtež $\alpha°$, $\beta°$ dva dané úhly a α, β jejich velikosti v obloukové míře. Jestliže platí $\gamma° = \alpha° + \beta°$, $\delta° = k \cdot \alpha°$ (kde k je libovolná konstanta), potom také platí $\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = k\alpha$; dokažte!

226. Výseč mezikruží o šířce d je omezena oblouky délek a_1, a_2 ($a_1 > a_2$). Vyjádřete obsah výseče s pomocí veličin d, a_1, a_2.

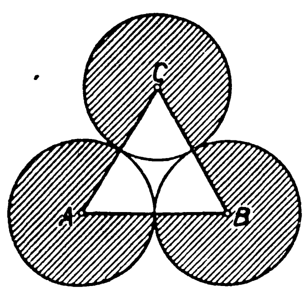
227. Dvě výseče mají týž obsah P; dokažte, že o jejich poloměrech r, r' a o příslušných obloucích a, a' platí $\frac{a'}{a} = \frac{r}{r'}$. O kterou známou závislost tu jde?

228. Obvod kruhové výseče je 10,75 m, středový úhel $\alpha° = 63\frac{1}{2}°$; určete poloměr r a obsah P.

229. Obsah kruhové výseče je 1,8 m², středový úhel $\alpha° = 140°$; určete poloměr r a oblouk a.



Obr. 55a.



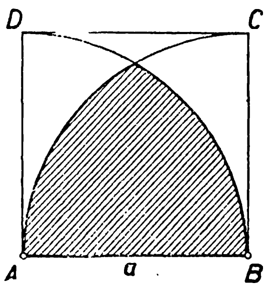
Obr. 55b.

230. Oblouk kruhové výseče je 14 dm, obsah 12 dm^2; určete poloměr r, oblouk a a středový úhel α.

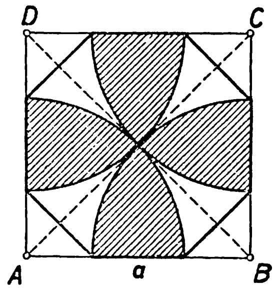
231. Středový úhel α vytne v mezikruží, jehož kružnice mají poloměry $R > r$, výseč mezikruží. Buďtež A, a příslušné oblouky.

a) Dokažte, že platí $A = \dfrac{R}{r}\, a$.

b) Odvoďte vzorce pro obsah výseče mezikruží, jestliže je dáno: (1) R, r, α; (2) R, r, α°.



Obr. 55c.

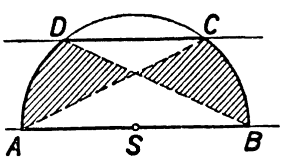


Obr. 55e.

Cvičení 232 se vztahuje k narýsovaným obrázkům 55a až 55e. Středy oblouků jsou vyznačeny kroužky.

232. Určete obsah vyčárkované plochy:

a) V obr. a, je-li dán poloměr r kružnice k.



Obr. 55d.

b) V obr. b, kde $\triangle ABC$ je rovnostranný; velikost strany je a.

c) V obr. c je dána strana a čtverce $ABCD$.

d) V obr. d je poloměr $\overline{SA} = 5$ cm a vzdálenost rovnoběžek AB, CD je 4 cm.

e) V obr. e je dána strana a čtverce $ABCD$. Nejprve dokažte, že průsečíky oblouků se stranami čtverce určují vrcholy pravidelného osmiúhelníka.

III. Objemy a povrchy jednoduchých těles.

1. Základní vlastnosti objemu.

Hranoly a jehlany jsou nejjednodušší a nejdůležitější příklady **mnohostěnů**, t. j. těles omezených mnohoúhelníky. Podobně jako lze každému mnohoúhelníku v rovině přiřadit kladné číslo, jeho obsah, lze také každému mnohostěnu přiřadit kladné číslo, zvané **objem** tak, že jsou splněny následující vlastnosti zcela obdobné vlastnostem obsahu, jež byly uvedeny ve článku 1 oddílu II:

[1] Dva shodné mnohostěny mají týž objem.

Přitom dva mnohostěny jsou shodné, liší-li se od sebe pouze umístěním v prostoru.

[2] Jestliže se mnohostěn M skládá ze dvou mnohostěnů M_1, M_2, které se navzájem nepřekrývají, t. j. nemají žádný společný vnitřní bod, potom objem mnohostěnu M je součtem objemů obou mnohostěnů M_1, M_2.

[3] Je-li mnohostěn M' různý od mnohostěnu M částí mnohostěnu M, je objem mnohostěnu M větší než objem mnohostěnu M'.

[4] Objem krychle, jejíž hrana je jednotka délky, je roven jedné.

Přitom opět vlastnost [3] plyne z vlastnosti [2]. Stejně jako u obsahů mnohoúhelníků nebudeme ani zde probírati důkaz, že definice objemu s vlastnostmi [1], [2], tedy i [3], je možná. Připojí-li se vlastnost [4], je opět zaručena *jednoznačnost* objemu. Ale důkaz jednoznačnosti, který u obsahu mnohoúhelníků byl snadný (viz článek II 2), je pro objem mnohostěnů podstatně obtížnější a nebudeme jej probírati.

Nejjednodušší je nauka o objemu kvádru. Docela stejně, jako jsme ve článku II 1 odvodili vzorec pro obsah obdélníka, dá se přesně odvodit i známý vzorec pro objem kvádru: Objem kvádru s rozměry a, b, c je roven součinu abc.

Cvičení.

233. Jestliže a, b, c jsou přirozená čísla, potom vzorec pro objem kvádru o rozměrech a, b, c lze odvodit třemi různými způsoby. Stačí rozdělit kvádr ve „vrstvy" tvaru kvádru, jejichž jeden rozměr je jednotka délky; tím je úloha převedena na výpočet obsahu obdélníka. Načrtněte tři naznačené způsoby a ukažte souvislost výsledku s asociativním a komutativním zákonem pro násobení přirozených čísel.

234. a) Kolikrát se zvětší (1) povrch, (2) objem kvádru o rozměrech a, b, c, jestliže tyto rozměry zvětšíte po řadě h-krát, k-krát, l-krát?

b) Co když ve cvič. a) je $h=k=l$? Odůvodněte odtud, proč je měnitelem objemových měr v metrické soustavě číslo 1000.

c) Veďte středem kvádru tři roviny, které jsou rovnoběžné s jeho stěnami; v kolik shodných kvádrů se těmito rovinami kvádr rozdělí? Výsledek uveďte v souvislost se cvič. b).

235. Oč se zvětší objem kvádru, když všechny tři jeho rozměry a, b, c zvětšíme o hodnotu ε?
Když ε je v poměru k rozměrům kvádru malé číslo (na př. tisícina nejmenšího rozměru), je přírůstek objemu zhruba roven $(ab + bc + ca)\varepsilon$. Proveďte numerický výpočet pro $a=100$, $b=50$, $c=20$, $\varepsilon=10^{-3}$.

236. Úvahu z předchozího cvičení 235 opakujte pro povrch kvádru.

237. Kvádr má rozměry $a=\pi$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{2}$. Dané rozměry zaokrouhlete a) sestupně, b) vzestupně na setiny a určete objemy $V' < V''$ obou pomocných kvádrů. Určete rozdíl $\varrho = V'' - V'$ a vysvětlete jeho význam pro přesnou hodnotu V objemu daného kvádru.

238. Určete povrch a) kvádru s rozměry a, b, c; b) krychle s hranou a.

239. Určete povrch a objem kvádru, jehož tělesová úhlopříčka je u a
a) jehož rozměry jsou v poměru 3 : 4 : 5;
b) jehož stěny, které procházejí týmž vrcholem, mají obsahy v poměru 1 : 2 : 3.

240. Je dán povrch $S=558$ cm^2 kvádru, jehož rozměry jsou v poměru 2 : 3 : 5. Určete jeho objem!

241. Tělesová úhlopříčka u kvádru tvoří s podstavou úhel φ. Úhel úhlopříček v podstavě je β. Určete objem kvádru.
Proveďte výpočet pro $u=10$, $\varphi=60°$, $\beta=75°$.

242. Podstavná úhlopříčka kvádru je $u_3=7{,}5$ dm, úhel obou podstavných úhlopříček $\alpha=35\frac{1}{2}°$ a úhel, který svírá rovina úhlopříčného řezu vedeného větší podstavnou hranou s podstavou, je $\beta=57\frac{1}{2}°$. Určete objem kvádru.

243. Rozměry kvádru jsou v poměru $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} : \frac{5}{6}$; jeho objem je 1,728 m^3. Určete a) rozměry kvádru, b) tělesovou úhlopříčku, c) povrch kvádru.

244. Obsahy tří stěn kvádru, které se protínají v jednom jeho vrcholu, jsou $P_1=72$ cm^2, $P_2=96$ cm^2, $P_3 = 108$ cm^2. Určete objem a tělesovou úhlopříčku kvádru.

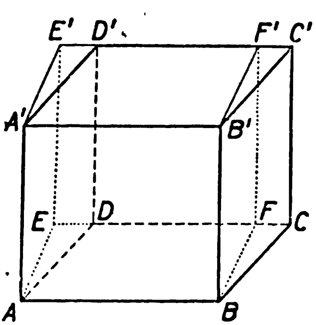
245. Ve vodojemu tvaru kvádru je 1500 hl vody; hloubka vody je 2,5 m. Určete rozměry dna, je-li jedna jeho strana o 4 m delší než druhá.

246. Označte α, β, γ úhly, které tvoří tělesová úhlopříčka u kvádru s hranami a, b, c, jež vycházejí z jejího krajního bodu.
a) Vyjádřete hodnoty $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ užitím hodnot a, b, c (a u).
b) Dokažte, že platí $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (Hodnoty $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ lze považovat za hrany kvádru s tělesovou úhlopříčkou 1).
c) Určete velikosti hran a, b, c kvádru, jehož úhlopříčka velikosti u tvoří s hranami a, b úhly $\alpha=60°$, $\beta=45°$.

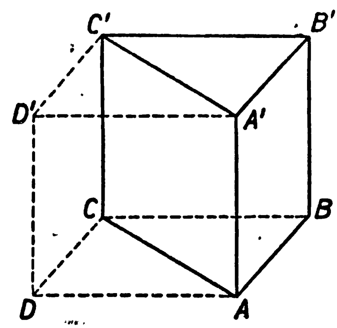
2. Objem hranolu a válce.

Pokládáme-li kvádr za hranol, jehož podstava má rozměry a, b, je $p = ab$ obsah podstavy a třetí rozměr kvádru $c = v$ je jeho výškou. Objem kvádru je pak $abc = p \cdot v$, tedy součin obsahu podstavy a výšky. Z tohoto základního výsledku si postupně odvodíme větu: Objem kolmého hranolu se rovná součinu obsahu podstavy a výšky.

V kolmém rovnoběžnostěnu, jehož podstava je rovnoběžník $ABCD$ (obr. 56a), veďme pobočnými hranami AA', BB' roviny kolmé ke stěně $CDC'D'$. Rovina vedená hranou AA' omezí s rovinami všech stěn rovnoběžnostěnu, kromě stěny $ADD'A'$, kolmý hranol s podstavou $ABCE$. Tento hranol je rozdělen řezy $ADA'D'$ a $BFB'F'$ ve tři kolmé hranoly;



Obr. 56a.



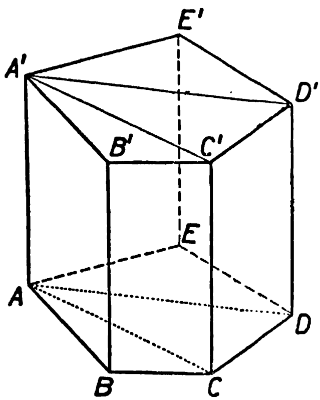
Obr. 56b.

protože je $ADE \cong BCF$ podle (sus), jsou z nich oba trojboké hranoly s podstavami ADE a BCF navzájem shodné. Podle [1] je tedy objem hranolu $ADEA'D'E'$ rovný objemu hranolu $BCFB'C'F'$ a o objemech ostatních hranolů platí podle [2]:

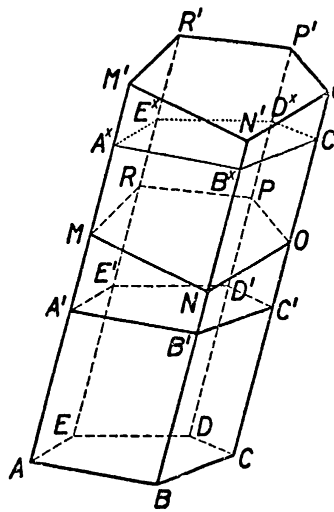
$$ABCD\,A'B'C'D' = ABFD\,A'B'F'D' + BCF\,B'C'F' =$$
$$= ABFD\,A'B'F'D' + ADE\,A'D'E' = ABFE\,A'B'F'E',$$

t. j. objem rovnoběžnostěnu $ABCD\,A'B'C'D'$ rovná se objemu kvádru $ABFE\,A'B'F'E'$. Objem kvádru, tedy i rovnoběžnostěnu, je $\overline{AB} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AA'}$; protože je $AE \perp AB$, je $\overline{AB} \cdot \overline{AE}$ obsah podstavy rovnoběžnostěnu; AA' je jeho výška. Je proto objem kolmého rovnoběžnostěnu rovný součinu z obsahu jeho podstavy a výšky. Kolmý trojboký hranol $ABCA'B'C'$ (obr. 56b) lze doplnit na kolmý rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$ takto: pobočnými hranami AA', CC' proložíme roviny rovnoběžné se stěnami hranolu, v nichž tyto hrany neleží. Tyto roviny omezují spolu se stěnami s nimi rovnoběžnými a s rovinami podstav žádaný rovnoběžnostěn. Oba trojboké kolmé hranoly $ABCA'B'C'$ a $C'D'A'CDA$, v něž je rovnoběžnostěn rozložen řezem $AA'CC'$, jsou shodné, protože mají shodné podstavy ABC a $C'D'A'$ podle (sss) a stejné výšky $\overline{AA'} = \overline{A'A}$. Podle vlastnosti [1] tedy mají oba trojboké hranoly stejné objemy, podle vlastnosti [2] je objem každého rovný polovině objemu rovnoběžnostěnu. Protože se obsah podstavy ABC rovná polovině podstavy $ABCD$, je objem trojbokého hranolu rovný součinu z obsahu podstavy a výšky.

Nyní snadno zjistíme objem n-bokého kolmého hranolu (obr. 57). Jeho podstavu $ABCDE$ ... rozdělme všemi úhlopříčkami vedenými vrcholem A



Obr. 57.

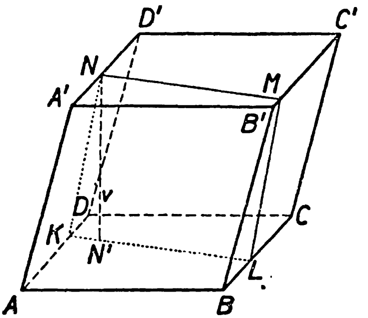


Obr. 58.

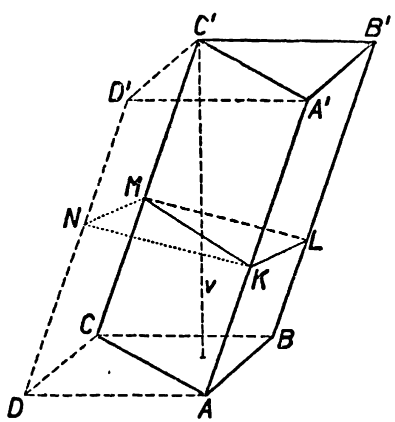
v n-2 trojúhelníky s obsahy $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}$. Roviny určené hranou AA' a těmito úhlopříčkami rozdělí hranol v n-2 trojboké kolmé hranoly, jež mají stejně velké výšky $\overline{AA'} = v$, rovnající se výšce daného hranolu. Součet objemů těchto hranolů $p_1v + p_2v + \ldots + p_{n-2}v =$ $= (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-2}).\ v$ rovná se podle [2] objemu daného hranolu; protože $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-2}$ je obsah jeho podstavy, rovná se jeho objem součinu obsahu podstavy a výšky. Tím je věta dokázána.

Buď dán kosý hranol n-boký $MNOPR\ldots M'N'O'P'R'\ldots$ (obr. 58). Plochu hranolovou, která vznikne prodloužením jeho pobočných stěn, protněme dvěma rovinami kolmými k jejím hranám v kolmých řezech

ABCDE.. a *A'B'C'D'E'*... tak, aby žádná z obou rovin neprotínala plášť daného hranolu a aby bylo $\overline{AA'} = \overline{MM'}$. Potom je $\overline{AM} = \overline{AA'} + \overline{A'M} = \overline{A'M} + \overline{MM'} = \overline{A'M'}$ a stejně $\overline{BN} = \overline{B'N'}$, $\overline{CO} = \overline{C'O'}$, ... Protože je $ABCD\ldots \cong A'B'C'D'\ldots$ a úsečky $\overline{AM} = \overline{A'M'}, \ldots$ jsou kolmé k rovinám *ABC*..., *A'B'C'*..., jsou tělesa *ABCD*.. *MNOP*... a *A'B'C'D'*... ..*M'N'O'P'*... shodná a podle vlastnosti [1] mají stejně velké objemy. Podle vlastnosti [2] platí: obj. *ABCD*..*A'B'C'D'*... = obj. *ABCD*.. ..*MNOP*... Obj. *A'B'C'D'*... *MNOP*... = obj. *A'B'C'D*.. *M'N'O'P*...= = obj. *A'B'C'D'*..*MNOP*.. = obj.*MNOP*..*M'N'O'P*... O objemu kolmého hranolu *ABCD*..*A'B'C'D'*... víme, že se rovná součinu obsahu podstavy *ABCDE*.. a výšky $\overline{AA'} = \overline{MM'}$; protože se však obsah této podstavy rovná obsahu libovolného kolmého řezu $A^*B^*C^*D^*$ ..., kosého hranolu *MNOP*..*M'N'O'P'*..,



Obr. 59.



Obr. 60.

dostáváme: **Objem hranolu se rovná součinu obsahu kolmého řezu a délky hrany.**

Pro počítání objemu hranolu bývá vhodnější poučka: **Objem hranolu se rovná součinu obsahu podstavy a výšky**, $V = p \cdot v$. O této poučce již víme, že platí pro hranol kolmý; dokážeme si nyní postupně, že platí také pro hranol kosý.

V kosém rovnoběžnostěnu *ABCDA'B'C'D'* (obr. 59) veďme řez *KLMN* kolmý k hraně *AD*. Je-li $\overline{NN'} = v$ výška kolmého řezu *KLMN*, je $NN' \perp AD$ a $NN' \perp KL$, je tedy *NN'* úsečka kolmá k rovině podstavy *ABCD*; *v* je proto také výška rovnoběžnostěnu. Objem rovnoběžnostěnu se rovná součinu délky hrany *AD* a obsahu kolmého řezu *KLMN*, t. j.

$\overline{AD} \cdot \overline{KL} \cdot v$. Protože je $KL \perp AD$ je součin $\overline{AD} \cdot \overline{KL}$ rovný obsahu podstavy $ABCD$ a objem rovnoběžnostěnu se rovná součinu z obsahu podstavy a výšky.

Každý trojboký kosý hranol $ABCA'B'C'$ (obr. 60) můžeme doplnit na rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$ stejným způsobem, jakým jsme na rovnoběžnostěn doplnili trojboký kolmý hranol. Nechť je $KLMN$ řez rovnoběžnostěnu kolmý k hraně AA'. Řez $AA'CC'$ rozděluje tento kolmý řez v trojúhelníky KLM a MNK shodné podle (sss), které jsou kolmými řezy trojbokých hranolů, v něž je rovnoběžnostěn tímto řezem rozdělen. Oba trojboké hranoly mají společnou hranu AA' a stejné obsahy kolmých řezů; jejich objemy se tedy navzájem rovnají a podle vlastnosti [2] se každý rovná polovině objemu rovnoběžnostěnu. Objem daného hranolu se tedy rovná součinu z poloviny obsahu podstavy rovnoběžnostěnu a jeho výšky; obě tělesa mají stejnou výšku a polovina obsahu podstavy rovnoběžnostěnu se rovná obsahu podstavy daného hranolu. Je proto objem trojbokého hranolu rovný součinu z obsahu podstavy a výšky.

Také objem válce se rovná součinu obsahu podstavy a výšky, $V = p \cdot v$. To platí nejen pro válce s kruhovou podstavou, nýbrž i pro válce s jinými podstavami. Všimněme si na př. válce, jehož podstava $\boldsymbol{P}$ je plocha omezená křivou čarou a třemi úsečkami, znázorněná v obr. 52 na str. 154; obsah podstavy budiž p. Ve článku II 3 jsme určili dva mnohoúhelníky $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{P}''$ (složené z lichoběžníků) tak, že mnohoúhelník $\boldsymbol{P}'$ je vepsán do $\boldsymbol{P}$ (je částí plochy $\boldsymbol{P}$), mnohoúhelník $\boldsymbol{P}''$ je opsán ploše $\boldsymbol{P}$ (která je jeho částí), pro obsahy p', p'' mnohoúhelníků P', P'' platí potom nerovnosti

$$p' < p < p''; \tag{1}$$

přitom se mnohoúhelníky $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{P}''$ daly volit tak, že rozdíl $p'' - p'$ a tedy také rozdíly $p - p'$, $p'' - p$ jsou libovolně malé. Sestrojme nyní nad podstavou $\boldsymbol{P}$ válec $\boldsymbol{W}$, nad podstavami $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{P}''$ hranoly $\boldsymbol{W}'$, $\boldsymbol{W}''$ tak, aby pobočné hrany hranolů a strany válce byly rovnoběžné a stejně dlouhé, takže všecka tři tělesa mají touž výšku v. Potom je hranol $\boldsymbol{W}'$ vepsán do válce $\boldsymbol{W}$ (je částí válce $\boldsymbol{W}$), hranol $\boldsymbol{W}''$ je opsán válci $\boldsymbol{W}$ (který je jeho částí); pro objemy V, V', V'' všech tří těles $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}'$, $\boldsymbol{W}''$ platí tudíž nerovnosti

$$V' < V < V'';$$

víme však, že $V' = p'v$, $V'' = p''v$; tedy

$$p'v < V < p''v. \tag{2}$$

Ale z (1) plyne, že také

$$p'v < pv < p''v; \tag{3}$$

a protože rozdíl $p'' - p'$ je libovolně malý, je-li rozdíl $p''v - p'v$ libovolně malý. Ze (2) a (3) tedy soudíme, že $V = pv$.

Cvičení.

247. Pravidelný trojboký hranol, jehož všechny hrany jsou si rovny, má povrch $S = 4530\ \text{cm}^2$. Určete velikost hrany.

248. Budiž ϱ poloměr kružnice vepsané podstavě pravidelného n-bokého hranolu; obsah podstavy je roven $\frac{1}{4}$ pláště. Určete výšku hranolu.

249. Je dána výška v pravidelného čtyrbokého hranolu; tělesová úhlopříčka tvoří s podstavou úhel φ. Určete objem tělesa.
Proveďte numericky pro $v = 10$, $\varphi = 60°$.

250. Podstava rovnoběžnostěnu $ABCD\,A'B'C'D'$ je kosočtverec $ABCD$; $\sphericalangle BAD = 60°$. Pobočné hrany svírají s podstavou úhel $60°$, rovina $AA'C'C$ je kolmá k podstavě. Dokažte, že poměr obsahů osových řezů $BB'D'D$ a $AA'C'C$ je $2 : 3$.

251. Dvě pobočné stěny trojbokého kosého hranolu stojí na sobě kolmo; jejich společná pobočná hrana má od ostatních dvou pobočných hran vzdálenosti 12 dm a 35 dm. Velikost pobočných hran je 24 dm. Určete plášť hranolu.

252. Z pravidelného trojbokého hranolu s podstavnou hranou a byl dvěma rovnoběžnými rovinnými řezy odříznut kosý trojboký hranol, jehož pobočné hrany mají velikost b. Určete plášť i objem kosého hranolu. (Uvažujte t. zv. kolmý řez hranolové plochy, jehož rovina stojí kolmo k pobočným hranám.)

253. Kosý trojboký hranol $ABCA'B'C'$ má za podstavu $\triangle ABC$, kde $\overline{AB} = \overline{AC}$ a $\overline{BC} = a$. Pobočná hrana AA', jejíž velikost je b, stojí kolmo k hraně BC. Úhel stěn, které se protínají v hraně AA', je α. Určete objem hranolu užitím hodnot a, b, α. (Užijte kolmého řezu.)

254. Podstavou kolmého hranolu je pravoúhlý lichoběžník, který je opsán kružnici o poloměru $r = 6$; jeden úhel lichoběžníka je $\alpha = 46°$. Výška tělesa je rovna větší úhlopříčce podstavy. Určete objem tělesa.

255. Podstavná hrana kosého šestibokého hranolu s pravidelnou podstavou je $a = 2$ dm, objem hranolu $V = 60\sqrt{3}\ \text{dm}^3$. Pobočné hrany tvoří s podstavou úhel $60°$. Kolmý řez hranolu má obvod $n = 10{,}5$ dm. Určete povrch hranolu.

256. Kosý hranol $ABCD\,A'B'C'D'$ má za podstavu čtyrúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo, při čemž $\overline{BD} = 16$ dm. Řez $AA'C'C$ stojí na podstavě kolmo a má obsah $250\ \text{dm}^2$. Určete objem.

257. Určete plášť i povrch rotačního válce, jehož podstava má poloměr r a jehož výška je v.

258. Plášť rotačního válce je S a velikost kruhové hrany je o. Určete objem válce.

259. Obdélník s rozměry a, b (kde $a > b$) je pláštěm dvou rotačních válců. Určete poměr a) objemů, b) plášťů, c) povrchů obou válců.

260. Kolikrát vzroste a) plášť, b) objem rotačního válce, jestliže jeho poloměr r zvětšíme k-krát a jeho výšku l-krát? Kolikrát vzroste a) plášť, b) povrch, c) objem tělesa, jestliže $k = l$?

261. Poloměr r i výšku v rotačního válce zvětšete o hodnotu ε. Oč přitom vzroste a) plášť, b) povrch, c) objem válce.
Po provedeném výpočtu zanedbejte členy s hodnotami ε^2, ε^3 za předpokladu, že hodnota ε je v poměru k hodnotám r, v velmi malá (na př. $\varepsilon = r \cdot 10^{-3}$ nebo $\varepsilon = v \cdot 10^{-3}$).

262. Rovnostranný válec (rotační válec, v němž je $v = 2r$) má povrch P. Určete jeho objem.

263. V rotačním válci byl provrtán otvor tvaru souosého rotačního válce; tím se váha tělesa snížila na polovici. Určete tloušťku stěny tělesa, které tak vzniklo.

264. Otevřená skleněná miska tvaru rotačního válce (tloušťka stěn je $t = 0{,}5$ cm, vnitřní poloměr $r = 1$ dm a vnitřní výška $v = 5$ cm; specifická váha skla $s = 2{,}5$) plove na vodě. Kolik vody je možno nalít do misky, aby se miska potápěla právě k okraji.

265. Určete objem a) výseče, b) úseče rotačního válce o poloměru $r = 3{,}6$ dm, jestliže tětiva ležící v její podstavě je $2\,t = 4{,}8$ dm a je-li výška válce $v = 23$ dm.

266. Při kterém poloměru r je číselná hodnota pláště válce rovna číselné hodnotě jeho objemu?

267. Dva neshodné válce mají sobě rovné objemy; ve kterém poměru jsou jejich pláště?

268. Určete poměr objemů dvou rotačních válců, jejichž pláště jsou si rovny.

269. Do podstavy rovnostranného válce je vepsán pravidelný n-úhelník, jehož strana je a. Určete objem válce.

270. Ležící válcová nádrž (osa válce je vodorovná) je naplněna vodou tak, že není zaplněna ani celá polovina objemu. K tětivě, kterou vyznačuje vodní hladina na podstavě válce, přísluší středový úhel $2\alpha = 135°$; vnitřní průměr válce $d = 1{,}7$ m a vnitřní délka nádrže $v = 3{,}5$ m. Kolik m^3 vody je v nádrži?

3. Princip Cavalieriho.

Obsah mnohoúhelníka má vedle vlastností [1] až [4] uvedených ve článku 13 ještě jednu velmi pozoruhodnou vlastnost.

[5] Mají-li dva mnohoúhelníky M, M' týž obsah, je možné rozdělit M v nepřekrývající se mnohoúhelníky M_1, M_2, ..., M_n a rozdělit M' v nepřekrývající se mnohoúhelníky M'_1, M'_2, ..., M'_n tak, že M_1 a M'_1 jsou shodné, M_2 a M'_2 jsou shodné, ..., M_n a M'_n jsou shodné.

Označme [5]* to, co vznikne z [5], jestliže slovo mnohoúhelník nahradíme slovem mnohostěn, slovo obsah slovem objem. Dá se dokázati, že obecně je vlastnost [5]* nesprávná. Je správná v tom případě, že M, M' jsou hranoly, a proto nauka o objemu hranolů není složitější než nauka o obsahu mnohoúhelníků. Vlastnost [5]* je však nesprávná také tehdy, že M, M' jsou dva jehlany se společnou podstavou, a proto nauka o objemu jehlanů se nedá založit na prostředcích podobných těm, kterých jsme užívali ve článku II 2. Ve škole se nauka o objemu jehlanů obyčejně vykládá pomocí t. zv. Cavalieriho principu, který zní: Dvě tělesa T a T' mají týž objem, mají-li tyto vlastnosti:

a) Každá rovina rovnoběžná s určitou pevnou rovinou, která protíná jedno těleso, protíná i těleso druhé.

b) Průsečné plochy každé takové roviny s tělesy T a T' mají vždy obě týž obsah.

Odůvodnění principu Cavalieriho není lehčí než odůvodnění t. zv. rozšířeného Cavalieriho principu, který zní: Poměr objemů dvou těles T a T' je rovný číslu k, mají-li obě tělesa tyto vlastnosti:

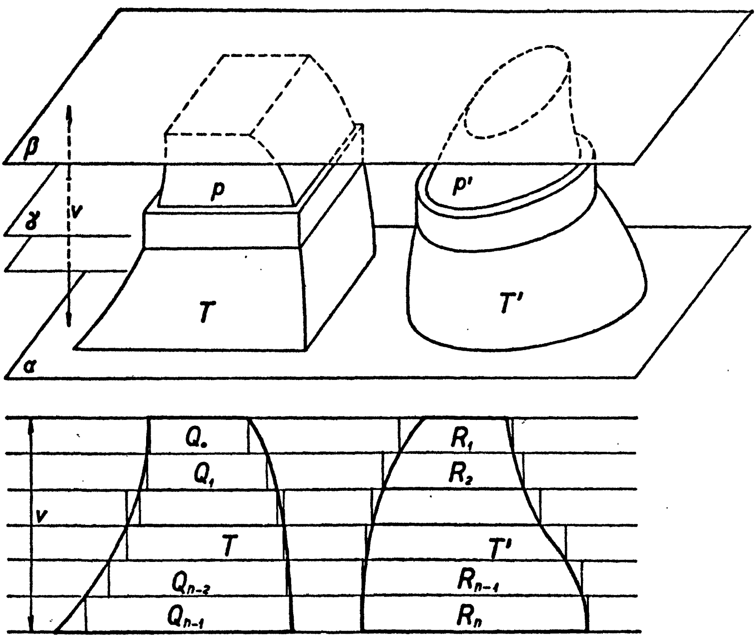
a) Každá rovina rovnoběžná s určitou pevnou rovinou, která protíná těleso jedno, protíná i těleso druhé.

b) Poměr obsahů průsečných ploch každé takové roviny s tělesy T a T' má stálý poměr rovný číslu k.

Dokážeme platnost rozšířeného principu Cavalieriho pro tělesa, která mají ještě vlastnost c) uvedenou v dalším.

Dvě tělesa T a T' (obr. 61), jež stojí na rovině α, kterou nazveme základní rovinou, nechť jsou omezena rovinou $\beta \| \alpha$. Pro každou rovinu γ, vedenou rovnoběžně se základní rovinou v té části prostoru, která je omezena rovinami α, β, mají obě tělesa vlastnost a); nechť mají pro každou rovinu γ, jakož i pro roviny α, β také vlastnost b), t. j. pro obsahy p, p' průsečných ploch každé takové roviny s oběma tělesy T a T' nechť platí $p : p' = k$, neboli $p = kp'$.

Část tělesa T (nebo T') omezenou dvěma různými rovinami γ (z nichž jedna může být rovina α nebo β) jmenujme vrstvou tělesa T (T'); řez tělesa T (T') tou z těchto dvou rovin, která má od základní roviny α menší vzdálenost, jmenujme dolní podstavou vrstvy, řez rovinou druhou



Obr. 61.

horní podstavou vrstvy. Válec nebo hranol, jehož jedna podstava je dolní podstava vrstvy a jehož druhá podstava leží v rovině horní podstavy vrstvy, nazveme válcem nebo hranolem vrstvě opsaným, leží-li vrstva celá uvnitř válce (t. j. je-li vrstva částí válce). Válec nebo hranol, jehož jedna podstava je horní podstava vrstvy a jehož druhá podstava je v rovině dolní podstavy vrstvy, nazveme válcem nebo hranolem vrstvě vepsaným, leží-li celý uvnitř vrstvy.

Předpokládejme, že obě tělesa T a T' mají vedle vlastností a) a b) také vlastnost c): Každé vrstvě tělesa $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T'}$ lze opsat i vepsat válec nebo hranol. Dá se dokázat, že vlastnost c) mají zejména všechny mnohostěny, válce a koule.

Rozdělme vzdálenost v roviny β od roviny α na n stejných dílů a dělícími body veďme roviny rovnoběžné s rovinou α (naznačeno v obr. 61 v řezu kolmém k rovině α). Tyto roviny rozdělí těleso $\boldsymbol{T}$ i těleso $\boldsymbol{T'}$ v n vrstev; vrstvám tělesa $\boldsymbol{T}$ vpišme hranoly (nebo válce) a označme směrem od roviny β k rovině α jejich objemy $Q_0, Q_1, \dots Q_{n-1}$; vrstvám tělesa $\boldsymbol{T'}$ opišme válce (nebo hranoly) a označme jejich objemy (opět směrem od β k α) $R_1, R_2, \dots, R_n$. Každá vrstva má větší objem než válec nebo hranol, který je jí vepsán; je proto součet objemů všech n vrstev tělesa $\boldsymbol{T}$, který se podle vlastnosti [2] rovná jeho objemu V, větší než součet objemů hranolů (nebo válců) těmto vrstvám vepsaných $Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{n-1}$. Tento součet se tedy rovná objemu V tělesa $\boldsymbol{T}$ zmenšenému o jistou kladnou veličinu x:

$$V - x = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{n-1}.$$

Podobně zase má každá vrstva menší objem než válec nebo hranol, který je jí opsán; je proto součet objemů všech n vrstev tělesa $\boldsymbol{T'}$, který je rovný jeho objemu V', menší než součet objemů válců (nebo hranolů) těmto vrstvám opsaných: $R_1 + R_2 + \dots + R_n$. Tento součet se tedy rovná objemu V' tělesa $\boldsymbol{T'}$ zvětšenému o jistou kladnou veličinu y:

$$V' + y = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

Rovnici vynásobme kladným číslem k, o němž víme, že nemůže být rovno nule, a odečtěme od ní předcházející rovnici; tím dostaneme:

$$kV' - V + x + ky = -Q_0 + kR_1 - Q_1 + kR_2 - Q_2 + \dots + \\ + kR_{n-1} - Q_{n-1} + kR_n.$$

Na pravé straně této rovnice se ruší každé dva za sebou následující členy, kromě členu prvního a posledního. Je-li totiž p_i podstava hranolu (nebo válce) Q_i $(i = 1, 2, \dots, n - 1)$, r_i podstava válce (nebo hranolu) R_i $(i = 1, 2, \dots, n - 1)$, platí o nich podle vlastnosti b): $p_i = kr_i$ $(i = 1, 2, \dots, n - 1)$. Vynásobíme-li tuto rovnici kladným číslem $\frac{v}{n}$, dostaneme $p_i \frac{v}{n} = k \cdot r_i \frac{v}{n}$; protože je $p_i \frac{v}{n} = Q_i$, $r_i \frac{v}{n} = R_i$, máme $Q_i = kR_i$ $(i = 1, 2, \dots, n - 1)$, t. j. $kR_i - Q_i = 0$, tedy po rozepsání pro jednotlivé indexy $kR_1 - Q_1 = 0$, $kR_2 - Q_2 = 0, \ldots, kR_{n-1} - Q_{n-1} = 0$. Tím se rovnice zjednoduší na

$$kV' - V + x + ky = -Q_0 + kR_n.$$

Tuto rovnici vynásobme kladným číslem n a převeďme člen $-Q_0 \cdot n$ na levou stranu:

$$(kV' - V) \cdot n + (x + ky) \cdot n + Q_0 \cdot n = kR_n \cdot n.$$

Všimněme si součinu $Q_0 \cdot n$; Q_0 je objem hranolu (nebo válce) o výšce $\frac{v}{n}$, jehož podstava je řez tělesa $\boldsymbol{T}$ s rovinou β. Je-li p_0 obsah tohoto řezu, je $Q_0 \cdot n = p_0 \frac{v}{n} \cdot n = p_0 v$. Roviny α, β jsou pevné; měníme-li libovolně počet řezů tělesa $\boldsymbol{T}$, nemění ani obsah p_0 ani vzdálenost v roviny α od roviny β. Je tedy $Q_0 \cdot n$ stálá na n nezávislá veličina; označíme ji Q. Stejně se dá ukázat, že hodnota součinu $kR_n \cdot n$, kterou označíme R, je nezávislá na n, protože je rovna k-násobnému (k je pevné číslo) objemu válce nebo hranolu o výšce v, jehož podstava je řez roviny α s tělesem $\boldsymbol{T}'$. Rovnici tedy můžeme psát takto:

$$(kV' - V) \cdot n + (x + ky) \cdot n + Q = R.$$

V této rovnici je $(x + ky) \cdot n > 0$, protože čísla x, y, k, n jsou vesměs čísla kladná (a žádné z nich nemůže být rovno nule). Veličina Q je objem hranolu s výškou $v > 0$, vepsaného tělesu $\boldsymbol{T}$, jehož podstava je řez tohoto tělesa s rovinou β; je-li obsah tohoto řezu $p_0 > 0$, je také $Q > 0$; je-li $p_0 = 0$, t. j. je-li řez tělesa s rovinou β bod nebo čára (hrana tělesa), je také $Q = 0$. O veličině na pravé straně rovnice platí vždy $R > 0$, protože její hodnota je k-násobný objem válce opsaného tělesu $\boldsymbol{T}'$; protože je $k > 0$, bylo by pro $R = 0$ také $V' = 0$ a $\boldsymbol{T}'$ by nebylo těleso.

Předpokládejme nyní, že je $kV' - V > 0$; protože i R je stále kladné, existuje vždy kladné číslo z, které vyhovuje rovnici:

$$(kV' - V) \cdot z = R, \quad \text{t. j. } z = R : (kV' - V).$$

Zvolíme-li však $n > z$, je n kladné a hodnota součinu $(kV' - V) \cdot n$ je větší než levá, tedy i větší než pravá strana této rovnice, t. j. $(kV' - V) \cdot n > R$. Přičteme-li k levé straně této nerovnosti součet $(x + ky) \cdot n + Q > 0$ nebo $(x + ky) \cdot n > 0$, je-li $Q = 0$, zvětší se tato strana a je tím spíše

$$(kV' - V) \cdot n + (x + ky) \cdot n + Q > R.$$

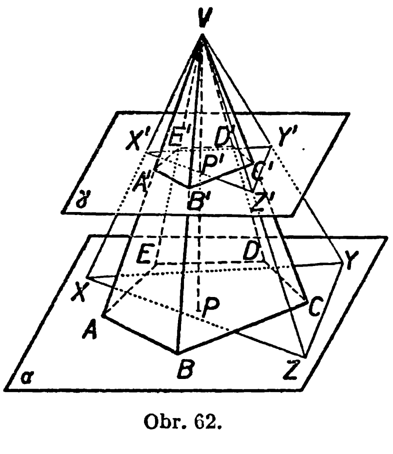
Tato nerovnost, kterou jsme obdrželi za předpokladu, že je $kV' - V > 0$, odporuje však předposlední rovnici, podle níž je výraz na pravé straně nerovnosti rovný veličině R při libovolném n. Je tedy náš předpoklad nesprávný a $kV' - V$ nemůže být větší než nula. Provedeme-li celý důkaz s tím rozdílem, že tělesu $\boldsymbol{T}$ hranoly (nebo válce) opíšeme a tělesu $\boldsymbol{T'}$ hranoly (nebo válce) vpíšeme, dojdeme k výsledku, že $V - kV'$ nemůže být větší než nula, tedy, že $kV' - V$ nemůže být menší než nula. Musí tedy být $kV' - V = 0$, neboli $V = kV'$, a to jsme měli dokázat.

4. Objem jehlanu a kužele.

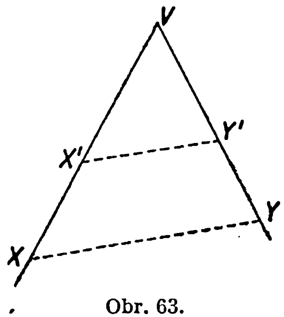
Nejdříve si dokážeme pomocnou větu: Budiž α rovina podstavy jehlanu nebo kužele s vrcholem V a s výškou VP. Budiž γ rovina rovnoběžná s α a nechť protíná úsečku VP v bodě P'. Je-li p obsah podstavy a je-li p' obsah řezu tělesa s rovinou γ, je

$$\frac{p'}{p} = \left(\frac{\overline{VP'}}{\overline{VP}}\right)^2.$$

Důkaz. (Obr. 62). Budiž X libovolný bod v rovině α, jeho obrazem X' budiž průsečík úsečky VX s rovinou γ. Je-li Y' v témž smyslu obrazem jiného bodu Y roviny α, leží všecky body V, X, X', Y, Y', v určité rovině τ (obr. 63). Přímky



Obr. 62.



Obr. 63.

XY, $X'Y'$ jsou průsečnice roviny τ s rovnoběžnými rovinami α, γ a proto jsou rovnoběžné. Z toho plyne, že

$$\triangle VX'Y' \sim \triangle VXY,$$

a proto

$$\frac{\overline{X'Y'}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{X'V}}{\overline{XV}} = \frac{\overline{Y'V}}{\overline{YV}}. \tag{1}$$

Volíme-li zejména za Y bod P, dostaneme

$$\frac{\overline{X'V}}{\overline{XV}} = \frac{\overline{P'V}}{\overline{PV}} = h,$$

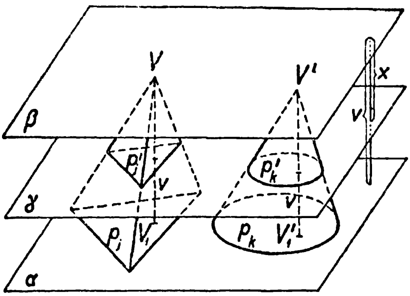
kde h je konstanta (t. j. h nezávisí na poloze bodu X v rovině α). Podle (1) je

$$\frac{\overline{X'Y'}}{\overline{XY}} = h;$$

To znamená, že při našem zobrazení roviny α na rovinu γ odpovídající si délky jsou úměrné s koeficientem úměrnosti h. Je-li nyní dán v rovině α úhel $\sphericalangle XYZ$, je

$$\triangle X'Y'Z' \sim \triangle XYZ$$

protože strany jsou si úměrné, a tudíž $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle X'Y'Z'$. Tedy naše zobrazení je podobnost s koeficientem podobnosti h. Při této podobnosti obrazem podstavy s obsahem p je řez tělesa rovinou γ s obsahem p', takže podle článku II 4 je $p' : p = h^2$, což jsme měli dokázati.



Obr. 64.

Dále si dokážeme druhou pomocnou větu: Jehlan a kužel (nebo dva jehlany, nebo dva kužely) mají poměr objemů rovný číslu k, mají-li stejně velké výšky a je-li poměr obsahů jejich podstav rovný číslu k.

Ukažme, že obě tělesa mají vlastnosti a), b) z rozšířeného Cavalieriho principu (viz článek III 3).

Jehlan $\boldsymbol{J}$ a kužel $\boldsymbol{K}$ (obr. 64) stojí na téže straně základní roviny α; jejich výšky $\overline{VV_1} = \overline{V'V'_1} = v$ jsou stejné a jejich podstavy mají obsahy p_j a p_k, jejichž poměr je rovný číslu k. Rovina β vedená rovnoběžně s rovinou α ve vzdálenosti v na téže straně roviny α, na které stojí $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{K}$, prochází vrcholy V, V' obou těles.

a) Pro roviny α, β stejně jako pro všechny roviny γ rovnoběžné s rovinou α, které leží v prostoru omezeném těmito rovinami, mají obě tělesa vlastnost a).

b) Libovolná rovina γ vedená rovnoběžně s α ve vzdálenosti x od roviny β, protne jehlan J v mnohoúhelníku, pro jehož obsah p'_j podle předešlé věty platí

$$\frac{p'_j}{p_j} = \left(\frac{x}{v}\right)^2;$$

táž rovina protne kužel K v ploše, pro jejíž obsah p'_k podle téže věty platí

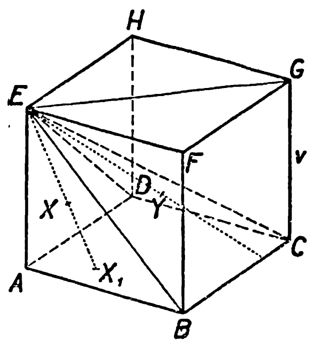
$$\frac{p'_k}{p_k} = \left(\frac{x}{v}\right)^2.$$

Tedy

$$\frac{p'_j}{p_j} = \frac{p'_k}{p_k}, \text{ neboli } \frac{p'_j}{p_k} = \frac{p_j}{p_k}.$$

Ježto $p_j : p_k = k$, je také $p'_j : p'_k = k$ v souhlase s vlastností b).

Z právě dokázané druhé pomocné věty snadno odvodíme: **Objem jehlanu nebo kužele se rovná třetině součinu z obsahu podstavy a výšky:** $V = \frac{1}{3}pv$. Důkaz stačí provést pro jehlan J, jehož výška je v, obsah podstavy p. Vezměme krychli s délkou hrany v (obr. 65) a zvolme její libovolný vrchol, na př. E, za společný vrchol jehlanu J_1 s podstavou $ABCD$, jehlanu J_2 s podstavou $BCGF$ a jehlanu J_3 s podstavou $CDHG$. Krychle je řezy EBC, ECD a ECG rozdělena právě na tyto tři jehlany, protože každý její bod je buď bodem řezu (Y) nebo bodem pouze jednoho jehlanu (X). Všechny tři jehlany J_1, J_2, J_3 mají týž obsah podstavy v^2 a touž výšku v; mají proto všechny tři týž objem rovný třetině objemu krychle, tedy $\frac{1}{3}v^3$. Daný jehlan J má s jehlanem J_1 stejnou výšku; podle pomocné věty má jeho objem V s objemem $\frac{1}{3}v^3$ jehlanu J_1 poměr rovný poměru jejich podstav. Z toho plyne pro objem V rovnice:



Obr. 65.

$$\frac{V}{\frac{1}{3}v^3} = \frac{p}{v^2}, \ (v \neq 0)$$

která dává žádanou hodnotu $V = \frac{1}{3}p \cdot v$.

Pro objem rotačního kužele, jehož podstava má obsah πr^2, tedy dostáváme $\frac{1}{3}\pi r^2 v$.

Počítejme objem komolého jehlanu, jehož podstavy mají obsahy p_1, p_2 a jehož výška je v. Hledaný objem je rozdíl objemů dvou jehlanů J_1, J_2.

Nechť $p_1 > p_2$; je-li x výška jehlanu J_1, je $x - v$ výška jehlanu J_2. Větší podstava je podobná s podstavou menší a poměr podobnosti je rovný poměru výšek $x : (x - v)$ jehlanů J_1 a J_2; o poměru obsahů obou podstav tedy platí

$$p_1 : p_2 = x^2 : (x - v)^2,$$

neboli

$$\frac{x}{x - v} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}},$$

z toho snadno vypočteme

$$x = \frac{v\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}}, \quad x - v = \frac{v\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}}.$$

Objem jehlanu J_1 je

$$\tfrac{1}{3}\, p_1 x = \tfrac{1}{3}\, \frac{v p_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}},$$

objem jehlanu J_2 je

$$\tfrac{1}{3}\, p_2(x - v) = \tfrac{1}{3}\, \frac{v p_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p_1} - \sqrt{p}};$$

tedy objem komolého jehlanu je

$$\frac{v}{3}\,\frac{p_1^{\frac{3}{2}} - p_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}} = \frac{v}{3}\,\frac{(\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2})(p_1 + p_2 + \sqrt{p_1 p_2})}{\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}} =$$

$$= \frac{v}{3}\,(p_1 + p_2 + \sqrt{p_1 p_2}).$$

Týž vzorec platí i pro objem komolého kužele (proč?). Tedy **objem komolého jehlanu nebo komolého kužele je dán vzorcem**

$$\frac{v}{3}\,(p_1 + p_2 + \sqrt{p_1 p_2}),$$

ve kterém je v výška, p_1, p_2 jsou obsahy podstav. Jsou-li r_1, r_2 poloměry podstav **rotačního komolého kužele**, je $p_1 = \pi r_1^2$, $p_2 = \pi r^2$, takže jeho objem je dán vzorcem

$$\frac{\pi v}{3}\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

Cvičení.

271. Určete objem čtyrbokého jehlanu, jehož podstavou je obdélník a jehož pobočné hrany jsou si rovny, je-li dána výška tělesa $v = 30$ cm a víte-li, že dvě sousední pobočné stěny tvoří s podstavou úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

272. Určete objem pravidelného n-bokého jehlanu, jehož pobočná hrana b svírá s podstavou úhel β. (Proveďte numericky pro $n=10$, $b=7$ dm, $\beta°=72°$.)

273. Určete povrch a objem pravidelného a) čtyrstěnu, b) osmistěnu, když je dána velikost a jeho hrany. Vyslovte definici těchto těles.

274. Hranou AB pravidelného čtyrstěnu $ABCD$ veďte rovinu ϱ, která rozděluje jeho objem v poměru 3 : 5.

275. Plášť pravidelného trojbokého jehlanu je roven dvojnásobku podstavy; velikost podstavné hrany je a. Určete a) povrch, b) objem jehlanu.

276. Podstavou jehlanu je rovnoběžník, jehož strany jsou $a=20$ cm, $b=36$ cm a jehož obsah $P=360$ cm^2. Pata kolmice spuštěné s vrcholu jehlanu na podstavu prochází jejím středem; výška tělesa $v=12$ cm. Určete plášť jehlanu.

277. Podstavou jehlanu je rovnostranný trojúhelník se stranou a. Jedna pobočná stěna je shodná s podstavou a její rovina je kolmá k rovině podstavy. Určete povrch jehlanu.

278. Podstavou jehlanu o výšce v je kosočtverec. Roviny dvou pobočných stěn svírají úhel 120°, při čemž stojí obě kolmo k rovině podstavy; třetí pobočná stěna svírá s podstavou úhel 30°. Určete velikost podstavy a pláště.

279. Ve kterém poměru jsou povrchy dvou pravidelných čtyrstěnů, jestliže vrcholy jednoho z nich jsou ve středech stěn druhého?

280. Pravidelný čtyrboký komolý jehlan má podstavné hrany $a_1=4$, $a_2=1$ a výšku $v=2$. Určete objem jehlanu, jenž daný jehlan doplňuje na úplný pravidelný čtyrboký jehlan.

281. Jáma má tvar pravidelného komolého čtyrbokého jehlanu. Hrany podstav jsou $a_1=14$ m, $a_2=10$ m. Pobočné stěny s menší podstavou tvoří úhel $\alpha=45°$. Kolik m^3 země bylo vykopáno?
Kolik m^3 betonu se zhruba spotřebuje na betonování jámy, bude-li tloušťka betonu 1 dm? (K hrubému výpočtu užijte pláště tělesa.)

282. Pravidelný komolý n-boký jehlan má podstavné hrany a, a' (kde $a > a'$). Pobočná hrana svírá s jednou podstavou ostrý úhel α. Určete objem tělesa.

283. Podstavy komolého jehlanu o výšce $v=13{,}5$ dm jsou dva kosočtverce, jejichž obsahy jsou v poměru 1 : 9; strana většího kosočtverce je 25 dm a jedna jeho úhlopříčka měří 30 dm. Úhly pobočných stěn s podstavou jsou si rovny. Určete povrch tělesa.

284. Určete rozměry pravidelného čtyrbokého komolého jehlanu, je-li dán součet M podstav, plášť N a úhel α pobočné stěny s podstavou. (Proveďte numericky pro $M=75$ cm^2, $N=110$ cm^2, $\alpha=60°$.)

285. Podstavy čtyrbokého komolého jehlanu jsou dva obdélníky; spojnice středů obou obdélníků je kolmá k podstavám. Rozměry jednoho obdélníka jsou $a_1 = 54$, $b_1 = 30$; obvod druhého obdélníka $o_2 = 112$. Vzdálenost podstav je $d = 12$. Určete plášť a objem tělesa.

286. Do pravidelného čtyrbokého komolého jehlanu je vepsán úplný jehlan tak, že jeho podstavou je menší podstava komolého jehlanu a vrchol vepsaného jehlanu je ve středu větší podstavy komolého jehlanu. Podstavné hrany komolého jehlanu jsou $a_1 = 4$, $b_1 = 3$. Určete objem komolého jehlanu, víte-li, že pláště obou těles jsou si rovny. Proveďte diskusi výsledku.

287. Budiž r poloměr a v výška rotačního kužele.

a) Definujte stranu s rotačního kužele a určete vztah, který platí mezi prvky r, v, s.

b) Dokažte, že plášť kužele je roven πrs.

c) Určete povrch kužele.

288. Určete středový úhel kruhové výseče, v kterou se rozvine plášť rotačního kužele: a) rovnostranného ($s = 2r$), b) jehož poloměr $r = 7$ a strana $s = 10$.

289. Určete poměr a) plášťů, b) povrchů, c) objemů rovnostranného kužele a rovnostranného válce.

290. Určete poměr povrchů a objemů tří těles, která vznikla rotací pravoúhlého trojúhelníka o stranách a, b, c, kde $a < b < c$, kolem jeho jednotlivých stran.

291. V tomto cvičení je užito tohoto označení pro prvky rotačního kužele: r = poloměr podstavy, v = výška, s = strana, α = úhel strany s podstavou, P' = plášť, P = podstava, S = povrch, V = objem. Určete zbývající prvky, je-li dáno:

a) $s = 30$ cm; $\alpha = 71°$; b) $v = 20$ cm; $\alpha = 65°$;

c) $r = 11$ cm; $\alpha = 59°$; d) $V = 100\ \text{cm}^3$; $v = 5$ cm;

e) $S = 24\pi$; $V = 12\pi$.

292. Dva rotační kužele mají za společnou podstavu kruh s poloměrem $r = 5$dm; jejich vrcholy leží uvnitř téhož poloprostoru vyťatého rovinou jejich společné podstavy. Strany kuželů svírají s podstavou úhly $\alpha = 74°$, $\beta = 60°$. Určete objem tělesa určeného jejich plášti.

293. Do rotačního kužele s poloměrem r a s výškou v je vepsán souosý rotační válec. Označte x, y, V poloměr, výšku a objem tohoto válce a vyjádřete hodnoty y, V užitím hodnot x, r, v.
Určete poměr objemů obou těles!

294. Určete zbývající rozměry rotačního komolého kužele, je-li dán

a) objem $V = 312$ a poloměry podstav $R = 8{,}1$, $r = 3{,}4$;

b) objem $V = 1504$, výška $v = 12$ a poměr poloměrů podstav $5 : 2$.

295. Rovina rovnoběžná s podstavami rotačního komolého kužele (poloměry R, r, výška v), která půlí výšku kužele, protíná kuželovou plochu v t. zv. středním řezu.

a) Dokažte, že poloměr středního řezu je $\varrho = \frac{1}{2}(R + r)$.

b) Dokažte, že plášť kužele je roven $\pi(R + r)s$ neboli $2\pi\varrho s$ (viz cvič. 226).

c) Když se velikosti obou poloměrů R, r od sebe málo liší, je možno objem rotačního komolého kužele nahradit objemem válce, který má s kuželem společnou výšku a jehož podstavou je kruh poloměru ϱ. Jestliže V je objem komolého kužele, V' objem tohoto válce, potom chyba, které se dopustíme, nahradíme-li objem kužele objemem tohoto válce, je $V - V' = \frac{1}{3}\pi v\left(\frac{R - r}{2}\right)^2$; proveďte diskusi tohoto výsledku.

d) Označíme-li o obvod středního řezu, potom objem válce z předchozího cvičení c) lze psát $V' = \frac{o \cdot v^2}{4\pi}$. Hodnotě o se v lesnické praxi říká pásková míra kmene.

296. Do rotačního komolého kužele je vepsána koule, která se dotýká obou podstav a pláště kužele podél kružnice. Určete objem, plášť a povrch kužele, jsou-li dány poloměry R, r podstav.

297. Poměr obsahů podstav rotačního komolého kužele je p^2, kde $p > 0$. Strana s kužele svírá s podstavou úhel $\alpha < \frac{1}{2}\pi$. Určete plášť a objem.

298. Komolý rotační kužel o poloměrech podstav R, r a výšce v byl rozdělen dvěma řezy rovnoběžnými s rovinami podstav tak, že vznikly tři kužele se stejnými výškami. Určete objemy jednotlivých částí. Proveďte numericky pro $R = 10$, $r = 4$, $v = 27$.

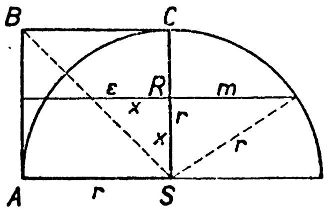
299. Rotační komolý kužel s poloměry $R = 8$, $r = 4$ podstav je rozdělen rovinným řezem rovnoběžným k podstavám ve dvě části téhož objemu. Určete a) poloměr řezu, b) poměr, v němž je rozdělena výška komolého kužele.

300. Uvnitř rotačního komolého kužele K je vysoustružena dutina tvaru souosého úplného rotačního kužele K_1, menší podstava kužele K je podstavou kužele K_1 a vrchol kužele K_1 je středem větší podstavy kužele K. Strany obou kuželů ve společném osovém řezu jsou střídavě rovnoběžné. Určete objem zbylého tělesa, je-li dána strana $s = 25$ cm kužele K a její úhel s podstavou $\alpha = 66°$.

6. Objem a povrch koule a jejích částí.

I. Čtverec $SABC$ se otáčí kolem strany SC. Vznikne válec s objemem $V_1 = \pi\overline{SA}^2 \cdot \overline{SC}$. Položíme-li $\overline{SA} = \overline{SC} = r$, pak $V_1 = \pi r^3$. (Obr. 66.)

Opišme čtvrtinu kružnice z bodu S tak, aby AB a BC byly jejími tečnami v bodech A a C. Čtvrtina kruhu omezená poloměry SA, SC a čtvrtkružnicí AC vytvoří otáčením polokouli. Válec vytvořený otáčením čtverce $SABC$ dotýká se polokoule podél kružnice, opsané bodem A. Kruh vzniklý otáčením úsečky SA tvoří jednu podstavu válce, druhá leží v tečné rovině koule v bodě C.



Obr. 66.

Otáčením pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku SCB vzniká rotační kužel K s objemem $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{\pi r^3}{3}$.

Vyjmeme-li z válce vzniklého otáčením čtverce $SABC$ kužel $\boldsymbol{K}$, zbývá těleso $\boldsymbol{T}$, které lze vytvořiti otáčením trojúhelníku SAB kolem osy SC. Objem tohoto tělesa jest

$$V' = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Na úsečce SC mezi body SC zvolme bod R; $\overline{SR} = x$. Bodem R položme rovinu ε, kolmou na SC. Rovina ε protíná polokouli v kruhu s poloměrem m, při čemž

$$m^2 = r^2 - x^2$$

Obsah průsečného kruhu jest

$$\pi m^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Těleso $\boldsymbol{T}$ protíná rovina ε v mezikruží, omezeném kružnicí o poloměru r, v které rovina protíná válec, a soustřednou kružnicí o poloměru x, v které ε protíná kužel. Obsah tohoto mezikruží jest

$$\pi r^2 - \pi x^2 = \pi\,(r^2 - x^2).$$

Je tedy obsah kružnice, ve které rovina ε protíná polokouli stejný s obsahem mezikruží, ve kterém ε protíná těleso $\boldsymbol{T}$.

Tato rovnost obsahů řezů koule a tělesa $\boldsymbol{T}$ platí vždy, zvolíme-li bod R mezi body SC.

Všechny roviny, rovnoběžné s podstavou válce (a tedy tělesa $\boldsymbol{T}$) a kruhové hrany polokoule, protínají polokouli i těleso $\boldsymbol{T}$ v řezech, které mají stejné obsahy.

Jsou tedy splněny předpoklady a) i b) a zřejmě i c), za kterých lze užíti principu Cavalieriho (článek III 3).

Objem polokoule se tedy rovná objemu tělesa $\boldsymbol{T}$, neboli objem polokoule je roven dvěma třetinám objemu válce polokouli opsaného,

$$V' = \tfrac{2}{3}\pi r^3.$$

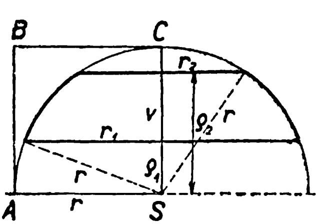
Objem koule

$$V = 2V' = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

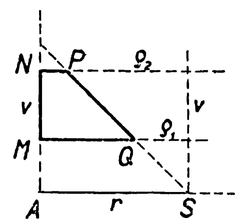
Kulová vrstva a úseč.

Vrstva kulová jest část koule, omezená dvěma rovnoběžnými rovinami. Obě roviny protínají kouli v kruzích, které se nazývají podstavami vrstvy kulové, jejich vzdálenost je výškou vrstvy kulové. Objem vrstvy kulové určíme podobně jako objem celé koule.

Úvahou podobnou předcházející úvaze zjistíme, že objem vrstvy kulové je stejný jako objem té části tělesa $\boldsymbol{T}$, která vznikne rotací lichoběžníku $MQPN$. (Viz obr. 67a, b.)



Obr. 67a.



Obr. 67b.

Objem V této části tělesa $\boldsymbol{T}$ vyjádříme jako objem V_1 válce s výškou $\overline{MN} = v$ a s poloměrem r, zmenšený o objem V_2 komolého kužele s poloměry podstav ϱ_1 a ϱ_2.

$$V = V_1 - V_2, \quad V_1 = \pi r^2 v, \quad V_2 = \frac{\pi v}{3}(\varrho_1^2 + \varrho_1\varrho_2 + \varrho_2^2),$$

$$\varrho_1^2 = r^2 - r_1^2, \quad \varrho_1^2 = r^2 - r_2^2,$$

$$V = \pi r^2 v - \frac{\pi v}{3}(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_1\varrho_2) =$$

$$= \frac{\pi v}{3}(3r^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2 - \varrho_1\varrho_2) =$$

$$= \frac{\pi v}{3}(r^2 - \varrho_1^2 + r^2 - \varrho_2^2 + r^2 - \varrho_1\varrho_2) =$$

$$= \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2 + r_2^2 + r^2 - \frac{2r^2 - r_1^2 - r_2^2 - v^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2),$$

neboť

$$\varrho_1\varrho_2 = \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - (\varrho_2 - \varrho_1)^2}{2} =$$

$$= \frac{r^2 - r_1^2 + r^2 - r_2^2 - v^2}{2} =$$

$$= \frac{2r^2 - r_1^2 - r_2^2 - v^2}{2}.$$

Objem vrstvy kulové je tedy

$$V = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2) \qquad (1)$$

Přejde-li jedna podstava v bod, t. j. stane-li se z roviny sečné rovina tečná a protíná-li druhá rovina kouli (její vzdálenost od tečné roviny jest v), nazýváme takovou kulovou vrstvu kulovou úsečí.

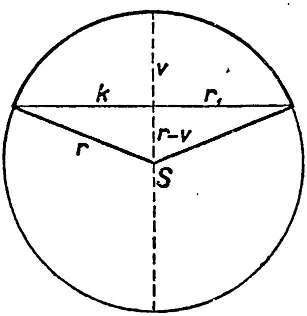
Výraz pro objem U kulové úseče vznikne tedy z výrazu (1), položíme-li $r_2 = 0$:

$$U = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + v^2).$$

Vzorec (1) lze psáti též

$$V = \pi r_1^2 \frac{v}{2} + \pi r_2^2 \frac{v}{2} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{v}{2}\right)^3.$$

Prvý člen představuje objem rotačního válce, jehož podstava má poloměr r_1, výška je polovicí výšky vrstvy kulové; podobný význam má člen druhý, třetí člen vyjadřuje objem koule s poloměrem poloviční výšky vrstvy kulové. Pamatujeme si tedy snadno:



Obr. 68.

Objem vrstvy kulové se rovná součtu objemů dvou válců a koule. Podstavami válců jsou podstavy vrstvy kulové, výškou poloviční výška vrstvy. Poloměrem koule je poloviční výška vrstvy kulové.

Objem kulové výseče.

Zvolme na povrchu koule s poloměrem r kružnici k (poloměr této kružnice k budiž $r_1 < r$). Rotační kužel určený kružnicí k a středem koule S rozděluje nám kouli ve dvě části, zvané výseče kulové. Jedna tato výseč je větší, druhá menší než polokoule. Chceme vypočítat objem těchto výsečí. (Obr. 68.)

Všimněme si výseče kulové, která je menší než polokoule. Tato výseč se skládá ze dvou částí: z úseče kulové, která má výšku v a základní kruh s poloměrem r_1, a z rotačního kužele, který má podstavu poloměru rovněž r_1 a výšku $r - v$. Objem V této výseče se bude rovnati součtu objemů úseče a kužele.

$$V = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + v^2) + \frac{\pi r_1^2}{3}(r + v) =$$

$$= \frac{\pi}{6}(r_1^2 v + 2r_1^2 r + v^3)$$

$$= \frac{\pi}{6}[r_1^2(2r + v) + v^3].$$

Protože podle Eukleidovy věty o výšce pravoúhlého trojúhelníka jest

$$r_1^2 = v(2r - v),$$

obdržíme dosazením za r_1^2 do rovnice pro V:

$$V = \frac{\pi}{6}[v(2r - v)(2r + v) + v^3] =$$

$$= \frac{\pi}{6}[4r^2 v - v^3 + v^3].$$

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot v.$$

Ukažte, že objem druhé výseče V_2 vypočítáme podle stejného vzorce. (Víme, že $V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$; je-li m výška úseče, jejíž částí jest výseč s objemem V_2, pak platí, $v + m = 2r$.)

Ukažte dále, že rovnice pro objem výseče platí, i když $r_1 = r$. Pak se totiž obě výseče navzájem rovnají; $v = m = r$; každá z výsečí jest polovinou koule.

Platí tedy obecně:

Objem výseče kulové se rovná $\frac{2}{3}\pi r^2 v$, kde r jest poloměr koule a v je vzdálenost roviny kruhové hrany výseče od nejvzdálenějšího bodu části plochy kulové, která výseč omezuje.

II. Povrch koule se dá rozdělit pomocí kružnic ve velký počet křivočarých trojúhelníků. Když každý z těch křivočarých trojúhelníků nahradíme přímočarým trojúhelníkem, přejde kulová plocha $\boldsymbol{P}$ v plochu $\boldsymbol{M}$, která se skládá z velkého počtu malých trojúhelníků a je vepsána do plochy kulové P. Povrch kulové plochy je velmi přibližně roven povrchu plochy M, který se rovná

$$t_1 + t_2 + t_3 + \text{atd.},$$

kde t_1, t_2, t_3 atd. jsou obsahy jednotlivých trojúhelníků. Každý z těchto trojúhelníků nechť je podstavou trojbokého jehlanu, která má vrchol ve středu S koule K; výšky těchto jehlanů nechť jsou v_1, v_2, v_3 atd. Všecky ty jehlany dohromady tvoří těleso T, které vyplní celý vnitřek plochy M, takže objem tělesa T je velmi přibližně roven objemu koule K. Objemy našich jehlanů jsou

$$\frac{1}{3} t_1 v_1, \ \frac{1}{3} t_2 v_2, \ \frac{1}{3} t_3 v_3 \text{ atd.}$$

Objem tělesa T je dán výrazem

$$\frac{1}{3} (t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 + \text{atd.}).$$

Všecky výšky v_1, v_2, v_3 atd. jsou však velmi přibližně rovny poloměru r koule K, takže objem tělesa T je velmi přibližně roven

$$\frac{r}{3} (t_1 + t_2 + t_3 + \text{atd.}),$$

neboli součinu čísla $\frac{r}{3}$ s povrchem plochy M. Tento povrch je zase velmi přibližně roven povrchu kulové plochy P. Protože však objem tělesa T je velmi přibližně roven objemu koule K, tedy číslu $\frac{4}{3}\pi r^3$, musí býti

$$\frac{r}{3} \cdot x = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

kde x znamená povrch koule. Tedy

$$x = 4\pi r^2,$$

t. j. povrch koule s poloměrem r se rovná $4\pi r^2$.

Jestliže místo povrchu koule uvažujete obsah vrchlíku, který leží na ploše kulové o poloměru r a jehož výška je v, potom z výrazu $\frac{2}{3}\pi r^2 \cdot v$ určíte snadno podobnou úvahou, že obsah vrchlíku je $2\pi r \cdot v$.

Cvičení.

Pokud není jinak uvedeno, značí v dalších cvičeních r poloměr, V objem a P povrch koule.

301. Kolikrát vzroste a) objem, b) povrch koule, když její poloměr r vzroste k-krát?

302. Poloměr r koule vzrostl o hodnotu ε. Oč vzrostl a) její povrch, b) její objem?

Určete přibližné hodnoty těchto přírůstků za předpokladu, že číslo ε je v poměru k poloměru r velmi malé, takže členy, v nichž se vyskytuje ε^2 nebo ε^3, lze zanedbat. Proveďte cvičení numericky pro $r = 10$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$.

303. Určete poměr objemů rovnostranného kužele, rovnostranného válce a koule, když první dvě tělesa mají za podstavu kruh s poloměrem r, který je i poloměrem koule.

304. Určete výšku rotačního kužele, který má stejnou podstavu a týž objem jako polokoule s poloměrem r.

305. Do koule s poloměrem r je vepsán a) rovnostranný válec, b) rovnostranný kužel, c) krychle. Určete poměr objemů těchto těles.

306. Kolik je asi metrů bavlny v klubku tvaru koule s průměrem 18 cm, kdy průměr niti je 0,4 mm?

307. Váhy dvou koulí jsou v poměru 8 : 17, měrné váhy materiálů, z nichž jsou zhotoveny, jsou v poměru 289 : 54. Určete poměr a) průměrů, b) povrchů obou koulí.

308. Dutá železná koule (měrná váha $s = 7{,}5$ g/cm^3) váží 12 kg; ponořena do vody váží jen 5 kg. Určete tloušťku stěny koule.

309. Dutá koule má objem $V = 876\,\pi$ cm^3, tloušťka stěny je $t = 3$ cm. Určete poloměry obou kulových ploch, které toto těleso určují.

310. Užitím vzorce, který je pro objem kulové úseče odvozen v textu, dokažte, že objem V úseče s výškou v na kouli s poloměrem r je $V = \frac{1}{3}\pi v^2 \cdot (3r - v)$.

311. Podobně, jako byl v textu odvozen vzorec pro povrch koule, odvoďte ze vzorce pro objem kulové výseče, že kulový vrchlík s výškou v na kouli s poloměrem r má obsah $P = 2\pi r v$.

312. Rovinný řez dělí povrch koule v poměru 1 : 2. Ve kterém poměru jsou objemy obou kulových úsečí?

313. Miska tvaru polokoule má vnitřní průměr $d = 28$ cm. Kolik litrů vody je v misce, když výška příslušné kulové úseče je 10 cm?

314. Určete objem a povrch tělesa, které vzniklo z koule o poloměru $r = 6$, do které byl provrtán otvor tvaru rotačního válce s poloměrem $\varrho = 3$, jestliže osa válce prochází středem koule.

315. Dvě roviny σ_1, σ_2 rovnoběžné s podstavou polokoule o poloměru $r = 65$ cm vytínají kulovou vrstvu. Stanovte objem vrstvy, jestliže vzdálenosti rovin σ_1, σ_2 od podstavy polokoule jsou $v_1 = 19$ cm, $v_2 = 25$ cm.

316. Kterou část povrchu zemského mohli shlédnout sovětští badatelé (Papaninci), když se v roce 1937 před přistáním vznášeli ve výšce $m = 4$ km nad severním pólem? Povrch zemský považujte za kruhovou plochu s poloměrem $r = 6370$ km.

VÝSLEDKY CVIČENÍ.

I. Základy stereometrie.

1. Incidence bodů, přímek a rovin.

1. $\frac{n(n-1)}{2}$. **2.** ABC, ABD, ACD, BCD (splývají v 1 rovinu); ABE, ABF, ABG, BCE, BCF, BCG, CDE, CDF, CDG, DAE, DAF, DAG (jsou vesměs navzájem různé); AEF, AFG, AGE, CEF, CFG, CGE, ACE, ACF, ACG (splývají v 1 rovinu); BEF, BFG, BGE, DEF, DFG, DGE, BDE, BDF, BDG (splývají v jednu rovinu); EFG neurčují rovinu; celkem 15 různých rovin. **3.** Nechť dané přímky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ neprocházejí týmž bodem; pak aspoň jedna z přímek $a_3 \ldots, a_n$, na př. a_3, tvoří s přímkami a_1, a_2 trojúhelník. Každá z přímek $a_4, \ldots, a_n$ protne přímky a_1, a_2, a_3 v aspoň dvou různých bodech a leží tedy v jejich rovině. **4.** Roviny ϱ, ϱ' jsou různoběžné, body A_0, B_0, C_0 leží na jejich průsečnici.

2. Vzájemná poloha přímek a rovin.

5. a) Nemohou; jinak by ležely body A, B, C, D v rovině. b) 6 přímek a 4 roviny. d) AB, CD; AC, BD; AD, BC. **6.** b) Úsečka $B'C'$ protíná přímku BC, proto jsou roviny ABC, $A'B'C'$ různoběžné. Jestliže přímka AB nebo $A'B'$ protíná p, leží tento průsečík ve všech třech rovinách ABC, $A'B'C'$, ABD; proto jím procházejí všecky tři průsečnice AB, $A'B'$, p. **8.** Hledaná příčka musí být průsečnice různoběžných rovin Ma, Mb. Neprotíná-li tato průsečnice obě přímky a, b, není jejich příčkou. **10.** a) Mají společný jediný bod U. b) Protínají se ve třech rovnoběžkách. c) Mají společnou přímku AB. d) Mají dvě rovnoběžné průsečnice BC, UV.

3. Rovnoběžnost přímek a rovin.

11. a) Přímka a leží v rovině bm, neboť je-li $a \not\equiv b$, splynou roviny ab, bm. Obdobný závěr platí pro přímku c. b) Každá přímka x geom. místa leží v rovině am (viz úlohu a). Každým bodem roviny am prochází přímka $x \parallel a$ a protínající m.

12. Jinak by mimoběžky ležely v rovině těchto dvou příček. **13.** Bodem A vedeme přímku $q \parallel MN$ a najdeme průsečík R roviny qB s přímkou CD; bodem R prochází hledaná příčka p. Provedení: spojnice DN protne q v bodě U; přímka BU je průsečnice rovin BCD, qB; průsečík přímek CD, BU je hledaný bod R. Má-li úloha řešení, je jediné. Úloha je neřešitelná, je-li $CD \parallel BU$. **14.** Přímky AB, CD se protnou v bodě P; roviny Ba, Dc jsou tedy různoběžné. Bodem P prochází jediná přímka $x \parallel a$, která ovšem leží v rovině Ba. Ježto je $x \parallel a \parallel c$, leží přímka x také v rovině Dc; proto je $x \equiv u$.

— **15.** a) Plyne kombinací vět 4, 7, 5. b) Nepřímo z a). — **16.** Kdyby bylo $\pi \equiv \varrho$, ležela by přímka s v rovině ϱ, t. j. bylo by $s \equiv p$. Je $p || \pi$ podle věty 5. — **17.** a) $p || BC$. b) $\varrho \cdot \tau || \sigma \cdot \tau || BC$. — **18.** Průsečnice rovin VMQ, VNP je spojnice vrcholu V s průsečíkem přímek MQ, NP. Průsečnice rovin VMN, VPQ je rovnoběžná s přímkou MN. — **19.** a) Plyne kombinací vět 4, 7, 5. b) Nepřímo z a). — **20.** Kdyby bylo $\varrho_2 || \sigma_2$, bylo by $\varrho_1 || \varrho_2 || \sigma_2 || \sigma_1$, t. j. podle věty 8 $\varrho_1 || \sigma_1$ proti předpokladu. S použitím věty 12 dostáváme $\varrho_2 \cdot \sigma_2 || \varrho_2 \cdot \sigma_1 || \varrho_1 \cdot \sigma_1$. — **21.** Je-li $r \not\equiv s$, je $RR'S'S$ rovnoběžník (podle věty 12). — **23.** $AA'B'B$ a $AA'C'C$ jsou rovnoběžníky; proto je $AB || A'B'$, $AC || A'C'$; dále viz větu 9. — **24.** a) Středy stran trojúhelníka VAM vyplní tři přímky rovnoběžné s BC. Těžnice vyplní tři roviny rovnoběžné s přímkou BC. b) Těžiště vyplní přímku rovnoběžnou s BC.

4. Poloprostor.

25. Přímka vedená bodem R rovnoběžně s PQ protne hranu $A'B'$ v jistém bodě T. Rovnoběžník $PQRT$ je průsekem roviny $\varrho \equiv PQR$ s krychlí. Vedeme-li středem S naší krychle rovinu $\sigma || ABC$ a určíme průsečnici $\varrho \cdot \sigma$, můžeme rozhodnout o umístění bodů M, M', S: bod M leží v poloprostoru (ϱD), body S, M' v poloprostoru (ϱB). — **26.** a) Poloprostory $(CDMA)$, $(CDMB)$ jsou opačné; úsečka BC náleží podle věty 18 poloprostoru $(CDMB)$, t. j. i těžnice DT náleží tomuto poloprostoru. b) Je-li N střed úsečky BC, leží body A, D, T, U v rovině ADN. Podle úlohy a) obsahuje úsečka AT uvnitř bod přímky DU ležící v rovině CDM. Vyměníme-li body A, D a T, U, vidíme, že úsečka DU obsahuje uvnitř bod přímky AT. — **27.** Nepřímý důkaz: budiž X bod poloprostoru (ϱA), který nenáleží do poloprostoru (σA); pak mezi A, X leží jistý bod Y roviny σ. Podle předpokladu a věty 16 leží pak mezi A, Y jistý bod Z roviny ϱ. T. j. mezi A, X leží jistý bod Z roviny ϱ, a tedy X nenáleží poloprostoru (ϱA) (spor). — **28.** Rovina σ prochází bodem A a je rovnoběžná s ϱ. — **29.** Leží-li bod E v poloprostoru $(BCD\ A)$, je $\varrho \equiv BCD$. Leží-li bod E v poloprostoru opačném, vedeme tímto bodem rovinu $\sigma || BCD$; podle výsledku cvičení 27 leží body B, C, D, E v poloprostoru (σA). — **30.** Buďte B, C, D tři sousední vrcholy mnohoúhelníka; celý mnohoúhelník leží v úhlu $\sphericalangle BCD$. Ježto úsečka BD leží v poloprostoru (ϱA), leží v něm i každá polopřímka CX, kde X je bod úsečky BD. To znamená, že $\sphericalangle BCD$ leží v poloprostoru (ϱA). — **31.** Obsahuje-li polorovina přímku, je tato přímka rovnoběžná s její hranicí. Hranice daných polorovin jsou tedy navzájem rovnoběžné. Splynou-li, pak rovina jedné z daných polorovin vytíná hledaný poloprostor. Nesplynou-li hranice, určují rovinu která vytíná hledaný poloprostor. — **32.** Označme ϱ, σ roviny, v nichž dané poloroviny leží. Vzhledem k předpokladu nejsou roviny ϱ, σ rovnoběžné, a to ani různé ani splývající. Označme p průsečnici rovin ϱ, σ. Každá z daných polorovin může mít vzhledem k p trojí vzájemnou polohu: α) polorovina nemá s přímkou p žádný společný bod; β) obsahuje přímku p; γ) vytíná na ní polopřímku. Podle našeho předpokladu nenastane pro žádnou polorovinu případ α), ale také nenastane β). Pro obě poloroviny nastane případ γ) a obě vyťaté polopřímky musí mít společný počátek. — **33.** Rovina rovnoběžná s ϱ vedená bodem A', neboť je $A'R' \| AR \| \varrho$. — **34.** Buď žádná nebo čtyři nebo šest.

5. Úhel dvou přímek a rovin.

35. Bodem A vedeme přímku $p \| CD$, bodem C přímku $q \| AB$; pak je $\varrho \equiv pC$, $\sigma \equiv qA$. — **36.** Je to úhel úhlopříček AB', $A'B$. — **37.** Je $AA_1 \uparrow\uparrow$ $\uparrow\uparrow BB_1$, $AA_2 \uparrow\uparrow BB_2$, neboť podle věty 12 je $AA_1 \| BB_1$ a oba body A_1, B_1 leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB. — **38.** Je-li r', s' jiná taková dvojice kolmic, jsou úhly různoběžek r, s a r', s' stejně velké. — **39.** Rovina ϱ' protíná trojúhelníky VAB, VAC, a tedy i trojúhelník VBC v příčkách rovnoběžných se stranami AB, AC a BC. — **40.** a) Kdyby bylo $\varrho' \| \sigma'$, bylo by $\varrho \| \varrho' \| \sigma' \| \sigma$. b) Sestrojíme přímky r, s jako ve cvičení 38; úhly přímek r, s jsou úhly rovin ϱ, σ. Obdobně sestrojíme přímky r', s', jejichž úhly jsou úhly rovin ϱ', σ'. Avšak úhly přímek r, s a r', s' jsou podle vět 19, 20, 21 stejné.

6. Přímka kolmá k rovině. Vzdálenost bodu od roviny.

41. Je $KLM \perp k$, a tudíž $KLM \perp l$, $KLM \perp m$, $LM \perp l$, $LM \perp m$. — **42.** O je střed základen rovnoramenných trojúhelníků ACV, BDV, a proto $VO \perp AC$, $VO \perp BD$. — **43.** Hledaná přímka k leží v rovině $\varrho \perp m$, vedené bodem C'. a) Úloha je řešitelná jen tehdy, leží-li n v ϱ nebo je s ní různoběžná. b) V rovině ABA' spustíme z bodu B' kolmici na přímku m a najdeme její průsečík Q s přímkou AB. Pak je $\varrho \equiv B'C'Q$; rovnoběžka s $B'C'$ vedená bodem Q protne přímku n v bodě hledané kolmice k. — **44.** Buď je $q \perp \varrho$ a pak úloze vyhovuje každá přímka roviny ϱ procházející bodem R; nebo není $q \perp \varrho$; pak přímkou q položíme rovinu $\tau \perp \varrho$ a z bodu R spustíme v rovině ϱ kolmici na průsečnici $\varrho \cdot \tau$. — **45.** $x = 45$, $\overline{CC'} = 120$ cm. — **46.** Rovina $\tau \perp \varrho$ položená přímkou p protne ϱ v přímce $\varrho \cdot \tau \| p$; vzdálenost těchto dvou rovnoběžek je vzdálenost v. — **47.** Rovina $\tau \perp \varrho$ položená přímkou a protne ϱ v přímce $\varrho \cdot \tau$, která obsahuje tři body stejně vzdálené od přímky a; proto je $\varrho \cdot \tau \| a$, t. j. $a \| \varrho$. — **48.** Rovina ϱ' je souhrn bodů všech přímek $x \| \varrho$, které procházejí pevným bodem A roviny ϱ'. — **49.** V rovině ϱ zvolíme trojúhelník ABC; pak je podle cv. 47 $A'B' \| \varrho$, $A'C' \| \varrho$, t. j. $A'B'C' \| \varrho$. Je-li X další bod roviny ϱ, je $A'X' \| \varrho$, t. j. $A'X'$ leží v $A'B'C'$. — **50.** Je to dvojice rovin $\varrho_1 \| \varrho$, $\varrho_2 \| \varrho$ vedených ve vzdálenosti v. — **51.** Kdyby bylo $R'S' \perp \varrho$ (a tedy i $R'S' \perp \sigma$), bylo by $\overline{R'S'} = \overline{RS}$.

7. Roviny k sobě kolmé. Úhel přímky s rovinou.

52. V průsečíku $r \cdot p$ vztyčme kolmici k k rovině ϱ. Ježto je $\sigma \perp \varrho$, leží k v σ, t. j. $r \perp k$, $r \perp p$, čili $r \perp \sigma$. — **53.** a) Ježto $a \perp BC$ a BC leží v ϱ, je $\varrho \perp a$, čili $a \perp \varrho$. b) α, β, γ obsahují přímku VV_1 a nesplývají. — **54.** Vedeme výšky z bodu V ve stěnách VAB, VBC; v rovině ABC vztyčíme kolmice k přímkám AB, BC v patách těchto výšek. Průsečík těchto kolmic je bod V_1. — **55.** Viz cv. 54. — **56.** Je to velikost úsečky omezené bodem V a středem přepony c. — **57.** $\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4v^2}$. — **58.** Je třeba prodloužit o délku $\frac{m}{n-m}\sqrt{d_1^2 + (n-m)^2}$ za předpokladu, že $n > m$, (pořádek RAB). Je-li $m > n$ (pořádek RBA), vymění se m a n. Pro $m = n$ je úloha neřešitelná. — **59.** Sestrojíme úsečku $A_1C \#\!\!\!= AB$ a zkoumáme trojici bodů A_1, B_1, C, — **60.** Roviny $\sigma \perp \varrho$, $\tau \perp \varrho$ položené přímkami p, q jsou rovnoběžné podle V9 (platí v případě, že není $p \perp \varrho$, $q \perp \varrho$). — **61.** Pravoúhlé průměty bodů A, O, P do roviny ϱ jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníka A_1OP, neboť $OP \perp OAA_1$. Úhel $\sphericalangle AOP$ je souhrn polopřímek s počátkem O, které protínají úsečku AP; průměty těchto polopřímek jsou polopřímky s počátkem O, které protínají úsečku A_1P, a ty vyplní $\sphericalangle A_1OP$. Zobecnění: pravý úhel, jehož jedno rameno je rovnoběžné s průmětnou a jehož rovina není kolmá k průmětně, se promítá v pravoúhlém promítání do pravého úhlu. — **62.** Přímkami p, q položíme roviny $\sigma \perp \varrho$, $\tau \perp \varrho$. — **63.** a) ν obsahuje přímku $A'C' \| AC$, μ obsahuje přímku $BD \| B'D'$. b) $\nu_0 \equiv B'DD'$, $\mu_0 \equiv ACC'$, μ_0, ν_0 se protínají, ježto jsou kolmé k dvěma rovnoběžným rovinám μ, ν, ale není $\mu_0 \| \nu_0$. $\overline{MN}$ je vzdálenost rovnoběžných rovin μ, ν; proto, jsou-li X, Y dva další body přímek m, n (t. j. rovin μ, ν), je $\overline{XY} \geqq \overline{MN}$.

8. Konvexní útvary. Klín, trojhran.

65. Daný klín budiž průnik poloprostorů ϱA, σB. Rovina τ, různoběžná s hranou klínu, je různoběžná i s rovinami ϱ, σ; body A, B lze zvolit v τ. Průnik roviny τ s klínem je průnik polorovin, které v rovině τ vytnou poloprostory ϱA, σB. — **66.** a) Buďte pA, pB stěny našeho klínu, τ daná různoběžná rovina, kolmá k stěně pB. Zvolíme body A, B v τ tak, aby bylo $AB \perp pB$ a označíme $Q \equiv p \cdot \tau$, R patu kolmice spuštěné z bodu A (nebo B) na přímku p. Je-li $R \not\equiv Q$, je patrně $\overline{BQ} > \overline{BR}$; proto $\sphericalangle AQB < \sphericalangle ARB$ (pravoúhlé trojúhelníky AQB, ARB mají společnou odvěsnu AB). Je-li $R \equiv Q$, je $\sphericalangle AQB = \sphericalangle ARB$. b) Tento případ převedeme na a) tím, že přejdeme k vedlejšímu klínu, (t. j. klínu, který má s daným jednu stěnu společnou a druhá je opačná polorovina k stěně prvního klínu). — **67.** Trojhran t. zv. vrcholový; jeho hrany jsou polopřímky opačné k hranám daného, jeho stěny jsou úhly vrcholové k stěnám daného trojhranu. — **68.** Trojhran je průnikem poloprostorů $(VAB)C$, $(VBC)A$, $(VCA)B$. Tyto poloprostory vytnou v rovině $\varrho \equiv ABC$ tři poloroviny, jejichž průnikem je trojúhelník ABC. Každá polopřímka VX, kde X je bod trojúhelníka ABC, zřejmě náleží všem třem poloprostorům, t. j. trojhranu. Obráceně: je-li Y bod trojhranu neležící na hraně VA, protne polorovina VAY rovinu ϱ v polopřímce m s počátkem A, která zřejmě náleží úhlu BAC. Proto polopřímka m protne úsečku BC v jistém bodě Z. Bod Y, jakožto bod trojhranu, náleží úhlu AVZ; proto protne polopřímka VY úsečku AZ v jistém bodě X, který náleží trojúhelníku ABC. — **69.** Buďte AVA', BVB', CVC' dané přímky. Dvojice vrcholových trojhranů jsou $VABC$, $VA'B'C$; $VABC'$, $VA'B'C'$; $VAB'C'$, $VA'BC$; $VAB'C$, $VA'BC'$. — **70.** Roviny určí tři přímky, které procházejí týmž bodem a neleží v rovině; dále viz cv. 69. — **71.** Budiž $VABCD$ daný jehlan. Hledaný úhel je $\sphericalangle APC$, kde P je společná pata výšek v trojúhelnících ABV, BCV. $\overline{AP} = \frac{12}{7}\sqrt{5}$; $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{7\cdot\sqrt{10}}{30}$. — **72.** a) $\sphericalangle AA'D = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg} \sphericalangle AA'M = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\triangle A'DM$ má strany $a\sqrt{2}$, $\frac{a}{2}\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}a$, kde a je hrana dané krychle. b) Kolmice k spuštěná z bodu A na přímku DM a různoběžná s DM, prochází středem úsečky CD; na přímce k leží bod A_1 souměrně sdružený s bodem A, a to tak, že $\overline{AR} = \overline{A_1R}$; R značí průsečík přímek k, DM. Obraz A_1' bodu A' sestrojíme tak, aby bod R byl středem úsečky $A'A_1'$. — **73.** Označme V vrchol trojhranu, A, B, C koncové body stejných úseček na jeho hranách, V_1 patu kolmice spuštěné z bodu V na rovinu ABC. Bod V_1 je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC; vždy platí $\alpha = \sphericalangle AV_1B > \sphericalangle AVB$, $\beta = \sphericalangle BV_1C > \sphericalangle BVC$, $\gamma = \sphericalangle CV_1A > \sphericalangle CVA$. Leží-li V_1 uvnitř trojúhelníka ABC, je $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, leží-li bod V_1 na obvodu $\triangle ABC$ (ve středu strany AB), je $\alpha + \beta = \pi$, leží-li bod V_1 vně trojúhelníka ABC (v polorovině opačné k ABC), je $\alpha + \beta + \gamma = 2\gamma < 2\pi$. — **74.** Ježto $VA \perp \varrho$, $VB \perp \sigma$, jsou úhly rovin ϱ, σ rovny úhlům přímek VA, VB. T. j. strany (úhly) nových trojhranů jsou buď rovny nebo výplňkové k úhlům (stranám) daného trojhranu. — **75.** Nanesením úseček na hrany trojhranu vznikne pravidelný trojboký jehlan $VABC$. Výšky vedené z vrcholů A, C v trojúhelnících ABV, BCV mají touž patu P. Úhel trojhranu je vnitřní úhel trojúhelníka ACP; další dva úhly trojhranu jsou úhly obdobných dvou shodných trojúhelníků.

9. Souměrnost podle roviny. Shodnost v prostoru.

76. Dvě (různé) rovnoběžky a, b leží v rovině; proto jejich obrazy a', b' leží také v rovině. Kdyby přímky a', b', měly společný bod, byl by obrazem společného bodu přímek a, b. — **77.** Společné body přímky (roviny) s rovinou souměrnosti jsou body samodružné a náležejí tedy i jejímu obrazu. — **78.** a) Obraz bodu B leží na přímce spojující bod B s bodem M ležícím ve dvou třetinách hrany AD (blíže bodu D). b) Obraz bodu A' leží na rovnoběžce s přímkou BM. — **79.** Narýsujte šestiúhelník $ABCDEF$ ve skutečném tvaru; určete patu P kolmice spuštěné z bodu F na přímku SM a určete podíl úseček $\overline{PM} : \overline{PS}$; bod P zobrazte. — **80.** Nemají žádnou rovinu souměrnosti (viz cv. 77.), nejsou-li prostorově kolmé. Jsou-li prostorově kolmé, mají dvě roviny souměrnosti; jsou to roviny, z nichž každá obsahuje jednu mimoběžku a je kolmá k druhé. — **81.** Je to každá rovina kolmá k ϱ a obsahující p; takových rovin je nekonečně mnoho, je-li $p \perp \varrho$, je jen jediná, není-li $p \perp \varrho$. Je-li $p \perp \varrho$, je také roviua ϱ rovinou souměrnosti. — **82.** a) Jsou-li hraniční přímky obou polorovin rovnoběžné, je rovinou souměrnosti každá rovina k nim kolmá. Jsou-li roviny ϱ_1, ϱ_2 daných polorovin různé a je-li rovina τ jejich hraničních přímek kolmá k ϱ_1 i k ϱ_2, je rovinou souměrnosti také rovina rovnoběžná s ϱ_1, ϱ_2 a půlící jejich vzdálenost, ovšem jen v tom případě, že dané poloroviny leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou τ. Je-li $\varrho_1 \equiv \varrho_2$, je tato rovina rovinou souměrnosti, pokud obě dané poloroviny splynou. b) Jsou-li hraniční přímky různoběžné, existuje rovina souměrnosti jen tehdy, leží-li obě dané poloroviny v téže rovině ϱ; je to pak jednak rovina ϱ sama, jednak rovina kolmá k ϱ, která obsahuje osu úhlu, určeného danými polorovinami. — **83.** Budiž $VABCD$ daný jehlan; jeho roviny souměrnosti obsahují hlavní vrchol V a osy souměrnosti čtverce $ABCD$, t. j. úhlopříčky a obě osy stran. — **84.** Je-li ξ libovolná rovina obsahující úsečku AB, pak body hledaného geom. místa ležící v rovině ξ vyplní osu úsečky AB. Všecky tyto osy úsečky AB vyplní rovinu souměrnosti úsečky AB. — **85.** Budiž AVB daný dutý úhel; zvolme $\overline{VA} = \overline{VB}$. Má-li bod M od obou přímek VA, VB stejné vzdálenosti $\overline{MP} = \overline{MQ}$ (P na VA, Q na VB), je $\triangle VMP \cong \triangle VMQ$ (Ssu), t. j. $\overline{VP} = \overline{VQ}$, $\overline{PA} = \overline{PQ}$, $\overline{AM} = \overline{BM}$ (buď podle sus, vzniknou-li $\triangle APM$, $\triangle BQM$, nebo zřejmě, je-li $\overline{PA} = \overline{QB} = 0$). Body V, M náležejí tedy rovině souměrnosti σ úsečky AB, která je kolmá k rovině AVB a obsahuje osu úhlu AVB. Obrácením postupu vyplývá, že každý bod roviny σ má stejné vzdálenosti od přímek VA, VB. — **86.** Zvolme $\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC}$ (viz cv. 73, 85). — **87.** Má-li rovina souměrnosti obsahovat hranu klínu, musí být obě jeho stěny souměrně sdružené podle této roviny; protněte klín rovinou kolmou k jeho hraně a užijte výsledku cvičení 85. — **88.** Stačí dokázat pro dva klíny souměrně sdružené podle roviny ω. Nechť $\sphericalangle AVB$ určuje úhel jednoho klínu; jeho obraz $\sphericalangle A'V'B'$ určuje úhel druhého klínu, neboť polopřímky $V'A'$, $V'B'$ jsou kolmé k hraně druhého klínu. $\triangle AVB \cong \triangle A'V'B'$ (sss). — **89.** a) Její rovina je rovina souměrnosti úsečky AA'. b) Její rovina je rovina souměrnosti úsečky BB', která obsahuje bod A. c) Její rovina je rovina souměrnosti úsečky CC', která obsahuje úsečku AB. — **90.** Označíme ω_1 rovinu souměrnosti úsečky AA'; příslušná rovinová souměrnost převede $\triangle ABC$ v $\triangle A'B_1C_1$, kde $\overline{A'B_1} = \overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{A'C_1} = \overline{AC} = \overline{A'C'}$. Není-li $B_1 \equiv B'$, označíme ω_2 rovinu souměrnosti úsečky B_1B'; ω_2 obsahuje bod A'. Příslušná rovinová souměrnost převede $\triangle A'B_1C_1$ v $\triangle A'B'C_2$, kde $\overline{A'C_2} = \overline{A'C_1} = \overline{A'C'}$, $\overline{B'C_2} = \overline{B_1C_1} = \overline{BC} = \overline{B'C'}$. Není-li $C_2 \equiv C'$, označíme ω_3 rovinu souměrnosti úsečky C_2C'; ω_3 obsahuje body A', B'. Příslušná rovinová souměrnost převede $\triangle A'B'C_2$ v $\triangle A'B'C'$. — **91.** a) Body A, B, C leží vesměs v rovině souměrnosti úsečky DE a tato rovina je jimi jednoznačně určena. b) Existuje shodnost, která převede $\triangle ABC$ v $\triangle A'B'C'$ (viz cv. 90). Tato shodnost převede bod D v jistý bod E. Buď je $E \equiv D'$, nebo je $E \not\equiv D'$; pak podle výsledku a) souměrnost podle roviny $A'B'C'$ převede čtyrstěn $A'B'C'E$ ve čtyrstěn $A'B'C'D'$.

92. Vzhledem ke konstrukci obrazu bodu v posunutí stačí zřejmě dokázat, že pro každý bod X platí: $XX'' \uparrow\uparrow AA''$, $\overline{XX''} = \overline{AA''}$. Leží-li body A, A', A'' v přímce, vyplývá předchozí tvrzení ze vztahů $AA' \uparrow\uparrow XX'$, $A'A'' \uparrow\uparrow X'X''$, $\overline{AA'} = \overline{XX'}$, $\overline{A'A''} = \overline{X'X''}$. Tvoří-li body A, A', A'' trojúhelník, zvolíme předně bod X mimo jeho rovinu; pak jsou zřejmě roviny $AA'A''$, $XX'X''$ rovnoběžné (V...). Ježto je $AX \| A'X' \| A''X''$, je také $AA'' \| XX''$ (V9). $AXX''A''$ je rovnoběžník, a tedy $AA'' \uparrow\uparrow XX''$, $\overline{AA''} = \overline{XX''}$. Za druhé zvolíme bod Y v rovině $AA'A''$; jako předtím dostaneme, že $XYY''X''$ je rovnoběžník, t. j. $YY'' \uparrow\uparrow XX'' \uparrow\uparrow AA''$; $\overline{YY''} = \overline{XX''} = \overline{AA''}$. — **93.** Je-li A bod samodružné přímky (roviny), obsahuje tato přímka (rovina) také bod A', t. j. splyne (je rovnoběžná) s přímkou AA'. — **94.** Těžiště stěny čtyrstěnu se zobrazí do těžiště obrazu této stěny. — **95.** Jednak jsou to posunutí, která reprodukují jednu rovinu (a tedy všecky roviny) naší soustavy; jsou to všecka posunutí rovnoběžná s danými rovinami. Za druhé jsou to posunutí, jejichž směr je kolmý k daným rovinám a jejichž velikost je rovna celému počtu jednotek. Dále jsou to všecka posunutí složená z předcházejících posunutí. — **96.** Samodružné body jsou zřejmě jen body osy. Samodružná přímka je jednak osa o, jednak jsou to přímky různoběžné s o a kolmé k ní; neboť zvolíme-li na samodružné přímce p bod A ležící mimo o a spustíme z něho kolmici k na přímku o, pak obsahuje tato kolmice bod A' (neboť je samodružná). Bod A' však leží také na p; protože je $A' \not\equiv A$, je $k \equiv AA' \equiv p$. Je-li A bod samodružné roviny ϱ, který neleží na o, obsahuje ϱ také bod $A' \not\equiv A$; je-li B bod roviny ϱ, který neleží ani na o ani na AA', obsahuje ϱ také bod $B' \not\equiv B$, t. j. ϱ obsahuje dvě různé rovnoběžky AA', BB', a tudíž i osu o. — **97.** Rovina a její obraz jsou buď rovnoběžné s osou (splývají a obsahují osu), nebo jejich průsečnice protíná osu. — **98.** Podmínka, aby rovina (přímka) a její obraz byly rovnoběžné, je, aby buď byla rovnoběžná s osou nebo kolmá k ose (a protínala ji). — **99.** a) Společná kolmice k obou mimoběžek musí být samodružná; označme A, B její průsečíky s danými mimoběžkami a, b; střed S úsečky AB je vždy samodružný bod. Osa souměrnosti je buď přímka k nebo osa různoběžek, které procházejí bodem S a z nichž každá je rovnoběžná s jednou z přímek a, b (celkem 3 přímky). b) Jedna osa souměrnosti je průsečnice obou daných rovin ϱ, σ. Další osy dostaneme tak, že libovolným bodem průsečnice $\varrho \cdot \sigma$ vedeme rovinu $\tau \perp \varrho \cdot \sigma$ a sestrojíme osy různoběžek $\varrho \cdot \tau$, $\sigma \cdot \tau$. — **100.** a) Spojnice středů protějších stěn, spojnice středů protějších hran, celkem 9 přímek. b) Všecky průměry. — **101.** Samodružný bod je jen střed souměrnosti; samodružné přímky (roviny) jsou všecky přímky (roviny) procházející středem. — **102.** a) Jsou-li $S_1 \not\equiv S_2$ středy obou souměrností, sestrojíme tyto 4 roviny: $\omega_1 \perp S_1S_2$ a prochází bodem S_1; $\omega_2 \perp \omega_3$, obě obsahují přímku S_1S_2; $\omega_4 \perp S_1S_2$ a prochází bodem S_2. První středovou souměrnost lze rozložit v souměrnosti podle rovin ω_1, ω_2, ω_3 (v tomto pořádku), druhou středovou souměrnost lze rozložit v souměrnosti podle rovin ω_3, ω_2, ω_4 (v tomto pořádku). Složením obou středových souměrností vznikne shodnost složená ze souměrností podle rovin ω_1, ω_4. b) Kdyby měl kvádr dva rozdílné středy, reprodukoval by se posunutím, avšak to je nemožné. — **104.** Označme $o_1 \perp o_2$ obě osy; sestrojme roviny $\omega_3 \equiv o_1o_2$ a $\omega_1 \perp \omega_3$ a obsahující přímku o_1, $\omega_2 \perp \omega_3$ a obsahující přímku o_2. První osovou souměrnost lze složit ze souměrnosti podle rovin ω_1, ω_3, druhou ze souměrností podle rovin ω_3, ω_2. Složením obou osových souměrností vznikne shodnost složená ze souměrností podle rovin ω_1, ω_2. Příklad: pravidelný hranol šestiboký. — **105.** Označme ω_1, ω_2 roviny obou souměrností; souměrnost se středem S lze rozložit ve tři souměrnosti podle rovin ω_1, ω_2 a jisté roviny $\omega_3 \perp \omega_1$, $\omega_3 \perp \omega_2$. Příklad: pravidelný osmistěn.

11. Hranolová plocha, hranolový prostor, hranol.

106. a) Roviny souměrnosti jsou roviny kolmé k hranám plochy, dále rovnoběžné s hranami a buď půlící protější strany čtverce nebo obsahující jeho úhlopříčky. b) Osy souměrnosti jsou jednak přímky, jež vzniknou rovnoběžným posunutím ve směru hran plochy z úhlopříček čtverce a z os jeho protějších stran, jednak rovnoběžka o s hranami plochy, vedená středem čtverce. c) Středy jsou všecky body přímky o. d) Všecka posunutí ve směru přímky o. — **107.** Vnitřní úhly hranolové plochy jsou rovny vnitřním úhlům mnohoúhelníka, v němž protne plochu rovina kolmá k jejím hranám. — **109.** b) $\sin\varphi = \frac{2}{3}$; c) $\mathrm{tg}\,\psi = \frac{4}{3}$; d) $d = \frac{h}{2}\sqrt{5}$, kde h je velikost hrany krychle. — **110.** Jsou-li navzájem kolmé úhlopříčky, jejichž rovina obsahuje hranu délky c, platí $c^2 = a^2 + b^2$, kde a, b jsou zbývající dva rozměry kvádru. Jsou tedy kolmé právě dvě dvojice úhlopříček. — **111.** ACC_1A_1, BDD_1B_1 jsou dva lichoběžníky se společnou střední příčkou. Leží-li na př. bod C_1 v opačném poloprostoru než A_1, vezmeme místo součtu $\overline{AA_1} + \overline{CC_1}$ rozdíl $\overline{AA_1} - \overline{CC_1}$ nebo rozdíl $\overline{CC_1} - \overline{AA_1}$. — **112.** $x\sqrt{14}$; $\sin\varphi_1 = \sqrt{\frac{5}{14}}$, $\sin\varphi_2 = \sqrt{\frac{5}{7}}$, $\sin\varphi_3 = \sqrt{\frac{13}{14}}$. — **113.** Kvádr, jehož rozměry jsou navzájem různé, má 3 roviny souměrnosti (obsahující středy rovnoběžných hran), 3 osy souměrnosti (spojující středy rovnoběžných stěn) a jediný střed souměrnosti (cv. 102). — **114.** Jedna rovina souměrnosti obsahuje středy všech pobočných hran, další obsahují středy obou podstav a některou z n os souměrnosti jedné jeho podstavy. Je-li n liché, nemá hranol ani střed souměrnosti ani osu souměrnosti. Je-li n sudé, je střed souměrnosti S střed úsečky omezené středy obou podstav; jedna osa souměrnosti je spojnice těchto středů podstav, další osy procházejí bodem S a jsou rovnoběžné s osami souměrnosti podstavy. — **115.** Úhlopříček je n (n—3). Ježto hranol je konvexní útvar, náleží vnitřní bod L tělesové úhlopříčky AK' hranolu. Stačí dokázat, že L není bodem povrchu. Kdyby bod L náležel povrchu, t. j. některé stěně, ležely by body A, K' v různých poloprostorech vyťatých rovinou této stěny. — **116.** Velikosti jsou $\sqrt{4a^2 + v^2}$, $\sqrt{3a^2 + v^2}$. — **117.** a) Stěnu lze převést v protější posunutím. b) Hranolovou plochu protneme rovinou kolmou k jejím hranám; klín lze převést v protější souměrností podle středu. — **118.** b) Je-li $ABCD$ $A'B'C'D'$ rovnoběžnostěn, je $ACC'A'$ rovnoběžník, podobně $ABC'D'$; t. j. úhlopříčky AC', $A'C$, BD' a ovšem i $B'D$ procházejí týmž bodem, který je všecky půlí. — **119.** a) Tyto roviny protnou rovinu rovnoběžníka $ACC'A'$ v přímkách $A'P$, $P'C$, kde P, P' jsou středy stěn $ABCD$ a $A'B'C'D'$. $A'P$ a $P'C$ protnou úsečku AC' v bodech X, Y; $A'P$ je střední příčka $\triangle ACY$, $P'C$ je střední příčka $\triangle A'C'X$, proto $\overline{AX} = \overline{XY}$, $\overline{XY} = \overline{YC'}$. b) $A'P$ je těžnice $\triangle A'BD$ a bod X leží ve dvou třetinách úsečky $A'P$ (viz a). c) Platí $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AA'}$ (hrana krychle); $\overline{C'B} = \overline{C'D} = \overline{C'A'}$ (stěnová úhlopříčka); proto $AC' \perp A'BD$. — **120.** Budiž $ABCD$ kosočtverec; spustíme v něm výšky z vrcholků B, D; v jejich průsečíku P vztyčíme kolmici k rovině ABC a na ní sestrojíme bod A' tak, aby $\overline{AA'} = \overline{AB}$. V poloprostoru $(ABC)A'$ sestrojíme body B', C', D' tak, aby $\overline{BB'} \,\#\, \overline{CC'} \,\#\, \overline{DD'} \,\#\, \overline{AA'}$. Vznikne dalších 5 kosočtverců, které se shodují s daným ve straně a výšce.

12. Jehlanová plocha, jehlanový prostor; jehlan.

121. Polopřímky VM, VN (V hlavní vrchol) protnou podstavu ve vnitřních bodech M_1, N_1. Je-li $M_1 \neq N_1$, protne rovina VMN jehlan v trojúhelníku, pro nějž jsou M, N vnitřní body. Přímka, která obsahuje vnitřní bod trojúhelníka, obsahuje právě dva body jeho obvodu. — **124.** a) Stěny i úhly pravidelné jehlanové plochy jsou shodné. b) Na hranách části přilehlé k řídicímu mnohoúhelníku si zvolme body A_1, A_2, ..., A_n stejně vzdálené od vrcholu V. Roviny souměrnosti jsou roviny určené vrcholem V a osami souměrnosti pravidelného n-úhelníka $A_1A_2 \dots A_n$; je-li n sudé, je rovinou souměrnosti také vrcholová rovina kolmá k přímce VS (S střed n-úhelníka $A_1A_2 \dots A_n$). Osy souměrnosti jsou vrcholové přímky kolmé k osám souměrnosti n-úhelníka $A_1A_2 \dots A_n$ (celkem n přímek); je-li n sudé, je osou souměrnosti také přímka VS. Jediný střed souměrnosti je vrchol V. — **125.** Lze jej vytvořit jako průnik poloprostorů. — **126.** Označme V vrchol původního jehlanu, AB, $A'B'$ dvě k sobě příslušné strany komolého jehlanu, P, P' paty kolmic spuštěných z bodu V na roviny obou podstav. Z podobnosti trojúhelníků ABV, $A'B'V$ a APV, $A'P'V$ vyplývá: $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AV} : \overline{A'V} = \overline{PV} : \overline{P'V}$. — **127.** a) 19, b) $\sqrt{681}$, c) $11\frac{1}{3}$, $28\frac{1}{3}$. — **128.** a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{3}{4}$; $\frac{15}{7}$ a $\frac{20}{7}$. — **130.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. — **131.** $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$. — **132.** Jsou-li AC, BD obě mimoběžné hrany a protne-li ϱ hranu AB v bodě P (mezi A, B), protne hranu BC v bodě Q a je $PQ \parallel AC$. Podobně protne ϱ hranu CD v bodě R a je $QR \parallel BD$, hranu AD v bodě T, a je $RT \parallel AC$ a ovšem též $TP \parallel BD$. Z podobnosti trojúhelníků BPQ, BAC a APT, ABD vyplývá (je-li $x = \overline{PQ}$, $y = \overline{PT}$, $a = \overline{AC}$, $b = BD$) $x : a = \overline{BP} : \overline{BA}$, $y : b = \overline{AP} : \overline{AB}$; sečtením $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Maximum nastane pro $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$. — **133.** Roviny souměrnosti úseček AB, BC, CA

se protnou v přímce k kolmé k rovině ABC; rovina souměrnosti úsečky AD přímku k protíná. — **134.** a) Označme po řadě X, Y, Z, U středy hran AB, BC, CD, DA. Pak je $XY \| AC$ (střední příčka v $\triangle ABC$), $YZ \| BD$, $ZU \| AC$, $UX \| BD$. b) Označme V, W středy hran AC, BD. Pak podle a) se každé dvě z úseček XZ, YU, VW navzájem půlí; společný průsečík je bod T. c) V $\triangle DXC$ je bod T středem těžnice XZ. Označme $T_1 \equiv DT \cdot XC$, Z_1 průsečík rovnoběžky s DT_1 vedené bodem Z se stranou XC. Pak je $\overline{XT_1} = \overline{T_1Z_1}$ (střední příčka v $\triangle XZ_1Z$), $\overline{T_1Z_1} = \overline{Z_1C}$ (střední příčka v $\triangle DT_1C$); ježto CX je těžnicí $\triangle ABC$, je bod T_1 jeho těžiště. Dále je podle předchozího $\overline{DT_1} = 2\overline{ZZ_1}$; $\overline{ZZ_1} = 2\overline{TT_1}$. d) Viz c). — **135.** Roviny souměrnosti jsou roviny souměrnosti vždy jedné hrany (celkem 6), které obsahují hranu protější a tedy i těžiště.

13. Válcová a kuželová plocha. Kruhový válec a kužel.

136. Rotační válcová plocha: roviny souměrnosti jsou všecky roviny kolmé k ose a obsahující osu; osa souměrnosti je osa plochy a všecky přímky, které ji kolmo protínají; střed souměrnosti je každý bod osy. Rotační kuželová plocha: roviny souměrnosti jsou všecky roviny obsahující osu a rovina vrcholová kolmá k ose; osa souměrnosti je osa plochy a všecky vrcholové přímky k ní kolmé; střed souměrnosti je jen vrchol. Rotační válec: roviny souměrnosti jsou všecky roviny obsahující středy S_1, S_2 obou podstav a rovina souměrnosti úsečky S_1S_2; osa souměrnosti je přímka S_1S_2 a všecky kolmice, které ji protínají a jdou středem úsečky S_1S_2; střed souměrnosti je střed úsečky S_1S_2. Rotační kužel: roviny souměrnosti jsou všecky roviny obsahující vrchol V a střed podstavy S; osa souměrnosti je jen přímka SV; střed souměrnosti není. — **137.** Všecka posunutí ve směru přímek plochy. — **138.** Každá přímka válcové plochy je v takové souměrnosti samodružná. — **139.** Řídicí kružnice se reprodukuje příslušnou rovinovou souměrností; také směr přímek (vrchol kuželové plochy) se reprodukuje. — **140.** Průsečík přímky q s rovinou řídicí kružnice leží buď na této kružnici, nebo uvnitř, nebo vně. — **141.** Viz cv. 140. — **142.** a) b) Vrcholová rovina obsahující body M, N protne rovinu řídicí kružnice v sečně této kružnice. — **144.** Je-li přímka vrcholová, je tvrzení správné; není-li vrcholová, pak vrcholová rovina položená touto přímkou obsahuje tři různé přímky plochy, a to je nemožné. — **145.** a) $r\sqrt{\frac{2}{3}}$, b) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$. — **146.** a) Označme A, B průsečíky roviny ϱ s obvodem podstavy; body A, B jsou souměrně sdruženy podle roviny ω (podstava i rovina ϱ se reprodukují souměrností podle roviny ω), t. j. $AB \perp \omega$. Přímka AB je tedy kolmá ke směru stran válce. b) Roviny rovnoběžné s ϱ. c) Při označení jako v a) je $\triangle VAB$ (V vrchol kužele) souměrný podle roviny ω a tedy rovnoramenný ($\overline{VA} = \overline{VB}$). d) Roviny vrcholové, které protínají podstavu v tětivách rovnoběžných s AB. — **147.** a) Body A, B, leží na přímce SV_1, tedy v hlavní vrcholové rovině VSV_1. b) Ježto $\overline{V_1B} < \overline{V_1X}$, je $\overline{VB} < \overline{VX}$. — **148.** $\sqrt{541}$, $\sqrt{1341}$. —

149. a) $v_1 = \frac{vr_1}{r_1 - r_2}$, $v_2 = \frac{vr_2}{r_1 - r_2}$. b) Vrchol O je průsečík úhlopříček lichoběžníka, který je osovým řezem komolého kužele; $u_1 = \frac{vr_1}{r_1 + r_2}$, $u_2 = \frac{vr_2}{r_1 + r_2}$. c) $\varrho = \frac{r_1}{v_1}|v_1 - x|$, $\varrho' = \frac{r_1}{u_1}|u_1 - x|$.

14. Kulová plocha a koule.

152. Rovina ABC protne kulovou plochu v kružnici, která obsahuje body A, B, C. — **153.** Narýsujeme trojúhelník, v němž protne čtyrstěn rovina souměrnosti hrany AB. Ta protne kulovou plochu v kružnici, která je dána třemi body. — **154.** Bodem V a středem S kulové plochy vedeme libovolnou rovinu ϱ; v ní sestrojíme tečny z bodu V k průsečné kružnici; rovinu ϱ otáčíme kolem přímky VS. — **155.** Konstrukce se provede v rovině ACD nebo BCD. — **156.** a) Konstrukce v rovině $BB'C'$; b) c) konstrukce v rovině $BB'D'$; d) konstrukce v rovině ϱ obsahující BB' a kolmé k $C'Q$ (je třeba určit průsek roviny ϱ s krychlí). — **157.** Označíme S střed plochy kulové, τ, ω tečné roviny v bodech T, U. Platí $ST \perp \tau$, $SU \perp \omega$, t. j. $ST \perp q$, $SU \perp q$, $q \perp STU$, $q \perp TU$. — **158.** Bodem S sestrojíme rovinu $\varrho \perp B'D'$ (t. j. $\varrho \perp BD$). Konstrukce se provede v rovině ϱ. — **159.** Sestrojíme roviny souměrnosti úseček AB, CD a rovinu souměrnosti úsečky omezené středy hran AB, CD. Každé dvě z těchto tří rovin jsou patrně různoběžné, ale jejich průsečnice nejsou rovnoběžné (jinak by byly všecky tři úsečky kolmé k téže přímce a ležely by v téže rovině). Všechny tři roviny souměrnosti se protnou tedy v jediném bodě, a to je střed hledané kulové plochy. — **160.** Jsou to kružnice o poloměrech $r_1 = r\sqrt{\frac{a-r}{a+r}}$, $r_2 = r\sqrt{\frac{a+r}{a-r}}$. — **161.** $\varrho = \frac{r}{r+v}\sqrt{v^2 + 2rv}$. — **162.** Rovina ϱ obsahující přímku S_1S_2 protne obě kulové plochy v hlavních kružnicích, které se protínají ve dvou bodech. Při otáčení roviny ϱ kolem přímky S_1S_2 vyplní tato dvojice bodů kružnici, která leží v rovině kolmé k přímce S_1S_2. Podmínka, aby tato kružnice byla hlavní na kulové ploše (S_1, r_1), je $\overline{S_1S_2}^2 = r_2^2 - r_1^2$. — **163.** a **164.** Jako ve cvič. 162.

II. Obsah mnohoúhelníka. Obvod a obsah kruhu.

1. Základní vlastnosti obsahu.

166. a) Strana je přeponou pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny jsou m, n. b) Strana je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je m a odvěsna n. — **167.** a) 3 : 4. — **168.** hk. — **169.** a) mn-krát; b) zvětší se o $\left(2p + \frac{p^2}{100}\right)\%$; c) zmenší se o $\left(2p - \frac{p^2}{100}\right)\%$; d) zmenší se o $\frac{p^2}{100}\%$. — **170.** a) $P' - P = a\varepsilon' + b\varepsilon + \varepsilon\varepsilon'$; b) $P' - P = \varepsilon(a+b) + \varepsilon^2$; c) ε^2 lze v tomto případě zanedbati. — **171.** a) $P_1 = 2{,}439\ldots$, $P_2 = 2{,}471\ldots$; c) $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Obsah mnohoúhelníka.

172. a) Dva sousední z těchto trojúhelníků mají rovné základny (polovina úhlopříčky) a společnou výšku. b), c) Jako v a). d) Doplníme $\triangle ABC$ na rovnoběžník $ADBC$ a sestrojíme těžiště U trojúhelníka ABD. Pak platí $\triangle ABT = \triangle ATU$ (mají společnou základnu AT a rovné výšky); $\triangle BCT \cong \cong \triangle ADU$. Každý z trojúhelníků ACT, ATU, AUD je třetina trojúhelníka ACD, neboť $\overline{CT} = \overline{TU} = \overline{UD}$ (jsou to dvě třetiny těžnice). d) $\triangle ABT$ rozdělí těžnice ve dva rovnoploché trojúhelníky (viz a). — **173.** a) Nechť je $\overline{AB} < \overline{AB'}$; pak $\triangle ABC = \triangle ABC' + \triangle BCC'$; $\triangle AB'C' = \triangle ABC' + + \triangle BB'C'$; $\triangle BCC' = \triangle BB'C'$, neboť mají společnou stranu BC' a rovné výšky. b) Stačí dokázati pro trojúhelníky ABD a $AB'D'$, které mají poloviční obsahy vzhledem k oběma rovnoběžníkům. — **174.** Vzroste a) m-krát, b) n-krát, c) $m \cdot n$-krát. — **175.** $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. — **176.** $\frac{8}{49}av$. — **177.** a) $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, b) $\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$. — **178.** (1) $\frac{ab}{2}\sin\gamma$, (2) $\frac{ab}{2}$, (3) $\frac{ab}{2}\sin\gamma'$. — **179.** a) $\frac{1}{2}\,\overline{AC}\cdot\overline{BD}$. b) $s\cdot\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}$. — **180.** Od čtverce se uberou 4 pravoúhlé trojúhelníky o obsahu $\frac{a^2}{20}$ a 4 pravoúhlé lichoběžníky o obsahu $\frac{3a^2}{20}$. — **181.** Je-li P průsečík úseček AC, BD, je poměr obsahů $\triangle ABP$, $\triangle CBP$ roven $\overline{AP} : \overline{BP} = 25 : 7$. Obsah je $96 \cdot \frac{25}{7} = \frac{2400}{7}$. — **182.** $a^2(3 + \sqrt{3})$. — **183.** $2(a^2 + b^2) + \frac{3}{2}ab$. — **184.** $P_1 = = \frac{1}{2}\frac{a^2v}{a-c}$, $P_2 = \frac{1}{2}\frac{c^2v}{a-c}$; $P_1 - P_2 = \frac{1}{2}v(a + c)$. — **185.** Budiž N střed ramene BC. Trojúhelník BCM se skládá ze dvou trojúhelníků BMN, CMN, které mají společnou základnu MN a rovné výšky; obsah každého z nich je zřejmě čtvrtina obsahu lichoběžníka. — **186.** a) Viz cv. 185 ($\triangle BCM$). b) Obsah P budiž určen obdélníkem, jehož jedna strana je AB; druhý rozměr je pak vzdálenost d ramene MN od středu S úsečky AB. Přitom je $\overline{MN} = = \overline{AB}$. Sestrojíme tedy kružnici k se středem S a poloměrem d; tětivu AB otočíme kolem středu dané kružnice tak, aby se dotýkala kružnice k. — **187.** a) $\triangle AOD = \triangle ABD - \triangle ABO = \triangle ABC - \triangle ABO = \triangle BCO$. b) $\triangle ABO \sim \sim \triangle CDO$, t. j. $a : c = p : q$; pro výšky v_1, v_2 těchto trojúhelníků platí také $v_1 : v_2 = p : q$. Obsah P daného lichoběžníka je $\frac{a+c}{2}\cdot(v_1 + v_2) = = \frac{1}{2}\left(a + \frac{aq}{p}\right)\cdot\left(v_1 + \frac{v_1q}{p}\right) = \frac{av_1}{2}\left(1 + \frac{q}{p}\right)^2 = p^2\left(1 + \frac{q}{p}\right)^2 = (p + q)^2$. $\triangle AOD + \triangle BOC = (p + q)^2 - p^2 - q^2 = 2pq$; podle a) je $\triangle AOD = = \triangle BOC = pq$. — **188.** 8 cm. — **189.** 16 dm. — **190.** a) $s_n = nr\cdot\sin\frac{\pi}{n}$, $s_n' = nr\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

b)

n	6	12	24	48	96
s_n	3,0000	3,1058	3,1326	3,1394	3,1411
s_n'	3,4641	3,2154	3,1596	3,1462	3,1426

191. Označíme B_2, B_3, B_4, B_6, B_7, paty kolmic spuštěných z bodů A_2, A_3, A_4, A_6, A_7 na osu úseček. Obsah P osmiúhelníka je $P = AB_2A_2 + A_2B_2B_3A_3 + A_3B_3B_4A_4 + A_4B_4A_5 — A_5B_6A_6 — A_6B_6B_7A_7 — A_7B_7A_8 = 11,7$.

3. Obsah jiných obrazců.

192. $V' \doteq 64,22$, $V'' \doteq 64,34$, $V^* = 64,26$. — **193.** a) $P' = \frac{a}{n}\cdot\frac{v}{n} + \frac{2a}{n}\cdot\frac{v}{n} + \ldots + \frac{(n-1)\cdot a}{n}\cdot\frac{v}{n} = \frac{av}{n^2}(1+2+\ldots+n-1) = \frac{av}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \frac{av}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. $P'' = \frac{a}{n}\cdot\frac{v}{n} + \frac{2a}{n}\cdot\frac{v}{n} + \ldots + \frac{na}{n}\cdot\frac{v}{n} = \frac{av}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{av}{n^2}\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2} = \frac{av}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$. $P''-P' = \frac{av}{n}$, a toto číslo lze učinit libovolně malé, neboť čitatel je konstatní a jmenovatel může libovolně vzrůstat. Ježto $P = \frac{av}{2}$, je $P' < P < P''$. b) $n > av\cdot 10^6$. — **194.** a) $V' = 2(1+2+\ldots+10) = 110$, $V'' = 2(2+4+\ldots+11) = 130$, $V^* = \frac{350}{3} = 116\frac{2}{3}$; správná hodnota je $V = 120$; je tedy $V - V^* = \frac{10}{3}$. b) $V' = 2,0199$, $V'' = 2,9290$, $V^* = 2,3229$; správná hodnota je $V \doteq 2,3026$.

4. Obsah a podobnost.

195. 4 : 1. — **196.** Poměr obsahů čtverců o stranách a, $10a$ je 1 : 100. — **197.** 25 : 4. — **198.** Délky se zvětší v poměru $\sqrt{864:294} = 12:7$, t. j. $a' = 51\frac{3}{7}$ *dm*, $v' = 33,6$ dm ($v = 19,6$ dm). —**199.** a) Kružnice k_2 je opsaná n-úhelníku $A_2B_2\ldots N_2$. b) Obvody jsou v poměru $r_2 : r_1$, obsahy v poměru $r_2^2 : r_1^2$. — **200.** a) $x = \frac{e}{\sqrt{2}}$. b) Označme $ABCD$ daný obdélník ($\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$), a_1, b_1, c_1, d_1 osy vnějších úhlů, a_2, b_2, c_2, d_2 osy vnitřních úhlů. Dále označme X průsečík $a_2\cdot d_2$, Y průsečík $a_1\cdot d_1$. Body X, Y leží patrně na ose úsečky AD a ta obsahuje střed S obdélníka $ABCD$. $AXDY$ je čtverec (je to pravoúhlý rovnoběžník, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé a mají délku b). Přímky a_1, b_1, c_1, d_1 a přímky a_2, b_2, c_2, d_2 omezují dva pravoúhlé rovnoběžníky souměrné podle osy XY, t. j. rovnostranné; jsou to tedy čtverce se společným středem S a rovnoběžnými stranami, a tudíž stejnolehlé. Koeficient stejnolehlosti je $\overline{SY} : \overline{SX} = \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) : \left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right) = \frac{a \mp b}{a-b}$. c), d) Úhlopříčka menšího čtverce je $a-b$, úhlopříčka většího čtverce je $a+b$. Je tedy $x = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$, $x' = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $P = \frac{1}{2}(a-b)^2$, $P' = \frac{1}{2}(a+b)^2$, $P : P' = (a-b)^2 : (a+b)^2$. — **201.** a) Geom. místo bodů O je rovnoběžka s přímkami p, q, vedená ve vzdálenosti 30 cm od přímky q v polorovině qp. Geom. místo bodů S je rovnoběžka s přímkami p, q, vedená ve vzdálenosti 6 cm od přímky q v polorovině qp. b) $SAB : SCD = 4 : 9$, $OAB : OCD = 4 : 9$. — **202.** a) $v = 12$ cm; b) Ježto $ABD = 75$ cm^2 a $k = \frac{v}{a} = \frac{24}{25}$ ($a = \frac{25}{2}$ cm), je $BMN = (\frac{24}{25})^2 \cdot 75 = 69{,}12$ cm^2. — **203.** 3 : 5 : 7. — **204.** a) $\triangle AA_0B_0 \cong \triangle BB_0C_0 \cong \ldots \cong \triangle FF_0A_0$ (sus), t. j. šestiúhelník $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ má shodné všecky strany a všecky úhly. b) Strana b nového šestiúhelníka je $b = \sqrt{a^2 + x^2 + ax}$, kde a značí stranu původního. Je-li $b^2 : a^2 = 9 : 4$, je $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{6} - 1)$. — **205.** a) $\overline{AB'} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{2}$. b) $\overline{AB'} : \overline{AB} = \sqrt{q} : \sqrt{q+1}$.

5. Obsah kruhu.

206. a) $x = r\sqrt{2}$; b) $x = \frac{r}{\sqrt{q}}$. — **207.** 9π. — **208.** — $\triangle ABS = 1$ cm^2. b) Menší úseč příslušná k tětivě AB má obsah $(\frac{5}{3}\pi - 1)$ cm^2. — **209.** a) $\varrho = \frac{a+b-c}{2}$. b) Označíme c_1, c_2 úseky přilehlé ke stranám a, b, v výšku, ϱ_1, ϱ_2 příslušné poloměry vepsaných kružnic. Poměr obsahů vepsaných kruhů je $\varrho_1^2 : \varrho_2^2 = \frac{1}{4}(c_1 + v - a)^2 : \frac{1}{4}(c_2 + v - b)^2 = \left(\frac{a^2}{c} + v - a\right)^2 : \left(\frac{b^2}{c} + v - b\right)^2 = (a^2 + cv - ac)^2 : (b^2 + cv - bc)^2 = (a^2 + ab - ac)^2 : (b^2 + ab - bc)^2 = a^2 : b^2$, což je poměr čtverců přepon trojúhelníků BCD, ACD, a tudíž i jejich obsahů — **210.** Poloměr hledaného kruhu je odvěsna pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna je r a přepona R. — **211.** a) O $\pi\varepsilon(2r + \varepsilon)$. b) O $\pi\varepsilon(2r - \varepsilon)$. c) $4\pi r\varepsilon$. — **212.** a) $x = \sqrt{\frac{r^2 + R^2}{2}}$. b) x je stranou čtverce, jehož úhlopříčka je přepona pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami r, R.

6. Délka oblouku kružnice.

213. a) $o = 2\sqrt{\pi P}$; b) $P = \frac{o^2}{4\pi}$. — **214.** Obsah vzroste k^2-krát. — **215.** $P_1 : P_2 = o_1^2 : o_2^2$. — **216.** $r_m : r_n = n : m$. — **217.** Za předpokladu, že $m \neq 0$, $n \neq 1$, je $r_1 = \frac{mn}{2\pi(n-1)}$, $r_2 = \frac{m}{2\pi(n-1)}$; $r_1 = \frac{25}{2\pi}$, $r_2 = \frac{5}{2\pi}$. — **218.** $\alpha = 180^0$ — **219.** $o = \frac{5\pi}{\pi - 1}$. — **220.** $x = \frac{m}{2\pi}$. — **221.** α) π; $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{1}{4}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{1}{3}\pi$; $\frac{1}{6}\pi$; $\frac{5}{4}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$. β) 0,4640; 2,6151; 5,4585. — **222.** a) 360^0; 180^0; 90^0; 270^0; 240^0; 30^0; 144^0. b) 43^0; $57^0 18'$; 135^0; 172^0. — **223.** Příslušný (dutý) středový úhel je buď 165^0 nebo $17^0 40'$; příslušná tětiva AC je buď 9,91 nebo 1,54 cm. — **224.** $a = 2$, nebot $a = 2\sqrt{r^2 - \varrho^2}$. $r = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$, $\varrho = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$. — **225.** $a = \dfrac{\pi\alpha^0}{180}$, $\beta = \dfrac{\pi\beta^0}{180}$, $a + \beta = \dfrac{\pi}{180}(\alpha^0 + \beta^0) = \dfrac{\pi\gamma^0}{180}$; $k \cdot a = k \cdot \dfrac{\pi\alpha^0}{180} = \dfrac{\pi}{180}(k\alpha^0)$. — **226.** $P = \dfrac{\pi r\alpha^0}{360} = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi a}{360} = \frac{1}{2}ar$. — **227.** $P = \frac{1}{2}ar = \frac{1}{2}a'r'$; je to nepřímá úměrnost. — **228.** $r = 3{,}46$ m, $a = 3{,}84$ m, $P = 6{,}64$ m^2. — **229.** $r = 1{,}2$ m, $a = 2{,}9$ m. — **230.** $r = 2$ m, $\alpha^0 = 344^0$. — **231.** a) $A = \dfrac{\pi R\alpha^0}{180}$, $a = \dfrac{\pi r\alpha^0}{180}$; dělením $A : a = R : r$. b) $V = \frac{1}{2}a\,(R^2 - r^2) = \dfrac{\pi\alpha^0}{360}\,(R^2 - r^2)$. c) $V = \frac{1}{2}a(R - r)(R + r) = (R - r) \cdot \dfrac{A + a}{2}$. — **232.** a) $r^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$. b) $\dfrac{a^2}{4}(3\pi - \sqrt{3})$. c) $a^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$. d) $P = 2P_1 - P_2$, kde P_1 je obsah výseče ASP, P_2 obsah $\triangle CDS$; $\sphericalangle ASD \doteq 53^0 10'$. Vyjde 18,2 cm^2. e) $a^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$.

III. Objemy a povrchy jednoduchých těles.

1. Základní vlastnosti objemu.

234. a) Zvětšení povrchu není dáno žádným násobkem původní hodnoty nezávislým na rozměrech; objem se zvětší $h \cdot k \cdot l$-krát. b) Objem se zvětší h^3-krát; je-li $h = 10$, zvětší se 1000-krát. — **235.** Objem se zvětší o $\varepsilon\,(ab + bc + ca) + \varepsilon^2\,(a + b + c) + \varepsilon^3$. V numerickém příkladě je $V = 10^5$, $V' = 100\,008{,}00017\ldots$, $V' - V = 8{,}00017\ldots \doteq (ab + bc + ca) \cdot \varepsilon = 8$. — **236.** Povrch se zvětší o $4\,(a + b + c)\,\varepsilon + 6\varepsilon^2$; přibližně o $4\,(a + b + c)\,\varepsilon$. — **237.** $V' \doteq 7{,}65$, $V'' \doteq 7{,}79$, $\varrho = 0{,}14$; $V > V'' - \varrho$, $V < V' + \varrho$. — **238.** a) $S = 2\,(ab + bc + ca)$; b) $S = 6a^2$. — **239.** a) $S = \dfrac{47u^2}{25}$, $V = \dfrac{3u^3\sqrt{2}}{25}$. b) $S = \dfrac{72u^2}{49}$, $V = \dfrac{36u^3}{343}$. — **240.** $V = 810$ cm^3. — **241.** $V = \frac{1}{2}u^3\cos^2\varphi\sin\varphi\sin\beta\ (\doteq 105)$. — **242.** $V = \frac{1}{2}u_3{}^3 \sin\alpha \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta\ (= 58{,}6\ \text{dm}^3)$. — **243.** a) $\frac{3}{4}x$, $\frac{2}{3}x$, $\frac{5}{6}x$ dm; b) $\frac{7}{12}x\sqrt{5}$ dm; c) $\frac{121}{36}x^2$ dm^2, kde $x = 12 \cdot \sqrt[3]{\frac{12}{5}}$. — **244.** $V = \sqrt{P_1P_2P_3}$; $u = \sqrt{\dfrac{P_1{}^2P_2{}^2 + P_2{}^2P_3{}^2 + P_3{}^2P_1{}^2}{P_1P_2P_3}}$; numericky: $V = 864$ cm^3, $u = 17$ cm. — **245.** 6 m, 10 m. — **246.** a) $\cos\alpha = \dfrac{a}{u}$, $\cos\beta = \dfrac{b}{u}$, $\cos\gamma = \dfrac{c}{u}$; b) $a^2 + b^2 + c^2 = u^2$; c) $a = \dfrac{u}{2}$, $b = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$, $c = \dfrac{u}{2}$.

2. Objem hranolu a válce.

247. $a = \sqrt{\dfrac{2S}{6 + \sqrt{3}}}$ $(= 34{,}2$ cm$)$. — **248.** $v = 2\varrho$. — **249.** $V = \frac{1}{2}v^3\operatorname{cotg}^2\varphi$ $\left(= \frac{500}{3}\right)$. — **250.** Označíme-li x velikost pobočné hrany, je $AA'C'C = \frac{3}{2}\,ax$,

$BB'D'D = ax$. — **251.** 2016 dm^2 — **252.** $S' = 3\,ab$, $V = \frac{1}{4}\,a^2 b\sqrt{3}$. — **253,** $V = \frac{a^2 b}{4}\cot\frac{a}{2}$. — **254.** Základny lichoběžníka jsou $a = r\left(1 + \cot\frac{a}{2}\right)$, $b = r\left(1 + \operatorname{tg}\frac{a}{2}\right)$, výška je $2r$. Úhlopříčka je $u = \sqrt{a^2 + 4r^2}$, $V = r\,(a + b)\cdot u$ ($\doteq 3860$) — **255.** $S = \frac{4nV}{9a^2} + 3a^2\sqrt{3}$ ($= 84\sqrt{3}$ dm^2). — **256.** 2000 dm^3. — **257.** $S' = 2\pi rv$; $S = 2\pi r\,(r + v)$. — **258.** $V = \frac{oS}{4\pi}$. — **259.** a) $a : b$; b) $1 : 1$; c) $(a^2 + 2ab) : (2ab + b^2)$. — **260.** a) kl-krát; b) $k^2 l$-krát. Je-li $k = l$, vzroste plášť k^2-krát, povrch k^2-krát, objem k^3-krát. — **261.** a) $2\pi\,(r + v + \varepsilon)\varepsilon$; b) $2\pi\,(3r + v)\,\varepsilon + 4\pi\,\varepsilon^2$; c) $\pi r\,(2v + r)\,\varepsilon + \pi\,(2r + v)\,\varepsilon^2 + \pi\varepsilon^3$. — **262.** $\sqrt[3]{P^3 : 54\pi}$. — **263.** $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. — **264.** Asi do výše 34 mm. — **265.** a) $V_1 = \frac{\pi r^2 a^0}{180}\cdot v$, b) $V_2 = V_1 - rtv\cos\alpha$, kde $\sin\alpha = \frac{t}{r}$. Numericky $\alpha^0 \doteq 41^0 50'$, $V_1 \doteq 218$ dm^3, $V_2 \doteq 70$ dm^3. — **266.** $r = 2$. — **267.** $r_2 : r_1$. — **268.** $r_1 : r_2$. — **269.** $V = \frac{\pi a^3}{4\sin^3\frac{\pi}{n}}$. — **270.** $V = \frac{d^2 v}{16}\left(\frac{3\pi}{2} - \sqrt{2}\right)$; numericky 2,1 m^3.

4. Objem jehlanu a kužele.

271. $V = \frac{4}{3}v^3\cot\alpha\cot\beta$ ($= 36\sqrt{3}$ dm^3). — **272.** $V = \frac{n}{3}b^3\sin\beta\cos^2\beta\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$ ($= 30{,}5$ dm^3). — **273.** a) $V = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$; b) $V = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$. — **274.** Rovina ϱ dělí hranu CD ve dvě úsečky, jejichž poměr je 3 : 5. — **275.** a) $S = \frac{3a^2}{4}\sqrt{3}$; b) $V = \frac{a^3}{24}\sqrt{3}$. — **276.** Pobočné stěny, jejichž jedna hrana je a, mají stěnovou výšku 15 cm, pobočné stěny, jejichž jedna hrana je b, mají stěnovou výšku 13 cm. $S' = 768$ cm^2. — **277.** $S = \frac{a^2}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{12})$. — **278.** $P = 2v^2\sqrt{3}$, $S = 6v^2$. — **279.** Hrany jsou v poměru 3 : 1, povrchy v poměru 9 : 1. — **280.** $V = \frac{2}{9}$. — **281.** Vykopáno bylo asi 291 m^3 země, k vybetonování je třeba asi 23,6 m^3 betonu. — **282.** $V = \frac{n}{24}(a^3 - a'^3)\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\cot\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$. — **283.** 1716 dm^2. — **284.** Podstavné hrany jsou $a_1 = \sqrt{\frac{M + N\cos\alpha}{2}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{M - N\cos\alpha}{2}}$, pobočná hrana je $\frac{1}{2}(a_1 - a_2)\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2\alpha}$. — **285.** $V = 13680$; $S' = 1920$. — **286.** Výška komolého jehlanu je $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(2b^2 - a^2)}{2b + a}} \doteq 4{,}472$; $V \doteq 55$. — **287.** a) $s^2 = v^2 + r^2$. b) Plášť se rozvine v kruhovou výseč o oblouku $2\pi r$ a poloměru s; středový úhel (v míře obloukové) je tedy $\frac{2\pi r}{s}$ a obsah výseče je $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{s} = \pi rs$. c) $S = \pi r^2 + \pi rs = \pi r\,(r + s)$. — **288.** a) $\alpha = \pi$; b) $\alpha = 1{,}4\,\pi = 4{,}3982\ldots$; $\alpha^0 \doteq 252^0$. — **289.** a) 1 : 2; b) 1 : 2; c) $\sqrt{3} : 6$. — **290.** Poměr povrchů je $b\,(b + c) : a\,(a + c) : \frac{ab(a + b)}{c}$; poměr objemů $b : a : \frac{ab}{c}$.

291.

	r	v	s	α	P'	P	S	V
a)	9,78 cm	28,3 cm	**30 cm**	**71°**	$293\,\pi$ cm^2	$95{,}6\,\pi$ cm^2	$389\,\pi$ cm^2	$902\,\pi$ cm^3
b)	9,33 cm	**20 cm**	22 cm	**65°**	646 cm^2	273 cm^2	919 cm^2	1823 cm^3
c)	**11 cm**	18,3 cm	21,4 cm	**59°**	738 cm^2	380 cm^2	1118 cm^2	2320 cm^3
d)	4,4 cm	**5 cm**	6,6 cm	48°50′	91,2 cm^2	60 cm^2	151,2 cm^2	**100 cm^3**
e)	3	4	5	53°10′	15π	9π	**24π**	**12π**
	$\sqrt{3}$	12	$7\sqrt{3}$	81°50′	21π	3π		

292. $V = \frac{\pi r^3}{3}(\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta)$; numericky $V \doteq 230$ dm^3. — **293.** $y = v\left(1 - \frac{x}{r}\right)$; $V = \pi v x^2\left(1 - \frac{x}{r}\right)$. — **294.** a) $v = 8{,}9$; b) $R = 15{,}5$, $r = 6{,}2$. — **295.** a) ϱ je střední příčka lichoběžníka. b) Označíme-li s_1, s_2 strany celých kuželů, je $s_1 : s_2 = R : r$, t. j. $s_1 : (s_1 - s_2) = R : (R - r)$, čili $s_1 = \frac{sR}{R - r}$, a podobně $s_2 = \frac{sr}{R - r}$. Je tedy $\pi R s_1 - \pi r s_2 = \frac{\pi s}{R - r}(R^2 - r^2) = \pi s\,(R + r)$; dále viz a). — **296.** $S' = \pi(R + r)^2$; $S = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)^2$; $V = \frac{\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)\sqrt{2Rr}$. — **297.** $S' = \pi\frac{p + 1}{p - 1}s^2\cos\alpha$; $V = \frac{\pi s^3}{3} \cdot \frac{p^3 - 1}{(p - 1)^3}\sin\alpha\cos^2\alpha$. — **298.** Označíme $V_1 < V_2 < V_3$ objemy vzniklých komolých kuželů; platí $V_1 = \frac{\pi v}{81}(19\,r^2 + 7rR + R^2)$; $V_2 = \frac{\pi v}{81}(7r^2 + 13rR + 7R^2)$; $V_3 = \frac{\pi v}{81}(r^2 + 7rR + 19R^2)$; numericky $V_1 = 228\,\pi$, $V_2 = 444\,\pi$, $V_3 = 732\,\pi$. — **299.** Poloměr řezu je $\sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$, výška je rozdělena v poměru: $\left(\sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}} - r\right) : \left(R - \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}\right)$ (počínaje od menší podstavy). Numericky: poloměr řezu je 6,60; poměr úseků výšky je asi 13 : 7. — **300.** Objem komolého kužele je

$V = \frac{2}{3}\pi s^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$, objem vybraného kužele $V_1 = \frac{1}{3}\pi s^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$. Zbylá část má objem $V - V_1 = 2\pi s^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$. Numericky: $V - V_1 = 1484 \text{ cm}^3$.

6. Objem a povrch koule a jejích částí.

301. a) k^3-krát; b) k^2-krát. — **302.** a) O $8\pi r\varepsilon + 4\pi\varepsilon^2$; b) o $4\pi r^2\varepsilon + \varepsilon^2(4\pi r + \frac{4}{3}\pi\varepsilon)$. Při zanedbání členů s ε^2 a ε^3 jsou přírůstky $8\pi r\varepsilon$, $4\pi r^2\varepsilon$; numericky $8\pi r\varepsilon \doteq 0{,}503$, $4\pi r^2\varepsilon \doteq 2{,}51$. — **303.** $\sqrt{3} : 6 : 4$. — **304.** $v = 2r$. — **305.** Označíme-li V_1 objem koule, V_2 objem válce, V_3 objem kužele a V_4 objem krychle, je $V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = \frac{4}{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{3}{8} : \frac{8\sqrt{3}}{9\pi}$. — **306.** Je-li d průměr niti, D průměr klubka (oboje v mm), je délka niti (v mm) $x = \frac{2D^3}{3d^2}$; numericky $x \doteq 24\,300$ m. — **307.** a) $6\sqrt[3]{2} : 17$; b) $36\sqrt[3]{4} : 289$. — **308.** Tloušťka stěny je $x = \sqrt[3]{\frac{3(M_1 - M_2)}{4\pi}} - \sqrt[3]{\frac{3(M_1 s - M_1 - M_2 s)}{4\pi s}}$; numericky: $x \doteq 1$ cm. — **309.** Poloměry duté koule jsou $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{\pi t} - \frac{t^2}{3}} + \frac{1}{2}t$, $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{\pi t} - \frac{t^2}{3}} - \frac{1}{2}t$; numericky $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 7$ cm. — **310.** Ježto $r_1^2 = r^2 - (r - v)^2 = 2rv - v^2$, je $U = \frac{\pi v}{6}(3r_1^2 + v^2) = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v)$. — **311.** Výseč se složí přibližně z jehlanů, které mají výšky přibližně rovné r a součet jejich podstav je obsah P kulového vrchlíku Je tedy $\frac{2}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}r \cdot P$. — **312.** Výška menší úseče je $\frac{2}{3}r$; poměr objemů je 7 : 20. — **313.** Asi 3,4 l. — **314.** $V = \frac{4}{3}\pi (r^2 - \varrho^2)^{\frac{3}{2}}$; $S = 4\pi(r + \varrho)\sqrt{r^2 - \varrho^2}$ Numericky: $V = S = 108\pi\sqrt{3}$. — **315.** $V = \frac{\pi}{3}[(r - v_1)^2(2r + v_1) - (r - v_2)^2(2r + v_2)]$; numericky: $V \doteq 70 \text{ dm}^3$. — **316.** $P = 2\pi r v$, kde $v = \frac{mr}{m + r}$; numericky: asi 160 000 km^2.

Rejstřík geometrie.

Obsah.

ARITMETIKA

I. Obecná mocnina a logaritmus

II. Komplexní čísla

III. Goniometrie

GEOMETRIE.

I. Základy stereometrie

MATEMATIKA

Učebnice pro druhou třídu gymnasií.

Zpracovali: František Balada, prof. dr. Eduard Čech, Josef Holubář, dr. Karel Hruška, dr. Marta Chytilová, dr. Vanda Janová, dr. Bedřich Koenig, dr. Emil Mastný, dr. Karel Roessler, dr. Antonín Srb, dr. Josef Šimek, Antonín Tuláček, Rudolf Zelinka.

Odpovědný redaktor: prof. dr. František Vyčichlo.

Technický redaktor: Ing. Antonín Langr.

Obálka: Marie Tůmová.

Korektor: Josef Udržal.

•

Plánovací skupina 301 20-521. Schváleno výnosem MŠVU pod číslem 67.722/50-I/1, jako učební text pro II. tř. gymnasií. Povoleno MIO č. j. 46.662/51/1-III/1 ze dne 2. dubna 1951. ČKM G 355-2. Sazba 1. 12. 1950 - tisk 20. 7. 1951. Vydalo v r. 1951 Státní nakladatelství učebnic - I. vydání, náklad 20.000 (1-20.000) výtisků. Plánovacích archů 13,25, autorských archů 16,91, vydavatelských archů 17,16 - Papír 221-35 - Formát A5 - Písmo garmond 44-10 - Druh tisku: knihtisk - Všeobecná daň 1 % - Vytisklo Naše vojsko, vydavatelství čs. branné moci, Praha II

CENA SEŠ. VÝTISKU Kčs 23,—

B 76

Čkm. G 355-II

Cena Kčs 23,—
301 20-521