Eduard Čech; Karel Komínek; Rudolf Zelinka

Poznámky k učebnicím geometrie pro 1.-4. třídu školy druhého stupně

Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1948, 103 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501377

E. ČECH - K. KOMÍNEK - R. ZELINKA

POZNÁMKY

k učebnicím geometrie

PRO I.—IV. TŘÍDU ŠKOLY DRUHÉHO STUPNĚ

E. ČECH — K. KOMÍNEK — R. ZELINKA

POZNÁMKY K UČEBNICÍM GEOMETRIE

pro 1.—4. třídu školy druhého stupně

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

PŘEDMLUVA

Tyto poznámky se týkají učebnic geometrie pro I. až IV. tř. středních škol, které napsal prof. dr E. Čech.*) Jsou tu citovány též středoškolské učebnice aritmetiky od téhož autora; je užito těchto zkratek:

ČA II, odst. 6 = odkaz na učebnici: *E. Čech*: Aritmetika pro II. tř. středních škol, odstavec šestý.

ČG I, § 7 = odkaz na učebnici: *E. Čech*: Geometrie pro I. tř. středních škol, paragraf sedmý.

Citace se vztahuje na učebnice vydané v letech 1946—48.

POUŽITÁ LITERATURA.

1. *Prof. dr E. Čech*: Poznámky k učebnicím geometrie pro I.—III. tř. středních škol. (Vydala Jednota čs. matematiků v r. 1944.)
2. *Prof. dr E. Čech*: Jak vyučovati geometrii v primě? (Článek v Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 70, 1940, str. D40—58.)
3. *J. Vavřinec*: Rýsování. (Vydala Jednota čs. matematiků a fysiků; 1931.)

V připojených tabulkách „Přehled učebné látky...“ na str. 38—41 je naznačeno, jakým způsobem se má asi postupovat, aby bylo vyhověno novým osnovám.

Pokud jde o rozvržení cvičení příslušných paragrafů, poznamenáváme toto: Některá cvičení potřebují částečného návodu; seznámil-li se žák s určitým nesnadnějším cvičením, dovede zpravidla řešit i řadu dalších. Nebude tedy třeba udávati návod ke všem cvičením označeným za obtížnější; učitel si musí však předem všimnout, s jakými nesnázemi se asi žák při řešení cvičení setká. Totéž platí i o cvičeních pro zdatnější žáky.

*) Jednotlivé paragrafy v textu uvedené jednají právě o souhlasně číslovaných paragrafech Čechových Geometrií.

I. VŠEOBECNÉ ZÁSADY A POZNÁMKY

Úvodní poznámka. 1. Úkolem těchto poznámek je toto: a) Seznámit učitele se způsobem, jakým jsou jednotlivé paragrafy Čechových geometrií pro I. a II. tř. organicky zbudovány, aby čtenáři vynikl nejen cíl paragrafu, ale i logická souvislost látky v učebnicích obsažené. b) Ukázat, jakým způsobem je učebnice zaměřena vzhledem k žáku. c) Vyložit, jakým způsobem lze podle těchto učebnic splnit nové osnovy geometrie v I. a II. tř. střední školy (za tím účelem je připojena zvláštní tabulka, která podává přehled jednotlivých povinných paragrafů a k nim příslušných cvičení).

2. Náplň obou učebnic předpisuje nejen sama geometrie, ale i žák a jeho celková vyspělost.

Proto je učivo v tř. I. jaksi isolovaně roztříštěno v jednotlivé paragrafy, které sice na sebe navazují, ale vlastní látka tu ještě není po stránce věcné uvedena v soustavu. Je to část přípravná, v níž chceme seznámit žáka na základě jeho názoru a jeho vlastní zkušenosti nebo s pomocí geometrických pokusů se základními problémy geometrie.

V učebnici pro II. tř. již vedeme žáka k hledání vzájemné souvislosti jednotlivých geometrických pouček tím, že známé poučky znovu přezkoumáváme a hledáme jejich styčné body, aby si žák ponenáhlu zvykal na deduktivní způsob geometrického myšlení. Žák se má již naučit chápat význam geometrického důkazu na podkladě známých pouček; těžiště vlastní žákovy práce je v užívání těchto pouček při řešení cvičení učebnice.

Tato cvičení jsou trojího druhu: a) Žák má cosi vypočítat. b) Žák má graficky řešit určitou úlohu. c) Žák má dokázat určité tvrzení.

Samozřejmě, že se mohou tyto tři druhy problémů vzájemně prolínat, ale je bezpodmínečně nutné všechny tyto tři složky pěstovat, má-li vyučování geometrie dosíci svého výchovného cíle. Týká se to především případu třetího; autor učebnice je toho mínění, že s výchovou k deduktivnímu způsobu myšlení je třeba začít záhy, neboť se tato schopnost nevyvine s věkem sama, nýbrž ji musíme soustavně pěstovat (viz pozn. k II. tř.).

Každá z uvedených tří skupin cvičení čímsi k tomu přispívá: První uvádí v souvislost aritmetiku s geometrií, druhá geometrii s praktickým životem a žákovou manuální zručností a třetí pak velmi intensivně přispívá k rozvoji žákovy soudnosti, přesnosti myšlení a kritičnosti.

3. **Rýsování.** Úlohy konstruktivního rázu vedou k důležitému požadavku geometrie — k přesnému a hbitému rýsování. Úkolem rýsování v třídě I. a II. je naučit žáka přesně a hbitě rýsovat tužkou na geometrických příkladech.

Rýsování těchto úloh provádíme buď v sešitech většího formátu nebo na půlarších papíru jednotně upravených (záhlaví, podpis a p.). Nezapomeňme, že rýsovat tužkou „na čisto" je obtížnější než dodatečně rys vytáhnout tuší; je proto nutno dívat se na výsledky žákova úsilí shovívavě.

S rýsováním souvisí i úhledný popis obrazců normalisovaným písmem; všechny geometrické obrazce, chceme-li o nich mluvit nebo cosi o nich zapsat, je třeba čitelně a úhledně popsat; k tomu musí učitel žáky soustavně vést.

Základem normalisovaného písma jsou kosodélníky s úhlem 75°, jejichž základna a výška jsou v poměru 2 : 3. Úhel 75° dostaneme snadno s pomocí trojúhelníkových pravítek (30° + 45°).

4. Má-li žák slušně rýsovat, musí mít pomůcky k rýsování v pořádku a musí je umět řádně ovládat. Je úkolem učitelovým, aby žáka se všemi rýsovacími nástroji postupně dobře seznámil, a to nejen s užíváním těchto pomůcek, ale i s jejich ošetřováním (kružítko).

5. **Učebnice.** Má-li učebnice splnit své poslání, musí ji žáci skutečně užívat. Z počátku jim bude dělat potíže stručná knižní mluva geometrie, která se někdy poněkud liší od slovního výkladu učitelova. Proto je třeba, aby učitel naučil žáky v učebnici číst. Jinak by žák neporozuměl textu cvičení. Doporučuje se proto, aby učitel některou partii občas se žáky přečetl; žáci potom reprodukují svými slovy jejich obsah.

Někdy lze žákům uložiti za úkol, aby si určitý kratší odstavec sami přečtli a napsali jeho obsah. Je samozřejmé, že tato práce musí být kontrolována a společnou prací precisována.

Tato námaha má svůj význam; při nejmenším zasvětíme tak žáky do četby odborné literatury.

Učitel sám ovšem nesmí při školních výkladech jen reprodukovat text učebnice. Je třeba, aby podal jasný výklad prostým a živým slovem.

6. **Cvičení.** Cvičení k jednotlivým paragrafům jsou podstatnou částí učebnice; autor v nich vidí těžiště žákovy práce.

Má-li jich být řádně využito, musí se především učitel řádně seznámit s obsahem příslušného paragrafu; pak si musí promyslit, na jaké obtíže žák při řešení cvičení narazí, a podle vyspělosti třídy se rozhodne, zda nebude nutno dát žákům návod k úloze. Mnohdy stačí, když některý žák text cvičení přečte a postup práce vlastními slovy vyloží; tímto způsobem je alespoň z počátku nutno postupovat, neboť žák ještě geometrické výrazy dobře neovládá.

Postup při řešení cvičení je asi tento: a) Žák si cvičení zvolna předčítá a od ruky načrtává a písmeny popisuje prvky, o nichž je v úloze řeč. Pak se rozhodne (zvláště při konstruktivních úlohách) k určitému postupu, který na svém náčrtu v duchu sleduje. Při obtížnější úloze si ještě před konstrukcí podle navrženého postupu zamýšlenou konstrukci jen načrtá, aby se přesvědčil o tom, že navržený postup povede k cíli (k takovému črtání konstrukce je třeba žáky soustavně vést; je to úkol někdy dost obtížný).

b) Po takto provedeném rozboru cvičení, jde-li o úlohu konstruktivní, narýsuje si žák úsečky a úhly, které jsou ve cvičení číselně dány; o tyto číselné hodnoty se už dál neopírá, potřebné početní operace s danými prvky provádí jen graficky.

Potom provede konstrukci, její jednotlivé části zapíše s pomocí geometrických symbolů.

c) Na závěr žák zapíše výsledek a provede „omezení úlohy“: Ptá se totiž, za jakých okolností by se úloha řešit vůbec nedala nebo kdy by mohlo být řešení více. Toto „omezení“ úlohy je někdy dost obtížné, ale alespoň částečnou odpověď lze dáti vždy.

Příkladem tu může být úloha sestrojit trojúhelník, jsou-li dány dvě strany a úhel proti menší z nich ležící jako příprava ke čtvrté větě určenosti (viz ČG II, str. 23). Podle velikosti menší strany dostaneme řešení dvě, jedno nebo žádné. Závisí to na velikosti výšky příslušné k neurčené straně a na jejím vztahu k menší straně.

Při kolektivní práci ve třídě doprovází vždy jeden žák postup řešení úlohy slovním výkladem, aby všichni žáci spolupracovali a výklad žákův kontrolovali.

Občas uložíme žákům, aby vlastními slovy zapsali postup řešení určitého cvičení z učebnice. Kontrolu těchto záznamů provedeme po skončení práce ve společné rozpravě tak, že jeden žák předčítá své záznamy, při čemž provádí příslušný náčrt s popisem na tabuli.

Podobným způsobem lze kontrolovat, do jaké míry žáci provedli samostatně domácí úkol. Jestliže úkol žáci nezvládli, je třeba ve škole provést řádný rozbor.

Také ve cvičeních, v nichž má žák dokázat nějaké tvrzení, si narýsuje přesný obrázek.

7. **Slovníček.** Poněvadž se žák má naučit geometrickému názvosloví, musí jednotlivé geometrické pojmy nejen poznávat, ale také si je osvojit. Aby měl usnadněn přehled o všech takových pojmech, pořídí si zvláštní sešitek, do něhož si zapíše všechny nové názvy a rčení. Ke každému paragrafu je připojeno cvičení (první nebo poslední), v němž jsou tato nová slova uvedena; v textu učebnice jsou nová slova vytištěna tučně.

Do slovníčku si také žák narýsuje schematicky malé obrázky nových obrazců nebo důležitých konstrukcí, jichž se často užívá.

K tomu přistupují výsledné poučky jednotlivých odstavců, které jsou vytištěny v učebnici buď tučně nebo prostrkaně.

V II. tř. přibudou ještě definice, jejichž význam i obsah musí každý žák řádně poznat, má-li s úspěchem porozumět prováděným důkazům; můžeme je zapisovat na př. pod heslem „úmluva“ (viz úvodní pozn. ke II. tř.).

V I. tř. zásadně jakékoli definice nezavádíme.

II. POZNÁMKY PRO I. TŘÍDU

1. Úvod. Učebnice geometrie pro I. tř. je rozdělena ve dvě části, v část přípravnou a soustavnou.

1. Cílem přípravné části (§ 1—6) je seznámit žáka s geometrickými nástroji (zatím ne s úhloměrem). Žák se učí rýsovat tužkou s pomocí pravítka a zacházet s kružítkem (viz ČG I, str. 5 a § 3).

K tomu přistupují další úkoly, které budou plně rozvinuty v části druhé. Autor cvičebnice je formuluje takto (čl. „Jak vyučovati geometrii v primě?“, str. D 41):

a) žáci se mají dobře seznámit s důležitými geometrickými výrazy a rčeními;

b) žáci se mají naučit sestrojit jednoduché geometrické obrazce podle textu učebnice, bez ústního návodu učitele;

c) žáci se mají naučit popsati jednoduchými, ale jednoznačně srozumitelnými slovy konstrukci, kterou provedli;

d) žáci se mají naučit pozorovat sestrojený geometrický obrazec a všímat si (to neznamená umět odůvodnit[1]), že mezi prvky takového obrazce jsou často také jiné vztahy nežli ty, kterých bylo při konstrukci výslovně užito.

2. V části soustavné se seznámí žák s některými vlastnostmi základních rovinných obrazců, při čemž se opírá o svůj vlastní názor a geometrický pokus; na tyto dva prvky je třeba zvlášť upozornit. Proto zavádí autor do vyučování vystřihování geometrických útvarů z papírů; na těchto pokusech si nejlépe žák ujasní nejdůležitější geometrické pojmy (shodnost obrazců, pojem kolmých přímek atd.).

Na některé důležité momenty upozorníme v poznámkách k jednotlivým paragrafům.

První hodinu geometrie seznámíme žáky s jednoduchými geometrickými útvary.

Při rozhovoru užijeme jednak žákových znalostí z denního života, jednak jednoduchých geometrických modelů (kvádr, krychle, rotační válec a kužel, koule, jehlan). Provedeme srovnání předmětů žákovi běžných s našimi modely. Žák při vzájemném srovnávání těchto těles zjistí, že povrch některých je rovný, jiných křivý.

Nás budou zajímat tělesa s rovnými stěnami a hlavně obrazce, které v těchto stěnách žák vidí. Předmět položíme rovnou stěnou do nákresny (tabule, papír) a stěnu prostě obkreslíme; tak dostaneme obdélník, čtverec, kruh a trojúhelník.

Na učitelovu výzvu si žáci tyto obrazce načrtají do sešitů a některý je nakreslí též na tabuli. Žáci jistě nebudou črtat bez „přetažení“. Vyzveme je, aby některou stranu prodloužili; zeptáme se, jak se taková prodloužená čára nazývá. Asi takto lze dojít k pojmu přímky. Že všechny čáry nejsou přímé, vidí žáci na obkreslené podstavě válce; tak dojdeme k pojmům čára křivá a přímá. Potom se zeptáme žáků, jak si počínáme, chceme-li získat pěkný obrázek přímky. Tím se dostaneme k pojmu pravítka.

Vysvětlíme dále, že nebudeme užívat obyčejných pravítek (lineálů), nýbrž pravítek trojúhelníkových, která budou pro naše účely vhodnější.

Poté vysvětlíme, že předním úkolem geometrie bude zkoumat čáry a obrazce, které se na různých předmětech vyskytují; především budeme zkoumat některé čáry.

V příští hodině už navážeme na naši učebnici.

Poznámka. Naše učebnice začíná studiem útvarů rovinných, a to proto, že si je žák může sám narýsovat. Už touto námahou se s nimi mnohem více sblíží než s útvary prostorovými, které jsou k studiu mnohem obtížnější; studium útvarů prostorových je totiž omezeno na slovní popis modelů, k čemuž nemají žáci dostatečnou zásobu odborných výrazů. Později, až žák bude znát řadu vlastností rovinných útvarů a jejich vzájemných vztahů a až se seznámí s geometrickým slovníkem, přejdeme ke studiu prostorových útvarů, především ke kvádru. Geometrické útvary, které se na tomto tělese vyskytují, mají rovněž řadu vlastností rovinného charakteru.

2. Výklady. Další paragrafy se týkají Čechovy Geometrie pro I. třídu:

§ 1. Pojem přímky vysvitne žákovi jasněji, umí-li sám přímku narýsovat. Přímky rýsujeme ve všech polohách; fysikální pojmy — svislý, šikmý a vodorovný — ponecháme do § 8. Popis přímek (malými písmeny normalisované abecedy) umísťujeme při okraji nákresny; jindy přímku pojmenujeme s pomocí dvou bodů na ní ležících. Přímky rýsujeme dostatečně dlouhé, abychom se vyhnuli zbytečnému prodlužování, jež vede k nepřesnosti. Ovšem i prodlužování přímek je nutno nacvičit. Body na přímce vyznačujeme krátkou úsečkou k dané přímce kolmou. Isolovaně ležící body vyznačíme křížkem. Popisujeme je velkou abecedou; písmena střídáme, aby se žák naučil kreslit všechna písmena.

K pojmu „bod“ také dospějeme, narýsujeme-li dvě různoběžky.

Nejdůležitější částí paragrafu je poučka: Přímka je dvěma body určena.

Takto určenou přímku můžeme ve třídě realisovat „zeměměřičsky“: Dva stojící žáci představují dané body, třetí, pohybující se žák, další bod přímky. Čtvrtý žák pak kontroluje polohu třetího žáka, aby všichni tři stáli v zákrytu.

Důležitý pojem „pořádek bodů na přímce“, rovněž žákům jasně vyložíme; je ho též často třeba i v aritmetice (ČA I, str. 33 a násl.).

Každou společnou práci jeden z žáků popisuje; tříbíme tak žákovo myšlení a zajistíme tak společné pracovní tempo a slabšímu žáku rovněž pomůžeme.

Pojem přímé a křivé čáry rozšíříme o čáru lomenou.

Vzornému rýsování a pěknému popisu věnujeme zvýšenou péči.

§ 2. Připomenutí: Úsečky AB a BA jsou pro nás jedno a totéž; toto označení se týká polohy úsečky. Délku této úsečky (jedna její vlastnost) značíme $\overline{AB}$.

Důležitý je pojem „vzdálenost dvou bodů“ (isolovaných); spojením obou bodů převedeme tento pojem na délku úsečky. Později již není vždy třeba oba dané body spojovat, stačí často vzdálenost obou bodů s pomocí kružítka přenést tam, kde ji potřebujeme.

Délku úsečky změříme: a) Přiložením měřítka — kreslířské nebo řemeslnické měření. b) Délku úsečky vezmeme do kružítka a přeneseme ji na měřítko (§ 3); toto přesnější měření je v geometrii obvyklejší. Opačným postupem naneseme úsečku předepsané délky na danou přímku od jejího určitého bodu. Tuto práci doprovází žák asi těmito slovy: „Úlohou je na přímku p nanésti od bodu A úsečku délky 25 mm. Přiložíme měřítko k přímce p počátkem k bodu A; to lze učiniti dvěma způsoby. Vyznačíme si ve vzdálenosti 25 mm na přímce p druhý krajní bod hledané úsečky. Ten označíme B. Zapíšeme výsledek práce: $\overline{AB} = 25$ mm.“ Podobně při provedení úlohy kružítkem: „Naměříme délku 25 mm do kružítka a naneseme ji od bodu A na přímku p. Krajní bod označíme B atd.“

Nanášíme-li (přenášíme-li) už narýsovanou úsečku, jejíž číselnou délku neznáme, na určitou přímku, užijeme proužku čistého papíru (kreslířsky) nebo kružítka (§ 3). Nezvykejme žáky, aby délku úsečky vždy spojovali s její numerickou hodnotou; ve většině geometrických konstrukcí numerickou hodnotu délky vůbec nepotřebujeme.

Všimneme si dále, že výrazu „obvod mnohoúhelníka" užíváme ve dvou významech: jednak máme na mysli určitou lomenou čáru, jednak délku obvodu, tedy určitou úsečku, jejíž délka je rovna délce zmíněné čáry. Tuto délku můžeme určit buď graficky nebo numericky (sečteme numerické délky jednotlivých stran mnohoúhelníka). V počátečních hodinách užijeme obou postupů a kontrolujeme číselné výsledky; přitom hned poučíme žáky, že i při přesném rýsování se dopouštíme určité chyby, zaviněné jednak nedokonalostí rýsovacích pomůcek, jednak nedokonalostí narýsovaných čar. Na grafickém určování obvodu a délky lomené čáry se žák naučí sčítat úsečky.

§ 3. Poučme žáky důkladně o tom, že kružnice je čára, kdežto kruh je obrazec. Délku kružnice můžeme změřit pásmem, nití (na rotačním válci). Kruh si každý žák vystřihne, aby viděl, že je to část roviny.

Rýsujeme-li kružnici, udáme vždy její střed a délku jejího poloměru. Netrpme, aby teprve po narýsování kružnice žák hledal a popisoval její střed; ten si musí při libovolné volbě vždy napřed vyznačit křížkem. Rovněž poloměr musí být řádně určen, buď číselně nebo je udán určitou narýsovanou úsečkou. Totéž platí o rýsování kruhového oblouku.

Ke každému bodu kružnice přísluší určitý poloměr (špice kola) a naopak, ke každému narýsovanému poloměru kružnice přísluší jeden její bod. Poloměr vždy leží v polopřímce, jejímž počátkem je střed. Ve většině rčení rozumíme poloměrem délku poloměru (srovnej „obvod" v § 2).

U mezikruží určíme graficky jeho šířku tím, že narýsujeme poloměr větší kružnice.

Všechny části kruhu si vystřihneme z papíru. Tu se žák přesvědčí, že tětivou (jeden střih) se kruh rozdělí na dvě úseče; stejně, vystřihneme-li jednu výseč, vzniká současně druhá. Zeptejme se: Je polokruh úseč či výseč? Které dva body jsou na kružnici nejvzdálenější?

Půlení úsečky zkusmo provádíme nanášením její přibližné poloviny od obou krajních bodů úsečky; opakovaným půlením dostaneme čtvrt, osminu atd. dané úsečky. Dělení úsečky na tři díly provádíme nanášením odhadnuté třetiny od jednoho krajního bodu. Při prvním dělení můžeme rýsovat kružítkem dílky po jedné straně úsečky, při druhém po druhé straně a teprve při třetím úsečku po obou stranách přetneme.

Samozřejmě je nutné, aby předem učitel řádně vysvětlil a prakticky ukázal, jak se pracuje s kružítkem, jak se utahuje hlava kružítka, upevňuje tuha a pod.

§ 4. Tento paragraf je velmi instruktivní, zvláště jeho závěr; proto je nutno text řádně prostudovat, promyslit. Výslednou poučku prodiskutujeme numericky i prakticky — viz obr. 22 na str. 16: Přeneseme-li třetí stranu hledaného trojúhelníka od B směrem ke Q, musí druhý krajní bod C' padnout mezi body Q a P. Tedy, zvolíme-li mezi P a Q libovolně bod C', pak trojúhelník ze stran $\overline{AB}$, $\overline{AC} < \overline{AB}$ a $\overline{BC} = \overline{BC'}$ existuje (lze jej sestrojit). Rozbor v případě rovnoramenného trojúhelníka $\overline{AB} = \overline{AC}$ je obdobný, ale jednodušší; tu je $Q \equiv B$ a volba bodu C' padne dovnitř úsečky $\overline{BP}$ ($\overline{BP} = 2\overline{AB}$).

Poněvadž tento paragraf řeší věc velmi zásadní (určení trojúhelníka třemi stranami, kterého se často používá), probereme jeho obsah důkladně, aby jej každý žák správně pochopil.

§ 5. Mechanické odvození kolmic, uvedené na počátku paragrafu, je pro žáky velmi instruktivní. Pojem pravého úhlu tu pěkně vyplyne jako část roviny, ne jako jakási odchylka dvou kolmic.

Žák musí jasně rozlišovat pojmy „kolmice vztyčená“ a „spuštěná“. Zvláště pojem kolmice spuštěné působí určité potíže; bod, s něhož kolmici spouštíme, může ležet „nad“ i „pod“ přímkou — těchto předložek však neužívejme. Rčení „kolmici spouštíme“ vyjadřuje právě tu vlastnost, že bod, jímž má kolmice procházeti, leží mimo přímku.

Polohy přímky, k níž máme kolmici vztyčit nebo spustit, stále střídáme.

Hlavním úkolem učitele je naučit žáka rýsovat kolmice s pomocí dvou trojúhelníků; v učebnici vyobrazené pravítko (lineál) má spíše naznačit druhořadý význam tohoto pravítka (viz obr. 35).

Praktické nacvičování rýsování kolmic se děje za stálé kontroly učitele, který se musí osobně přesvědčit, jak jeho svěřenci své nástroje ovládají. Nešikům musí pak ruce „srovnat“. Úkon „narýsovat kolmici“ musí být zcela zmechanisován.

O vzdálenosti bodu od přímky se žáci přesvědčí experimentálně: Každý jiný bod přímky než pata kolmice, spuštěné z daného bodu k dané přímce má od daného bodu větší vzdálenost. Pojem ten objasníme na tomto praktickém příkladě: Stojím v poli a chci se dostat nejkratší cestou na blízkou silnici, jak musím jít?

Každou konstruktivní práci musí žák doprovázet slovy; jednotlivé geometrické úkony si zapíše s pomocí geometrických symbolů a zapsaný výsledek konstrukce podtrhne.

§ 6. Zásady platné pro tento paragraf jsou obdobné zásadám předchozího paragrafu.

Důležité je objasnit žákům pojem přímého pásu a jeho šířky. Žáci se přesvědčí pokusem, že vzdálenost dvou rovnoběžek (šířka pásu) je všude stejná. Při tom se seznámí s obdélníkem a s jeho základními vlastnostmi.

Tímto paragrafem se končí úvodní část, jíž je nutno věnovat asi 4—6 týdnů po 2 vyučovacích hodinách.

§ 7. V tomto paragrafu seznámíme žáka s kvádrem, základním to geometrickým tělesem. Kvádr je těleso, které se vedle rotačního válce v praxi nejvíce vyskytuje, takže je chápání žákovu velmi přístupný. Poněvadž jsme v prostoru zbaveni možnosti provádět takové jednoduché konstrukce, jako tomu je v rovinné geometrii, musíme k studiu prostorových útvarů používat modelů; žák bude jednotlivé úvahy vyjadřovat jenom slovně. Je to ovšem i příležitost k opakování geometrických rčení, s nimiž se již žák v geometrii rovinné seznámil.

Ještě na jednu okolnost je třeba upozornit: V úvahách o rovinných útvarech jsme žádali, aby žák tyto útvary rýsoval v obecné poloze; to nebylo spojeno celkem s žádnými nesnázemi a také rovinné útvary se vskutku většinou vyskytují v polohách obecných. Při úvahách prostorových vzhledem k jejich obtížnosti se na 2. stupni omezíme na polohu zvláštní: Podstavu tělesa zpravidla klademe do vodorovné roviny. Závěry pro polohu obecnou i ve vyšších třídách lze většinou odvodit z této základní polohy. Tímto omezením není úkol geometrie celkem nijak dotčen.

Na kvádru chceme seznámit žáka s pojmem geometrického tělesa; nezajímá nás, z čeho je těleso zhotoveno, ani jeho barva a pod., krátce vlastnosti fysikální. Zato se budeme zabývat tvarem a velikostí studovaného tělesa, jakož i vzájemným vztahem geometrických prvků, jež se na něm vyskytují.

Aby se každý žák mohl účastnit společné práce, pořídí si vlastní model kvádru; stačí k tomu krabička od zápalek, kterou si doma polepí bílým papírem a ve škole za vedení učitele si popíše jednotlivé vrcholy (asi tak, jako je tomu v učebnici v obr. 54c, str. 41, tedy dolní podstava je *ABCD*, horní ve stejném pořádku *EFGH*). Nyní budou moci všichni žáci lépe sledovat společnou práci a i v pracích samostatných při stejně formulovaných otázkách budou odpovídat jednotně; to umožní učiteli rychlou kontrolu žákovských výsledků. Vedle toho se bude užívat i takových rčení jako „levý zadní dolní vrchol", aby se žák naučil vyjadřovat o předmětech, kde nebude mít k disposici popis abecedou. Že je nutné provádět základní úlohy i písemně, o tom není pochyb, poněvadž samostatná práce vede k intensivnějšímu přemýšlení a vychovává i k odpovědnosti.

Zavedením názvů „dolní" a „horní podstava" rozdělí se vrcholy, stěny i hrany kvádru do dvou skupin; to nám umožní bezpečně a přehledně uvedené prvky spočítat: (1) 4 vrcholy dolní a 4 vrcholy horní podstavy; (2) 4 podstavné hrany dolní, 4 podstavné hrany horní, 4 hrany pobočné; (3) 2 stěny podstavné, 4 stěny pobočné.

Na kvádru se žák setkává znovu s obdélníkem, s nímž se již seznámil v § 6; shodnost obdélníků v protějších stěnách ukážeme přiložením obdélníka vystřiženého z lepenky. Vysvětlíme tu i pojem roviny; každou stěnu kvádru lze položit na rovnou desku, leží tedy hrany i vrcholy takové stěny v rovině této desky. Také všechny přímky, které si v naší stěně načrtneme, leží v rovině desky. Žák zjistí, že k tomu, aby přímka ležela ve stěně, stačí, aby dva body této přímky ležely v uvažované stěně (to lze ukázat také přímou tyčinkou). Tak docházíme k základní poučce tohoto paragrafu: Přímka, která má v rovině dva body, leží v ní celá.

Křivá plocha tuto vlastnost nemá; to lze ukázat na rotační válcové ploše, v níž také leží řada přímek (povrchových), ale spojnice dvou libovolně v ní zvolených bodů nemusí v ploše ležet. To se dá dobře demonstrovat na modelu z papíru, který ve dvou bodech tyčinkou propíchneme.

Příslušná cvičení probereme důkladně; s pomocí popisu vrcholů můžeme snadno klást otázky všem žákům bez obavy, že by mohla vzniknout mýlka.

Poznámka. Pro některé účely je vhodné, když si žáci vyrobí kvádr z většího bramboru. Na něm mohou sestrojit úhlopříčný řez, po případě odvodit i jiné tvary těles (viz str. 39).

§ 8. Poněvadž jsme v § 7 při úvahách o kvádru vyšli ze základní polohy kvádru (s vodorovnou podstavou), lze snadno na něm ukázat fysikální pojmy: vodorovný, svislý a šikmý, a to pokud jde o roviny i přímky (přímky ukazujeme přímou tyčinkou, roviny rovnou tuhou lepenkou). Prostorová geometrie těchto fysikálních názvů užívá jako pomůcky, která usnadňuje žákům představu a umožňuje stručnější vyjadřování.

V přeneseném významu mluvíme i o svislé přímce v sešitě, který leží na vodorovné desce lavice. Tuto úmluvu s žáky jasně sjednáme.

S pomocí přímé tyčinky, realisující přímku, a tuhé lepenkové desky, představující rovinu, řešíme připojená cvičení. Alespoň některý příklad zaznamenáme i písemně; k tomu není vždy třeba podrobného slovního výkladu, jen stručně zaznamenáme, co jsme zjistili.

Jde tu asi o tyto otázky (uvádíme je schematicky):

a) Kolik svislých, vodorovných, šikmých rovin (přímek) prochází daným (1) bodem, (2) danou přímkou (vodorovnou, svislou, šikmou)?

b) Kolik svislých, vodorovných, šikmých přímek leží v dané rovině vodorovné, svislé, šikmé?

Odpovědi budou znít asi takto: Žádná, jedna, velké množství a pod. Tyto úlohy lze řešit přímo s použitím kvádru a jeho prvků.

S použitím kvádru a jeho úhlopříčných řezů lze řešit tyto úlohy:

V jaké přímce se protne rovina vodorovná, svislá, šikmá s rovinou (1) vodorovnou, (2) svislou, (3) šikmou? Mohou se dvě roviny šikmé protnout v jiné přímce než šikmé?

Vedle vlastního řešení geometrických problémů cvičíme i žákovu vyjadřovací schopnost. Vyžadujme proto odpovědi stručné, ale obsahově i jazykově správné.

§ 9. Obdélník poznal žák se stanoviska konstruktivního v § 6 a ve spojení s kvádrem v § 7. S pomocí obdélníka chceme žáka seznámit se způsobem studia rovinných obrazců. V § 6 jsme odvodili obdélník jako část přímého pásu omezenou dvěma šířkami pásu.

Obdélník zařadíme pod širší pojem čtyrúhelníka, který má sousední strany kolmé. Pokusem i na základě šířky přímého pásu zjistíme, že má obdélník protější strany stejně dlouhé. Pro délku základny a výšky obdélníka zavedeme názvy „délka a šířka obdélníka", krátce rozměry.

Obdélník má dva rozměry; naproti tomu kvádr má rozměry tři: délku (vodorovně odleva doprava), šířku (vodorovně odpředu dozadu), výšku (svisle).

Na kvádru jsme zjistili, že protější stěny jsou shodné obdélníky, poněvadž se po vhodném přemístění kryjí. S pojmem shodnosti se nyní žák seznámí také přímou konstrukcí: narýsuje si dva obdélníky o stejných rozměrech, které se mu po vystřižení a přemístění skutečně kryjí.

Nyní přejdeme k dalším prvkům, které se v obdélníku vyskytují (střední příčky, úhlopříčky): Žák zjistí, že délky středních příček se rovnají délce a šířce obdélníka a že obě úhlopříčky jsou sobě rovné. Poněvadž se úhlopříčky navzájem půlí a jsou stejné, je vzdálenost jejich středu od všech vrcholů stejná; proto lze obdélníku opsat kružnici.

Už na tomto obrazci ukážeme na problémy, které se nám v obměnách budou opakovat i jinde. Položíme asi tyto otázky: Čtyrúhelník má stejné úhlopříčky; je to obdélník? (Může to být obdélník, ale nemusí.) Čtyrúhelník, jehož úhlopříčky se navzájem půlí, je obdélník? (Může, ale nemusí.)

Čtyrúhelník, který má stejné úhlopříčky, které se vzájemně půlí, je obdélník? (Ano.)

Tímto způsobem soustavně připravujeme žáka na další studium a každou odvozenou poučku se snažíme obrátit. Žák se na podobných úlohách učí kriticky myslit. V daném případě zjišťuje, že k tomu, aby náš obrazec byl obdélník, je třeba určitých podmínek; jen některá z nich k tomu nestačí.

Obdélník rýsují žáci v různých polohách; vztyčí v krajních bodech jeho základny kolmice a nanesou na ně výšku obdélníka. Abychom cvičili i rýsování rovnoběžek, stačí nanést výšku jen na jednu z kolmic a vést rovnoběžku se základnou. Tyto obměny konstrukce objevují žáci sami.

§ 10. Čtverec je pro nás obdélník o stejných rozměrech. Hned promluvíme o jeho obdobě v prostoru — o krychli, jejíž rozměry jsou rovněž stejné.

Všechny vlastnosti, jež má obdélník, má i čtverec (platí to i obráceně?). Nově přistupují tyto vlastnosti, které obdélník nemá: střední příčky jsou stejné, úhlopříčky jsou k sobě kolmé, čtverci lze kružnici vepsat.

Ptáme se opět na obrácené věty: Čtyrúhelník, který má úhlopříčky k sobě kolmé, je vždy čtverec? (Ne.) Čtyrúhelník, který má k sobě kolmé úhlopříčky, jež se vzájemně půlí, ale jsou nestejné, je čtverec? (Ne.) Čtyrúhelník, jehož stejné úhlopříčky se navzájem půlí a stojí k sobě kolmo, je čtverec? (Ano.)

Poznámka. Kružnice vepsaná protíná stranu čtverce (dotýká se strany čtverce) v jediném bodě. Odůvodnění vyplývá z pojmu vzdálenosti středu čtverce od jeho strany (viz str. 21), neboť pata kolmice, spuštěné se středu čtverce k jeho straně, je ze všech bodů této strany bodem středu nejbližším.

§ 11. Na sestrojení sítě kvádru (nejprve bez horní podstavy) cvičíme obratnou konstrukci řady obdélníků, které spolu jednoduše souvisí. Vrcholy sítě popíšeme podle modelu, aby žák viděl, kolikrát se určité písmeno může v síti vyskytnout (proč až třikrát?).

Lepit modely budou jen pilní žáci z vlastní iniciativy.

Nebude na závadu, seznámí-li se žáci s názvy těles na str. 47—53 a s některými jejich vlastnostmi (místo opakování látky z § 7 o kvádru). Sítě však nesestrojujeme.

§ 12. Je jistě účelné, abychom dali žáku náhradu za model. Bude tak moci provádět úvahy o kvádru, i když nemá model po ruce. Proto seznamujeme žáka s pojmem „průmět kvádru". Že to není skutečný kvádr, vidí žák z toho, že jen jednu stěnu kvádru lze umístit do nákresny, tedy narýsovat přesně.

Bylo by však účelné omezit se alespoň z počátku na průčelnou polohu kvádru, která má i tu výhodu, že jednu stěnu máme ve skutečné velikosti. Jinak užijeme těch zásad, které uvedeny jsou na str. 40. Je to zároveň dobré cvičení v rýsování kolmic a rovnoběžek. Připojená cvičení v případě, že jsme se omezili na průčelnou polohu, musíme vhodně pozměnit.

Z narýsovaného průmětu kvádru může učitel ve vyspělejší třídě přejít i k průmětu kolmého čtyrbokého jehlanu a k obdobnému rozboru jeho vlastností jako v § 7 (viz osnovy geometrie pro I. tř. — „Úkol").

§ 13. V tomto paragrafu seznámíme žáky s pojmem plošné míry a odvodíme poučky pro výpočet obsahu obdélníka a čtverce. Oba tyto obrazce jsou žákovi již známé a postup odvození pouček pro výpočet obsahu je obdobný postupu odvození poučky pro objem kvádru a krychle. Proto je potřeba věnovat myšlenkovému postupu odvození poučky pro obsah obdélníka náležitou pozornost; každý žák musí spolupracovat, aby vše řádně pochopil.

Především se musí každý žák důkladně seznámit s pojmem plošné míry. Délku úsečky jsme měřili přenášením jednotkové délky (1 cm); kolikrát bylo nutno přenést jednotkovou délku, tolik jednotek úsečka měřila. Obdobně u plošných měr: Kolikrát lze položit jednotku plošné míry vedle sebe na daný obdélník, tolik plošných jednotek bude měřit.

Tuto úvahu lze demonstrovat asi takto: Žák si vyřeže z bramboru tiskátko tvaru kvádru o čtvercové podstavě (délka strany 1 cm); toto tiskátko namáčí ve vodové barvě a potiskuje jím obrazec, jehož obsah chce pokusně zjistit. Získá tak nejen jasnou představu o plošné jednotce, ale i o měření plochy, které je poněkud složitější než měření délky. Tohoto pokusu lze užít později i na jiné obrazce takto: Části ploch, které zbudou, potiskneme menším tiskátkem (na př. čtverci o straně $\frac{1}{2}$ cm, jejichž obsah je $\frac{1}{4}$ cm^2).

Poté podáme přesné odvození poučky pro výpočet obsahu obdélníka tak, jak je uvedeno v učebnici na str. 44: Žák si vystřihne z papíru tři shodné obdélníky o rozměrech 5 cm a 3 cm. Prvého užijeme ke kontrole a k tomu, aby žák měl stále před sebou původní obrazec. Druhý obdélník žák překládá nebo rozstřihá na tři pruhy ve směru délky; výška pruhů je 1 cm. Pak zjistí, na kolik čtverců o straně 1 cm lze každý rozdělit. Tak dojde žák k výsledku, že obsah obdélníka je (5×3) cm^2. Obdobným postupem obdrží ze třetího obdélníka pět pruhů, každý po třech čtvercích o straně 1 cm, takže obsah obdélníka je (3×5) cm^2. Dojde pak k závěru, že obsah obdélníka je buď (5×3) cm^2 nebo (3×5) cm^2, v obou případech 15 cm^2. Oběma cestami docházíme ke stejnému výsledku, ač obě úvahy byly naprosto rozdílné.

Je to zároveň pěkná geometrická ilustrace aritmetického zákona o záměnnosti činitelů (komutativní zákon). Žákovi se to zdá být samozřejmé, vždyť hodnota obsahu obdélníka musí být určité číslo, ale zcela odlišný myšlenkový pochod obou postupů jej přesvědčí o tom, že se tu dálo něco zcela rozdílného.

Nyní je také vhodné poučit žáky o tom, proč musíme před výpočtem obsahu obdélníka převést oba jeho rozměry na touž délkovou jednotku; ukážeme s pomocí náčrtu nebo pokusu, že bychom touto cestou nedostali čtverce, ale obdélníky.

Vyslovené poučky o výpočtu obsahu obdélníka užijeme na čtverec o straně 1 dm a odvodíme tak měnitele plošných měr. Výpočet doplníme obdobným pokusem jako v případě obdélníka; pojem měnitele plošných měr musí být žákům naprosto jasný. Příslušný obrazec také narýsujeme; je to zároveň cvičení v přesném rýsování. Učitelův obrazec na tabuli v měřítku 10krát větším přesvědčí žáka o tom, že 1 m^2 = = 100 dm^2. Že 1 cm^2 = 100 mm^2, pozná žák na milimetrovém papíře, který mu ukážeme. Větší míry 1 a a 1 ha realisujeme na školním dvoře nebo na vycházce; vrcholy čtverců budou představovat žáci.

K jasnější představě o velikosti obsahu určitého obrazce (louky) je účelné každý výsledek, který nám při počítání praktických příkladů vyjde, srovnat s nějakou známou plochou (třídou, náměstím a pod.). Vyjde-li na př.: Pole měří 420 m^2, musí si žák pomalu zvykat umět převést tuto výměru na čtverec o stejném obsahu; v tomto příkladě má hledaný čtverec stranu větší než 20 m, ale jistě mnohem menší než 30 m. Je to zároveň příprava k odhadům odmocnin a vhodný způsob nácviku pamětného počítání.

Na řadě vhodně volených cvičení z učebnice se naučí žák různé plochy rozkládat v obdélníky a s jejich pomocí vypočítat obsah daného obrazce.

Poslední odstavec našeho paragrafu lze vynechat, ač je velmi instruktivní (pak se vynechají cvič. 157, které souvisí s cvič. 117 a 118, a cvič. 158), poněvadž tu docházíme k obsahu čtverce dvěma zcela různými cestami a žák se tak může přesvědčit o možnostech přesnosti měření.

Nácvik převádění a rozvádění plošných měr se probere v hodinách aritmetiky (ČA I, § 2, odst. 13 a § 9, část odstavce 65). V geometrii samé se zvláště z počátku omezíme na jednoduchá čísla celá. Důležité je poučit žáky o tom, že ještě 99 dm² není celý 1 m²; proto v mnohojmenných vyjádřeních plošných měr se vyskytují nejvýše čísla dvojciferná (26 ha 4 a 75 m²). Dobře připravená znalost plošných měr usnadní později i problém odmocňování dvěma (dvojciferné skupiny).

§ 14. Postup odvození pravidla pro výpočet objemu kvádru a pojmu míry krychlové je obdobný s odvozením obsahu obdélníka. Jednotku měr krychlových si žáci vyrobí z bramboru. Rovněž příklad v učebnici uvedený si tímto způsobem mohou realisovat.

K řádnému demonstrování celého postupu dělení kvádru v jednotlivé vrstvy je nejlepší zhotovit model ve trojím vydání. Kvádr, který uvádí učebnice, má rozměry $5\times4\times3$ (v cm); rozřežeme jej na vrstvy: (1) Ve směru kolmém k výšce (3 vrstvy). (2) Ve směru kolmém k šířce (4 vrstvy). (3) Ve směru kolmém k délce (5 vrstev). Výpočet objemu každé vrstvy se redukuje na výpočet obsahu obdélníka; to je nutno řádně vyložit a ukázat na modelu.

Závěrem úvah docházíme k důležitému aritmetickému výsledku $(5\times4)\times3 = (3\times5)\times4 = (4\times3)\times5$, který, jak ukazuje různost postupů jednotlivých úvah, není zcela samozřejmý.

Podobně jako u obdélníka odůvodníme nutnost, proč převádíme rozměry kvádru při výpočtu jeho objemu na stejné délkové jednotky. Položme žákům tyto otázky: (1) Jaká tělesa bychom po rozřezání obdrželi, kdyby dva rozměry byly udány v dm a třetí v cm? (2) Jaká, kdyby délka byla udána v m, šířka v dm a výška v cm (prkno)?

Z poučky o výpočtu objemu kvádru odvodíme objem krychle a odtud měnitele měr krychlových; poněvadž měnitelem je číslo 1000, budou se v mnohojmenném vyjádření objemů vyskytovat čísla nejvýše trojciferná (na př. 150 dm³ 87 cm³; 26 m³ 490 dm³).

Nacvičení převádění a rozvádění krychlových měr provedeme v aritmetice (ČA I, § 9, odst. 65).

Z praktických důvodů je třeba upozornit na souvislost měr krychlových s měrami dutými; některé hodnoty se v praxi vyskytují současně: 1 cm³ = 1 ml (lékárna); 100 cm³ = 1 dl (víno); 1 m³ = 10 hl (voda, plyn, písek).

Zvláště srovnání 1 m³ a 1 hl je poučné. Jasnější představu získá žák na praktických úlohách (objem skříně, známé nádrže a pod.).

§ 15. Vzhledem k osnovám geometrie pro I. tř. (odstavec „Úkol"), lze užít pojmů obsažených v tomto paragrafu jako podkladu k doplnění a opakování vlastností kvádru (zvláště konec paragrafu); vzájemné vztahy vrcholů, hran a stěn kvádru lze s pomocí pojmů zde zaváděných postavit na jednotné hledisko. K abstraktnímu zkoumání bez vztahu k některému jednoduchému tělesu však nepřistoupíme.

Připojená cvičení se hodí k občasnému opakování.

§ 16—17. (O zavedení pojmu pravého úhlu viz pozn. k § 5.)

K zavedení pojmu úhlu zvolil autor učebnice cestu kinematickou. Úhel *AOB* žák dostane takto: Postaví se do vrcholu *O*, dívá se přímo před sebe ve směru *OA* a pak se otáčí na místě, až se dívá ve směru *OB*. Část roviny, kterou při svém pohybu přehlédl, je zmíněný úhel. Otáčení se může dít napravo nebo nalevo; proto lze vytvořit vždy dva úhly. Místo rčení „napravo" lze užít méně instruktivního otáčení hodinové ručičky.

Pojem úhlu lze realisovat také takto: Část roviny, kterou neomezeně dlouhá ručička hodinová při svém pohybu z polohy *OA* do polohy *OB* postupně zaujímá, představuje úhel *AOB* (zvláště je to jasné, zanechává-li po sobě nějakou stopu).

Má-li žák řádně porozumět obr. 87 (str. 57), musí si uvědomit, že stojí ve středu zobrazené větrné růžice; souvisí to s úspěšným řešením cvičení tohoto paragrafu.

K hrubšímu srovnávání velikosti úhlů slouží dobře úhel pravý; toto srovnávání je pro geometrii mnohdy důležitější než měření úhlů ve stupních. Proto se také klasifikace úhlů podle velikosti provádí na základě srovnání s pravým úhlem:

Úhel:

dutý — přímý — vypuklý — plný

dutý: pravý, kosý

kosý: ostrý, tupý

vypuklý: (se zbytkem tupým, pravým, ostrým)

Některé důležité představy: Úhel pravý je právě $\frac{1}{4}$ celé roviny; úhel přímý zaujímá právě polovinu roviny a úhel plný rovinu celou (podél splývajících ramen „nastřiženou").

Při zavedení řecké abecedy pro popis úhlu musíme žáky seznámit s umístěním písmen v linkách (α jako „a", β jako „b", γ jako „j").

Obojí způsob zapisování úhlů je třeba střídat ($\sphericalangle AOB = \omega$).

§ 18. K přenášení úhlů užíváme rovnoramenného trojúhelníka; proto je vhodné nejprve zopakovat konstrukci trojúhelníka určeného třemi stranami, zvláště trojúhelníka rovnoramenného, a tyto trojúhelníky graficky přenést. Přitom hned seznámíme žáky na základě pokusu s pojmem shodnosti dvou trojúhelníků (str. 61).

Přenášení úhlů nacvičíme ve všech polohách (dané rameno je vodorovné, svislé, šikmé). Připomeňme, že úhel lze od daného ramene přenést napravo nebo nalevo (díváme se vždy s vrcholu ve směru daného ramene).

Poněvadž přenášení úhlů je úkol mnohem složitější než přenášení úseček, je třeba vypěstovat v žáku vědomí, že skutečně přenáší příslušný pomocný rovnoramenný trojúhelník. Všechny výkony, které žák při společné práci provádí, doprovází slovním výkladem (asi tak jako na str. 61, 3. odst. zdola). Z počátku popisujeme všechny vrcholy pomocného rovnoramenného trojúhelníka, jehož základnu rovněž narýsujeme; poloměr pomocného oblouku volme alespoň 2 cm, při menších úhlech ještě větší.

Pro grafické počítání s úhly je dobře umluvit s žáky toto: K přenášení úhlů v téže úloze budeme užívat trojúhelníků, jejichž ramena jsou vesměs stejně dlouhá; tím bude poloměr všech pomocných kruhových oblouků také stejný.

Přibližné grafické dělení úhlu v osnovách není.

§ 19. Po zavedení 1° jako $\frac{1}{90}$ úhlu pravého, zopakujeme názvy úhlů z § 17 a zeptáme se žáků, v kterých mezích jednotlivé úhly leží ($0 <$ ostrý úhel $< 90°$).

Způsob, jak se pracuje s úhloměrem, učitel musí řádně vysvětlit a řádně na tabuli ukázat (různé polohy daného ramene); úhel vypuklý rozložíme v přímý a kosý zbytek. Žák se naučí pracovat i s úhloměrem obráceným „dolů".

Pojem úhlů vrcholových, výplňkových a doplňkových nedělá potíže („doplňkové se doplňují do devadesáti"). Určitou nesnáz působí úhly vedlejší, při nichž jde o vzájemnou polohu dvou úhlů; jednou z mnohých vlastností vedlejších úhlů je, že jejich součet je 180°. Každý z obou výplňkových úhlů může být umístěn v různých rovinách (sešitech), kdežto vedlejší úhly musí mít jedno rameno společné a zbývající ramena tvoří celou přímku. Rovněž otázka „Jsou úhly výplňkové vedlejší?" pomůže objasnit pojem.

Pod značkami x, y, z ve cvičeních rozumíme pouhá čísla, proto píšeme $x°$, $y°$, $z°$, když se jedná o velikost úhlů.

Závěrem partie je výklad o počítání s úhly při šedesátinném dělení; násobení a dělení provádíme maximálně s číslem 4.

Počítání s úhly nacvičíme v aritmetice současně s měrami časovými.

§ 20. Odvození poučky o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku provedeme podle učebnice třemi způsoby, jak je naznačeno (1) v obr. 108, (2) obr. 109a, b, (3) pokusem prostým grafickým sečtením. Obr. 109b ukazuje, že součet všech tří úhlů vyplňuje celou rovinu. Je to poučka velmi důležitá a proto jejímu správnému pochopení věnujeme pozornost i čas.

Jako aplikaci uvedené poučky odvodíme poučku o součtu ostrých úhlů v trojúhelníku pravoúhlém.

Poznámka. Opačný postup odvození obou pouček o úhlech trojúhelníků uvádí autor učebnice ve svých Poznámkách k učebnicím geometrie asi takto: „Vystřihneme si dva shodné pravoúhlé trojúhelníky a nalepíme je vedle sebe, aby vznikl obdélník. Tím se přesvědčíme, že součet čtyř ostrých úhlů obou exemplářů pravoúhlého trojúhelníka je $2R$, takže součet ostrých úhlů pravoúhlého trojúhelníka je R (vedlejší poučka). Je-li dán libovolný trojúhelník ABC, pak kolmice spuštěná s vrcholu ležícího proti nejdelší straně, rozdělí trojúhelník ve dva trojúhelníky pravoúhlé. Součet čtyř ostrých úhlů těchto trojúhelníků je podle názoru týž jako součet úhlů trojúhelníka ABC, tudíž $2R$ (hlavní poučka)."

Na ukončení odstavce podáme přehled klasifikace trojúhelníků podle stran a podle úhlů:

a)		b)	
různostranné	rovnoramenné	pravoúhlé	kosoúhlé
			ostroúhlé, tupoúhlé.

Látku odstavce doplníme konstrukcí pravidelného šestiúhelníka (§ 23 konec), kde se setkáváme také s trojúhelníkem rovnostranným; úvaha o vnitřních úhlech zatím odpadá.

Doplněk. Ostatní paragrafy odpadají. Jen upozorňujeme na § 25 (Opakování). Úlohy tohoto paragrafu je vhodné řešit již během školního roku; proto se s nimi učitel předem seznámí.

Tato poznámka se týká cvičení A, B a D. Cvičení skupiny C slouží k tomu, aby se zjistila zdatnost žáků v přesnosti rýsování; proto mohou býti probírána až koncem roku.

III. POZNÁMKY PRO II. TŘÍDU.

I. Úvod. 1. Na počátku školního roku zopakujeme přehledně v několika hodinách nejdůležitější látku z I. třídy:

a) Především půjde o osvěžení rýsovací dovednosti: Kolmice, rovnoběžky, přenášení úhlů a úseček (na vhodných úlohách a s příslušným odůvodněním).

b) Pak počítání s měrami úhlovými, nejlépe ve spojení s větou o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníků a s větou o součtu ostrých úhlů v trojúhelníku pravoúhlém.

c) Opakování vlastní geometrické látky se bude týkat těchto partií:

(1) Rozdělení trojúhelníků podle stran, obdélník a čtverec (úhlopříčky, opsaná a vepsaná kružnice, obvod, obsah).

(2) Shodnost dvou trojúhelníků, které mají stejné strany; shodnost obdélníků.

Větě o určenosti trojúhelníka třemi stranami bude vhodné věnovat asi dvě hodiny. Budeme jí často užívat a proto se musí žák s podmínkami, které omezují volbu třetí strany, dobře seznámit (ČG I, § 4, str. 15—17).

2. Vyučování geometrie v I. tř. se stále opíralo o praktické přezkoušení určité geometrické pravdy a o výsledky geometrických pokusů (vystřihování obrazců z papíru, jejich srovnávání). Nespojovali jsme odvozené výsledky ve větší celky, které by umožňovaly, aby žák měl přehled o dosažených výsledcích. Úkol II. tř. je poněkud jiný; ponechme mluvit autora učebnice (Poznámky k učebnicím geometrie, str. 11 — provedena záměna tříd vzhledem k novým osnovám):

„Vyučování geometrii v primě bylo stále ještě opřeno především o názor, a pouze příležitostně se také usuzovalo na základě pouček. Ale jakmile zásoba geometrických vztahů, se kterými žáky postupně seznamujeme, dosáhne určité meze, je třeba pečovati, aby se nestala nepřehlednou. Proto musíme upoutávat pozornost žactva na vzájemnou souvislost geometrických vztahů a začít budovat pevnou geometrickou soustavu.

V sekundánské látce jsou poučky, které se velice dobře hodí k tomu, abychom žákům demonstrovali, že geometrie není pouhou snůškou více méně zajímavých prostorových vztahů, nýbrž že některé z nich mají tu sílu, že malým přemýšlením lze z nich vykouzliti vztahy nové a nové. Tento ráz mají v probírané látce především poučky o úhlech dvou přímek proťatých příčkou a poučky o shodnosti trojúhelníků. Proto je jim v učebnici věnována veliká péče a jejich užitečnost je prokázána velkou řadou příkladů.

Snaha po soustavnosti vede v geometrii přirozeně k tomu, že názor ponenáhlu přestává míti při vyučování dominující roli a že se čím dále tím více uplatňuje stanovisko deduktivní. V učebnici pro sekundu je mnoho cvičení, ve kterých se žádá nějaký důkaz; po této stránce se podstatně liší od dosavadních našich učebnic pro tento stupeň. Jsem přesvědčen, že euklidovská geometrie, která je nejstarší a vlastně dosud nepředstiženou deduktivní vědou, jen tehdy bude účelně vyplňovati osnovami jí vyměřený počet hodin, bude-li v ní dokazování považováno za centrální úkol vyučování. Naprosto nesouhlasím s těmi, kteří tvrdí, že teprve žáci vyšších tříd jsou pro důkazy zralí. Naopak jsem přesvědčen, že schopnost k dedukcím se nedostaví s věkem sama, nýbrž že musí býti soustavně pěstěna a že mají-li býti s úspěchem překonány didaktické potíže, které se splnění tohoto úkolu staví v cestu, je nezbytné začíti včas.

Aby žáci řádně překonali obtíže, které mají stejně při dokazování jako při každé jiné dosud jim nezvyklé činnosti, není po mém soudu nejlepší cestou, klásti hlavní váhu na důkazy základních vět a prováděti tyto důkazy za učitelova vedení spoluprací celé třídy. Neboť to, co právě bylo naznačeno, je sice věc velmi chvályhodná a důležitá, ale aby ji žáci ocenili a s porozuměním sledovali, k tomu musí býti napřed jinými cestami připraveni. Předně není žákům docela zřejmé, proč mají výše ceniti deduktivní odvození poučky než odvození z názoru nebo i než přezkoušení její správnosti měřením nebo výpočtem v řadě konkretních příkladů. Za druhé důkazy základních vět často vyžadují řady několika úsudků za sebou a začátečníkovi, byť i dovedl každý jednotlivý z těch úsudků si promyslit, bývá za těžko míti je v mysli pohromadě v celosti a v jejich organické souvislosti. Za třetí je při takových důkazech průměrný žák sotva víc než pouhým pozorovatelem; on sám vlastně nedokazuje nic, nýbrž jen k dokazování přihlíží.

Proto za nejvhodnější uvedení do deduktivního myšlení nepovažuji dokazování základních pouček, nýbrž odvozování jednoduchých důsledků těchto pouček. Při tom otázka, zda deduktivní odůvodnění je opravdu přesvědčivější než odůvodnění názorem nebo verifikací, vůbec se vlastně žákovi nenaskytne. Na př. ve cvič. 33 má žák „dokázati", že

$$\sphericalangle PRT = \sphericalangle QST. \qquad (1)$$

Ve skutečnosti se však na něm žádá, aby si narýsoval určitý obrazec, v tom obrazci si vyhledal dva pravoúhlé trojúhelníky a u každého z nich si zapsal, že jeho dva ostré úhly jsou doplňkové; to se dá provést všelijak, neboť v obrazci má pravoúhlých trojúhelníků víc (celkem šest), ale žák to má provésti tak, aby mu vyšel vztah (1). Co se mi zdá podstatné jest, že proces, kterým má žák projít, neztratí vůbec nic na své zajímavosti tím, že snad je už a priori přesvědčen o správnosti vztahu (1) a tedy necítí potřeby jeho důkazu. Ještě důležitější je, že úkol, který tu má žák před sebou, nedá se provésti bez přemýšlení, ale při tom může býti proveden samostatnou aktivní činností žáka bez učitelovy pomoci, neboť je tu jen konečný počet možností, a vlastně stačí, zkoumá-li jeden pár pravoúhlých trojúhelníků za druhým, až dojde k takovému, u něhož mu vyjde vztah (1).

Všecky důkazy, které ve své učebnici na sekundánovi žádám,*) jsou toho druhu, že mu je předem známo, které poučky má užít. Vyšším třídám zůstává vyhrazen obtížnější úkol, při důkaze si napřed vyhledat poučku pro žádaný účel vhodnou. Ale na tento obtížnější úkol je žák připraven jednak tím, že u každé jednotlivé poučky získal praxi, jak se jí užívá k důkazům, a především tím, že se přesvědčil, že důkazy nejsou věc ani nudná ani obtížná, nýbrž zajímavá a snadná.“

Autor vidí tedy hlavní úkol geometrie v II. tř. v tom, aby se žák na cvičeních učebnice naučil užívati odvozených geometrických pouček, které si takto v souvislosti s geometrickými útvary nejlépe osvojí; tak pozvolna vnikne do deduktivního způsobu myšlení.

Učitelův úkol by nebyl zdaleka splněn, kdyby se žákova práce omezila na pouhé memorování pouček; rovněž při řešení cvičení se nesmíme omezit jen na mechanické používání výsledku matematických úvah. Všude je třeba mít na zřeteli zdárný vývoj žákova myšlení, na něž má geometrie svou systematičností značný vliv. Máme-li naší národní pospolitosti vychovat samostatně myslícího občana, nezapomeňme, že mu je od počátku třeba vštěpovat základy vědeckého způsobu práce; k splnění tohoto úkolu musí geometrie přispět měrou nemalou.

Má-li učitel svůj úkol zvládnout, musí se seznámit předem s látkou, kterou chce probírat a promyslit, na jaké obtíže může narazit. Poněvadž jednotlivé paragrafy učebnice svým obsahem organicky na sebe navazují, není možné přistoupit k nové látce, aniž byla probraná látka řádně procvičena. V příkladech ke každému paragrafu najde učitel řadu úloh, které budou úrovni třídy únosné. Musí zase předem uvážit, jak nejlépe přiblížit žákům problém, jejž mají řešit. Ve většině případů stačí menší rozprava, aby si žák uvědomil, co vlastně na něm úloha požaduje.

3. Aby naše vyjadřování bylo stručnější, zavádíme pro útvar, který se nám často vyskytuje a který splňuje určité podmínky, zvláštní název. Na př.: Čtyrúhelník, který má protější strany rovnoběžné, nazývá se rovnoběžník (definice rovnoběžníka).

Žákům stačí říci, že jde o úmluvu, která nás povede ke stručnosti,

*) Výjimku tvoří některá cvičení k § 6.

přesnosti a přehlednosti. Řekneme-li slovo „rovnoběžník", musí napadnout žáka tyto dvě myšlenky: (1) Je to čtyrúhelník. (2) Jeho protilehlé strany jsou rovnoběžné. Zná-li snad i další vlastnosti rovnoběžníka, musí si být vědom, že jsme k nim dospěli geometrickou úvahou. Dokážeme-li pak o rovnoběžníku větu: „Protější strany rovnoběžníka jsou si rovny", pokusíme se ji obrátit. Ptáme se tedy, platí-li věta: „Čtyrúhelník, který má protější strany sobě rovné, je rovnoběžník." Tu si žák řekne: „Musí to být čtyrúhelník (to skutečně je) a pak musí mít protější strany rovnoběžné. Tento druhý požadavek musíme tedy dokázat."

Říkáme, že jsme naši poučku obrátili (platí obrácená věta). Jinak vyjádřeno: Rovnost protějších stran je pro rovnoběžník charakteristická (název nezavedeme). Řadu takových vět poznáme dále. Při každé nové poučce budeme nabádat žáky k tomu, aby vyjádřili, jak bude znít věta obrácená; její důkaz je často spojen s užitím právě odvozené poučky (viz ČG II, str. 32, první odst. — příslušný důkaz je příkladem „důkazu nepřímého": připustíme, že určité tvrzení není správné, a ukážeme, že to není možné).

II. Osová souměrnost. Poněvadž nové osnovy přesunuly osovou souměrnost do II. tř., bude nutno tuto látku probrat podle § 22 Čechovy Geometrie pro I. třídu (str. 22: Euklidovské konstrukce).

Na základě pokusu uvedeného v učebnici seznámíme žáky s pojmem osové souměrnosti a s vlastnostmi bodů a přímek souměrně sdružených:

a) Osa souměrnosti stojí ke spojnici souměrně sdružených bodů kolmo a půlí ji.

b) Souměrným útvarem k přímce je zase přímka:

(1) Je-li přímka s osou různoběžná, je souměrná přímka rovněž různoběžná s osou (obě přímky se protínají na ose v „samodružném bodě" a svírají s osou úhly sobě rovné). (2) Je-li daná přímka s osou rovnoběžná, je i sdružená přímka rovnoběžná s osou (obě mají od osy vzdálenosti sobě rovné. (3) Osa je sama k sobě sdružena.

Bude vhodné provésti pokusy s některými známými obrazci (obdélník, čtverec, kruh atd. a najít jejich osy — bez závěrů). Viz též cvič. 295 (ČG I).

Pak naučíme žáky sestrojit pár souměrných bodů (s pomocí kolmice sestrojené dvěma trojúhelníkovými pravítky a kružítka). Na základě této konstrukce a s užitím samodružných bodů sestrojí žáci k danému mnohoúhelníku souměrný obrazec podle dané osy (viz cvič. 175 v ČG II).

Znalosti osové souměrnosti užijeme k odvození některých konstrukcí euklidovských (užijeme jen lineálu a kružítka).

Nejdůležitější z nich jsou: a) Sestrojit osu a střed úsečky. b) Sestrojit osu úhlu (rozpůlit úhel).

Obě konstrukce nacvičíme pro různé polohy úsečky nebo úhlu.

Je nutné, aby žák správně pochopil myšlenkový pochod při půlení úhlu: Sestrojíme vlastně pomocný rovnoramenný trojúhelník, jehož ramena leží v ramenech daného úhlu a vyšetříme osu jeho základny. První čas můžeme dokonce tuto základnu rýsovat.

Pak přistoupíme k dalším dvěma euklidovským konstrukcím: a) Vztyčit kolmici v daném bodě přímky. b) Spustit kolmici s bodu k dané přímce.

Přenášení a sčítání úhlů lze nyní opakovat též s užitím poloviny úhlu.

Na závěr doplníme znalosti o rovnoramenném a rovnostranném trojúhelníku, s jehož pomocí odvodíme konstrukci úhlu 60° (120°, 90°, 75°). Nyní umíme též odůvodnit konstrukci pravidelného šestiúhelníka.

Poznámka: Tímto odstavcem jsme ukončili přípravnou část geometrie a přistoupíme k části, v níž budeme všechny dosavadní znalosti utřiďovat a uvádět ve vzájemnou souvislost.

III. Výklady. Další paragrafy se týkají Čechovy Geometrie pro II. tř.

§ 1. 1. Úvodem objasníme znovu pojem polopřímky a pojem pořádku v ní (od počátku polopřímky k libovolnému jejímu bodu). S tím souvisí i pojem souhlasného pořádku bodů na dvou rovnoběžkách (str. 5); tento pořádek je v obrazcích učebnice vyznačen šipkami a neuvádí se zvlášť, že takové přímky jsou rovnoběžné. Na tuto okolnost nutno žáky upozornit (cvičení!).

2. Vlastním úkolem paragrafu je seznámit žáky s dvojicemi úhlů při dvou rovnoběžkách proťatých příčkou; příslušnými poučkami za-

vádíme pojem rovnoběžnosti (axiomaticky). V určitém daném obrázku musí žák umět tyto dvojice najít, pojmenovat a říci, jaký je mezi nimi vztah. Obrácená poučka nám zjišťuje rovnoběžnost zkoumaných přímek; chceme-li tedy dokázat, že určité dvě přímky jsou rovnoběžné, musíme je protnout pomocnou příčkou a zjistit, že buď dva úhly souhlasné nebo střídavé jsou stejné nebo že dva úhly přilehlé jsou výplňkové.

Některé vlastnosti rovnoběžek, které již žáci znají, později znovu přezkoumáme.

3. Jestliže naše dvojice úhlů uvedené podmínky nesplňují, pak jsou uvažované přímky různoběžné (poslední poučka paragrafu).

4. Rozhodně si nesmí žák plést naše dvojice úhlů při rovnoběžkách proťatých příčkou s úhly vrcholovými a vedlejšími; v našem případě jde o tři přímky, kdežto při úhlech vrcholových a vedlejších jen o dvě.

5. Řada připojených velmi instruktivních cvičení umožní, aby žák tuto látku zvládl.

§ 2. (Vynechá se stať o mnohoúhelnících na str. 13—15.) 1. Se známou větou o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku úzce souvisí poučky o úhlech při rovnoběžkách proťatých příčkou; na tuto souvislost tu poukážeme, t. j. na základě pouček o úhlech při rovnoběžkách odvodíme větu o součtu vnitřních úhlů trojúhelníka. Tím dokážeme též větu o vnějším úhlu trojúhelníka. Užijeme-li této věty na pravý vnější úhel trojúhelníka pravoúhlého, obdržíme známou větu o součtu ostrých úhlů tohoto trojúhelníka.

2. Součet vnitřních úhlů čtyrúhelníka ($4R$) odvodíme ze součtu vnitřních úhlů dvou trojúhelníků, v něž čtyrúhelník dělí jedna jeho úhlopříčka.

3. Na závěr umluvíme se žáky názvy některých čtyrúhelníků zvláštních (různoběžník, lichoběžník, rovnoběžník) a odvodíme vlastnosti jejich úhlů.

4. Na připojených cvičeních se zopakuje také počítání s měrami úhlovými; z počátku užijeme cvičení z Geometrie pro I. tř. (ČG I, § 20 a 21, str. 67—69).

§ 3. 1. Tento paragraf je věnován větám shodnosti a určenosti trojúhelníků. Přitom se zde stále procvičují poučky o dvojicích úhlů při dvou rovnoběžkách z § 1. Úkolem je stanovit podmínky, které nám zaručují, že dva trojúhelníky jsou shodné, t. j. že po vhodném přemístění se oba trojúhelníky budou krýt; tu mluvíme o shodnosti. Dalším úkolem je vyhledat ze šesti základních prvků trojúhelníka (tři strany a tři vnitřní úhly) takové tři, s jejichž pomocí se dá sestrojit jediný trojúhelník (věty určenosti).

Obsahově se obojí věty kryjí: Žákům lze říci, že s pomocí vět o shodnosti srovnáváme dva trojúhelníky, kdežto věty určenosti stanoví prvky, z nichž se dá sestrojit jediný trojúhelník.

Označení těchto vět jsou uvedena v učebnici na str. 72 (s = strana, u = úhel).

Dvě z těchto vět jsou evidentní: (usu), (sus); větu (sss) žák poznal v I. tř. a jestliže jsme ji nezopakovali na počátku roku, učiníme tak nyní (viz ČG I, § 4). Odvození vět provedeme ve spojení s pokusem.

2. Důležité je seznámit žáky s omezeními, která platí pro volbu prvků ve větách určenosti se vyskytujících:

(1) K větě (usu): Součet obou daných úhlů musí být menší než 180°.

(2) K větě (sus): Daný úhel musí být menší než 180°.

(3) K větě (sss): Součet dvou stran musí být větší než třetí volená strana, ale jejich rozdíl musí být menší než tato strana (viz ČG I, § 4 a ČG II, str. 32—33).

3. Vedle těchto tří základních určení ukážeme žákům také jiná. Učebnice uvádí důležité určení (ssu), které, není-li vhodně omezeno další podmínkou, vede ke třem možnostem řešení: Jsou určeny trojúhelníky a) dva, b) jeden, c) žádný (viz str. 23). K tomuto určení se stejně vrátíme při odvození čtvrté věty určenosti (str. 34).

Je samozřejmé, že především žák sám musí hledat taková omezení (učitel zasáhne jen při podmínkách složitějších); tak na př. omezení (uuu):

Tři úhly trojúhelníka jsou vázány podmínkou, že jejich součet je 180°. Proto je obecně úloha nemožná; jestliže však úhly tuto podmínku splňují, pak jsou dány vlastně jen prvky dva, třetí lze libovolně volit a úloha je neurčitá; máme nesčíslné množství řešení.

4. Je nezbytně nutné, aby žák uměl symbolicky zapsat, že dva trojúhelníky jsou shodné. Při tom je pořadí vrcholů prvního trojúhel-

níka libovolné; pořadí vrcholů trojúhelníka druhého je vázáno podmínkou, že se po přemístění vrcholy trojúhelníků budou krýt podle předepsaných pořadí.

5. Látku procvičíme na úlohách nejen rázu početního a konstruktivního, ale i důkazového.

§ 4. 1. V tomto paragrafu je naznačeno, jak lze užít geometrie v praxi, hlavně v zeměměřičství. Učitel užije jistě těch úloh, které se pojí k okolí školy. Číselné údaje si vyšetří žáci vlastním měřením. Tím se také seznámí s nesnázemi praktického měření a s jeho přesností.

Měříme vedle délek úhly: a) v rovině horizontální, na př. od jižního směru, b) v rovině vertikální, v níž jedno rameno úhlu má vždy polohu horizontální, kterou snadno vyšetříme libelou (výškové a hloubkové úhly).

Jednoduchý úhloměrný přístroj si sestrojí žáci sami s pomocí učitele. Stačí toto zařízení: Kružnici o poloměru asi 1 dm rozdělíme na 360 dílů, obrazec přilepíme na prkénko, ve středu a v nulovém bodě stupnice zarazíme tenký hřebík, polohu pozorovaného bodu vyznačíme zabodnutým špendlíkem. Jednu takovou stupnici přibijeme na tyč kolmo k její délce, druhou na lať tak, aby její délka ležela v rovině stupnice; prvého zařízení užíváme k měření horizontálních úhlů (stupnice je otočná kolem středu), druhého k měření vertikálních úhlů, při čemž „nulový poloměr“ je kolmý k délce latě.

Z počátku provedeme úlohy, při nichž se dá výsledek přímým měřením ověřit.

Žák si také sám musí umět jednoduchou úlohu vyhledat.

2. Důležitým a novým prvkem odstavce je zmenšování a zvětšování, k němuž užijeme znalosti poměru z aritmetiky. Poměr zmenšení volíme tak, aby se potřebná konstrukce řádně vešla do žákova sešitu. Výsledky, k nimž dospějeme, jednak numericky přepočítáme na skutečné hodnoty, jednak sestrojíme pomocné měřítko, kde bude jednotka našeho zmenšení popsána jednotkou skutečnosti (na př. 7 mm bude značit 10 m); odtud žák snadno výsledky přečte a svůj numerický výpočet zkontroluje.

Poměr zmenšení je třeba do nákresu zapsat; také jednotku zmenšeného obrazce a její srovnání se skutečností je vhodné připojit. Tím se seznámí žák i s podobnými údaji ve speciálních mapách.

§ 5. Látkou tohoto paragrafu doplníme žákovy znalosti o trojúhelníku, některé známé poučky překontrolujeme a uvedeme je v souvislost s větami shodnosti a s větami o dvojicích úhlů při dvou rovnoběžkách proťatých příčkou.

Celkem lze známé i nové poučky shrnout v tyto celky:

a) Poučky o stranách a úhlech (viz str. 31—32): V trojúhelníku leží proti rovným stranám rovné úhly, proti straně větší leží větší úhel. Tuto větu lze obrátit (obrácením věty není věta „proti menší straně leží menší úhel“). Zde se seznamuje žák přesněji s rovnoramenným trojúhelníkem, který hraje v geometrii vedle trojúhelníka pravoúhlého velmi důležitou roli.

Užitím těchto pouček na pravoúhlý trojúhelník (přepona je nejdelší stranou pravoúhlého trojúhelníka), přejdeme k novému ověření poučky: Vzdálenost bodu od přímky je nejkratší spojnice daného bodu s některým bodem dané přímky. Doplňkem je poučka: Vzdálenost daného bodu od určitého bodu přímky se zvětšuje, jestliže bod přímky se vzdaluje od paty kolmice s daného bodu k dané přímce spuštěné (viz str. 33, druhá část a obr. 67); je to pěkné užití věty o vnějším úhlu trojúhelníka.

Pak podáme přehled rozdělení trojúhelníků (1) podle velikosti úhlů, (2) podle velikosti stran: různostranný, rovnoramenný, rovnostranný, kosoúhlý (tupoúhlý, ostroúhlý), pravoúhlý.

Trojúhelník rovnoramenný může být kteréhokoli druhu (1). Rovnostranný trojúhelník má všechny úhly stejné.

Žák tu odůvodní proč má trojúhelník rovnostranný všechny úhly stejné, proč leží v tupoúhlém trojúhelníku nejdelší strana proti tupému úhlu, odhadne velikost stran (na př. úhly trojúhelníka jsou 40°, 80° a strana proti třetímu je 5 cm; třetí úhel je tedy 60°; proto je proti úhlu 40° strana menší než 5 cm, proti úhlu 80° větší než 5 cm).

b) Poučky jen o stranách: Součet dvou stran je větší než strana třetí a rozdíl dvou stran je menší než strana třetí. To již zná žák z I. tř. a z diskuse o větě shodnosti (sss). Zde podáme důkaz, který se opírá o věty o trojúhelníku rovnoramenném.

c) Poučky jen o úhlech (viz § 2).

Na závěr odvodíme čtvrtou větu shodnosti — srovnej s výkladem na str. 23.

§ 6. 1. V tomto paragrafu se seznámíme s řadou zajímavých vlastností rovnoběžníka, který definujeme takto: Čtyrúhelník, který má protější strany rovnoběžné, nazývá se rovnoběžník.

Jde o tyto dvě poučky, které lze obrátit: a) Rovnost protějších stran (str. 37—38 s jednou pomocnou větou). b) Úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí.

2. Pak definujeme obdélník jako čtyrúhelník, jehož tři úhly jsou pravé (tím všechny); snadno dokážeme, že je to rovnoběžník a s pomocí poučky o rovnosti protějších stran v rovnoběžníku a věty (sss) dokážeme rovnost jeho úhlopříček. Tuto větu obrátíme (str. 40).

Užijeme-li dosavadních výsledků na přímý pás, dokážeme již z I. tř. známou větu o vzdálenosti dvou rovnoběžek (ČG I, str. 23). Stačí na jedné rovnoběžce zvolit dva body, z nich ke druhé rovnoběžce spustit kolmice a dokázat, že vznikl obdélník; pohybuje-li se při tom jeden ze zvolených bodů, zůstává pohybující se strana našeho obdélníka stále stejná.

3. Dalším rovnoběžníkem je kosočtverec, který definujeme takto: Čtyrúhelník, jehož všechny strany jsou stejné, nazývá se kosočtverec. Podle obrácené věty o stranách rovnoběžníka (str. 38, druhá poučka) dokážeme, že je to rovnoběžník. Snadno pak ukážeme, že úhlopříčky kosočtverce: a) jsou k sobě kolmé, b) půlí příslušné úhly (obě věty obrátíme).

4. Nově definujeme i čtverec jako čtyrúhelník, který má všechny strany stejné (je to tedy kosočtverec) a jeden úhel pravý (z toho plyne snadno, že je to i obdélník). Odtud plyne, že má všechny vlastnosti kosočtverce a obdélníka, tedy: Úhlopříčky čtverce stojí na sobě kolmo, půlí se navzájem a jsou stejné (dokáže se věta obrácená).

Žáci mohou potom dokázat snadno tyto poučky: Kosočtverec, který má úhlopříčky sobě rovné, je čtverec. Obdélník, který má kolmé úhlopříčky, je čtverec. Obdélník, jehož úhel je úhlopříčkou půlen, je čtverec.

5. Závěrem odvodíme proslulou poučku Thaletovu (bez pojmu obvodového úhlu): Vrcholy pravoúhlých trojúhelníků, sestrojených nad společnou přeponou, leží na kružnici, která má společnou přeponu za průměr. Důkaz provedeme tak, že doplníme daný pravoúhlý

trojúhelník na obdélník, jemuž opíšeme kružnici. Tím také dokážeme, že střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku, leží ve středu jeho přepony.

6. Ke cvičením je třeba s žáky provést předem rozpravu.

§ 7. 1. Poněvadž jsme si pro II. tř. položili za úkol uvádět v souvislost starší poznatky s poznatky novými, bude třeba také ověřit správnost euklidovských konstrukcí, které žáci poznali na počátku školního roku. Jde o tyto konstrukce: Osa úsečky, osa úhlu, euklidovské sestrojování kolmic a rovnoběžek (obr. 92—94, 98, 99), sestrojení úhlu 60° a j.

2. Novou a důležitou částí tohoto paragrafu je odvození středních příček v trojúhelníku. Střední příčku definujeme takto: Jestliže přímka prochází středem jedné strany trojúhelníka a je rovnoběžná s jednou ze dvou zbývajících stran, nazývá se střední příčka. Tak ji také prakticky s užitím dvou trojúhelníkových pravítek rýsujeme.

O střední příčce trojúhelníka snadno dokážeme tyto poučky: a) Střední příčka trojúhelníka půlí dvě strany. b) Se třetí stranou je rovnoběžná. c) Je rovna polovině této strany.

S pomocí těchto výsledků odvodíme druhou důležitou poučku o ekvidistantních (stejně vzdálených) rovnoběžkách; viz str. 48: Jestliže několik rovnoběžek vytíná na určité přímce stejně dlouhé úseky, pak jsou také úseky těmito rovnoběžkami na libovolné přímce vyťaté navzájem si rovné. Důkaz provádíme postupně podle obr. 101.

Tím jsme dokázali, že i v lichoběžníku existuje střední příčka, která je obdobně definována jako u trojúhelníka. Má tyto vlastnosti:

Střední příčka lichoběžníka půlí obě jeho ramena a je rovna polovičnímu součtu obou jeho základen. Důkaz druhé části proveďme podle obr. 101 takto: P_2S je střední příčka trojúhelníka $P_3P_1Q_1$, proto platí, že $\overline{P_2S} = \frac{1}{2}\overline{P_1Q_1}$. Podobně $\overline{SQ_2} = \frac{1}{2}\overline{P_3Q_3}$, neboť PQ_2 je střední příčkou trojúhelníka $Q_1P_3Q_3$; ze součtu obou výsledků vyplývá velikost střední příčky PQ našeho lichoběžníka $P_3Q_3Q_1P_1$.

Získaných výsledků ihned použijeme k řešení velmi často se vyskytující úlohy: „Rozdělte danou úsečku na předepsaný počet stejných dílů“. Tím nahradíme známé dělení úsečky zkusmo.

Ve spojitosti s aritmetikou lze též provádět graficky tyto úlohy: Rozdělte danou úsečku na dvě, aby se měly k sobě v poměru 2 : 3, nebo na tři díly, jež by se měly k sobě v poměru 2 : 3 : 1 a pod.

3. Jako opakování vět o určenosti trojúhelníka odvodíme určenost trojúhelníka pravoúhlého (str. 49 a přísl. cvič. na str. 49; viz diskusi k obr. 103).

Ke konstrukcím lichoběžníka musí učitel provést rozpravu (obr. 104), totiž rozdělit lichoběžník v rovnoběžník a trojúhelník. Výsledku použijeme k sestrojení lichoběžníka ze čtyř stran (cvič. 173a, b); pomocný trojúhelník má jednu stranu rovnu rozdílu základen lichoběžníka, zbývající dvě strany jsou rovny ramenům lichoběžníka.

Závěrem ukážeme, že k určení čtyrúhelníka je třeba pěti nezávislých prvků (cvič. 174).

§ 8. Úkolem paragrafu je uvést poznatky, jichž žák během II. třídy nabyl v souvislost s vlastnostmi osové souměrnosti, které již poznal na počátku školního roku (ČG I, § 22).

Jde tu o přímky souměrně sdružené podle osy:

a) Jsou-li tyto přímky různoběžné, použijeme k důkazu pouček o trojúhelníku rovnoramenném.

b) Jsou-li s osou rovnoběžné, užijeme vlastnosti obdélníka.

Jako přípravu k odvození středu kružnice trojúhelníku opsané a středu kružnice trojúhelníku vepsané, odvodíme tyto poučky:

a) Vrcholy všech rovnoramenných trojúhelníků sestrojených nad společnou základnou, leží na ose této základny.

Neexistuje žádný takový vrchol, který by na této ose neležel (viz úvahu v § 9, str. 58, obr. 116).

b) Každý bod na ose úhlu má od obou ramen úhlu stejnou vzdálenost.

Neexistuje uvnitř úhlu bod, který by na ose úhlu neležel a který by měl od obou ramen úhlu stejnou vzdálenost (viz úvahu v § 9 na str. 59, obr. 117).

§ 9. Podle nových osnov odpadá (viz předchozí poznámky).

§ 10. Z tohoto paragrafu probereme jen tyto dvě partie:

a) Odvození a konstrukci středu kružnice trojúhelníku opsané (str. 64 — bez pojmu geometrického místa; srovnej s pozn. k § 8).

b) Pojem výšky trojúhelníka a průsečík výšek trojúhelníka (str. 65).

Střed kružnice trojúhelníku opsané odvodíme jako bod, který má od všech tří stran stejnou vzdálenost (sleduj obr. 121, str. 64): Střed S má mít od bodů A a B stejnou vzdálenost; trojúhelník ASB je tedy rovnoramenný, $\overline{SA} = \overline{SB}$, AB je jeho základnou. Leží tedy bod S na ose úsečky AB; tuto osu označíme p. Podobně je trojúhelník CSA rovnoramenný, $\overline{CS} = \overline{AS}$; proto leží bod S na ose úsečky AC, tuto osu označíme q. Bod S je průsečíkem obou os p a q. Poněvadž ale také platí $\overline{SB} = \overline{SC}$, leží bod S nutně na ose úsečky $\overline{BC}$ (to předpokládá, že na ose úsečky leží všechny body, které mají od jejích krajních bodů stejnou vzdálenost — viz výklad k obr. 126 na str. 58). Protínají se proto všechny tři osy stran trojúhelníka v jediném bodě S.

Odvození průsečíků výšek se provede s pomocí poučky o středních příčkách trojúhelníka (str. 48), která musí být předem připravena.

Žák se vlastní konstrukcí přesvědčí o tom, že střed kružnice opsané trojúhelníku a) ostroúhlému leží uvnitř trojúhelníka, b) tupoúhlému leží vně trojúhelníka, c) pravoúhlému leží ve středu přepony (to víme z věty Thaletovy).

Na konec dokážeme, že výška rovnoramenného trojúhelníka, příslušná k základně, tuto základnu půlí (obr. 123 — $\overline{AB} = \overline{AC}$, strana $\overline{AM}$ je společná, trojúhelníky ABM, ACM jsou shodné, oba jsou pravoúhlé a shodují se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich).

Cvičení jen z odst. V a VI.

§ 11. Z tohoto paragrafu probereme jen konstrukci středu kružnice trojúhelníku vepsané s podobným odůvodněním jako v § 10 (podle obr. 128 na str. 71 a výklad k obr. 117 na str. 59). Je třeba vysvětlit pojem dotyku kružnice a přímky. To lze provést asi takto (viz obr. 125, str. 69): Je dána přímka p a bod S; spusťme s bodu S kolmici k přímce p; její pata je P. Víme, že $\overline{SP}$ je nejkratší spojnice bodu S s některým z bodů X přímky p; každá jiná spojnice bodu X na přímce p ležícího s bodem S je delší. Nemůže proto na kružnici opsané z bodu S poloměrem rovným úsečce $\overline{SP}$ ležet jiný bod přímky p kromě bodu P. Přímka p se nazývá tečnou kružnice v bodě P; kružnice se této tečny dotýká v dotykovém bodě P. Platí, že $SP \perp p$.

Z cvičení provedeme jen 232 a 233.

PŘEHLED UČEBNÉ LÁTKY V ČECHOVĚ GEOMETRII PRO I. TŘ.

(srovnání obsahu učebnice s novými osnovami); pokyny k příslušným cvičením.

§	Poznámka k obsahu paragrafu	Cvičení, jež by měl probrat každý žák	Cvičení, k nimž bude asi třeba návodu nebo udat umístění	Cvičení vhodná pro zdatnější žáky (s event. návodem)	Cvičení vhodná k rýsování	Cvičení, která odpadají	Počet hodin, které nutno oddílu věnovat
1.	probrat důkladně	1—10	1—10		4, 6—10		2
2.		11—19, 20—21, 23—24	22, 24		22, 24		2
3.		25 až 35, 41 (30 až 35 lze užít ke cvičení ve slovním vyjadřování)	36—37		38—40		3
4.		42—43, 46—49	44—45, 48	50—53	47—53		3
5.		54—61, 64, 67—69	61—63, 64—66		61—63		2
6.		70—77	77—78		77—80		2
7.		81—100	92, 97—98				2
8.		101—108	probrat ve třídě				1
9.		109—115	112—115		112—115		3
10.		116—123	121—123		121—123		2

12.	probrat přehledně (viz pozn. k § 12)	136—138	139 až 146 obměnit na průčelnou polohu kvádru		139—146		1—2
13.	probrat důkladně	147—156, 158—163				157; viz pozn. k § 13	6
14.	probrat důkladně	164—174					4
15.	jen přehledně na kvádru jako opakování		175—188			viz pozn. k § 15	1
16.	probrat důkladně	189—221	191, 201, 213, 217, 221				1—2
17.	probrat důkladně	222—232	225—232				2—3
18.	probrat důkladně	233—240	239—240		239—240		3—4
19.	probrat důkladně	241—252	250—259	253—259			3
20.	probrat důkladně	260—271	265—271				3—4
21.—22.	probere se až ve II. tř.	—	—	—	—	272 až 295 se proberou v II. třídě	0
23.	jen poslední odstavec o pravidelném šestiúhelníku	297—299				296, 300—301	1
24.	vynechá se; proberou se jen některé pojmy při opakování	303—304	305—314 (s návodem)				1
25.	cvičení k opakování; probírají se během školního roku	317 až 333, 338 až 344, 347 až 351, 359 až 375, 377 až 378, 380, 385		335—337	347—353, 355—356, 358	ostatní cvičení odpadnou	

PŘEHLED UČEBNÉ LÁTKY V ČECHOVĚ GEOMETRII PRO II. TŘ.

(srovnání obsahu učebnice s novými osnovami); pokyny k příslušným cvičením.

Poznámka. Ve II. třídě se začne s § 22 z Čechovy Geometrie pro I. tř.

§	Poznámka k obsahu paragrafu	Cvičení, jež by měl každý žák probrat	Cvičení, k nimž bude asi třeba návodu nebo udat umístění	Cvičení vhodná pro zdatnější žáky	Cvičení vhodná k rýsování	Cvičení, která odpadají	Počet hodin, které nutno oddílu věnovat
§ 22 ČG I	tento paragraf se týká Čechovy Geometrie pro I. tř.	280—295					8—9
1.	probrat důkladně	5—24, 28—30	1—4, 11—24	25—27			5
2.	probrat důkladně ve spojení se všemi cvičeními z ČG I § 21	31—34, 42—44, 55—60, 62—63		35—41, 61		45—54	5
3.	probrat důkladně	64—79, 89—97, 102—103	80—101	80—88, 98—101	64—69		6
4.	probrat se vztahem k okolí žákovy školy				104—122 asi 10 cvičení; viz pozn. k § 4		2—3
	přidá se nově						

		138—139, 141—144	141—144	136—137, 140			
6.	probrat důkladně	145—146, 148—151, 153, 157—161	145—159	147, 152, 154—156			6
7.	první část je opakování § 22 z ČG I; druhou část důkladně; přidá se nově zvětšování a zmenšování	162—174	173		162—174	176, 179—180	8
8.	jako opakování a doplnění § 22 z ČG I	175, 177—178			175		2
9.	odpadá celý	—				181—194	0
10.	jen kružnici trojúhelníku opsanou a výšky trojúhelníka	214, 217—219		215—216, 220—222	217	195—213	2
11.	jen kružnici trojúhelníku vepsanou	232—233				223—231	1
*)							

*) Na závěr nově: Složitější úlohy o obdélníku, čtverci a kvádru (viz „Dodatek“ na konci poznámek pro II. třídu na str. 42).

Dodatek. K 9. bodu osnov pro II. tř. upozorňujeme na složitější úlohy o obsahu, povrchu a objemu z Čechových učebnic aritmetiky:

(1) ČA II, cvič. 54—56, 68—69, 86, 91—93, 115, 136—143, 149, 152—156, 189, 201, 268—269, 287.

(2) ČA III, cvič. 120, 121, 123—124.

IV. POZNÁMKY PRO III. A IV. TŘÍDU

Zatím co nové osnovy pro I. a II. tř. středních škol se více méně kryjí s osnovami, jež pro tyto třídy platily dosud, vykazují nové osnovy pro III. a IV. tř. středních škol zcela nové uspořádání látky jak co do obsahu tak i rozsahu. V dalším ukážeme, pokud by se mohlo dosavadních učebnic E. Čech: Geometrie pro III. tř. stř. škol a Geometrie pro IV. tř. stř. škol přechodně použít při vyučování podle těchto nových osnov.

Třída III. 1.—2. měsíc: *Proměny rovnoběžníků a trojúhelníků a jejich praktické užití. Obsah čtverce, obdélníka, trojúhelníka, rovnoběžníka, lichoběžníka. Odvození vzorce. Závislost obsahu na určujících prvcích. Užití v jednoduchých úlohách z praktického života. Výpočet prvků z obsahu.* Probíráme podle ČG III, § 1, str. 3—7, cvič. 1—11 a § 3, str. 21—27, cvič. 61—83. Začneme s pojmem obsahu obdélníka, jak jej žáci znají již z I. tř. a rozšíříme platnost vzorce též na čísla desetinná. V dalším postupujeme podle učebnice ve výpočtu plošných obrazců a teprve pak přejdeme na proměny obrazců, jež můžeme založiti na rozkladu obrazců a sčítání a odčítání shodných nebo jen rovných částí anebo na vzorcích odvozených pro plošné obsahy rovnoběžníka a trojúhelníka. Je účelné, užít jedné methody pro odvození a druhé jako cvičení prováděné s žáky hned poté.

3.—5. měsíc: *Pythagorova věta a její užití v planimetrii: úhlopříčka čtverce a obdélníka, kosočtverce, výška trojúhelníka rovnoramenného a rovnostranného, obsah trojúhelníka rovnostranného a pravidelného šestiúhelníka. Užití na příkladech z praktického života.* Probíráme podle ČG III, § 2, str. 10—17, cvičení 16—33. Zbývá doplnit vzorcem pro obsah rovnostranného trojúhelníka a pravidelného šestiúhelníka a příklady z praktického života.

6. měsíc: *Kruh a kružnice*: *úseč*, *výseč* probíráme jako doplněné opakování podle ČG I, § 3, str. 10—11. *Vztahy přímky a kružnice* (*sečna*, *tečna*), *tečna v bodě kružnice*: *vlastnosti*, *konstrukce* probíráme podle ČG IV, § 3, str. 41—44. V učebnici je při odvození užito osové souměrnosti, vztahů mezi stranami a úhly trojúhelníka a vět o shodnosti trojúhelníků, tedy vesměs látky probírané ve II. tř. Pojem úhlu středového se bude hodit při látce probírané v 8. měsíci.

Tečna z bodu ke kružnici: *vlastnosti*, *konstrukce*, *délka tečny*, *souměrnost*. Probíráme podle ČG IV, § 3, str. 59—60. Avšak ke konstrukci tečny, jak je uvedena na str. 59, obr. 107, potřebujeme Thaletovu větu, jež sice není výslovně uvedena v osnovách, avšak její odvození je snadné (viz ČG II, str. 42). Nebo užijeme konstrukce na str. 60, obr. 108, k níž potřebujeme jen pojem osové souměrnosti při rozboru a k sestrojení bodů B_1 a B_2. Délku tečny počítáme podle ČG III, str. 14 a cvič. 38 a 39.

7. měsíc: *Dvojice kružnic*. *Strojné úlohy o kružnici z daných prvků*. Probíráme podle ČG IV, § 3, str. 49—53, cvičení 122—126, 145, 146, 149—171. Některé z těchto úloh jsou obtížnější, bude třeba, aby učitel podal žákům případný návod.

8. měsíc: *Obvod a obsah kruhu a jeho částí*. *Výpočet poloměru z obvodu a obsahu*. *Příklady z praktického života*. *Použití Pythagorovy věty k výpočtu délky tětivy a vzdálenosti její od středu kružnice*. Probíráme podle ČG III, § 4, str. 35—40; cvičení 92—118, 34—37 (případně též cvičení 271—276 z ČG IV).

9. měsíc: *Povrch a objem*, *síť kolmého hranolu a rotačního válce*. Probíráme podle ČG III, § 1, str. 7—8 a § 6, str. 51—53. Cvičení 12—15, 119—124, 142—145.

Třída IV. 1.—2. měsíc: *Mnohoúhelníky*, *zvláště pravidelné*, *jejich vlastnosti*, *sestrojení v jednoduchých příkladech*. Probíráme podle ČG IV, § 1, str. 3—12, cvičení 2, 3, 5, 11—29.

Jehlany, *rotační kužele a válce*: *sítě těles*. Probíráme podle ČG III, § 5, str. 47—48, § 6, str. 52—55, cvičení 136—141. V těchto cvičeních probíráme jen část, týkající se sestrojování sítě.

Vztahy bodů, *přímek*, *rovin v prostoru*, *průsečnice rovin*, *vztahy dvou a více rovin*, *přímky a roviny*. Tento úvod do stereometrie lze probírat obsahově asi v rozsahu jako v učebnici Holubář-Vojtěch: Geometrie pro V. tř. střed. škol, str. 141—155.

3.—4. měsíc: *Užití věty Pythagorovy pro výpočet tělesné úhlopříčky hranolu a krychle, výpočet pobočné výšky jehlanu a strany kužele.* Probíráme podle ČG III, § 2, str. 14, § 5, str. 46 a § 6, str. 53. Cvičení 40 až 48 (případně též cvičení 277—279 z ČG IV).

Povrch a objem jehlanu a rotačního kužele. Probíráme podle ČG III, § 5, str. 42—46 a § 6, str. 53 a 54. Cvičení 125, 128, 130, 152, 153, 157 a 158.

5.—6. měsíc: *Závislost povrchu a objemu hranolu, jehlanu a rotačního válce a kužele na určujících prvcích. Výpočet povrchu a objemu těles složených z jednoduchých těles.* Probíráme podle ČG III, cvičení 53—56, 126, 129, 131—134, 146—151, 154—156, 159 a 160.

Koule, její vlastnosti, části koule a plochy kulové. Část podle ČG III, § 6, str. 56 a 55. Výklad je doplniti probráním pojmů: kulový vrchlík, pás, úseč a výseč.

7. měsíc: *Povrch a objem koule.* Probíráme podle ČG III, § 6, str. 57—59, cvičení 161, 162, 165—168.

Užití věty Pythagorovy pro úlohy o kouli: vzdálenost roviny úseče od středu koule, poloměr úseče: ČG III, cvičení 49—52 a ČG IV, cvičení 280—284.

Výpočet poloměru koule z povrchu a objemu: ČG III, cvičení 163, 164, 169 a 170.

8.—9. měsíc: *Konstruktivní úlohy z planimetrie, zejména o trojúhelníku a kružnici, z různých prvků.* Tu lze probrat pojem geometrického místa podle ČG IV, § 2, odst. 12, str. 31—35 a cvičení 74—77 a na to navázat podle téže učebnice § 3, odst. 16 a 17, str. 53—63 a cvičení 127—144, 149—173 a 177—180. Uzavřeme konstrukcemi trojúhelníků a čtyrúhelníků podle ČG IV, § 4, odst. 18 a 19, str. 72 až 84, cvičení 203—252. Látku těchto odstavců probéřeme v rozsahu a úpravě nutné pro řádné zdůvodnění konstrukcí ve cvičeních.

V. VÝSLEDKY CVIČENÍ

I. TŘÍDA

5. Počet spojnic (10) zjistí žák pokusem, ne úvahou. **6.** (Znamená-li P nepřístupný průsečík obou přímek, očekává autor, že si žáci zvolí body A až F tak, že jedna přímka je $ABCP$ a druhá $DEFP$ nebo že jedna je $PABC$ a druhá $PDEF$. Autor nemyslí, že by žáci přišli na zlomyslnou volbu $PABC$, $DEFP$, a proto volil jednodušší, ač záludný text.) Bod Z leží na přímce XY.

13. $\overline{AB} = 54{,}4$ mm; $\overline{AC} = 56$ mm; $\overline{BC} = 61{,}6$ mm. **14.** $\overline{BC} = 61{,}6$ mm; $\overline{BD} = 43{,}2$ mm; $\overline{CD} = 30{,}4$ mm. **15.** 172 mm. **16.** 135,2 mm. **17.** 184 mm. **18.** 127,7 mm; 5,5 mm. **19.** 59,2 mm. **20.** $\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CE} = 22$ mm; $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = 33$ mm; $\overline{AE} = \overline{BF} = 44$ mm; $\overline{AF} = 55$ mm.

21. Jest $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$. **22.** Jsou čtyři možnosti: (1) H i K jsou vrcholy; $ABCD$ se rozdělí na dva trojúhelníky. (2) Jen H nebo K je vrchol; $ABCD$ se rozdělí na trojúhelník a čtyrúhelník. (3) Body H, K jsou na dvou sousedních stranách; $ABCD$ se rozdělí na trojúhelník a pětiúhelník. (4) Body H, K jsou na dvou protějších stranách; $ABCD$ se rozdělí na dva čtyrúhelníky. **23.** Pět úhlopříček. **24.** (Žáci by si měli načrtnout dvojí obrazec, v každém úhlopříčky jiného druhu.) Úhlopříčky AD, BE, CF rozdělí $ABCDEF$ každá na dva čtyrúhelníky. Úhlopříčky AC, AE, BD, BF, CE, DF rozdělí každá $ABCDEF$ na trojúhelník a na pětiúhelník. Celkem je 9 úhlopříček. **28.** $\overline{AB} = \overline{EF} = 13$ mm; $\overline{BC} = \overline{DE} = 10$ mm; $\overline{CS} = \overline{SD} = 30$ mm. Totéž platí i při jiné poloze přímky vedené bodem S.

29.—33. Středy kruhových oblouků určíme půlením zkusmo. **35.** $\overline{AB'} = 48$ mm. **36.** (Na tuto úlohu a na následující pozor! Bude u nich možná třeba malého návodu. Napřed musíme z žáků dostat, že abychom mohli obrazec sestrojit, potřebujeme znáti vzájemné vzdálenosti bodů A, H, K, B. Potom máme řešiti v podstatě touž úlohu jako v Čechově Aritmetice pro I. tř., cvič. 106 a), b). $\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{KB} = (22 + 14 + 10)$ mm $= 46$ mm; obvod je 106 mm. **37.** $\overline{AB} = 50$ mm, tedy $\overline{AH} = 26$ mm; $\overline{HK} = (36 - 26)$ mm $= 10$ mm. **38.** 27 mm. **39.** Z bodu A opište pomocnou kružnici o poloměru 50 mm; na ní zvolte libovolně střed S a z něho opište kružnici k o poloměru 50 mm. Kružnici k přetněte kruhovým obloukem o poloměru 80 mm ze středu A; tím B, C. Pak $\overline{DB} = \overline{DC} = 60$ mm.

43. a), b) ano (přesně rýsovat!); ostatní ne. **44.** Třetí strana je menší než $(97 + 46)$ mm $= 143$ mm a větší než $(97 - 46)$ mm $= 51$ mm; proto je obvod menší než $(97 + 46 + 143)$ mm $= 286$ mm a větší než $(97 + 46 + 51)$ mm $= 194$ mm. **45.** Obvod je větší než 13 m 16 cm a menší než 21 m 9 dm. **46.** a) 23 cm; d) 23 cm, ostatní ne. **47.** Přímky CH, AK, BL se protnou všechny v jednom bodě; $\overline{CH} = \overline{AK} = \overline{BL}$. **48.** Úloha je formulována za předpokladu, že žáci nebudou zlomyslně volit trojúhelník ABC rovnostranný. Jinak jako u 47.

49. Strana je 52 mm. **50.** Je dobře žádati tři různé obrazce podle toho, zda základnou je AB či AC či BC; celkem 6 rovnoramenných trojúhelníků.

51. Jako 50. **52.** (Na tomto stupni to není zcela lehké.) Střed kružnice je vrcholem rovnoramenného trojúhelníka o základně $\overline{AB} = 4$ cm a ramenech rovných 3 cm; kružnice jsou dvě. **53.** (Vyžaduje přesného rýsování. Volíme-li poloměr třetí kružnice značně větší, je to lehčí.) Sestrojíme dva rovnostranné trojúhelníky nad $\overline{HK} = 32$ mm a jeden rovnoramenný o základně HK a ramenech rovných 43 mm.

61. Body A, B, C leží na sestrojené kružnici. **62.** Všechny kolmice se dotýkají sestrojené kružnice. **63.** Bod Z leží na přímce XY.

75. Vzdálenost b od a je 24 mm, b od e je 60 mm, c od e je 76 mm. **76.** Jest $AC \parallel BD$, $BC \parallel AD$. **78.** (Proveďte rozpravu ve škole.) Vyžaduje pozorného čtení (zejména volba bodu H). Vzdálenost rovnoběžek AH a BK je 43 mm. **79.** $\overline{PS} = \overline{ST} = \overline{TU} = 13$ mm. **80.** $HK \parallel LM \parallel KL$.

82.—86. Proveďte ve škole s pomocí modelů. (Poznámka: **87.—91.** s pomocí obrázku 42 na str. 32.) **87.** První pár: Stěny $ABFE$, $AEHD$ obsahují prvou hranu AE. Druhý pár: Stěny $CGFB$, $CGHD$ obsahují druhou hranu CG. Třetí pár: Stěny $EFGH$, $ABCD$ neobsahují žádnou z nich. 88. ($AE \parallel CG$), ($BF \parallel DH$), ($EF \parallel DC$), ($AB \parallel HG$), ($FG \parallel AD$), ($BC \parallel EH$); celkem 6 párů. **89.** Zbývá jediná stěna se zvolenou stěnou rovnoběžná. **90.** 4 hrany ze zvolené stěny vycházejí (jsou k ní kolmé) a 4 hrany leží ve stěně s danou stěnou rovnoběžné.

91. Ke hraně AE lze najít 4 takové hrany: HG, FG, BC, CD. **92.—96.** Vhodné za úkol. **97.—100.** Po rozpravě za úkol.

102.—107. Ve škole při nácviku. **108.** Předepište žákovi určitý vrchol. **109.** Poloměr 45 mm.

112. $EGFH$ je obdélník, po případě čtverec (je-li $EF \perp GH$). **114.** Proveďte jen graficky (bez měření). **115.** Jako 114. **117.** První čtverec je větší. **118.** Druhý čtverec je větší. (Výsledek cvič. 117 a 118 je později verifikován ve cvič. 157.) **119.** Obrazec je čtverec (proč?).

123. Trojúhelníky DFH a EGK jsou shodné. **126.—134.** Vynechat. Jen pro zdatné žáky za cvičení. **148.** 48 dm². **149.** 38,44 m². **150.** 36 dm².

151. 44 a. **152.** 30 cm². **153.** 58 cm². **154.** 78 cm². **155.** 160 m. **156.** 10 m. **157.** Čtverce ze cvič. 117 mají obsahy 4 761 mm², 4 232 mm²; čtverce ze cvič. 118 pak 2 809 mm², 32 cm². **158.** Aby bylo lze porovnati přesnost, s níž jednotliví žáci pracovali, je třeba, aby všichni měli stejnou velikost obrazce. Nejlépe je tuto úlohu provésti dvakrát: jednou nechť je dána velikost strany, třeba 7 cm (délka úhlopříčky je potom 99 mm), po druhé nechť je dána velikost úhlopříčky, třeba 11 cm (délka strany je pak 77,8 mm). **159.** 220 cm². **160.** 41 cm².

161. 104 cm². **162.** 216 cm². **163.** 232 dm². **165.** 75,264 dm². **166.** 72,128 dm³. **167.** 20,736 dm³; 23,872 dm³. (Na základě výsledků ze cvič. 165 a 166.) **168.** 108,64 dm². **169.** 79 cm³. **170.** 136 cm².

171. 360 hl. **172.** 4,8 m³. **173.** 21,28 m². **174.** Rozměry: 24 dm, 2 m, 16 dm. Odřízne se 2,88 m³ dřeva. [Poznámka: Cvičení 120—132 provádíme s pomocí modelu, na němž jsou popsány vrcholy, nebo s pomocí obrázku 84 na str. 54.]

182. AB, CD, EF, GH; AD, BC, AE, BF; CG, DH, EH, FG. **183.** BF; AE, CG, DH; AB, BC, EF, FG; AD, CD, EH, GH. **184.** Bod D a bod C. Žák má odpověděti jen podle názoru! **187.** (Úplný výčet všech sedmi trojic je snad obtížný. Stačí, umí-li žák udati jeden nebo dva příklady.) AB, DH, FG; AD, BF, GH; AD, CG, EF; AE, CD, FG; AE, BC, GH; BC, DH, EF; CD, BF, EH.

191. R. **192.** $2R$. **193.** $3R$. **194.** $1\frac{1}{2}R$. **195.** $2\frac{1}{2}R$. **196.** $2R$. **197.** $3R$. **198.** $1\frac{1}{2}R$. **199.** $3R$. **200.** $\frac{1}{2}R$.

201. Z. **202.** Z. **203.** S. **204.** Z. **205.** JZ. **206.** SV. **207.** JV. **208.** SV. **209.** SV. **210.** Z.

211. J. **212.** Z. **213.** $4R$. **214.** $2R$. **215.** $\frac{1}{3}R$. **216.** $11R$. **217.** $2R$. **218.** $1\frac{1}{3}R$. **219.** $\frac{1}{3}R$. **220.** $\frac{1}{6}R$.

221. $\frac{1}{2}R$, R. **224.** $2\frac{1}{2}R$. **225.** $2\frac{3}{4}R$. **226.** $1\frac{1}{2}R$. **227.** $1\frac{1}{3}R$. **228.** R. **229.** $\frac{1}{2}R$. **230.** $\alpha + \beta = R$.

231. $\beta = \frac{2}{3}R$; $\gamma = \frac{1}{2}R$. **232.** $2\frac{1}{2}R$; $3\frac{1}{3}R$. **237.** Čtyřikrát; osmkrát. **239.** $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle ABE$. **240.** $\sphericalangle ASE = 2 \cdot \sphericalangle ACE$.

247. 54,9°; 112,5°; 275,5°. **249.** Čáry ASD, CSF jsou přímé, BSE není. **250.** 108.

251. 46. **252.** 60. **253.** 66. **254.** 66. **255.** 36. **256.** Je přímá; není přímá. **257.** 40. **258.** 72°. **259.** 15.

263. a) 60°; b) 32°; c) 169°; d) 43°. **264.** b) ano; a), c) ne. **265.** a) 30; b) 15. **266.** 40. **267.** Jest $\alpha + (\beta + \gamma) = 180°$ a první sčítanec je větší než druhý, tedy $\alpha > 90°$. **268.** $\alpha = 103°$; $\beta = 45°$. **269.** $\gamma = 67°$. **270.** $\varepsilon = 40°$; $\omega = 95°$.

271. $\varphi = 52°$; $\psi = 82°$. **298.** $\varphi = 65°$; $\omega = 71°$. **275.** $\varphi = 73°$. **276.** $\delta = 58°$; $\varepsilon = 82°$. **277.** $\delta = 120°$. **278.** $\beta = 77°$. **279.** 55°.

299. Délka strany 8,66 mm.

II. TŘÍDA

1. Obě mají stejný smysl. **2.** Buďto žádný společný bod, nebo jediný, nebo společné body tvoří úsečku. **3.** Nemohou. **4.** Nemusí, ale mohou.

11. $\alpha = \gamma = \psi$; $\beta = \delta = \varphi$. **12.** $\varphi = \psi = \alpha$; $\omega = 2R - \beta$. **13.** a) $\omega = \beta$; b) $\alpha = \psi$; c) $\varepsilon = 2R - \delta = 117°$; d) $\gamma = 2R - \varphi = 98°$; e) $\varphi = 60°$; f) $\omega = 54°$. **14.** $\alpha = 49°$; $\beta = 66°$. **15.** $37\frac{1}{2}°$. **16.** $\alpha = 36°$. **17.** $\beta = 17°$; $\gamma = 34°$. **18.** $\varphi = \delta = \beta$; $\psi = 2R - \beta = 100\frac{1}{2}°$. **19.** $\gamma = 118°$. **20.** $\omega = 74°$.

21. $\varepsilon = 126°$. **22.** $\varphi = 36°$. **23.** $\psi = 84°$. **24.** $\alpha = 153°$. **26.** a) Protnou se napravo; b) $a \parallel b$; c) $a \parallel b$; d) protnou se nalevo. **27.** a) $a \parallel c$; b) $k \parallel p$; c) $AB \parallel CD$; d) žádné rovnoběžky. **28.** $a \parallel f$; $b \parallel e$.

31. (Místo při vrcholu B má býti při vrcholu C.) a) $\gamma = 85° 19' 30''$; $\varphi = 143° 8' 13''$; $\omega = 122° 11' 17''$; $\psi = 94° 40' 30''$; b) $\alpha = 67° 38' 41''$; $\beta = 58° 38' 53''$; $\omega = 121° 21' 7''$; $\psi = 126° 17' 34''$; c) $\alpha = 111° 24' 19''$; $\beta = 23° 1' 43''$; $\gamma = 45° 33' 58''$; $\varphi = 68° 34' 41''$. **32.** $\sphericalangle FGH = \sphericalangle HFK$, neboť oba jsou doplňkové k $\sphericalangle FHG$. **33.** Můžeme užíti pravoúhlých trojúhelníků PRT, QST, ale také pravoúhlých trojúhelníků QRX, PSX, jestliže X je průsečík přímek RP, SQ. **34.** Trojúhelník HLN dá $\sphericalangle LHN = 40°$, HKN dá $\sphericalangle KHN = 20°$. Tedy $\sphericalangle LHK = \sphericalangle LHN = \sphericalangle KHN = 20°$. Mohli jsme také užíti trojúhelníka HLK (místo HLN). **35.** Je-li R průsečík přímek AD, BE, S průsečík přímek AC, BF, užijeme buďto trojúhelníků AER, BFR nebo trojúhelníků AFS, BES. **36.** Jako 445, ale obrazec vypadá jinak. **37.** Užijeme součtu úhlů v FGH, FKH. **38.** BCD dává $\beta = \alpha_2 + \varepsilon$, ABD dává $\gamma = \alpha_1 + \varepsilon$. **39.** (Velikost úhlu XYZ není třeba znát.) $\sphericalangle YTZ = 130° 41' 39''$. **40.** $\sphericalangle YSZ = 92° 8' 39''$.

41. $\sphericalangle UTV = 69° 10' 32''$; $\sphericalangle TUV = 57° 23' 56''$; $\sphericalangle TVU = 53° 25' 32''$. **43.** a) $73° 48'$; b) $119° 55'$; c) $59° 41' 40''$. **44.** $82° 17' 2''$. **45.** Nejmenší úhel $60° 39' 10''$, ostatní každý $131° 52' 10''$. **46.** $34° 40' 48''$. **47.** $x = 27$. **48.** 8 stran. **49.** 41úhelník až 46úhelník. **50.** Vnější úhel: a) 30°; b) 24°; c) 20°; d) 12°. Vnitřní úhel: a) 150°; b) 156°; c) 160°; d) 168°.

51. a) 24 strany; d) 60 stran; e) 72 strany; f) 90 stran; b) a c) nemožné. **52.** a) 5 stran; b) 6 stran; d) 10 stran; e) 3 strany; c) a f) nemožné. **53.** 36°. **58.** a) $\gamma_2 = 136° 7' 24''$; $\delta_2 = 107° 46' 13''$; b) $\gamma_2 = 34° 36' 4''$; $\delta_2 = 110° 35' 45''$; c) $\alpha_2 = 69° 23' 32''$; $\gamma_2 = 133° 47' 22''$; d) $\alpha_2 = 67° 6' 53''$; $\beta_2 = 41° 2' 34''$. **59.** a) $\gamma_3 = \alpha_3$; $\beta_3 = \delta_3 = 81° 47' 13''$; b) $\alpha_3 = \gamma_3 = 97° 15' 5''$; $\delta_3 = \beta_3$; c) $\alpha_3 = \gamma_3$; $\beta_3 = \delta_3 = 77° 31' 25''$; d) $\alpha_3 = \gamma_3 = 101° 2' 57''$; $\beta_3 = \delta_3$.

61. Úhly $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle ADC$ jsou výplňkové, tedy poloviční úhly $\sphericalangle XAD$, $\sphericalangle XDC$ jsou doplňkové. **64.** a) $\alpha = 41{,}4°$; $\beta = 55{,}8°$; $\gamma = 82{,}8°$; b) $\alpha = 89°$; $\beta = 48{,}6°$; $\gamma = 42{,}4°$; c) $\alpha = 119{,}4°$; $\beta = 34{,}2°$; $\gamma = 26{,}4°$; d) $\alpha = 31{,}5°$ $\beta = 98{,}8°$; $\gamma = 49{,}7°$. **65.** a) $a = 38{,}6$ mm; $\beta = 81{,}6°$; $\gamma = 56{,}4°$; b) $b = 116$ mm; $\alpha = 42{,}6°$; $\gamma = 24{,}4°$; c) $c = 98{,}2$ mm; $\alpha = 11{,}5°$; $\beta = 21{,}5°$; d) $c = 38{,}7$ mm; $\alpha = 28{,}1°$; $\beta = 126{,}9°$. **66.** a) $a = 50{,}2$ mm; $b = 63{,}1$ mm; $\gamma = 78°$; b) $b = 82{,}8$ mm; $c = 57{,}2$ mm; $\alpha = 20°$; c) $a = 54{,}5$ mm; $c = 89{,}2$ mm; $\beta = 21°$; d) $b = 83{,}6$ mm; $c = 56{,}4$ mm; $\alpha = 55°$. **67.** a) $b = 63{,}3$ mm; $c = 78{,}1$ mm; $\gamma = 80°$; b) $a = 48{,}4$ mm; $c = 40{,}3$ mm; $\gamma = 19°$; c) $b = 26{,}5$ mm; $c = 66{,}8$ mm; $\beta = 10°$. **68.** a) $c = 28{,}1$ mm; $\beta = 18{,}2°$; $\gamma = 8{,}8°$; b) $a = 92{,}3$ mm; $\alpha = 119{,}7°$; $\gamma = 23{,}3°$; c) buďto $a = 94{,}9$ mm; $\alpha = 98{,}1°$; $\beta = 46{,}9°$ nebo $a = 19{,}8$ mm; $\alpha = 11{,}9°$; $\beta = 133{,}1°$; d) $a = 126{,}5$ mm; $\alpha = 114{,}9°$; $\gamma = 30{,}1°$. **69.** $\sphericalangle GHK = \sphericalangle CAB$; $\overline{CA} = \overline{GH}$. **70.** $ABC \cong PRQ$ (sus).

71. $ABC \cong HUN$ (sss). **72.** $ABC \cong HFG$ (usu). **73.** $ABC \cong RST$ (usu). **74.** $PQS \cong TRS$ (sus). **75.** $ABH \cong ACH$ (sus). **76.** $DEF \cong EDG$ (sss). **77.** $KLN \cong NMK$ (suu). **78.** $XYZ \cong ZUX$ (sus). **79.** $ASE \cong HPE$ (sus). **80.** $HKL \cong TSR$ (sus).

81. Nemusí býti shodné. **82.** Nemusí býti shodné. **83.** $HKL \cong TSR$ (suu).

84. $HKL \cong STR$ (sss). 85. Nemusí býti shodné. 86. Nemusí býti shodné. 87. $HKL \cong TRS$ (sus). 88. Nemusí býti shodné. 89. $AST \cong BST$ (sus). 90. $YPK \cong YQK$ (suu).

91. $SLM \cong SRT$: a) podle sss, b) podle sus. Při b) užijeme rovnosti úhlů při základně rovnoramenného trojúhelníka. 92. $AHK \cong BHK$ (sss). 93. $XSZ \cong$ $\cong XTY$ (sus). 94. $ABE \cong DCE$ (usu); z toho plyne a); mimo to plyne $\sphericalangle ABE =$ $= \sphericalangle DCE$ a to jsou úhly střídavé, takže dostaneme b). 95. Střídavé úhly mezi rovnoběžkami dají $ABE \cong DCE$ (usu). 96. Střídavé úhly mezi rovnoběžkami dají $ABE \cong DCE$ (usu), takže $\overline{AE} = \overline{DE}$, $\overline{BE} = \overline{CE}$, z čehož $ACE \cong DBE$ (sus). Z prvé shodnosti plyne a); ze druhé plyne předně b) a za druhé rovnost střídavých úhlů $\sphericalangle CAE$, $\sphericalangle BDE$, která dává c). 97. $SXY \cong SYV$ (sus). 98. $HKL \cong HML$ (sss). 99. Jest $\sphericalangle BAT = \sphericalangle CAR$, tedy $BAT \cong CAR$ (sus). 100. Jest $\sphericalangle KFH = \sphericalangle GFL$, tedy $KFH \cong GFL$ (sus).

101. Jest $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAE$, tedy $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAE$, takže $ACD \cong$ $\cong AEB$ (sus). 104. a) $\overline{UW} = 8{,}84$ km; b) směr UW je S 73,7° V. (Toto označení je vysvětleno v textu cvičení 521.) 105. a) 58,3 km; b) S 59° V. 106. 261 m. 107. (V textu úlohy jest doplniti $\overline{AB} = 1$ km.) a) 913 m; b) 484 m. 108. a) 834 m; b) 612 m; c) 420 m. 109. a) 273 m; b) 207 m; c) 183 m. 110. 1 736 m.

111. 129 m od A, 371 m od B. 112. 28 m. 113. 208,5 m. 114. 38,7°. 115. 35°. 116. a) 61,3°; b) 4,39 m. 117. 31 m. 118. 38,6°. 119. $5\frac{1}{4}$ km za hodinu. 120. 385 m.

121. 96,2 m. 122. 1,035 m. 123. a) 128° 22′ 8″; b) 106° 11′ 36″; c) 71° 4′ 28″; d) 62° 2′ 4″; e) 51° 58′ 6″; f) 32° 52′ 44″. 124. a) 83° 52′ 9″; b) 78° 7′ 27″; c) 72° 31′ 33″; d) 48° 51′ 42″; e) 33° 33′ 46″; f) 15° 41′ 36″. 125. Buďto 74° při základně a 32° proti ní nebo 74° proti základně a 53° při ní. 126. Při základně 72°, proti ní 36°. 127. Při základně 36°, proti ní 108°. 128. 39°. 129. $\sphericalangle KHL = 33°$, $\sphericalangle HKL = 126°$, $\sphericalangle HLK = 21°$. 130. a) Trojúhelník XYZ dá $\sphericalangle YXZ = 32°$; rovnoramenný trojúhelník XZV dá $\sphericalangle ZXV = 32°$; tedy $\sphericalangle YZX = \sphericalangle ZXV$; protože to jsou úhly střídavé, je $XV \parallel YZ$. b) Ježto $\sphericalangle YXZ = 52°$, $\sphericalangle ZXV =$ $= 32°$, je $\sphericalangle YXV = 84°$, tedy $\sphericalangle YXV = \sphericalangle ZUV$; protože to jsou úhly souhlasné, je $XY \parallel UZ$.

131. 32°. 132. $\sphericalangle FAB = \sphericalangle AFB = 72°$; $\sphericalangle ABF = 36°$. 133. Rovnoramenný trojúhelník EFH má proti základně úhel 32°, tedy $\sphericalangle EFH = 74°$. To je však vnější úhel trojúhelníka FGH a jeden z protějších vnitřních úhlů měří 37°, tedy druhý měří $74° - 37° = 37°$, takže trojúhelník FGH je rovnoramenný. 134. Ježto $PQ \parallel RS$, jest $\sphericalangle RSQ = 180° - \alpha = 113°$. Tedy $\sphericalangle RSP = 113° -$ $- 75° = 38°$, takže $\sphericalangle RPS = 180° - (104° + 38°) = 38° = \sphericalangle RSP$. 135. 75°. 136. Jest $\sphericalangle ZXV = \alpha_1 + \beta_1$. Avšak $\sphericalangle ZVX = \alpha_2 + \beta_2$ (vnější úhel trojúhelníka XVY). Tedy $\sphericalangle ZXV = \sphericalangle ZVX$. 137. Jest $\sphericalangle EFH = \sphericalangle HFG$. Avšak $\sphericalangle HFG = \sphericalangle EHF$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Tedy $\sphericalangle EFH =$ $= \sphericalangle EHF$. 138. Jest $\beta = \gamma = 62°$, tedy $\alpha = 56°$, takže $\alpha < \beta$, tedy $a < b$. 139. Jest $\beta = 62°$, $\gamma = 64°$. Tedy $\sphericalangle SBC = 31°$, $\sphericalangle SCB = 32°$, takže $\sphericalangle SBC <$ $< \sphericalangle SCB$, tedy $\overline{SC} < \overline{SB}$. 140. $\overline{BX} < \overline{AX} < \overline{CX}$.

141. Vnější úhel je větší než protější vnitřní. Toho užijeme u trojúhelníků UBT, ATC. **142.** $\overline{AT} < \overline{AC} + \overline{CT}$, tedy $\overline{AT} + \overline{TB} < \overline{AC} + (\overline{CT} + \overline{TB}) = \overline{AC} + \overline{CB}$; $\overline{UB} < \overline{UT} + \overline{TB}$, tedy $\overline{AU} + \overline{UB} < (\overline{AU} + \overline{UT}) + \overline{TB} = \overline{AT} + \overline{TB}$. **143.** a), b) ano; c), d) ne. **145.** $\sphericalangle GHK = \sphericalangle HKE$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami); $\sphericalangle HKE = \sphericalangle HEK$ (úhly proti stejným stranám); $\sphericalangle HEK = \sphericalangle FGH$ (protější úhly rovnoběžníka). **146.** Jest $\overline{RA} = \overline{CB}$ (protější strany rovnoběžníka) a $\overline{CB} = \overline{AP}$ (z téhož důvodu), proto A je střed strany PR. **147.** Jest $\sphericalangle UTZ = \sphericalangle ZTX$; avšak $\sphericalangle ZTX = \sphericalangle UZT$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Tedy $\sphericalangle UTZ = \sphericalangle UZT$, takže $\overline{UT} = \overline{UZ}$. Dále je $\sphericalangle VYZ = \sphericalangle UTZ$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami), tedy $\sphericalangle VYZ = \sphericalangle VZY$, takže $\overline{VY} = \overline{VZ}$. Konečně $\overline{VZ} = \overline{VU} + \overline{UZ}$, $\overline{UT} = \overline{UZ}$, $\overline{VU} = \overline{ST}$, tedy $\overline{VZ} = \overline{ST} + \overline{UT}$. **148.** Budiž S střed úsečky AC. Protože $ABCD$ je rovnoběžník, je S střed úsečky BD. Protože $AECF$ je rovnoběžník, je S střed úsečky EF. Proto úsečky BD a EF se navzájem půlí, takže $BEDF$ je rovnoběžník a $BE \parallel FD$. **149.** Na přímce LG určeme bod P tak, aby G byl střed úsečky LP; máme dokázati, že body P a M splynou. Protože $\overline{KH} = \overline{LG}$, $\overline{LG} = \overline{GP}$, je $\overline{KH} = \overline{GP}$. Mimoto $KH \parallel GP$, takže $HKGP$ je rovnoběžník. Protože úhlopříčky rovnoběžníka se půlí, přímka KP prochází středem N úsečky GH, takže přímky KP, KM splynou a proto splynou i body P a M. **150.** Protože $\overline{AB} = \overline{DC}$, jest $\overline{BS} = \overline{TD}$. Mimoto $BS \parallel TD$, takže $BSDT$ je rovnoběžník.

151. (Místo $XYUV$ má býti $XYVU$.) Jest $XY \parallel PQ$, $PQ \parallel UV$, tedy $XY \parallel UV$. Mimoto $\overline{XY} = \overline{PQ}$, $\overline{PQ} = \overline{UV}$, tedy $\overline{XY} = \overline{UV}$. Proto $XYVU$ je rovnoběžník. Vše platí, i když rovnoběžníky $PQYX$, $PQVU$ nejsou v téže rovině. **152.** Podle výsledku cvič. 560 jsou $SBTD$, $AFCE$ rovnoběžníky, takže $SD \parallel BT$, $AE \parallel FC$. **153.** Podle výsledku cvič. 559 je $\overline{KL} = \overline{LM}$. Dané rovnoběžníky dají $\overline{KL} = \overline{GH} = \overline{MN}$. **154.** Podle výsledku cvič. 561 je $BFCE$ rovnoběžník, jehož úhlopříčky se půlí. **155.** Ježto $OKXL$, $OLYH$ jsou rovnoběžníky, podle výsledku cvič. 561 je $KXYH$ rovnoběžník, takže úsečky HX, KY se půlí. Stejně se dokáže, že také $HZXL$ je rovnoběžník, takže úsečky HX, LZ se půlí. **156.** Kdyby se úsečky CD, BE půlily, byl by $BCED$ rovnoběžník a bylo by $BD \parallel CE$. **157.** Protější úhel k pravému je mu roven, tedy je pravý. Sousední úhly k pravému jsou s ním výplňkové, tedy jsou pravé. **158.** Součet všech čtyř úhlů je $4R$, tedy to jsou úhly pravé. **159.** a) Jest $ASF \cong CTE$ (sus), $BSE \cong DTF$ (sus), tedy $\overline{SF} = \overline{TE}$, $\overline{SE} = \overline{TF}$. b) Jest $ASF \cong DFT$ (sus), tedy $\overline{SF} = \overline{TF}$. c) U každého rovnoběžníka $ABCD$ je $AS \parallel DT$, $\overline{AS} = \overline{DT}$, takže $ASTD$ je rovnoběžník. Proto je $\overline{ST} = \overline{AD}$ a podobně je také $\overline{FE} = \overline{AB}$. Je-li $ABCD$ kosočtverec, je $\overline{AB} = \overline{AD}$, tedy $\overline{FE} = \overline{ST}$, takže $ESFT$ je obdélník. d) To plyne z b) a c). e) Jest $ASF \cong DTF$ (sss), tedy $\sphericalangle SAF$ je roven svému výplňkovému $\sphericalangle TDF$ a je pravý. Tedy $ABCD$ je obdélník (podle cvič. 568); f) při c) jsme si všimli, že $\overline{ST} = \overline{AD}$, $\overline{FE} = \overline{AB}$. Je-li $ESFT$ obdélník, je $\overline{ST} = \overline{FE}$, tedy $\overline{AD} = \overline{AB}$, takže rovnoběžník $ABCD$ je kosočtverec; g) to plyne z e) a f).

165. a) $\alpha = 35{,}8°$; $\beta = 116{,}5°$; $\gamma = 27{,}7°$; b) $\alpha = 51{,}6°$; $\beta = 47{,}6°$; $\gamma = 80{,}8°$; c) $b = 83{,}6$ mm; $c = 61{,}2$ mm; d) $a = 33{,}1$ mm; $c = 85{,}9$ mm;

e) $a = 63{,}5$ mm; $b = 59{,}1$ mm; f) $a = 78{,}7$ mm; $\beta = 27{,}3°$; $\gamma = 40{,}2°$; g) $b = 129{,}8$ mm; $\alpha = 68{,}5°$; $\gamma = 36{,}5°$. **167.** a) $a = 61{,}4$ mm; b) $a = 47{,}9$ mm; c) $c = 25{,}9$ mm. **168.** a) $b = 38{,}7$ mm; $c = 77{,}4$ mm; b) $b = 42{,}2$ mm; $c = 69{,}3$ mm; c) $a = 18{,}7$ mm; $c = 19{,}3$ mm; d) $a = 24{,}9$ mm; $c = 64{,}9$ mm; e) $a = 26{,}8$ mm; $b = 64{,}7$ mm; f) $c = 63$ mm; $\alpha = 36°$; g) $b = 75$ mm; $\alpha = 28{,}1°$. **169.** a) $\overline{AC} = 99$ mm; b) $\overline{AB} = 63{,}6$ mm. **170.** a) $\overline{AD} = 44{,}7$ mm; b) $\overline{AB} = 25{,}7$ mm; $\overline{AD} = 75{,}8$ mm.

171. a) $\sphericalangle BAD = 97{,}2°$; b) $\overline{BC} = 42{,}5$ mm; c) $\overline{AB} = 52{,}9$ mm; $\overline{AD} = 87{,}2$ mm. **172.** a) $\overline{AC} = 25{,}5$ mm; b) $\sphericalangle BAD = 73{,}7°$; c) $\overline{AB} = 54{,}1$ mm. **173.** a) $\sphericalangle BAD = 52{,}6°$; b) $\sphericalangle BAD = 139{,}2°$; c) $\overline{BC} = 30{,}7$ mm; d) $\overline{AD} = 82{,}4$ mm. **174.** a) $e = 87{,}5$ mm; $f = 108{,}1$ mm; b) $d = 80{,}1$ mm; $e = 81{,}9$ mm; c) $a = 109$ mm; $b = 64{,}4$ mm.

III. TŘÍDA

1. 67,4 mm, 79,6 mm, 63,6 mm; 2 864 mm². **2.** 77,3 mm, 60,8 mm; 4 868 mm². **3.** a) 108 cm²; b) 16 cm; c) 4,8 cm. **4.** 12 cm², 2,4 cm. **5.** a) 24 cm²; b) úhlopříčky rozdělí kosočtverec na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky o odvěsnách $\frac{1}{2}\overline{AC}$, $\frac{1}{2}\overline{BD}$, obsah je $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD}$; c) 28 cm, 14 cm. **6.** 555,7 cm². **7.** 21,6 cm². **8.** 20, 17,5 a 7,5 cm²; 4,375 a 1,875 cm. **9.** 48 a 42 cm. **10.** 7 ha 24 a 59 m².

11. Podle výkladu k obr. 3 na str. 5 učebnice. **12.** 132 dm³. **13.** 6,5 cm. **14.** 315 l. **15.** 3,5 m a 2,25 m². **16.** a) 17; b) 13; c) 4; d) 10; e) 60. **17.** 8 m. **18.** 9,85 m. **19.** 15,8 km. **20.** Prodlužte na př. KH za bod H a veďte $LN \parallel MH$, N na KH: 10 cm.

21. 8,6 dm. **22.** 5,8 cm. **23.** 4,6 cm. **24.** Veďte $RT \parallel PQ$, T na PS: a) 30 cm; b) 5,4 m. **25.** 17 cm, 114 cm². **26.** 17,4 dm. **27.** 240 cm². **28.** 432 cm². **29.** a) 4,8 cm; b) 2,1 m; c) 50,9 cm, 25,5 cm; d) 4,1 m, 2,1 m; e) 2,3 m, 4,6 m; f) 10 m, 12 m; g) 0,5 m, 0,87 m. **30.** a) 24 cm; b) 29,4 cm.

31. 878 cm². **32.** 20 cm. **33.** a) 439 mm²; b) $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EA}$ jsou úhlopříčky ve shodných kosočtvercích $ABCS$, $CDES$, $EFAS$, kde S je střed šestiúhelníka, 220 mm². **34.** 4,5 cm. **35.** 51 km. **36.** 8,5 cm a 1,9 cm. **37.** a) 83 mm; b) 58 mm. **38.** 8 cm. **39.** 30 mm. **40.** a) 8,3 m; b) 5,1 m; c) 4,1 m.

41. a) 14 cm; b) 5,7 cm. **42.** 14 cm. **43.** 25 cm. **44.** 11,3 cm. **45.** a) 5,7 cm; b) 5,5 cm. **46.** 6,4 cm, 8,1 cm, 6,4 cm. **47.** 2 cm. **48.** $\frac{1}{3}a \cdot \sqrt{6}$. **49.** 7,5 cm. **50.** 10 cm.

51. 11 cm. **52.** 24 cm. **53.** 140 cm², 100 cm³. **54.** 82 cm², 43 cm³. **55.** 124 cm². **56.** 77 cm². **57.** a), d), e) ostroúhlé; c), h), i), j), k) pravoúhlé; b), f), g) tupoúhlé. **58.** Obrácení P. v. pro poloviny úhlopříček a stranu. **59.** $\overline{BC} = 12{,}5$ cm; obrácení P. v. pro $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ a $\overline{BC}$. **60.** $v = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{2} \doteq 2{,}8$ cm; užijeme shodných trojúhelníků EVG a EFG.

61. Čtverec $ABCD$ a rovnoběžník $CDEF$ mají společnou stranu $\overline{CD}$ a protější strany AB a EF leží v téže přímce; obdélník $DEGH$ a rovnoběžník $CDEF$

mají společnou stranu $\overline{DE}$ a protější strany GH a CF leží v téže přímce. **62.** Předně dokažte rovnost trojúhelníka KQN a rovnoběžníka $KLMN$ a pak rovnost trojúhelníků KQP a PQN. **63.** Předně dokažte rovnost trojúhelníků RUT a UST a pak rovnost trojúhelníků RUV a RVT, SUV a SVT. **64.** a) Trojúhelníky DBC a ABC mají společnou stranu $\overline{BC}$ a vrcholy D a A na rovnoběžce s touto stranou; b) dokažte rovnost trojúhelníků ABD a ACD a odečtěte společný trojúhelník ADE; c) dokažte rovnost trojúhelníků ABE a ADE, CBE a CDE a sečtěte první a třetí, druhý a čtvrtý. **65.** Dokažte rovnost trojúhelníků KMG a LNH a odečtěte každý od lichoběžníka $GHNK$. **66.** a) Dokažte rovnost trojúhelníků AFE a BEF, EFD a FEC a sečtěte první a třetí, druhý a čtvrtý; b) dokažte rovnost trojúhelníků EGF a EAF, EHF a EDF a sečtěte první a třetí, druhý a čtvrtý. **67.** Veďte spojnici SQ a dokažte rovnost trojúhelníků QRX a QRS, RSY a QRS. **68.** Veďte spojnice AC, EG, dokažte rovnost trojúhelníků AGC a AGE a odečtěte od nich společný trojúhelník AGB. Zbylé trojúhelníky ABC a GBE jsou poloviny rovnoběžníků $ABCD$ a $BEFG$. **69.** Dokažte rovnost trojúhelníků KHM a KLM a připojte k nim trojúhelník KMN. **70.** Je-li S průsečík úhlopříček, dokažte rovnost trojúhelníků TYS a TZS, XYS a XZS a sečtěte první a třetí, druhý a čtvrtý.

71. 41,6 cm². **74.** a) Veďte $BF \parallel DC$ a $BG \parallel EC$, F a G na polopřímce AC; b) v polorovině ABC veďte bodem A polopřímku p svírající s polopřímkou AB úhel 75°, vrcholem C veďte přímku $q \parallel AB$, průsečík p a q je H — kolem bodu B opište kruhový oblouk k o poloměru $\overline{AB}$, průsečík k a q je K. **75.** Nejprve proměňte rovnostranný trojúhelník ABC s délkou strany 6 cm na trojúhelník ADE, $\overline{AD} = 5$ cm, D na $\overline{AB}$, E na prodloužení AC za C, potom proměňte trojúhelník ADE na rovnoběžník $ADGF$, F střed $\overline{AE}$, potom proměňte rovnoběžník $ADGF$ na kosočtverec $ADHI$, kde I a H jsou na FG, $\overline{AI} = \overline{AD} = 5$ cm. **76.** Trojúhelníky ASC a BSC jsou si rovny, pak proměňujeme trojúhelník BSC na trojúhelník BDE nebo trojúhelník ASC na trojúhelník ADE', E' na AC, podle toho, zda bod D leží mezi A a S nebo mezi S a B; pro D v S splyne E s C. **77.** Díly jsou trojúhelníky o stejně dlouhých stranách v jedné přímce AB a o společné výšce. **78.** Rozdělte trojúhelník na dva díly v poměru $\frac{3}{2} : 1$ čili $3 : 2$ podle cvič. 77. **79.** a) Jsou tři páry shodných, tedy i rovných trojúhelníků: HSQ a SHK, SRL a RSP, HRM a RHN, uberete-li trojúhelníky HSQ a SRL od trojúhelníka HRM a stejně trojúhelníky SHK a RSP od trojúhelníka RHN, vyjde rovnost rovnoběžníků $LMQS$ a $KNPS$ — připojte je nyní k rovnoběžníku $HKSQ$; b) podle obr. 54, kde místo označení H, N, P, Q, K, L, V dejte A, B, C, D, E, U, V nebo místo označení H, K, L, M, N, P, Q dejte A, B, C, D, F, X, Y. **80.** Je-li $ABCD$ čtverec o straně 4 cm, sestrojte $\overline{DE} = 7$ cm, E na prodloužení AB za B, vrcholem C veďme $p \parallel DE$, spusťte kolmice z D a E na p.

81. Veďte $DE \parallel AC$, E na prodloužení BC za C, padne-li střed F úsečky $\overline{EB}$ na úsečku $\overline{BC}$, je AF půlicí přímka; v opačném případě veďte $BG \parallel AC$, G na prodloužení DC za C, H střed úsečky $\overline{DG}$, AH půlicí přímka. **82.** Trojúhelníky

EAD a FCD, EAB a FCB jsou si rovny, protože mají stejně dlouhé strany EA a FC v téže přímce a společný vrchol D, po př. B; trojúhelník ABD je v proměně společný. **83.** Veďte vrcholy čtyrúhelníka rovnoběžky s úhlopříčkami, rovnoběžník takto vzniklý je dvojnásobek daného čtyrúhelníka, rozpulte jej kteroukoli jeho úhlopříčkou. **84.** Výsledky v pořadí a, b, c, v, c_1, c_2 s vynecháním zadání: a) 169 cm, 60 cm, 25 cm, 144 cm; b) 600 mm, 168 mm, 49 mm, 576 mm; c) 16,4 m, 16,81 m, 0,81 m, 16 m; d) 6,71 cm, 36,6 cm, 37,21 cm, 6,6 cm; e) 27,2 m, 57,8 m, 24 m, 12,8 m; f) 6,09 m, 5,8 m, 4,2 m, 4 m; g) 21,45 cm, 36,4 cm, 42,25 cm, 31,36 cm. **85.** 15,68 cm a 5,445 cm. **86.** 264 mm. **87.** $r = 2{,}6$ m, $T_1T_2 = 4{,}8$ m. **88.** 34,9 mm. **90.** Dokažte, že čtverec $ACGF$ rovná se rovnoběžníku $ACKD$ a tento že se rovná obdélníku $ADLH$.

91. Ježto $\overline{CR} = \overline{HB}$, zbývá dokázat, že $\overline{CP} = \overline{AH}$ (otočte trojúhelník AHC o 90° do SLC, kde S je na CB). **92.** a) 39,6 cm; b) 17,6 dm; c) 28,6 m. **93.** a) 22,2 cm²; b) 38,5 m²; c) 98,6 mm². **94.** a) 120 cm; b) 79 dm; c) 116 m. **95.** a) 1 700 cm²; b) 8,0 dm²; c) 0,17 m². **96.** a) 1,75 cm; b) 1,02 m; c) 1,4 m; d) 0,159 km. **97.** 0,681 dm. **98.** 11,1 m. **99.** a) 72 ha; b) 120 ha; c) 121 ha; d) 154 ha. **100.** a) 16 cm; b) 19 cm; c) 28 cm.

101. 26krát. **102.** Počítejte pro průměr kola 7 dm: a) 455krát; b) 19,8 km. **103.** 21,5 cm². **104.** 5,28 kg. **105.** 614 m². **106.** 37,7 mm². **107.** 2,51 dm. **108.** 17,5 mm. **109.** a) 56,5 cm; b) 75 cm/hod. **110.** 107 cm.

111. 92 cm. **112.** 17,0 cm². **113.** 129°. **114.** Kružnice v poměru 2 : 1, kruh v poměru asi 30 : 7. **115.** a) 0,6109; b) 0,4805; c) 0,04276. **116.** a) 0,126711; b) 0,338506. **117.** 3,1415929, tedy souhlas na šest desetinných míst. **118.** 3,141533, souhlas na čtyři desetinná místa. **119.** 176 g. **120.** 1 820 m³.

121. 273 m³. **122.** 2 790 m³. **123.** 159 000 hl. **124.** Ve větším stoupne o 26 cm, v menším klesne o 34 cm. **125.** a) 405 cm³; b) 40 cm³; c) 16 cm³ (podstava je pravoúhlý trojúhelník). **126.** 10,4 cm. **127.** 31,5 cm². **128.** a) 192 cm³; b) 1,88 m³; c) 83,1 cm³. **129.** $v = 6$ dm, $h = 6{,}63$ dm. **130.** a) 96 cm²; b) 79,7 cm².

131. 19 cm. **132.** 0,936 m³. **133.** 225 cm²; 140,6 cm³. **134.** $2a^2\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$. **135.** $a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$. **136.** $\frac{6}{5}a^2\sqrt{37}$, $\frac{1}{5}a^3(2\sqrt{3} + 5)$. **137.** $\frac{1}{25}a^2(4\sqrt{3} + 138)$, $\frac{371}{375}a^3$. **138.** 66,3 cm², 31,2 cm³. **140.** 51,2 cm²; stěnové výšky nad stranami podstavy AB, BC, CD, DA jsou 4,47, 4,12, 4,12, 5,66 cm.

141. a) 53,1 cm²; 4, 6,40, 5 a 4 cm; b) 51,7 cm²; 4, 4,72, 5 a 4,72 cm; c) 52,1 cm²; 4,12, 4, 4,47 a 6,40 cm. **142.** a) 231 dm³, 132 dm², 209 dm²; b) 69,3 cm³, 132 cm², 138,9 cm²; c) 15,4 dm³, 4,4 dm², 312,4 dm²; d) 19,2 cm³, 110 cm², 110,8 cm². **143.** a) 5,25 dm; b) 50,9 cm; c) 6,36 cm. **144.** a) 4 cm; b) 7 cm; c) 14 cm. **145.** a) 11,1 kg; b) 104 kg; c) 3 130 kg. **146.** 868 cm³. **147.** 864 cm. **148.** 9 hod. 3 min. **149.** 1 610 m². **150.** 3 060 Kčs.

151. 13 dm². **152.** a) 20 dm³; b) 66 cm³; c) 402 cm³; d) 64,2 cm³. **153.** a) 302 cm²; b) 283 cm²; c) 679 cm². **154.** 9 cm. **155.** 24 cm. **156.** 7,79 cm, 60°. **157.** 19,6 m³, 30,7 m². **158.** $4\pi r^2$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3$. **159.** a) 82,7%; b) 89,3%. **160.** a) 82,7% b) 93,0%.

161. 1 852 m. **162.** a) 86,9 cm², 76,2 cm³; b) 167 cm², 202 cm³. **163.** 28,2 cm. **164.** Koule, a to $\sqrt{\frac{6}{\pi}} \doteq 1{,}38$krát. **165.** 4 000. **166.** 33,7 cm. **167.** 4,17 cm. **168.** 6,83 cm. **169.** 512; 6 070 000; 37,9; 144 milionů km². **170.** 6 370 km.

IV. TŘÍDA*)

1. Víme, že je $p \nparallel q_1$, $q_2 \parallel q_1$. Kdyby $p \parallel q_2$, pak by $p \parallel q_1$, což je nemožné vzhledem k předpokladu. **2.** Jsou možné tyto případy: a) všechny čtyři přímky jsou rovnoběžné, počet průsečíků 0; b) všechny čtyři přímky procházejí jedním bodem, počet průsečíků 1; c) právě tři přímky jsou rovnoběžné, čtvrtá je protíná, počet průsečíků 3; d) právě dvě přímky jsou rovnoběžné, druhé dvě se protínají na jedné z rovnoběžek, počet průsečíků 3; e) dva páry rovnoběžek, přímky jednoho páru jsou různoběžné s přímkami druhého páru, počet průsečíků 4; f) právě tři přímky jdou jedním bodem, čtvrtá je s nimi různoběžná, počet průsečíků 4; g) dvě přímky rovnoběžné, ostatní dvě různoběžné s průsečíkem neležícím na rovnoběžkách, počet průsečíků 5; h) všechny přímky jsou různoběžné, žádné tři nejdou jedním bodem, počet průsečíků 6. **3.** Celkem mají $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ průsečíků. Neboť každá přímka má s ostatními $(n-1)$ průsečíků, všech přímek je n, zdánlivě tedy $n\,(n-1)$ průsečíků, neboť každý z nich počítán dvakrát. **4.** a) Bod B leží mezi body A a D a bod C leží mezi body B a D; b) bod B leží mezi body A a D a bod C leží mezi body A a D; c) buďto bod D leží mezi body B a C anebo bod C leží mezi body B a D. **5.** a) Všech pět bodů leží v téže polorovině vyťaté přímkou p; žádná; b) čtyři body leží v jedné polorovině vyťaté přímkou p, jeden bod leží v polorovině opačné; čtyři; c) tři body leží v jedné polorovině vyťaté přímkou p, dva body leží v polorovině opačné; šest. **6.** a) Dutý úhel AVB je společná část polorovin AVB a BVA. b) Vypuklý úhel s týmiž rameny se skládá z polorovin opačných k polorovinám AVB a BVA. **7.** Čtyři dvojice úhlů vedlejších: $\sphericalangle A_1VB_1$ a $\sphericalangle B_1VA_2$, $\sphericalangle B_1VA_2$ a $\sphericalangle A_2VB_2$, $\sphericalangle A_2VB_2$ a $\sphericalangle B_2VA_1$, $\sphericalangle B_2VA_1$ a $\sphericalangle A_1VB_1$. Dvě dvojice úhlů vrcholových: $\sphericalangle A_1VB_1$ a $\sphericalangle A_2VB_2$, $\sphericalangle B_1VA_2$ a $\sphericalangle B_2VA_1$. **8.** Dvojice úhlů vedlejších: $\alpha_1\beta_1 - \beta_1\gamma_1 - \gamma_1\delta_1 - \delta_1\alpha_1$, $\alpha_2\beta_2 - \beta_2\gamma_2 - \gamma_2\delta_2 - \delta_2\alpha_2$, 8; dvojice úhlů vrcholových: $\alpha_1\gamma_1 - \beta_1\delta_1 - \alpha_2\gamma_2 - \beta_2\delta_2$, 4; dvojice úhlů souhlasných: $\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2$ 4; dvojice úhlů střídavých: $\alpha_1\gamma_2 - \beta_1\delta_2 - \gamma_1\alpha_2 - \delta_1\beta_2$, 4; dvojice úhlů přilehlých: $\alpha_1\delta_2 - \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 - \delta_1\alpha_2$, 4; dvojice úhlů protilehlých: $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 - \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2$, 4; dohromady 28. **9.** Jestliže ze dvou styčných úhlů je jenom jeden dutý, nemusí to platit, avšak může. — Když žádný z obou styčných úhlů není dutý, nemůže to platit. **10.** Plocha trojúhelníka ABC je společná část polorovin ABC, BCA a CAB. Podobně u každého vypuklého mnohoúhelníka $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ je plocha společná část polorovin $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, …, $A_{n-2}A_{n-1}A_n$, $A_{n-1}A_nA_1$, $A_nA_1A_2$.

11. $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$; $DCBA$, $CBAD$, $BADC$, $ADCB$. **12.** Z každého vrcholu vychází $n-3$ úhlopříček, neboť nemůžeme spojit vrchol

*) Obrázky viz na str. 82—99.

sám se sebou a spojnice dvou sousedních vrcholů jsou strany. Všech vrcholů je n a úhlopříček $n(n-3)$. Avšak každá úhlopříčka A_iA_j, $i \neq j$, $|i-j| \geqq 2$, je počítána dvakrát, jednou jako A_iA_j a podruhé jako A_jA_i, tedy počet úhlopříček je $\frac{1}{2}n(n-3)$. **13.** Na 10 trojúhelníků a 1 pětiúhelník. **14.** V textu v učebnici chybí šestá možnost: 2 zcela vně, 3 zcela uvnitř. Pro tento případ užijte obr. 14b na tab. 1, připojené na str. 82—99 s touto úpravou: pětiúhelník $ADCEB$, vnější úhlopříčky AE, DE; vnitřní úhlopříčky AC, BD a BC. Ostatních pět případů podle vyobrazení. **15.** Aby vznikl čtyrúhelník $ABCD$, musíme bod D zvolit uvnitř poloroviny opačné k polorovině ACB nebo uvnitř trojúhelníka ABC; aby čtyrúhelník $ABCD$ byl vypuklý, musíme bod D zvolit v části roviny společné vnitřku dutého úhlu ABC a vnitřku poloroviny opačné k polorovině ACB. Pro vypuklý čtyrúhelník $ABDC$ musíme bod D zvolit v části roviny společné vnitřku dutého úhlu BAC a vnitřku poloroviny opačné k polorovině BCA. Pro vypuklý čtyrúhelník $ADBC$ musíme bod D zvolit v části roviny společné vnitřku dutého úhlu ACB a vnitřku poloroviny opačné k polorovině ABC. **16.—20.** Vizte obr.

21. Vizte obr. **22.** Čtyři písmena A, B, C, D lze psát z 24 různých pořadích, avšak vždy 8 lze seskupit k jednomu a témuž čtyrúhelníku (vizte cvič. 11). Tedy $24 : 8 = 3$, jsou možné tři čtyrúhelníky: současně s nevypuklým čtyrúhelníkem $ABCD$ existují ještě dva nevypuklé čtyrúhelníky. **23.** Body A, B: AHB; ACB — B, C: BC; BHC — A, C: AC; $AHBC$ — BD: BD; $BCHD$ — A, D: AHD — CD: CBD; CHD. **24.** Vizte obr. 24 na str. 14 v učebnici. A, B: AB, $AHDKB$, $AHDLB$, $AHCB$, $AHCLKB$, $AKLB$; A, C: AHC, $AKLC$, ABC, $AHDLC$, $AHDKBC$; A, D: AHD, AKD, $AHCLD$, $AHCBKD$; A, E: $AHCLE$, $AHDE$, $AHDKBLE$, AKE, $ABLE$; B, C: BC, $BLKHC$, $BLDC$, $BKLC$, $BKDC$, BHC; B, D: BLD, $BLKHD$, BCD, $BCHKD$, BKD, $BKLCD$, BHD; B, E: BLE, BKE, $BKDCLE$, $BHCLE$; C, D: CD, $CHKD$, CLD, $CLKHD$, $CBKD$, $CBHD$; C, E: CLE, CDE, $CDKBLE$, $CHKE$, $CHBLE$; D, E: DE, $DKBLE$, $DKHCLE$, $DHKE$, $DHBLE$, $DCLE$. **25.** Všechny lomené čáry spojující body A a B jsou: ACB — ADB — $ACE_1F_1F_2E_2B$ — AH_1E_1B — $AH_1F_1F_2E_2B$ — — $AH_1G_1G_2E_2B$ — $AH_1G_1G_2H_2DB$ — AH_2E_2B — ACE_2H_2DB — $ACE_1F_1F_2H_2DB$ — $ACE_1G_1G_2E_2B$ — $ACE_1G_1G_2H_2DB$ — ACE_1H_1DB — $AH_1F_1F_2H_2DB$ — — $AH_1G_1G_2F_2F_1E_1B$ — $AH_2G_2G_1E_1B$ — $AH_2G_2G_1F_1F_2E_2B$ — $AH_2F_2F_1E_1B$ — — $ACE_2F_2F_1G_1G_2H_2DB$ — $ACE_2F_2F_1H_1DB$ — $ACE_2G_2G_1H_1DB$ — $ACE_1F_1F_2 . . G_2G_1H_1DB$ — $ACE_1H_1H_2E_2B$ — $AH_1E_1E_2H_2DB$. **26.** Vizte obr. 26 na str. 14 učebnice. a) $ADBC$ — AH_1E_1C — AH_2E_2C — $H_1H_2E_2E_1$ — H_1DBE_1 — H_2DBE_2 $H_1H_2G_2G_1$ — $H_1H_2F_2F_1$ — $G_1G_2F_2F_1$ — $G_1G_2E_2E_1$ — $F_1F_2E_2E_1$; b) $AH_2G_2G_1E_1C$ — — $AH_2F_2F_1E_1C$ — $AH_1G_1G_2E_2C$ — $AH_1F_1F_2E_2C$ — $H_1DBE_2G_2G_1$ — $H_1DBE_2F_2F_1$ — $H_2DBE_1F_1F_2$ — $H_2DBE_1G_1G_2$; c) $AH_2G_2G_1F_1F_2E_2C$ — $AH_1G_1G_2F_2F_1E_1C$ — — $G_1G_2H_2DBE_2F_2F_1$ — $G_1H_1DBE_1F_1F_2G_2$ — $ADBE_2F_2F_1E_1C$ — $ADBE_2G_2G_1E_1C$ — $AH_1G_1G_2H_2DBC$ — $AH_1F_1F_2H_2DBC$; d) $AH_1G_1G_2H_2DBE_2F_2F_1E_1C$. **27.** Viz obrázek. **28.** U vypuklého čtyrúhelníka platí vždy: $\square\, ABCD = \triangle\, ABD + \triangle\, BCD = \triangle\, ABC + \triangle\, ACD$. U nevypuklého čtyrúhelníka lze vždy plochu vyjádřit jako součet dvou trojúhelníků nad vnitřní úhlopříčkou nebo jako rozdíl dvou trojúhelníků nad vnější úhlopříčkou. Označení závisí na označení vrcholu s vypuklým vnitřním úhlem (v našem obrázku vrchol C): $\square\, ABCD = \triangle\, ACD + \triangle\, ABC = \triangle\, ABD - \triangle\, BDC$. **29.** Lichoběžník lze takto vytvořit jen jedním způsobem. Rovnoběžník takto nelze vytvořit. O nevypuklém čtyrúhelníku platí výsledek na konci cvič. 28. **30.** $\overline{AC} = x$, $\overline{BD} = y$, $\overline{AD} = z$; $\overline{AB} = \overline{AD} - \overline{BD} = z - y$; $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = x - (z - y) = x - z + y = x + y - z$; $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC} = z - x$.

31. Sestavme všech 24 pořádků ve 4 sloupce:

$ABCD$	$BACD$	$CABD$	$DABC$
$ABDC$	$BADC$	$CADB$	$DACB$
$ACBD$	$BCAD$	$CBAD$	$DBAC$
$ACDB$	$BCDA$	$CBDA$	$DBCA$
$ADBC$	$BDAC$	$CDAB$	$DCAB$
$ADCB$	$BDCA$	$CDBA$	$DCBA$

Ponechejme všech šest pořádků z prvního sloupce, z druhého sloupce ponechejme čtyři nekončící písmenem A, z třetího sloupce ponechejme dva nekončící písmenem A nebo B a z posledního vynechejme všechny, ježto končí na A nebo B nebo C. Takto jsme totiž vyloučili pořádky lišící se od předcházejících jen smyslem. Zůstane tedy 12 pořádků. Když $\overline{AB} = \overline{CD}$ nemohou A a B nebo C a D býti současně krajními body, proto odpadají pořadí označené v obrázku (9) až (12). Pro pořádky označené v obrázku (1) až (4) platí pak též $\overline{AC} = \overline{BD}$ a pro pořádky (5) až (8) platí pak též $\overline{AD} = \overline{BC}$. **32.** $\overline{AC} \,.\, \overline{BD} = (\overline{AB} + \overline{BC}) \,.\, (\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AB}\,(\overline{BC} + \overline{CD}) + \overline{BC}\,(\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AB} \,.\, \overline{BC} + \overline{AB} \,.\, \overline{CD} + \overline{BC}\,(\overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AB} \,.\, \overline{CD} + \overline{BC}\,(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{AB} \,.\, \overline{CD} + \overline{AD} \,.\, \overline{BC}$. **33.** Musí býti v pořádku $ABCD$. **34.** Jest také $\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CE}$ a $\overline{AD} = \overline{BE}$. **35.** Čtyři možné pořádky jsou vyznačeny v obrázku. Jest $\overline{AC} = \overline{CE}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$. Odečtením obou rovnic vyjde $\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{CE} - \overline{CD}$, t. j. $\overline{AB} = \overline{DE}$. Dále jest $\overline{AC} = \overline{CE}$, $\overline{CD} = \overline{BC}$. Sečtením obou rovnic vyjde $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{CE}$, t. j. $\overline{AD} = \overline{BE}$. **36.** Jest dáno $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CD} = z$. Z toho $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = x + y$; $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = y + z$; $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = x + y + z$. Ježto body A, B, C, D předpokládáme různé, může nastat (1) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$; $x = y = z$; (2) současně $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{CD}$; $x = y$, $x + y = z$ čili $x = y$, $2x = z$ nebo současně $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{BD}$; $y = z$, $x = y + z$ čili $y = z$, $x = 2z$; (3) $\overline{AB} = \overline{CD}$, $x = z$ nebo $\overline{AB} = \overline{BC}$, $x = y$ nebo $\overline{BC} = \overline{CD}$, $y = z$; (4) $\overline{AC} = \overline{CD}$, $x + y = z$ nebo $\overline{AB} = \overline{BD}$, $x = y + z$; (5) všechny vzdálenosti jsou od sebe různé. Rovnice $\overline{AC} = \overline{BD}$ značí $x + y = y + z$ čili již uvažovanou $x = z$. Každý jiný případ by měl za následek splynutí dvou bodů. **37.** a) $\sphericalangle\, OO' = \sphericalangle\, OVB + \sphericalangle\, BVO' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \,.\, 2R = R$, neboť α a β jsou úhly vedlejší; b) $\sphericalangle\, OO' = \sphericalangle\, OVB + \sphericalangle\, BVC + \sphericalangle\, CVO' = \frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = \alpha + \beta = 2R$, neboť $\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\alpha$. **38.** Jest $\alpha + \beta = R$, $\beta = n\alpha$. Tedy $\alpha + \beta = 90° = \alpha + n\,\alpha = (n + 1)\alpha$. Má-li býti α celé, musí $(n + 1)$ dělit 90. Dělitelé $(n + 1)$ čísla 90 jsou 1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 30; 45; 90; čísla n jsou 0; 1; 2; 4; 5; 8; 9; 14; 17; 29; 44; 89. Úhel α je 45°; 30°; 18°; 15°; 10°; 9°; 6°; 5°; 3°; 2° 1°, β je 45°; 60°; 72°; 75°; 80°; 81°; 84°; 85°; 87°; 88°; 89°. Je tedy 11 takových hodnot, počítáme-li i $n = 1$. (V učebnici omylem uvedeno jen 9 hodnot.) **39.** $\alpha + \beta < R$, tedy $\beta < R - \alpha$; $\alpha + 2\beta > R$, tedy $2\beta > R - \alpha$, $\beta > \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\alpha$. Spojením obou nerovností: $\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\alpha < \beta < R - \alpha$. Ve zvláštním případě $\alpha = 40°$, $R - \alpha = 50°$, $\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\alpha = 25°$, $25° < \beta < 50°$. **40.** Jedné časové minutě na ciferníku odpovídá $\frac{360°}{60} = 6°$, malá ručička urazí za hodinu 5 časových minut na ciferníku, t. j. otočí se o úhel 30°. a) Malá ručička opsala od 8^{00} hod. do 8^{30} hod. oblouk rovný $2\frac{1}{2}$ časových minut, t. j. 15°; oblouk od šestky k osmičce je 10 časových minut, t. j. 60°. Hledaný úhel je $15° + 60° = 75°$. b) Malá ručička urazila od 5^{00} hod. do 5^{40} hod. $\frac{2}{3}$ oblouku mezi pětkou a šestkou, do 6 hod. má ještě opsat oblouk $\frac{1}{3} \cdot 30° = 10°$. Oblouk mezi šestkou a osmičkou měří 60°. Hledaný úhel je $60° + 10° = 70°$. c), d) Řešení patrno z obr. 40. V případě c) 100°, v příp. d) 175°.

41. Označme v obr. 58 v učebnici $\sphericalangle AVB = \alpha$, $\sphericalangle BVC = \beta$, $\sphericalangle CVD = \gamma$, $\sphericalangle DVE = \delta$. a) Jestliže $\sphericalangle BVD = \sphericalangle CVE$, tedy $\beta + \gamma = \gamma + \delta$, $\beta = \delta$, $\sphericalangle BVC = \sphericalangle DVE$; b) $\sphericalangle AVC + \sphericalangle BVD = (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) = \alpha + 2\beta + \gamma$; $\sphericalangle AVD + \sphericalangle BVC = (\alpha + \beta + \gamma) + \beta = \alpha + 2\beta + \gamma$; c) Jestliže VC je osa $\sphericalangle BVE$, je $\beta = \gamma + \delta$; $\sphericalangle CVD = \gamma$; $\frac{1}{2}(\sphericalangle BVD - \sphericalangle DVE) = \frac{1}{2}[(\beta + \gamma) - \delta] = \frac{1}{2}[\beta + \gamma - \delta] = \frac{1}{2}[(\gamma + \delta) + \gamma - \delta] = \frac{1}{2} \cdot 2\gamma = \gamma$; d) Jestliže $\sphericalangle AVE = 2 \cdot \sphericalangle BVD$ je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 \cdot (\beta + \gamma)$, tedy $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ (1). Současně VC je osa $\sphericalangle AVE$, tedy $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ (2). Sečtením (1) a (2) plyne $2\alpha + \beta + \delta = \beta + 2\gamma + \delta$, $2\alpha = 2\gamma$, $\alpha = \gamma$, tedy $\sphericalangle AVB = \sphericalangle CVD$. **42.** Konstrukce patrna z obrázku. Kontrola přesnosti grafické práce: strany odpovídající si v souměrnosti se protnou v samodružných bodech na přímce p. **43.** a) Platí-li o stranách čtyrúhelníka $ABCD$, že $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{CB} = \overline{CD}$, pak je to deltoid. [Neboť vrcholy A a C leží podle těchto rovností na ose souměrnosti úsečky $\overline{BD}$, tedy AC je osou souměrnosti čtyrúhelníka $ABCD$. Tedy čtyrúhelník $ABCD$ je deltoid podle definice uvedené v učebnici před cvič. 43.] b) Platí-li o čtyrúhelníku $ABCD$, že AC je osa úhlu α a CA osa úhlu γ, pak je to deltoid. [Neboť: polopřímky AC a CA leží na přímce AC; z prvního předpokladu plyne, že polopřímka AB je souměrná s polopřímkou AD podle přímky AC, z druhého předpokladu plyne, že polopřímka CB je souměrná s polopřímkou CD podle přímky AC; tedy bod B (průsečík polopřímek AB a CB) je souměrně sdružený s bodem D (průsečíkem polopřímek AD a CD) podle přímky AC. Tedy čtyrúhelník $ABCD$ je deltoid podle def.] c) Úhlopříčky deltoidu stojí na sobě kolmo, při čemž úhlopříčka (osa souměrnosti) AC půlí druhou úhlopř. BD. Obráceně: Stojí-li úhlopříčky čtyrúhelníka $ABCD$ na sobě kolmo, při čemž AC půlí $\overline{BD}$, je čtyrúhelník deltoid s osou AC. (Neboť zřejmě je čtyrúhelník souměrný podle AC.) d) Za daných předpokladů je $\overline{AB}$ souměrné s $\overline{AD}$ podle osy AC. Čtyrúhelník je souměrný vzhledem k AC, tedy deltoid. e) Konstrukce je patrna z obrázku. Čtyrúhelník je dán těmito prvky: $\overline{AC}$, a, γ. Řešení jsou čtyři: $ABCD$, $AB'CD'$, $ABCD'$, $AB'CD$, při čemž poslední dvě řešení nejsou deltoidy. Zřejmě v $ABCD'$ je $\beta + \delta = 2R$. f) Nechť na př. $\overline{AB} = \overline{AD}$

a $AC \perp \overline{BD}$. Trojúhelník $\triangle ABD$ je rovnoramenný a AC je v něm výškou k základně $\overline{BD}$. Jsou tedy body B a D souměrné vzhledem k AC a $ABCD$ je deltoid s osou souměrnosti AC. g) V rovině zavedeme osovou souměrnost kolem AC. Ježto AC půlí úhel α, je k polopřímce AB souměrně sdružená polopřímka AD. Kolmice BD je samodružná. Tedy průsečíku polopřímky AB s kolmicí BD je souměrně sdružený průsečík polopřímky AD s kolmicí BD, t. j. body B, D jsou souměrně sdruženy podle AC. Tedy čtyrúhelník $ABCD$ je deltoid podle definice. **44.** a) $z = p - 2r$; b) $r = \frac{1}{2}(p - z)$. **45.** a) Je $\alpha = \beta$, $\gamma = n \cdot \alpha$, $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + n\alpha = (n + 2)\,\alpha = 180$, $\alpha = 180 : (n + 2)$. Mají-li úhly α, β, γ býti vyjádřeny v celých číslech, musí $n + 2$ dělit 180. Dělitele 180 jsou 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180. Odtud vychází pro n (dělitele $n + 2 = 1$; 2 nemají smyslu)

n	1	2	3	4	7	8	10	13	16	18	28	34	43	58	88	178
α	60	45	36	30	20	18	15	12	10	9	6	5	4	3	2	1
γ	60	90	108	120	140	144	150	156	160	162	168	170	172	174	176	178

b) $\alpha = \beta$, $\alpha = n\gamma$. $\alpha + \beta + \gamma = n\gamma + n\gamma + \gamma = (2n + 1)\,\gamma = 180$, $\gamma = 180 : (2n + 1)$. Opět $2n + 1$ musí býti dělitelem 180. Z hořejších dělitelů uvažujeme jen o lichých dělitelích 5, 9, 15, 45.

n	2	4	7	22
α	72	80	84	88
γ	36	20	12	4

46. Konstrukce patrna z obrázku. Kontrola: sdružené strany, pokud neprocházejí středem souměrnosti S, jsou rovnoběžné. **47.** a) AC půlí $\overline{BD}$, $AD \parallel BC$. Označme S střed úsečky BD a zaveďme středovou souměrnost kolem S. V ní body B a D jsou středově souměrné, přímky AD a BC taktéž, přímka AC je samodružná. Tedy též průsečíky přímek AD, AC, t. j. bod A a přímek BC, AC, t. j. bod C jsou středově souměrné vzhledem k bodu S. Tedy čtyrúhelník $ABCD$ je středově souměrný vzhledem k S; tedy rovnoběžník. b) AC půlí $\overline{BD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$. Zvolme přímku p, na níž leží úhlopříčka AC, dále úhlopříčku BSD, S na p, $\overline{BS} = \overline{SD}$. Zvolme vrchol A na p. Ježto $\overline{AD} = \overline{BC}$, opišme kruhový oblouk kolem B poloměrem $\overline{AD}$, jeho průsečíky s p označme C_1, C_2. Je-li ABC_1D rovnoběžník, pak ABC_2D není rovnoběžník. Tedy podmínky dané nestačí na jednoznačné určení rovnoběžníka. **48.** a) Ježto kosočtverec je rovnostranný čtyrúhelník, je $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$. Ježto tedy $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{DC}$ je BD osou souměrnosti úsečky $\overline{AC}$ a tedy též osou souměrnosti kosočtverce. Podobně AC je osou souměrnosti kosočtverce. Ježto body A a C jsou souměrné vzhledem BD, je $AC \perp BD$. Je tedy kosočtverec středově souměrný podle průsečíku svých úhlopříček, tedy je rovnoběžník (podle výsledku odvozeného v učebnici na str. 22). b) Ježto AC je osou souměrnosti kosočtverce $ABCD$, je $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$. Ježto BD je osou souměrnosti kosočtverce $ABCD$, je $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{CD}$. Tedy je $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, tedy $ABCD$ je kosočtverec. c) Rovnoběžník $ABCD$ je středově souměrný, tedy $\overline{AS} = \overline{SC}$ (S je průsečík úhlopříček). Ježto $AC \perp BD$, je rovnoběžník $ABCD$ souměrný podle úhlopříčky BD. Podobně vychází, že je souměrný podle úhlopříčky AC. Tvrzení, že $ABCD$ je kosočtverec, plyne tedy z b). d) Plyne z vlastností osové souměrnosti. e) $\sphericalangle ACB$ označme γ'. V $\triangle ABC$ je $\frac{1}{2}\alpha + \beta + \gamma' = 2R$. V rovnoběžníku $ABCD$ je $\beta = \delta$, tedy $\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\delta$, tedy $\beta = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta$. Rovnost pro součet úhlů v $\triangle ABC$ lze psát $\frac{1}{2}\alpha + (\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta) + \gamma' = 2R$ a současně je v rovnoběžníku $ABCD$ $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\gamma = 2R$ a proto $\gamma' = \frac{1}{2}\gamma$. Tedy úhlopříčka AC půlí nejenom úhel α, nýbrž i úhel γ a proto je osou souměrnosti rovnoběžníka $ABCD$. Proto úhlopříčky AC a BD jsou k sobě kolmé a rovnoběžník je kosočtverec podle c). f) Důkaz je v poznámce u cvičení v učebnici. **49.** Označme obvod $AKHL$ písmenem p. Trojúhelníky $\triangle BHK$ a $\triangle HLC$ jsou rovnoramenné a proto $\overline{KH} = \overline{KB}$, $\overline{HL} = \overline{LC}$. Proto $p = (\overline{AK} + \overline{KH}) + (\overline{AL} + \overline{HL}) = (\overline{AK} + \overline{KB}) + (\overline{AL} + \overline{LC}) = \overline{AB} + \overline{AC} = 2 \,.\, \overline{AB}$ (dvojnásobek délky ramene). **50.** Součet vnějších úhlů vypuklého mnohoúhelníka je $4R$. Proto může míti nejvýše (výplňky jsou vnitřní úhly); 3 tupé vnější úhly, jejichž výplňky jsou tři vnitřní úhly menší než R; 5 vnějších úhlů $> 60°$, jejichž výplňky jsou $< 120°$; 7 vnějších úhlů $> 45°$, jejichž výplňky jsou $< 135°$; 8 vnějších úhlů $> 40°$, jejichž výplňky jsou $< 140°$.

51. Čtyrúhelník: 1. Všechny vnější úhly jsou stejné, tedy R a tím i vnitřní (výplňky) taktéž R. 2. Nejvýš 3 vnější úhly jsou ostré, čtvrtý musí býti tupý a jeho výplňkový úhel vnitřní je nutně ostrý. Šestiúhelník: 1. Všechny vnější úhly jsou stejné, tedy 60° a tím i vnitřní (výplňky) jsou stejné, a to 120°. 2. Nejvýš 5 vnějších úhlů je menších než 60° a tím nejvýš 5 vnitřních úhlů je větších než 120° a šestý je menší než 120°. 3. Nejvýš 5 vnějších úhlů je větších než 60° a tím nejvýš 5 vnitřních úhlů je menších než 120° a šestý je větší než 120°. Pětiúhelník: 1. Všechny vnější úhly jsou stejné, tedy 72° a tím i vnitřní jsou stejné a to 108°. 2. Nejvýš 4 vnější úhly jsou menší než 72° a tím nejvýš čtyři vnitřní úhly jsou větší než 108° a pátý je menší než 108°. 3. Nejvýš 4 vnější úhly jsou větší než 72° a tím nejvýš čtyři vnitřní úhly jsou menší než 108° a pátý je větší než 108°. Výsledek pro pětiúhelník tedy zní: Pětiúhelník má buďto všechny úhly rovné 108° nebo aspoň jeden menší než 108° a aspoň jeden větší než 108°. **52.** Součet úhlů v mnohoúhelníku (vypuklém i nevypuklém je $(n - 2) \,.\, 2R$. Kdyby mnohoúhelník měl méně než tři duté úhly, měl by nejméně $(n - 2)$ úhlů vypuklých a součet úhlů by byl větší než $(n - 2) \,.\, 2R$, což je nemožné. Má tedy každý mnohoúhelník aspoň tři úhly duté. Má-li však jen tři úhly duté, tedy právě tři, pak má právě $(n - 3)$ úhlů vypuklých, jejichž součet je větší než $(n - 3) \,.\, 2R$. Proto součet tří úhlů dutých je menší než $2R$. Tedy z těchto tří dutých úhlů nemohou být dva tupé nebo pravé, jsou proto aspoň dva ostré. Nemohou být všechny tři větší nebo rovné 60°, proto aspoň jeden je menší než 60°. Důsledky: 1. Nevypuklý čtyrúhelník musí mít aspoň jeden úhel vypuklý, tedy nejvýš tři úhly duté. Avšak podle hořejšího má aspoň tři úhly duté. Má tedy právě tři úhly duté. Proto důsledek: má aspoň dva úhly ostré a aspoň jeden z nich menší než 60°. 2. Nevypuklý pětiúhelník má součet úhlů $6R$. Má aspoň jeden úhel vypuklý ($> 2R$) a proto součet zbývajících čtyř je menší než $4R$. Tedy tyto čtyři úhly nemohou být všechny tupé nebo pravé. Tedy aspoň jeden je ostrý. **53.** V trojúhelnících $\triangle ABR$, $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$ jsou úhly u vrcholů A, B, C po řadě $R - \frac{1}{2}\alpha$, $R - \frac{1}{2}\beta$, $R - \frac{1}{2}\gamma$. Stejné jsou úhly v témž pořadí u vrcholů P, Q, R. (Jsou tedy tyto trojúhelníky podobné.) **54.** V obou obrázcích označme v pravoúhlém trojúhelníku QPA ξ úhel u vrcholu A a φ úhel u vrcholu Q. Jest $\xi = R - \varphi$. φ je vnější úhel v $\triangle BQA$: $\varphi = \beta + \frac{1}{2}\alpha$. $\xi = R - \varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) - (\beta + \frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - 2\beta - \alpha) = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$. **55.** Označme úhel os úhlů α, δ písmenem ε. Jest $\varepsilon = 2R - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\delta = 2R - \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$. Dále je ve čtyrúhelníku $ABCD$: $(\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 4R$, $(\alpha + \delta) = 4R - (\beta + \gamma)$, $\frac{1}{2}(\alpha + \delta) = 2R - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. Tedy $\varepsilon = 2R - [2R - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)] = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. **56.** Označme $\sphericalangle AED = \varepsilon$, $\sphericalangle CFD = \varphi$ a $\sphericalangle ADC = \delta$. V $\triangle EBC$ je $\varepsilon = 2R - \beta - \gamma$, $\frac{1}{2}\varepsilon = R - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$. V $\triangle FAB$ je $\varphi = 2R - \alpha - \beta$, $\frac{1}{2}\varphi = R - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$. V nevypuklém čtyrúhelníku $EDFV$ jsou úhly $\frac{1}{2}\varepsilon$, $4R - \delta$, $\frac{1}{2}\varphi$, $\sphericalangle EVF$, tedy $\sphericalangle EVF = 4R - \frac{1}{2}\varepsilon - (4R - \delta) - \frac{1}{2}\varphi = \delta - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varphi = \delta - (R - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma) - (R - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta) = (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta - 2R) + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$. **57.** Podle cvič. 55 je (označení podle obr.) $\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$, $\gamma' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, tedy $\alpha' + \gamma' = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) + \frac{1}{2}(\gamma + \delta) = 2R$. Je-li navíc daný čtyrúhelník $ABCD$ rovnoběžník, je $\alpha + \delta = 2R$, tedy $\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = R$ a stejně tak β', γ', δ'. Je-li dokonce daný čtyrúhelník obdélník, jsou osy úhlu v protějších vrcholech A, C a B, D spolu rovnoběžné a stejně od sebe vzdáleny. Tedy vznikne rovnostranný obdélník, to jest čtverec. **58.** a) Trojúhelník EDB je rovnoramenný a proto úhly při základně $\overline{ED}$ jsou stejné a poněvadž jejich součet je roven vnějšímu úhlu $\sphericalangle ABD = \beta$, je každý $\frac{1}{2}\beta = \gamma$. Tím je dán $\sphericalangle FDC = \gamma$ (vrcholový k $\sphericalangle BDE = \gamma$) a $\triangle DCF$ je rovnoramenný, tedy $\overline{DF} = \overline{CF}$. Rovněž $\triangle ADF$ je rovnoramenný: $\sphericalangle ADF = R - \gamma$, $\sphericalangle DAC = R - \gamma$, tedy $\overline{DF} = \overline{AF}$. Spojením obou výsledků plyne $\overline{DF} = \overline{CF} = \overline{AF}$. Přenesme $\overline{BD}$ na polopřímku DC, tím dostaneme bod G, který spojíme s A, při čemž platí $\overline{BD} = \overline{DG}$. Z konstrukce vyplývá $\overline{AG} = \overline{AB}$. Také $\triangle CAG$ je rovnoramenný, ježto $\sphericalangle BGA = 2\gamma$ je v něm vnější a roven součtu protilehlých vnitřních, z nichž jeden $\sphericalangle GCA = \gamma$ a proto i druhý $\sphericalangle GAC = \gamma$. Tedy $\overline{AB} = \overline{AG} = \overline{CG} = \overline{CD} - \overline{GD} = \overline{CD} - \overline{BD}$, $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{BD}$. b) Důkaz je týž jako v a). **59.** 1. $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. $\triangle ABA_1$ a $\triangle ACA_1$ jsou rovnoramenné a tedy $\alpha' = \beta$, $\alpha'' = \gamma$, $\beta + \gamma = \alpha' + \alpha'' = \alpha$. Jest $\alpha = 2R - (\beta + \gamma) = 2R - \alpha$, $2\alpha = 2R$, $\alpha = R$. 2. $\overline{AA_1} > \frac{1}{2}\overline{BC}$. V $\triangle ABA_1$ a $\triangle ACA_1$ je tedy $\overline{AA_1} > \overline{BA_1}$, $\overline{AA_1} > \overline{CA_1}$ a tedy $\beta > \alpha'$, $\gamma > \alpha''$, $\beta + \gamma > \alpha' + \alpha'' = \alpha$. Jest $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$, $\alpha < 2R - (\alpha' + \alpha'') = 2R - \alpha$, $2\alpha < 2R$, $\alpha < R$. 3. Jako v 2.; místo $>$ všude až na výsledek znamení $<$. Výsledek: $\alpha > R$. **60.** Označení podle obrázku. V $\triangle AUC$ je $\omega_1 > \alpha_1$ a v $\triangle AUB$ je $\omega_2 > \alpha_2$, neboť vnější úhel v trojúhelníku je větší než kterýkoli protilehlý vnitřní. $\sphericalangle BUC = \omega_1 + \omega_2 > > \alpha_1 + \alpha_2 = \sphericalangle BAC$, tedy $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$. Nebo: V $\triangle BUD$ je $\omega_1 + \omega_2 > \varphi$. V $\triangle AUD$ je $\varphi > \alpha_1 + \alpha_2$ z téhož důvodu jako prve a tedy $\sphericalangle BUC = \omega_1 + \omega_2 > \varphi > \alpha_1 + \alpha_2 = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$.

61. V $\triangle ADC$ vnější úhel $\delta > \frac{1}{2}\alpha$. Ježto $\delta > \frac{1}{2}\alpha$, je v $\triangle ABD$: $\overline{AB} > \overline{BD}$. **62.** V $\triangle ACD$ je $\overline{AC} + \overline{CD} > \overline{AD}$, v $\triangle ABD$ je $\overline{AB} + \overline{BD} > \overline{AD}$. Sečtením $\overline{AC} + \overline{AB} + (\overline{CD} + \overline{BD}) > 2 . \overline{AD}, \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} > 2 . \overline{AD}, \overline{AD} < \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$. **63.** V $\triangle ABD$ je $\overline{AB} + \overline{AD} > \overline{BD} = \overline{BU} + \overline{UD}$. V $\triangle DUC$ je $\overline{UD} + \overline{DC} > \overline{UC}$. Sečtením obou nerovností plyne $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{UD} + \overline{DC} > \overline{BU} + \overline{UD} + \overline{UC}$, $\overline{AB} + (\overline{AD} + \overline{DC}) > \overline{BU} + \overline{UC}$, $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BU} + \overline{UC}$. **64.** Platí v $\triangle BUD$ vztah $\overline{BU} + \overline{DU} \geq \overline{BD}$, rovnost jen tehdy, leží-li U na BD; platí v $\triangle AUC$ vztah $\overline{AU} + \overline{CU} \geq \overline{AC}$, rovnost jen tehdy, leží-li U na AC. Sečtením bude $\overline{AU} + \overline{BU} + \overline{CU} + \overline{DU} \geq \overline{AC} + \overline{BD}$, rovnost jen tehdy, leží-li U současně na AC i BD, to jest v U', průsečíku obou úhlopříček. **65.** Protože $\overline{AB}$ je nejdelší stranou, je $\overline{AB} > \overline{AD}$ a tedy $\delta_1 > \beta_1$; protože $\overline{CD}$ je nejmenší stranou, je $\overline{BC} > \overline{CD}$ a tedy $\delta_2 > \beta_2$. Sečtením $\delta_1 + \delta_2 > \beta_1 + \beta_2$, to jest $\delta > \beta$. **66.** *sus*: Je-li $u = R$, jsou obě s odvěsny a platí: Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v obou odvěsnách. *usu*: Jsou-li obě u úhly ostré (doplňkové), je s přepona: Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v přeponě a jednom ostrém úhlu. Je-li jedno u úhel pravý, je s odvěsna: Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v odvěsně a (ostrém) úhlu přilehlém. *sss*: Nedává nic, protože délky tří stran jsou v pravoúhlém trojúhelníku závislé (Pythagorova věta). *suu*: Je-li protilehlý úhel pravý, je s přepona a dostáváme pravidlo odvozené jako první z *usu*. Je-li protilehlý úhel ostrý, je s odvěsna: Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné odvěsně a (ostrém) úhlu protilehlém. Z věty o shodnosti dvou trojúhelníků pomocí dvou stran a úhlu ležícího proti delší z nich plyne, že $u = R$, strany jsou přepona a odvěsna: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v přeponě a jedné odvěsně. **67.** $\triangle ATP \cong \triangle ATQ$ (*usu*); R, $\overline{AT}$, $\frac{1}{2}\alpha$; důsledek: $\overline{AP} = \overline{AQ}$, $\triangle TSB \cong \triangle TSC$ (*sus*); $\overline{BS} = \overline{SC}$, R, $\overline{TS}$; $\triangle TCQ \cong \triangle TBP$ (*ssu*); $\overline{TB} = \overline{TC}$, $\overline{TP} = \overline{TQ}$, R; důsledek: $\overline{BP} = \overline{CQ}$. Jest $\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB}$, $\overline{AQ} = \overline{AC} + \overline{CQ}$. Sečtením $\overline{AP} + \overline{AQ} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{CQ} - \overline{PB}$, $2\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AP} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$. **68.** $\triangle ACH \cong \triangle AKB$ (*sus*), neboť $\overline{AC} = \overline{AK}$, $\overline{AH} = \overline{AB}$, $\sphericalangle BAK = \alpha + 60° = \sphericalangle CAH$, tedy $\overline{CH} = \overline{KB}$. Otočíme-li $\triangle ACH$ kolem bodu A o úhel 60°, kryje se $\triangle ACH$ s $\triangle AKB$, protože jsou shodné. Je tedy $\sphericalangle HLB = 60°$, čili $\sphericalangle BLC = 120°$. **69.** (V obrázku jsou čtverce vyrýsovány v opačných polorovinách než je v zadání.) Označme $\varphi = \sphericalangle KAD$, pak také $\sphericalangle HBC = \varphi$, neboť jsou to úhly s rameny rovnoběžnými v témže smyslu. (Stačí posunout první úhel o délku AB, aby se ztotožnil s druhým úhlem.) $\sphericalangle QBH = R - \varphi = \sphericalangle BAD$. Dále je $\triangle DAB \cong \triangle QBH$ (*sus*), neboť $\overline{DA} = \overline{CB} = \overline{QB}$, $\overline{AB} = \overline{BH}$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle QBH$. Tedy $\overline{DB} = \overline{QH}$. **70.** Označme patu kolmice BQ na AP písmenem T. Ve čtyrúhelníku $QSPT$ jsou $\sphericalangle S =$

$= \sphericalangle T = R$, tedy $\sphericalangle P + Q = 2R$. Jest proto $\sphericalangle APB = \sphericalangle BQC$. Dále je $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle ABP = 45°$ a $\overline{AB} = \overline{BC}$. Proto $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$ (*suu*).

71. Vypuklé čtyrúhelníky $A_1B_1C_1D_1$ a $A_2B_2C_2D_2$ nechť se shodují ve všech stranách a úhlu α. Úhlopříčkami B_1D_1 a B_2D_2 rozdělíme oba vypuklé čtyrúhelníky na $\triangle A_1B_1D_1 \cong \triangle A_2B_2D_2$ (*sus*) a na $\triangle B_1C_1D_1 \cong \triangle B_2C_2D_2$ (*sss*). Z první shodnosti ($\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, $\overline{A_1D_1} = \overline{A_2D_2}$, $\sphericalangle D_1A_1B_1 = \alpha = \sphericalangle D_2A_2B_2$ plyne $\overline{B_1D_1} = \overline{B_2D_2}$ a z předpokladů $\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$, $\overline{D_1C_1} = \overline{D_2C_2}$ a tím druhá shodnost. Vypuklost obou čtyrúhelníků je tu podstatný předpoklad. **72.** Shodují-li se dva lichoběžníky v obou základnách a obou rameňech, označme jejich vrcholy A_1, B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2, D_2, aby $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ (delší základna), $\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$, $\overline{C_1D_1} = \overline{C_2D_2}$, $\overline{D_1A_1} = \overline{D_2A_2}$. Veďme v obou lichoběžnících vrcholy C rovnoběžku se stranou AD a označme E její průsečík se stranou AB. Jest $\triangle E_1B_1C_1 \cong$ $\cong \triangle E_2B_2C_2$ (*sss*), neboť $\overline{C_1E_1} = \overline{D_1A_1} = \overline{D_2A_2} = \overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$, $\overline{E_1B_1} = \overline{A_1B_1} -$ $- \overline{D_1C_1} = \overline{A_2B_2} - \overline{D_2C_2} = \overline{E_2B_2}$. Tedy též $\sphericalangle E_1 = \sphericalangle E_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami). Tedy i rovnoběžníky $A_1E_1C_1D_1$ a $A_2E_2C_2D$ jsou shodné (podle výsl. cv. 71). **73.** Podle cvič. 72 stačí dokázat, že základny obou lichoběžníků $\overline{ED}$ a $\overline{FB}$ jsou stejně dlouhé, neboť pak i druhé základny $\overline{AE}$ a $\overline{CF}$ budou stejně dlouhé a ramena obou lichoběžníků jsou stejně dlouhá ($\overline{EF}$ společné, $\overline{AB} = \overline{CD}$). Avšak rovnoběžník je středově souměrný kolem středu S a $\overline{ED}$ je sdružená úsečka s $\overline{FB}$, tedy $\overline{ED} = \overline{FB}$. **74.** Označení podle obrázku. Zvolme na $\overline{BC}$ libovolné body H a H', bod H' blíže k B. Máme dokázati, že $\overline{Q'H'} + \overline{H'P'} = \overline{QH} + \overline{HP}$. Veďme bodem H' rovnoběžku s BA a bodem H rovnoběžku s $\overline{CA}$. Jest $\triangle H'HL \cong HH'M$ (pravoúhlé trojúhelníky o společné přeponě a shodném ostrém úhlu při H' v $\triangle H'HL$ a při H v $\triangle HH'M$). Tedy $\overline{HL} = \overline{H'M}$. Dále v obdélníku $Q'H'LQ$ je $\overline{Q'H'} = QL$ a v obdélníku $HPP'M$ je $\overline{HP} = \overline{MP'}$. Tedy $\overline{Q'H'} + \overline{H'P'} = \overline{QL} + \overline{H'M} + \overline{MP'} = \overline{QL} +$ $+ \overline{LH} + \overline{MP} = \overline{QH} + \overline{HP}$. Nebo: Překlopme $\triangle ABC$ kolem strany BC do $\triangle A'BC$. Zvolme na $\overline{BC}$ bod H a spusťme kolmici $\overline{HQ}$ na $\overline{AB}$ a $\overline{HP}$ na $\overline{AC}$. Překlopení je osová souměrnost o ose BC. Patě P na $\overline{AC}$ nechť je takto přidružen P' na $\overline{A'C}$. Z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle BHQ$ a $\triangle CHP$ plyne, ježto $\sphericalangle B =$ $= \sphericalangle C$, že $\sphericalangle BHQ = \sphericalangle CHP$. Ze souměrnosti plyne, že $\sphericalangle CHP = \sphericalangle CHP'$ a $\overline{HP} = \overline{HP'}$. Tedy $\sphericalangle BHQ = \sphericalangle CHP'$. Avšak body B, H, C leží na přímce BC, tedy též body Q, H, P' leží na přímce a jest $\overline{QH} + \overline{HP} = \overline{QH} + \overline{HP'} =$ $= \overline{QP'}$, t. j. vzdálenost dvou rovnoběžných stran (výška) kosočtverce $ABA'C$, jež jest nezávislá na poloze bodu H. Nebo: Zvolme uvnitř základny $\overline{BC}$ rovnoramenného $\triangle ABC$ bod H a spusťme kolmice $\overline{HP}$ a $\overline{HQ}$ na ramena $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$. Dále veďme bodem H rovnoběžku s jedním ramenem, na př. AB a označme R její průsečík s druhým ramenem $\overline{AC}$. Spusťme kolmici z C na $\overline{HR} \parallel \overline{AB}$ a označme její patu na HR písmenem U a na AB písmenem S. Jest $\triangle HUC \cong \triangle CPH$ (pravoúhlé trojúhelníky o společné přeponě $\overline{HC}$, a přilehlém ostrém úhlu $\sphericalangle UHC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle PCH$). Tedy $\overline{HP} = \overline{UC}$. Z obdélníku $QHUS$ plyne $\overline{QH} = \overline{SU}$. Proto je $\overline{QH} + \overline{HP} = \overline{SU} + \overline{UC} = \overline{SC}$, což je výška k rameni rovnoramenného $\triangle ABC$, jejíž délka je nezávislá na poloze bodu H na základně $\overline{BC}$. Bod H může tedy také splynout s bodem B nebo C. **75.** Bodem H zvoleným libovolně uvnitř rovnostranného trojúhelníka ABC veďme rovnoběžku na př. se stranou AB a označme její průsečíky se zbývajícími stranami $\overline{AC}$ a $\overline{BC}$ písmeny A' a B'. Jest podle cvič. 74 $\overline{HQ} + \overline{HP} = \overline{B'Q} = \overline{CC'}$ (výšky v rovnostran. $\triangle\, A'B'C$) a tedy $\overline{HQ} + \overline{HP} + \overline{HR} = \overline{CC'} + \overline{C'C''} = \overline{CC''}$, což jest délka výšky rovnostranného $\triangle\, ABC$, nezávislá na poloze bodu H uvnitř $\triangle\, ABC$. **76.** Zvolme dvě různoběžky p, q a označme jejich průsečík S. Označme d daný součet vzdáleností. Veďme k různoběžkám p a q rovnoběžky p', p'' a q', q'' ve vzdálenosti d a označme průsečíky pomocných rovnoběžek s danými různoběžkami po řadě A, C, B, D. Body A, B, C, D jsou vrcholy obdélníka, tvořícího hledané geometrické místo. Neboť z konstrukce plyne $\overline{AS} = \overline{SC} = \overline{BS} = \overline{SD}$ rovnost úhlopříček čtyrúhelníka $ABCD$ a jejich půlení bodem S. Tedy $ABCD$ je obdélník. Úhlopříčky a strany obdélníka $ABCD$ tvoří čtyři rovnoramenné trojúhelníky a podle cvič. 74 bod H uvnitř stran AB, BC, CD, DA nebo ve vrcholech A, B, C, D má součet vzdáleností od různoběžek p a q roven délce d. Naopak, zvolíme-li bod H' mimo obdélník $ABCD$, na př. vně v úhlu $\sphericalangle\, ASB$, veďme bodem H' rovnoběžku s AB a označme A', B' její průsečíky s různoběžkami p a q. Jsou-li paty kolmic spuštěných s bodu H' na p a q označeny P' a Q', je podle cvič. 74 $\overline{H'P'} + \overline{H'Q'}$ = vzdálenosti bodu A' od přímky p, jež je větší než d. Tedy H' nenáleží hledanému geom. místu. Podobně pro jiné polohy bodu H' vně nebo uvnitř obdélníka $ABCD$. Dokázali jsme tedy: 1. že každý bod obdélníka $ABCD$ má žádanou vlastnost, 2. že jenom tyto body mají tuto vlastnost. **77.** Označme σ daný součet, $\sigma > s$. Označme d_1 resp. d_2 vzdálenost geom. místa od p resp. q. Jest $d_1 + d_2 = \sigma$, $d_1 - d_2 = s$, tedy $d_1 = \frac{1}{2}(\sigma + s)$, $d_2 = \frac{1}{2}(\sigma - s)$. Označme ϱ daný rozdíl, $\varrho < s$. Označme opět d_1 resp. d_2 vzdálenost geom. místa od p resp. q. Jest $d_1 - d_2 = \varrho$, $d_1 + d_2 = s$, tedy $d_1 = \frac{1}{2}(s + \varrho)$, $d_2 = \frac{1}{2}(s - \varrho)$. Zaměníme-li v obou případech d_1 za d_2, dostaneme druhou z rovnoběžných přímek geom. místa. Zvolíme-li bod na jedné z rovnoběžek p, q nebo uvnitř pásu ohraničeném oběma rovnoběžkami, bude $d_1 + d_2 = s$. Tedy součet vzdáleností nějakého bodu od daných rovnoběžek p a q nemůže býti menší nežli s. Zvolíme-li bod na jedné z rovnoběžek p, q nebo vně pásu ohraničeném oběma rovnoběžkami, bude rozdíl vzdáleností vždy roven s. Tedy rozdíl vzdáleností nějakého bodu od daných rovnoběžek nemůže býti větší nežli s. **78.** Daný rovnoběžník je středově souměrný vzhledem k průsečíku S úhlopříček AC, BD. Jest $\triangle\, MDS \cong \triangle\, KBS$ (*sus*), $\overline{MD} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{KB}$, $\overline{DS} = \overline{BS}$, $\sphericalangle\, MDS = 60° + \delta_1 = 60° + \beta_1 = \sphericalangle\, KBS$. Tedy též $\sphericalangle\, MSD = \sphericalangle\, KSB$ a jsou to úhly vrcholové, ježto D, S, B leží v jedné přímce. Tedy též M, S, K leží v jedné přímce $\overline{MS} = \overline{KS}$. [Kdyby však $\sphericalangle\, MDS = \sphericalangle\, KBS = 180°$, pak $\triangle\, MDS$ a $\triangle\, KBS$ přejdou v úsečky a bude přímo $\overline{MS} = \overline{MD} + \overline{DS} = \overline{KB} + \overline{BS} = \overline{KS}$.] Tedy též M a K jsou středově souměrné vzhledem k S. Podobně H a L jsou středově souměrné vzhledem k S a $HKLM$ je rovnoběžník. **79.** Ježto $\overline{AB} = \overline{CD}$, je $\sphericalangle\, ASB = \sphericalangle\, CSD$ a tedy též $\sphericalangle\, ASC = \sphericalangle\, ASB + \sphericalangle\, BSC = \sphericalangle\, CSD + \sphericalangle\, BSC = \sphericalangle\, BSD$ a tedy $\overline{AC} = \overline{BD}$. (Podle vět na str. 43 a 44 učebnice.) **80.** Tětivy $\overline{HM}$ v k_1 a $\overline{KL}$ v k_2 mají S_1S_2 za společnou osu souměrnosti, neboť jsou rovnoběžné se společnou tětivou $\overline{AB}$ obou kružnic k_1 a k_2. Označme R průsečík přímky p s osou S_1S_2. Jest $\overline{HR} = \overline{RM}$, $\overline{KR} = \overline{RL}$ a po odečtení je $\overline{HK} = \overline{HR} - \overline{KR} = \overline{RM} - \overline{RL} = \overline{LM}$.

81. Jsou-li S_1O_1 resp. S_2O_2 osy souměrnosti tětiv $\overline{C_1A}$ resp. $\overline{AC_2}$, jest $\overline{C_1C_2} = \overline{C_1A} + \overline{AC_2} = 2 \,.\, \overline{O_1A} + 2 \,.\, \overline{AO_2} = 2 \,.\, (\overline{O_1A} + \overline{AO_2}) = 2 \,.\, \overline{O_1O_2} = 2 \,.\, \overline{S_1S_2}$, neboť $S_1S_2O_2O_1$ je obdélník. **82.** Nemožné to je u kosoúhlého rovnoběžníka a obecného lichoběžníka, neboť pak $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ a $o_{AB} \parallel o_{CD}$. Nekonečně mnoho řešení je u obdélníka a rovnoramenného lichoběžníka, neboť pak obě osy o_{AB}, o_{CD} splynou. **83.** Ježto $\overline{AC}$ a $\overline{BE}$ jsou tětivy rovnoběžné v téže kružnici, splynou osy souměrnosti obou tětiv a čtyrúhelník $EBAC$ je rovnoramenný lichoběžník. Totéž platí o čtyrúhelníku $BFDA$ v druhé kružnici. Tedy $\overline{CE} = \overline{AB} = \overline{DF}$. Dále úhly při vrcholu B v obou lichoběžnících jsou výplňkové a tedy též $\sphericalangle E$ a $\sphericalangle F$ jsou výplňkové. Avšak to jsou úhly přilehlé při EF, tedy $CE \parallel FD$. Tedy $EFDC$ je rovnoběžník a $\overline{EF} = \overline{CD}$. **84.** Označení podle obrázku. Jest $AP \parallel SB$ a tedy (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami) $\sphericalangle SAP = \alpha$. V rovnoramenném $\triangle SAB$ je vnější úhel $\alpha = \omega + \omega = 2\omega$, $\omega = \frac{1}{2}\alpha$. **85.** SA je kolmice na tečnu menší kružnice a tedy současně osou souměrnosti tětivy $\overline{BC}$. Proto $\overline{BA} = \overline{AC}$. **86.** Označení podle obrázku. Zvolme $P'Q' \parallel AB$. Jest $AP \parallel SC \parallel BQ$ podle konstrukce. Jsou tedy $ASCP'$ a $SBQ'C$ rovnoběžníky a $\overline{P'C} = \overline{AS} = \overline{BS} = \overline{Q'C}$, $\sphericalangle P = \sphericalangle Q = R$, $\sphericalangle P'CP = \sphericalangle Q'CQ$. Tedy $\triangle P'CP \cong \triangle Q'CQ$ a $\overline{CP} = \overline{CQ}$. **87.** a) Jest $\triangle SAC \cong \triangle SBC$ (*ssu*), neboť $\overline{SA} = r = \overline{SB}$, $\overline{SC} > r$ je společná, $\sphericalangle SAC = R = \sphericalangle SBC$. Proto $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\sphericalangle SCA = \sphericalangle SCB$. b) Jest $SB \parallel DC$ podle konstrukce a proto $\sphericalangle CSB = \sphericalangle SCD$ (úhly střídavé mezi rovnoběžkami), $\sphericalangle CSB = \sphericalangle CSA$ (podle a)) a proto $\triangle DSC$ je rovnoramenný s rameny $\overline{SD} = \overline{CD}$. **88.**

tětiva	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
středový úhel ve stupních . .	66	140	152	73	74	142	139	68	147	79
pořadí	1	7	10	3	4	8	6	2	9	5

protože nad menším středovým úhlem (dutým) leží menší tětiva. **89.** Jest $v_1^2 = r^2 - (\frac{1}{2}t_1)^2$, $v_2^2 = r^2 - (\frac{1}{2}t_2)^2$. Když je $t_1 = t_2$, pak je též $v_1^2 = v_2^2$ a $v_1 = v_2$. Když $t_1 < t_2$, pak $\frac{1}{2}t_1 < \frac{1}{2}t_2$, $(\frac{1}{2}t_1)^2 < (\frac{1}{2}t_2)^2$, $v_1^2 > v_2^2$ a $v_1 > v_2$. **90.** a) $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\psi = 65°$; b) $\alpha = \beta = 74°$, $\psi = 2\beta = 148°$; c) $\beta = \alpha = 66°$; d) $\gamma = \delta = \frac{1}{2}\varphi = 115°$; e) $\psi = 2\alpha = 128°$, $\varphi = 4R - \psi = 232°$, $\delta = \frac{1}{2}\varphi = 116°$ nebo $\delta = 2R - \alpha = 116°$; f) $\beta = \frac{1}{2}\psi = 63°$, $\delta = 2R - \alpha = 117°$; g) $\delta = 2R - \alpha = 122°$; h) $\beta = 2R - \gamma = 70°$.

91. Středový úhel nad tětivou BD $\sphericalangle DSB = \sphericalangle BAD = 50°$, ω je obvodový úhel nad touže tětivou, $\omega = \frac{1}{2} \sphericalangle DSB = 25°$. **92.** Je-li AB základnou rovnoramenného $\triangle ABC$, je $\alpha = \beta = 32°$, $\gamma = 116°$. Středové úhly nad oblouky $\widehat{AC}$ a $\widehat{BC}$ jsou $2\alpha = 64°$, nad obloukem $\widehat{AB}$ je $2\gamma = 232°$. Je-li A vrcholem rovnoramenného $\triangle ABC$, je $\alpha = 32°$, $\beta = \gamma = 74°$. Středové úhly nad oblouky $\widehat{AB}$ a $\widehat{AC}$ jsou $2\beta = 2\gamma = 148°$, nad obloukem $\widehat{BC}$ je $2\alpha = 64°$. **93.** a) $\sphericalangle AFB = \frac{1}{2} . \sphericalangle ASB = 18°$; $\sphericalangle BFC = \frac{1}{2} . \sphericalangle BSC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ASC - \sphericalangle ASB) = 12°$; $\sphericalangle AED = \frac{1}{2}(4R - \sphericalangle ASD) = 105°$; $\sphericalangle CED = \frac{1}{2}(4R - \sphericalangle CSD) = \frac{1}{2}[4R - (\sphericalangle ASD - \sphericalangle ASC)] = 135°$; b) $\sphericalangle ASF + \sphericalangle DSF + \sphericalangle ASD = 360°$, $2 . \sphericalangle DSF + \sphericalangle DSF + 150° = 360°$, $3 . \sphericalangle DSF = 210°$, $\sphericalangle DSF = 70°$, $\sphericalangle DAF = \frac{1}{2} . \sphericalangle DSF = 35°$, běřeme-li $\sphericalangle ASF$ jako dutý úhel. $\sphericalangle ASD + \sphericalangle DSF = \sphericalangle ASF$, $\sphericalangle ASD + \sphericalangle DSF = 2 . \sphericalangle DSF$, $\sphericalangle DSF = \frac{1}{2} . \sphericalangle ASD = 75°$, $\sphericalangle DAF = \frac{1}{2} . \sphericalangle DSF = 37° 30'$, běřeme-li $\sphericalangle ASF$ jako vypuklý úhel. **94.** Středový úhel k jedné straně pravidelného pětiúhelníka je $\omega = \frac{1}{5} . 4R = 72°$, $\sphericalangle ADB = \frac{1}{2}\omega = 36°$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABD = \frac{1}{2}[2R - \sphericalangle ADB] = 72°$. **95.** Označme střed ciferníku kruhového S. Je $\sphericalangle 2 = \frac{1}{2} . \sphericalangle 9S6 = 45°$, $\sphericalangle 6 = \frac{1}{2} . \sphericalangle 9S2 = 75°$, $\sphericalangle 9 = \frac{1}{2} . \sphericalangle 2S6 = 60°$. **96.** Označme střed kruhového ciferníku S, průsečík spojnic P. Jest $\sphericalangle 149 = \frac{1}{2} . \sphericalangle 1S9 = 60°$, $\sphericalangle 294 = \frac{1}{2} . \sphericalangle 2S4 = 30°$. $\sphericalangle 9P4 + \sphericalangle 149 + \sphericalangle 294 = 180°$, $\sphericalangle 9P4 = 90°$. **97.** $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = R - 35° = 55°$. **98.** a) $\sphericalangle ABC = 2R - \sphericalangle ADC = 53°$. $\triangle ABC$ je pravoúhlý, proto $\sphericalangle BAC = R - \sphericalangle ABC = 37°$. b) Určete $\sphericalangle ABD$ (místo někde chybně vytištěného $\sphericalangle ABC$ v zadání). Jest $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 25°$. $\triangle ABD$ je pravoúhlý, proto $\sphericalangle ABD = R - \sphericalangle BAD = 65°$. **99.** a) $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD$. V $\triangle ACD$ je $\sphericalangle CAD + \sphericalangle ADC + \sphericalangle ACD = 2R$, $\sphericalangle CAD = 180° - 70° - 50° = 60°$. b) $\sphericalangle BCD = 2R - \sphericalangle BAD$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle CAD = 2R - \sphericalangle AND - \sphericalangle ADN$, $\sphericalangle AND = \sphericalangle BNC$, $\sphericalangle ADN = \sphericalangle ADB$. Postupně: $\sphericalangle CAD = 33°$, $\sphericalangle BAD = 75°$, $\sphericalangle BCD = 105°$. c) Hledáme ostrý úhel ω mezi úhlopříčkami AC, BD. Označme průsečík úhlopříček N. V trojúhelníku $\triangle AND$ označme úhly $\sphericalangle A$, $\sphericalangle N$, $\sphericalangle D$. Jest $\sphericalangle A = \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = 50°$, tedy $\sphericalangle A = 48°$. Jest $\sphericalangle D = \sphericalangle ADC - \sphericalangle BDC$, $\sphericalangle ADC = 2R - \sphericalangle ABC = 74°$, tedy $\sphericalangle D = 24°$. $\sphericalangle N + \sphericalangle A + \sphericalangle D = 2R$, $\sphericalangle N = 108°$; $\omega = 2R - \sphericalangle N = 72°$. **100.** Úhlopříčka AD rozdělí daný šestiúhelník na dva tětivové čtyrúhelníky $ABCD$ a $ADEF$. Označíme úhly při vrcholu A v prvém z nich $\sphericalangle A_1$, v druhém $\sphericalangle A_2$. Jest $\sphericalangle A_1 + \sphericalangle C = 2R$, $\sphericalangle A_2 + \sphericalangle E = 2R$. Sečtením $(\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2) + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 4R$, a ježto $\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2 = \sphericalangle A$, jest $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 4R$.

101. $\sphericalangle C = \gamma$, $\sphericalangle D = \delta$, $\sphericalangle E = \varepsilon$, $\sphericalangle F = \varphi$. Z tětivového čtyrúhelníka $CDBA$ plyne $\gamma = 2R - \beta$, $\delta = 2R - \alpha$. Z tětivového čtyrúhelníka $ABFE$ $(\sphericalangle A = 2R - \alpha$, $\sphericalangle B = 2R - \beta)$ plyne $\varepsilon = 2R - (2R - \beta) = \beta$, $\varphi = 2R - (2R - \alpha) = \alpha$. Tedy $\delta + \varphi = (2R - \alpha) + \alpha = 2R$ nebo $\gamma + \varepsilon = (2R - \beta) + \beta = 2R$. Jsou tedy δ a φ nebo γ a ε úhly přilehlé a výplňkové, proto $CD \parallel EF$. **102.** 1. $\beta > R$. Bod E je na prodloužení $\overline{CD}$ za bod D a $ABCE$ je tětivový čtyrúhelník. Pak $\sphericalangle AED = 2R - \sphericalangle ABC = 2R - \beta$, $\sphericalangle ADE = 2R - \delta = 2R - \beta$ (podle předpokladu $\beta = \delta$ a podle konstrukce bodu E). Tedy $\triangle ADE$ je rovnoramenný nad $\overline{ED}$ jako základnou. 2. $\beta < R$. Bod E je uvnitř úsečky $\overline{CD}$ a $ABCE$ je tětivový čtyrúhelník. Pak $\sphericalangle AEC = 2R - \beta$, $\sphericalangle AED =$

$= 2R - \sphericalangle AEC = 2R - (2R - \beta) = \beta$, $\sphericalangle ADE = \delta = \beta$. Tedy $\triangle ADE$ je rovnoramenný nad ED jako základnou. 3. $\beta = R$. Pak E splyne s D a $\triangle ADE$ přejde v úsečku $\overline{AD}$ a není co dokazovat. **103.** $\sphericalangle CBA = R = \sphericalangle ABD$, ježto to jsou obvodové úhly nad průměrem. Tedy $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ABD = 2R$, a body C, B, D leží v jedné přímce. **104.** Jsou tři možnosti: 1. bod M leží na polopřímce LE mimo L, 2. bod M leží na polopřímce LF mimo L, 3. $M \equiv L$. Vždy je $\sphericalangle HLK = 2R - 2 \cdot 60° = 60°$. $\sphericalangle HMK = \sphericalangle HLK = 60°$, obv. úhly nad tětivou HK. V 1. je v tětivovém čtyrúhelníku $HMLK$: $\sphericalangle MLK + \sphericalangle MHK = 2R$, $\sphericalangle MLK = 120°$, tedy $\sphericalangle MHK = 60°$. V 2. je v tětivovém čtyrúhelníku $HLMK$: $\sphericalangle MLH + \sphericalangle MHK = 2R$, $\sphericalangle MLH = 120°$, tedy $\sphericalangle MHK = 60°$. Tedy v 1. a 2. jsou v $\triangle HKM$ dva úhly rovné $60°$, tedy $\triangle HKM$ je rovnostranný. V 3. úsekový úhel nad tětivou MK nebo MH je $60°$, a tedy též obvodové úhly $\sphericalangle MHK$ nebo $\sphericalangle MKH$ jsou $60°$, tedy opět $\triangle HKM$ je rovnostranný. **105.** Ježto $\overline{AB} = \overline{CD}$, platí o obvodových úhlech: $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DBC$. Dále je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ (obv. úhly nad společnou tětivou CD). Tedy $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$. **106.** Spojíme-li AD, vzniknou dva tětivové čtyrúhelníky $ABCD$ a $ADEF$, v nichž $\sphericalangle B = \sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF = \sphericalangle E$. Tedy $\sphericalangle CDA = 2R - \sphericalangle B = 2R - \sphericalangle E = \sphericalangle FAD$. Tedy $\sphericalangle CDA$ a $\sphericalangle FAD$ jsou střídavé sobě rovné a proto $AF \parallel DC$. **107.** V kružnici k_2 je $\overline{AS} = \overline{SB} = r_2$ a v kružnici k_1 jsou obvodové úhly nad tětivami $\overline{AS} = \overline{SB}$ taktéž rovné, tedy $\sphericalangle ACS = \sphericalangle SCB$. **108.** Nechť osa $\sphericalangle BAC$ protne kružnici k v bodě P a osa $\sphericalangle BDC$ v bodě Q. Jest $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ (obv. úhly nad obloukem $\widehat{BC}$). Ježto $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAC$ a $\sphericalangle BDQ = \sphericalangle QDC$, půlí P a Q současně oblouk $\widehat{BC}$ a $P \equiv Q$ leží na kružnici. **109** a **110.** Vizte obrázek.

111. Sestrojme kružnice opsané $\triangle ADE$ a $\triangle BDF$. Kromě bodu D se protnou ještě v jednom bodě, jejž označme K. V tětivovém čtyrúhelníku $ADKE$ je $\sphericalangle DKE = 2R - \alpha$ a v tětivovém čtyrúhelníku $BDKF$ je $\sphericalangle DKF = 2R - \beta$. Je tedy $\sphericalangle EKF = 4R - \sphericalangle DKE - \sphericalangle DKF = 4R - (2R - \alpha) - (2R - \beta) = \alpha + \beta = 2R - \gamma$. Tedy čtyrúhelník $CEKF$ je tětivový a kružnice jemu opsaná jdoucí bodem K je též kružnicí opsanou $\triangle CEF$. **112.** Označme vrchol $\sphericalangle 58°$ písmenem B, průsečík jednoho ramene s kružnicí písmenem A, bod dotyku T a libovolný bod na tečně vně ramene $\sphericalangle 42°$ písmenem Q. Jest $\sphericalangle TAB = 42°$, $\sphericalangle ATQ = 58°$, $\sphericalangle ATB = 2R - (42° + 58°) = 80°$. **113.** Označme vrcholy obou $\triangle ABC$ a $\triangle EFD$ tak, aby $\sphericalangle E = 68°$, $\sphericalangle F = 56°$, E bylo na $\overline{AC}$ a F na $\overline{AB}$. Jest $\sphericalangle EDF = 56°$. Dále je $\sphericalangle AEF = \sphericalangle AFE = \sphericalangle CED = \sphericalangle CDE = 56°$; $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle BFD = \sphericalangle BDF = 68°$; $\sphericalangle B = 44°$. **114.** $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = 55° + 25° = 80°$. $\sphericalangle ABC =$ úsek. úhlu ve vrcholu A nad tětivou $AC = 25° + 48° = 73°$. $\sphericalangle BCD = 2R - \sphericalangle BAD = 100°$, $\sphericalangle CDA = 2R - \sphericalangle ABC = 107°$ (protější úhly v tětivovém čtyrúhelníku $ABCD$). **115.** Ježto $\beta = 2\alpha$, je α ostrý úhel. Tečna ve vrcholu C k opsané kružnici svírá se stranou $\overline{CB}$ (ostrý) úsekový úhel rovný $\sphericalangle CAB = \alpha$. Osa úhlu β svírá taktéž se stranou $\overline{BC}$ úhel $\frac{1}{2}\beta = \alpha$. Jsou tedy tyto střídavé úhly sobě rovny a proto osa úhlu β je rovnoběžná s tečnou v bodě C. **116.** Označme k_1 kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Obvodové úhly nad AD v k jsou $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$. Úsekový úhel v k nad AN je roven obv. úhlu $\sphericalangle ABN = \sphericalangle ABD$, tedy $\sphericalangle ANt = \sphericalangle ABD$. Tedy souhlasné úhly: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ANt$ a $t \parallel CD$. **117.** Jest S střed kružnice k. Jest $\sphericalangle ADB = 50°$ jako vnitřní úhel v $\triangle ABD$, jsou-li dány jeden vnitřní a vnější úhel. Dále $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADB = 50°$ (obv. a úsekový úhel nad obloukem $\widehat{BC}$). Tedy $\triangle ABC$ je rovnoramenný, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Dále je $\sphericalangle CBD = 2R - 50° - 100° = 30°$ a středový $\sphericalangle CSD = 2 \,.\, \sphericalangle CBD = 60°$ tedy $\overline{CD}$ je rovné poloměru kružnice k. **118.** Ježto $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{CE}$ je C střed kružnice opsané $\triangle BDE$, $\overline{BD}$ je průměr a proto $\sphericalangle BED = R$. $\triangle CEA \cong \triangle BED$ ($\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{CE} = \overline{BE}$, $\sphericalangle C = \sphericalangle B = 60°$). Tedy $\sphericalangle CEA = R$. **119.** Ježto $\sphericalangle ADB = 36°$, je $\sphericalangle ASB = 2R - 36° = 144°$. Bod C může ležeti 1. v polorovině ABS, 2. v opačné polorovině k ABS. V 1. je $\sphericalangle CAD$ úsekový úhel nad obloukem $\widehat{CBA}$, k němuž středový úhel je $\sphericalangle ASC = 2 \,.\, \sphericalangle CAD = \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC = 144° + \frac{1}{3} \,.\, 144° = 144° + 48° = 192°$, tedy $\sphericalangle CAD = 96°$. V 2. je $\sphericalangle CAD$ úsekový úhel nad obloukem $\widehat{CA}$ (na němž neleží B), k němuž středový úhel je $\sphericalangle ASC = 2 \,.\, \sphericalangle CAD = \sphericalangle ASB - \sphericalangle CSB = 144° - \frac{1}{3} \,.\, 144° = 144° - 48° = 96°$, tedy $\sphericalangle CAD = 48°$. **120.** Oba vedlejší úhly k $\sphericalangle CAD$ sevřenému tečnami jsou úhly vrcholové a tedy sobě rovny o velikosti α. Jest $\sphericalangle AEF = \alpha = \sphericalangle AFE$ (úsekové úhly nad obloukem $\widehat{AD}$ po př. $\widehat{AC}$ jsou rovny obv. úhlu nad týmž obloukem). Tedy v rovnoramen. $\triangle AEF$ je $\overline{AF} = \overline{AE}$.

121. V $\triangle BCE$ je $\sphericalangle BEC = 36°$ podle cvič. 94. V rovnoramenném $\triangle BCD$ je $\sphericalangle BCD = \frac{1}{5} \,.\, 6R = 108°$ a tedy $\sphericalangle DBC = 36°$. V kružnici opsané $\triangle BEF$ je tedy obvodový úhel nad obloukem $\widehat{BF}$ $\sphericalangle BEF = \sphericalangle BEC = 36°$ roven $\sphericalangle DBC = \sphericalangle FBC = 36°$. To znamená, že $\sphericalangle FBC$ je úsekový úhel nad týmž obloukem $\widehat{BF}$ a tedy BC je tečna v bodě B. **122.** a) $r_2 - r_1 < \overline{S_1S_2} < r_2 + r_1$ (kružnice se protínají); b) $r_2 + r_1 > \overline{S_1S_2}$ (každá z obou kružnic je vně druhé); c) $r_2 - r_1 = \overline{S_1S_2}$ (kružnice mají vnitřní dotyk); d) $\overline{S_1S_2} < r_2 - r_1$ (menší kružnice je celá uvnitř větší); e) $\overline{S_1S_2} = r_2 + r_1$ (kružnice mají vnější dotyk). **123.** $\overline{S_1S_2} = s$, obraz snadný. a) $\varrho_1 = \frac{1}{2}(s + r_1 + r_2) = 55$, obě dané kružnice k_1, k_2 mají s touto kružnicí vnitřní dotyk. $\varrho_2 = \frac{1}{2}(-s + r_1 + r_2) = 10$, obě dané kružnice k_1, k_2 mají s touto kružnicí vnitřní dotyk. $\varrho_3 = \frac{1}{2}(s - r_1 + r_2) = 30$ tato kružnice má s k_1 vnější dotyk a s k_2 vnitřní dotyk. $\varrho_4 = \frac{1}{2}(s + r_1 - r_2) = 15$ tato kružnice má s k_1 vnitřní dotyk a s k_2 vnější dotyk. b) Jest $15 = r_2 - r_1 < s = 45 < r_2 + r_1 = 65$. Aby nastal žádaný dotyk, muselo by býti r_2 změněno na ϱ tak, aby buďto $\varrho - r_1 = 45$, anebo $\varrho + r_1 = 45$, $\varrho_1 = 45 + r_1 = 70$, $\varrho_2 = 45 - r_1 = 20$, to jest buďto zvětšit r_2 o 30, aby k'_2 měla s k_1 vnitřní dotyk anebo zmenšit r_2 o 20, aby k''_2 měla s k_1 vnější dotyk. c) Buďto $s' = r_2 - r_1 = 15$ anebo $s'' = r_2 + r_1 = 65$. Pro $s' = 15$ znamená posunutí středu S_1 ve smyslu S_1S_2 o $s - s' = 30$ nebo $s + s' = 60$, při čemž by k_1 měla s k_2 vnitřní dotyk. Pro $s'' = 65$ znamená posunutí středu ve smyslu S_1S_2 o $s'' + s = 110$ nebo posunutí ve smyslu S_2S_1 o $s'' - s = 20$, při čemž by k_1 měla s k_2 vnější dotyk. **124.** Jest $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$. Jest podle druhu dotyku $r_A + r_B = a$, $-r_A + r_C = a$, $-r_B + r_C = a$. Sečtením všech tří rovnic vyjde $2r_C = 3a$, $r_C = \frac{3}{2}a$. Dosazením za r_C do druhé a třetí vyjde $r_A = \frac{1}{2}a = r_B$. Tedy $r_A = r_B = \frac{1}{3}r_C$. **125.** Jsou-li k_1, k_2, k_3, k_4 čtyři kružnice o středech S_1, S_2, S_3, S_4 a poloměrech r_1, r_2, r_3, r_4, pak když k_3 má vnější dotyk k_1, je $r_1 + r_3 = \overline{S_1S_3}$ a když k_4 má vnější dotyk k_2, je $r_4 + r_2 = \overline{S_2S_4}$, tedy $\overline{S_1S_3} + \overline{S_2S_4} = (r_1 + r_3) + (r_4 + r_2) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$; když k_4 má vnější dotyk s k_1 je $r_4 + r_1 = \overline{S_1S_4}$, k_3 má vnější dotyk s k_2 je $r_3 + r_2 = \overline{S_2S_3}$, tedy $\overline{S_1S_4} + \overline{S_2S_3} = (r_4 + r_1) + (r_3 + r_2) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$. **126.** Pak je $\overline{S_1S_2} = r_1 + r_2 = \overline{AD}$, $r_1 = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{CD} = r_2$, tedy $\overline{AB} = r_1 + r_2 = \overline{AD}$. **127.** Dvě rovnoběžky s danou přímkou ve vzdálenosti r. **128.** Kružnice soustředná s danou o poloměru $\varrho + r$, kde ϱ je poloměr dané kružnice a r poloměr kružnice, jejíž střed probíhá geom. místo. **129.** Soustředná kružnice s danou o poloměru $|\varrho - r|$. Když $\varrho > r$, kružnice geom. místa mají s danou kružnicí vnitřní dotyk a geom. místo je kružnice soustředná s danou o poloměru $\varrho - r$. Když $\varrho < r$, daná kružnice má s kružnicemi geom. místa vnitřní dotyk a geom. místo je kružnice soustředná s danou o poloměru $r - \varrho$. Když $\varrho = r$, kružnice geom. místa splyne s danou kružnicí a geom. místo je střed dané kružnice, $\varrho - r = 0$. **130.** Osa souměrnosti úsečky omezené oběma danými body.

131. a) Přímka kolmá k dané přímce v daném bodě. b) Přímka jdoucí daným bodem na dané kružnici a jejím středem. **132.** Soustředná kružnice o poloměru $\varrho = \sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}d)^2}$. Když $d = 2r$, je $\frac{1}{2}d = r$ a $\varrho = 0$; geom. místo v a) se redukuje na střed dané kružnice. **133.** Proměnná tětiva v kružnici k o středu S buď AP, její střed O. Jest $OS \perp AP$, tedy $\sphericalangle AOS = R$ a geom. místo je kružnice nad průměrem $\overline{AS}$ (podle věty Thaletovy). **134.** Rovnoběžka s danými rovnoběžkami stejně od nich vzdálená. **135.** Osy souměrnosti všech čtyř úhlů určených oběma různoběžkami. **136.** Buďte na polopřímce p o počátku A tři body A, B, C v pořádku ABC. $\overline{AB} = a + b$, $\overline{BC} = a - b$, $\overline{AB} > \overline{BC}$. Jest $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = (a + b) + (a - b) = 2a$. Buď D střed úsečky $\overline{AC}$, je pak $\overline{AD} = a$, $\overline{DB} = b$. **137.** Budiž $\sphericalangle AVB = \alpha + \beta$, $\sphericalangle BVC = \alpha - \beta$, VC leží vně $\sphericalangle AVB$. Je $\sphericalangle AVC = \sphericalangle AVB + \sphericalangle BVC = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha$. Je-li AD osa $\sphericalangle AVC$, jest $\sphericalangle AVD = \alpha$, $\sphericalangle DVB = \beta$. **138.** Přímka vytínající z obou ramen úsečky sobě rovné bude kolmá na osu daného úhlu. **139.** Hledaný bod je průsečík dané přímky s osou souměrnosti úsečky $\overline{AB}$. **140.** Hledaný bod je průsečík dané přímky s osou souměrnosti daného úhlu.

141. Veďme vnitřkem úhlu rovnoběžku s jedním ramenem p ve vzdálenosti d a sestrojme její průsečík Q s druhým ramenem q. Kolmice spuštěná s Q na p je hledané umístění úsečky dané délky d. **142.** Kolem libovolného bodu S na rovnoběžce p opíšeme kružnici o poloměru 6 cm a sestrojíme její průsečíky M, N s rovnoběžkou q. Hledaná přímka půjde bodem A rovnoběžně s SM nebo SN. **143.** Ježto $\overline{BH} = \overline{HS}$, je $\sphericalangle HBS = \sphericalangle BSH$. Ježto $SH \parallel DA$ je $\sphericalangle BSH = \sphericalangle BDA$. Tedy $\sphericalangle ABD = \sphericalangle HBS = \sphericalangle BDA$, $\triangle ABD$ je rovnoramenný a $\overline{AB} = \overline{AD}$. Podobně $\overline{AC} = \overline{AE}$. Z toho vyplývá tato konstrukce: Bodem A

vedeme rovnoběžku s BC a naneseme na ni úsečky $\overline{AD} = \overline{AB}$, $\overline{AE} = \overline{AC}$, aby bod D byl v polorovině ABC a bod E v polorovině ACB. Sestrojíme přímky BD a CE a jejich průsečík S. Bodem S vedeme rovnoběžku s BC, jež vytne hledané body H, K. Poznámka: Bod S je také střed kružnice vepsané $\triangle ABC$. **144.** Je-li $\overline{KH}$ hledané řešení, doplňme lomenou čáru AKH na rovnoběžník $AKHD$ a pak stejně lomenou čáru DHB na rovnoběžník $DHBF$. Je $\overline{DH} = \overline{AK} = \overline{BH}$, tedy $DHBF$ je kosočtverec. Jest $\sphericalangle CAB = \sphericalangle HDF$ a DB je úhlopříčka kosočtverce $DHBF$ a tedy osa $\sphericalangle HDF$ (podle cvič. 48d). Osy $\sphericalangle HDF$ a $\sphericalangle CAB$ jsou rovnoběžné a je-li E průsečík osy $\sphericalangle CAB$ se stranou $\overline{BC}$, jsou také $ADBE$ a $HBEK$ rovnoběžníky. Z toho plyne tato konstrukce: Sestrojíme osu souměrnosti úhlu CAB a její průsečík E se stranou BC. Bodem E vedeme rovnoběžku s AB a najdeme její průsečík k se stranou AC. Bodem K půjde hledaná příčka $HK \parallel BC$. **145.** Je-li S střed dané kružnice, je společná tětiva obou kružnic průměr dané kružnice kolmý k AS. **146.** Je-li S střed dané kružnice, je hledaná tětiva kolmá na SA. **147.** Sestrojíme středem S kružnice k polopřímku ST svírající s AB úhel $R - \alpha$, T na AB. $CD \perp ST$ je hledaná tětiva. Podmínka: α menší než polovina dutého středového $\sphericalangle ASB$. **148.** Je-li $\overline{BC}$ hledaná tětiva a T její střed, je $\overline{AB} - \overline{AC} = d$, $\overline{CB} = \overline{AC} + \overline{AB} = (\overline{AB} - \overline{AC}) + 2 . \overline{AC} = d + + 2 . \overline{AC}$; $\overline{CT} = \frac{1}{2} . \overline{CB} = \frac{1}{2}d + \overline{AC}$, tedy $\overline{AT} = \frac{1}{2}d$. $\triangle ATS$ je pravoúhlý, tedy bod T je na kružnici nad průměrem $\overline{SA}$ a na kružnici o středu A a poloměru $\frac{1}{2}d$. Tyto kružnice se protnou nebo dotknou, když $0 < \frac{1}{2}d \leqq \overline{SA}$ (dotyk jen při rovnosti). Při nerovnosti dvě řešení souměrná vzhledem SA, při rovnosti jedno řešení, tětiva v přímce SA. **149.** Střed hledané kružnice je průsečík kružnic o poloměrech r a středech A, B. Podmínka $r \geqq \frac{1}{2}\overline{AB}$. **150.** Střed hledané kružnice je průsečík dvou geom. míst, a to: 1. geom. místa středů kružnic o poloměru r jdoucích bodem A, t. j. kružnice opsané kolem bodu A poloměrem r; 2. geom. místa středů kružnic o poloměru r dotýkajících se dané přímky, t. j. dvou rovnoběžek vedených k přímce p ve vzdálenosti r. Z obou rovnoběžek se uplatní jenom ta, jež leží v polorovině pA. Podmínka: $r \geqq \frac{1}{2}d$, kde d je vzdálenost bodu A od přímky p.

151. Střed hledané kružnice je průsečík dvou geom. míst: kružnice opsané kolem bodu A poloměrem r a kružnice opsané kolem bodu S poloměrem $\varrho + r$. Úloha je možná tehdy a jen tehdy, dotýkají-li se nebo protínají-li se obě tato geom. místa, t. j. když a jen když (učebnice str. 53) $(r + \varrho) - r \leqq \overline{SA} \leqq \leqq (r + \varrho) + r$. Protože bod A je vně dané kružnice k, je dokonce $\overline{SA} > \varrho$ a levá nerovnost je splněna pro každé r. Z pravé nerovnosti plyne $2r + \varrho \geqq \overline{SA}$, $2r \geqq \overline{SA} - \varrho$, $r \geqq \frac{1}{2} (\overline{SA} - \varrho)$. **152.** Střed hledané kružnice je průsečík dvou geom. míst: kružnice opsané kolem bodu A poloměrem r a kružnice opsané kolem bodu S poloměrem $r - \varrho$. Úloha je možná tehdy a jen tehdy, dotýkají-li se nebo protínají-li se obě tato geom. místa, t. j. když a jen když (učebnice str. 53) $r - (r - \varrho) \leqq \overline{SA} \leqq r + (r - \varrho)$. Protože bod A je vně dané kružnice k, je dokonce $\overline{SA} > \varrho$ a levá nerovnost je splněna pro každé r. Z pravé nerovnosti plyne $2r - \varrho \geqq \overline{SA}$, $2r \geqq \overline{SA} - \varrho$, $r \geqq \frac{1}{2} (\overline{SA} - \varrho)$. **153.** Střed hledané kružnice je průsečík dvou geometrických míst: kružnice opsané kolem bodu A poloměrem r a kružnice opsané kolem bodu S poloměrem $\varrho - r$. Úloha je možná tehdy a jen tehdy, dotýkají-li se nebo protínají-li se obě tato geom. místa, t. j. když a jen když (učebnice str. 53) $(\varrho - r) - r \leqq \overline{SA} \leqq (\varrho - r) + r$ pro $\varrho - - r \geqq r$ nebo $r - (\varrho - r) \leqq \overline{SA} \leqq r + (\varrho - r)$ pro $\varrho - r \leqq r$. Protože bod A je uvnitř dané kružnice k, je dokonce $\overline{SA} < \varrho$ a pravé nerovnosti jsou splněny pro každé r. Z první levé nerovnosti plyne: $\varrho - 2r \leqq \overline{SA}$, $2r \geqq \varrho - \overline{SA}$, $r \geqq \frac{1}{2}(\varrho - \overline{SA})$; z druhé levé nerovnosti plyne $2r - \varrho \leqq \overline{SA}$, $2r \leqq \varrho + \overline{SA}$, $r \leqq \frac{1}{2}(\varrho + \overline{SA})$, tedy celkem $\frac{1}{2}(\varrho - \overline{SA}) \leqq r \leqq \frac{1}{2}(\varrho + \overline{SA})$. **154.** K řešení úlohy užijeme buď geometrického místa z cvič. 127 anebo geom. míst z cvič. 127 a 135. Jsou čtyři řešení. **155.** K řešení úlohy užijeme geom. míst z cvič. 127 a 128. **156.** K řešení úlohy užijeme geom. míst ze cvič. 127 a 129. Úloha má řešení v polorovině pS tehdy a jen tehdy, když se geom. místa dotýkají nebo protínají, t. j. (cvičebnice str. 41 a 42) když a jen když $d - r \leqq \varrho - r$ pro $r \leqq d$, nebo $r - d \leqq \varrho - r$ pro $r \geqq d$. Z první nerovnosti plyne $\varrho \geqq d$, což platí vždy, neboť $\varrho > d$, ježto p je sečna. Z druhé nerovnosti plyne $2r \leqq \varrho + d$, $r \leqq \frac{1}{2}(\varrho + d)$. Úloha má řešení v polorovině opačné k polorovině pS tehdy a jen tehdy, když $d + r \leqq \varrho - r$, $2r \leqq \varrho - d$, $r \leqq \frac{1}{2}(\varrho - d)$. **157.** a) K řešení úlohy užijeme geom. míst ze cvič. 127 a 128. Úloha má řešení tehdy a jen tehdy, když se geom. místa dotýkají nebo protínají, t. j. když a jen když (učebnice str. 41 a 42) v polorovině pS $d - r \leqq \varrho + r$, nebo $r - d \leqq \varrho + r$. Z první nerovnosti plyne $2r \geqq d - \varrho$, $r \geqq \frac{1}{2}(d - \varrho)$. Z druhé nerovnosti plyne $\varrho \geqq - d$, což je splněno vždy. b) K řešení úlohy užijeme geom. míst z cvič. 127 a 129. Úloha má řešení tehdy a jen tehdy, když se geom. místa dotýkají nebo protínají, t. j. když a jen když (učebnice str. 41 a 42) v polorovině pS $r - d \leqq r - \varrho$, nebo $d - r \leqq \leqq r - \varrho$. Z první nerovnosti plyne $\varrho \geqq d$, což platí vždy, neboť $\varrho > d$. Z druhé nerovnosti plyne $2r \geqq d + \varrho$, $r \geqq \frac{1}{2}(d + \varrho)$. **158.** a) K řešení úlohy užijeme geom. míst z cvič. 128. α) Leží-li k_1 celá uvnitř k_2, úloha nemá smyslu. β) Má-li k_1 s k_2 vnitřní dotyk v bodě T, je řešením každá kružnice o středu S na polopřímce opačné k TS_1 a poloměru $r = \overline{TS}$. γ) Mají-li k_1 a k_2 vnější dotyk nebo se protínají, musí býti, aby se geom. místa dotýkala nebo protínala (1) $(\varrho_2 + r) - - (\varrho_1 + r) \leqq \overline{S_1S_2} \leqq (\varrho_2 + r) + (\varrho_1 + r)$, $\varrho_2 - \varrho_1 \leqq \overline{S_1S_2} \leqq \varrho_2 + \varrho_1 + 2r$. Avšak tato podmínka je už splněna z předpokladu, že k_1 a k_2 mají vnější dotyk nebo se protínají ($\varrho_2 - \varrho_1 < \overline{S_1S_2} \leqq \varrho_1 + \varrho_2$). Tedy úloha je splněna pro každé r. δ) Leží-li k_1 celá vně k_2, musí býti opět splněna nerovnost (1). Levá nerovnost nezávisí na r a pravá nerovnost dává $2r \geqq \overline{S_1S_2} - \varrho_1 - \varrho_2$, $r \geqq \frac{1}{2}(\overline{S_1S_2} - \varrho_1 - \varrho_2)$. b) K řešení úlohy užijeme geom. míst z cvič. 129. α) Jestliže k_1 leží celá uvnitř k_2, musí býti, aby se geom. místa dotýkala nebo protínala $(r - \varrho_1) - (\varrho_2 - r) \leqq \leqq \overline{S_1S_2} \leqq (r - \varrho_1) + (\varrho_2 - r) = \varrho_2 - \varrho_1$ nebo $(\varrho_2 - r) - (r - \varrho_1) \leqq \overline{S_1S_2} \leqq \leqq (\varrho_2 - r) + (r - \varrho_1) = \varrho_2 - \varrho_1$. Avšak pravé nerovnosti jsou splněny nezávisle na r a levé strany dávají: $2r - \varrho_1 - \varrho_2 \leqq \overline{S_1S_2}$, $2r \leqq \overline{S_1S_2} + \varrho_1 + \varrho_2$, $r \leqq \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \overline{S_1S_2})$ a $\varrho_2 - r - r + \varrho_1 \leqq \overline{S_1S_2}$, $2r \geqq \varrho_1 + \varrho_2 - \overline{S_1S_2}$, $r \geqq \geqq \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 - \overline{S_1S_2})$, to jest $\frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 - \overline{S_1S_2}) \leqq r \leqq \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \overline{S_1S_2})$.

β) Jestliže k_1 a k_2 se protínají, je kružnice geom. místa buďto uvnitř nebo vně obou daných kružnic k_1 a k_2 (až na body dotyku). V prvém případě je $r < \varrho_1 \leq \leq \varrho_2$, tedy $\varrho_2 - r \geq \varrho_1 - r$ a platí $(\varrho_2 - r) - (\varrho_1 - r) \leq \overline{S_1S_2} \leq (\varrho_2 - r) + (\varrho_1 - r)$. Levá nerovnost dává $\varrho_2 - \varrho_1 \leq \overline{S_1S_2}$ nezávisle na r a pravá nerovnost dává $\overline{S_1S_2} \leq \varrho_2 + \varrho_1 - 2r$, $r \leq \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 - \overline{S_1S_2})$. V druhém případě je $r > \varrho_2 \geq \varrho_1$, tedy $r - \varrho_1 \geq r - \varrho_2$ a platí $(r - \varrho_1) - (r - \varrho_2) \leq \overline{S_1S_2} \leq (r - \varrho_1) + (r - \varrho_2)$. Levá nerovnost je opět nezávislá na r a pravá nerovnost dává $\overline{S_1S_2} \leq 2r - \varrho_1 - \varrho_2$, $r \geq \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \overline{S_1S_2})$. Tato podmínka platí také pro případ, kdy k_1 a k_2 mají vnější dotyk nebo k_1 leží celá vně k_2. **159.** Jest $\varrho_1 + \varrho_2 \leq \overline{S_1S_2}$, $(r + \varrho_1) - (r - \varrho_2) \leq \overline{S_1S_2} \leq (r + \varrho_1) + (r - \varrho_2)$. Levá nerovnost je $\varrho_1 + \varrho_2 \leq \overline{S_1S_2}$, pravá nerovnost je $\overline{S_1S_2} \leq (r + \varrho_1) + (r - \varrho_2)$, $2r \geq \overline{S_1S_2} - \varrho_1 + \varrho_2$, $r \geq \frac{1}{2}(\overline{S_1S_2} - \varrho_1 + \varrho_2)$. **160.** K řešení užijeme geom. míst z cvičení 130 a 131.

161. K řešení užijeme geom. místa z cvič. 134; druhé geom. místo je kružnice opsaná kolem bodu A poloměrem rovným polovině vzdálenosti daných rovnoběžek. **162.** Je-li r poloměr tří daných kružnic, ϱ poloměr hledané kružnice k a S její střed, pak vzhledem k vnitřnímu dotyku je $\varrho = r + \overline{SA} = r + \overline{SB} = r + \overline{SC}$. Tedy S je střed kružnice opsané $\triangle ABC$. **163.** Tři spojnice středů tvoří rovnostranný trojúhelník o straně rovné 4 cm. **164.** Kružnice v rozích obdélníka mají poloměr 1,5 cm, prostřední kružnice o středu v průsečíku úhlopříček má poloměr $\frac{1}{2}(\sqrt{6^2 + 8^2} - 2\sqrt{2 \cdot 1{,}5^2} - 2 \cdot 1{,}5) = \frac{1}{2}(10 - 2\sqrt{4{,}5} - 3) = 7 - 6\sqrt{0{,}5} \doteq 1{,}38$. **165.** Sestrojíme nejprve kružnice o poloměru 7 cm a 35 mm s vnitřním dotykem. Pak třetí kružnici o poloměru 25 mm, jež má s první vnitřní a s druhou vnější dotyk (podle cvič. 159). **166.** Nejprve sestrojíme $\overline{AB} = 3$ cm a bodem A přímku $k \perp AB$. Pak kružnice o poloměru 4 cm jdoucí bodem B, dotýkající se přímky k (podle cvič. 150). Zbývá sestrojiti kružnici o poloměru 8 cm mající vnitřní dotyk s oběma kružnicemi sestrojenými. Geom. místo středů kružnic o poloměru 8 cm majících vnitřní dotyk s kružnicí o poloměru polovičním je tato menší kružnice. Je tedy střed třetí kružnice v průsečíku prvních dvou, tedy v bodě B. **167.** Sestrojíme nejprve úsečku $\overline{BD} = 7$ cm, pak půlkružnici ABC o středu U na $\overline{BD}$ a poloměru 2 cm a kružnici EDF o středu T na $\overline{BD}$ a poloměru 1 cm. Místo třetí kružnice sestrojme napřed pomocnou kružnici jdoucí bodem T a dotýkající se jiné pomocné kružnice o středu v U a poloměru o 1 cm menším než je kružnice ABU (podle cvič. 130 a 131b). Střed S je také středem hledané kružnice s poloměrem o 1 cm větším. **168.** Sestrojíme dvě kružnice o středech O o poloměru 6 cm s vnějším dotykem v bodě A. Na společné tečně v bodě A je $\overline{AD} = 6$ cm. Třetí kružnice má střed S na $\overline{AD}$, a vnější dotyk s prvními dvěma a prochází bodem D. Na prodloužení $\overline{AD}$ za D zvolme bod T, $\overline{DT} = 6$ cm. Je $\overline{TS} = \overline{OS}$, tedy S na ose souměrnosti úsečky $\overline{TO}$. **169.** Sestrojíme úsečku $\overline{AC} = 7$ cm a čtvrtkružnici AB o poloměru 25 mm a středu na $\overline{AC}$. Zbývá sestrojit kružnici procházející bodem C a dotýkající se čtvrtkružnice v bodě B (podle cvič. 160). **170.** Sestrojíme k_4, pak k_1 a zbytek podle cvič. 159.

171. Sestrojíme nejprve polokružnici k_1 o průměru $\overline{AB} = 6$ cm (v textu v učebnici chybně 3 cm) a kružnice k_2 a k_3 o poloměru 1 cm dotýkající se průměru AB v jeho středu D. Zbývá sestrojit kružnici k_4, jež se dotýká k_1 v bodě B a k_2 a kružnici k_5, jež se dotýká k_1 v bodě A a k_3. Řešení obdobné jako konec cvič. 168: sestrojíme pomocnou kružnici o poloměru 1 cm a středu T tak, aby se dotýkala polokružnice k_1 v bodě B. Je-li O střed k_2, S střed k_4, je $\overline{SC} = \overline{SB}$ a také $\overline{SO} = \overline{ST}$. Je tedy S na ose souměrnosti úsečky OT. Kružnice k_5 je souměrná vzhledem ke k_4 podle bodu D. **172.** Hledaným geom. místem je kružnice soustředná s danou o poloměru $r_1 = \sqrt{r^2 + d^2}$, kde r je poloměr dané kružnice a d je délka tečny. **173.** Sestrojíme dva poloměry svírající dutý úhel $2R - \alpha$, v koncových bodech poloměrů tečny, jež se protnou v bodě P. Je $\sphericalangle P = \alpha$ a geom. místo je kružnice soustředná s danou a jdoucí bodem P. **174.** V kružnici k o středu S a poloměru r sestrojme dvě stejně dlouhé tětivy $\overline{AB} = \overline{CD}$ a jejich středy P, Q. Jest $SP \perp AB$, $SQ \perp CD$, $\overline{SP} = \overline{SQ}$ (učebnice str. 43 a 44). Tedy stejně dlouhé tětivy jsou tečnami kružnice o poloměru $\overline{SP}$ soustředné s danou kružnicí k. Obráceně: Tětivy, jež jsou tečnami soustředné kružnice s kružnicí k o středu S (jsou stejně vzdáleny od středu S a proto) mají touž délku. **175.** Podle cvič. 174 sestrojíme soustřednou kružnici, jejíž tečny vytínají tětivy dané délky a k této kružnici vedeme tečny rovnoběžné s danou přímkou. **176.** Podle cvič. 174 sestrojíme soustřednou kružnici, jejíž tečny vytínají v dané kružnici tětivy dané délky. Bodem A sestrojíme tečny k soustředné kružnici. **177.** Sestrojíme geom. místa k'_1 a k'_2 ke kružnicím k_1 a k_2 a) podle cvič. 172; b) podle cvič. 173. Průsečíky k'_1 a k'_2 jsou hledané body. **178.** a) 2 vnější a 2 vnitřní tečny; b) 2 vnější tečny; c) 2 vnější a 2 vnitřní tečny; d) 2 vnější a 1 vnitřní tečna; konstrukce vizte v učebnici str. 61 a 62. **179.** Kolem bodu A opíšeme kružnici o poloměru $r_1 = 2$ cm a kolem bodu B kružnici o poloměru $r_2 = 1{,}5$. Hledané přímky jsou společné tečny obou kružnic. **180.** a) Podle cvič. 174 sestrojíme kružnici k'_2 soustřednou s k_2 a pak společné tečny kružnic k_1 a k'_2. b) Podle cvičení 174 sestrojíme soustředné kružnice k'_1 s k_1 a k'_2 s k_2 a pak společné tečny kružnic k'_1 a k'_2.

181. a) Jest $\overline{T_1B} = \overline{BA} = \overline{BT_2}$ — společné tečny z bodu B. b) T_1, A, T_2 leží podle a) na kružnici o středu B nad $\overline{T_1T_2}$, tedy $\sphericalangle T_1AT_2$ je obvodový nad průměrem a tedy pravý. **182.** Platí o střední příčce na př. $\overline{B_1A_1} = \frac{1}{2} . \overline{AB} = \overline{AC}$, $B_1A_1 \parallel AC$. Tedy $AB_1A_1C_1$ je rovnoběžník (učebnice str. 23). **183.** Veďme $A_1U \parallel BT$ (nikoliv jak v textu uvedeno $A_1U \parallel AB$). V $\triangle BTC$ je A_1U střední příčka rovnoběžná s BT a tedy $\overline{CU} = \overline{UT}$. Stejně v $\triangle AA_1U$ je TS střední příčka rovnoběžná s A_1U a tedy $\overline{UT} = \overline{TA}$. Tedy $\overline{CT} = \overline{CU} + \overline{UT} = \overline{UT} + \overline{TA} = \overline{TA} + \overline{TA} = 2 . \overline{TA}$. **184.** Je HE střední příčka v $\triangle ABD$ a tedy $HE \parallel BD$. Je FG střední příčka v $\triangle CDB$ a tedy $FG \parallel BD$. Proto $HE \parallel FG$ a podobně $EF \parallel GH$. Tedy $EFGH$ je rovnoběžník. **185.** Ježto $DF \parallel EB$, $\overline{DF} = \overline{EB}$ je $EBFD$ je rovnoběžník a $DE \parallel FB$. Označme K a L průsečíky AC s DE a FB. V $\triangle ALB$ je $EK \parallel BL$ střední příčka a tedy $\overline{AK} = \overline{KL}$. V $\triangle KCD$ je $FL \parallel DK$ střední příčka a tedy $\overline{KL} = \overline{LC}$. Proto je $\overline{AK} = \overline{KL} = \overline{LC}$. **186.** V $\triangle ACB$ je $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, v $\triangle FDE$ je $\overline{AG} = \frac{1}{2} . \overline{ED}$ a proto $\overline{AG} = \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{4}AC$. **187.**

Zvolme libovolný bod X_1 na přímce p, spojme s bodem A a rozpulme úsečku $\overline{AX_1}$ bodem Y_1. Rovnoběžka $q \parallel p$ jdoucí bodem Y_1 je hledané geom. místo. Neboť, zvolíme-li další bod X_2 na p, je v $\triangle AX_1X_2$ přímka q střední příčkou ($\overline{AY_1} = \overline{Y_1X_1}$, $q \parallel p$) a tedy půlí $\overline{AX_2}$. **188.** Sestrojme $\overline{AS}$, kde S je střed kružnice k, a označme S_1 střed úsečky $\overline{AS}$. Spojme libovolný bod X kružnice k s bodem A a veďme $S_1X_1 \parallel SX$, X_1 na AX. V $\triangle ASX$ je S_1X_1 střední příčka rovnoběžná se stranou SX a tedy $\overline{S_1X_1} = \frac{1}{2}\overline{SX} = \frac{1}{2}r$. Geom. místo je kružnice o středu S_1 a poloměru $\frac{1}{2}r$. **189.** a) $v_0 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, střední příčka lichoběžníka. b) Odděluje-li p na př. body A, S, veďme q bodem A, $q \parallel p$, bodem B pak $r \perp p$. Přímky AB, q, r určují trojúhelník o základně $\overline{AB}$, v němž střední příčka jdoucí bodem S je polovinou strany na r, tedy $v_0 + v_1 = \frac{1}{2}(v_2 + v_1)$ a $v_0 = \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$. Podobně odděluje li p body S, B je $v_0 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$. Jde-li p bodem S, je $v_0 = 0$, $v_1 = v_2$, tedy $v_0 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) = \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$. **190.** Je $BC \parallel AD$ a ježto $\overline{AB} = \overline{BE}$, je v $\triangle ADE$ spojnice BC střední příčkou rovnoběžnou ke straně AD. Tedy BC půlí stranu $\overline{DE}$.

191. Označme P průsečík těžnice AH se stranou $\overline{KL}$ $\triangle HKL$. Je v $\triangle AHC$: $\overline{KP} = \frac{1}{2}\overline{HC} = \frac{1}{4}\overline{BC}$. Je v $\triangle ABH$: $\overline{PL} = \frac{1}{2}\overline{BH} = \frac{1}{4}\overline{BC}$. Tedy $\overline{KP} = \overline{PL}$ a PH je těžnicí v $\triangle HKL$ a leží na těžnici $\triangle ABC$. Stejně o zbývajících dvou těžnicích. Tedy těžiště je společné. **192.** Protože $\overline{AT} = \overline{BC}$, je $\overline{HT} = \frac{1}{2}\overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{HC} = \overline{HB}$ a body T, C, B leží na kružnici o středu H a průměru $\overline{BC}$. Z věty Thaletovy plyne tvrzení. **193.** Průsečík HP a LK označme R. V $\triangle HKL$ je P těžiště, neboť P je průsečík těžnic LN a KS, kde S je střed rovnoběžníka. Proto HR je také těžnice a $\overline{LR} = \overline{RK}$. **194.** Spojme RT. Těžiště $\triangle RTV$ je U, neboť $\overline{RL} = \overline{LT}$ a $2 \cdot \overline{UL} = \overline{UV}$. Proto RQ a TP protínající se v U jsou těžnice a $\overline{TQ} = \overline{VQ}$, $\overline{RP} = \overline{VP}$. (Pomocí středních příček v $\triangle VST$ a $\triangle RSV$ plyne výsledek přímo.) **195.** V $\triangle CEB$ je bod A těžiště, neboť leží v třetině těžnice $\overline{ED}$ měřeno od strany $\overline{BC}$. Tedy též BA je těžnice a půlí stranu $\overline{CE}$. **196.** Je-li V průsečík výšek, je $BV \perp AC$, $CV \perp AB$ a proto A je průsečík výšek v $\triangle VBC$. Je-li $\triangle ABC$ ostroúhlý je $\triangle VBC$ tupoúhlý a naopak. **197.** Označme paty výšek z vrcholů A, B, C po řadě A_1, B_1, C_1. Ve čtyrúhelníku AB_1VC_1 jsou dva pravé úhly, proto druhé dva $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle C_1VB_1 = \sphericalangle BVC$ (vrcholové) jsou výplňkové. Stejně $\sphericalangle ABC + \sphericalangle AVC = 2R$, $\sphericalangle ACB + \sphericalangle AVB = 2R$. To platí v ostroúhlém $\triangle ABC$. V tupoúhlém $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAC$ tupý, je po stejné úvaze: $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BVC = 2R$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AVC$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AVB$. **198.** Označme Q patu výšky BV na straně AC. Je v pravoúhlém $\triangle ABQ$ také $\sphericalangle ABQ = 45^\circ = \sphericalangle PBV$. Tedy pravoúhlý $\triangle BPV$ je rovnoramenný, t. j. $\overline{PB} = \overline{PV}$. **199.** Je-li $\triangle ABC$ ostroúhlý, jsou podle cvič. 197 dvojice $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle BVA$, $\sphericalangle CAB$ a $\sphericalangle CVB$ výplňkové a leží v téže polorovině vyťaté stranou AC, BA, CB. Při souměrnosti vzhledem ke stranám $\triangle ABC$ přejdou druhé úhly ve dvojicích do opačných polorovin než jsou příslušné úhly $\triangle ABC$. Ježto prvé úhly jsou obvodové v opsané kružnici $\triangle ABC$, jsou též obrazy druhých úhlů ve dvojicích jako úhly výplňkové obvodové v téže kružnici, leží tedy obrazy bodu V na kružnici opsané. Je-li $\triangle ABC$ tupoúhlý, $\sphericalangle BAC$ tupý, je podle cvič. 197 $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BVC = 2R$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AVC$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AVB$ a první dvojice leží v téže polorovině vyťaté stranou BC, druhá a třetí dvojice v opačné polorovině vyťaté stranou AC a AB. Při souměrnosti vzhledem ke stranám $\triangle ABC$, přejde druhý úhel v první dvojici do opačné poloroviny, v druhé a třetí dvojici do téže poloroviny příslušného úhlu $\triangle ABC$. Zbytek důkazu jako v prvé části. Je-li $\triangle ABC$ pravoúhlý, $\sphericalangle BCA = R$, je průsečík výšek ve vrcholu C a v úvahu přichází jen souměrnost vzhledem ke straně AB. Pak C se zobrazí do C' a zřejmě C' je na opsané kružnici, ježto AB je průměr. **200.** V obr. 142 v učebnici jsou D a H, E a O středově souměrné vzhledem k těžišti T a proto $\overline{DE} = \overline{OH}$. V $\triangle TAV$ je DE střední příčka a proto $\overline{AV} = 2 . \overline{ED} = 2 . \overline{OH}$.

201. Pro $\triangle ABC$ ostroúhlý: $ABPQ$ leží na Thaletově kružnici nad průměrem $\overline{AB}$ a proto obv. úhly $\sphericalangle QPA = \sphericalangle QBA$ ($\equiv \sphericalangle VBR$). $RBPV$ leží na kružnici Thaletově nad průměrem BV a proto obv. úhly $\sphericalangle VBR = \sphericalangle VPR$. Tedy $\sphericalangle QPA = \sphericalangle VPR$ a PA je osa $\sphericalangle QPR$. Podobně RC je osa $\sphericalangle PRQ$ a QB je osa $\sphericalangle RQP$. Tedy V je střed kružnice vepsané $\triangle PQR$. Je-li $\triangle ABC$ tupoúhlý, $\sphericalangle BAC$ tupý, je důkaz podobný, avšak jenom PA je osou vnitřního $\sphericalangle QPR$ v $\triangle PQR$, kdežto QB a RC jsou osami vnějších úhlů při vrcholech Q a R v $\triangle PQR$. **202.** Označme obrazy průsečíku výšek V v souměrnostech vzhledem k BC, CA, AB (podle cvič. 199) po řadě V_1, V_2, V_3. Tyto obrazy leží na kružnici opsané $\triangle ABC$ o poloměru r a proto $\triangle BCV_1$, $\triangle CAV_2$, $\triangle ABV_3$ a s nimi v souměrnostech $\triangle BCV$, $\triangle CAV$, $\triangle ABV$ mají kružnici opsanou o témž poloměru r. **203.** Sestrojíme: 1. $\overline{BC} = a$; 2. rovnoběžku $q \parallel BC$ ve vzdálenosti v_a; 3. protneme q kružnicí o středu C a poloměru r. Podmínky: $b > v_a$, 2 řešení; $b = v_a$, 1 řešení, trojúhelník je pravoúhlý, $\sphericalangle ACB = R$; $b < v_a$, žádné řešení. **204.** Sestrojíme: 1. $\overline{BC} = a$; 2. rovnoběžku $q \parallel BC$ ve vzdálenosti v_a; 3. úhel β ve vrcholu B. Postup stejný pro $\beta \lesseqqgtr R$, jedno řešení. **205.** Sestrojíme: 1. $\overline{CC_1} = v_a$; 2. v C kolmici $q \perp CC_1$; 3. ve vrcholu C dva styčné úhly $R - \alpha$, $R - \beta$ o společném rameni v polopřímce CC_1, když $\alpha < R$, $\beta < R$; ve vrcholu C dva úhly $\alpha - R$, $R - \beta$ v téže polorovině ramene CC_1, když $\alpha > R$, $\beta < R$; když $\alpha = R$ nebo $\beta = R$ je $C_1 \equiv A$ nebo $C_1 \equiv B$. **206.** Sestrojíme: 1. $\overline{BC} = a$, A_1 střed $\overline{BC}$; 2. rovnoběžku $q \parallel BC$ ve vzdálenosti v_a; 3. protneme q kružnicí o středu A_1 a poloměru t_a. Podmínky: $t_a \geq v_a$. Pro $t_a > v_a$ zdánlivě dvě řešení. Avšak $\triangle BCA_1 \cong \triangle CBA_2$ (souměrnost vzhledem k ose strany BC); pro $t_a = v_a$ je $\triangle ABC$ rovnoramenný. **207.** Sestrojíme v kružnici o poloměru r dva středové styčné úhly 2α, 2β. Podmínky: $2\alpha + 2\beta < 4R$ čili $\alpha + \beta < 2R$. **208.** Sestrojíme v kružnici o poloměru ϱ dva středové styčné úhly $2R - \alpha$, $2R - \beta$. Tři body na kružnici vytnuté rameny jsou body dotyku stran. Sestrojíme v nich tečny. Podmínka $\alpha + \beta < 2R$. **209.** Sestrojíme: 1. $\overline{DA} = v_a$; 2. v bodě D kolmici $p \perp \overline{DA}$; 3. protneme p kružnicí o středu A a poloměru u_α v bodech E_1, E_2; 4. sestrojíme $\sphericalangle C_1AE_1 = \sphericalangle E_1AB_1 = \sphericalangle C_2AE_2 = \sphericalangle E_2AB_2 = \frac{1}{2}\alpha$, B_1, B_2, C_1, C_2 na p. Hledané trojúhelníky jsou $\triangle AB_1C_1$ a $\triangle AB_2C_2$; jsou souměrně sdružené podle DA. Podmínky: $\frac{1}{2}\alpha < R - \varphi$, kde v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsně v_a a přeponě u_a je φ úhel sevřený těmito stranami. **210.** α) Sestrojíme $\triangle BCS$, S je střed kružnice vepsané $\triangle ABC$. $\triangle BCS$ je určen stranou $\overline{BC}$, úhlem $\sphericalangle CBS = \frac{1}{2}\beta$, výškou k $\overline{BC}$ rovnou ϱ (podle cvič. 204). Pak tečny ke kružnici o středu S a poloměru ϱ z bodů B, C. Podmínka: ϱ menší než poloměr kružnice vepsané do kosočtverce o straně a a úhlu β. β) Sestrojíme: 1. kružnici o středu S a poloměru ϱ; 2. středový úhel $\sphericalangle DSE = 2R - \beta$; 3. tečny v bodech D, E jsou strany protínající se ve vrcholu B; 4. na jednu tečnu $\overline{BC} = a$; 5. tečnu z bodu C. Podmínka: a větší než strana kosočtverce o úhlu β opsaného kružnici o středu S a poloměru ϱ.

211. Sestrojíme $\triangle BCS$, dáno $\overline{BC} = a$, výška ϱ k BC a $\sphericalangle BSC = 2R - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 2R - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 2R - (R - \frac{1}{2}\alpha) = R + \frac{1}{2}\alpha$. 1. $\overline{BC} = a$; 2. rovnoběžku $p \parallel BC$ ve vzdálenosti ϱ; 3. kružnici jako geom. místo obvodových úhlů $R + \frac{1}{2}\alpha$ nad $\overline{BC}$, dostaneme S na p; 4. kružnici o středu S a poloměru ϱ; 5. tečny k této kružnici z bodů B a C. Ježto pomocná kružnice protíná p ve dvou bodech, dostaneme $\triangle A_1BC$ a $\triangle A_2BC$, jež jsou však souměrné podle osy úsečky $\overline{BC}$. Podmínka: ϱ je menší nebo rovno výšce kruhové úseče o středovém úhlu $4R - 2(R + \frac{1}{2}\alpha) = 2R - \alpha$ a tětivě délky a. **212.** Sestrojíme nad $a = \overline{BC}$ jako průměrem kružnici a protneme oblouky kružnic o středu B, poloměru v_b v bodě D a o středu C, poloměru v_c v bodě E tak, aby D a E byly v téže polorovině vyťaté přímkou BC. Po druhé tak, aby D a E byly v opačných polorovinách. Spojíme BE a CD. Jsou dvě řešení $\triangle A_1BC$ a $\triangle A_2BC$. **213.** Sestrojíme úsečku $\overline{BC} = a$ a opíšeme nad ní jako průměrem kružnici k o středu S. Na k vytneme bod D, $\overline{BD} = v_b$. Spojme CD. Nad tětivou $\overline{BC}$ opišme kružnice k_1 a k_2 o středech S_1 a S_2 a poloměru r, jež vytnou na CD vrcholy A_1, A_2 trojúhelníků A_1BC a A_2BC. Jen jedno řešení by vyšlo, kdyby CD byla tečnou ke k_2. (Pak budou pravoúhlé $\triangle BDC$ a $\triangle CSS_2$ podobné a tedy strany ležící proti rovným úhlům úměrné, $\overline{CS_2} : \overline{CS} = \overline{BC} : \overline{BD}$, $r : \frac{1}{2}a = a : v_b$, $r = \dfrac{a^2}{2v_b}$. Ježto $a > v_b$, je $\dfrac{a}{v_b} > 1$, a $r = \frac{1}{2}a \cdot \dfrac{a}{v_b} > \frac{1}{2}a$.) **214.** Sestrojíme: 1. úsečku $\overline{BC} = a$ a její střed A_1; 2. oblouk kružnice k jako geom. místo obvodových úhlů α nad $\overline{BC}$; 3. protneme k z A_1 oblouky kružnice k_1 o poloměru t_a v bodě A. Podmínky: úloha je neřešitelná, když k_1 neprotne k. α) $\alpha < R$, $\frac{1}{2}a < t_a \leq v$, kde v je výška v rovnoramenném trojúhelníku o základně a a protilehlém úhlu α; β) $\alpha = R$, $t_a = \frac{1}{2}a$, řešení je nekonečně mnoho; γ) $v \leq t_a < \frac{1}{2}a$, kde v je definováno jako v α). Rovnost v α) a γ) dává rovnoramenný $\triangle ABC$. **215.** Sestrojme: 1. úhel α o vrcholu A a jeho osu; 2. kružnici k o středu S na ose úhlu α a poloměru ϱ vepsanou úhlu α (podle cvič. 154); 3. $\overline{AD} = u_\alpha$, D na ose úhlu α; 4. tečny t_1, t_2 ke kružnici k z bodu D. Obě ramena úhlu α a tečny t_1 nebo t_2 tvoří hledaný trojúhelník. Aby t_1 nebo t_2 protťala obě ramena úhlu α, musí býti $\overline{AS} + \varrho \leq u_\alpha < 2 \cdot \overline{AS}$. **216.** Je-li A_1 střed strany $\overline{BC}$, P pata výšky v_a na BC, sestrojíme nejprve pravoúhlý $\triangle APA_1$ o přeponě

$\overline{AA_1} = t_a$ a odvěsně $\overline{AP} = v_a$. Pak na ose strany $\overline{BC}$ jdoucí jejím středem A_1 určíme střed S opsané kružnice, $\overline{SA} = r$. Protneme A_1P z S kružnicí o poloměru r ve vrcholech B a C. Podmínky při daném $v_a < t_a$: $v_a \geqq r \geqq \overline{A_1P} = \sqrt{t_a^2 - v_a^2}$, je nejvýš jedno řešení. $r < v_a$ mohou býti dvě řešení. **217.** Sestrojíme: 1. úsečku $\overline{BC} = a$ a její střed A_1; 2. nad průměrem $\overline{BC}$ kružnici k a na ní bod D, $\overline{BD} = v_b$; 3. spojnici CD; 4. A na CD, $\overline{AA_1} = t_a$. Podmínky: Sestrojme bodem A_1 rovnoběžku s BD a její průsečík E s CD. $\overline{SE}$ je střední příčka v $\triangle\ BDC$, $\overline{SE} = \frac{1}{2}\,.\,\overline{BD} = \frac{1}{2}v_b$. Pro $t_a = \frac{1}{2}v_b$ jedno řešení, pro $t_a > \frac{1}{2}v_b$ dvě řešení ($t_a = \frac{1}{2}a$ jen jedno řešení). **218.** Sestrojíme: 1. přímku p a na ní bod D; 2. $DB \perp p$, $\overline{DB} = v_b$; 3. C na p, $\overline{BC} = a$; 4. B_1 na p, $BB_1 = t_b$; 5. A na polopřímce CB_1, $\overline{AB_1} = \overline{B_1C}$. Podmínky: $t_b > v_b$ dvě řešení (pro $t_b = a$ jedno); $t = v_b$ jedno řešení ($\triangle\ ABC$ je rovnoramenný). **219.** Sestrojme: 1. úhel β o vrcholu B; 2. na jednom rameni bod A vzdálený o v_a od druhého ramene; 3. kružnici k o středu B a poloměru v_b; 4. tečny ke kružnici k z bodu A, jež vytnou na druhém rameni úhlu β vrchol C. Podmínky: $\beta < R$ $v_b = \overline{AB} = c$, 1 řešení (pravoúhlý trojúhelník, $\alpha = R$); $c > v_b > v_a$ dvě řešení; $v_b = v_a$ jedno řešení (rovnoramenný trojúhelník o vrcholu C); $v_b < v_a$ jedno řešení. $\beta > R$, $v_b < v_a$ jedno řešení. **220.** Je-li D takový bod na přímce BC, že $AD \parallel u_\gamma$, pak $\sphericalangle\ BDA = \sphericalangle\ BCE = \frac{1}{2}\gamma$ a ježto $\sphericalangle\ ACD = 2R - \gamma$, je i $\sphericalangle\ DAC = \frac{1}{2}\gamma$, $\triangle\ ACD$ je rovnoramenný, $\overline{CD} = b$, $\overline{BC} = a$. Z podobnosti $\triangle\ BCE \sim \triangle\ BDA$ plyne $\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{CE} : \overline{DA}$. Zvolme dvě polopřímky p, q o vrcholu B_1 a nanesme na p $\overline{B'C'} = \overline{BC} = a$, $\overline{C'D'} = b$, určeme na q bod E', $\overline{C'E'} = u_\gamma$ a A', $D'A' \parallel C'E'$. Je $\overline{D'A'}$ hledaná délka DA. Konstrukce $\triangle\ ABC$: Sestrojme rovnoramenný $\triangle\ ACD$ a na prodloužení CD za bod C najděme B, $\overline{BC} = a$. Podmínky: $\overline{DA} < \overline{AC} + \overline{CD} = 2b$; $\overline{DA} = \dfrac{\overline{BD}\,.\,\overline{CE}}{\overline{BC}} = \dfrac{(a+b)\,u_\gamma}{a} < 2b$, $u_\gamma < \dfrac{2ab}{a+b}$.

221. Sestrojme: 1. $\overline{CD} = a + b$; 2. přímku $p \parallel CD$ ve vzdálenosti v_b; 3. vrchol B na p, $\overline{BC} = a$; 4. osu souměrnosti úsečky $\overline{BD}$, vytínající na CD vrchol A. Dvě řešení (při sestrojení bodu B). **222.** Sestrojme: 1. $\overline{DB} = b + c$; 2. $\sphericalangle\ CDB = \frac{1}{2}\alpha$; 3. body C_1 a C_2 na DC, $\overline{BC_1} = \overline{BC_2} = a$; 4. osu souměrnosti úseček $\overline{DC_1}$ a $\overline{DC_2}$ a její průsečík A_1 a A_2 s DB (neboť $\triangle\ A_1DC_1$ a $\triangle\ A_2DC_2$ jsou rovnoramenné). Řešení je jen jedno v podstatě, neboť $\triangle\ A_1BC_1 \cong \triangle\ A_2C_2B$ (suu), je $\overline{BC_1} = \overline{BC_2} = a$, $\sphericalangle\ C_1A_1B = \sphericalangle\ BA_2C_2$, $\sphericalangle\ BC_1A_1 = 2R - \delta - \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle\ C_2BA_2 = 2R - \alpha - \sphericalangle\ BC_2A_2 = 2R - \alpha - (\delta - \frac{1}{2}\alpha) = 2R - \delta - \frac{1}{2}\alpha$. **223.** Sestrojíme: 1. $\overline{DA} = a - c$; 2. $\sphericalangle\ DAC = 2R - \alpha$, $\overline{AC} = b$. [Protože $(a - c) + c = a$, je vrchol B $\triangle\ ABC$ zároveň vrcholem rovnoramenného $\triangle\ CDB$ o základně $\overline{CD}$ a rameni a]. 3. osu souměrnosti úsečky $\overline{CD}$ a její průsečík B s DA. **224.** Sestrojíme: 1. $\overline{AD} = c - a$; 2. $\sphericalangle\ DAC = \alpha$, $\overline{AC} = b$. [Protože $(c - a) + a = c$, je vrchol B $\triangle\ ABC$ zároveň vrcholem rovnoramenného trojúhelníka DBC o základně $\overline{CD}$ a rameni a]. 3. osu souměrnosti úsečky $\overline{CD}$ a její průsečík B s AD. Úhel α musí býti ostrý, dokonce menší než ostrý úhel při odvěsně $(c - a)$ pravoúhlého trojúhelníka o přeponě b. Jinak by osa úsečky $\overline{CD}$ neprotnula prodloužení úsečky $\overline{AD}$ za bod D. Nebo: z daného $a < c$ plyne $\alpha < \gamma$, tedy α musí býti ostrý. **225.** Sestrojme pomocný $\triangle\ CDE$ (vizte obr. 164 v učebnici). Je $\overline{DE} = a + b + c$, $\sphericalangle\ CDE = \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle\ CED = \frac{1}{2}\beta$. Vrchol A je na ose úsečky $\overline{CD}$, vrchol B na ose úsečky $\overline{CE}$. **226.** Sestrojíme pomocný $\triangle\ CDE$. Je $\overline{DE} = a + b + c$, $\sphericalangle\ CDE = \frac{1}{2}\alpha$, výška na stranu DE je v_c. Zbytek jako ve cvič. 225. **227.** Sestrojme rovnoběžník $ACBD$ o stranách $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ a úhlopříčce $\overline{DC} = 2 \,.\, t_c$. Podmínka: $|a - b| < 2t_c < a + b$. možnost sestrojení $\triangle\ ACD$ ze stran, nebo ze tří délek a, b, $2t_c$ největší musí být menší než součet zbývajících dvou. **228.** Sestrojme rovnoběžník $ABCD$ o straně $\overline{BC} = a$, výšce v_a na straně BC a úhlopříčce $\overline{BD} = 2t_b$. Podmínka: $2 \,.\, t_b > v_a$ dvě řešení, $2t_b = v_a$ jedno řešení. **229.** Sestrojme $\triangle\ BCT$, kde T je těžiště $\triangle\ ABC$, $\overline{BC} = a$, $\overline{BT} = \frac{2}{3}t_b$, $\overline{CT} = \frac{2}{3}t_c$. Na prodloužení BT za T bod B_1, $\overline{BT} = 2 \,.\, \overline{TB_1}$, na prodloužení CT za T bod C_1, $\overline{CT} = 2 \,.\, \overline{TC_1}$, vrchol A v průsečíku CB_1 a BC_1. Podmínka: $\frac{2}{3}\,|t_b - t_c| < a < \frac{2}{3}\,(t_b + t_c)$, možnost sestrojení $\triangle\ BCT$ ze stran, nebo podobně jako na konci cvič. 227. **230.** Sestrojme $\triangle\ BTM$ (vizte učebnice obr. 138) ze stran $\overline{MT} = \overline{AT} = \frac{2}{3}t_a$, $\overline{BT} = \frac{2}{3}t_b$, $\overline{BM} = \overline{TC} = \frac{2}{3}t_c$. Vrchol C doplněním $\triangle\ BMT$ na rovnoběžník $BMCT$ a vrchol A na prodloužení MT za bod T, $\overline{MT} = \overline{TA}$. Podmínka: určení trojúhelníka z daných délek stran (délka největší těžnice musí býti menší než součet délek ostatních dvou).

231. Sestrojíme $\triangle\ ABC$ ze stran $\overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$, $\overline{AC}$ a doplníme na rovnoběžník $ABCD$. Podmínka: jako ve cvič. 230. **232.** Sestrojíme $\triangle\ ABS$, S je střed rovnoběžníka. Vrchol C na prodloužení AS za S, $\overline{CS} = \overline{SA}$, vrchol D na prodloužení BS za S, $\overline{BS} = \overline{SD}$. Podmínka: jako ve cvič. 230. **233.** Sestrojíme dvě různoběžky p, q svírající úhel ω o vrcholu S. Na p od S na obě strany $\overline{AS} = \overline{SC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, na q podobně $\overline{BS} = \overline{SD} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. **234.** Sestrojíme úsečku $\overline{AB}$, rovnoběžku $p \parallel AB$ ve vzdálenosti v a bod C na p ($\overline{AC}$ dáno). Podmínka: $\overline{AC} \geqq v$, 2 řešení (při rovnosti jedno). **235.** Jako ve cvič. 233; jen $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$. **236.** Sestrojíme rovnoramenný $\triangle\ ABC$, $\overline{AB}$ délka strany dané, $\overline{AC}$ úhlopříčka a doplníme na kosočtverec. Podmínka: $\overline{AC} < 2 \,.\, \overline{AB}$, $\overline{AB} > \frac{1}{2}\overline{AC}$. **237.** Sestrojíme dvě rovnoběžky vzdálené od sebe o danou délku a příčku o koncových bodech na rovnoběžkách o délce dané úhlopříčky. Zbývající dva vrcholy jsou průsečíky osy souměrnosti příčky s rovnoběžkami. Podmínka: délka úhlopříčky musí býti větší než vzdálenost rovnoběžek. **238.** Sestrojíme rovnoramenný $\triangle\ ABC$ a doplníme na kosočtverec. **239.** Sestrojme $\triangle\ ABM$, $\overline{AM} = \overline{AC} + \overline{BD}$, $\sphericalangle\ BAC$, $\sphericalangle\ AMB = 45°$. Vrchol D souměrný k C vzhledem AM a doplníme vrchol C. **240.** Sestrojíme jednu úhlopříčku a její osu souměrnosti. $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD}$.

241. Sestrojme pravoúhlý $\triangle\ ABM$, $\overline{AM} = a + u$, $\sphericalangle\ MA\dot{B} = R$, $\sphericalangle\ AMB = 22\frac{1}{2}°$ (v obr. $\triangle\ BMD$ je rovnoramenný, $\sphericalangle\ BDM = 135°$ a tedy

$\sphericalangle DMB = 22\frac{1}{2}° = \sphericalangle AMB$). Pak $\overline{AB}$ je strana čtverce. **242.** Sestrojme pravoúhlý $\triangle PAD$, $\overline{PA} = u - a$, $\sphericalangle PAD = R$, $\sphericalangle APD = 67\frac{1}{2}°$ (v obr. $\triangle PBD$ je rovnoramenný, $\sphericalangle PBD = 45°$ a tedy $\sphericalangle BPD = 67\frac{1}{2}° = \sphericalangle APD$). Pak odvěsna $\overline{DA}$ je strana čtverce. **243.** Sestrojme $\triangle MBC$, $\overline{MC} = \overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\sphericalangle BMC = \alpha$, dále vrchol A na prodloužení BM za M, $\overline{AB}$ dáno a doplňme $\triangle AMC$ na rovnoběžník $AMCD$. Podmínka: určení $\triangle MBC$ dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich. Proto dvě, jedno nebo žádné řešení. **244.** Sestrojíme $\triangle MBC$, $\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{MC} = \overline{AD}$. Pak na prodloužení MB za M vrchol A, je-li dáno $\overline{AC}$ a doplníme $\triangle AMC$ na rovnoběžník $AMCD$ nebo na přímku vedenou vrcholem C rovnoběžně s BM vrchol D, je-li dáno $\overline{BD}$ a opět doplníme $\triangle MCD$ na rovnoběžník $MCDA$. Podmínky: určení $\triangle MBC$ třemi stranami: $|b - d| < a - c < b + d$, dále $\overline{AC} > d$ nebo $\overline{BD} > b$. **245.** Sestrojíme $\triangle MBC$, $\overline{MB} = a - c$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CM} = d$. Pak na prodloužení BM za bod M bude vrchol A, $\overline{MA} = c$ nebo $\overline{BA} = a$ a doplníme $\triangle AMC$ na rovnoběžník $AMCD$. Podmínka: určení $\triangle MBC$ třemi stranami $|b - d| < a - c < b + d$. **246.** Sestrojíme $\triangle ANC$, $\overline{AC} = a + c$, $\overline{AC}$, $\overline{NC} = \overline{BD}$ a na přímce bodem C rovnoběžně s AN v polorovině opačné k polorovině ACN vrchol D. Doplníme vrchol B na $\overline{AN}$, $BD \parallel NC$. Podmínka: určení $\triangle ANC$ třemi stranami $|u_1 - u_2| < a + c < u_1 + u_2$. **247.** Sestrojíme dvě rovnoběžky p, q vzdálené od sebe o v a na p úsečku $\overline{AB}$. Vrcholy C, D na q, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ dáno. Podmínky: Po volbě $\overline{AB}$ a v musí $\overline{AC} \geqq v$. Po volbě $\overline{AB}$, v, $\overline{AC}$: α) $\overline{AC} = v$ musí $\overline{BD} > \overline{BC}$; β) $\overline{AC} > v$ dává dvě polohy vrcholu C_1, C_2, $\overline{BC_1} < \overline{BC_2}$, $\overline{BC_1} < \overline{BD} \leqq \overline{BC_2}$ jedno řešení, $\overline{BD} > \overline{BC_2}$ dvě řešení ABC_1D, ABC_2D. **248.** Sestrojíme $\triangle ACD$ ($\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\triangle CAD$) a $\triangle ABD$ nad $\overline{AD}$ ($\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD$, $\overline{DB}$). Ježto oba trojúhelníky jsou určeny dvěma stranami a úhlem ležícím proti jedné z nich, mohou býti 4, 3, 2, 1 nebo 0 řešení. **249.** Sestrojíme $\triangle ABD$ ($\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\sphericalangle DAB$) a vrchol B ($\overline{BC}$, $\sphericalangle ABC$). Ježto $\triangle ABD$ je určen dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich, mohou býti 2, 1 nebo 0 řešení. **250.** Sestrojme $\triangle ABC$ [$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\beta = 4R - (\alpha + \gamma + \delta)$] a pak polopřímky CD ($\sphericalangle DCB = \gamma$) a AD ($\sphericalangle DAC = \alpha$). Ježto $\triangle ABC$ je určen dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich, mohou býti 2, 1 nebo 0 řešení.

251. Sestrojme $\triangle ABC$ ($\overline{AB}$, $\overline{AC}$ $\sphericalangle BAC$), pak polopřímku BD ($\sphericalangle ABD$), na ní bod D ($\overline{DC}$). Ježto kružnice o středu C a poloměru $\overline{CD}$ může protnout polopřímku BD ve 2, 1 nebo 0 bodech, mohou býti 2, 1 nebo 0 řešení. **252.** Sestrojme $\triangle ABC$ ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$). Vrchol D probíhá dvě geom. místa: oblouky dvou kružnic k_1, k_2 nad tětivou $\overline{AC}$, v nichž je $\sphericalangle DAC$ obvodovým úhlem a kružnici k_3 o středu v B a poloměru BD. Ježto $\triangle ABC$ je určen svými stranami nejvýše jedním způsobem a oblouky kružnic k_1, k_2 mohou býti proťaty kružnicí k_3 nejvýše ve dvou bodech, mohou býti 2, 1 nebo 0 řešení. **253.** Sestrojme $\triangle ABD$ ($\overline{AB}$, $\overline{DB}$, $\sphericalangle BAD = \alpha$), kružnici k_1 jemu opsanou, a kružnici k_2 o středu A a poloměru $\overline{AC}$. Ježto $\triangle ABD$ je určen dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich a kružnice k_1, k_2 mohou mít dva body společné, jsou nejvýše čtyři řešení. **254.** Sestrojme $\triangle ABC$ a opišme mu kružnici k. Podmínkou je, aby délka největší z úseček $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ byla větší než součet délek ostatních dvou. Pak $\sphericalangle ACQ = \omega$, Q v polorovině ACB a vrcholem B přímku rovnoběžnou s CQ a její průsečík D s kružnicí k. Podmínka pro ω: $\sphericalangle ACB < \omega < 2R - \sphericalangle BAC$. **255.** Sestrojme $\triangle ABD$ ($\overline{BD}$, $\sphericalangle ABD$, $\sphericalangle BAD$), jenž je určen jednoznačně a opišme mu kružnici k. Průsečík (mohou býti dva, jeden nebo žádný) kružnice o středu A a poloměru $\overline{AC}$ s kružnicí k je vrchol C. **256.** Ježto vrcholy čtyřúhelníka $ABCD$ leží na kružnici, je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAC$. Sestrojme $\triangle BCD$ ($\overline{BD}$, $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle BDC$), jenž je určen jednoznačně a opišme mu kružnici k. Průsečík (mohou býti dva, jeden nebo žádný) kružnice o středu C a poloměru $\overline{CA}$ s kružnicí k je vrchol A. **257.** Sestrojíme úhlopříčku $\overline{BD}$ a nad ní oblouky kružnic k_A a k_C geom. místa vrcholů obvodových $\sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle BCD$. Pak libovolnou přímku p svírající s BD úhel ω a na ní úsečku délky $\overline{AC}$. Posuneme k_A o délku $\overline{AC}$ ve směru p do k'_A. Průsečíky k'_A a k_B jsou možné vrcholy C. Konečně vrcholem C úhlopříčku $\overline{CA} \parallel p$. **258.** Sestrojíme úsečku $\overline{AC}$ a ramena p, q úhlů ACB a CAD v opačných polorovinách vyťatých přímkou AC. Na rameni p zvolíme bod B_1 a vedeme jím polopřímku t směrem k AC svírající s AC $\sphericalangle\ \omega$ a sestrojíme bod D_1, $\overline{B_1D_1} = \overline{BD}$. Posuneme $\overline{B_1D_1}$ směrem p až D_1 padne na q do D. Bodem D jde druhá úhlopříčka $\overline{BD}$. **259.** Je $\sphericalangle ABD = 2R - \omega - \sphericalangle BAC$. Ježto $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = 2R - \omega - \sphericalangle BAC$. Ostatek úlohy jako v cvič. 258. **260.** 5,97.

261. a) 2,94 m; b) 2,40 m. **262.** $\overline{AF} = \overline{BE} = \overline{CE} = \overline{DE} = \dfrac{\overline{BC}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\overline{BD}}{\sqrt{2}}$, $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{CF}^2}$; $\overline{CF} = \overline{CE} + \overline{EF} = \dfrac{\overline{BC}}{\sqrt{2}} + \overline{AB}$, $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{DF}^2}$; $\overline{DF} = \overline{EF} - \overline{ED} = \overline{AB} - \dfrac{\overline{BC}}{\sqrt{2}}$. a) $\overline{AC} = 23{,}8$ km; b) $\overline{AD} = 16{,}8$ km. **263.** $\triangle ABD = \triangle ABC - \triangle ACD = \frac{1}{2} . \overline{BC} . \overline{AC} - \frac{1}{2} . \overline{CD} . \overline{AC} = \frac{1}{2} . \overline{AC} (\overline{BC} - \overline{CD})$, $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}$, $\triangle ABD = 40$ cm^2. **264.** a) $a^2 + b^2 < c^2$ tupoúhlý; b) $a^2 + b^2 > c^2$ ostroúhlý; c) $a^2 + b^2 = c^2$ pravoúhlý. **265.** a) $\triangle AEF = \square ABCD - \triangle ABF - \triangle CEF - \triangle ADE$. Odvěsny všech tří pravoúhlých trojúhelníků jsou známy. b) $\overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{AF}$ (střední příčka). $\overline{AF} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2}$, $X = \frac{1}{2}\overline{AF}$. Výsl.: a) 17,5 cm^2; b) 2,5 cm. **266.** a) $\triangle HKN = \square HKLM - \triangle KLN - \triangle HMN$. Odvěsny obou pravoúhlých trojúhelníků jsou známy. Výsl.: 39 cm^2; b) $\overline{HN} = \sqrt{\overline{HM}^2 + \overline{MN}^2}$. Výsl.: 7,5 cm. c) Počítá se jako výška v trojúhelníku HKN : $\overline{KP} = \dfrac{2 . \triangle HKN}{\overline{HN}}$ a užije se výsl. a), b). Výsl.: 10,4 cm. **267.** a) $\triangle ABC = \frac{1}{2}\overline{AB} . \overline{CD}$, $\overline{CD} = \overline{BD} = \dfrac{\overline{BC}}{\sqrt{2}}$. Výsl.: 10,6 cm^2. b) $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2}$; $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD}$. Výsl.: 4,31 cm. **268.** $\overline{AB} = 12$ cm,

$\overline{CD} = 6$ cm, $v = 4$ cm: veďte $CE \parallel DA$, E na $\overline{AB}$ a $CF \perp AB$, F na $\overline{AB}$. Je $\overline{BC} = \sqrt{\overline{CF}^2 + \overline{FB}^2} = 5$ cm. **269.** $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD}$, $\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2}$, $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2}$. Dokáže se, že platí: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. Výsl.: $\overline{BC} = 12{,}5$ cm. **270.** $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD = 60°$. $\triangle ACD$ je rovnostranný, $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\overline{BD} = 2\overline{DS} = 2 \,.\, \frac{1}{2}\overline{AD} \,.\, \sqrt{3}$. Výsl.: $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BD} = 17{,}3$ cm.

271. $\overline{ST}$ se vypočte jako přepona pravoúhlého $\triangle PST$. $\overline{ST} = \sqrt{\overline{PS}^2 + \overline{PT}^2}$, $\overline{PS} = \sqrt{\overline{AS}^2 - \overline{AP}^2}$; $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{PT} = \overline{QS} = \sqrt{\overline{DS}^2 - \overline{DQ}^2}$; $\overline{DQ} = \frac{1}{2}\overline{CD}$. Výsl.: $\overline{ST} = 8$ cm. **272.** $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$; $\overline{CQ} = \frac{1}{2}\overline{CD}$, t. j. $\overline{BP} = 2\overline{CQ}$, $\overline{BS}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{BP}^2$, $\overline{CS}^2 = \overline{QS}^2 + \overline{CQ}^2$, $\overline{BS} = \overline{CS}$, $\overline{PS}^2 + 4\overline{CQ}^2 = \overline{QS}^2 + \overline{CQ}^2$. Odtud $\overline{AB} = 2\overline{BP}$, $\overline{CD} = 2\overline{CQ}$. Výsl.: $\overline{AB} = 16$ cm, $\overline{CD} = 8$ cm, poloměr je 8,06 cm. **273.** $\overline{CD} = 2\overline{CQ}$, $\overline{CQ} = \sqrt{\overline{CS}^2 - \overline{QS}^2}$, $\overline{CS}^2 = \overline{AS}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PS}^2$, $\overline{CQ} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PS}^2 - \overline{QS}^2}$. Výsl.: $\overline{CD} = 14$ cm. **274.** Řeší se pravoúhlý $\triangle S_1S_2U$, je dáno $\overline{S_1S_2}$; $\overline{S_2U} = \overline{S_2T_2} - \overline{T_2U} = \overline{S_2T_2} - \overline{S_1T_1}$, neboť $T_1T_2US_1$ je obdélník. Výsl.: $\overline{T_1T_2} = 12$ cm. **275.** Řeší se pravoúhlý $\triangle S_1S_2U$, je dáno $\overline{S_1S_2}$; $\overline{S_2U} = \overline{S_2T_2} + \overline{T_2U} = \overline{S_2T_2} + \overline{T_1S_1}$, neboť $T_1T_2US_1$ je obdélník. Výsl.: $\overline{T_1T_2} = 12$ cm. **276.** Vyjádří se $\overline{SZ} = \sqrt{\overline{SX}^2 - \overline{XZ}^2}$, kde Z je střed proměnné tětivy. $\overline{XZ} = \frac{1}{2}\overline{XY}$, $\overline{SZ}$ je konstantní, t. j. geometrické místo je kružnice se středem S a poloměrem 6 cm. **277.** $\triangle BCS$ je rovnoramenný, $\overline{QS}$ je jeho výška; $\overline{BQ} = \overline{CQ}$, $\triangle BCS = \frac{1}{2}\overline{BC} \,.\, \overline{QS}$, $\overline{QS} = \sqrt{\overline{PS}^2 + \overline{PQ}^2}$, $\overline{PS}$ je výška kvádru, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Výsl.: 156 cm². **278.** Vejde, neboť $72^2 + 60^2 + 48^2 > 100^2$. **279.** $u_t = \sqrt{u_s - (\frac{1}{2}a)^2} = 8$ cm, $h = \sqrt{v_s + (\frac{1}{2}a)^2} = 11{,}7$ cm. **280.** $V = \frac{1}{3} \,.\, v \,.\, \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, $v = \sqrt{b^2 - \overline{AB}^2}$, $\overline{AC}$ je zároveň výškou i těžnicí podstavy. Proto $\overline{AC} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{AC}$. Výsl. 35,1 cm.³

281. Řez rovinou jdoucí středem koule, kolmou k rovině kružnice; C je střed kružnice, $\overline{CM}$ její poloměr; S střed koule, $\overline{SM}$ její poloměr, $\overline{CS}$ hledaná vzdálenost. $\overline{CS} = \sqrt{\overline{SM}^2 - \overline{CM}^2}$. Výsl.: 2,24 cm. **282.** Poloměr koule je polovina tělesné úhlopříčky. Výsl.: 35 cm. **283.** a) Řez rovinou, proloženou středy spodních koulí A, B, C, D. b) Řez rovinou, kolmou k předešlé a obsahující $\overline{AC}$. Hledaná výška je $\overline{AT} + \overline{EE_1}$; $\overline{AT} = 10$ cm, $\triangle ACE$ je pravoúhlý rovnoramenný, neboť $\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$ (viz a)), $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2$ (viz b)). $\overline{EE_1} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Výsl.: 2,41 dm. **284.** Spojme dva protější vrcholy dolní a horní stěny bedny. Je-li r poloměr dané koule a x poloměr hledané koule, platí pro tělesnou úhlopříčku:

$$4\sqrt{3} = r\sqrt{3} + r + x + x\sqrt{3},\ r = 1,\ 4\sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 + x + x\sqrt{3},\ x = \frac{3\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} - 1)(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3} - 10}{-2} = 5 - 2\sqrt{3},\ x = 1{,}54 \text{ dm.}$$

285. a) V $\triangle ABC$ dána výška a jeden úsek přepony. $r = \frac{1}{2}\overline{AB}$; $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE}$; $\overline{BE} = \dfrac{\overline{CE}^2}{\overline{AE}}$. Výsl.: $r = 5$ cm. b) V $\triangle ABC$ dány oba úseky přepony. $\overline{CD} = 2\overline{CE}$, $\overline{CE} = \sqrt{\overline{AE} \,.\, \overline{BE}}$. Výsl.: $\overline{CD} = 8$ cm. **286.** a) $r = \overline{AS} = \frac{1}{2}\overline{AD}$, $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{DE}$,

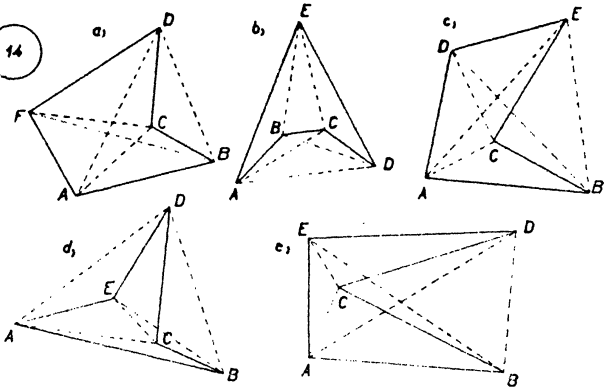
$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2}$, $\overline{DE} = \dfrac{\overline{BE}^2}{\overline{AE}}$. Jinak: $\overline{AD} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AE}}$, $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2}$. Výsl.: 7,04 cm. b) $\overline{BC} = 2\overline{BE} = 2\sqrt{\overline{AE}\,.\,\overline{DE}}$, $\overline{AE} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}}$, $\overline{DE} = \overline{AD} - \overline{AE}$, $\triangle ABC = \frac{1}{2}\overline{BC}\,.\,\overline{AE}$. Výsl.: $\overline{BC} = 11{,}1$ cm, $\triangle ABC = 46{,}1\ \text{cm}^2$. **287.** Eukleidova věta: $\overline{EF} = \dfrac{\overline{EB}^2}{\overline{EA}} = 8$ cm, $2r = \overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = 26$ cm, $r = 13$ cm.

288. a) $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD} = 2\,.\,\overline{BC} - \overline{BD}$, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}\,.\,\overline{BD} = 2\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{BD}$, $\overline{BC} = 2\,.\,\overline{BD}$, $2\,.\,\overline{BC} = 4\,.\,\overline{BD}$, a po dosazení do prvního vztahu $\overline{AD} = 4\,.\,\overline{BD} - \overline{BD} = 3\,.\,\overline{BD}$. b) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}\,.\,\overline{AD}$, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}\,.\,\overline{BD}$; $(2\,.\,\overline{BC})^2 = \overline{AB}\,.\,\overline{AD}$, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}\,.\,\overline{BD}$; dělením $4 = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$, $\overline{AD} = 4\,.\,\overline{BD}$. **289.** Je $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AD}^2 = 2\,.\,\overline{AD}^2$. V pravoúhlém $\triangle DAE$ je $\overline{EP}\,.\,\overline{ED} = \overline{AE}^2 = 2\,.\,\overline{AD}^2$, $\overline{DP}\,.\,\overline{ED} = \overline{AD}^2$; dělením $\dfrac{\overline{EP}}{\overline{DP}} = 2$, $\overline{EP} = 2\,.\,\overline{DP}$.

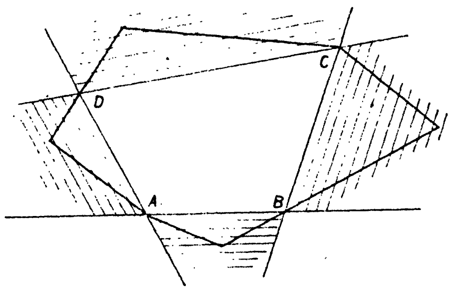
290. $\triangle AS_1S_2$ je pravoúhlý, neboť platí $\overline{S_1S_2}^2 = \overline{AS_1}^2 + \overline{AS_2}^2$, $(10^2 = 6^2 + 8^2)$, $\overline{S_1P} = \dfrac{\overline{AS_1}^2}{\overline{S_1S_2}}$; $\overline{S_2P} = \dfrac{\overline{AS_2}^2}{\overline{S_1S_2}}$, $\overline{AB} = 2\overline{AP} = 2\sqrt{\overline{S_1P}\,.\,\overline{S_2P}}$. Výsl.: $\overline{S_1P} = 3{,}6$ cm; $\overline{S_2P} = 6{,}4$ cm; $\overline{AB} = 9{,}6$ cm.

291. $\frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AS}$; $\frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{BS}$; $\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 = \overline{AB}^2$; $\frac{1}{4}\overline{AC}^2 + \frac{1}{4}\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4\,.\,\overline{AB}^2$. **292.** $\overline{HM}^2 + \overline{LM}^2 = \overline{HL}^2$, $\overline{HK}^2 + \overline{KL}^2 = \overline{HL}^2$, $\overline{HM}^2 + \overline{LM}^2 = \overline{HK}^2 + \overline{KL}^2$, $\overline{HK}^2 - \overline{HM}^2 = \overline{LM}^2 - \overline{LK}^2$. **293.** V pravoúhlém $\triangle PQS$ a $\triangle QRS$ je $\overline{PS}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{SQ}^2$, $\overline{SQ}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{QR}^2$, tedy $\overline{PS}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{QR}^2$. Z předpokladu $\overline{PQ} = \overline{QR} = 2\,.\,\overline{RS}$ plyne $\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 = 4\,.\,\overline{RS}^2$, a tedy $\overline{PS}^2 = 4\,.\,\overline{RS}^2 + \overline{RS}^2 + 4\,.\,\overline{RS}^2$, $\overline{PS}^2 = 9\,.\,\overline{RS}^2$, $\overline{PS} = 3\,.\,\overline{RS}$. **294.** $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$, $\overline{AD} = \overline{CD}$. **295.** $\overline{EV}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{PV}^2$, $\overline{GV}^2 = \overline{GQ}^2 + \overline{QV}^2$, $\overline{FV}^2 = \overline{FQ}^2 + \overline{QV}^2$, $\overline{HV}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PV}^2$. Tyto vztahy platí i tehdy, leží-li bod V vně obdélníku i mimo rovinu obdélníka.

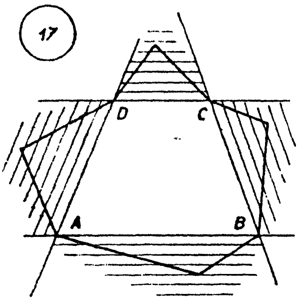
14



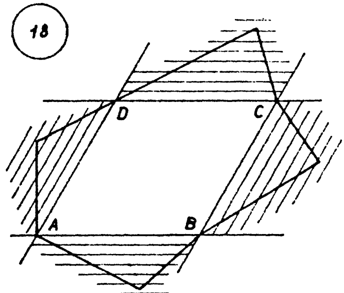
16



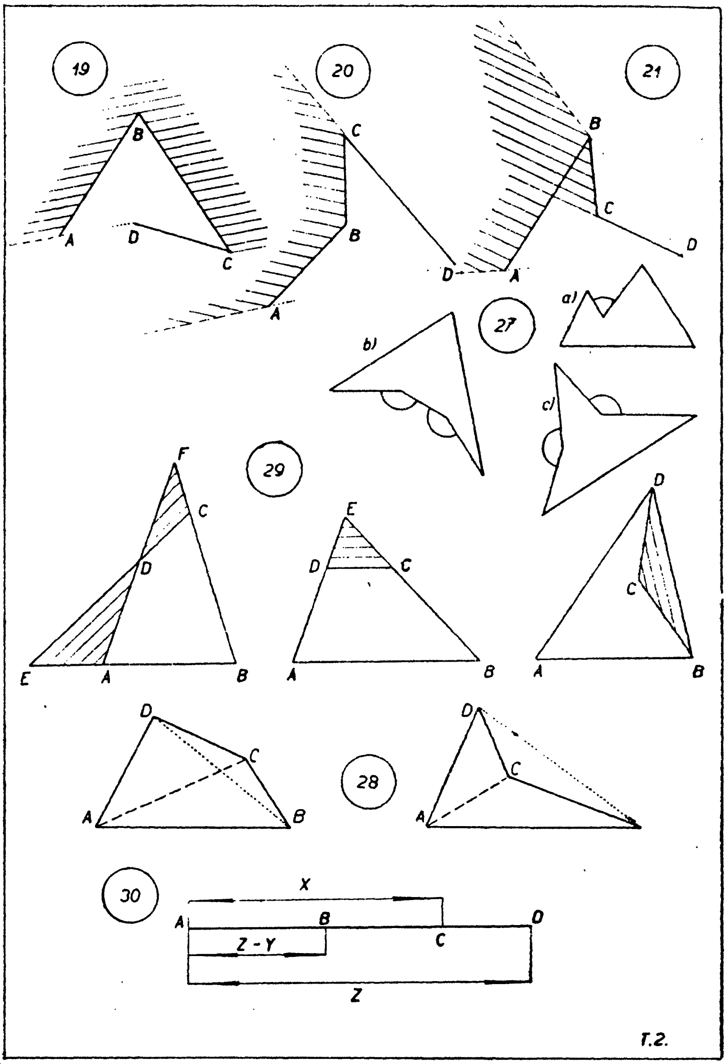
17



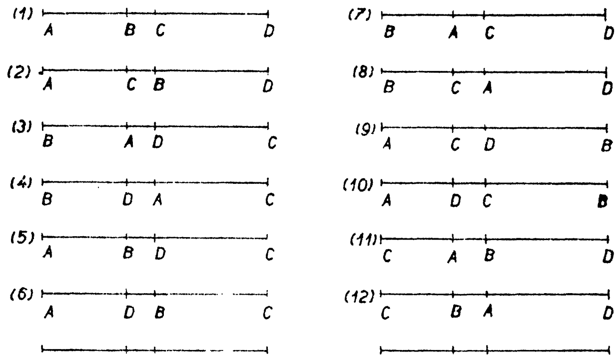
18



T.1.

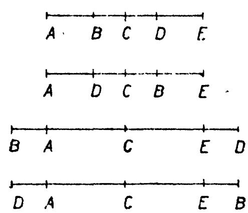

19
A
B
C
D
20
A
B
C
D
21
A
B
C
D
27
a)
b)
c)
29
F
C
D
E
A
B
E
D
C
A
B
D
C
A
B
28
D
C
A
B
D
C
A
30
X
A
B
C
D
Z - Y
Z
T.2.

31



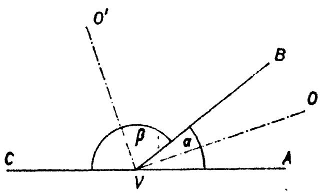
(1) A B C D
(2) A C B D
(3) B A D C
(4) B D A C
(5) A B D C
(6) A D B C
(7) B A C D
(8) B C A D
(9) A C D B
(10) A D C B
(11) C A B D
(12) C B A D

35



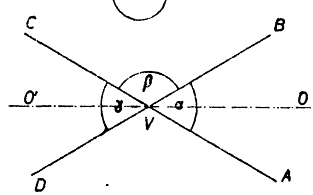
A B C D E
A D C B E
B A C E D
D A C E B

37



O'
B
O
β
α
C
A
V

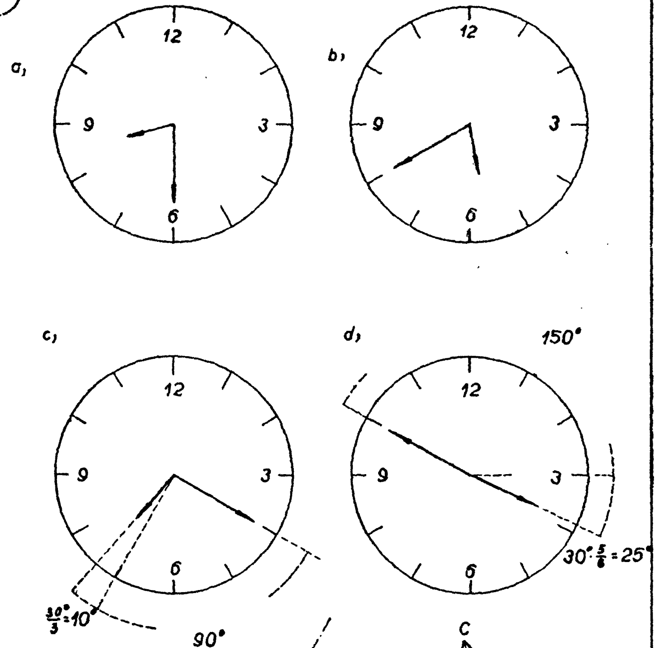
37



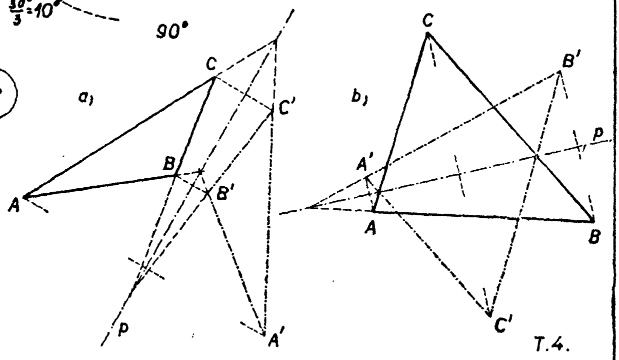
C
B
O'
β
O
γ
α
V
D
A

T.3.

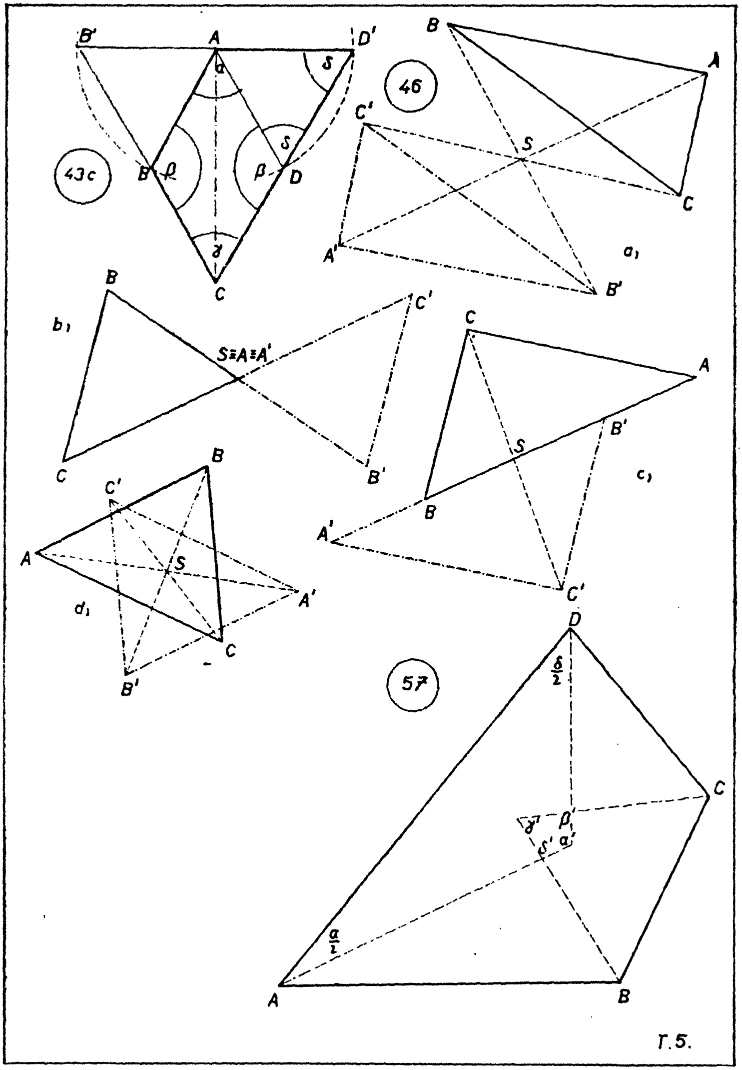
40


a)
12
9
3
6
b)
12
9
3
6
c)
12
9
3
6
$\frac{30°}{3}=10°$
90°
d)
150°
12
9
3
6
$30°\cdot\frac{5}{6}=25°$

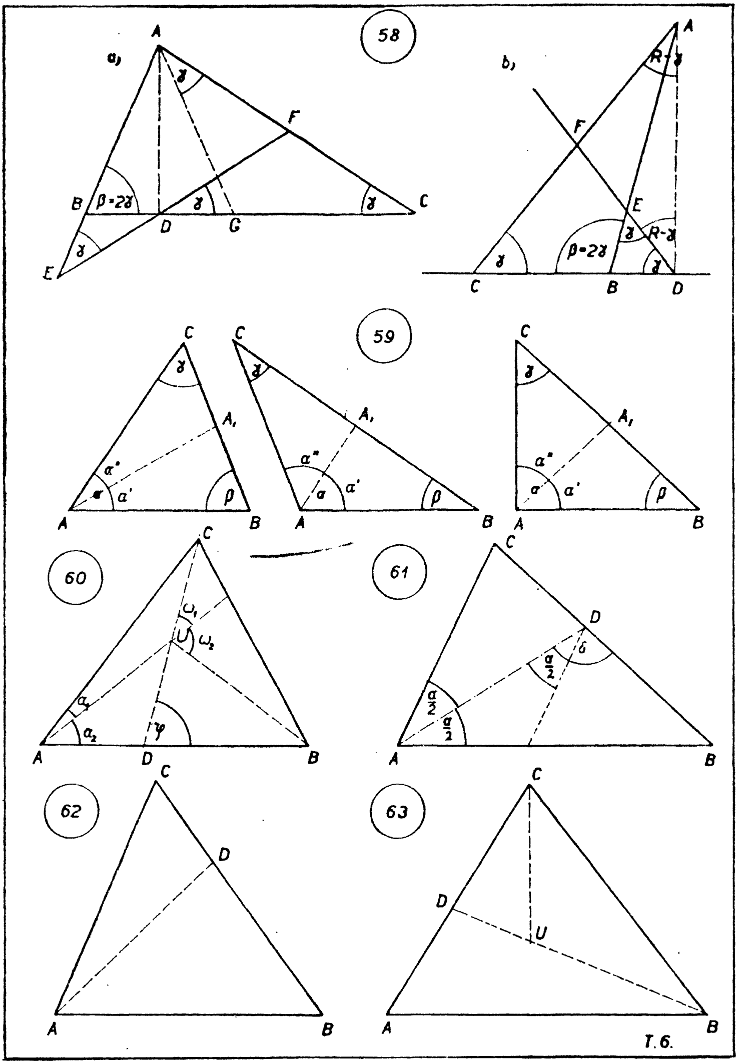
42

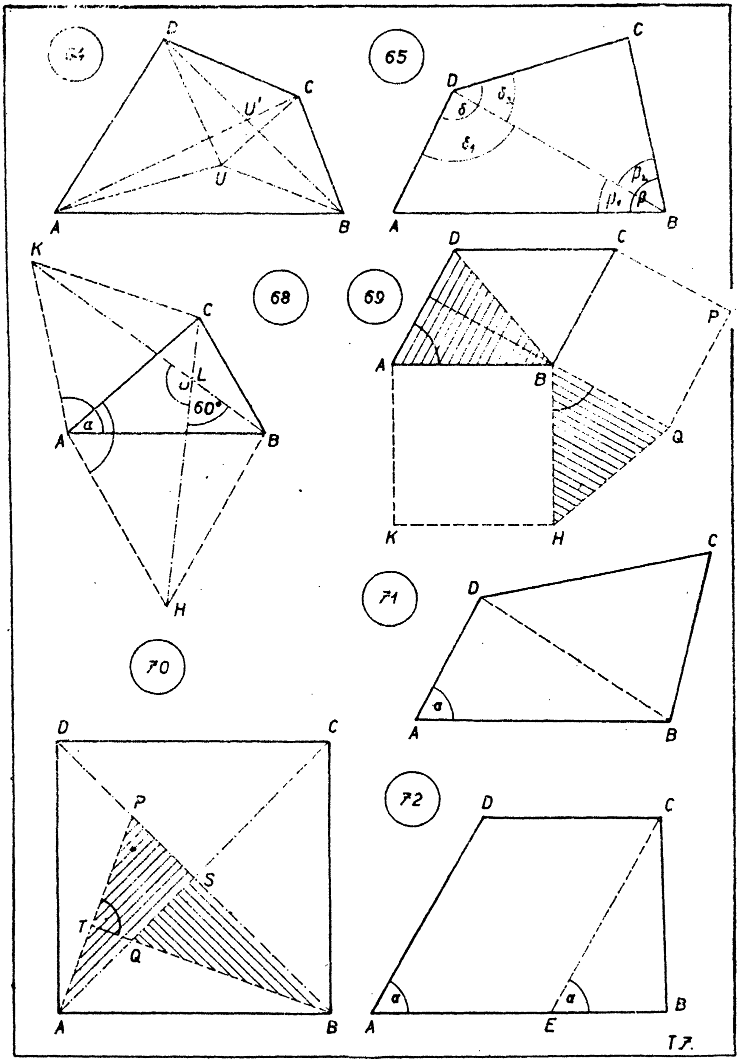

a)
C
C'
B
B'
A
p
A'
b)
C
B'
p
A'
A
B
C'

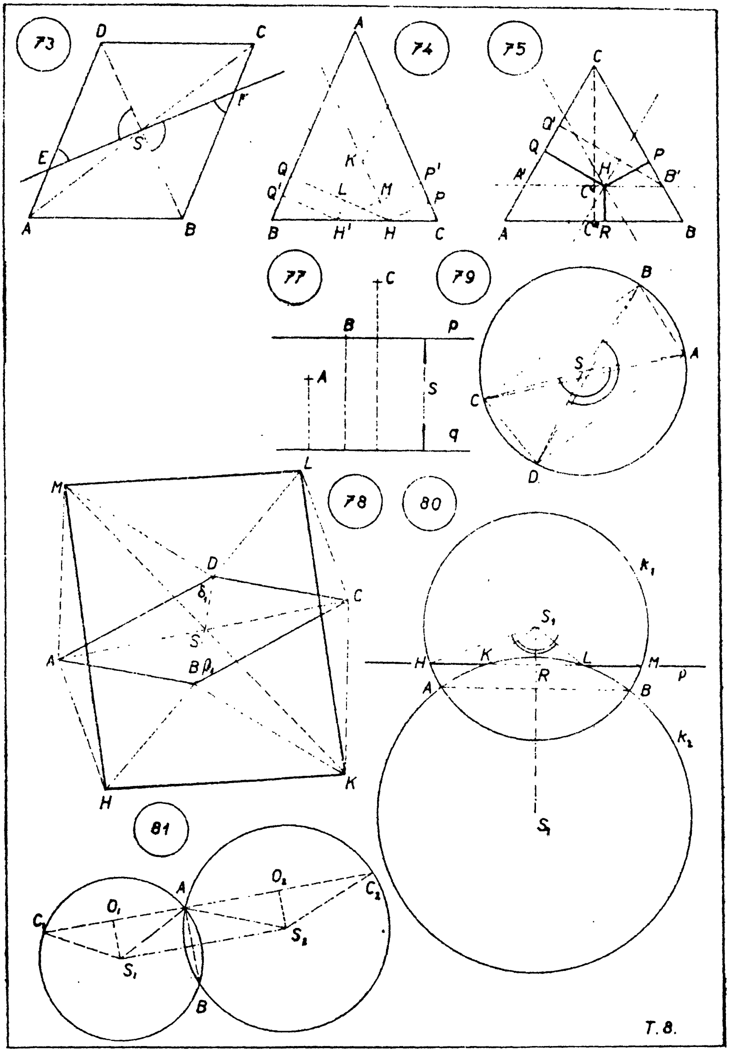
T.4.



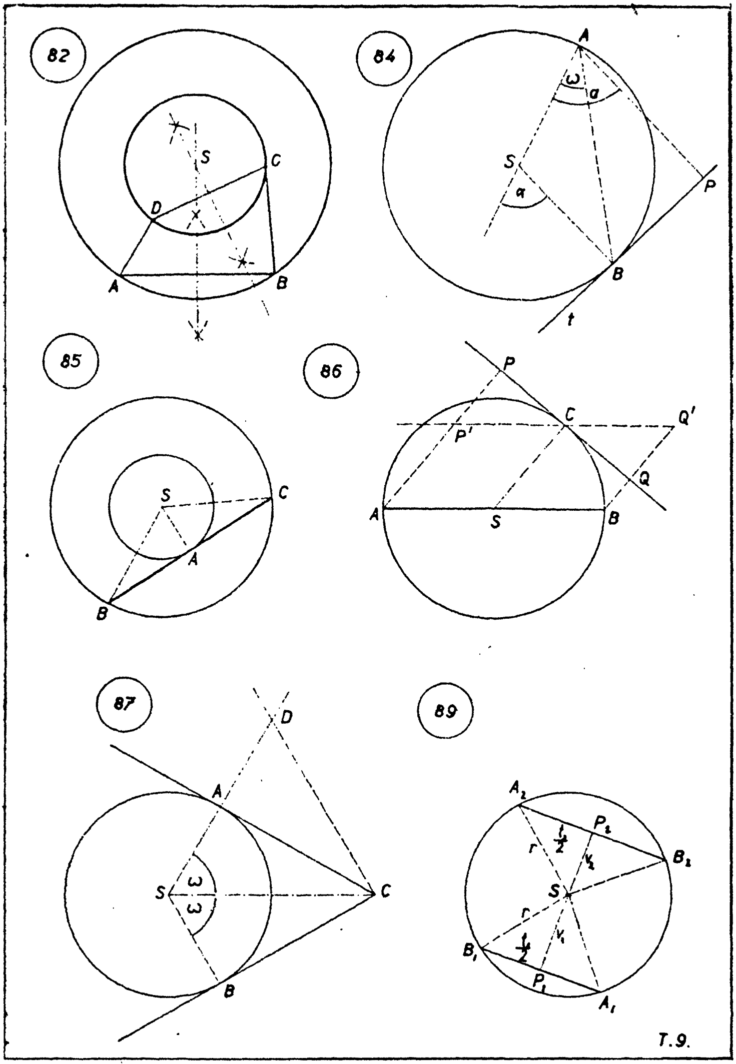
43c
46
a₁
b₁
c₁
d₁
57
T.5.


58
a)
b)
59
60
61
62
63
T.6.

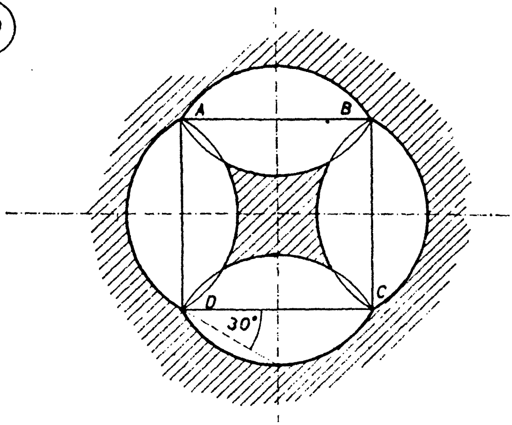

64
D
C
U'
U
A
B
65
D
C
δ
δ₂
ε₁
β₂
β₁
β
A
B
K
C
68
L
60°
α
A
B
H
69
D
C
P
A
B
Q
K
H
70
D
C
P
S
T
Q
A
B
71
D
C
α
A
B
72
D
C
α
α
A
E
B
T 7.



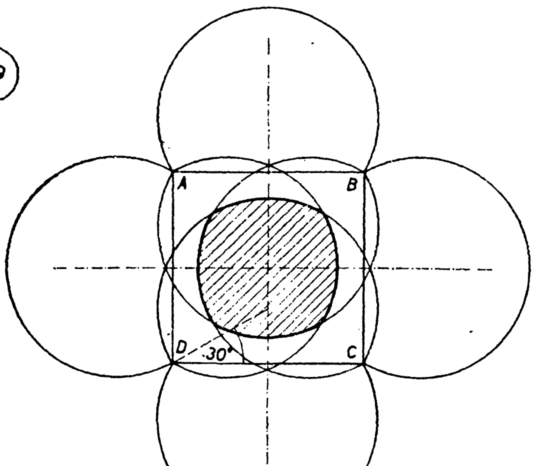
T. 8.


82
A B C D S
84
A S P B t ω α
85
S C A B
86
P C Q' P' Q A S B
87
D A S C B ω
89
A₂ P₂ B₂ S B₁ A₁ P₁ r t/2
T.9.

109

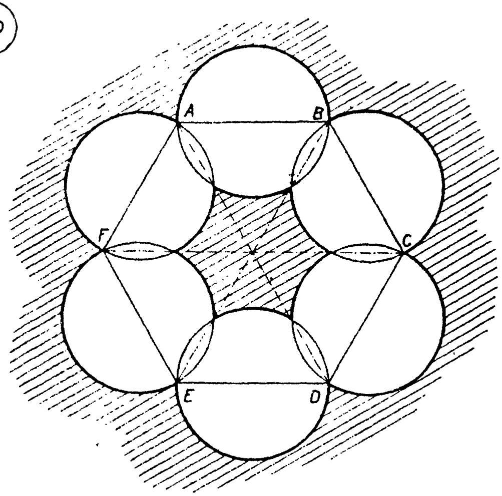


109

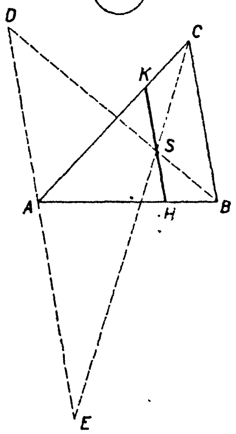


T.10.

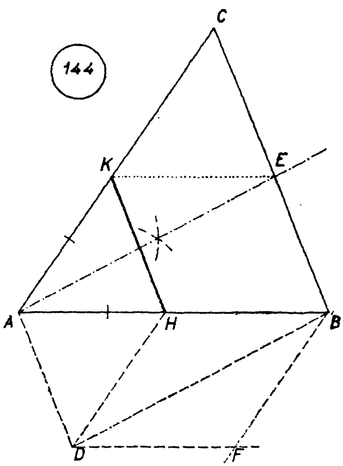
110



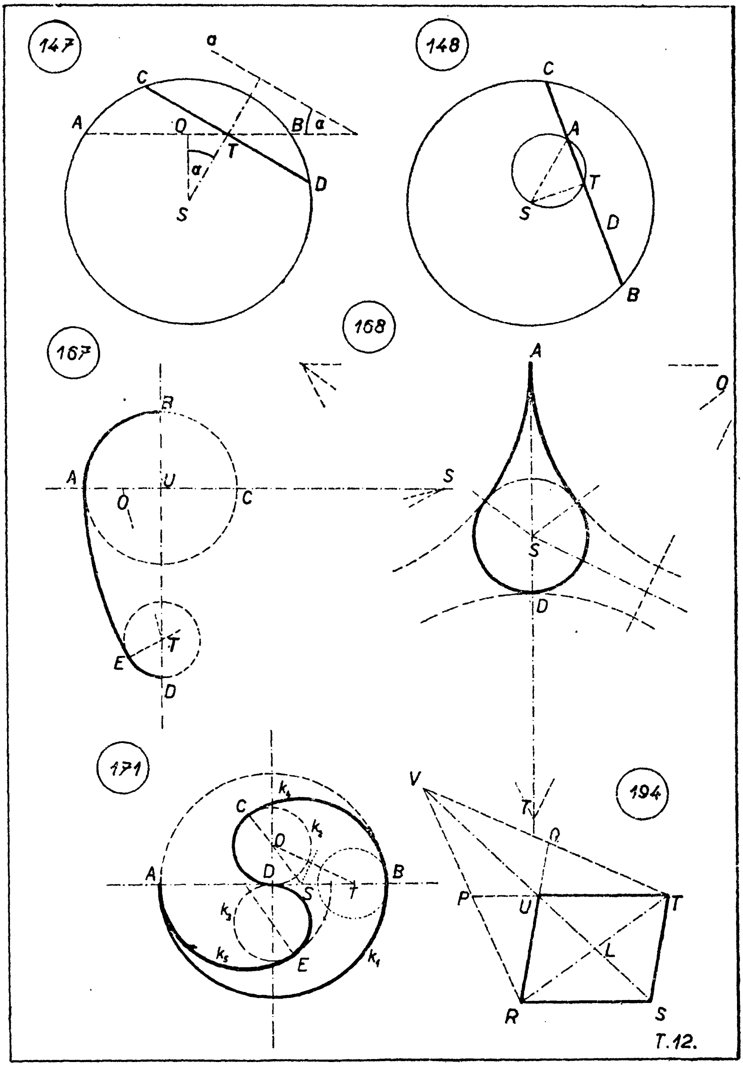
143

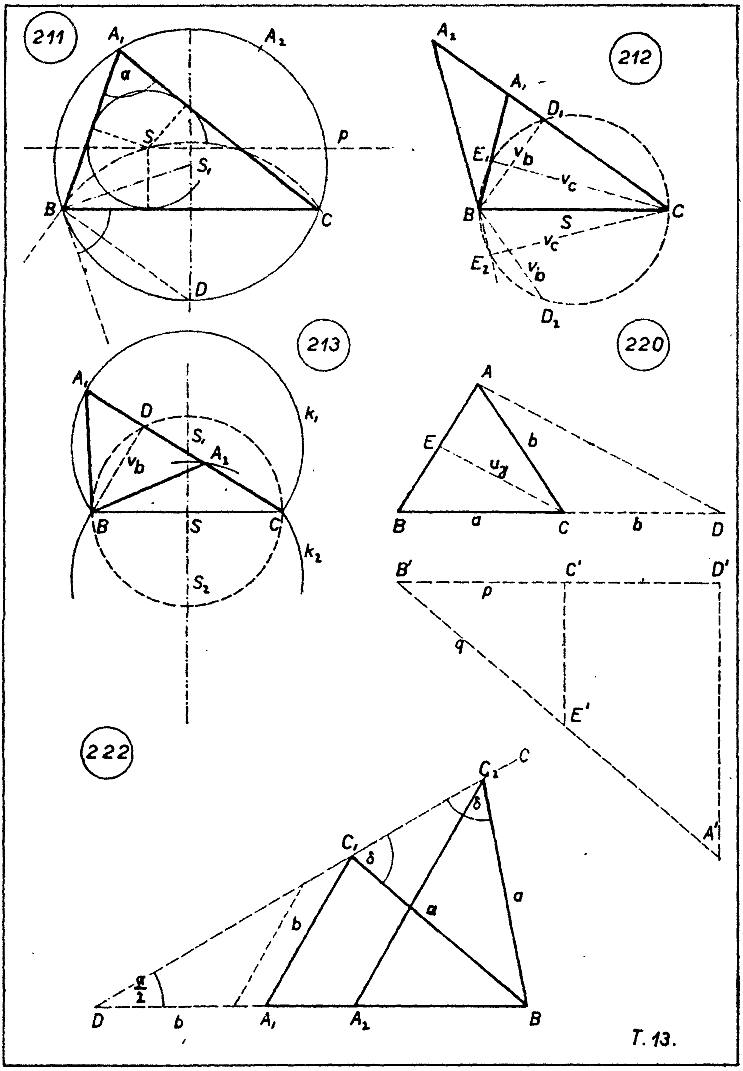


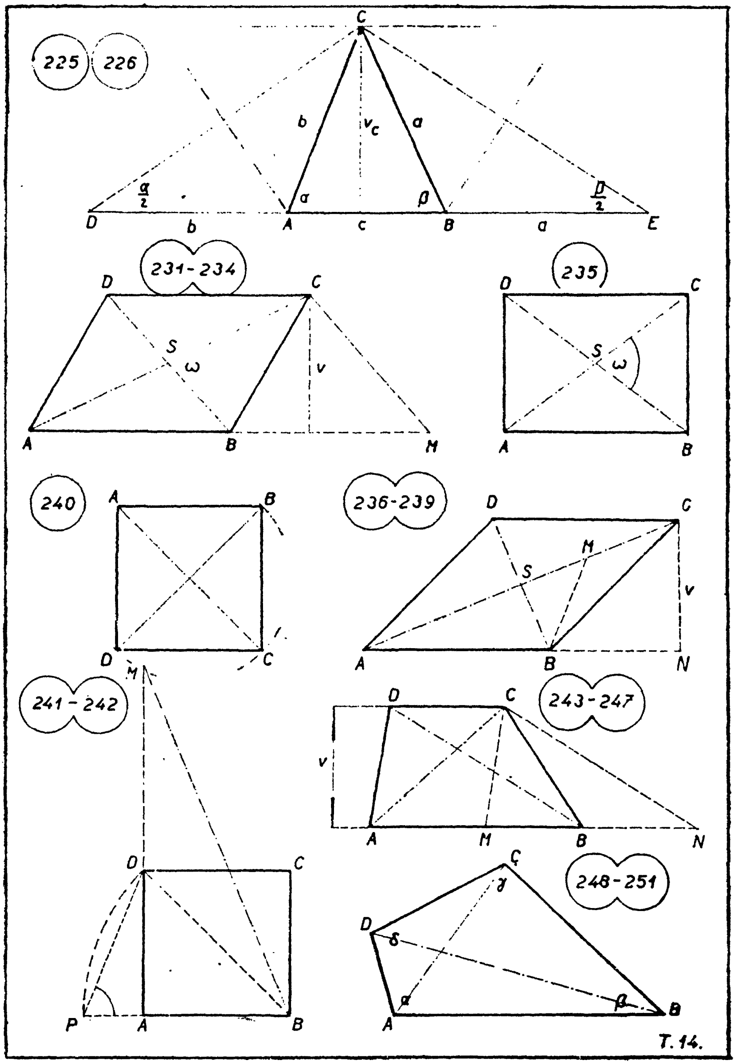
144

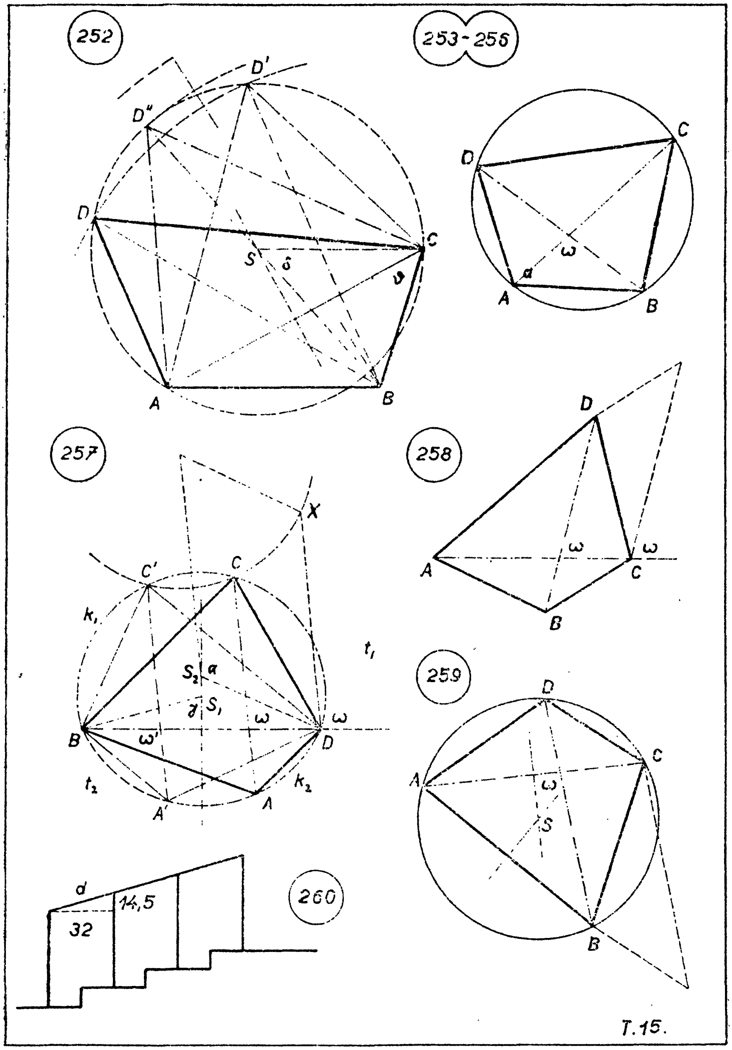


T.11.

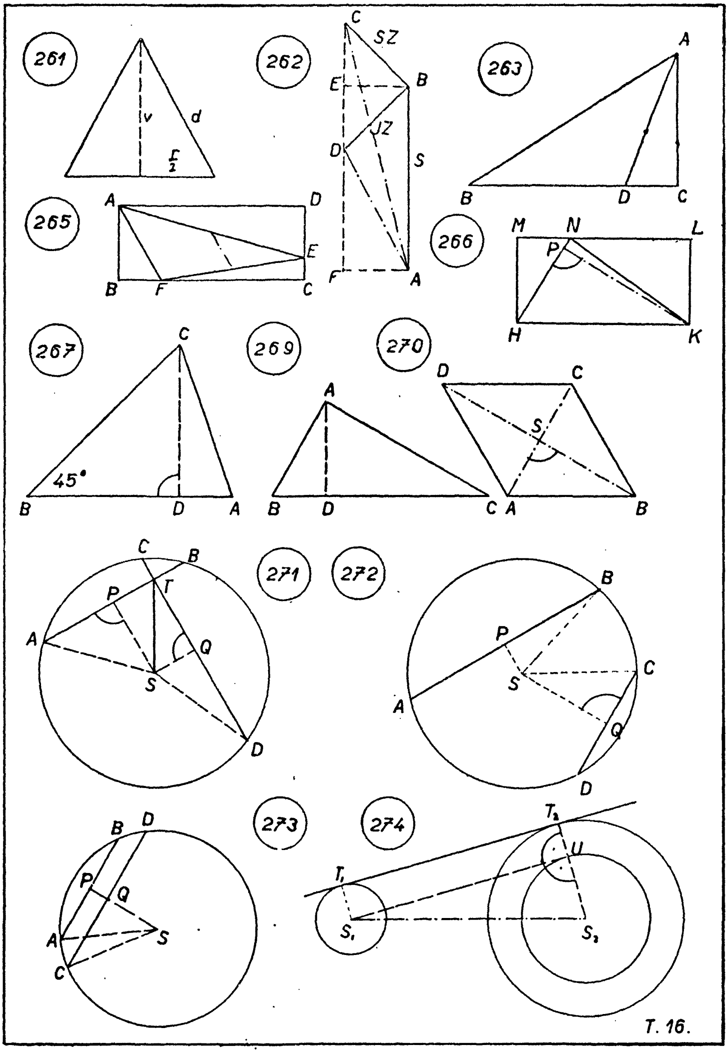

147
a
C
A
O
B
α
T
α
D
S
148
C
A
T
S
D
B
167
168
B
A
U
O
C
S
Q
S
D
T
E
D
171
C
k
O
A
D
B
S
T
k
E
k
V
194
T
Q
P
U
T
L
R
S
T.12.

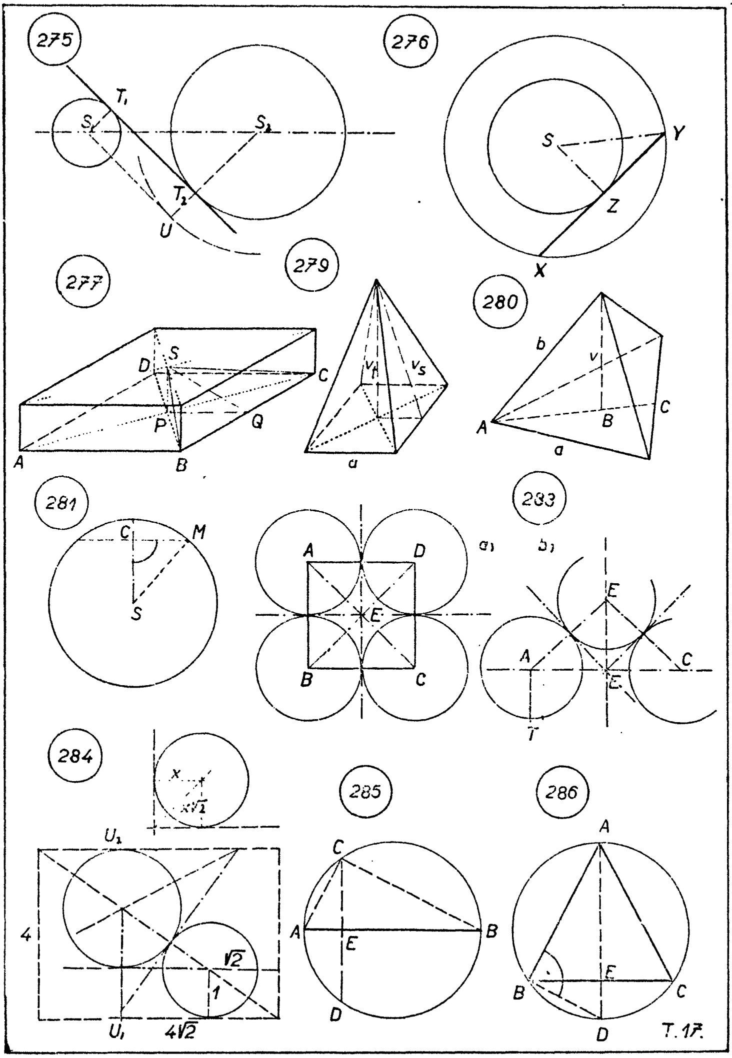

211
A1
A2
α
S
S1
p
B
C
D
212
A2
A1
D1
E1
vb
vc
B
C
S
E2
D2
213
A1
D
S1
A2
vb
k1
B
S
C
k2
S2
220
A
E
b
uγ
B
a
C
b
D
B'
C'
D'
p
q
E'
A'
222
C2
C
δ
C1
δ
a
a
b
α/2
D
b
A1
A2
B
T. 13.

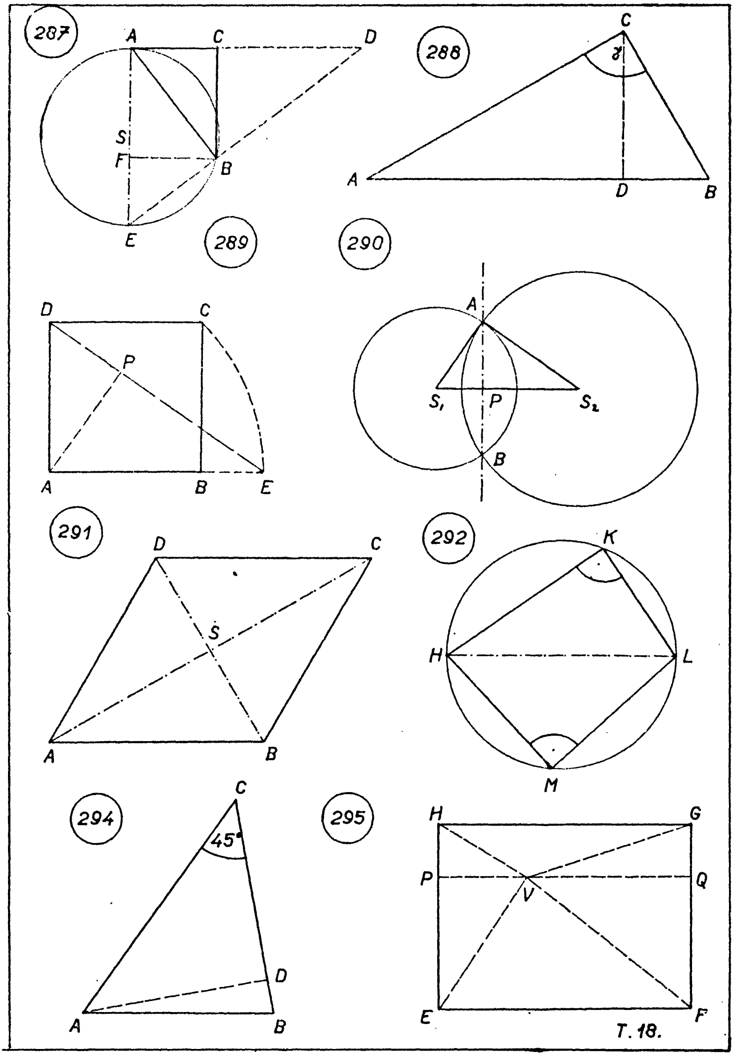

225
226
231-234
235
240
236-239
241-242
243-247
248-251
T. 14.



252
D'
D"
D
C
S
δ
ϑ
A
B
253-256
D
C
ω
α
A
B
257
X
C'
C
k₁
t₁
S₂
α
γ
S₁
ω
B
ω'
D
t₂
A'
A
k₂
258
D
ω
A
C
B
259
D
C
A
ω
S
B
260
d
14,5
32
T.15.


261
v
d
r/2
262
C
SZ
E
B
JZ
D
S
F
A
263
A
B
D
C
265
A
D
E
B
F
C
266
M
N
L
P
H
K
267
C
45°
B
D
A
269
A
B
D
C
270
D
C
S
A
B
271
C
B
P
T
A
Q
S
D
272
B
P
C
S
A
Q
D
273
B
D
P
Q
A
S
C
274
T_1
T_2
U
S_1
S_2
T. 16.


275
276
277
279
280
281
283
284
285
286
T. 17.


287
A C D
S
F B
E
288
C
γ
A D B
289
D C
P
A B E
290
A
S₁ P S₂
B
291
D C
S
A B
292
K
H L
M
294
C
45°
D
A B
295
H G
P Q
V
E F

T. 18.

OBSAH

Spisovatelé	*Dr E. Čech, K. Komínek a R. Zelinka*
Název díla	*Poznámky k učebnicím geometrie pro I.—IV. třídu školy druhého stupně*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků v Praze*
Redigoval	*Dr F. Vyčichlo*
Rok	*1948*
Vytiskla	*Knihtiskárna „Prometheus“ v nár. správě, Praha*
Vydání	*druhé změněné (1501—3000 výt.)*
Cena brož. výt.	*Kčs 88,—*