Eduard Čech; Alfons Fišer; Vítězslav Jozífek; Karel Komínek; Jan Vyšín; Rudolf Zelinka

Geometrie pro čtvrtou třídu středních škol

Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1950, 104 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501375

GEOMETRIE

PRO ČTVRTOU TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ V PRAZE

GEOMETRIE

PRO ČTVRTOU TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

Zpracovali:

Dr EDUARD ČECH, ALFONS FIŠER,
VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, Ing. KAREL KOMÍNEK, JAN VYŠÍN,
RUDOLF ZELINKA

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ V PRAZE - 1950

ÚVODNÍ POZNÁMKY.

Úkolem geometrie na střední škole je nejen seznámit žáky se základními geometrickými pojmy a jejich jednoduchými vlastnostmi, nýbrž při této příležitosti jednak rozvíjeti usuzovací schopnosti a prostorovou představivost, jednak dáti nezbytnou přípravu k nejrůznějším oborům praktické činnosti budovatelům socialismu.

Vyučování matematice má být v dnešní střední škole postaveno na vědecký základ. To znamená nejen odbornou správnost, ale i nutnost probírati látku v systému tak, aby vynikly vzájemné vztahy a souvislosti. Při takovém způsobu vyučování si neodnese žák ze školy pouhou znalost řady vlastností a typických úloh, ale nabude schopnosti rozložit úkol, před který jej třeba praxe postaví, na jednoduché úlohy a samostatně jej rozřešit. Právě tuto schopnost, nezbytnou pro výstavbu lidově demokratické vlasti, musí získat na střední škole každý žák; v tom je skutečný praktický význam matematiky.

Aby si žáci geometrii osvojili trvale pro život, musíme uváděné vlastnosti útvarů odůvodňovat. Musíme žáky přesvědčiti, že je třeba dokazování. Geometrie se k tomu zvláště hodí; mnohé věty jsou na první pohled zřejmé z názoru, ale není nesnadné ukázat, jak je názor nepřesný a neúplný. To ovšem neznamená, že bychom měli při vyučování geometrii potlačovat názor. Naopak: názor nás informuje o konkretním smyslu vlastností i o postupu při jejich dokazování a vede k praktickému použití.

Podle vyložených zásad byla sestavena tato učebnice geometrie. Nová látka je podána skoro výhradně formou souvislého výkladu, doplněného někde otázkami a úlohami. Některé části textu se však přímo nabízejí, abychom je zpracovali ve škole se žáky v úlohách (otázkami).

Cvičení jsou zařazena většinou na konci kapitol, jsou uspořádána celkem podle obtížnosti. Složitější nebo myšlenkově těžší cvičení jsou označena hvězdičkami. Cvičení je tolik, že nemohou být rozřešena všecka. K mnoha cvičením jsou připojeny návody, kde najdeme odkazy na poučky nebo na jiná cvičení. Proto musíme pečlivě připravit výběr cvičení a ukládat je v promyšleném sledu. Vybraným cvičením přizpůsobíme i výklad. Mezi cvičeními je mnoho úloh důkazových; ty poskytují nejlepší příležitost cvičit žáka v samostatném usuzování. Při výběru cvičení dbejme, aby byly stejně zastoupeny úlohy důkazové jako konstruktivní a početní. Pro kontrolu jsou na konci knihy uvedena řešení téměř všech cvičení.

Těžiště učebnice je ve stereometrii. Jejím úkolem je seznámit žáky se základními prostorovými vztahy, pěstovati prostorovou představivost a ovšem i usuzování. Při vyučování stereometrii budeme promyšleně používat názorných pomůcek, třeba i improvisovaných modelů. Mějme také stálý zřetel k rovinným obrazům (řezům a průmětům).

Výpočty objemů a povrchů se nesmějí redukovati na bezduché dosazování do vzorců. Aspoň některé úlohy o objemech a površích mají být geometrické, t. j. nejsou dány přímo potřebné prvky, ale je třeba je určit na základě prostorového vztahu. Změna určujících prvků má vliv na výsledek výpočtu; studium těchto závislostí je výcvikem ve funkčním myšlení, ale má i význam praktický: vede k určení chyby vzniklé nepřesným měřením.

Poslední část učebnice, věnovaná složitějším konstruktivním úlohám, dává dobrou příležitost procvičit pojem geometrického místa a úlohy prodiskutovat.

Pamatujme stále, že učebnice předpokládá intensivní práci učitelovu a individuální methodické zpracování, přizpůsobené stavu třídy.

ROZVRH UČIVA.

ZÁŘÍ	Opakování. Lomené čáry a mnohoúhelníky.
ŘÍJEN	Pravidelné mnohoúhelníky. Základní poučky stereometrické. Rovina kolmá k přímce. Tělesová úhlopříčka kvádru.
LISTOPAD	Kolmice vztyčená k rovině. Rovnoběžky v prostoru. Střed kvádru. Roviny navzájem kolmé. Jehlany.
PROSINEC A LEDEN	Kolmice spuštěná z bodu na rovinu. Výška jehlanu. Vzájemná poloha přímek a rovin. Rotační válec.
ÚNOR	Rotační kužel. Plocha kulová a koule.
BŘEZEN	Povrchy a objemy těles. Jejich závislost na určujících prvcích. Tětivové a tečnové čtyrúhelníky.
DUBEN	Obvodový úhel. Geometrická místa.
KVĚTEN	Konstrukce trojúhelníků. Společné tečny dvou kružnic.
ČERVEN	Opakování a shrnutí učiva.

ČEMU SE BUDETE UČIT.

V části I. si zopakujete v několika cvičeních některé důležité poznatky z geometrie. V části II. si doplníte a prohloubíte své vědomosti o mnohoúhelnících. Všichni víte, jak často se vyskytují tyto obrazce (na př. trojúhelníky, čtverce, obdélníky, lichoběžníky a j.) na předmětech z vašeho okolí. K jejich sestrojování je třeba nejen stran, ale i úhlů: o základní vlastnosti úhlů mnohoúhelníka pojednává první kapitola. U většiny předmětů (na př. stolů, sloupů, oken a j.) žádáme z důvodů praktičnosti a pěkného vzhledu, aby jejich tvar byl „pravidelný". Kapitola druhá pojednává o tom, co jsou pravidelné mnohoúhelníky a jaké mají základní vlastnosti.

Žijeme v trojrozměrném prostoru. Všecky věci, které nás obklopují, jsou také trojrozměrné. Proto je pro nás nejdůležitější geometrie prostorová čili stereometrie. Jí je věnována velká část učebnice (část III.). Chce-li si technik sestrojit nákres nějaké součásti, chce-li stavitel narýsovat plán budovy, chce-li dělník vyrobit určitou součástku, potřebuje zpravidla znáti některý průřez zobrazovaného tělesa. To jste už poznali sami v průmětnictví při rýsování. Abychom uměli zobraziti různé takové průřezy, nesmíme se zabývati jen povrchem tělesa, ale musíme zkoumati důkladněji vzájemnou polohu jeho stěn, hran a pod. Naopak v technické praxi musíme si umět představit z rovinných obrazů (nákresů), jak vypadá určitý předmět v prostoru. K tomu je třeba schopnosti, které říkáme prostorová představivost. Tuto schopnost budeme pěstovat ve stereometrii. Tak jako v rovině i v prostoru setkáme se s dvěma důležitými pojmy: kolmost a rovnoběžnost.

Ve stereometrii poznáte podrobněji nová tělesa; jsou to jehlany (kap. 6), rotační kužele (kap. 9) a koule (kap. 10). Každý z vás dovede jistě jmenovati řadu předmětů, které mají tvar některého z těch těles nebo jeho části. Mnoho předmětů se dá rozložit v taková jednoduchá tělesa. Některé příklady poznáte ve cvičeních. Je pochopitelné, že také pro tato tělesa jsou důležité úlohy o jejich povrchu a objemu. Jim je věnována kapitola 11 a 12. Zpravidla však neumíme vypočíst velikost objemu nebo povrchu přímo z daných (změřených) délek. Často je třeba nejdříve vypočíst jiné délky, a tu poznáte, jak užitečné jsou vztahy o rovnoběžnosti, kolmosti a j. Rýsování řeší úlohu zobraziti dané těleso tak, abychom měli z obrazu představu o jeho vzhledu. Často však (na příklad při výrobě plechových nádob) potřebujeme znát rovinný obrazec, z něhož se dá vytvořit povrch tělesa. To je tak zvaná síť tělesa; také sestrojováním sítí se budete zabývat při probírání příslušných těles.

Část čtvrtá se vrací k rovinné geometrii. Rovinná geometrie (planimetrie) se nám teď jeví ještě potřebnější jako prostředek k řešení prostorových úloh. Dva základní obrazce v rovině jsou trojúhelník a kruh. Jejich důležitost je vám známa; jimi jste se již dosti podrobně zabývali dříve. Ale strojné úlohy o trojúhelníku a kružnici, které jste tehdy řešili, byly jednoduché. Teď na konci střední školy, kdy vaše znalosti geometrie jsou již větší, budete řešiti složitější konstruktivní úlohy. V nich si zopakujete vlastnosti známých obrazců a v mnohých budete moci uplatnit svou schopnost samostatného myšlení.

Některé věci, kterým se budete učit, neupotřebíte hned. Ale jistě se s nimi setkáte ve výrobě nebo jinde v praxi. Stěží by se daly připravovat nové technické vynálezy, podávat zlepšovací návrhy a i jinak zlepšovat výroba bez znalosti aritmetiky a geometrie. A přece právě na tom, jaká bude naše výroba, záleží, budeme-li v naší lidově demokratické vlasti žít stále lépe, kulturněji a bezpečněji. Připravte se proto řádně a důkladně na úkoly, které vás — budovatele socialismu v naší vlasti — čekají.

I. OPAKOVÁNÍ.

1. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ ($\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AD} = 3$ cm, $\sphericalangle BAD = 60^0$) a proměňte jej v kosočtverec $ABEF$. Kolik řešení má úloha?

2. Čtverec $ABCD$ proměňte na obdélník, jehož jednou stranou je úhlopříčka AC. (Nejprve proměňte čtverec na rovnoběžník $ACEB$.)

3. Pravidelný šestiúhelník proměňte na obdélník.

4. $ABCD$ je čtverec; S je střed strany BC, T je střed strany CD. Kolik $^0/_0$ obsahu čtverce činí obsah trojúhelníka AST?

5. Mají-li strany a, b trojúhelníka ABC stále stejné délky a měníme-li velikost úhlu γ, odůvodněte, že obsah trojúhelníka je největší, je-li $\gamma = R$.

6. Dvě strany trojúhelníka měří 3 cm a 8 cm; může jeho obsah býti roven: a) 10 cm, b) 15 cm, c) 12 cm? (Užijte cvičení 5.)

7. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníka měří 12 cm a 16 cm; určete výšku příslušnou k přeponě.

8. Obsah lichoběžníka je 144 cm^2, výška 16 cm, kratší základna je polovinou delší. Určete délky obou základen!

9. Vyjádřete obsah trojúhelníka pomocí délek stran a, b jestliže a) $\gamma = 45°$, b) $\gamma = 60°$, c) $\gamma = 30°$.

10. Základny rovnoramenného lichoběžníka měří 7 cm a 13 cm; obsah je 40 cm^2. Určete obvod lichoběžníka.

11. Do čtverce je vepsána kružnice a do kružnice je vepsán rovnostranný trojúhelník. Jakou částí obsahu čtverce je obsah trojúhelníka?

12. Z vrcholů čtverce $ABCD$ (strana 4 cm) opište kružnice poloměrem 2 cm. Určete obvod a obsah té části čtverce, která leží vně všech čtyř kružnic.

13. Lichoběžník $ABCD$ má základny v poměru $\overline{AB} : \overline{CD} = 2 : 1$. Narýsujte takový lichoběžník. Spojte vrcholy C, D se středem základny AB a dokažte, že se lichoběžník rozdělí ve tři shodné trojúhelníky.

14. Je dán kruh poloměru r. Jaký musí býti poloměr menšího soustředného kruhu, aby vzniklo mezikruží, jehož obsah je čtvrtina obsahu většího kruhu?

15. Je dána přímka p a mimo ni bod A. Určete geometrické místo koncových bodů těch úseček, které mají počáteční bod na přímce p a jsou půleny bodem A.

16. Určete geometrické místo středů kružnic daného poloměru, které vytínají na dané přímce tětivu dané délky.

17. Sestrojte kosočtverec s délkou strany 5 cm a jedním úhlem 45° a vpište do něho kružnici.

18. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník (délky základen 5 cm a 3 cm, délka pobočné strany 4 cm) a opište mu kružnici.

19. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník s délkou základny 4 cm tak, aby poloměr vepsané kružnice měřil 1,5 cm.

20. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník s úhlem $67\frac{1}{2}°$ tak, aby poloměr opsané kružnice byl 25 mm.

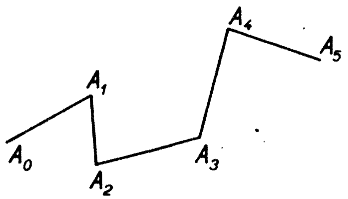
II. MNOHOÚHELNÍKY.

1. Lomené čáry a mnohoúhelníky.

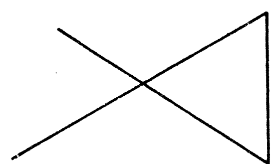
Lomená čára $A_0A_1 \dots A_n$ (viz obr. 1 pro $n = 5$) se skládá z několika úseček

$$A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n,$$

z nichž dvě sousední mají vždy jeden krajní bod společný, ale neleží obě v téže přímce, kdežto dvě nesousední nemají vůbec žádný společný bod, takže na příklad čáru z obr. 2 nepovažujeme za lomenou čáru.



Obr. 1.



Obr. 2.

Body

$$A_0, A_1, \dots, A_n$$

jsou vrcholy a úsečky

$$A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$$

jsou strany lomené čáry $A_0A_1 \dots A_n$; body $A_0, \dots, A_n$ jsou její krajní body. Počet vrcholů lomené čáry je vždy o jednotku větší nežli počet stran.

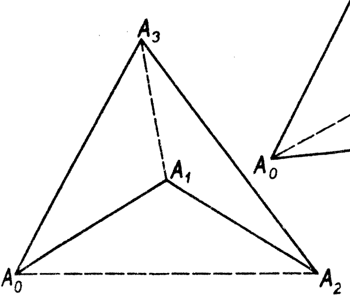
U lomené čáry $A_0A_1 \dots A_n$ jsou body $A_0, \dots, A_n$ navzájem rozdílné. Jestliže A_0 splyne s A_n, přejde lomená čára v mnohoúhelník (určitěji n-úhelník) $A_1A_2 \dots A_n$. Mnohoúhelník má n vrcholů

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

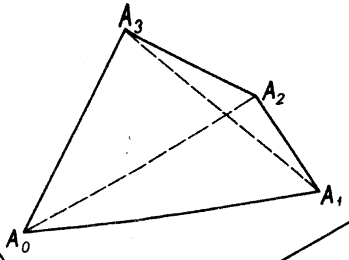
a týž počet, t. j. n stran

$$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1.$$

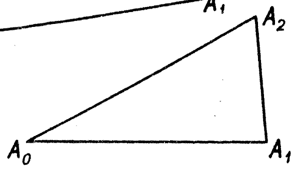
Z každého vrcholu vycházejí dvě strany, které se jmenují sousední, každá strana má své krajní body ve dvou vrcholech, které se zase jmenují sousední. Dvě sousední strany neleží v téže přímce. Dvě nesousední strany nemají žádný společný bod. Úsečka, jejíž krajní body jsou dva nesousední vrcholy, jmenuje se úhlopříčka neboli diagonála mnohoúhelníka. U trojúhelníka ($n = 3$, viz obr. 5) jsou každé dva vrcholy sousední a úhlopříček není. U čtyr-



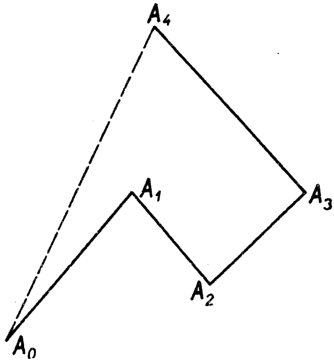
Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.



Obr. 6.

úhelníka ($n = 4$, viz obr. 3 a 4) jsou dvě úhlopříčky. Vrcholy mnohoúhelníka píšeme vždy v takovém pořádku, že dva vrcholy napsané přímo za sebou jsou sousední; první a poslední vrchol jsou potom také sousední. Při tom můžeme začíti kterýmkoli vrcholem a za ním musí následovati některý z obou vrcholů sousedních. Pouze u trojúhelníka můžeme zapsati vrcholy v úplně libovolném pořádku za sebou.

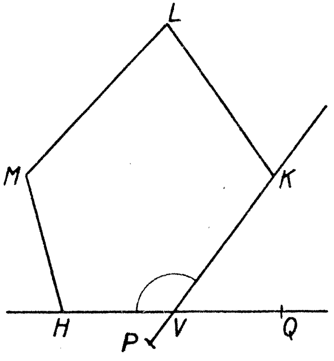
Každý mnohoúhelník rozdělí rovinu na dvě části, z nichž jedna se rozprostírá do nekonečna a jmenuje se vnějšek mnohoúhelníka; druhá část, která je celá v konečnu, jmenuje se vnitřek mnohoúhelníka. Body mnohoúhelníka nepočítáme ani do vnějšku, ani do vnitřku. Mnohoúhelník se svým vnitřkem dohromady tvoří plochu mnohoúhelníka. Velmi často se však ploše mnohoúhelníka říká mnohoúhelník; čára, kterou jsme nazvali mnohoúhelník, nazývá se potom obvod mnohoúhelníka.

Nejjednodušší a nejdůležitější jsou mnohoúhelníky vypuklé. Mnohoúhelník je vypuklý, jestliže pro každou jeho stranu platí, že všechny vrcholy mnohoúhelníka (a tudíž i celý mnohoúhelník i se svým vnitřkem) leží v téže polorovině vyťaté touto prodlouženou stranou. Každý trojúhelník je vypuklý. Čtyrúhelník $A_0A_1A_2A_3$ v obr. 4 je vypuklý, čtyrúhelník $A_0A_1A_2A_3$ v obr. 3 není vypuklý.

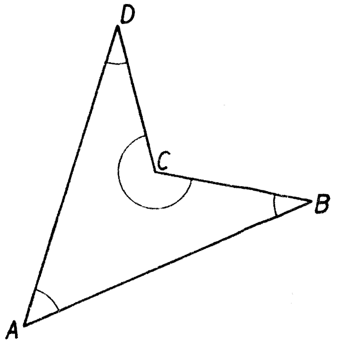
Vypuklé mnohoúhelníky mají řadu jednoduchých vlastností. Na př. každá úhlopříčka vypuklého mnohoúhelníka leží celá (až na své krajní body) uvnitř mnohoúhelníka. Dá se dokázati, že také každý nevypuklý mnohoúhelník má aspoň jednu úhlopříčku, která je celá uvnitř, ale musí také míti aspoň jednu úhlopříčku, která je celá vně a může míti také takové úhlopříčky, které jsou jen zčásti uvnitř mnohoúhelníka.

Také lomenou čáru nazýváme vypuklou, jestliže pro každou stranu AB platí, že všechny vrcholy (a tudíž i celá lomená čára) leží v jedné polorovině vyťaté přímkou AB, Lomená čára v obr. 1 není vypuklá. Vynecháme-li jednu stranu vypuklého mnohoúhelníka, vznikne vypuklá lomená čára. Obráceně z každé vypuklé lomené čáry připojením spojnice krajních bodů vznikne mnohoúhelník. Naproti tomu u nevypuklé lomené čáry se může státi (viz obr. 1), že spojnice krajních bodů lomené čáry tuto čáru protne, takže vůbec nevznikne mnohoúhelník, nebo (viz obr. 6) sice mnohoúhelník vznikne, ne však vypuklý.

Budiž V libovolný vrchol mnohoúhelníka a buďte H, K oba vrcholy k němu sousední. Jestliže mnohoúhelník je vypuklý (viz obr. 7), leží celý v polorovině HVK a také celý v polorovině KVH, takže leží celý v dutém



Obr. 7.



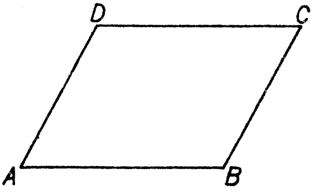
Obr. 8.

úhlu $\sphericalangle HVK$; tento dutý úhel se jmenuje **vnitřní úhel mnohoúhelníka při vrcholu** V; také celý vnitřek mnohoúhelníka je částí tohoto úhlu. **Vnějším úhlem** při vrcholu V vypuklého mnohoúhelníka nazýváme úhel vedlejší k úhlu vnitřnímu, takže jsou dva takové úhly; v obr. 7 to jsou $\sphericalangle QVK$, $\sphericalangle PVH$.

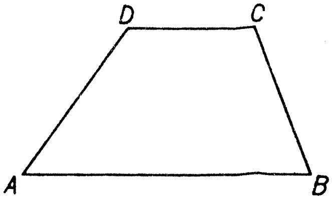
U nevypuklého mnohoúhelníka pojem vnějšího úhlu nezavádíme a pojem vnitřního úhlu musíme zavésti trochu jinak. Vyložme si to pro čtyrúhelník $ABCD$ v obr. 8. Vnitřek tohoto čtyrúhelníka je částí dutého úhlu $\sphericalangle BAD$, který je vnitřním úhlem při vrcholu A. Dutý úhel $\sphericalangle ABC$ sice neobsahuje celý vnitřek čtyrúhelníka, ale aspoň ta část vnitřku čtyrúhelníka, která je v blízkosti vrcholu B, je částí toho dutého úhlu, který je vnitřním úhlem při vrcholu B. Podobně dutý úhel $\sphericalangle ADC$ je vnitřním úhlem při vrcholu D. Naproti tomu ani ta část vnitřku čtyrúhelníka, která je v blízkosti vrcholu C, není částí dutého úhlu $\sphericalangle BCD$, pročež vnitřním úhlem při vrcholu C nerozumíme tento dutý úhel, nýbrž vypuklý úhel s rameny CB, CD. Dá se ukázati, že u každého nevypuklého mnohoúhelníka aspoň tři vnitřní úhly jsou duté a aspoň jeden vnitřní úhel je vypuklý. U vypuklého mnohoúhelníka jsou ovšem všecky vnitřní i vnější úhly duté.

Čtyrúhelník, u něhož $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, se jmenuje **rovnoběžník** (viz obr. 9). O něm jsme podrobněji jednali ve třídě druhé.

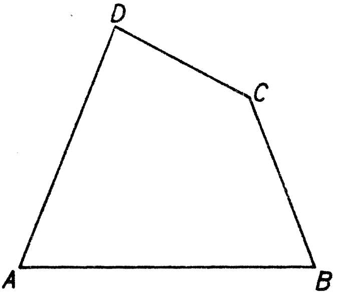
Může se také státi, že je $AB \parallel CD$, ne však $AD \parallel BC$; takový čtyrúhelník se jmenuje **lichoběžník** (obr. 10). Jestliže konečně není $AB \parallel CD$, ani



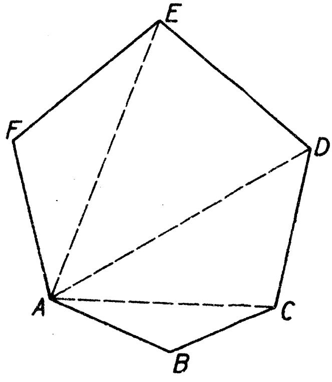
Obr. 9.



Obr. 10.



Obr. 11.



Obr. 12.

$AD \parallel BC$, pak $ABCD$ je **různoběžník**. Každý rovnoběžník a každý lichoběžník je vypuklý; různoběžník může, ale nemusí být vypuklý (viz obr. 11; 8).

Každý vypuklý n-úhelník se dá rozdělit na trojúhelníky úhlopříčkami, které vycházejí z jednoho libovolně zvoleného vrcholu (obr. 12). Těchto trojúhelníků je tolik, kolik je stran, které nevycházejí ze zvoleného vrcholu, tedy $n-2$. Obr. 12 ukazuje, že vnitřní úhly všech takových trojúhelníků dávají dohromady vnitřní úhly n-úhelníka. Protože součet vnitřních úhlů trojúhelníka je úhel přímý čili $2R$, platí poučka:

Součet vnitřních úhlů n-úhelníka je $(n-2) \cdot 2R$.
Ověřte si, že tato poučka je správná i pro trojúhelník.

Určíme si ještě součet vnějších úhlů vypuklého n-úhelníka. Vnější a vnitřní úhel při každém vrcholu dávají dohromady přímý úhel. Součet všech vnějších i vnitřních úhlů je tedy $n \cdot 2R$. Protože součet vnitřních úhlů je $(n-2) \cdot 2R$, je součet vnějších úhlů vypuklého n-úhelníka $n . 2R - (n-2) . 2R = 4R$.

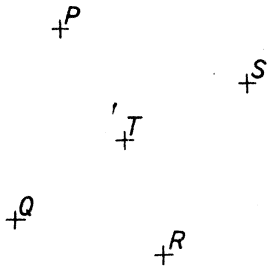
Cvičení.

21. Zapište všemi možnými způsoby správně za sebou vrcholy pětiúhelníka z obr. 7.

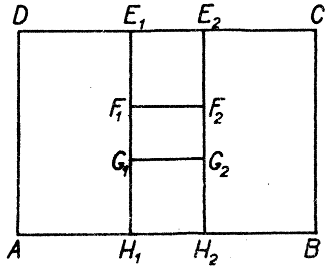
22. Které pětiúhelníky mohou mít vrcholy v bodech P, Q, R, S, T podle obr. 13? Narýsujte je a zapište. Je některý z nich vypuklý?

23. V čáře na obr. 14 lze nalézti a) 11 čtyrúhelníků, b) 8 šestiúhelníků, c) 8 osmiúhelníků, d) 1 dvanáctiúhelník. Zapište ty mnohoúhelníky. Označte, které z nich jsou vypuklé.

24. Kolik úhlopříček má n-úhelník? Uvažujte: kolik jich vychází z každého vrcholu, kolik jich tak dostanete celkem? Kolikrát je každá počítána?



Obr. 13.



Obr. 14.

25. Které n-úhelníky mají méně než 30 úhlopříček? Návod: počítejte počet úhlopříček pro malá n.

26. Dva trojúhelníky ABC, ACD mají společnou stranu AC a leží v různých polorovinách vyťatých přímkou AC. Jak musíme zvolit ty trojúhelníky, aby obrazec $ABCD$ a) byl rovnoběžník, b) byl obdélník, c) byl kosočtverec, d) byl čtverec, e) byl lichoběžník, f) nebyl čtyrúhelník?

27. Každý různoběžník vznikne dvojím způsobem tak, že se od jednoho trojúhelníka ubere jiný trojúhelník. Ukažte oba způsoby. Jak je tomu u lichoběžníka, rovnoběžníka, nevypuklého čtyrúhelníka?

28. Vypočtěte čtvrtý vnitřní úhel čtyrúhelníka, jsou-li dány tři vnitřní úhly: a) 75°, 96°, 121°; b) 118°, 72°, 48°; c) 89°42′, 123°45′, 86°50′; d) 30°20′16″, 56°39′58″, 135°38″.

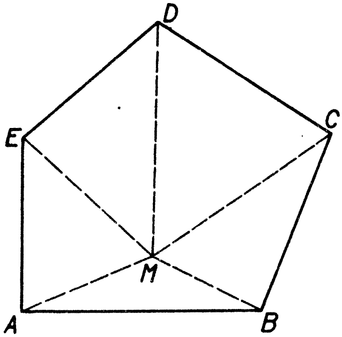
29. Jeden vnitřní úhel čtyrúhelníka měří 113°8′54″, ostatní jsou si rovny. Určete velikost všech úhlů.

30. Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka je a) 1080°, b) 630°. Kolik má stran?

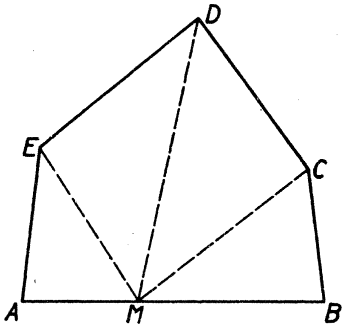
31. Který n-úhelník má součet vnitřních úhlů mezi 7 a 8 tisíci stupňů?

32. Z šesti vnitřních úhlů šestiúhelníka je pět sobě rovných. Zbývající je o 71°13′ menší. Určete jejich velikost.

33. Tři vnitřní úhly pětiúhelníka jsou si rovny a každý z nich měří 156°52′48″. Zbývající dva vnitřní úhly jsou si také rovny. Určete jejich velikost.



Obr. 15.



Obr. 16.

***34.** Pomocí vzorce pro součet vnitřních úhlů n-úhelníka rozhodněte, může-li být vypuklý pětiúhelník a) bez tupého úhlu; b) s jediným vnitřním tupým úhlem. Kolik nejvýše může mít pětiúhelník ostrých vnitřních úhlů? Návod: zkoumejte, jaký největší součet vnitřních úhlů má pětiúhelník s 4 (3) ostrými nebo pravými úhly.

***35.** Vypuklý pětiúhelník $ABCDE$ z obr. 16 je rozdělen na trojúhelníky se společným vrcholem M ležícím na straně AB. Pomocí tohoto rozdělení odvoďte znovu vzorec pro součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka.

***36.** Obr. 15. Zvolte bod M uvnitř pětiúhelníka $ABCDE$. Z rozkladu pětiúhelníka na trojúhelníky odvoďte znovu vzorec pro součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka.

***37.** Sestrojte čtyrúhelník, jehož tři vnější úhly mají velikosti 60°, 150°, 30°.

***38.** Narýsujte staveniště tvaru pětiúhelníka, v němž jsou stejné čtyři vnitřní úhly u vrcholů po sobě jdoucích a rovnají se vnějšímu úhlu u pátého vrcholu. Nejprve počítejte velikost vnitřních úhlů.

2. Pravidelné mnohoúhelníky.

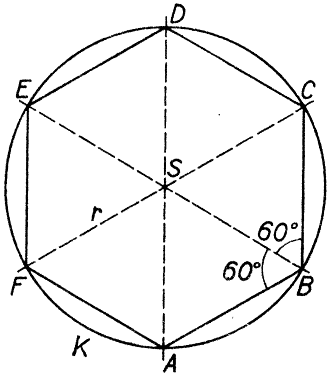
Mnohoúhelník nazýváme pravidelný, jsou-li všechny jeho strany stejně dlouhé a všechny jeho vnitřní úhly stejně velké. Dá se dokázat, že každý pravidelný mnohoúhelník je vypuklý.

Každý pravidelný trojúhelník je trojúhelník rovnostranný (každý jeho vnitřní úhel je roven 60°), každý pravidelný čtyrúhelník je čtverec.

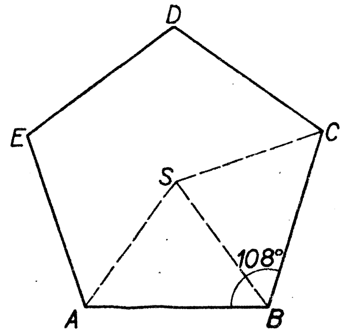
To si dovedeme odůvodnit. Pravidelný čtyrúhelník je vypuklý, má tedy všechny vnitřní úhly duté. Jejich součet je $4R$. Velikost vnitřního úhlu je $\frac{4R}{4} = R$. Protože jsou všechny strany stejně dlouhé, je tento čtyrúhelník čtverec.

Umíte sestrojit šestiúhelník, kterému jste říkali pravidelný. Popište jeho konstrukci podle obr. 17. Přesvědčme se, že je skutečně pravidelný podle naší definice.

Všechny jeho strany jsou stejně dlouhé (rovné poloměru r kružnice k), každý jeho vnitřní úhel je 120°. Spojíme-li totiž vrcholy šestiúhelníka se středem S kružnice k, rozdělí se šestiúhelník na šest rovnostranných trojúhelníků. Je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABS + \sphericalangle SBC = 60° + 60° = 120°$.



Obr. 17.



Obr. 18.

Sestrojíme si pravidelný pětiúhelník o straně $a = 3$ cm. Vnitřní úhel pětiúhelníka je $\frac{3}{5} \cdot 2R = 108°$. Podle obrázku 18 sestrojíme nejdříve stranu AB a s pomocí úhloměru úhel 108° ve vrcholu B. Nanesením délky strany na rameno úhlu dostaneme vrchol C a tak pokračujeme dále. Při přesném rýsování dojdeme nakonec k vrcholu A. Rozpůlíme vnitřní úhly ve vrcholech A a B. Osy těchto úhlů se protnou v bodě, který označíme S.

Trojúhelník ABS je rovnoramenný a jeho základna je AB. Nad stranou BC sestrojíme rovnoramenný trojúhelník opět rozpůlením úhlů při vrcholech B a C. Tento nový trojúhelník je shodný s trojúhelníkem ABS, neboť se s ním shoduje v základně a v obou přilehlých úhlech.

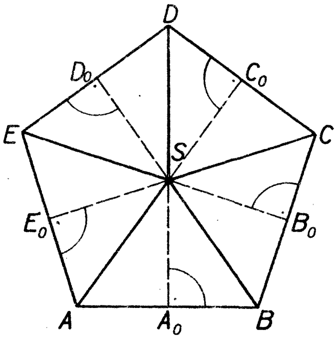
Oba rovnoramenné trojúhelníky mají společné jedno rameno (v ose vnitřního úhlu při vrcholu B), a tedy také hlavní vrchol S. Rovnoramenné trojúhelníky sestrojené stejným způsobem nad všemi stranami pětiúhelníka mají společný hlavní vrchol S. Tak jsme rozložili pětiúhelník $ABCDE$ v pět shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Obdobným způsobem můžeme rozložit každý pravidelný n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků.

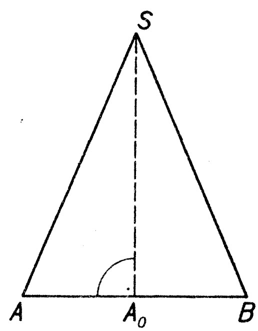
Společný hlavní vrchol všech těchto trojúhelníků má stejnou vzdálenost od všech vrcholů pravidelného n-úhelníka. Je tedy středem kružnice, která prochází všemi vrcholy n-úhelníka; tato kružnice se nazývá kružnice opsaná n-úhelníku.

Na obr. 19 vidíte opět pravidelný pětiúhelník $ABCDE$; S je střed kružnice opsané. V trojúhelnících ABS, BCS, CDS, DES, EAS jsou sestrojeny výšky SA_0, SB_0, SC_0, SD_0, SE_0. Protože trojúhelníky jsou navzájem shodné, jsou výšky stejně dlouhé: $\overline{SA_0} = \overline{SB_0} = \overline{SC_0} = \overline{SD_0} = \overline{SE_0}$. Kružnice se středem S a poloměrem $\overline{SA_0}$ se tedy dotýká všech stran pětiúhelníka v bodech A_0, B_0, C_0, D_0, E_0. Tato kružnice se jmenuje kružnice vepsaná pravidelnému pětiúhelníku. Obdobnou úvahu můžeme provést pro každý pravidelný mnohoúhelník.

Ke každému pravidelnému mnohoúhelníku lze sestrojit kružnici opsanou a kružnici vepsanou. Obě kružnice mají společný střed; tento bod se nazývá středem mnohoúhelníka.



Obr. 19.

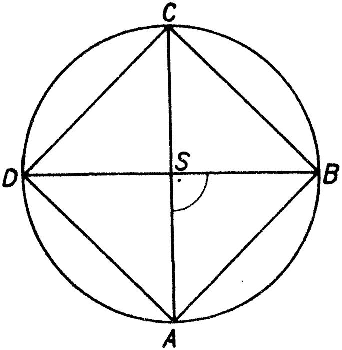


Obr. 20.

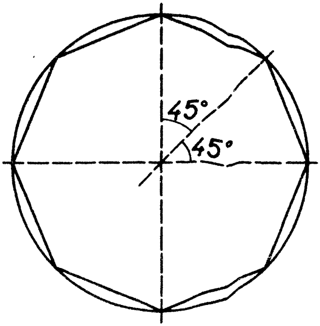
Uvědomte si znovu: **spojíme-li střed pravidelného n-úhelníka se všemi jeho vrcholy, rozdělí se n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným hlavním vrcholem S.** Obr. 20 znázorňuje jeden z těchto trojúhelníků, trojúhelník ABS. Popíšeme jej znovu podrobně, neboť je velmi důležitý pro řešení většiny úloh o pravidelném mnohoúhelníku. Jeho základna AB je strana n-úhelníka, jeho ramena $\overline{AS} = \overline{BS}$ jsou rovna poloměru kružnice opsané n-úhelníku. Jeho výška $\overline{SA_0}$ je rovna poloměru kružnice vepsané. Každý z úhlů při základně je polovina vnitřního úhlu n-úhelníka, úhel ASB je roven vnějšímu úhlu n-úhelníka.

Platí totiž $\sphericalangle ASB = 2R - (\sphericalangle SAB + \sphericalangle SBA)$. Avšak úhly SAB, SBA dávají dohromady vnitřní úhel n-úhelníka. $\sphericalangle ASB$ je tedy výplňkový k vnitřnímu úhlu n-úhelníka, a proto roven vnějšímu úhlu.

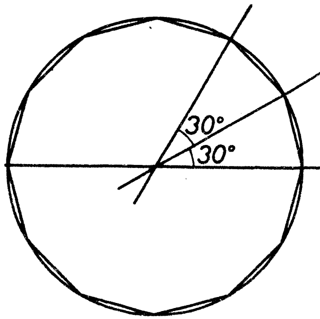
Pravidelný n-úhelník sestrojíme podle předcházejícího výkladu takto: vyjdeme od kružnice opsané; plný úhel při jejím středu rozdělíme na n stejných dílů; ramena těch úhlů protnou kružnici ve vrcholech pravidelného n-úhelníka.



Obr. 21.



Obr. 22.

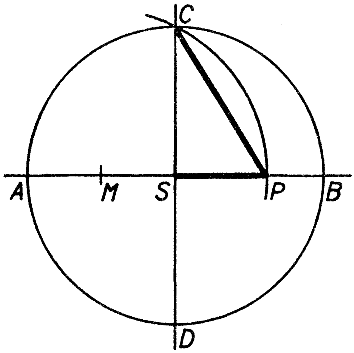


Obr. 23.

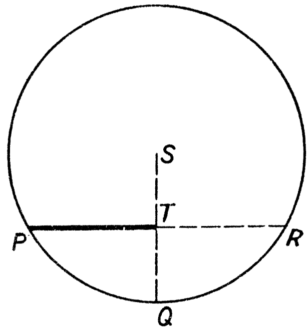
Úloha. Dané kružnici máme vepsati čtverec. (Obr. 21.) Rozdělíme plný úhel při S na 4 pravé úhly; ramena těch úhlů protnou kružnici v bodech A, B, C, D. Čtyrúhelník $ABCD$ je pravidelný, t. j. čtverec. Neboť trojúhelníky ABS, BCS, CDS, DAS jsou shodné podle věty *sus*. Popište, jak vepíšeme dané kružnici pravidelný trojúhelník.

Probereme si nyní konstrukce některých dalších pravidelných n-úhelníků. Plný úhel při středu opsané kružnice můžeme vždy rozděliti na n stejných dílů pomocí úhloměru. Tato konstrukce však není dosti přesná; proto hledáme přesnější konstrukce s použitím pravítka a kružítka (konstrukce euklidovské). Takové konstrukce již znáte pro $n = 3, 4, 6$. Na obr. 22 a 23 jsou sestrojeny pravidelný osmiúhelník a pravidelný dvanáctiúhelník. Rozdělení plného úhlu je provedeno pravítkem a kružítkem. Popište podle obrázků obě konstrukce!

Také sestrojení pravidelného pětiúhelníka a desetiúhelníka je jednoduché, ale jeho odůvodnění vyžaduje větších znalostí z geometrie a algebry, proto uvedeme jen konstrukce bez důkazu.



Obr. 24.



Obr. 25

Podle obr. 24 sestrojíme v kružnici dva kolmé průměry AB, CD. Střed úsečky AS označíme M. Kolem středu M opíšeme oblouk kružnice o poloměru MC a najdeme její průsečík P s poloměrem BS. Pak je úsečka CP stranou pravidelného pětiúhelníka a úsečka SP stranou pravidelného desetiúhelníka vepsaného narýsované kružnici.

Pravidelný sedmiúhelník, devítiúhelník a jedenáctiúhelník není možno sestrojiti **přesně** s použitím pravítka a kružítka; ale máme přibližné konstrukce, které vyhovují pro malé poloměry opsaných kružnic, jaké se obyčejně vyskytují při rýsování v sešitech.

Tak na příklad pravidelný sedmiúhelník vpíšeme do dané kružnice tak, že určíme nejprve stranu rovnostranného trojúhelníka do ní vepsaného; polovina té strany je přibližně strana pravidelného sedmiúhelníka. Na obr. 25 jsou P, Q, R tři za sebou jdoucí vrcholy pravidelného šestiúhelníka, PT strana pravidelného sedmiúhelníka vepsaného dané kružnici.

Cvičení.

39. Sestrojte síť pravidelného hranolu osmibokého, jehož pobočná hrana je dvakrát tak dlouhá jako hrana podstavy.

40. Do kružnice o daném poloměru (4 cm) vpište pravidelný sedmiúhelník přibližnou konstrukcí a sestrojte kružnici jemu vepsanou.

41. Do kružnice o daném poloměru (4,5 cm) vpište pravidelný a) pětiúhelník, b) desetiúhelník; oběma vpište kružnice.

42. Vypočtěte velikost vnitřního a vnějšího úhlu pravidelného n-úhelníka pro $n = 5, 7, 10, 12, 15, 18, 30$.

43. *ABCDE* je pravidelný pětiúhelník. Prodloužené strany *AB*, *CD* se protnou v bodě *X*. Nakreslete náčrtek a dokažte, že trojúhelníky *ABD*, *BCX* jsou shodné.

44. Může mít pravidelný mnohoúhelník vnější úhel a) 15°; b) 7°; c) 11°; d) 6°; e) 5°; f) 4°?

45. Může mít pravidelný mnohoúhelník vnitřní úhel a) 108°; b) 120°; c) 130°; d) 144°; e) 160°; f) 170°? Návod: zkoumejte příslušný vnější úhel.

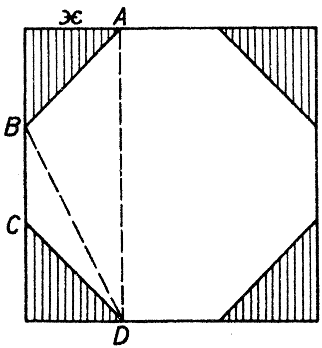
46. Které pravidelné mnohoúhelníky mají vnitřní úhel menší než 150°?

47. Dokažte, že pravidelný n-úhelník má větší vnitřní úhel než pravidelný k-úhelník, je-li $n > k$. Návod: nejdříve dokažte, že vnější úhel pravidelného n-úhelníka je menší než vnější úhel k-úhelníka.

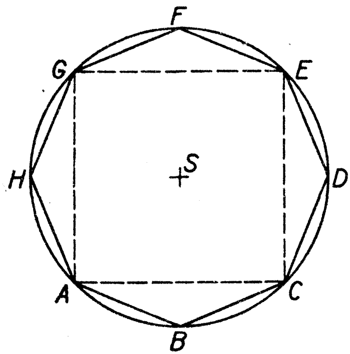
48. Který pravidelný mnohoúhelník pokud možná s nejmenším počtem stran má vnitřní úhel větší než 170°?

49. Dokažte: obsah pravidelného n-úhelníka vypočteme, znásobíme-li jeho poloviční obvod poloměrem kružnice vepsané. Návod: rozdělte n-úhelník podle obr. 19.

50. Ze železné tyče o průřezu tvaru pravidelného šestiúhelníka *ABCDEF* byly rozříznutím získány dvě tyče s profily *ABCD*, *AFED*. Dokažte, že průřezy jsou rovnoramenné lichoběžníky.



Obr. 26.



Obr. 27.

***51.** Podle obr. 26 odstřihněte od čtverce čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky; zbývající část je osmiúhelník. a) Vypočtěte úhly toho osmiúhelníka. b) Určete výpočtem délku odvěsny x tak, aby osmiúhelník byl pravidelný (zvolte stranu čtverce 6 cm). c) Sestrojte vzniklý pravidelný osmiúhelník. Návod pro c): vypočtěte nejprve úhly $\triangle$ *BCD*, pak úhly $\triangle$ *ABD*; trojúhelník *ABD* pak dovedete sestrojit, jeho výška je x.

***52.** Obr. 27. Sestrojte pravidelný osmiúhelník, je-li dána jeho úhlopříčka *AC*. Nejdříve dokažte, že čtyrúhelník *ACEG* je čtverec.

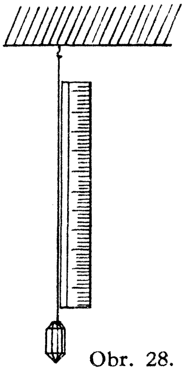
***53.** Z lepenky vystřihněte dva pravidelné osmiúhelníky o straně s = 2,5 cm. (Pomohou vám obr. 19 a 20). Sestrojte otevřené krabičky, které mají osmiúhelníková dna a výšku 3 cm.

***54.** Opakujte cvičení 53 pro pravidelný dvanáctiúhelník s danou stranou 2 cm.

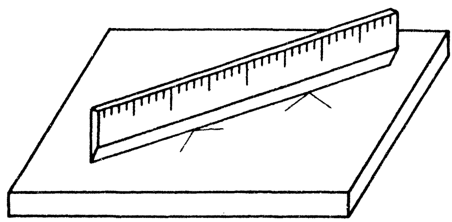
III. ZÁKLADY STEREOMETRIE.

1. Základní poučky stereometrické.

Doposud jsme se v geometrických hodinách zabývali hlavně takovými útvary, které je možno umístit v jedné rovině a které se proto jmenují r o v i n n é ú t v a r y. Známe však také jiné geometrické útvary: jsou to t ě l e s a. Příklady rovinných útvarů jsou: přímka, úhel, kružnice, obdélník; příklady těles jsou krychle, hranol, koule.



Obr. 28.



Obr. 29.

O rovinných útvarech pojednává rovinná geometrie čili p l a n i m e t r i e, o útvarech v prostoru pojednává prostorová geometrie čili s t e r e o m e t r i e. S jejími základy se nyní seznámíte. Budeme při tom velmi často hovořiti o bodech, přímkách a rovinách; body a přímky budeme označovati jako v planimetrii velkými a malými písmeny latinské abecedy, roviny budeme označovati některými malými písmeny řecké abecedy, na příklad ϱ, σ, τ (čti ró, sigma, tau).

Jak přezkoušíme, zda je hrana pravítka přímá? Na tenkou strunu zavěsíme olovnici, t. j. závaží. Ke struně olovnice, která je v klidu, přiložme hranu pravítka podle obr. 28. Přiléhá-li struna olovnice po celé délce k hraně pravítka, řekneme jistě, že hrana pravítka je přímá, t. j. část přímky.

Přímka může mít v prostoru různou polohu. Při předchozím pokusu byla přímka svislá. Obyčejně jsou dány dva různé body a přímka je umístěna tak, že těmi body prochází, čili je spojuje.

Na rýsovací desce si vyznačíme (třeba křížky) dva různé body a přiložíme přímou hranu vyzkoušeného pravítka tak, aby vyznačenými dvěma body procházela (podle obr. 29). Opakujeme pokus s jinými dvojicemi bodů, s přímkami jiných směrů. Jestliže při některém pokusu nebude hrana pravítka přiléhati po celé své délce k povrchu desky, prohlásíme, že povrch desky není rovný. Jestliže naopak povrch desky je rovný, bude při každém pokusu hrana pravítka přiléhati po celé délce k desce.

Tento výsledek vyslovíme geometricky: povrch rýsovací desky představuje rovinu, hrana pravítka přímku. Místo věty „Hrana pravítka přiléhá všude k povrchu desky" řekneme „Přímka leží v rovině." Tak dostáváme první základní poučku:

I. **Leží-li dva různé body v určité rovině, pak přímka, která jimi prochází, leží také v té rovině.**

Jak víme z planimetrie, představujeme si přímku složenu z nekonečně mnoha bodů. Podle této představy znamená věta „přímka leží v rovině" to, že každý její bod leží v té rovině.

Na obr. 30 je znázorněna rovná podlaha a jedno křídlo otáčivých dveří (turniketu). Toto křídlo se otáčí kolem přímky p. Všecky polohy, které zaujme, představují všecky roviny, které obsahují přímku p. Dále je na obrázku znázorněn nárazník — bod A ležící mimo přímku p. Otočíme-li křídlo dveří tak, že narazí na nárazník A, zastaví se ve zcela určité poloze. Geometricky to znamená: mezi všemi nekonečně mnoha rovinami, které obsahují pevnou přímku p, je jen jediná, která obsahuje ještě pevný bod A ležící mimo přímku p. Stručněji vysloveno:

II. **Přímkou a bodem ležícím mimo ni prochází jediná rovina (lze položiti jedinou rovinu).**

Říkáme také: přímkou a bodem ležícím mimo ni je rovina určena jednoznačně.

Rovinu procházející přímkou p a bodem A budeme označovati krátce Ap.

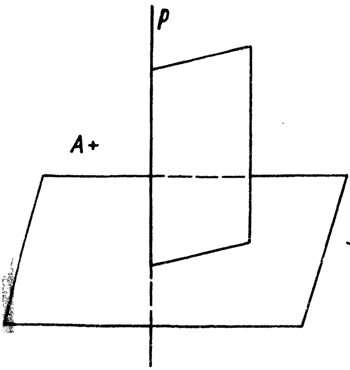
Kdyby také bod A ležel na přímce p, pak by rovina obsahující přímku p a bod A nebyla jediná, takových rovin by bylo nekonečně mnoho.

Poučka II vyjadřuje jeden způsob, jak je určena poloha roviny v prostoru. Jiné způsoby jsou vysloveny v poučkách IIa a IIb.

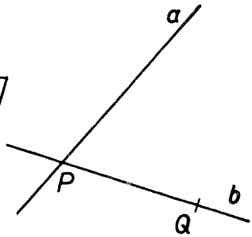
IIa. **Třemi body, které neleží v přímce, prochází jediná rovina.** Rovinu procházející body A, B, C budeme označovati ABC. Poučku IIa dobře pochopíme na tomto příkladě: do země jsou zaraženy tři svislé kůly (třeba různě vysoké) a na ně chceme položiti rovnou desku. Je možné, aby se opírala o všecky tři kůly?

Správnost poučky IIa je sice patrna z názorných příkladů, jako tomu bylo u pouček I, II, ale dovedeme ji také dokázat úsudkem z poučky II tím, že spojíme dva z daných bodů přímkou. Touto přímkou a třetím bodem je pak určena jediná rovina.

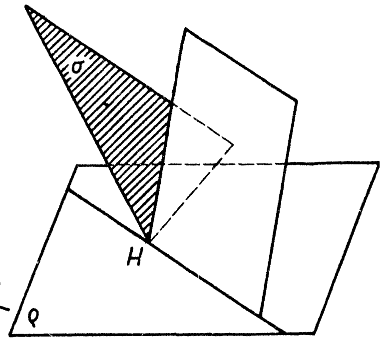
Dvě různé přímky v prostoru, které mají společný bod, budeme nazývat tak jako v rovině různoběžky.



Obr. 30.



Obr. 31.



Obr. 32.

IIb. **Dvěma různoběžkami prochází jediná rovina.**

Správnost poučky vysvítá názorně z tohoto příkladu: přes roh bedny s přímými okraji chceme položit rovnou desku. Bude přiléhat k oběma hranám po celé jejich délce?

Důkaz poučky IIb provedeme úsudkem: Na obr. 31 jsou dvě různoběžky a, b s průsečíkem P. Na přímce b si zvolíme bod Q rozdílný od bodu P. Podle poučky II prochází bodem Q a přímkou a jediná rovina (naše nákresna). Tato rovina obsahuje podle poučky I přímku b, neboť obsahuje dva její body P, Q.

Nyní si upravíme model podle obr. 32. O rovnou desku ϱ opřeme jedním vrcholem H tenký tuhý rovný trojúhelník σ (je třeba ho ovšem podepřít, aby zůstal v této poloze). Tím jsou znázorněny dvě různé roviny ϱ, σ, které mají společný bod H. Položíme tenký tuhý rovný obdélník tak, aby přilehl na trojúhelník a opíral se jednou stranou o desku ϱ (obr. 32). Obdélník nám představuje také část roviny σ. Podle názoru vyplňují společné body rovin ϱ, σ prodlouženou stranu obdélníka, t. j. přímku.

Vyslovíme tedy poučku:

III. **Dvě různé roviny, které mají společný bod, mají společnou přímku. Mimo tu přímku již nemají žádný další společný bod.**

Druhá věta poučky III plyne z poučky II, neboť dvě roviny, které mají mimo společnou přímku ještě společný bod, splynou.

Dvě různé roviny se společnou přímkou se nazývají různoběžné a společná přímka se jmenuje jejich průsečnice. Které pojmy z planimetrie vám připomínají tyto názvy?

Poučky I, II, III jsou základní věty stereometrické. Jejich obsah je přímo patrný z názoru. Budeme se k nim často vracet a s jejich pomocí dokazovat jiné věty ze stereometrie, hlavně takové, jejichž správnost si nemůžeme přímo z názoru ověřit.

Cvičení.

55. Je dán trojúhelník ABC. Spojíme kterékoli dva různé body na jeho obvodě přímkou. Co vyplní všecky takové přímky? Odůvodněte své tvrzení.

56. Stěny, podlaha a strop třídy jsou části šesti rovin. Řekněte, které z těch šesti rovin jsou různoběžné a jaké mají průsečnice.

57. Stojí stůl s třemi nohami pevně na rovné podlaze, i když nohy nejsou stejně dlouhé? Stůl se čtyřmi nestejně dlouhými nohami má být pevně postaven na rovné podlaze: kolik noh a které je třeba podložiti? Odůvodněte své odpovědi geometricky.

58. Vysvětlete geometricky, jak poznáme, zda stěna místnosti je rovná či nikoli, osvětlíme-li ji žárovkou, která je těsně u stěny. (Světelné paprsky jsou přímé.)

59. Přímka se pohybuje tak, že jde pevným bodem A a protíná pevnou přímku p, která neobsahuje bod A. Co vyplní všecky polohy pohybující se přímky?

60. Bodem Q roviny ϱ prochází přímka p, která neleží v rovině ϱ. Přímka p je osvětlena svítícím bodem S, který leží mimo rovinu ϱ i mimo přímku p. Co je vrženým stínem přímky p na rovinu ϱ? Vysvětlete geometricky.

61. Na obr. 33 je znázorněna krychle s podstavou $ABCD$ a střed M její horní stěny. a) Které roviny jsou určeny body A, B, C, D, M? Zapište je. b) Které z těch rovin splynou? c) Které z nich jsou různoběžné? Pokud dovedete, zapište jejich průsečnici.

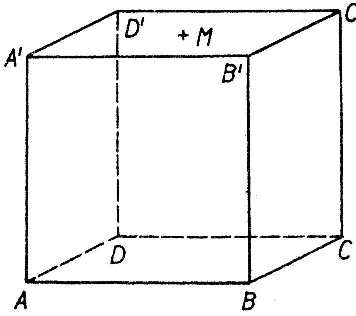
62. Obr. 33. Opakujte cvičení 61 s body B, D, A', C', M.

***63.** Obr. 33. Opakujte cvičení 61 s body A', C', M, B', B.

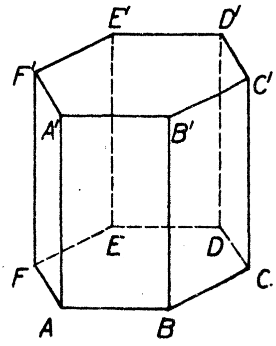
64. Na obr. 34 vidíte hranol šestiboký. Popište jej a opakujte cvičení 61 s body A, B, C, D, F, A'.

Průsek roviny s tělesem.

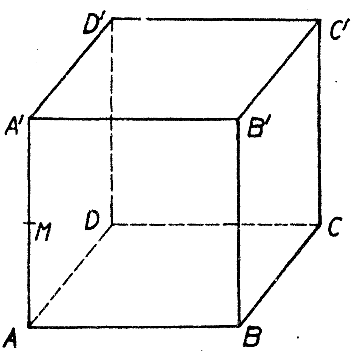
65. Na obr. 35 je znázorněna krychle. V kterých přímkách protínají rovinu stěny $A'B'C'D'$ roviny $BB'A'$ a $BB'D'$? Zapište je.



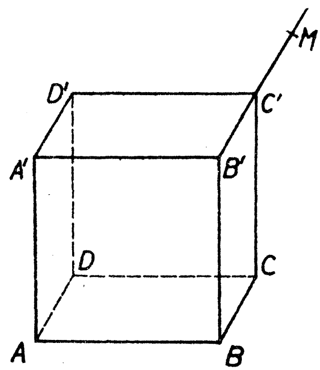
Obr. 33.



Obr. 34.



Obr. 35.



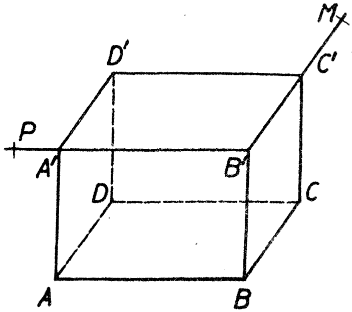
Obr. 36.

66. Obr. 35. Vrcholy A', B, C' zobrazené krychle je položena rovina. V kterých přímkách protíná roviny horní, přední a pravé stěny? Nakreslete náčrtek podle obrázku a zakreslete průsek.

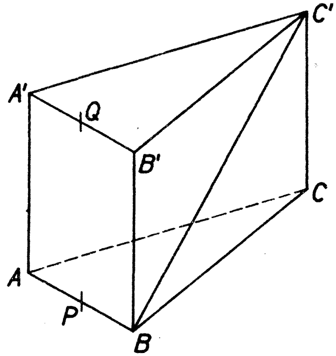
67. Obr. 35. M je střed hrany AA'. Každá stěna krychle leží v jedné rovině. a) Které z těch šesti rovin protíná rovina $\varrho = BD'M$? b) Určete průsečnici rovin ϱ, ABA'. Mají roviny ϱ, ABA', $A'B'D'$ společný bod? Nakreslete náčrtek podle obr. 35 a zakreslete tam ten společný bod. c) Když jste rozřešili úlohu b), určete průsečnici rovin ϱ, $A'B'D'$.

68. Na obr. 36 je zobrazena krychle a na prodloužené hraně $B'C'$ bod M tak, že $\overline{C'M} = \overline{B'C'}$. a) Určete přímky, v kterých rovina $A'BM$ protíná roviny přední, horní a pravé stěny. b) Zobrazte krychli podle obr. 36 a zakreslete průsek roviny $A'BM$ s krychlí. c) Vypočtěte strany trojúhelníka $A'BM$, je-li dána hrana krychle $a = 4$ cm. d) Vypočtěte obvod průsečného čtyrúhelníka.

***69.** Obr. 37. a) Určete přímky, v kterých protíná rovina $\varrho = BMP$ roviny horní, přední a pravé stěny zobrazeného kvádru. b) Které body roviny ϱ leží na hranách AA', $A'D'$, $C'D'$ a CC'? Určete přímky, v kterých rovina ϱ protíná roviny levé a zadní stěny. Načrtněte podle obr. 37 a zakreslete průsek.



Obr. 37.



Obr. 38.

***70.** Na obr. 38 je znázorněn trojboký hranol. P, Q jsou středy hran AB, $A'B'$. a) Přímkou BC položte roviny ϱ, σ, τ tak, aby obsahovaly po řadě body A, A', Q. Načrtněte podle obr. 38 a zakreslete průsečnice rovin ϱ, σ, τ s rovinou stěny $ABB'A'$. b) Je možné položiti přímkou BC' takovou rovinu, aby obsahovala hranu AA'?

***71.** Obr. 38. Přímkou BC' položte rovinu tak, aby její průsečnice p s rovinou stěny $ABB'A'$ byla rovnoběžná s přímkou $A'P$. Načrtněte a zakreslete průsečnici p.

2. Rovina kolmá k přímce. Tělesová úhlopříčka kvádru.

Na obr. 39 je zobrazena přímka k, na ní bod P a bodem P je vedena přímka m kolmá k přímce k. Představte si, že přímka k má pevnou polohu a přímka m se kolem ní otáčí jako kolem osy. Přímka m zaujme postupně různé polohy m_1, m_2, m_3 atd. Zřejmě je $m_1 \perp k$, $m_2 \perp k$, $m_3 \perp k$, ovšem ve skutečnosti. Na obrázku nemohou být všecky pravé úhly zobrazeny jako pravé.

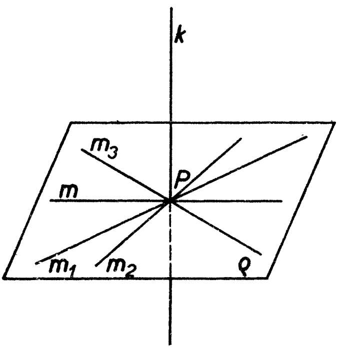
Všecky polohy otáčející se přímky m vyplní jistou rovinu; na obr. 39 je označena ϱ. Každá přímka vedená bodem P a kolmá k přímce k vznikne otočením přímky m, a proto leží v rovině ϱ.

Tato věta se dá přesně dokázati. Důkaz však nebudeme provádět, uvedeme si jen názorný příklad: je to pohyb dolní hrany křídla otáčivých dveří (obr. 30), přiléhá-li ovšem k rovné podlaze.

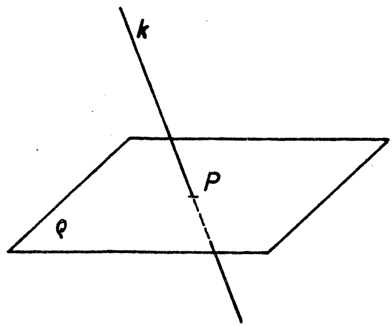
Vyslovíme tedy poučku:

IV. **Je dána přímka k a na ní bod P. Všecky přímky kolmé k přímce k a procházející bodem P vyplní jistou rovinu ϱ. Tato rovina se jmenuje rovina kolmá k přímce k v bodě P. Označení je $\varrho \perp k$ nebo $k \perp \varrho$.**

Každým bodem dané přímky prochází tedy jediná rovina kolmá k dané přímce. Bod P se zpravidla nazývá pata kolmice.



Obr. 39.



Obr. 40.

Základní otázka týkající se kolmosti přímky a roviny je tato: je dána rovina ϱ a v ní bod P: jím prochází přímka k, která v rovině ϱ neleží (obr. 40). Jak poznáme, zda je $\varrho \perp k$ či nikoli? Podle definice kolmosti bychom měli zkoumat vzájemnou polohu přímky k a **všech** přímek roviny ϱ, které jdou bodem P. To však není třeba; stačí zkoumati **dvě** přímky, které jdou bodem P. Platí totiž věta:

V. **Má-li přímka k s rovinou ϱ společný bod a je-li kolmá ke dvěma různoběžkám roviny ϱ, které jdou tím bodem, pak je $\varrho \perp k$.**

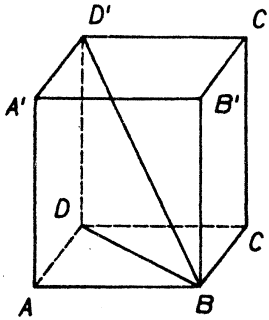
Poučku V dokážeme takto: obě různoběžky označíme a, b; rovina, která vznikne otáčením přímky a kolem přímky k, obsahuje přímku b (proč?). Podle poučky II b však prochází přímkami a, b jediná rovina, a to je rovina ϱ. **Rovina ϱ tedy vznikne otáčením přímky a kolem přímky k, a proto je $\varrho \perp k$.**

Na obr. 41 je zobrazen kvádr $ABCDA'B'C'D'$. Přímka DD' je kolmá k rovině podstavy $ABCD$ (krátce říkáme, že hrana DD' je kolmá k podstavě). Neboť je $DD' \perp AD$, $DD' \perp CD$; AD, CD jsou dvě různoběžky roviny $ABCD$. Protože je hrana DD' kolmá k podstavě, je také $DD' \perp DB$. Trojúhelník BDD' je ve skutečnosti — nikoli na obrázku — pravoúhlý a s jeho pomocí dovedeme řešit úlohy o tělesové úhlopříčce kvádru.

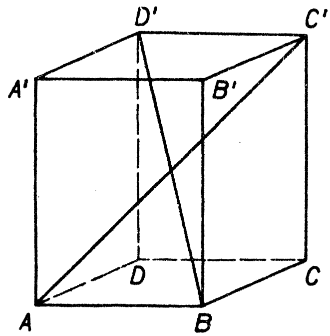
Tělesovou úhlopříčkou kvádru nazýváme spojnici takových dvou vrcholů, které neleží v téže stěně. Kvádr má čtyři tělesové úhlopříčky: v označení z obr. 41 jsou to úsečky AC', BD', CA', DB'. Každá z nich je přeponou pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna je úhlopříčka podstavy a druhá odvěsna je některá hrana kolmá k podstavě. Jsou to pravoúhlé trojúhelníky: ACC', BDD', CAA', DBB'. Protože kterákoli stěna kvádru může být jeho podstavou, máme tento výsledek:

VI. **Každá tělesová úhlopříčka kvádru je přeponou pravoúhlého trojúhelníka; jeho jedna odvěsna je některá hrana kvádru,** (kterýkoli rozměr) **druhá odvěsna je úhlopříčka stěny kolmé k této hraně.**

Pravoúhlé trojúhelníky ACC', BDD', CAA', DBB' jsou navzájem shodné podle věty *sus* (vyložte). Proto jsou všecky tělesové úhlopříčky kvádru stejně dlouhé.



Obr. 41.



Obr. 42.

Označíme-li rozměry kvádru obvyklým způsobem $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CC'} = c$, pak je podle věty Pythagorovy $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{AC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CC'}^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Délka tělesové úhlopříčky kvádru s rozměry a, b, c je tedy $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Pro krychli platí $a = b = c$; délka její tělesové úhlopříčky je $\sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

Známe již skupinu těles zvaných **hranoly**. Víme, co jsou podstavy hranolu, co pobočné stěny, který hranol se nazývá kolmý, který kosý (jsou-li všecky pobočné stěny pravoúhlé rovnoběžníky, je hranol kolmý, jinak je kosý). Co znamená název hranol n-boký? Který hranol se nazývá pravidelný? Jsou kvádr a krychle hranoly pravidelné? (Krychle ano, kvádr jen tehdy, je-li některá jeho stěna čtverec.)

Každá pobočná hrana kolmého hranolu je kolmá k podstavě. Pobočná hrana je totiž stranou dvou sousedních pobočných stěn, t. j. obdélníků, a je tedy kolmá k dvěma sousedním hranám podstavy. Ověřte si to na př. pro hranu AA' na obr. 34.

Cvičení.

72. Kvádr má rozměry a) 2, 3, 6 cm; b) 2,5, 3,1, 1,2 cm; vypočtěte délku tělesové úhlopříčky.

73. Kvádr má rozměry 3 cm, 4 cm, 5 cm; určete délku jeho tělesové úhlopříčky konstrukcí. Výsledek zkontrolujte výpočtem.

74. Uvnitř obdélníkového bloku domů o délce 50 m a šířce 35 m má montér napnouti telefonní drát z jednoho rohu z výše 24 m do protějšího rohu do výše 9 m. Stačí mu kus drátu dlouhý 62 m? Načrtněte si příslušný obrázek a vypočtěte.

75. Krychle má hranu 5 cm. Určete délku její tělesové úhlopříčky a) výpočtem, b) konstrukcí.

76. Krychle má stěnovou úhlopříčku 10 cm. Vypočtěte délku tělesové úhlopříčky. Sestrojte ji.

77. Kvádr má tělesovou úhlopříčku 15 m a dva rozměry 6 m, 10 m. a) Vypočtěte třetí rozměr. b) Určete jej sestrojením ve vhodném měřítku.

***78.** Kvádr má stěnové úhlopříčky $\sqrt{136}$, $\sqrt{261}$ a tělesovou úhlopříčku 19. Všecky délky jsou dány v decimetrech. Vypočtěte rozměry kvádru.

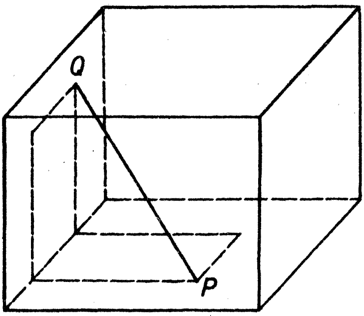
79. Kvádr má stěnové úhlopříčky 7 cm, 8 cm a tělesovou úhlopříčku 10 cm. Určete konstrukcí jeho rozměry. Výsledek zkontrolujte výpočtem.

80. Obr. 41. Kvádr má za podstavu čtverec $ABCD$ o straně $\overline{AB} = 6$ cm. Jeho tělesová úhlopříčka BD' má dvojnásobnou délku hrany DD'. Vypočtěte délku této hrany.

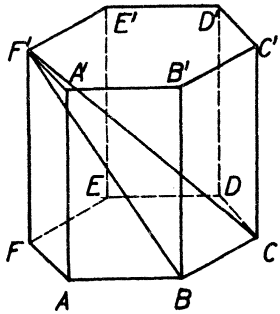
81. Obr. 42. Kolmý hranol čtyrboký má za podstavu kosočtverec $ABCD$, jehož strana je $\overline{AB} = 5$ cm a úhel $\sphericalangle DAB = 60°$. Pobočná hrana má délku $\overline{CC'} = 8$ cm. Určete délky jeho tělesových úhlopříček AC', BD' a) konstrukcí, b) výsledek zkontrolujte výpočtem.

***82.** Dokažte: každá stěnová úhlopříčka kvádru je kratší než jeho tělesová úhlopříčka.

***83.** Dokažte: vzdálenost každých dvou bodů P, Q na povrchu kvádru je buď menší nebo rovna délce jeho tělesové úhlopříčky. Návod: uvažte dva případy: oba body jsou v téže stěně kvádru nebo v různých stěnách. V druhém případě lze jejich spojnici pokládati za tělesovou úhlopříčku jiného kvádru (viz obr. 43).



Obr. 43.



Obr. 44.

***84.** Lze umístit tyč délky 1,4 m do bedny o rozměrech 1,2 m, 0,5 m, 0,4 m?

***85.** V krychlové nádržce o hraně 50 cm (obr. 43) je umístěna kovová tyč délky 80 cm tak, že jeden její konec je ve vrcholu A nádržky a druhým se opírá o hranu CC'. Jak vysoko je třeba napustiti vodu, aby byla celá tyč ponořena?

***86.** Na obr. 44 je znázorněn pravidelný hranol šestiboký. a) Jsou dány délky $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AA'} = 7$ cm. Vypočtěte délku tělesové úhlopříčky CF'. b) Z rozměrů jako v a) určete délku tělesové úhlopříčky BF' konstrukcí.

3. Kolmice vztyčená k rovině.

Dosud jsme sestrojovali rovinu kolmou k dané přímce. Nyní si rozřešíme úlohu opačnou: je dána rovina ϱ a v ní bod P; tím bodem chceme vést přímku k kolmou k rovině ϱ. Popíšeme si podle obr. 46, jak takovou přímku sestrojíme. Někdy říkáme, podobně jako v planimetrii, že vztyčujeme kolmici v bodě P k rovině ϱ.

V rovině ϱ vedeme bodem P libovolnou přímku m; k přímce m sestrojíme kolmici q v bodě P. Otáčíme přímku q kolem přímky m; otáčející se přímka q vyplní jistou rovinu; označíme si ji σ. V rovině σ sestrojíme v bodě P kolmici k k přímce q. k je hledaná přímka, neboť $\sigma \perp m$, a proto $k \perp m$. Ježto je také $k \perp q$, je $k \perp \varrho$; m, q jsou totiž dvě různoběžky roviny ϱ.

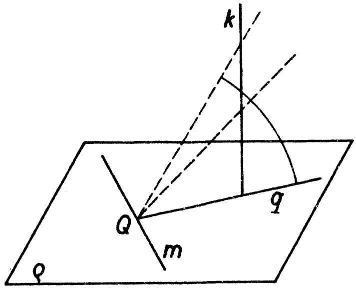
Způsobu, který byl popsán geometricky, lze použít na př. k vztyčení stožáru kolmého k vodorovné rovině; popište sami jeho provedení.

Při vztyčení kolmice jsme vyšli od určité přímky m roviny ϱ a dostali jsme jedinou kolmici $k \perp \varrho$. Musíme si ovšem ještě zjistiti, zda nedojdeme k jiné kolmici, vyjdeme-li z jiné přímky m'. Dejme tomu, že jsme vyšli z jiné přímky m' a dostali jsme popsaným způsobem kolmici $k' \perp \varrho$. Pak je ovšem také $k' \perp m$ (proč?) a tedy k' leží v rovině σ. Zároveň je však $k' \perp q$ (proč?). V rovině σ však prochází bodem P jediná přímka kolmá k přímce q; proto k, k' splynou.

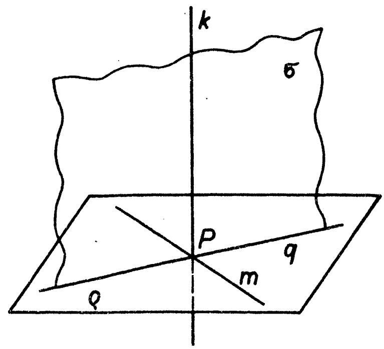
Máme tedy výsledek:

V bodě roviny lze vztyčiti k této rovině jedinou kolmici.

Všimněme si ještě, že sestrojení přímky k se skládá ze dvou rovinných konstrukcí: sestrojíme nejdříve v rovině ϱ přímku q a pak v rovině σ přímku k. Při řešení prostorových úloh postupujeme vždycky tak, že si danou úlohu prostorovou rozkládáme na několik úloh, z nichž každá je rovinná. Všímejte si této zásady i v dalších výkladech.



Obr. 45.



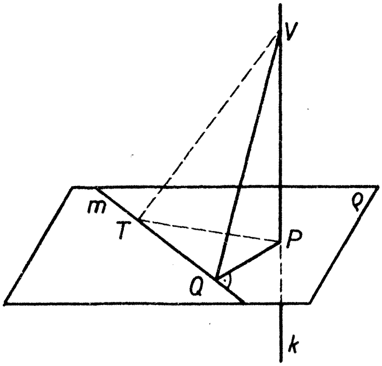
Obr. 46.

Probereme si ještě jednu vlastnost přímky kolmé k rovině. Obr. 45. Ve (vodorovné) rovině ϱ leží stožár q spojený s kolmým trámem m. Ležící stožár q prochází patou jiného stojícího stožáru $k \perp \varrho$. Budeme-li vztyčovat stožár q otáčením kolem trámu m, bude se při tom stožár q smýkat po stojícím stožáru k.

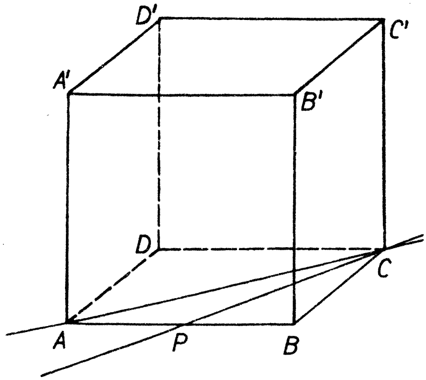
Vyslovíme tuto vlastnost geometricky: různé polohy vztyčovaného stožáru q představují kolmice spuštěné z různých bodů přímky $k \perp \varrho$ na přímku m. Podle předcházejícího výkladu jsou paty všech těchto kolmic v témž bodě přímky m (na obr. 45 je označen Q). Dostáváme tedy poučku:

VII. **Máme-li v rovině ϱ přímku m a máme-li dále přímku $k \perp \varrho$, pak kolmice spuštěné ze všech bodů přímky k na přímku m mají touž patu.**

Správnost této poučky není bezprostředně patrná z názoru, ale dovedeme ji dokázati. Ihned si ji ověříte v případě, že přímka m prochází patou kolmice $k \perp \varrho$; proveďte to!



Obr. 47.



Obr. 48.

V jiném případě ji dokážeme podle obr. 47 takto: označíme P průsečík přímky k s rovinou ϱ, Q patu kolmice q spuštěné z bodu P na přímku m. Na přímce k zvolíme libovolný bod $V \neq P$ a na přímce m libovolný bod $T \neq Q$. Trojúhelníky PVQ, PVT jsou oba pravoúhlé, mají společnou odvěsnu PV a o jejich druhých odvěsnách platí $\overline{PT} > \overline{PQ}$, neboť PT je přepona pravoúhlého trojúhelníka PQT a PQ je jeho odvěsna. Pythagorova věta pro trojúhelníky PVQ a PVT dává

$$\overline{VT}^2 = \overline{PV}^2 + \overline{PT}^2, \qquad \overline{VQ}^2 = \overline{PV}^2 + \overline{PQ}^2.$$

Protože pravá strana první rovnice je větší číslo než pravá strana druhé rovnice, je také $\overline{VT} > \overline{VQ}$. To znamená, že Q je bod přímky m nejbližší bodu V čili pata kolmice spuštěné z bodu V na přímku m v rovině Vm. A to jsme právě chtěli dokázati.

Cvičení.

87. Je dána přímka p a bod A mimo ni. Kolik rovin kolmých k přímce p lze vést bodem A a jak je dostaneme? Návod: spusťte z bodu A kolmici na přímku p.

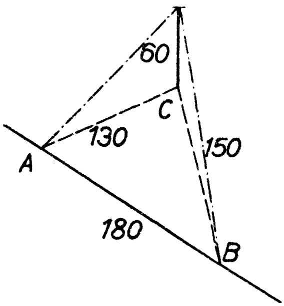
88. Obr. 48. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. a) Pata kolmice spuštěné z vrcholu B' na přímku AC je střed podstavy $ABCD$. Dokažte! Návod: spusťte kolmici z vrcholu B na přímku AC a použijte poučky VII. b) Vypočtěte vzdálenost bodu B' od přímky AC, je-li dána hrana krychle 4 cm.

89. Obr. 48. P je střed hrany AB. Určete konstruktivně vzdálenost vrcholu D' zobrazené krychle od přímky CP. Návod: spusťte z bodu D kolmici na CP a použijte poučky VII.

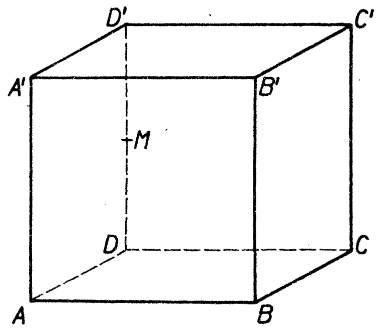
90. Obr. 49. Ve vodorovném terénu jsou tři body A, B, C ($\overline{AB} = 180$ m, $\overline{BC} = 150$ m, $\overline{CA} = 130$ m). Body A, B spojuje přímá silnice, v bodě C stojí věž vysoká 60 m. Který bod silnice je nejblíže vrcholu věže a jak je od něho vzdálen? Proveďte konstruktivně v měřítku 1 : 2000.

91. Geometrické místo bodů v prostoru, které mají stejné vzdálenosti od dvou daných bodů A, B, je rovina kolmá k přímce AB a procházející středem úsečky AB. Dokažte s použitím vlastností osy úsečky.

Tato rovina se nazývá r o v i n a s o u m ě r n o s t i úsečky AB.



Obr. 49.



Obr. 50.

92. Obr. 50. a) Dokažte, že rovina souměrnosti úhlopříčky AC zobrazené krychle obsahuje vrcholy B, B', D, D'. b) Jaká je vzájemná poloha hran BB', DD'? [Použijte výsledku a).]

***93.** Obr. 50. Dokažte, že rovina souměrnosti hrany BB' obsahuje středy hran AA', CC' i střed M hrany DD'. Pro bod M použijte toho, že $BB'D'D$ je obdélník.

4. Rovnoběžky v prostoru. Střed kvádru.

V planimetrii jsme se seznámili s pojmem rovnoběžek. Zopakujeme si: Které přímky nazýváme v rovině rovnoběžné? (Nezapomeňte při tom na přímky splývající.) Jak značíme rovnoběžnost přímek a, b? Kolik rovnoběžek s danou přímkou lze vést bodem roviny? Je-li $a \parallel b$, $b \parallel c$, co platí o vzájemné poloze přímek a, c?

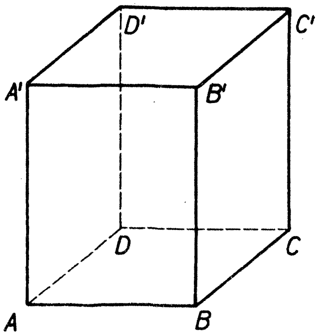
O dvou přímkách v prostoru říkáme, že jsou r o v n o b ě ž n é, jestliže leží v jedné rovině a jsou-li v té rovině rovnoběžné.

Dvě splývající přímky jsou podle vyslovené definice rovnoběžné také v prostoru. Dvě různé rovnoběžky leží v jediné rovině, neboť přímkou a bodem ležícím mimo ni prochází podle poučky II jediná rovina. K dané přímce a lze vést daným bodem P v prostoru jedinou rovnoběžku. Ta rovnoběžka buď splývá s danou přímkou, nebo leží v rovině Pa.

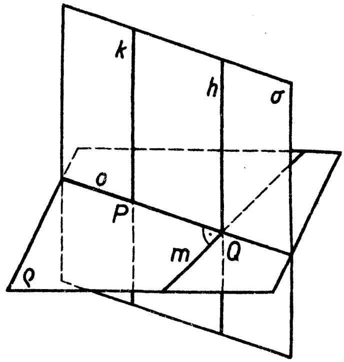
Na obr. 51 je opět zobrazen kvádr. Jsou rovnoběžné přímky AB, $A'B'$? AD, BC? AB, $B'C'$? Odůvodněte svá tvrzení. O kterých hranách můžeme říci bezpečně, že jsou rovnoběžné s hranou AA'?

Podle názoru řekneme, že hrany AA', CC' jsou rovnoběžné. To je skutečně správné, neboť platí poučka:

VIII. **Každé dvě kolmice k téže rovině jsou navzájem rovnoběžné.**



Obr. 51.



Obr. 52.

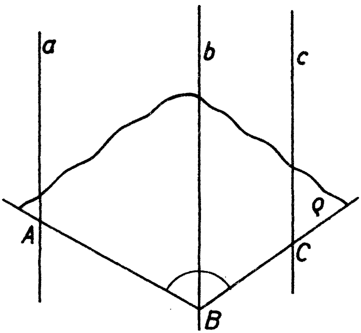
Také tuto poučku dovedeme dokázati. Jestliže obě kolmice splývají, není co dokazovati. Jsou-li obě kolmice různé, pak vycházejí ze dvou různých bodů P, Q roviny ϱ (obr. 52). Označíme si přímku PQ písmenem o, kolmici vztyčenou v bodě P k rovině ϱ písmenem k. V bodě Q sestrojíme v rovině ϱ přímku $m \perp q$. Kolmice spuštěné z bodů přímky k na přímku m mají podle poučky VII společnou patu Q a vyplňují tedy rovinu $\sigma = Qk$. Zřejmě je $\sigma \perp m$. Sestrojíme-li tedy v rovině σ bodem Q přímku $h \parallel k$, je jednak $h \perp q$, jednak $h \perp m$ (proč?), t. j. $h \perp \varrho$. Přímky k, h, kolmé k rovině ϱ v bodech P, Q, jsou tedy rovnoběžné.

Na začátku kapitoly jsme si zopakovali, že rovnoběžky v rovině mají tuto vlastnost: je-li $a \parallel b$, $b \parallel c$, pak je $a \parallel c$. Ta vlastnost zůstává zachována i v prostoru. Platí tedy věta:

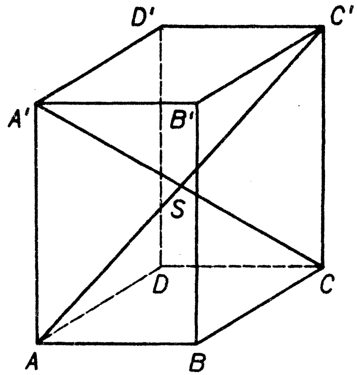
IX. **Jsou-li a, b, c tři přímky v prostoru a je-li každá z přímek a, c rovnoběžná s přímkou b, jsou obě přímky a, c rovnoběžné navzájem.**

Důkaz provedeme podle obr. 53. Zde jsou zobrazeny přímky a, b, c, o nichž víme, že $a \parallel b$, $b \parallel c$. Na přímce b si zvolíme bod B a jím položíme rovinu $\varrho \perp b$. Rovina ϱ

protne přímky a, c v bodech A, C. Kolmice vztyčené v bodech A, C k rovině ϱ jsou obě rovnoběžné s přímkou b (podle poučky VIII), a jsou to tedy přímky a, c. Obě přímky a, c jsou kolmé k téže rovině ϱ, a tedy rovnoběžné.



Obr. 53.



Obr. 54.

Jako důsledek poučky VIII odvodíme další vlastnost kvádru. Všimneme si znovu kvádru z obr. 54. Čtyrúhelník $ACC'A'$ je pravoúhlý rovnoběžník, neboť body A, A', C, C' leží v rovině, $AA' \perp AC$, $CC' \perp AC$, $\overline{AA'} = \overline{CC'}$. Úsečky AC', $A'C$ jakožto úhlopříčky rovnoběžníka $ACC'A'$ se navzájem půlí. Můžeme tedy říci, že každé dvě tělesové úhlopříčky kvádru se navzájem půlí, neboť z kterékoli stěny kvádru můžeme udělati podstavu.

Máme výsledek:

X. Všecky tělesové úhlopříčky kvádru procházejí jedním bodem a jsou jím půleny.

Ten bod je na obr. 54 označen S a nazývá se střed kvádru.

Na našich obrázcích jsou tělesa zobrazena způsobem, kterého užíváme v hodinách výtvarné výchovy. Z rýsování známe jiný způsob zobrazování těles: je to pravoúhlé promítání. To se však nehodí pro naše účely, neboť nedává dosti názorné obrázky. Způsob, kterým zobrazujeme tělesa v této učebnici, jmenuje se rovnoběžná perspektiva. S některými jeho vlastnostmi jsme se už seznámili: rovnoběžné přímky se zobrazují jako rovnoběžné přímky (odtud název rovnoběžná perspektiva). Rovnoběžné a navzájem stejně dlouhé úsečky se zobrazují jako rovnoběžné a navzájem stejně dlouhé úsečky, ovšem délka obrazu úsečky a úsečky samé může být různá. Také obraz úhlu není vždy úhel s ním stejně velký. Uveďte příklady.

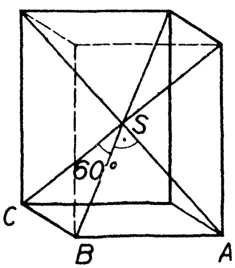
Úloha. Zobrazte kvádr podle obr. 54 a narýsujte všecky jeho tělesové úhlopříčky. Výsledek, který dostanete, je ve shodě s poučkou X. Je tomu tak proto, že při rovnoběžné perspektivě je obraz středu úsečky ve středu jejího obrazu.

Cvičení.

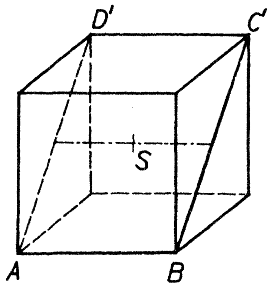
94. Obr. 44. Na pravidelném šestibokém hranolu vyhledejte všecky dvojice rovnoběžných hran a zapište je.

95. Dokažte, že žádné dvě tělesové úhlopříčky krychle nejsou k sobě kolmé. Návod: uvažte, jaký obrazec je na př. čtyrúhelník $AA'C'C$ v krychli z obr. 50.

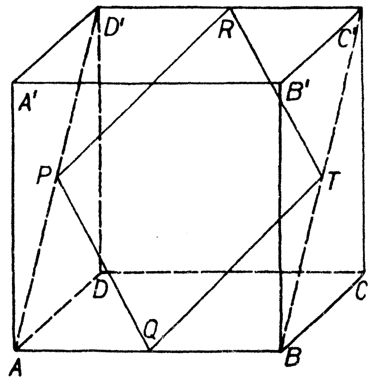
96. Kvádr (obr. 54) má za podstavu čtverec $ABCD$ o straně 5 cm. Určete konstrukcí délku pobočné hrany AA' tak, aby tělesové úhlopříčky AC', $A'C$ a) byly k sobě kolmé, b) svíraly úhel 60°.



Obr. 55.



Obr. 56.



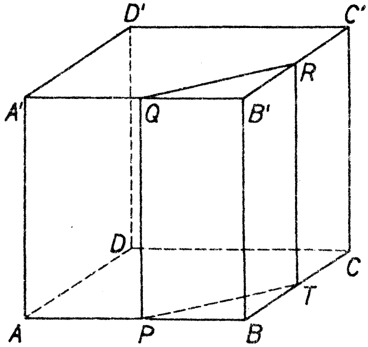
Obr. 57.

97. Obr. 55. Kvádr má hranu $\overline{AB} = 10$ cm. Tělesové úhlopříčky vycházející z vrcholů A, B jsou k sobě kolmé, tělesové úhlopříčky vycházející z vrcholů B, C svírají úhel 60°. Vypočtěte zbývající rozměry kvádru. Návod: vypočtěte nejprve délku tělesové úhlopříčky, pak hrany BC a nakonec třetí rozměr.

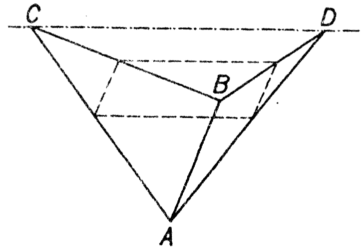
98. Dokažte, že střed kvádru půlí spojnici středů kterýchkoli dvou protějších stěn. Nakreslete náčrtek. Návod: dokazujte na př. pro stěny $ADD'A'$, $BCC'B'$ a použijte k tomu roviny $ABC'D'$. (Obr. 56.)

99. Na obr. 57 je zobrazena krychle, P, T jsou středy stěn $ADD'A'$ a $BCC'B'$, Q, R jsou středy hran AB, $C'D'$. Dokažte, že čtyrúhelník $PQTR$ je kosočtverec, a vypočtěte délku jeho strany, je-li hrana krychle 8 cm. Návod: čtyrúhelník $PQTR$ leží v rovině (v které?) a jeho strany jsou stejně dlouhé (proč?).

100. Na obr. 58 je zobrazena opět krychle, P, Q, R, T jsou po řadě středy hran AB, $A'B'$, $B'C'$, BC. Dokažte, že $PQRT$ je obdélník, a vyjádřete jeho obsah pomocí délky hrany krychle. Návod: dokažte s pomocí poučky IX, že $PQ \parallel RT$.



Obr. 58.



Obr. 59.

*101. Obr. 59. Trojúhelníky ABC, ABD mají společnou stranu AB, ale neleží v téže rovině. Spojíme po řadě středy stran AC, BC, BD, AD, AC podle obrázku. a) Dokažte, že dostaneme rovnoběžník. Návod: použijte vlastností střední příčky trojúhelníků ABC, ABD a poučky IX. b) Je dáno $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 3$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{AD} = 5$ cm, $\overline{BD} = 5$ cm, $\overline{CD} = 5{,}5$ cm. Vypočtěte obvod zmíněného rovnoběžníka.

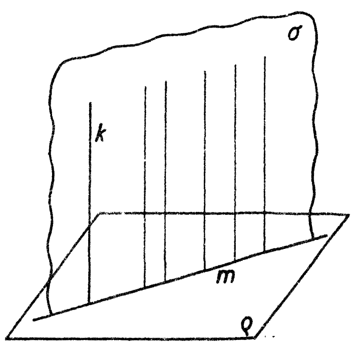
5. Roviny navzájem kolmé.

S kolmicí k rovině souvisí pojem kolmých rovin; s ním jsme se setkali při pravoúhlém promítání. Na obr. 60 vidíme rovinu ϱ a v ní přímku m. Vztyčíme-li ve všech bodech přímky m kolmice k rovině ϱ, pak tyto kolmice vyplní jistou rovinu. Označíme-li totiž k jednu z těch kolmic, je přímkami k, m určena podle poučky IIb jediná rovina σ; všecky ostatní kolmice vztyčené k rovině ϱ v bodech přímky m jsou podle poučky VIII rovnoběžné s k a leží tedy v rovině σ. Rovina σ se nazývá rovina kolmá k rovině ϱ, položená přímkou m. K vyznačení kolmosti dvou rovin užíváme označení $\sigma \perp \varrho$.

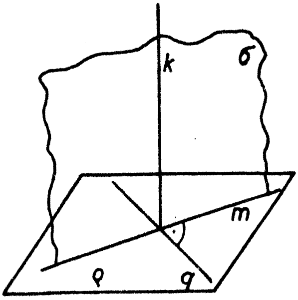
Názorný příklad kolmé roviny je tento: v rovném terénu je vyznačena přímka m; v bodech této přímky zarážíme do země svislé tyčky. Tyto tyčky leží v rovině; o tom se přesvědčí pozorovatel stojící v přímce m, neboť jemu se všecky tyčky kryjí.

Základní vlastnost kolmých rovin je vyjádřena poučkou:

XI. Obsahuje-li rovina σ aspoň jednu přímku kolmou k rovině ϱ, pak je rovina σ kolmá k rovině ϱ.



Obr. 60.

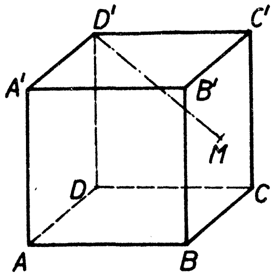


Obr. 61.

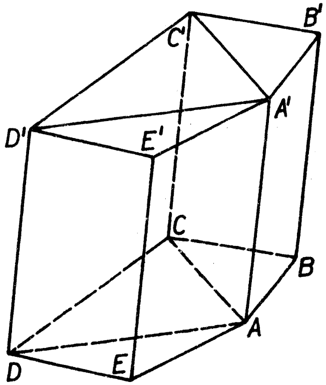
Názorný příklad: otvírající se dveře jsou stále kolmé k podlaze, neboť rovina těch dveří obsahuje ve všech polohách jednu přímku kolmou k podlaze, totiž osu, kolem které se dveře otáčejí.

Poučku XI snadno dokážeme. Obsahuje-li rovina σ přímku $k \perp \varrho$, pak roviny ϱ, σ jsou různoběžné podle poučky III. Jejich průsečnici označme m. Rovina kolmá k rovině ϱ, položená přímkou m, je podle předcházejícího výkladu právě rovina σ.

Na obr. 61 je znázorněna v rovině ϱ ještě přímka q kolmá k přímce m a procházející průsečíkem přímek k, m. Přímka q je kolmá k přímce k (proč?) a proto podle poučky V je $q \perp \varrho$. Podle poučky XI je tedy také rovina ϱ kolmá k rovině σ. To znamená, že **kolmost dvou rovin je vztah souměrný:** je-li $\sigma \perp \varrho$, je také $\varrho \perp \sigma$.



Obr. 63.



Obr. 62.

Na straně 11 jsme se naučili rozkládati n-úhelník na trojúhelníky. Podobně je možné rozložiti hranol n-boký na hranoly trojboké. Na obr. 62 je znázorněn takový rozklad pětibokého hranolu. Popište jej! Naznačeným způsobem se opravdu rozdělí pětiboký hranol ve tři hranoly trojboké, neboť každé dvě pobočné hrany hranolu — ať kolmého či kosého — jsou rovnoběžné, a proto jsou obrazce $ACC'A'$, $ADD'A'$ rovnoběžníky. U kolmého hranolu jsou všechny pobočné stěny (t. j. jejich roviny) kolmé k podstavě. Mohou být i u kosého hranolu některé pobočné stěny kolmé k podstavě? Popište takový hranol.

Cvičení.

102. Vyhledejte mezi stěnami, stropem a podlahou školní místnosti všecky dvojice kolmých rovin. Popište rovinu kolmou k podlaze, která není stěnou místnosti.

103. ϱ, σ, τ jsou tři takové roviny, že $\varrho \perp \sigma$, $\sigma \perp \tau$ a ϱ, τ jsou různoběžné. Dokažte, že průsečnice rovin ϱ, τ je kolmá k rovině σ. Jako model si postavte pootevřenou knihu s tuhými deskami na stůl. Návod k řešení: některým bodem na průsečnici rovin ϱ, τ veďte v obou rovinách kolmici k rovině σ.

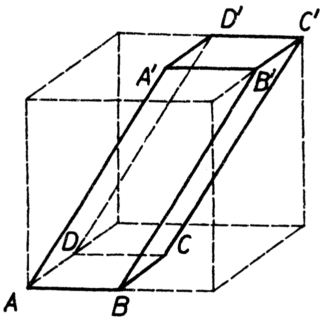
104. Obr. 58. Dokažte, že rovina stěny $ABCD$ zobrazené krychle a rovina obdélníka $PQRT$ jsou k sobě kolmé.

105. Obr. 58. Dokažte, že roviny obdélníků $ACC'A'$ a $BB'D'D$ jsou k sobě kolmé.

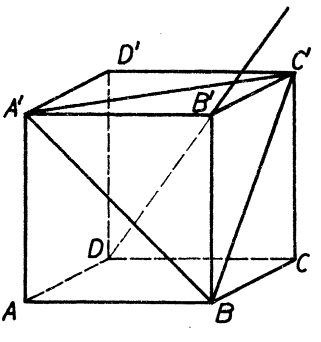
106. Přímka a leží mimo rovinu ϱ. Co vyplní přímky kolmé k rovině ϱ protínající přímku a? Což je-li $a \perp \varrho$? Vysvětlete, jak sestrojíme pravoúhlý průmět přímky do roviny.

107. Obr. 63. M je střed stěny $BCC'B'$ zobrazeného kvádru. Načrtněte pravoúhlé průměty úsečky $D'M$ do rovin ABC, $AA'D$. Sestrojte oba průměty ve skutečné velikosti.

108. Obr. 64. Body A', C jsou středy protějších stěn znázorněné krychle, B, D, B', D' jsou středy hran. Spojíme body A, A', B, B', C, C', D, D' podle obrázku. Načrtněte pravoúhlé průměty vzniklého tělesa do rovin ABC, ABB'. Sestrojte tyto průměty ve skutečné velikosti.



Obr. 64.



Obr. 65.

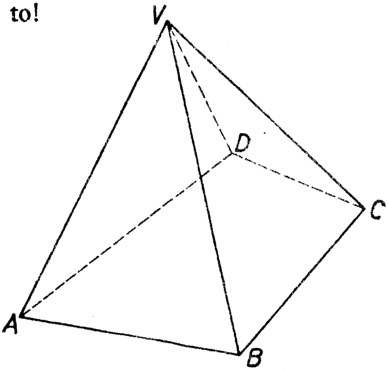
***109.** Nad trojúhelníkovou dřevěnou podlážku má býti vztyčen stan tak, aby vrchol se dal upevnit třemi stejně dlouhými tyčemi opřenými v rozích podstavy. Jak najdete vrchol? (Použijte cvičení 91 a 103).

***110.** Obr. 65. Dokažte, že přímka $B'D$ je kolmá k rovině $A'BC'$. Návod: použijte výsledku cvičení 109 na trojúhelník $A'BC'$.

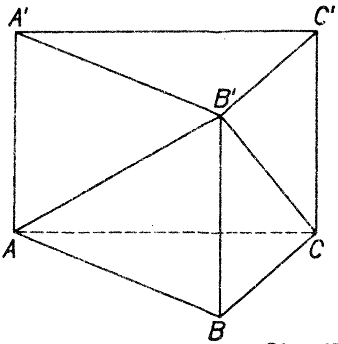
6. Jehlany.

Jehlan vytvoříme takto: v rovině (třeba vodorovné) narýsujeme nějaký mnohoúhelník; na obr. 66 je zobrazen čtyrúhelník $ABCD$. Mimo rovinu toho mnohoúhelníka zvolíme bod V a spojíme jej s vrcholy A, B, C, D. Čtyrúhelník $ABCD$ a trojúhelníky ABV, BCV, CDV, DAV omezují těleso, zvané jehlan.

Jmenujte na jehlanu z obr. 66 podstavu, pobočné stěny, pobočné hrany. Který jehlan nazýváme n-boký? Chceme-li odlišiti vrchol proti podstavě (V) od ostatních vrcholů, nazýváme jej vrchol hlavní. Trojboký jehlan se jmenuje čtyrstěn. Čtyrstěn lze pokládat čtverým způsobem za jehlan; vyložte to!



Obr. 66.



Obr. 67.

Nejčastěji se setkáváme s jehlany pravidelnými. Jehlan je pravidelný, je-li jeho podstava pravidelný mnohoúhelník a všecky jeho pobočné stěny rovnoramenné trojúhelníky. Jehlan, jehož všecky stěny jsou rovnostranné trojúhelníky, jmenuje se pravidelný čtyrstěn.

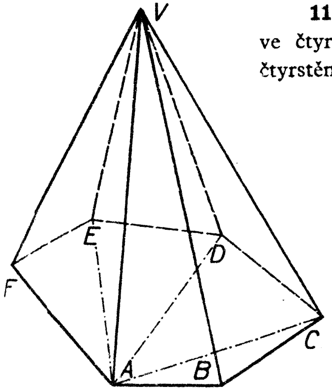
Pobočné hrany pravidelného jehlanu jsou stejně dlouhé, pobočné stěny jsou shodné trojúhelníky. Všecky hrany pravidelného čtyrstěnu jsou stejně dlouhé, všecky jeho stěny jsou shodné trojúhelníky. Jaký je rozdíl mezi pravidelným čtyrstěnem a pravidelným jehlanem trojbokým?

Na obr. 67 je od trojbokého hranolu oddělen rovinou $AB'C$ čtyrstěn $ABCB'$. Zbývající část hranolu je jehlan $ACC'A'B'$ s podstavou $AA'C'C$. Rozložte tento jehlan ve čtyrstěny a zapište je.

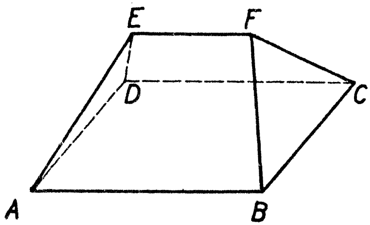
Každý jehlan n-boký lze rozložiti ve čtyrstěny. Popište takový rozklad podle obr. 68. Také každý hranol lze rozložit ve čtyrstěny: hranol rozložíme nejprve v samé hranoly trojboké a každý z nich ve tři čtyrstěny.

Cvičení.

111. Obr. 69. Těleso tvaru hromádky štěrku rozložte ve čtyrstěny a nakreslete náčrtek podle obr. 69. Zapište ty čtyrstěny. Návod: oddělte nejprve jehlan čtyrboký.

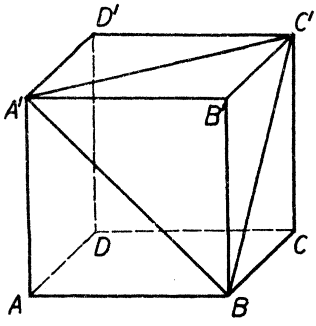


Obr. 68.

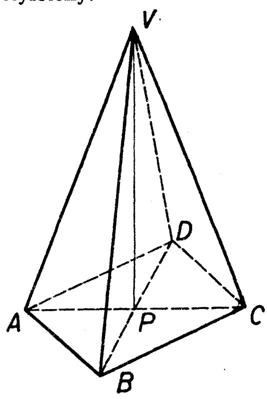


Obr. 69.

112. Obr. 70. Od krychle je oddělen rovinou $A'BC'$ čtyrstěn $A'BC'B'$. a) Dokažte, že ten čtyrstěn je pravidelný jehlan trojboký. b) Zbývající část krychle rozložte ve čtyrstěny a zapište je. Je některý z nich pravidelný? Návod: rozdělte krychli nejdříve řezem $ACC'A'$ na dva trojboké hranoly a každý z nich ve čtyrstěny.



Obr. 70.

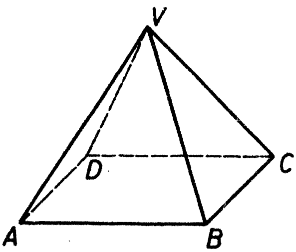


Obr. 71.

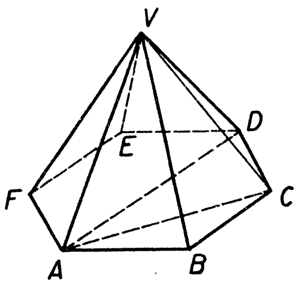
113. Na obr. 71 je zobrazen čtyrboký jehlan $ABCDV$. Jeho podstava je rovnoběžník $ABCD$ a jeho protější pobočné hrany jsou stejně dlouhé, t. j. $\overline{AV} = \overline{CV}$, $\overline{BV} = \overline{DV}$. Dokažte, že spojnice vrcholu V s průsečíkem úhlopříček podstavy je kolmá k rovině podstavy. Použijte k tomu té vlastnosti, že přímka PV je průsečnicí rovin ACV, BDV.

114. Obr. 72. V pravidelném jehlanu čtyrbokém je řez ACV trojúhelník pravoúhlý. Vyjádřete délku pobočné hrany pomocí délky hrany podstavy. Jaké trojúhelníky jsou pobočné stěny?

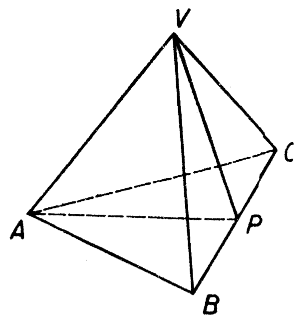
115. Opakujte cvičení 114, je-li trojúhelník ACV rovnostranný.



Obr. 72.



Obr. 73.



Obr. 74.

116. Obr. 73. V pravidelném jehlanu šestibokém je a) řez ADV, b) řez ACV trojúhelník rovnostranný. Vyjádřete délku hrany podstavy pomocí délky pobočné hrany.

117. Opakujte cvičení 116, jsou-li uvedené řezy trojúhelníky pravoúhlé.

118. Na obr. 74 je znázorněn pravidelný jehlan trojboký s hlavním vrcholem V, P je střed jeho hrany BC. Jaký je vztah mezi délkou hrany podstavy a a pobočné hrany b, je-li trojúhelník APV rovnoramenný a) s temenem A, b) s temenem P, c) s temenem V?

P o v r c h j e h l a n u je souhrn všech jeho stěn. Místo obsah povrchu říkáme stručně také jen povrch.

119. Vypočtěte povrch pravidelného jehlanu a) trojbokého, b) čtyrbokého, je-li dána hrana podstavy $a = 5$ cm, pobočná hrana $b = 7$ cm.

120. Stan má tvar pravidelného jehlanu čtyrbokého, jehož pobočné stěny jsou rovnostranné trojúhelníky; k jeho zhotovení bylo spotřebováno 8 m^2 plátna. Jak velký čtverec půdy pokryje stan?

121. Střecha věže má tvar pravidelného jehlanu šestibokého; okapní hrana je dlouhá 4,5 m, pobočná 8,4 m. Kolik tašek je přibližně třeba k jejímu pokrytí, pokryje-li se 1 m^2 střechy 28 taškami?

7. Kolmice spuštěná z bodu na rovinu. Výška jehlanu.

Dokázali jsme už (str. 29), že v určitém bodě dané roviny lze vztyčit jedinou kolmici k této rovině. Také z bodu ležícího mimo rovinu lze spustit na tuto rovinu jedinou kolmici.

Na obr. 75 je znázorněna rovina ϱ, bod V ležící mimo ni a jistá přímka $k \perp \varrho$. Má-li bodem V procházeti přímka kolmá k rovině ϱ, musí být tato přímka podle poučky VIII rovnoběžná s přímkou k. Vedeme tedy bodem V rovnoběžku $h \parallel k$. Přímky h, k leží v nějaké společné rovině; označíme ji σ. Rovina σ je podle poučky XI kolmá k rovině ϱ, a proto je také přímka h kolmá k rovině ϱ.

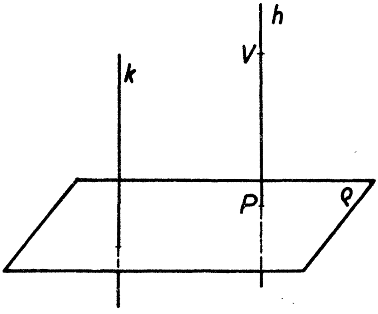
Vyslovíme poučku:

XII. Každým bodem v prostoru lze vésti k rovině jedinou kolmici.

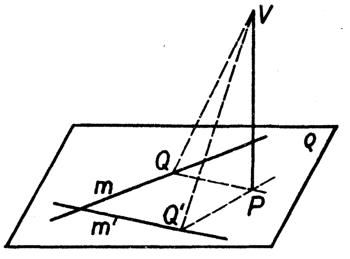
Tato poučka je správná, ať bod leží v rovině, nebo mimo ni.

Pro jehlan je zvláště důležitá kolmice spuštěná z jeho hlavního vrcholu na rovinu podstavy a úsečka omezená hlavním vrcholem a patou té kolmice. Ta úsečka se jmenuje výška jehlanu.

Abychom mohli řešiti úlohy o výšce jehlanu, musíme se seznámiti s konstrukcí, jak se spustí z bodu kolmice na rovinu. Takovou konstrukci si odvodíme snadno z poučky VII.



Obr. 75.



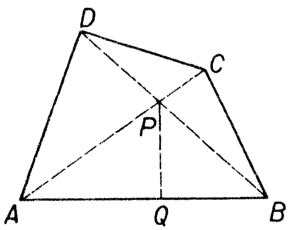
Obr. 76.

Na obr. 76 je znázorněna rovina ϱ a mimo ni bod V. Podle obrázku si zvolíme v rovině ϱ dvě různoběžky m, m'. Z bodu V spustíme (v rovinách Vm, Vm') kolmice na přímky m, m' a jejich paty označíme Q, Q'. V bodech Q, Q' sestrojíme v rovině ϱ nové kolmice k přímkám m, m'. Tyto dvě nové kolmice se protnou v bodě P; P je pata kolmice spuštěné z bodu V na rovinu ϱ. Odůvodněte to pomocí poučky VII.

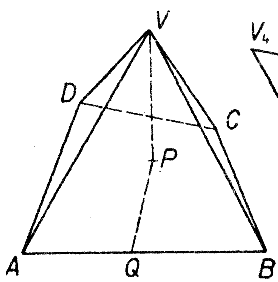
Přímky m, m' nevolíme rovnoběžné, neboť kolmice k nim v rovině ϱ by byly také rovnoběžné a bod P by nebyl určen. Jsou-li ovšem přímky m, m' různoběžné, pak se i zmíněné kolmice protnou. Protože neznáme předem polohu bodu P, mohlo by se státi, že bychom náhodou zvolili třeba přímku m tak, že by procházela bodem P. Jak by se projevila tato volba při provádění konstrukce? Sledujte, zda je prostorová úloha skutečně rozložena v řadu rovinných úloh, jak jsme na to upozornili na str. 29.

Nyní rozřešíme důležitou úlohu o jehlanech.

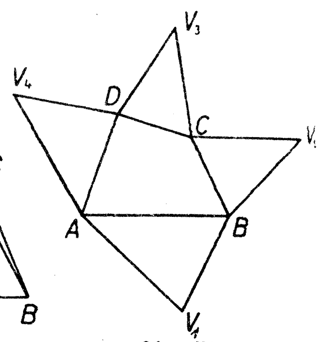
1. **úloha.** Na obr. 77 je narýsována ve skutečné velikosti podstava $ABCD$ čtyrbokého jehlanu $ABCDV$. Průsečík úhlopříček P je patou výšky tohoto jehlanu. Délka výšky je daná úsečka v. Úkolem je narýsovat ve skutečné velikosti pobočnou stěnu ABV.



Obr. 77.



Obr. 78.

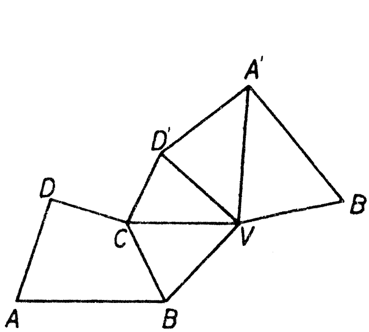


Obr. 79

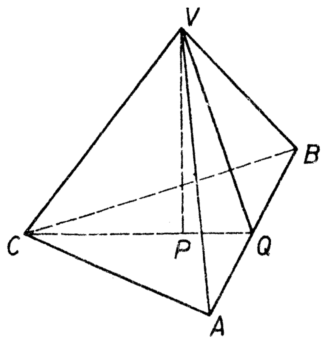
Postup řešení podle obr. 77, 78: patu Q výšky VQ trojúhelníka ABV určíme jako patu kolmice spuštěné v rovině podstavy z bodu P na přímku AB. Délku úsečky VQ určíme z trojúhelníka PVQ; v tomto pravoúhlém trojúhelníku jsou známy odvěsny PV, PQ. Narýsujme trojúhelník PVQ ve skutečné velikosti. Hledaný trojúhelník ABV je pak určen stranou AB, patou Q výšky VQ a její délkou. Hledaný trojúhelník ABV snadno nyní narýsujeme ve skutečné velikosti.

Stejným způsobem dovedeme narýsovat i ostatní pobočné stěny jehlanu ve skutečné velikosti. Připojíme-li je podle obr. 79 nebo 80 k podstavě, dostaneme tak zv. s í ť j e h l a n u. Ze sítě sestrojujeme model jehlanu, podobně jako tomu bylo u hranolu.

2. **úloha.** Narýsujte síť daného jehlanu $ABCDV$. (Všecky délky dvakrát zvětšte.) Který z obou způsobů znázorněných na obr. 79, 80 je výhodnější pro sestrojení modelu a proč?



Obr. 80.



Obr. 81.

Pravidelný jehlan má tuto důležitou vlastnost:

XIII. **Pata výšky pravidelného jehlanu je střed jeho podstavy.**

Dokážeme si poučku XIII: na obr. 81 je znázorněn pravidelný jehlan trojboký. Je tam také zobrazena výška VP jehlanu $ABCV$ a kolmice spuštěná z bodu P na přímku AB. Tato kolmice je osou úsečky AB; pata Q je totiž středem úsečky AB, neboť úsečka VQ kolmá k AB je výška rovnoramenného trojúhelníka ABV. Opakujeme-li tuto úvahu pro ostatní strany podstavy, poznáme, že bod P je průsečík os úseček AB, BC, CA. Obdobná úvaha platí pro libovolný pravidelný jehlan n-boký.

Cvičení.

122. Podstava čtyrstěnu je trojúhelník ABC o stranách $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CA} = 7$ cm. Pata výšky je těžiště trojúhelníka ABC, délka výšky je 5,5 cm. Sestrojte síť.

123. Podstava jehlanu je kosodélník $ABCD$ ($\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 35$ mm, $\sphericalangle DAB = 60°$). Pata výšky jehlanu je průsečík úhlopříček kosodélníka $ABCD$, délka výšky je 5 cm. Sestrojte síť jehlanu.

124. Určete výšku pravidelného jehlanu čtyrbokého, je-li dána hrana podstavy $a = 5$ cm, pobočná hrana $b = 8$ cm a) konstrukcí, b) výpočtem. Srovnejte oba výsledky.

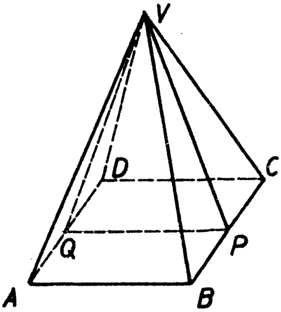
125. Opakujte cvičení 124 pro pravidelný jehlan šestiboký.

126. Opakujte cvičení 124 pro pravidelný jehlan trojboký. Uvědomte si, že podle poučky XIII leží pata výšky jehlanu ve dvou třetinách výšek podstavy.

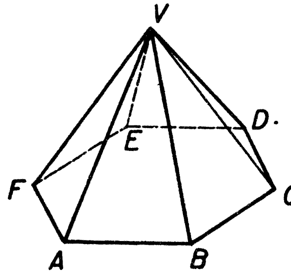
127. Určete výšku pravidelného čtyrstěnu s hranou 6 cm a) konstrukcí, b) výpočtem. Srovnejte oba výsledky.

128. a) Kolik m² krytiny je třeba na střechu tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu šířky 12 m a o výšce 8 m nad úrovní půdy?

129. Na obr. 82 je zobrazen pravidelný jehlan čtyrboký s podstavnou hranou dlouhou 6 cm. P, Q jsou středy hran BC, AD, trojúhelník PVQ je rovnostranný. Určete a) konstrukcí, b) výpočtem výšku a pobočnou hranu. Srovnejte oba výsledky.



Obr. 82.



Obr. 83.

130. Narýsujte libovolně síť pravidelného jehlanu trojbokého a konstruktivně určete jeho výšku.

131. Opakujte cvičení 130 pro pravidelný jehlan čtyrboký.

132. Obr. 83. Pravidelný jehlan šestiboký má pobočnou hranu $b = 8$ cm, výšku $v = 5$ cm. Vypočtěte délku podstavné hrany a obsah pobočné stěny.

133. Podstava pravidelného jehlanu pětibokého je pravidelný pětiúhelník vepsaný kružnici o poloměru 3 cm. Výška jehlanu je 5 cm. Určete konstruktivně výšku pobočné stěny a sestrojte síť jehlanu.

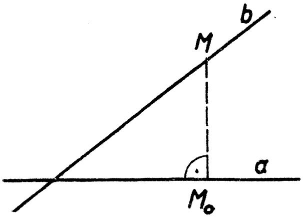
***134.** Opakujte cvičení 133 pro pravidelný jehlan osmiboký.

***135.** Čtyrstěn má za podstavu libovolný trojúhelník, jeho pobočné stěny jsou rovnoramenné trojúhelníky. Dokažte, že pata jeho výšky je střed kružnice opsané podstavě. Užijte výsledku cvičení 109.

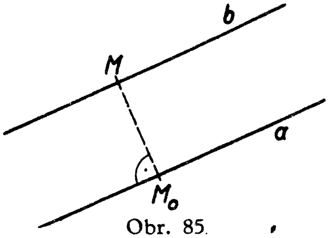
8. Vzájemná poloha přímek a rovin.

Víme, že dvě přímky, které leží v jedné rovině, jsou buď různoběžné, nebo rovnoběžné. Jestliže bod M probíhá přímku b různoběžnou s přímkou a (obr. 84), pak vzdálenost bodu M od přímky a se mění. Nejmenší možná vzdálenost je rovna nule, když bod M splyne s průsečíkem obou různoběžek a, b.

Jestliže bod M se pohybuje po přímce b rovnoběžné s přímkou a (obr. 85), pak vzdálenost $\overline{MM_0}$ bodu M od přímky a je stále stejná. Je buď kladná, jsou-li rovnoběžky různé, nebo rovna nule, jsou-li rovnoběžky a, b splývající přímky.



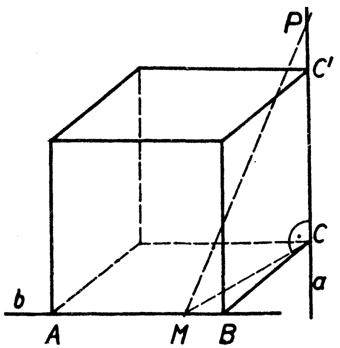
Obr. 84.



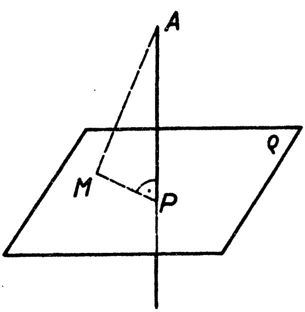
Obr. 85.

V prostoru však máme takové dvojice přímek, které neleží v žádné společné rovině. Takové dvě přímky se nazývají m i m o b ě ž k y. Tak na př. přímky AB, CC' na obr. 86 jsou mimoběžky. Neboť rovina, která obsahuje body A, B, C, je rovina dolní stěny; tato rovina však neobsahuje bod C' a tedy také neobsahuje přímku CC'.

Jestliže bod M probíhá přímku b mimoběžnou s přímkou a, pak vzdálenost bodu M od přímky a se mění. Nejmenší možná vzdálenost není v tomto případě rovna nule jako u různoběžek, ale je kladná. Tato vlastnost mimoběžek se dá přesně dokázati a potvrzuje nám ji i názor. Pro přímky AB, CC' z obr. 86 je nejmenší možná vzdálenost dána úsečkou BC.



Obr. 86.



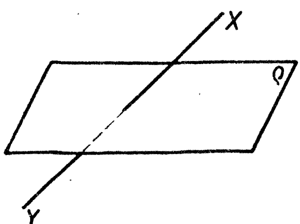
Obr. 87.

Dříve než pojednáme o vzájemné poloze přímky a roviny a dvou rovin, uvedeme dva pojmy.

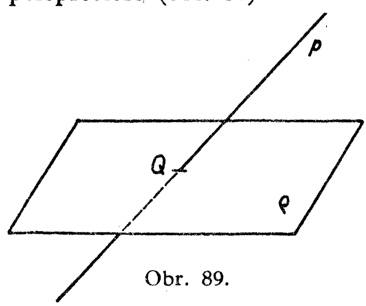
Vzdálenost bodu od přímky měříme na kolmici spuštěné z toho bodu na přímku. Podobně měříme v z d á l e n o s t b o d u o d r o v i n y na kolmici spuštěné z toho bodu na rovinu.

Na obr. 87 je znázorněna rovina ϱ a bod A ležící mimo ni. P je pata kolmice spuštěné z bodu A na rovinu ϱ, úsečka AP je tedy v z d á l e n o s t b o d u A o d r o v i n y ϱ. V rovině ϱ si zvolíme libovolný jiný bod M; z pravoúhlého trojúhelníka APM plyne, že $\overline{AM} > \overline{AP}$ (proč?). **To znamená: vzdálenost bodu A od roviny ϱ je nejmenší ze vzdáleností tohoto bodu od všech bodů roviny ϱ.** Má tuto vlastnost i bod A, který leží v rovině ϱ? Obdobnou vlastnost má také vzdálenost bodu od přímky.

V planimetrii jsme poznali pojem polopřímky a poloroviny; v stereometrii zavádíme pojem poloprostoru. Rovina ϱ (obr. 88) dělí prostor ve dvě části, které nazýváme poloprostory vyťaté rovinou ϱ. Body roviny ϱ obyčejně do žádného z těch dvou poloprostorů nepočítáme. Poloprostor je určen svou hraniční rovinou a jedním dalším bodem. Jak poznáme, zda dva body X, Y náležejí do téhož poloprostoru vyťatého rovinou ϱ nebo do různých poloprostorů? Zřejmě takto: leží-li uvnitř úsečky XY nějaký bod roviny ϱ, náležejí body X, Y do různých poloprostorů; neleží-li uvnitř úsečky XY žádný bod roviny ϱ, náležejí oba body X, Y do téhož poloprostoru (obr. 88).



Obr. 88.



Obr. 89.

Nyní můžeme již vyložiti vzájemnou polohu přímky a roviny: Přímka s rovinou buď nemá žádný společný bod, nebo mají jeden společný bod. Má-li přímka s rovinou aspoň dva různé společné body, pak v ní leží podle poučky I.

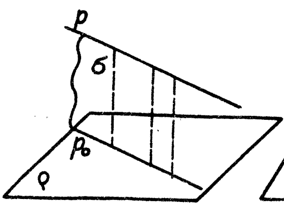
Jestliže přímka p nemá s rovinou ϱ žádný společný bod nebo jestliže v ní leží, říkáme, že přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ, a označujeme tuto vlastnost $p \parallel \varrho$. Má-li přímka p s rovinou ϱ společný jediný bod Q (obr. 89), říkáme, že přímka protíná rovinu ϱ v bodě (průsečíku) Q.

Na obr. 90 je znázorněna rovina ϱ a přímka $p \parallel \varrho$, neležící v rovině ϱ. Přímkou p vedeme rovinu $\sigma \perp \varrho$. Tato rovina σ protne rovinu ϱ v přímce p_0; přímku p_0 můžeme nazvat pravoúhlým průmětem přímky p do roviny ϱ. Přímky p, p_0 leží v téže rovině σ a nemají společný bod (proč?); proto jsou rovnoběžné. Všecky body přímky p mají od přímky p_0 a tedy i od roviny ϱ stejné vzdálenosti a leží v jedné polorovině vyťaté v rovině σ přímkou p_0.

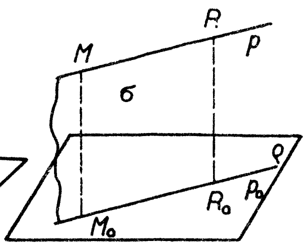
Jak poznáme, zda je daná přímka p rovnoběžná s danou rovinou ϱ? K tomu se dobře hodí tato poučka, která je do jisté míry obrácením předcházejícího výsledku:

XIV. **Najdeme-li na přímce p aspoň dva různé body, které leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou ϱ a mají stejnou vzdálenost od roviny ϱ, pak je $p \parallel \varrho$.**

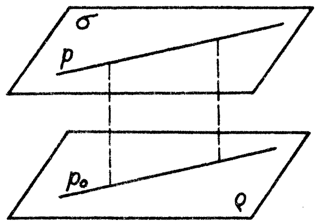
Pro důkaz poučky sestrojíme opět pravoúhlý průmět p_0 přímky p do roviny ϱ (obr. 91). Jestliže M, R jsou dva body přímky p, které leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou ϱ a mají stejné vzdálenosti od roviny ϱ, pak oba ty body leží také v téže polorovině vyťaté přímkou p_0 v rovině přímek p, p_0 a oba mají stejné vzdálenosti od přímky p_0. Proto je $p \parallel p_0$; přímka p nemá tedy s rovinou ϱ žádný společný bod, čili $p \parallel \varrho$. V důkaze jsme mlčky předpokládali, že body M, R neleží v rovině ϱ. Platí poučka XIV i v tom případě, že body M, R leží v rovině ϱ?



Obr. 90.



Obr. 91.



Obr. 92.

Zbývá promluviti o vzájemné poloze dvou rovin. Víme už, že mají-li dvě různé roviny aspoň jeden společný bod, jsou různoběžné, t. j. mají společnou celou přímku, zvanou průsečnici. Dvě roviny, které nejsou různoběžné, tedy buď splynou, nebo nemají společný bod. Splývající roviny nebo roviny bez společného bodu nazýváme rovnoběžné roviny. Označení je $\varrho \parallel \sigma$.

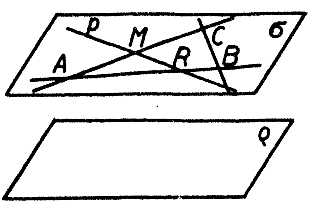
Vyhledejte příklady různoběžných a rovnoběžných rovin mezi stěnami místnosti. Srovnejte definici rovnoběžných přímek v rovině, rovnoběžných rovin a přímky rovnoběžné s rovinou.

Na obr. 92 jsou znázorněny dvě různé rovnoběžné roviny $\varrho \parallel \sigma$. p je libovolná přímka roviny σ; přímka p nemá s rovinou ϱ žádný společný bod, a proto je $p \parallel \varrho$. Protože p je libovolná přímka roviny σ, dostáváme výsledek: **všecky body roviny σ leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou ϱ a všecky mají od roviny ϱ stejnou vzdálenost.**

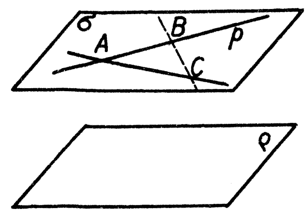
Jak poznáme, zda daná rovina σ je rovnoběžná s danou rovinou ϱ? K tomu použijeme poučky:

XV. **Najdeme-li v rovině σ trojúhelník, jehož všecky tři vrcholy jsou v témž poloprostoru vyťatém rovinou ϱ a všecky tři mají od roviny ϱ stejnou vzdálenost, pak je $\sigma \parallel \varrho$.**

Důkaz provedeme s pomocí obr. 93 takto: A, B, C jsou vrcholy zmíněného trojúhelníka. Podle poučky XIV jsou přímky AB, BC, CA rovnoběžné s rovinou ϱ. Libovolná přímka p roviny ϱ protne aspoň dvě z přímek AB, BC, CA ve dvou různých bodech M, R: tyto dva body leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou ϱ a mají stejné vzdálenosti od roviny ϱ; proto je $p \parallel \varrho$. Protože p je libovolná přímka roviny σ, nemá rovina σ s rovinou ϱ vůbec žádný společný bod, čili $\sigma \parallel \varrho$, což jsme chtěli dokázati.



Obr. 93.



Obr. 94.

Poučku XV vyslovujeme často v tomto tvaru:

XVa. **Leží-li v rovině σ dvě různoběžky, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou ϱ, pak je $\sigma \parallel \varrho$.**

Odůvodnění s pomocí obr. 94 je jednoduché. p, q jsou dvě zmíněné různoběžky. Označíme A jejich průsečík, B další bod přímky p, C další bod přímky q. Trojúhelník ABC splňuje předpoklady poučky XV, a proto je $\sigma \parallel \varrho$.

Cvičení.

a) *Dvě přímky.*

136. Na jehlanu z obr. 83 najděte všecky dvojice mimoběžných hran a zapište je.

137. Obr. 86. Označte M libovolný bod přímky AB, P libovolný bod přímky CC'. Dokažte, že vzdálenost $\overline{MP}$ je větší nebo rovna délce $\overline{BC}$. Návod: porovnejte v pravoúhlých trojúhelnících BCM a CMP strany: BC, CM a CM, MP.

138. Dvě přímky, které leží ve dvou rovnoběžných rovinách navzájem různých, jsou buď rovnoběžné nebo mimoběžné. Dokažte, uveďte příklady na krychli a nakreslete náčrtek.

***139.** Máme tři různé přímky a, b, c. Každé dvě z nich jsou různoběžné, ale všecky tři neprocházejí jedním bodem. Dokažte, že přímky a, b, c leží v jedné rovině. Návod: dokažte, že přímka c má s rovinou přímek a, b dva různé body společné. Zapište stručně postup důkazu.

b) *Vzdálenost bodu od roviny, poloprostor.*

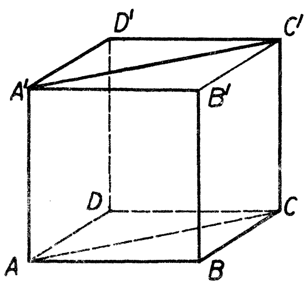
140. Obr. 95. Určete konstruktivně vzdálenost vrcholu B' zobrazené krychle od roviny $AA'C$. Návod: hledejte výšku čtyrstěnu $AA'CB'$ tak, že spustíte z bodu B' kolmice na přímky AA' a $A'C'$.

***141.** Opakujte cvičení 140 pro vrchol B' a rovinu $A'BC'$. Návod: hledejte výšku pravidelného jehlanu $A'BC'B'$ (viz cvičení 112, poučku XIII).

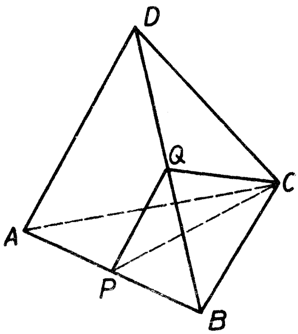
142. Pravidelný jehlan čtyrboký má hranu podstavy dlouhou 5 cm, pobočnou hranu 7 cm. Vypočtěte, jakou vzdálenost od podstavy má střed pobočné hrany. Nakreslete náčrtek.

143. Obr. 96. Pravidelný čtyrstěn $ABCD$ je proťat rovinou $\varrho = CPQ$, kde P, Q značí po řadě středy hran AB, BD. a) Na jaká tělesa rozdělí rovina ϱ čtyrstěn $ABCD$? b) Rozhodněte, zda středy stěn ABD, ACD leží v poloprostoru ϱB.*)

144. Obr. 95. Sestrojíme roviny $\varrho = BDB'$, $\sigma = BCD'$. Jaké těleso je část krychle, která leží v poloprostorech ϱA i σA?



Obr. 95.



Obr. 96.

c) *Přímka a rovina: dvě roviny.*

145. Na přímce p jsme našli tři různé body A, B, C stejně vzdálené od roviny ϱ. Je $p \parallel \varrho$? Návod: uvažte, zda některé dva z bodů A, B, C musí splňovat předpoklady poučky XIV.

146. Dokažte: je-li přímka p rovnoběžná s některou přímkou roviny ϱ, pak je $p \parallel \varrho$.

147. Obr. 95. Odůvodněte, že přímka BD je rovnoběžná s rovinou stěny $A'B'C'D'$. Použijte poučky XIV.

148. Roviny obou podstav hranolu (kolmého či kosého) jsou rovnoběžné. Nakreslete náčrtek a dokažte to s pomocí poučky XVa. Jak se nazývá vzdálenost těch rovin?**)

---

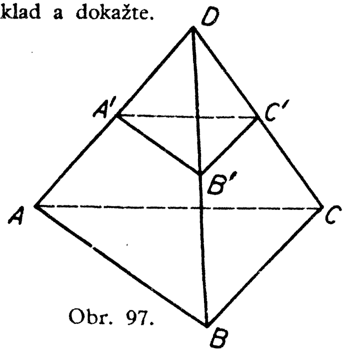
*) ϱB značí ten poloprostor vyťatý rovinou ϱ, v němž leží bod B.

**) Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ϱ, σ je vzdálenost kteréhokoli bodu roviny σ od roviny ϱ.

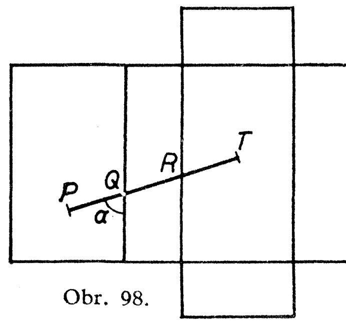
*149. Obr. 95. Odůvodněte, že roviny $A'C'B$, ACD' jsou rovnoběžné. Určete konstruktivně jejich vzdálenost pro krychli s hranou 6 cm. Návod: použijte poučky XVa a cvičení 141.

150. Na obr. 97 značí A', B', C' po řadě středy hran AD, BD, CD čtyrstěnu $ABCD$. a) Dokažte, že roviny ABC, $A'B'C'$ jsou rovnoběžné. b) Vypočtěte jejich vzdálenost, je-li čtyrstěn pravidelný a má-li hranu dlouhou 10 cm. Návod: užijte poučky XVa a vypočtěte výšku čtyrstěnu $ABCD$.

151. Protíná-li rovina τ dvě rovnoběžné roviny ϱ, σ v přímkách r, s, pak je $r \parallel s$ Uveďte příklad a dokažte.



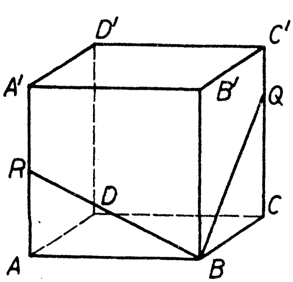
Obr. 97.



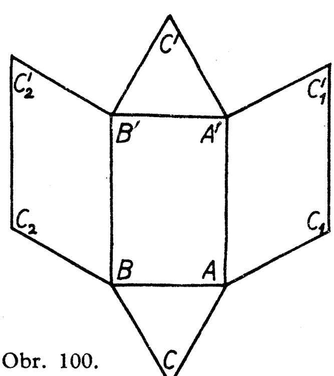
Obr. 98.

***152.** Na obr. 98 je narýsována síť kvádru a na ní úsečka PT. Ze sítě složíme kvádr. Budou body P, Q, R, T na kvádru ležeti v jedné rovině? Návod k řešení: mají-li body P, Q, R, T ležeti v jedné rovině, jaká musí být vzájemná poloha úseček PQ, RT podle cvičení 151? Pro jaký úhel α bude po složení kvádru $PQ \parallel RT$?

153. Sestrojte obraz podle obr. 99 a do něho narýsujte průsek krychle s rovinou BQR. R značí střed hrany AA', Q bod ležící ve třetině hrany CC'. Použijte výsledku cvičení 151.



Obr. 99.



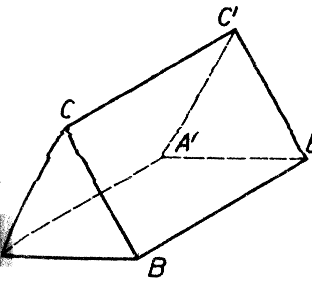
Obr. 100.

***154.** Na obr. 100 je narýsována síť trojbokého hranolu. Podstava je rovnostranný trojúhelník ABC o straně $\overline{AB} = 4$ cm, pobočná hrana má délku 6 cm, $\sphericalangle AA'C_1' =$

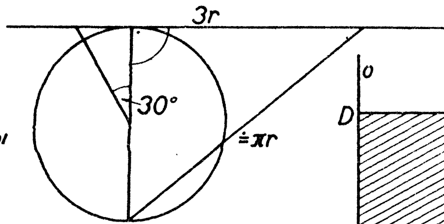
$= \sphericalangle BB'C_2' = 120^\circ$. Určete výšku hranolu. Návod: hledejte vzdálenost bodu A' od roviny ABC; k tomu účelu spusťte z bodu A' kolmice na hrany AB, AC.

***155.** Co je geometrické místo bodů v prostoru, které mají od dané roviny ϱ danou vzdálenost d? (Nezapomeňte na oba poloprostory vyťaté rovinou ϱ.)

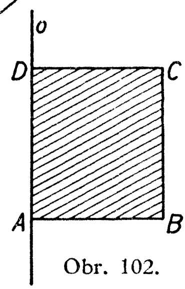
***156.** Na obr. 101 je zobrazen pravidelný hranol trojboký, jeho podstava je rovnostranný trojúhelník ABC o straně 6 cm. Co je geometrické místo bodů v prostoru, které mají od stěny $AA'C'C$ vzdálenost 3 cm, a od stěny $BB'C'C$ vzdálenost 2 cm? Nakreslete náčrtek podle obr. 101 a zakreslete geometrické místo. Návod: užijte výsledku cvičení 155.



Obr. 101.



Obr. 103.



Obr. 102.

9. Rotační válec a kužel.

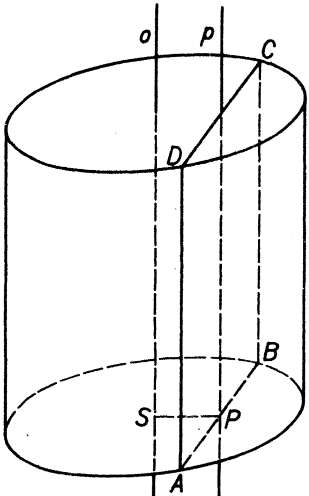
a) Rotační válec.

Již z nižších tříd známe těleso, které se nazývá rotační válec.*) Toto těleso vznikne na příklad tak, že se obdélník $ABCD$ otáčí kolem osy o, která je prodloužením jeho strany AD (obr. 102). Mnohé vlastnosti rotačního válce, které jsme až dosud poznávali z názoru, dovedeme si nyní dokázati.

1. úloha. Jak se sestrojuje síť rotačního válce? Nakreslete si náčrtek a popište postup. Připomeňte si přibližnou konstrukci Kochaňského pro určení délky polokružnice. Popište ji podle obr. 103 a užijte jí při konstrukci sítě.

Obr. 104. Představme si rovinu rovnoběžnou s osou rotačního válce, a to takovou, jejíž vzdálenost od osy je menší než poloměr podstavy r. Tu vzdálenost můžeme změřit třeba tak, že ze středu podstavy S spustíme kolmici na rovinu, kterou jsme si zvolili a kterou označíme ϱ. Její patu označíme P.

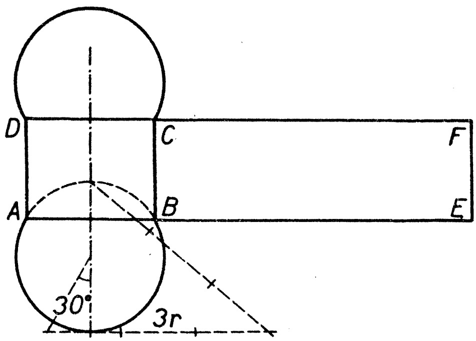
*) Slovo rotace je latinského původu a znamená česky otáčení.



Obr. 104

Vedeme-li bodem P přímku $p \parallel o$, je zřejmě $SP \perp p$, čili též $SP \perp o$. Přímka SP leží tedy v rovině podstavy. Rovina ϱ protne rovinu podstavy v přímce, která má od středu S vzdálenost $\overline{SP} < r$. Tato přímka je tedy sečnou kružnice omezující podstavu a protne tu kružnici ve dvou různých bodech A, B. Strany válce AD, BC, které vycházejí z bodů A, B, leží v rovině ϱ, neboť rovina ϱ je rovnoběžná s osou o a přímky AD, BC jsou také rovnoběžné s osou o. Přímky AB, CD jsou průsečnice roviny ϱ s rovinami obou podstav; proto jsou navzájem rovnoběžné a zároveň kolmé k stranám AD, BC. Rovina ϱ protne tedy válec v pravoúhlém rovnoběžníku $ABCD$.

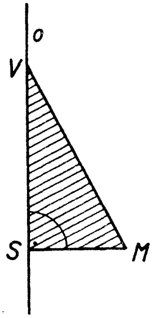
Jak by se změnila úvaha, kdyby vzdálenost SP osy o od roviny ϱ byla rovna poloměru podstavy r?



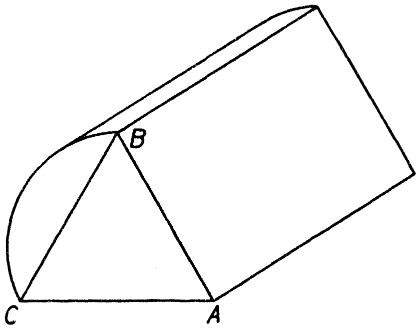
Obr. 105.

2. úloha. Máme sestrojit síť tělesa, které zbude, oddělíme-li od rotačního válce menší část rovinou ϱ vedenou rovnoběžně s osou válce ve vzdálenosti $\frac{r}{2}$. Válec má poloměr podstavy $r = 3$ cm, výšku $v = 4$ cm. Provedení je na obr. 105. Průsek válce s rovinou ϱ je obdélník $ABCD$, středový úhel $\sphericalangle ASB$ je 120°. Zbytek pláště válce rozvinut do roviny dává obdélník $BEFC$; jaké jsou jeho rozměry? Větší oblouk nad tětivou AB jsou dvě třetiny celé kružnice. Jak sestrojíme tedy úsečku BE?

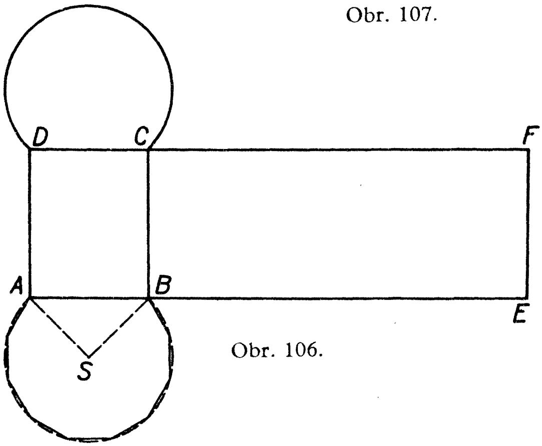
Na obr. 106 je naznačena jiná přibližná konstrukce úsečky BE: do kružnice je vepsán pravidelný dvanáctiúhelník; součet osmi jeho stran je přibližně délka úsečky BE; vysvětlete to. Sestrojte síť tělesa podle obr. 106.



Obr. 108.



Obr. 107.



Obr. 106.

Cvičení.

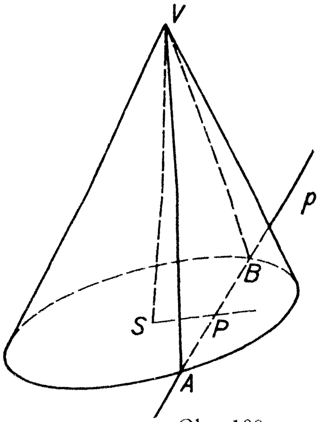
157. Vypočtěte povrch tělesa z předchozí úlohy.

158. Součet obsahů obou podstav rotačního válce je roven obsahu pláště. Jaký vztah platí mezi výškou a poloměrem podstavy?

159. Rotační válec s průměrem podstavy 50 cm má být seříznut řezem rovnoběžným s osou tak, aby v řezu vznikl obdélník šířky 30 cm. Jak má být veden řez?

160. Obr. 107. Rotační válec ($r = 2$ dm, $v = 8$ dm) je seříznut dvěma řezy rovnoběžnými s osou tak, že trojúhelník ABC je rovnostranný. Vypočtěte povrch zobrazeného klínu. Návod: jaká část pláště válce je oblina klínu?

161. Rotační válec je proťat rovinou kolmou k ose. Dokažte, že průsek je kruh shodný s podstavou.

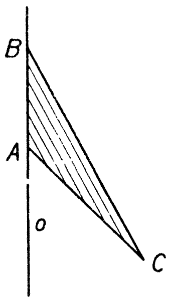


Obr. 109.

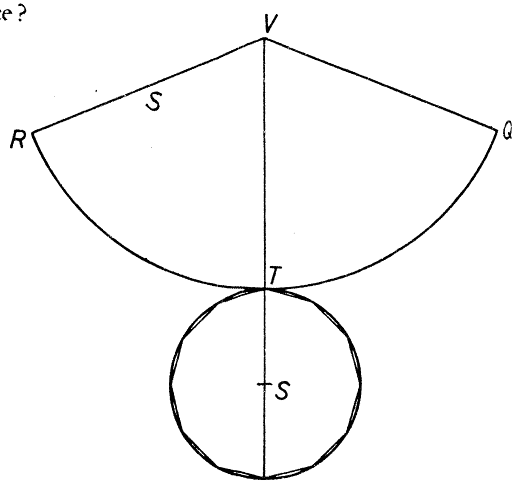
b) Rotační kužel.

Nyní obrátíme pozornost k **rotačnímu kuželi**. Je to těleso, které vznikne otáčením pravoúhlého trojúhelníka kolem přímky o, v níž leží jedna odvěsna (obr. 108). Bod V se jmenuje **vrchol** rotačního kužele, odvěsna SM tvoří při otáčení kruh, který je **podstavou kužele**. Jednotlivé polohy otáčející se přepony MV jsou tak zvané **strany kužele**, jejich souhrn je jeho **plášť**. Úsečka VS je **výška** rotačního kužele.

Představme si sečnu p podstavy podle obr. 109; její průsečíky s obvodem podstavy označíme A, B. Rovina Vp (rovina, která jde vrcholem kužele, jmenuje se **vrcholová**) obsahuje strany kužele AV, BV (odůvodněte to). Průsek roviny Vp s kuželem je patrně trojúhelník ABV. Jak se změní výsledek, bude-li přímka p tečnou kružnice?



Obr. 111.



Obr. 110.

Nyní rozřešíme úlohu, jak sestrojiti síť rotačního kužele a vypočíst jeho povrch. Rozvineme-li plášť rotačního kužele do roviny, podobně jako jsme to učinili u rotačního válce, dostaneme výseč kruhu. Jeho poloměr je roven délce strany s (obr. 110). Délka oblouku QR se rovná obvodu podstavy. Při sestrojování délky oblouku QR není možno použít konstrukce Kochaňského pro určení přibližné délky kružnice. Použijeme proto podobného postupu jako u válce. Na obr. 110 je podstavě vepsán pravidelný dvanáctiúhelník; jeho obvod má přibližně touž délku jako kružnice k. Oblouk QR sestrojíme tak, aby naznačená lomená čára složená z tětiv měla délku obvodu dvanáctiúhelníka. Přesnost výsledku se zlepší, vepíšeme-li podstavě mnohoúhelník o větším počtu stran.

3. úloha. Sestrojte podle obr. 110 síť rotačního kužele, jehož strana má délku 8 cm a poloměr podstavy je 3 cm. Popište a vysvětlete postup.

Při výpočtu obsahu pláště rotačního kužele se nemusíme spokojiti s přibližným výsledkem jako při konstrukci sítě; plášť dovedeme vyjádřiti přesně.

Plášť se rozvine do kruhové výseče s poloměrem s a středovým úhlem α; její obsah je $P = \frac{s^2}{2}$ arc α. Oblouk, který omezuje tuto výseč, má délku $2\pi r = s \, . \, \text{arc}\,\alpha$ (proč?). Máme tedy $P = \frac{s}{2} \, . \, s \, . \, \text{arc}\,\alpha = \frac{s}{2} \, . \, 2\pi r = \pi rs$.

Cvičení.

162. Rotační kužel je proťat rovinou kolmou k ose, která neprochází vrcholem. Dokažte, že průsek je kruh, jehož střed leží na ose.

163. Nálevka tvaru rotačního kužele má stranu $s = 7$ cm, průměr podstavy $2r = 6$ cm. Vypočtěte její výšku a kolik plechu se na ni spotřebuje.

164. Rotační kužel vznikl otáčením pravoúhlého trojúhelníka rovnoramenného kolem odvěsny. Vyjádřete jeho povrch pomocí poloměru podstavy.

165. Protnete-li rotační kužel vrcholovou rovinou, která obsahuje sečnu podstavy, je průsek rovnoramenný trojúhelník (obr. 109). Dokažte, že ten trojúhelník má největší obvod, když vrcholová rovina obsahuje osu kužele.

Tento průsek se nazývá někdy osový.

166. Osový průsek rotačního kužele má při vrcholu úhel 120°. Určete, jak závisí a) strana, b) výška, c) obsah pláště na poloměru podstavy.

167. Sestrojte síť rotačního kužele, je-li dáno $v = 3$ cm, $s = 5$ cm (v je výška, s strana).

168. Obr. 111. Trojúhelník ABC ($\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CA} = 4{,}5$ cm) se otáčí kolem přímky AB. Sestrojte síť vzniklého tělesa.

169. Kolik plechu se spotřebuje k vyrobení nálevky vysoké 8 cm, jejíž horní průměr je 10 cm?

* **170.** Od rotačního kužele ($v = 8$ cm, $r = 3$ cm) byl oddělen rotační kužel rovinou kolmou k ose, půlící výšku daného kužele. Vypočtěte povrch zbylé části.

Je to tak zvaný komolý kužel.

171. Osový průsek rotačního kužele je trojúhelník rovnostranný o straně 6,5 cm. Sestrojte síť rotačního kužele.

***172.** Přímka p v rovině podstavy rotačního kužele má od jejího středu vzdálenost a) $\frac{r}{2}$, b) r. Určete konstruktivně vzdálenost středu podstavy od vrcholové roviny položené přímkou p. Použijte osového průseku, jehož rovina je kolmá k přímce p.

173. V rovině podstavy kužele ze cvičení 171 je vedena sečna ve vzdálenosti $\frac{r}{2}$ od středu. Vrcholová rovina vedená tou sečnou rozdělí kužel ve dvě části. Sestrojte jejich sítě.

174. Rotační kužel má výšku 5 cm, jeho osový průsek má ve vrcholu úhel 120°. Vrcholová rovina ϱ je kolmá ke straně kužele. Vypočtěte obsah průseku roviny ϱ s kuželem.

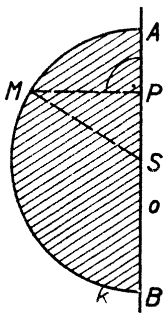
***175.** Pravidelný jehlan čtyrboký, jehož všechny hrany mají délku 5 cm, je vepsán rotačnímu kuželi (t. j. mají společný vrchol a podstava jehlanu je vepsána podstavě kužele). Jaký je rozdíl obsahů jejich plášťů?

***176.** Opakujte cvičení 175 pro pravidelný čtyrstěn.

10. Plocha kulová a koule.

V předešlé kapitole jsme se zabývali rotačním válcem a rotačním kuželem. Tato dvě tělesa vznikla otáčením obdélníka a pravoúhlého trojúhelníka kolem přímky.

Tělesa, která vznikají otáčením nějakého rovinného obrazce kolem přímky, nazývají se **rotační**. Mezi rotační tělesa patří také koule.



Obr. 112.

Na obr. 112 vidíme polokružnici k se středem S, omezenou body A, B a dále přímku o, která jde body A, B, S. Otáčí-li se šrafovaný polokruh kolem přímky o, vznikne koule. Otáčející se polokružnice k vyplní při tom plochu (povrch koule); tato plocha se jmenuje **plocha kulová**.

Na obr. 112 je na polokružnici k naznačen bod M. Při otáčení polokružnice se bod M pohybuje po kružnici. Spusťme z bodu M kolmici na přímku o a patu té kolmice označme P. Otáčením trojúhelníka SPM kolem přímky o vznikne rotační kužel; bod M se pohybuje po obvodě jeho podstavy.

Všecky polohy otáčející se polokružnice k nazýváme **poledníky** plochy kulové; kružnice, které opisují jednotlivé body M polokružnice k, jmenují se **rovnoběžky** plochy kulové. Body A, B jsou tak zvané **póly**. Který bod polokružnice k opíše nejdelší rovnoběžku? (Je to její půlící bod.) Této rovnoběžce říkáme **rovník**.

Všecky uvedené názvy nám jistě připomínají pojmy ze zeměpisu. Skutečně naše Země má přibližně tvar koule (proto říkáme někdy zeměkoule); předcházející výklad můžeme dobře sledovat na jejím modelu zvaném globus.

Obr. 112. Každý bod plochy kulové má od středu S stejnou vzdálenost; ta vzdálenost se rovná poloměru r vytvářející polokružnice k. Obráceně: máme-li v prostoru takový bod X, že $\overline{SX} = r$, pak tento bod X leží na naší ploše kulové. Můžeme totiž najít takovou polohu otáčející se polokružnice, že bod X na ní leží.

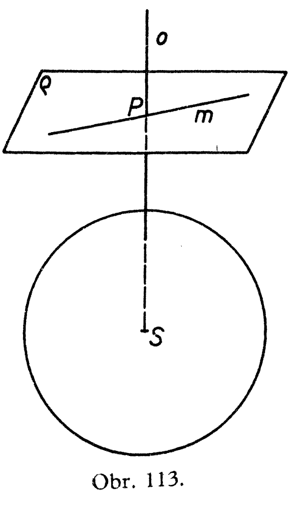
Použijeme-li pojmu „geometrické místo bodů", můžeme vyslovit tuto poučku:

XVI. **Plocha kulová je geometrické místo bodů v prostoru, které mají od pevného bodu S (středu) stejnou vzdálenost (rovnou poloměru).**

Jak by se změnila poučka, kdybychom nahradili slova „v prostoru" slovy „v rovině"?

Jako jsme zkoumali v planimetrii vzájemnou polohu kružnice a přímky, tak prozkoumáme nyní vzájemnou polohu plochy kulové a roviny.

Je dána kulová plocha se středem S a poloměrem r; bodem S prochází rovina σ. Máme určit, co vyplňují společné body plochy kulové a roviny σ. Podle předchozí poučky (XVI) vyplňují kružnici se středem S a poloměrem r. Říkáme, že rovina σ protne kulovou plochu v kružnici. Modelem může být koule rozříznutá řezem, který je veden jejím středem.



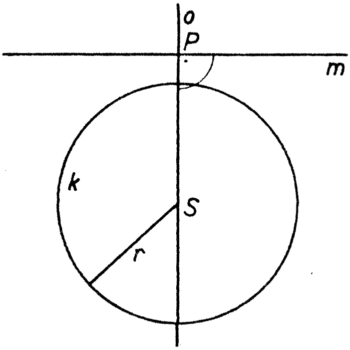
Obr. 113.

Na obr. 113 je znázorněna plocha kulová o poloměru r a rovina ϱ. Ze středu S plochy kulové je spuštěna kolmice o na rovinu ϱ, její pata je označena P. Představme si nějakou rovinu σ položenou přímkou PS. Podle poučky XI je $\sigma \perp \varrho$; průsečnice obou rovin je označena m. Podle předcházejícího výkladu protne rovina σ naši kulovou plochu v kružnici k s poloměrem r. Na obr. 114 je narýsována situace v rovině σ.

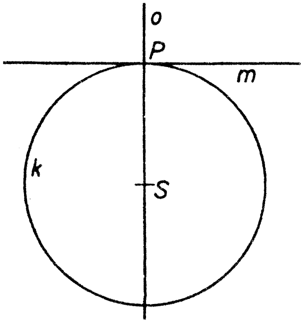
Naše plocha kulová vznikne otáčením kružnice k kolem přímky o. Otáčením přímky m kolem přímky o vznikne rovina ϱ (podle poučky IV). Délka úsečky SP je vzdálenost středu S od roviny ϱ. Z planimetrie je známo, že přímka m a kružnice k

mohou mít tři možné vzájemné polohy. Probereme si postupně ty tři případy a zjistíme, co z nich vyplývá pro plochu kulovou a rovinu ϱ.

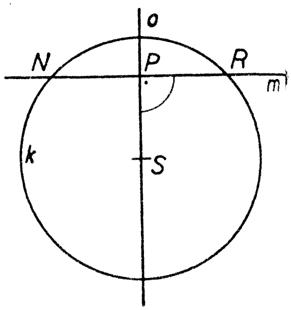
1. Přímka m je nesečna kružnice k (jako na obr. 114). V tomto případě nemá rovina ϱ s kulovou plochou společný žádný bod. Taková rovina se nazývá nesečná rovina. Srovnáme-li vzdálenost $\overline{SP}$ s poloměrem r, dostaneme nerovnost $\overline{SP} > r$.



Obr. 114.



Obr. 115.



Obr. 116.

2. Obr. 115. Přímka m je tečnou kružnice k. V tomto případě má plocha kulová s rovinou ϱ společný jediný bod P. Taková rovina se jmenuje tečná rovina kulové plochy. P je bod dotyku. Říkáme, že se kulová plocha dotýká roviny ϱ. Srovnáme opět vzdálenost $\overline{SP}$ s poloměrem r; dostaneme $\overline{SP} = r$. Modelem této vzájemné polohy je třeba míč ležící na rovné podlaze.

3. Obr. 116. Přímka m je sečnou kružnice k, průsečíky jsou označeny písmeny N, R. Bod N nebo R vyplní při otáčení kružnici k_1 ležící v rovině ϱ. Středem kružnice k_1 je bod P, jejím poloměrem je úsečka $\overline{PN} = \overline{PR}$. Srovnáme opět vzdálenost $\overline{SP}$ s poloměrem r kulové plochy; vyjde $\overline{SP} < r$. Všimněme si pravoúhlého trojúhelníka SRP: označíme-li r_1 poloměr kružnice k_1, d vzdálenost $\overline{SP}$, jest podle Pythagorovy věty $r^2 = d^2 + r_1^2$. Z pravoúhlého trojúhelníka SRP dovedeme tedy určit na př. r_1, známe-li d a r.

Rovinu ϱ v tomto třetím případě nazýváme sečnou rovinou kulové plochy. Modelem takové vzájemné polohy je míč plovoucí na klidné vodní hladině. Kde je vidět kružnici k_1?

Je dána plocha kulová o poloměru r. Rovina ϱ má od jejího středu vzdálenost $d < r$. Tato rovina ϱ je sečná; nemůže být totiž tečnou ani nesečnou rovinou, neboť pro tečnou nebo nesečnou rovinu platí podle odstavců 1, 2

$d \geq r$. Rovina ϱ protne tedy kulovou plochu v kružnici k s poloměrem r_1. Ježto platí $r_1 = \sqrt{r^2 - d^2}$, je buď $r_1 < r$, nebo $r_1 = r$. V kterém případě je $r_1 = r$? Jen tehdy, je-li $d = 0$, t. j. jde-li rovina středem plochy kulové. Na ploše kulové tedy neleží žádná kružnice o poloměru větším než r.

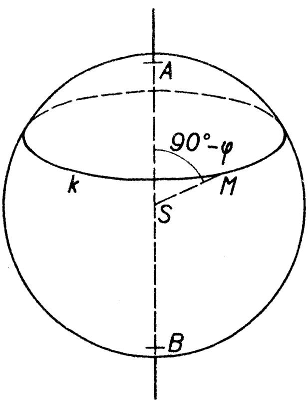
Každá kružnice na kulové ploše, která má poloměr rovný poloměru r kulové plochy, jmenuje se hlavní kružnice; ostatní kružnice na kulové ploše s poloměry menšími než r se jmenují vedlejší kružnice. Příkladem hlavních kružnic na povrchu zeměkoule jsou rovník a dvojice poledníků (poledník je polokružnice!). Příkladem vedlejších kružnic jsou ostatní rovnoběžky.

V zeměpise jsme se naučili, jak se určuje poloha místa na povrchu zeměkoule; zopakujeme si to teď v souvislosti s kulovou plochou.

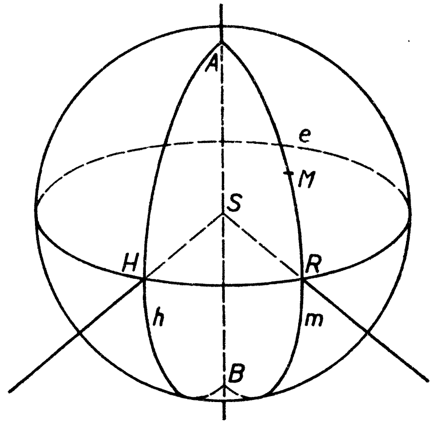
Na obr. 117 je znázorněna zeměkoule, A, B jsou její póly, kružnice k je jedna rovnoběžka. Spojíme kterýkoli bod M na rovnoběžce k se středem S zeměkoule: **úhel** MSA (také MSB) **je pro všechny body** M **na té rovnoběžce stejný.**

Dokážeme vyslovenou větu ve dvou případech: a) rovnoběžka k je rovník: pak je úhel $\sphericalangle MSA = 90°$; b) rovnoběžka k není rovník: pak spojnice bodů M se středem S určují rotační kužel s osou AS; proto je úhel MSA stále týž.

Jeden z úhlů MSA nebo MSB není tupý; to záleží na tom, leží-li bod M na severní polokouli nebo na jižní. Doplněk tohoto úhlu na 90° nazýváme zeměpisnou šířkou bodu M; označujeme ji řeckým písmenem φ (čti fí). Abychom rozeznali body na severní a jižní polokouli, připojujeme k úhlu zkratky s. š. (severní šířky) a j. š. (jižní šířky).



Obr. 117.



Obr. 118.

Na obr. 118 vidíme opět obraz zeměkoule, h je určitý základní poledník (na př. greenwichský), M je nějaký bod na povrchu zeměkoule, m je tak zvaný místní poledník bodu M, t. j. poledník, který tím bodem prochází. (Takový poledník je jediný — proč?)

Poledníky h, m leží ve dvou polorovinách ABH a ABM, které mají společnou hraniční přímku AB. Ty dvě poloroviny protnou rovinu rovníku ε ve dvou polopřímkách SH, SR. Dutý nebo přímý úhel polopřímek SH, SR se jmenuje zeměpisná délka bodu M a označuje se řeckým písmenem λ (čti lambda). Abychom rozeznali, zda bod M leží na východní či západní polokouli (od hlavního poledníku), připojujeme zkratky v. d. (východní délky) a z. d. (západní délky). Zeměpisná šířka a délka bodu M se souhrnně nazývají zeměpisné souřadnice toho bodu.

Povíme si nyní ještě o jedné vlastnosti kulové plochy, která má velký význam pro zeměkouli. Víme, že nejkratší spojnice dvou bodů v rovině je úsečka omezená těmi body. Lze dokázat, že nejkratší spojnice dvou bodů P, Q ležících na ploše kulové po této ploše je kratší oblouk **hlavní** kružnice, která jimi prochází. Taková kružnice je jediná, jestliže body P, Q, S neleží v přímce. Je-li PQ průměr plochy kulové, pak nejkratší spojnice bodů P, Q po ploše kulové je kterákoli hlavní polokružnice jimi omezená. Vlastnost, že nejkratší spojnice dvou bodů na ploše kulové je oblouk hlavní kružnice, je velmi důležitá pro plavbu po moři a pro letectví. Na globu si vyhledáme na př. město Kyjev v SSSR a jižní cíp poloostrova Kamčatky. Určíme si oblouk hlavní kružnice procházející těmi dvěma místy tak, že napneme mezi nimi nit. Obě místa leží přibližně na téže rovnoběžce 50° s. š. Jejich nejkratší spojnice zřejmě nesplývá s rovnoběžkou 50° s. š. Má-li letadlo letět z Kyjeva na jižní cíp Kamčatky, bude výhodné, poletí-li přímo na východ?

Cvičení.

a) *Koule a rovina.*

177. Krychle má hranu 6 cm; plocha kulová má střed ve středu krychle a její poloměr je a) 2 cm, b) 3 cm, c) 4 cm. Jakou vzájemnou polohu má plocha kulová a rovina jedné (kterékoli) stěny?

178. Krychle má hranu 6 cm, plocha kulová má střed ve středu krychle a její poloměr je 4 cm. a) Sestrojte kružnici, v níž protíná plocha kulová stěnu krychle. b) Vypočtěte poloměr té kružnice.

179. Míč průměru 20 cm plove na klidné hladině vodní tak, že jeho nejvyšší bod je 12 cm nad hladinou. a) Narýsujte kružnici, podél které obklopuje voda povrch míče. b) Vypočtěte její poloměr.

180. Koule má průměr 232 mm. Rovinným řezem chceme oddělit takovou část, aby vznikl kruh o průměru 18 cm. V jaké vzdálenosti od středu koule má být veden řez?

181. Je dán pravidelný čtyrstěn $ABCD$ s hranou 5 cm. Vrchol D je středem plochy kulové, která se dotýká roviny ABC. Vypočtěte její poloměr.

182. Koule je sevřena mezi dvěma rovnými a rovnoběžnými deskami. Odůvodněte, že vzdálenost vnitřních stěn těch desek je průměr koule.

***183.** Co je geometrické místo středů kulových ploch, které mají daný poloměr r a dotýkají se dané roviny ϱ?

184. Míč se kutálí po podlaze tak, že se stále dotýká jedné stěny místnosti. Po jaké čáře probíhá jeho střed?

185. P, Q jsou dva body kulové plochy. Dokažte, že úsečka PQ je nejdelší, prochází-li středem kulové plochy. Návod: spojte body P, Q se středem kulové plochy.

186. Plocha kulová má poloměr 56 dm. Jeden její průměr je rozdělen čtyřmi rovinami k němu kolmými na pět stejně dlouhých úseček. Vypočtěte poloměry průsečných kružnic.

b) *Zeměpisné souřadnice.*

V dalších cvičeních dosazujte za poloměr zeměkoule 6 370 km.

***187.** Jaká je nejkratší vzdálenost dvou míst na rovníku, jejichž zeměpisné délky jsou: $\lambda_1 = 125°$ z. d., $\lambda_2 = 15°$ v. d.?

***188.** Opakujte cvičení 187 pro Leningrad a Alexandrii. Obě místa leží přibližně na témž poledníku (30° v. d.). Návod: určete si z mapy jejich zeměpisné šířky.

***189.** Označíme r poloměr zeměkoule. Vyjádřete pomocí r poloměr a) rovnoběžky 30° j. š., b) rovnoběžky 60° s. š. Návod: protněte zeměkouli rovinou některého poledníku a sestrojte obraz.

***190.** Leningrad má zeměpisné souřadnice přibližně $\varphi_1 = 60°$ s. š., $\lambda_1 = 30°$ v. d. Šíje poloostrova Kamčatky má souřadnice přibližně $\varphi_2 = 60°$ s. š., $\lambda_2 = 163°$ v. d. Vypočtěte jejich vzdálenost měřenou po rovnoběžce. Je to jejich nejkratší vzdálenost? Návod: vypočtěte délku příslušného oblouku rovnoběžky a použijte k tomu výsledku cvičení 189.

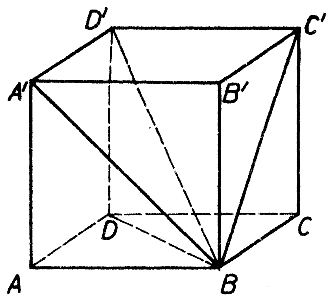
11. Objemy a povrchy těles.

Každé těleso zaujímá jistou část prostoru. Důležitým úkolem stereometrie je zjistit velikost této části prostoru čili určiti tak zvaný objem tělesa. Takové úlohy jsme řešili už v dřívějších třídách. Víme, že to vlastně znamená vypočísti z rozměrů daného tělesa počet krychlí o hraně na př. 1 cm, které vyplní stejně velkou část prostoru jako dané těleso. Pak je objem vyjádřen v krychlových centimetrech (cm³).

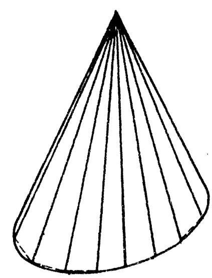
1. úloha. a) Jak se vypočte objem krychle, jejíž hrana je a metrů? (a^3 m³.) b) Jak objem kvádru, jehož rozměry jsou v centimetrech a, b, c? (abc cm³.) c) Jak se vypočte objem hranolu (kolmého či kosého), jehož podstava má obsah P dm² a jehož výška je v decimetrů? (Pv dm³.) d) Jak se vypočte objem rotačního válce, jehož podstava je kruh o poloměru r cm a jehož výška je v dm? ($10\pi r^2 v$ cm³.)

Letos jsme hovořili o dalších tělesech: jehlanech, kuželích a kouli. Probereme nyní stručně, jak se určuje objem těchto těles.

Nejdříve uvedeme příklad o jehlanech. Na obr. 119 vidíme krychli s obvyklým označením vrcholů. Tato krychle je rozdělena několika řezy ve tři čtyrboké jehlany se společným hlavním vrcholem B. Jsou to: $A'B'C'D'B$, $ADD'A'B$, $CC'D'DB$. Každý z těch jehlanů má za podstavu jednu stěnu krychle, dvě pobočné stěny jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky a dvě jsou různostranné trojúhelníky. Strany těchto trojúhelníků jsou: hrana krychle, úhlopříčka stěny a tělesová úhlopříčka. Na př. jehlan $A'B'C'D'B$ má podstavu $A'B'C'D'$, rovnoramenné trojúhelníky jsou $A'B'B$, $B'C'B$, různostranné trojúhelníky jsou $A'D'B$, $C'D'B$.



Obr. 119.


Obr. 120.

2. úloha. Sestrojte sítě všech tří jehlanů! Sítě jsou shodné obrazce. Složte z nich modely jehlanů a z těch složte krychli.

Každý ze tří jehlanů vyplní patrně stejně velkou část prostoru, t. j. všechny tři mají týž objem. Protože dohromady skládají krychli, je objem každého z nich třetina objemu krychle. Označíme-li délku hrany krychle a, je objem každého jehlanu $V = \frac{a^3}{3}$. Obsah podstavy jehlanu je však $P = a^2$, jeho výška je $v = a$: můžeme tedy také napsati $V = \frac{P \cdot v}{3}$. Tento vzorec byl odvozen pro určitý jehlan, jehož podstava je čtverec a pobočné stěny jsou jisté trojúhelníky. Dá se však dokázati pro jakýkoli jehlan: odvození je dosti složité, a proto od něho upustíme.

Od jehlanu přejdeme k rotačnímu kuželi obdobným způsobem, jako jsme přešli od hranolu k rotačnímu válci.

Obr. 120. Rotačnímu kuželi vpíšeme pravidelný jehlan n-boký. Je-li číslo n hodně velké, budou objemy obou těles (jehlanu i kužele) přibližně stejné. **Máme tedy pro výpočet objemu všech jehlanů i rotačních kuželů tento vzorec:**

$$V = \frac{P \cdot v}{3},$$

kde P značí obsah podstavy, v výšku; oboje musí být vyjádřeno v jednotkách k sobě příslušných, na př. P v centimetrech čtverečných, v v centimetrech.

3. úloha. Vysvětlete podrobně, co znamená výrok „do rotačního kužele vpíšeme pravidelný jehlan n-boký". Upravte vzorec pro objem rotačního kužele, víte-li, že jeho podstava je kruh o poloměru r. Vyjde $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$.

Několikrát jsme se už setkali s úlohou vypočíst povrch daného hranolu nebo jehlanu. Víme, že povrch vypočítáme, určíme-li obsahy všech stěn tělesa a tyto obsahy sečteme.

4. úloha. Napište vzorec pro povrch a) krychle o hraně a cm ($S = 6a^2$ cm^2), b) kvádru s rozměry a, b, c mm [$S = 2(ab + bc + ca)$ mm^2], c) pravidelného hranolu trojbokého, jehož hrana podstavy je h dm a pobočná hrana k dm ($S = 3\,hk + \frac{h^2}{2}\sqrt{3}$ dm^2), pravidelného čtyrbokého jehlanu s hranou podstavy a metrů a výškou pobočné stěny u metrů ($S = a^2 + 2au$ m^2), e) pravidelného čtyrstěnu s hranou h cm ($S = h^2\sqrt{3}$ cm^2).

Konstruktivně určíme povrch hranolu nebo jehlanu tak, že sestrojíme jeho síť. Protože umíme sestrojiti také síť rotačního válce a rotačního kužele, dovedeme také vypočíst jejich povrch; je třeba vypočíst jen obsah té sítě.

5. úloha. Načrtněte, jak vypadá síť rotačního válce i rotačního kužele a popište rozměry obrazců. Napište vzorec pro povrch rotačního válce, jehož podstava je kruh o poloměru r cm a jehož výška je v cm. Vyjde $S = 2\,\pi r^2 + 2\,\pi r v$ cm^2. Napište vzorec pro povrch rotačního kužele, jehož podstava je kruh o poloměru r dm a jehož strana měří s dm. Dostanete $S = \pi r^2 + \pi r s$ dm^2.

Zbývá nám všimnouti si objemu a povrchu koule (čili obsahu plochy kulové). Odvození příslušných vzorců je složité a upustíme od něho; řekneme si k nim jen několik poznámek.

V planimetrii jsme odvodili vzorec pro obsah kruhu s poloměrem r, vyšlo nám $P = \pi r^2$. Označíme-li P_0 obsah čtverce o straně r, pak poměr obsahů $P : P_0$ má stejnou hodnotu pro všecky kruhy, rovnou číslu π ($\pi r^2 : r^2 = \pi$). Obdobné výsledky se dají odvoditi pro kouli. Objem V koule o poloměru r srovnáme s objemem V_0 krychle, jejíž hrana má délku r. Dá se dokázati, že poměr objemů $V : V_0$ (vyjádřených ve stejných jednotkách, na příklad v cm^3) je totéž číslo pro všecky koule. Je zajímavé, že toto číslo souvisí jednoduchým způsobem s Ludolfovým číslem, je totiž rovno $\frac{4}{3}\pi$. Protože $V_0 = r^3$, dostaneme z rovnice $V : r^3 = \frac{4}{3}\pi$ **vzorec pro objem koule:**

$$V = \frac{4}{3}\pi \, . \, r^3.$$

Objem koule určil po prvé řecký matematik Archimedes v 3. století př. n. l. velmi důmyslným způsobem: převedl určení objemu koule na stejnou úlohu pro vhodně volený rotační válec. Jeho objev byl tak ceněn, že mu byla dokonce skupina těchto dvou těles dána na náhrobek.

Pro výpočet povrchu S koule s poloměrem r srovnáme obsah plochy kulové s obsahem P_0 čtverce o straně r. Také v tomto případě se ukáže, že poměr $S : P_0$ je pro všecky koule stejný a je roven 4π. Ježto $P_0 = r^2$, dostaneme tento **vzorec pro povrch koule:**

$$S = 4\pi r^2.$$

Cvičení.

a) Jehlan a rotační kužel.

191. Vypočtěte objem jehlanu: a) jeho výška je 15 cm, podstava je čtverec o straně 9 cm; b) výška je 6 cm, podstava je obdélník s rozměry 4 cm, 5 cm; c) výška je 8 dm, podstava je trojúhelník o stranách 4 dm, 3 dm, 5 dm. Co dovedete říci o úhlech tohoto trojúhelníka?

192. Objem jehlanu je 97 cm^3, podstava je čtverec o straně 53 mm. Vypočtěte výšku jehlanu.

193. Objem jehlanu je 147 cm^3, výška je 14 cm. Vypočtěte obsah podstavy.

194. Všecky pobočné hrany jehlanu mají délku 2 m, podstava je čtverec o straně 1 m. Určete objem a povrch jehlanu.

195. Všecky pobočné hrany jehlanu mají délku 13 cm, podstava je obdélník o rozměrech 6 cm, 8 cm. Vypočtěte objem a povrch jehlanu.

196. Podstava pravidelného jehlanu čtyrbokého je čtverec o straně 4 dm, objem jehlanu je 32 dm^3. Vypočtěte výšku a délky pobočných hran.

***197.** a) Napište vzorec pro objem pravidelného čtyrstěnu s hranou h. b) Pravidelný čtyrstěn má povrch 1 m^2. Jak velký má objem? Návod: použijte výsledku úlohy 4 e).

198. Největší egyptská pyramida (Cheopsova) je pravidelný čtyrboký jehlan, hrana podstavy je asi 227 m, výška asi 140 m. Kolik váží spotřebovaný stavební kámen, jestliže 1 m^3 žuly váží asi 2,5 tuny? Při výpočtu nebudeme dbát chodeb a místností uvnitř pyramidy.

199. Určete objem rotačního kužele, jestliže a) výška je 4 dm, obsah podstavy 15 dm^2; b) výška je 7 cm, poloměr podstavy 3 cm; c) výška je 6 cm, strana 1 dm; d) výška 5 cm; obvod podstavy 22 cm.

200. Objem rotačního kužele je 462 cm^3, poloměr podstavy je 7 cm. Vypočtěte výšku.

201. Podstava kuželovitého stanu má průměr 5 m, výška stanu je 3 m. Vypočtěte jeho objem.

***202.** Kuželovitá nálevka má objem půl litru, její výška je 7 cm. Vypočtěte průměr horního okraje. (Dolního otvoru nálevky nedbejte.)

***203.** Rovnostranný trojúhelník o straně 2,4 dm se otáčí kolem své výšky. Vypočtěte povrch a objem vzniklého tělesa.

b) Koule.

204. Vypočtěte povrch a objem koule, je-li dán a) poloměr 2,6 cm; b) průměr 728 mm.

205. Koule má povrch 1 m^2; vypočtěte její poloměr.

206. Krychle a koule mají stejný povrch. O kolik procent má koule větší objem? Návod: zvolte hranu krychle rovnou 1 a počítejte poměr objemů obou těles.

207. Dutá olověná koule má průměr 12 cm, tloušťku 2 cm. Kolik váží, je-li měrná váha olova 11,4 g/cm^3?

208. Objem koule je 24 cm^3. Vypočtěte její povrch. Návod: vypočtěte nejdříve poloměr.

209. Vypočtěte přibližně povrch zeměkoule v km^2. Zvolte $\pi \doteq 3{,}1416$, poloměr zeměkoule 6 370 km a počítejte na tři platné cifry.

***210.** Kolik dešťových kapek o průměru 2 mm vyplní polokulovitou sběračku s průměrem 8 cm?

***211.** Určete objem koule, jejíž povrch je 785,4 cm^2. Návod: vypočtěte nejdříve poloměr.

***212.** Ve válcové nádobě s průměrem 1,2 m je vody do výše 9 dm. Oč stoupne hladina vody, ponoří-li se do nádoby kovová koule s průměrem 9 dm?

12. Závislost povrchů a objemů na určujících prvcích.

Ve všech vzorcích pro povrchy a objemy těles musí být veškeré délky vyjádřeny v téže jednotce (na př. v centimetrech). Není-li tento předpoklad splněn, musíme před výpočtem převést délky na stejnou jednotku.

1. úloha. Vysvětlete to na příkladě z úlohy 1d) kapitoly 11. Upravte vzorec pro povrch rotačního kužele, jehož strana s je vyjádřena v decimetrech a poloměr podstavy r v milimetrech. Úpravu proveďte tak, že všecky délky převedete a) na decimetry, b) na centimetry, c) na milimetry.

Všimněme si, že ve vzorci pro povrch kvádru $S = 2\,ab + 2\,bc + 2\,ca$ je v každém členu na pravé straně rovnice součin dvou délek, neboť každý člen znamená obsah nějakého obrazce. Stejnou vlastnost má každý vzorec pro povrch tělesa.

2. úloha a) Ověřte si tu vlastnost na vzorci z úloh 4 a 5 kapitoly 11 i na vzorci pro povrch koule. b) Pro povrch kosého trojbokého hranolu byl odvozen vzorec $S = ab + au + bv + c$, kde a, b, c jsou délky hran podstavy, u, v výšky dvou pobočných stěn. Může být ten vzorec správný? Může, ovšem jen v tom případě, je-li výška třetí pobočné stěny rovna jedné, podst. je pravoúhlý trojúhelník jehož odvěsny jsou a, b.

Ve vzorci pro objem kvádru $V = abc$ je v členu na pravé straně rovnice součin tří délek. Stejnou vlastnost mají i ostatní vzorce pro objemy těles.

3. úloha. a) Ověřte si tu vlastnost pro vzorce z úlohy 1 kapitoly 11 pro objem jehlanu, rotačního kužele i koule. b) Může být správný vzorec $V = a^2$ pro objem jehlanu, jehož podstava je čtverec o straně a? Může, ovšem jen v tom případě, má-li jehlan výšku 3.

Z uvedených vlastností vyplývá tato důležitá poučka:

XVII. **Zvětší-li se všecky délky (rozměry) tělesa n-krát, zvětší se jeho povrch n^2-krát a jeho objem n^3-krát.**

Poučku si snadno odůvodníme: Napišme třeba opět vzorec pro povrch kvádru $S = 2\,ab + 2\,bc + 2\,ca$ a zvolme $n = 3$. To znamená, že nový kvádr bude mít rozměry $3a$, $3b$, $3c$. Ve vzorci pro povrch se tedy násobí každý člen na pravé straně činitelem $3^2 = 9$, t. j. nový povrch je $3^2 . S = 9\,S$.

Číslo n v poučce XVII může být také zlomek, na př. $\frac{2}{3}$, může být i menší než 1, na př. $\frac{1}{4}$. V tomto případě vyslovíme poučku XVII srozumitelněji takto: zmenší-li se délky tělesa n-krát, zmenší se povrch tělesa n^2-krát.

Cvičení.

213. Dva rozměry kvádru se zdvojnásobily, třetí zůstal beze změny. Jak se změnil povrch a jak objem kvádru?

214. U rotačního kužele se zdvojnásobil poloměr podstavy, ale výška byla zmenšena na polovinu. Jak se změnil objem toho kužele?

215. Krychle o hraně b má objem dvojnásobný vzhledem ke krychli o hraně a. V jakém poměru jsou délky a, b?

216. Jak je třeba změnit poloměr koule, aby se ztrojnásobil a) její objem, b) její povrch?

217. Povrchy dvou krychlí jsou v poměru 4 : 9. Určete poměr hran.

***218.** Určete poměr objemů dvou rotačních válců, jejichž rozvinuté pláště tvoří shodné obdélníky s rozměry a, b. (Jeden válec má výšku a, druhý b.)

***219.** Změřili jsme rozměry kufru: $a = 62$ cm, $b = 33$ cm, $c = 21$ cm. Při měření každého rozměru jsme se dopustili chyby nejvýše 0,5 cm. S jakou největší možnou chybou určíme a) povrch, b) objem kufru?

220. Průměr koule byl určen změřením 5,2 dm s chybou nejvýše 1 cm. Oč se nejvýše liší skutečný povrch koule od vypočteného?

IV. KONSTRUKTIVNÍ ÚLOHY.

1. Úlohy o kružnici.

A. Tětivové a tečnové čtyrúhelníky.

Již několikráte jsme se zabývali kružnicí trojúhelníku opsanou a kružnicí vepsanou. Jaké jsou to kružnice a jak sestrojíme jejich středy? Jsou ty středy různé body nebo splynou? Uveďte příklad trojúhelníka, kde oba středy splynou.

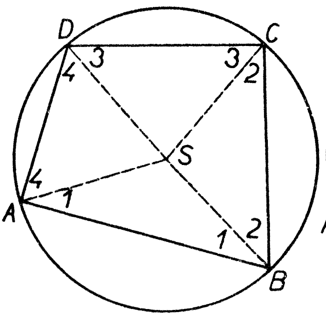
Kterou kružnici nazýváme opsanou a kterou vepsanou mnohoúhelníku? (Mnohoúhelníkem rozumíme v dalším stále mnohoúhelník vypuklý.) Každému mnohoúhelníku o více než třech stranách nelze opsati kružnici; uveďte příklad. Každému mnohoúhelníku o více než třech stranách nelze také vepsati kružnici; najděte příklad opět mezi čtyrúhelníky.

Mnohoúhelník, kterému lze opsati kružnici, nazýváme tětivový; mnohoúhelník, kterému lze vepsati kružnici, nazýváme tečnový. Mnohoúhelník, kterému lze opsati i vepsati kružnici, jmenujeme dvojstředový.

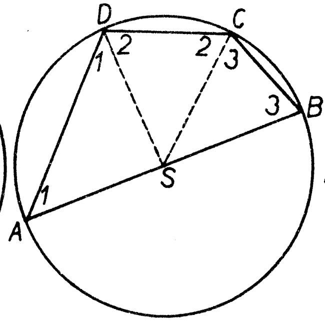
Velmi jednoduchou a důležitou vlastnost mají tětivové čtyrúhelníky: **v tětivovém čtyrúhelníku jsou každé dva protější úhly výplňkové.**

Tuto vlastnost dokážeme za pomoci obr. 121 až 123. Tyto tři obrázky znázorňují trojí různou možnou polohu středu S opsané kružnice vzhledem k tětivovému čtyrúhelníku $ABCD$. Buď je S uvnitř čtyrúhelníka (obr. 121), nebo leží na jeho straně (obr. 122), nebo je vně čtyrúhelníka (obr. 123). Na každém obrázku jsou spojeny vrcholy A, B, C, D se středem S; tak vzniknou rovnoramenné trojúhelníky. Stejné úhly při jejich základnách jsou označeny stejnými číslicemi.

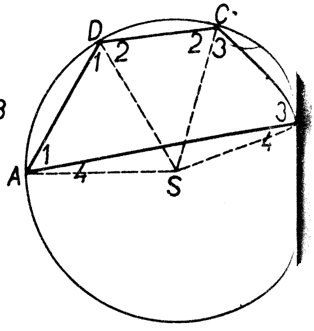
Projděme všecky tři případy a ověřme si, že úhly $\alpha + \gamma$ a $\beta + \delta$ jsou složeny ze stejně velkých částí. V třetím případě je $\sphericalangle 1 - \sphericalangle 4 + \sphericalangle 2 +$



Obr. 121.



Obr. 122.



Obr. 123.

$+ \sphericalangle 3 = \alpha + \gamma$, $\sphericalangle 3 - \sphericalangle 4 + \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \beta + \delta$. Je tedy vždycky $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Protože součet všech vnitřních úhlů čtyrúhelníku je $4R$, je $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 2\,R$.

Později dokážeme, že předcházející poučku je možné obrátit takto: má-li čtyrúhelník dva protější úhly výplňkové, je tětivový.

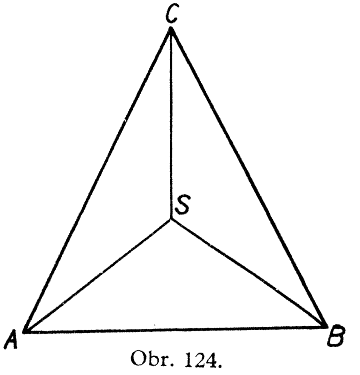
1. úloha. Víme, že se čtyrúhelníky třídí podle vzájemné polohy stran na rovnoběžníky, lichoběžníky a různoběžníky. Na základě poučky o tětivovém čtyrúhelníku dokažte, že

a) každý tětivový rovnoběžník je pravoúhlý (t. j. obdélník nebo čtverec);

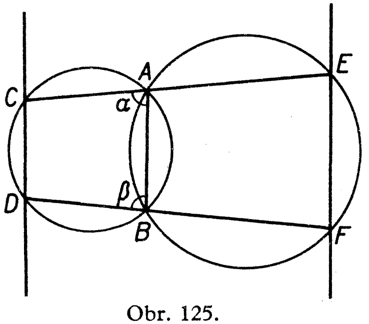
b) každý tětivový lichoběžník je rovnoramenný.

Cvičení.

221. Obr. 124. Spojnice středů vepsané a opsané kružnice trojúhelníka ABC jde vrcholem C. Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB. Návod: je-li S střed opsané kružnice, je SC osa úhlu γ; počítejte úhly SAB, SBC.



Obr. 124.

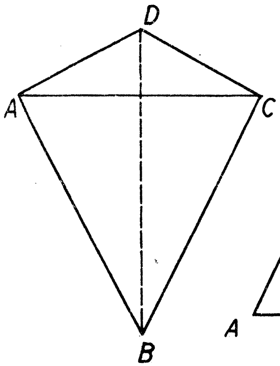


Obr. 125.

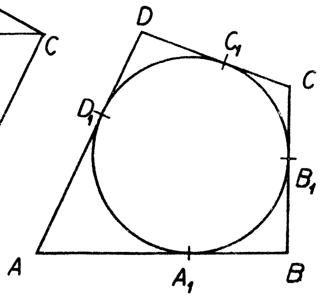
222. V obr. 125 vyjádřete všecky úhly čtyrúhelníka $CDFE$ pomocí úhlů α, β. Z výsledku odvoďte, že $CD \parallel EF$.

223. Do kružnice o poloměru $r = 4{,}5$ cm vpište tětivový čtyrúhelník $ABCD$ tak, aby $\sphericalangle DAB = 45°$, $\sphericalangle ABC = 120°$, $\overline{AB} = r$.

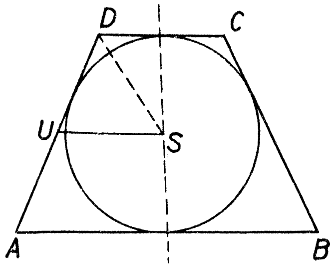
224. Obr. 126. Deltoid je — jak známo — čtyrúhelník složený ze dvou neshodných rovnoramenných trojúhelníků se společnou základnou. a) Dokažte, že každý deltoid je tečnový čtyrúhelník. Sestrojte si deltoid a vpište mu kružnici. b) Rozhodněte, kdy je deltoid tětivový čtyrúhelník.



Obr. 126.



Obr. 127.



Obr. 128.

225. Sestrojte dvojstředový deltoid (viz cvičení 224b), jsou-li dány délky dvou sousedních stran $\overline{AB} = 5{,}5$ cm, $\overline{AD} = 2{,}5$ cm. Opište a vpište mu kružnici.

★226. Obr. 127. V tečnovém čtyrúhelníku jsou součty protějších stran stejné. Dokažte. Návod: $\overline{AA_1} = \overline{AD_1}$ a podobně další.

★227. Obr. 128. a) Jak se dá vyslovit poučka ze cvičení 226 pro rovnoramenný lichoběžník, který je zároveň tečnový? Užijte pojmu střední příčky; b) Dokažte obrácení poučky: jsou-li v rovnoramenném lichoběžníku střední příčka a rameno stejně dlouhé, pak je lichoběžník dvojstředový. Návod: dokažte, že DS je osa úhlu UDC; S značí střed střední příčky.

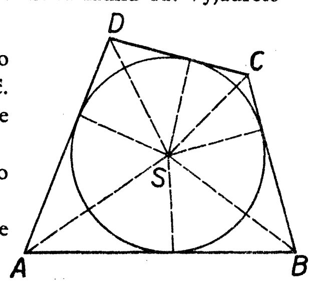
228. Dvojstředový lichoběžník má jednu základnu 7 cm, druhou poloviční. Sestrojte jej.

229. Dvojstředový lichoběžník má kratší základnu a, delší základnu $4a$. Vyjádřete délku jeho ramene a výšku pomocí a.

★230. Jediný dvojstředový čtyrúhelník, u kterého splynou středy kružnice opsané a vepsané, je čtverec. Dokažte s pomocí obr. 129, že osm trojúhelníků, na něž je rozdělen čtyrúhelník $ABCD$, jsou trojúhelníky shodné.

231. Sestrojte tětivový čtyrúhelník $ABCD$, je-li dáno $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{CD} = 3{,}5$ cm, $\sphericalangle ABC = 60°$.

★232. Dokažte, že každý tečnový rovnoběžník je rovnostranný, t. j. kosočtverec nebo čtverec.

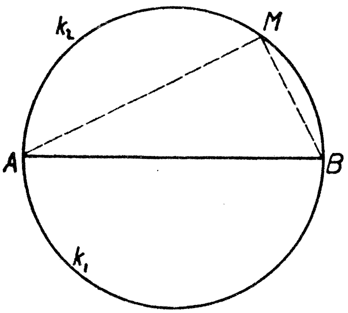


Obr. 129.

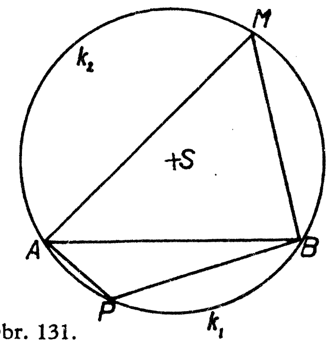
B. Obvodový úhel.

Pravoúhlý trojúhelník má tuto důležitou vlastnost: střed jemu opsané kružnice leží ve středu přepony. Tato vlastnost je pro pravoúhlý trojúhelník charakteristická. To znamená, že každý trojúhelník, jehož opsaná kružnice má střed ve středu některé strany, je pravoúhlý.

Výsledky, které jsme právě zopakovali, vyslovíme nyní jinak. Na obr. 130 je kružnice rozdělena průměrem AB na polokružnice k_1, k_2. Dále je zvolen na polokružnici k bod M jiný než body A, B. Úhel AMB budeme nazývati obvodovým úhlem příslušným k polokružnici k_1.



Obr. 130.



Obr. 131.

K polokružnici k_1 přísluší zřejmě nekonečně mnoho obvodových úhlů; všechny jsou pravé. Když jsme počítali délku oblouku kružnice, používali jsme středového úhlu. Středový úhel příslušný k polokružnici je přímý a je tedy roven dvojnásobku obvodového úhlu.

Poučka, že **obvodový úhel příslušný k polokružnici je pravý,** byla známa asi už v 6. století př. n. l. a nazývá se Thaletova. Thales byl řecký geometr, který ji pravděpodobně první vyslovil.

Na obr. 131 je kružnice rozdělena tětivou AB, která není průměrem, na dva oblouky k_1, k_2. Dále jsou na obrázku sestrojeny dva úhly AMB, APB, které budeme nazývat obvodové úhly; $\sphericalangle AMB$ je obvodový úhel příslušný k oblouku k_1, $\sphericalangle APB$ je obvodový úhel příslušný k oblouku k_2.

Obr. 131. Z tětivového čtyrúhelníka $AMBP$ plyne, že

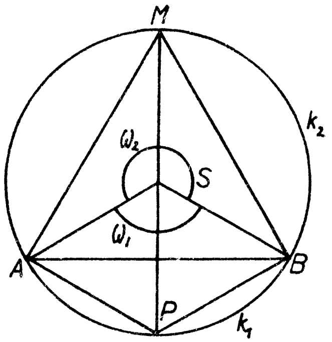
a) obvodové úhly příslušné k obloukům k_1, k_2 jsou výplňkové;

b) všecky obvodové úhly příslušné k oblouku k_1 jsou stejné, neboť mají týž úhel výplňkový;

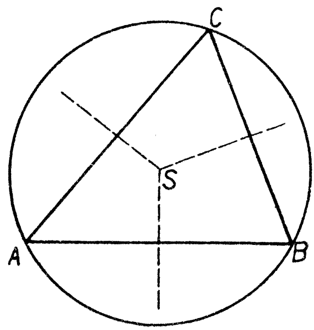
c) všecky obvodové úhly příslušné k oblouku k_2 jsou stejné.

Na obr. 132 je dutý úhel ASB, označený ω_1, středovým úhlem oblouku k_1, vypuklý úhel ASB, označený ω_2, je středovým úhlem oblouku k_2. Protože $\omega_2 > \omega_1$, je také délka oblouku k_2 větší než délka oblouku k_1. Středem kružnice S je vedena přímka $MP \perp AB$. Ta přímka půlí oba obvodové úhly AMB, APB i oba středové úhly ω_1, ω_2, neboť je to společná výška rovnoramenných trojúhelníků AMB, APB, ASB. Úhel ASP je vnější úhel rovnoramenného trojúhelníka ASM, proto je $\sphericalangle ASP = \sphericalangle AMS + \sphericalangle MAS = 2 \sphericalangle AMS$. Protože $\sphericalangle AMB = 2 \sphericalangle AMS$, $\sphericalangle ASB = 2 \sphericalangle ASP$, je $\omega_1 = \sphericalangle ASB = 2 \sphericalangle AMB$ a podobně $\omega_2 = 2 \sphericalangle APB$.

Platí tedy věta: **Všecky obvodové úhly příslušné k témuž oblouku kružnice jsou si rovny a rovnají se polovině příslušného středového úhlu.**



Obr. 132.



Obr. 133.

Obr. 132. Tětiva AB, která není průměrem, rozděluje kružnici na dva oblouky, kratší k_1, delší k_2. Obvodový úhel příslušný ke kratšímu oblouku je ostrý, obvodový úhel příslušný k delšímu oblouku je tupý. Jak je tomu s obvodovými úhly, je-li tětiva průměrem?

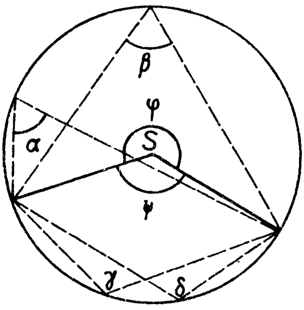
2. úloha. Obr. 133. Dokažme známou vlastnost trojúhelníka, že **střed** S **kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku** ABC **leží uvnitř trojúhelníka.** Ježto úhel α je ostrý, je oblouk BAC delší oblouk omezený tětivou BC, a proto body A, S leží v téže polorovině vyťaté přímkou BC. Podobná úvaha platí pro úhly β, γ. To znamená, že body B, S leží v téže polorovině vyťaté přímkou CA, body C, S leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB. Střed S leží tedy uvnitř trojúhelníka.

Dokažte podobně sami, že střed kružnice opsané tupoúhlému trojúhelníku leží vně trojúhelníka. Jak je tomu, je-li trojúhelník pravoúhlý?

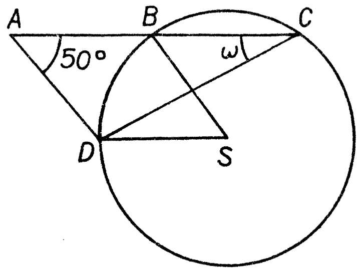
Cvičení.

233. Obr. 134. a) Je-li $\psi = 130°$, určete α, β. b) Je-li $\beta = 74°$, určete ψ, α. c) Je-li $\alpha = 66°$, určete β. d) Je-li $\varphi = 230°$, určete γ, δ. e) Je-li $\alpha = 64°$, určete ψ, φ, δ. f) Je-li $\psi = 126°$, určete β, δ. g) Je-li $\alpha = 58°$, určete δ. h) Je-li $\gamma = 110°$, určete β.

234. V obr. 135 je $ABSD$ rovnoběžník. Určete ω.



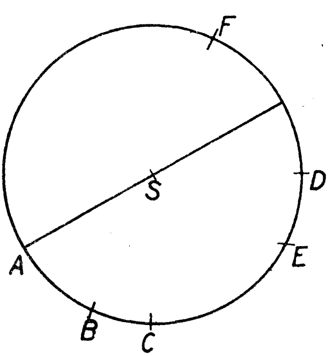
Obr. 134.



Obr. 135.

235. Úhel α rovnoramenného trojúhelníka ABC je roven 32°. Určete středové úhly nad oblouky, na něž rozdělí opsanou kružnici strany trojúhelníka. (Kterákoli strana může být základnou.)

236. $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Určete úhly trojúhelníka ABD. Návod: určete nejprve úhly $\triangle\, BCD$.



Obr. 136.

237. Na obr. 136 je S střed kružnice, úhel $\sphericalangle\, ASB = 36°$, $\sphericalangle\, ASC = 60°$ $\sphericalangle\, ASD = 150°$. a) Určete úhel AFB, úhel BFC, úhel AED, úhel CED. b) Je-li $\sphericalangle\, ASF = 2.\ \sphericalangle\, DSF$, určete $\sphericalangle\, DAF$.

238. Určete úhly trojúhelníka, který dostanete, spojíte-li na hodinách číslice 2, 6, 9.

***239.** Dokažte, že na hodinách stojí spojnice číslic 1, 4 kolmo na spojnici číslic 2, 9.

***240.** Dvě tětivy AB, CD se protínají kolmo uvnitř kružnice. Je-li úhel BAC roven 35°, určete úhel ABD.

***241.** Body C, D leží na kružnici s průměrem AB. a) Je-li úhel $\sphericalangle\, ADC = 127°$, určete úhel BAC. b) Je-li $\sphericalangle\, BCD = 25°$, určete úhel ABD.

***242.** Čtyrúhelník $ABCD$ je tětivový. a) Je-li úhel ADC roven 70°, úhel ACD roven 50°, určete úhel CBD. b) Je-li úhel BAD roven 98°, úhel ABC roven 106°, úhel BDC roven 50°, určete ostrý úhel, jehož ramena leží v přímkách AC, BD.

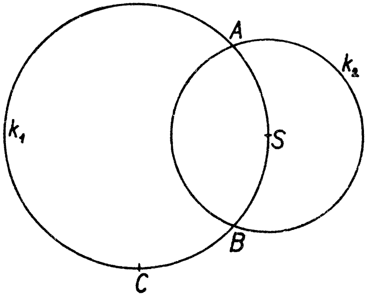
***243.** Dvě kružnice se protnou v bodech A, B. Jsou-li AC, AD průměry kružnic, dokažte, že body B, C, D leží na přímce. (Spojte AB.)

244. Má-li vypuklý čtyrúhelník dva protější úhly výplňkové, je tětivový; dokažte. Návod: dokažte, že vrchol D leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

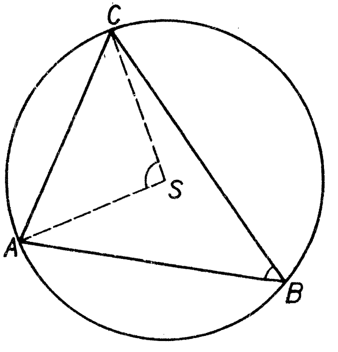
245. $ABCD$ je rovnoběžník. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC protne přímku CD mimo bod C ještě v bodě E. Dokažte, že trojúhelník ADE je rovnoramenný.

***246.** Obr. 137. Střed S kružnice k_2 leží na kružnici k_1. Dokažte, že CS je osa úhlu ACB. Při tom C je libovolný bod oblouku AB kružnice k_1, na němž neleží střed S.

247. A, B jsou dva body na kružnici o poloměru 5 cm. Kratší oblouk AB má délku 10 cm. Jak velký (v stupních) je obvodový úhel k němu příslušný?



Obr. 137.



Obr. 138.

248. K obvodovému úhlu 40° přísluší oblouk o 2 cm delší než k obvodovému úhlu 30°. Jak velký je poloměr kružnice?

249. Obr. 138. Kružnice je rozdělena body A, B, C na tři oblouky, jejichž délky jsou v poměru $2 : 3 : 4$. Vypočtěte úhly trojúhelníka ABC.

***250.** Kružnice je rozdělena čtyřmi body A, B, C, D na čtyři oblouky, jejichž délky jsou v poměru $2 : 3 : 4 : 6$. Vypočtěte úhly čtyrúhelníka $ABCD$.

***251.** Na kružnici k máme čtyři body v pořádku A, B, C, D. Dokažte, že osy úhlů BAC, BDC se protnou na kružnici k.

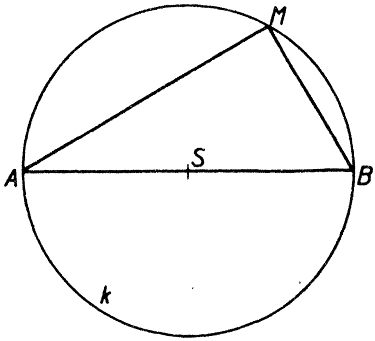
C. Geometrická místa.

S pojmem obvodového úhlu souvisí geometrické místo, kterého se velmi často používá při konstrukcích.

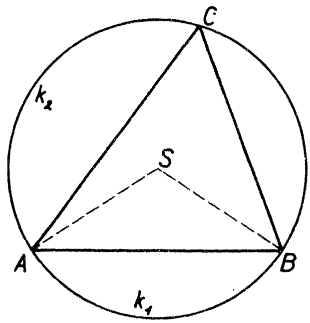
Určeme geometrické místo vrcholů pravoúhlých trojúhelníků, jejichž přeponou je daná úsečka AB. Nakreslete náčrtek.

Víme už z dřívějška, že střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku je střed jeho přepony. Vrcholy hledaných trojúhelníků tedy leží na kružnici k

sestrojené nad průměrem AB. (Obr. 139.) Obráceně: zvolíme-li na kružnici k bod M, pak úhel AMB je pravý, t. j. $\triangle\ ABM$ je pravoúhlý. Oba výsledky můžeme vysloviti souhrnně takto: **geometrické místo vrcholů pravoúhlých trojúhelníků, jejichž přeponou je daná úsečka AB, je kružnice sestrojená nad průměrem AB s vyloučením bodů A, B.**



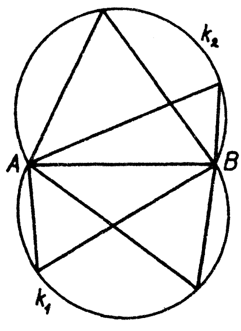
Obr. 139.



Obr. 140.

Rozřešíme nyní podobnou úlohu: hledejme geometrické místo vrcholů trojúhelníků, jejichž jednou stranou je daná úsečka AB a protější úhel ϱ je roven danému ostrému úhlu.

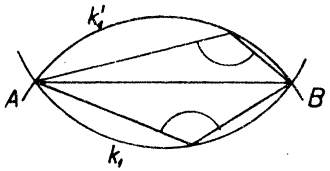
Na obr. 140 je zobrazen jeden takový trojúhelník ABC ležící v horní polorovině vyťaté přímkou AB. Sestrojíme kružnici se středem S opsanou trojúhelníku ABC. Body A, B rozdělí tu kružnici na dva oblouky: na delším z nich, označeném k_2, leží bod C (proč?). Kratší oblouk označíme k_1. Středový úhel příslušný k oblouku k_1 je $\sphericalangle\ ASB = 2 \sphericalangle\ ACB$. Střed S je tedy vrcholem rovnoramenného trojúhelníka ABS s danou základnou AB a se známým úhlem ASB při temeni. Trojúhelník ASB dovedeme sestrojit.



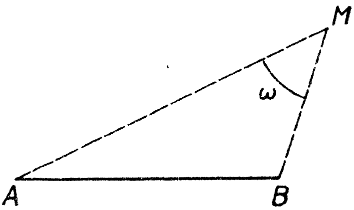
Obr. 141.

Obráceně každý bod M oblouku k_2 s výjimkou bodů A, B je bodem hledaného geometrického místa, neboť $\sphericalangle\ AMB = \gamma$. Geometrické místo se skládá z oblouku k_2 a ještě z oblouku k_1 (obr. 141), který je souměrně položen ke k_2 podle přímky AB. **Hledané geometrické místo jsou tedy dva oblouky k_2, k'_2 bez bodů A, B.** Sestrojte je pro $\overline{AB} = 4{,}5$ cm a úhel 60°.

Bude-li dán místo ostrého úhlu tupý, pak se geometrické místo skládá z menších oblouků k_1, k'_1. Jeho náčrtek je na obr. 142. Sestrojte to geometrické místo pro $\overline{AB} = 3$ cm a úhel 135°.



Obr. 142.



Obr. 143.

Úlohu, kterou jsme právě rozřešili, můžeme vyslovit také jinak: **hledejme geometrické místo bodů, z nichž je danou úsečku viděti pod daným úhlem.** Při tom výrok „úsečku AB je viděti z bodu M pod úhlem ω" znamená to, co je znázorněno na obr. 143. Vyslovte to! Ještě jiné vyjádření téže úlohy je toto: určeme geometrické místo vrcholů úhlů dané velikosti ω, jejichž ramena procházejí danými body A, B. Náležejí body A, B v tomto případě geometrickému místu či nikoli?

Cvičení.

252. Na straně AB čtverce $ABCD$ vyhledejte body, z nichž je stranu CD viděti pod úhlem a) 45°, b) 50°, c) 90°.

253. Vyhledejte body, z nichž je viděti obě strany AB, BC čtverce $ABCD$ pod úhlem a) 30°, b) 45°.

254. Je dána úsečka $\overline{AB} = 5$ cm. Najděte bod, z něhož je viděti úsečku AB pod úhlem 60° a který je co nejvíce vzdálen od bodu A. Kolik má úloha řešení?

255. Určete všechny body, z nichž můžete viděti obě fronty domu, které tvoří obě odvěsny pravoúhlého trojúhelníka pod úhlem 90°.

256. Je dán trojúhelník ABC ($\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CA} = 5$ cm). Najděte bod, z něhož je viděti stranu AC pod úhlem 30°, stranu BC pod úhlem 45°.

***257.** Je dán trojúhelník o stranách 45 mm, 50 mm, 60 mm. Sestrojte bod, z něhož je viděti obě kratší strany pod úhlem 120°. Pod jakým úhlem je z toho bodu viděti třetí stranu? Lze ke každému trojúhelníku sestrojit bod, z něhož je všecky tři strany viděti pod úhlem 120°?

258. Trojúhelník ABC ($\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 4{,}5$ cm, $\overline{CA} = 6$ cm) proměňte v trojúhelník o stejném obsahu a stejné straně AB, ale takový, aby měl proti straně AB úhel 45°.

***259.** Čtyrúhelník $ABCD$ proměňte ve čtyrúhelník $AB'CD'$ o stejném obsahu tak, aby měl při vrcholech B', D' pravé úhly.

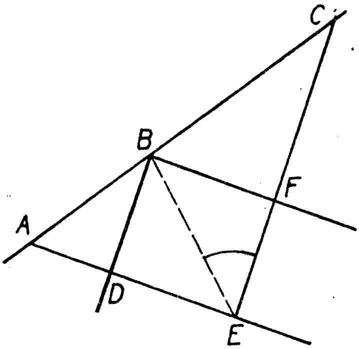
***260.** Obr. 144. Na přímce leží body A, B, C (v tomto pořádku) tak, že $\overline{AB} = 20$ mm, $\overline{BC} = 35$ mm. Sestrojte čtverec $BDEF$ tak, aby jeden jeho vrchol byl bod B a aby protější strany v prodloužení procházely body A, C. Kolik má úloha řešení? Návod: zkoumejte, pod jakými úhly se jeví z bodu E úsečky AB, BC.

261. Je dána úsečka $\overline{AB} = 6$ cm. Sestrojte trojúhelník ABC takový, aby $\sphericalangle ACB = 135°$ a aby výška v_c byla co nejdelší.

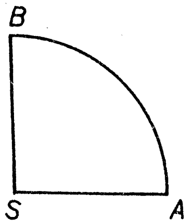
***262.** Obr. 145. Na čtvrtkružnici AB najděte body, z nichž je viděti úsečky AS, BS pod stejným úhlem. Jak velký je ten úhel?

***263.** Na obr. 146 jsou zobrazeny dva kruhové oblouky k_1, k_2 nad společnou tětivou AB; k_1 leží uvnitř kružnice, které náleží k_2. X je bod oblouku k_1, Y je bod oblouku k_2. Dokažte, že $\sphericalangle AXB > \sphericalangle AYB$. Návod: užijte bodů U, V ležících na ose úsečky AB.

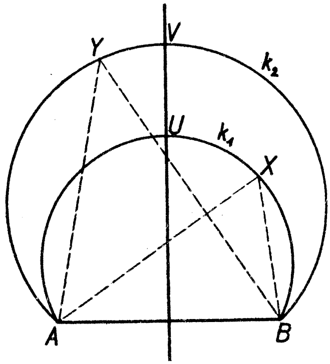
264. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník, je-li dána jeho výška 2,5 cm, úhlopříčka 6 cm a úhel při základně 60°. Návod: vyjděte od úhlopříčky a použijte kružnice opsané.



Obr. 144.



Obr. 145.



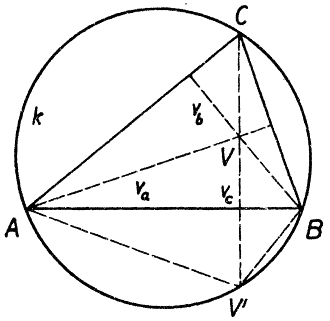
Obr. 146.

***265.** a) Narýsujte libovolný trojúhelník ABC. Uvnitř strany AB zvolte bod D, uvnitř BC bod E a uvnitř CA bod F. Sestrojte kružnice k_1, k_2, k_3 opsané trojúhelníkům AFD, BDE, CEF. K jaké domněnce vede názor? b) Dokažte, že skutečně kružnice k_3 prochází průsečíkem Q kružnic k_1, k_2. Návod: uvažte, jak velké jsou úhly FQD, DQE, vyjádřete $\sphericalangle EQF$ a použijte výsledku cvičení 244.

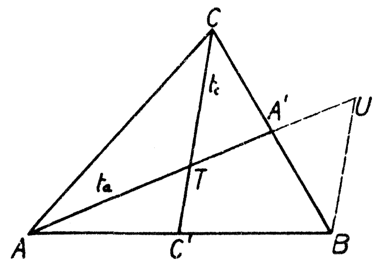
2. **Konstrukce trojúhelníků.**

A. Výšky a těžnice trojúhelníka.

Při sestrojování středu kružnice trojúhelníku opsané a vepsané setkali jsme se s trojicemi přímek, které se protínají v jednom bodě; byly to osy stran a osy úhlů. Podobné trojice přímek jsou výšky trojúhelníka a jeho těžnice.



Obr. 147.



Obr. 148.

Na obr. 147 je sestrojen trojúhelník ABC a kružnice k jemu opsaná. Označení vrcholů je zvoleno tak, aby úhly α, β byly ostré. Při tomto označení výška v_c protíná stranu AB mezi body A, B a kružnici k v jistém bodě V'. Z poučky o obvodových úhlech plyne:

$$\sphericalangle V'AB = \sphericalangle V'CB = 90^\circ - \beta; \quad \sphericalangle V'BA = \sphericalangle V'CA = 90^\circ - \alpha.$$

Přímka souměrně položená k přímce AV' podle AB svírá s AB také úhel $90^\circ - \beta$ a je to tedy výška v_a. Podobně přímka souměrně položená k přímce BV' podle AB svírá s AB úhel $90^\circ - \alpha$ a je to výška v_b. Obě výšky v_a, v_b se protnou v bodě souměrně položeném k bodu V' podle AB; tento bod V leží ovšem na kolmici k AB, která jde bodem V'; to je však výška v_c. Tím je dokázáno, že **všecky tři výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě.**

1. úloha. Sestrojte obraz podle obr. 147 pro tupoúhlý a pravoúhlý trojúhelník. Vyložte, jakou polohu vzhledem k trojúhelníku má průsečík výšek u trojúhelníka ostroúhlého, pravoúhlého a tupoúhlého.

Na obr. 148 vidíme trojúhelník ABC a dvě jeho těžnice t_a, t_c (A', C' jsou středy stran BC, CA). Těžnice t_a, t_c se protínají v bodě T. Bod U je sestrojen tak, že $\overline{A'U} = \overline{A'T}$. Trojúhelníky $A'TC$, $A'UB$ jsou podle věty *sus* shodné, neboť $\overline{A'U} = \overline{A'T}$, $\overline{A'B} = \overline{A'C}$ a úhly při A' jsou stejné. Je tedy $\sphericalangle A'TC = \sphericalangle A'UB$, čili $TC \parallel UB$. Přímka TC jde středem C' úsečky AB a je rovnoběžná s přímkou BU; je proto střední příčkou v trojúhelníku ABU. To znamená, že T je střed strany AU, čili $\overline{AT} = \overline{TU}$. Protože $\overline{TU} = 2.\overline{A'T}$, je také $\overline{AT} = 2.\overline{A'T}$.

Dokázali jsme tedy, že těžnice t_a, t_c se protínají v bodě T, který leží ve dvou třetinách úsečky AA', blíže bodu A', a ovšem také ve dvou třetinách úsečky CC', blíže bodu C'.

Kdybychom vyšli z těžnic t_a, t_b místo t_a, t_c, zjistili bychom stejnou úvahou, že také těžnice t_a, t_b se protínají v bodě T, ležícím ve dvou třetinách úsečky AA', blíže bodu A'.

Dostáváme tento konečný výsledek: **těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě, zvaném těžiště. Tento bod leží ve dvou třetinách každé těžnice, blíže středu strany. Těžiště leží vždy uvnitř trojúhelníka.**

B. Sestrojování trojúhelníka z daných prvků.

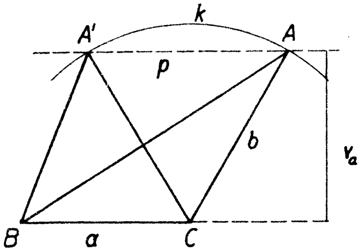
Základem velkého počtu konstruktivních úloh je sestrojení trojúhelníka z daných prvků. Prvky trojúhelníka rozumíme délky jeho stran, velikosti úhlů, délky výšek, těžnic, poloměry kružnic opsané a vepsané a jiné. K sestrojení trojúhelníka potřebujeme zpravidla tři prvky, na př. délky dvou stran a, b a velikost úhlu γ jimi sevřeného. Z těchto prvků dovedeme sestrojiti nekonečně mnoho trojúhelníků, ale všecky jsou — jak víme podle věty *sus* — navzájem shodné. To znamená, že mají stejný tvar a velikost, liší se jen polohou. Proto říkáme, že trojúhelník je určen dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným jednoznačně. Jinak také, že úloha sestrojiti trojúhelník ze dvou stran a, b a sevřeného úhlu γ má jediné řešení.

Někdy mohou být prvky dány tak, že z nich nelze sestrojiti trojúhelník: pak je úloha neřešitelná. Jindy je možné sestrojit z daných prvků nekonečně mnoho různých trojúhelníků; říkáme, že úloha je neurčitá. K řešení každé úlohy patří rozhodnouti, zda je vůbec řešitelná, a je-li řešitelná, najíti všecka její řešení. Probereme si několik příkladů. Zásadně budeme označovati v_a, v_b, v_c výšky, t_a, t_b, t_c těžnice, r a ϱ poloměry kružnic opsané a vepsané.

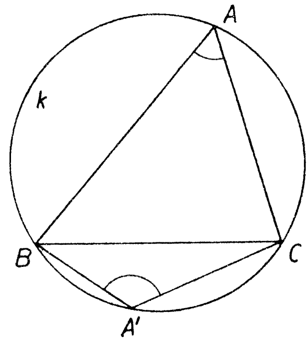
1. úloha. Obr. 149. Máme sestrojit trojúhelník, je-li dáno a, b, v_a. Jedno možné řešení je toto: narýsujeme nejprve stranu BC a budeme hledat vrchol A. Jeho vzdálenost od přímky BC je v_a; z toho vyplývá, že bod A náleží geometrickému místu bodů vzdálených o délku v_a od přímky BC. To jsou dvě rovnoběžky s přímkou BC. Stačí však rýsovat jen jednu z obou rovnoběžek (přímku p), protože druhá dává trojúhelníky, které jsou souměrně položené podle přímky AB k prvním, a proto jsou s nimi shodné. Dále víme, že vzdálenost bodu A od vrcholu C je b. Bod A náleží tedy také druhému geometrickému místu bodů, t. j. kružnici k se středem C a poloměrem b. Vrchol A najdeme jako průsečík přímky p s kružnicí k.

Úloha je neřešitelná, jestliže se kružnice k s přímkou p neprotne; to nastane, je-li vzdálenost přímky p od středu C větší než poloměr kružnice k, čili pro $v_a > b$. V každém jiném případě je úloha řešitelná. Podmínka řešitelnosti je tedy $v_a \leq b$. Rozhodněte, kdy má úloha jedno a kdy dvě řešení.

Při řešení můžeme vyjít také z výšky v_a, sestrojiti pak vrchol C a nakonec vrchol B; proveďte to. Na tomto příkladě je vidět, že postup řešení závisí na prvku, z něhož vyjdeme.



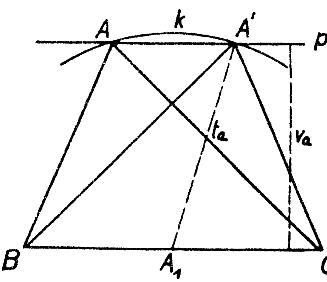
Obr. 149.



Obr. 150.

2. úloha. Obr. 150. Máme sestrojiti trojúhelník, je-li dáno a, α, r. Narýsujeme kružnici k o poloměru r a její tětivu BC délky a. K oběma obloukům BC náležejí co do velikosti dva obvodové úhly. V případě, že daný úhel α je jiný než oba ty obvodové úhly, je úloha neřešitelná. Je-li však úhel α roven jednomu z obou obvodových úhlů, pak je úloha neurčitá.

3. úloha. Obr. 151. Máme sestrojiti trojúhelník, je-li dáno a, v_a, t_a. Vyjdeme ze strany BC délky a. Pro vrchol A najdeme dvě geometrická místa. Jednak přímku p vedenou rovnoběžně s BC ve vzdálenosti v_a (viz úlohu 1); za druhé kružnici k, jejíž střed je střed strany BC a poloměr je t_a. Úloha je řešitelná, není-li přímka p nesečnou kružnice k, t. j. je-li $t_a \geqq v_a$.

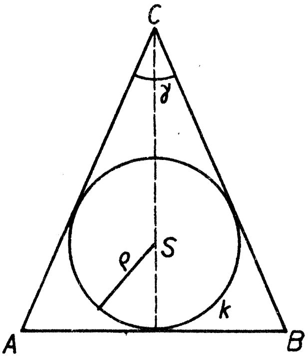


Obr. 151.

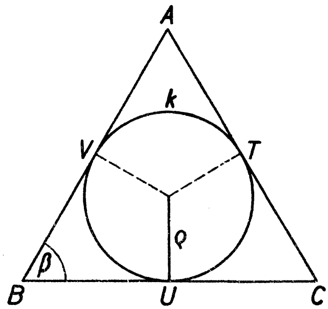
Je-li $v_a < t_a$, má úloha za řešení trojúhelníky BCA, BCA', které jsou jistým způsobem shodné: $\triangle BCA \cong \triangle CBA'$. Tyto trojúhelníky však přesto platí za *dvě* řešení, neboť není $\triangle BCA \cong \triangle BCA'$, t. j. na př. úhly při vrcholu B jsou v obou trojúhelnících různé.

4. úloha. Obr. 152. Máme sestrojiti trojúhelník rovnoramenný, je-li dán poloměr ϱ kružnice vepsané a úhel γ při temeni C. Jsou dány sice jen dva prvky, ale třetí je nahrazen podmínkou, že trojúhelník má být rovnoramenný. Mohli bychom na př. určit úhel při základně $\alpha = \frac{180° - \gamma}{2}$ a měli bychom pak tři prvky.

Při řešení narýsujeme nejprve úhel γ a vpíšeme mu kružnici k o poloměru ϱ. Základna hledaného trojúhelníka se dotýká kružnice k v tom jejím průsečíku s osou úhlu γ, který je vzdálenější od bodu C. Je-li úhel γ dutý, má úloha pro každé ϱ jediné řešení.



Obr. 152.



Obr. 153.

5. úloha. Obr. 153. Máme sestrojiti trojúhelník, je-li dáno a, ϱ, β. Vyjdeme z úhlu β a vpíšeme mu kružnic k o poloměru ϱ: body dotyku označíme U, V. Na rameno BU naneseme délku a, tak dostaneme bod C. Má-li být k vepsanou kružnicí, musí bod U ležet mezi B, C, t. j. musí být $a > \overline{BU}$. Z bodu C nyní vedeme zbývající tečnu ke kružnici k: její bod dotyku označíme T. Vrchol A je průsečíkem **polopřímek** BV, CT. Představme si, že prvky β, ϱ jsou pevné a délka a se mění. Sledujme, jak se mění poloha bodu C a polopřímky CT, jestliže a vzrůstá nad délku $\overline{BU}$. Polopřímky BV, CT se nejprve nebudou protínat, pak nastane případ, kdy budou rovnoběžné; při dalším zvětšování délky a se budou vždy protínat. Úloha je tedy řešitelná, je-li a větší než ta délka BC, pro niž je $BV \parallel CT$, t. j. je-li a větší než strana kosočtverce s výškou $2\,\varrho$ a úhlem β; vyložte to. Úloha má pak ovšem jediné řešení.

Cvičení.

266. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno a, α, β. Stanovte podmínku řešitelnosti. Narýsujte pro $a = 65$ mm, $\alpha = 120°$, $\beta = 45°$.

267. Sestrojte trojúhelník pravoúhlý, je-li dáno α, t_c (c je přepona).

268. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno a, b, α. Kdy je úloha řešitelná a kolik má řešení?

269. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno a, v_a, v_b. Vyjděte ze strany a, zvolte $a = 5$, $v_a = 6$ cm, $v_b = 4$ cm.

270. Sestrojte trojúhelník pravoúhlý, je-li dána odvěsna a a těžnice t_a. Stanovte podmínku řešitelnosti a počet řešení.

271. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno b, v_a, β. Sestrojte jej nejprve tak, že vyjdete z dvojice b, v_a, po druhé tak, že vyjdete z dvojice b, β.

272. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno r, α, β. Najděte podmínku řešitelnosti.

273. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno a, r, β.

274. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník, je-li dáno $v_a = v_b = 4$ cm, $v_c = 5$ cm. Návod: doplňte trojúhelník na kosočtverec.

275. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, je-li dáno ϱ, a. Najděte podmínku řešitelnosti.

276. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno a, v_b, v_c. Jaká je podmínka řešitelnosti? Zvolte v_b i v_c menší než a a sestrojte jen ty trojúhelníky, které jsou tupoúhlé.

277. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno ϱ, α, β. Vyjděte z dvojice ϱ, α a stanovte podmínku řešitelnosti.

278. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno $a = 6$ cm, $t_a = 6{,}5$ cm, $t_b = 5$ cm. Návod: sestrojte nejprve trojúhelník, jehož vrcholy jsou těžiště hledaného trojúhelníka, vrchol B a střed strany BC.

279. Sestrojte trojúhelník rovnoramenný, je-li dána základna $a = 5$ cm a těžnice $t_b = 6$ cm. Užijte téhož postupu jako ve cvičení 278.

280. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno a, ϱ, α. Návod: určete si úhel BSC, kde S značí střed vepsané kružnice.

281. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno r, ϱ, α. Návod: určete si a pomocí r, α. Použijte téhož postupu jako ve cvičení 280.

282. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, je-li dáno ϱ, t_c, kde c značí přeponu. Užijte postupu ze cvičení 281.

***283.** Dokažte: splynou-li v trojúhelníku ABC těžnice t_a s osou úhlu α, pak je ten trojúhelník rovnoramenný a A je jeho hlavní vrchol. Návod: trojúhelník ABC doplňte na rovnoběžník $ABDC$.

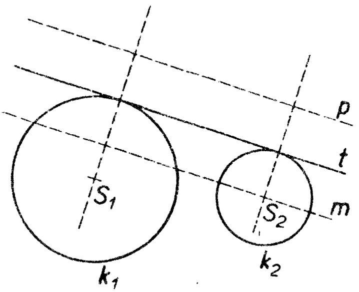
***284.** Dokažte: je-li $t_a = t_b$, je trojúhelník ABC rovnoramenný, AC, BC jsou jeho ramena.

3. Společné tečny dvou kružnic.

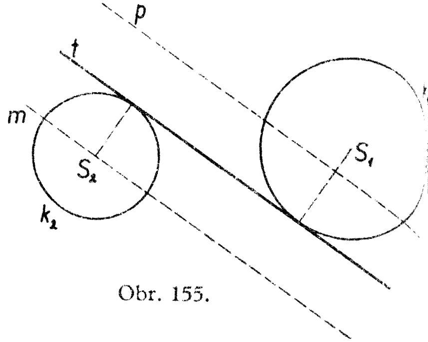
Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 o poloměrech r_1, r_2; máme sestrojiti všecky přímky, které se dotýkají obou kružnic. Taková přímka, která se dotýká dvou kružnic, se jmenuje jejich společná tečna.

Počet společných tečen závisí na vzájemné poloze obou kružnic.

Na obr. 154 vidíme dvě kružnice k_1, k_2 o poloměrech r_1, r_2. Označení je zvoleno tak, že $r_1 \geq r_2$; t značí na obou obrázcích společnou tečnu: na obr. 154 je to taková tečna, že obě kružnice leží v téže polorovině vyťaté přímkou t, kdežto v obr. 155 je to taková tečna, že každá z kružnic k_1, k_2 leží v jiné polorovině vyťaté přímkou t. Střed S_2 kružnice k_2 má od tečny t v obou případech



Obr. 154.

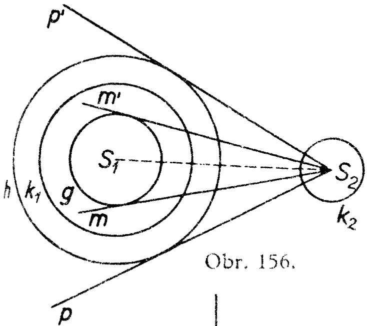


Obr. 155.

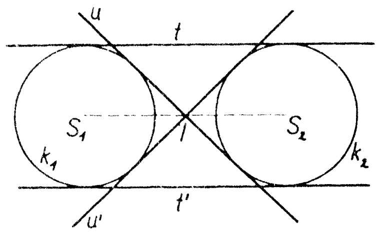
vzdálenost r_2, náleží tedy geometrickému místu bodů, které mají od přímky t vzdálenost r_2; to je dvojice přímek m, p rovnoběžných s t. Vzdálenost těchto dvou rovnoběžek m, p od středu S_1 je $r_1 - r_2$ a $r_1 + r_2$. Avšak víme, že všecky přímky, které mají od středu S_1 vzdálenost $r_1 - r_2$, jsou právě všecky tečny kružnice se středem S_1 a poloměrem $r_1 - r_2$; označíme ji g. Podobně všecky přímky, které mají od středu S_1 vzdálenost $r_1 + r_2$, jsou právě všecky tečny kružnice se středem S_1 a poloměrem $r_1 + r_2$; označíme ji h. Všecky možné přímky m, p dostaneme jako takové tečny kružnic g, h, které procházejí bodem S_2. Na obr. 156 jsou sestrojeny kružnice g, h a jsou k nim vedeny tečny z bodu S_2. Jsou to přímky m, m', p, p'; tyto přímky určují směry společných tečen kružnic k_1, k_2.

Nyní stačí sestrojit k jedné z kružnic k_1, k_2 tečny rovnoběžné s nalezenými směry; tyto tečny se jistě dotýkají i druhé dané kružnice. Bod S_2 buď leží vně obou kružnic g, h; pak jsou čtyři společné tečny. Padne-li bod S_2 na kružnici h, jsou tři společné tečny, leží-li mezi kružnicemi g, h, jsou jen dvě společné tečny. Leží-li S_2 na kružnici g, mají kružnice k_1, k_2 jedinou společnou tečnu, leží-li S_2 uvnitř g (a tedy i h), není společných tečen.

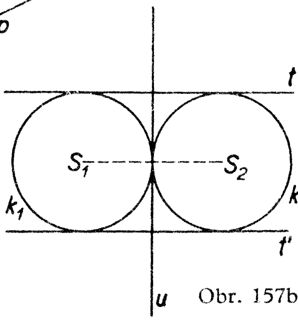
Projděte znovu všech pět případů a napište vztahy, které platí mezi délkou středné S_1S_2 a poloměry obou kružnic. Vyslovte, co tyto vztahy znamenají pro vzájemnou polohu dvou kružnic.



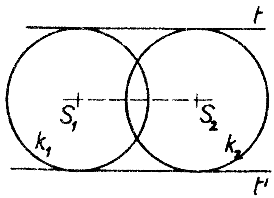
Obr. 156.



Obr. 157a.

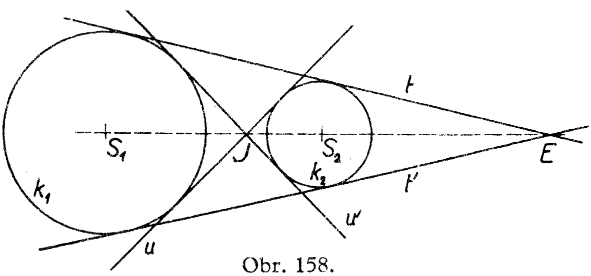


Obr. 157b.



Obr. 157c.

1. úloha. Obr. 157 abc. Narýsujme společné tečny dvou kružnic o stejných poloměrech ve všech třech možných případech jejich vzájemné polohy. Bod I na obr. 157a je střed úsečky S_1S_2; dokažte. Tečny t, t' se nazývají vnější společné tečny, tečny u, u' se nazývají vnitřní společné tečny. Stejných názvů užíváme i pro společné tečny dvou kružnic o různých poloměrech.



Obr. 158.

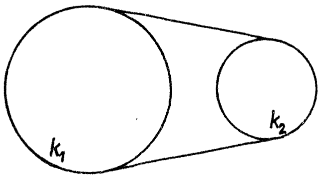
2. úloha Obr. 158. Kružnice k_1, k_2 mají poloměry $r_1 = 4$, $r_2 = 2{,}5$ a délku středné $c = 9$. Sestrojíme jejich společné tečny. Vnější společné tečny t, t' i vnitřní společné tečny u, u' se protínají na středné; dokažte.

Cvičení:

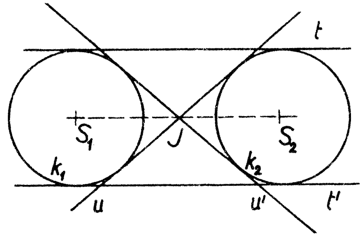
285. Narýsujte kružnice k_1, k_2 (středy S_1, S_2, poloměry r_1, r_2) podle následujících údajů a sestrojte všecky jejich společné tečny, je-li a) $r_1 = r_2 = 3$ cm, $\overline{S_1S_2} = 7$ cm; b) $r_1 = 46$ mm, $r_2 = 38$ mm, $\overline{S_1S_2} = 4$ cm; c) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 4$ cm, $\overline{S_1S_2} = 75$ mm; d) $r_1 = 24$ mm, $r_2 = 36$ mm, $\overline{S_1S_2} = 6$ cm.

286. Jsou dány dva body A, B ve vzdálenosti $\overline{AB} = 5$ cm. Sestrojte přímku vzdálenou 2 cm od bodu A, 15 mm od bodu B.

287. Narýsujte kružnici k_1 (střed S_1 a poloměr 3 cm) a kružnici k_2 (střed S_2, poloměr 4 cm, $\overline{S_1S_2} = 6$ cm). a) Sestrojte tečnu kružnice k_1, která vytíná z kružnice k_2 tětivu délky 2 cm. b) Sestrojte přímku p tak, aby vytínala z kružnice k_1 tětivu délky 2 cm, z kružnice k_2 tětivu délky 3 cm.



Obr. 160.



Obr. 159.

***288.** Obr. 159. Dokažte: protínají-li se vnitřní společné tečny u, u' kružnic k_1, k_2 ve středu úsečky S_1S_2, mají kružnice k_1, k_2 stejné poloměry.

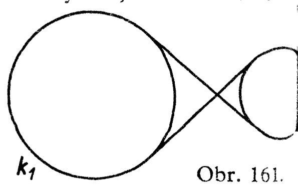
***289.** Dvě kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk v bodě A. Vnější společná tečna s body dotyku T_1 na k_1, T_2 na k_2 je proťata vnitřní společnou tečnou v bodě B. a) Dokažte, že B je střed úsečky T_1T_2. b) Dokažte, že $\sphericalangle T_1AT_2 = 90°$.

290. Sestrojte trojúhelník pravoúhlý, je-li dán poloměr vepsané kružnice $\varrho = 15$ mm a výška spuštěná na přeponu $v_c = 4$ cm.

***291.** Sestrojte trojúhelník, je-li dáno $\varrho = 12$ mm, $\alpha = 60°$, $v_a = 45$ mm.

***292.** Body A, A' vzdálené 7 cm jsou vrcholy rovnostranných trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ o stranách $\overline{AB} = 2$ cm, $\overline{A'B'} = 35$ mm, jejichž strany BC, $B'C'$ leží v téže přímce. Sestrojte je!

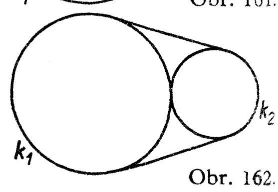
293. Obr. 160. Dvě kola k_1, k_2 o poloměrech 4 dm, 2 dm jsou spojena převodem, který jde po dvou třetinách obvodu kola k_1. a) Narýsujte náčrtek v poměru 1 : 10. b) Vypočtěte vzdálenost $\overline{S_1S_2}$ os obou kol. c) Vypočtěte délku převodu.



Obr. 161.

294. Obr. 161. Opakujte cvičení 293 pro kola k_1, k_2 se zkříženým převodem. Převod jde po třech čtvrtinách obvodu kola k_1.

295. Obr. 162. Dvě plechovky o průměrech 8 cm, 24 cm jsou svázány podle obrázku provazem. Sestrojte náčrtek v měřítku 1 : 4 a vypočtěte délku provázku.



Obr. 162.

V. ZÁVĚREČNÉ OPAKOVÁNÍ.

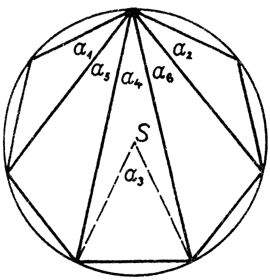
296. Pythagorejskou pěticípou hvězdu tvoří všech pět úhlopříček pravidelného pětiúhelníka. Obr. 163.

a) Vypočtěte úhly $\triangle\ ABA'$, $\triangle\ BCB'$ atd. a dokažte, že tyto trojúhelníky jsou shodné.

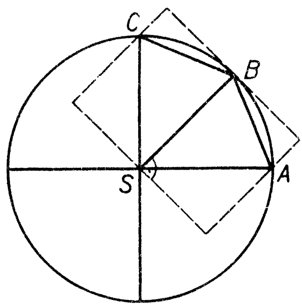
b) Vypočtěte úhly $\triangle\ AA'E'$, $\triangle\ BB'A'$ atd. a dokažte, že všecky cípy hvězdy jsou shodné trojúhelníky.

c) Dokažte, že pětiúhelník $A'B'C'D'E'$ je pravidelný.

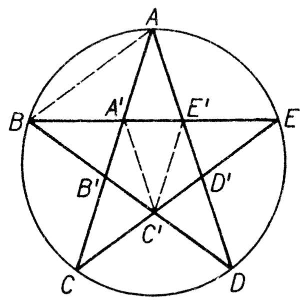
d) Dokažte, že čtyrúhelník $AA'C'E'$ je kosočtverec. Návod: vypočtěte úhly $\triangle\ A'E'C'$.



Obr. 164.



Obr. 165.



Obr. 163.

e) Je dán rovnoramenný trojúhelník $AA'E'$ s úhly 72°, 72°, 36° (délka ramene 25 mm). Sestrojte pythagorejskou hvězdu, jejímž je cípem.

297. Dvůr je obdélník o rozměrech 36 m, 15 m; je vydlážděn dlaždicemi tvaru pravidelného šestiúhelníka o hraně 12 cm. Kolik dlaždic přibližně tvoří dlažbu?

298. Obr. 164 znázorňuje pravidelný sedmiúhelník, S je jeho střed. Vypočtěte úhly α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 v tom pořádku, jak jsou seřazeny podle indexů.

299. Obr. 165. Čtyrúhelník $ABCS$ je čtvrtina pravidelného osmiúhelníka.

a) S pomocí naznačené konstrukce dokažte, že obsah tohoto čtyrúhelníka je $\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BS}}{2}$

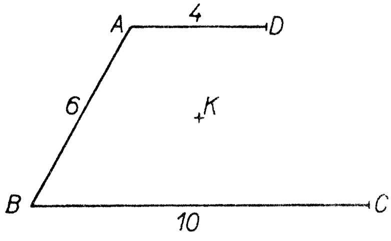
b) S použitím výsledku a) vyjádřete obsah pravidelného osmiúhelníka pomocí poloměru r kružnice opsané.

c) Jak velký je poloměr kružnice opsané pravidelnému osmiúhelníku, jehož obsah je 1 m^2?

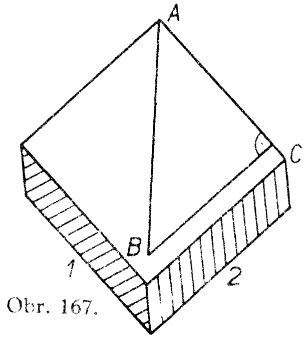
300. Sestrojte pravidelný čtrnáctiúhelník a vepište mu kružnici (zvolte poloměr opsané kružnice 45 mm a použijte pravidelného sedmiúhelníka).

301. Ve cvičení 297 je příklad dlažby, složené z dlaždic navzájem shodných a majících tvar pravidelného n-úhelníku ($n = 6$). Zkoumejte, zdali je možna taková dlažba složená z jiných pravidelných n-úhelníků než šestiúhelníků. Načrtněte takové dlažby. Návod k řešení: zjistěte, jaké podmínce musí vyhovovat vnitřní úhel n-úhelníka takové dlažby.

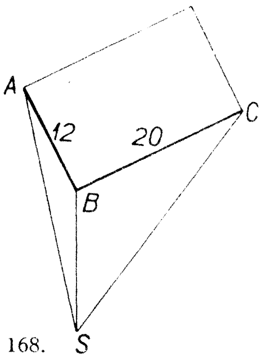
302. Čtyři stromky tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníka *ABCD* (obr. 166); ke kůlu *K* mezi nimi má být uvázána koza tak, aby nemohla okusovati žádný ze stromků a aby měla co nejvíce pohybu. Kam třeba zarazit kůl? Jak dlouhý má být provaz? Sestrojte obraz ve vhodném měřítku.



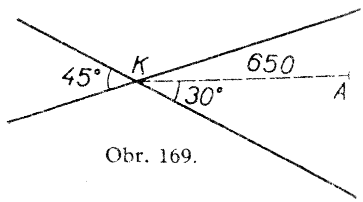
Obr. 166.



Obr. 167.



Obr. 168.



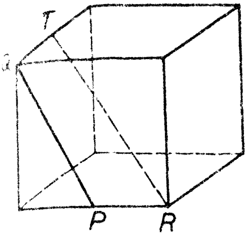
Obr. 169.

303. Obr. 167 znázorňuje jednoduchý přístroj k určování osy válcových předmětů. Z plechového čtverce je vyříznut pravoúhlý trojúhelník *ABC*; k dvěma jeho stranám jsou připojeny zahnuté okraje 1, 2. Přístroj přiložíme na př. ke dnu válcové nádoby tak, aby se okraje 1, 2 dotýkaly stěny a obkreslíme na dno stranu *AB*. Pak opakujeme tento postup při jiné poloze přístroje. Obě narýsované přímky se protnou ve středu dna. Vysvětlete geometricky princip přístroje.

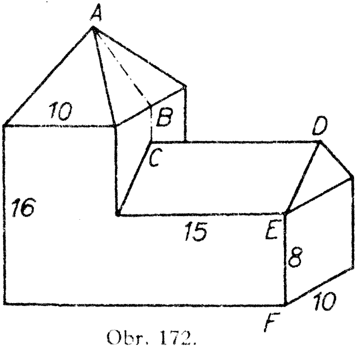
304. Vlak dlouhý 450 m jede po přímé trati. Pozorovatel stojící ve vzdálenosti 200 m vidí vlak pod úhlem 60°. Narýsujte obrázek v měřítku 1 : 5000 a určete, jak byl vzdálen počátek a konec vlaku od pozorovatele.

305. Obr. 168 znázorňuje půdorys obdélníkové budovy. Muž stojící v bodě *S* vidí její hrany *AB*, *BC* pod úhly $\sphericalangle ASB = 30°$, $\sphericalangle BSC = 45°$. Narýsujte obraz v měřítku 1 : 400 a určete vzdálenost $\overline{BS}$.

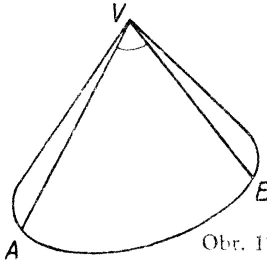
306. Obr. 169. Dvě přímé silnice se křižují v bodě *K* pod úhlem 45°. Mezi nimi leží stavení *A* v poloze naznačené obrázkem. Má se vésti přímá spojovací cesta kolem stavení tak, aby po ní bylo od *A* stejně daleko k oběma silnicím. Sestrojte obrázek ve vhodném měřítku.



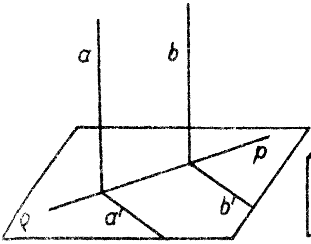
Obr. 170.



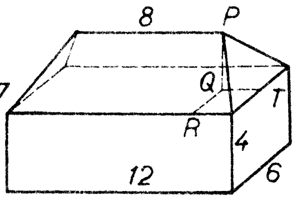
Obr. 172.



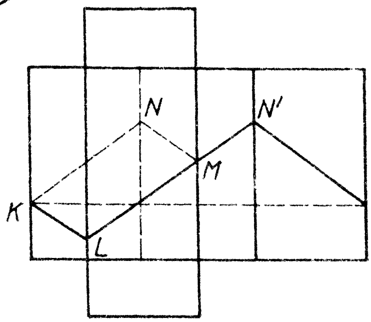
Obr. 171.



Obr. 173.



Obr. 174.



Obr. 175.

307. Obr. 170. Jaká je vzájemná poloha přímek PQ, RT? Zkoumejte, zdali leží v jedné rovině.

308. Obr. 171. Rotační kužel má podstavu s poloměrem 5 cm, výšku 4 cm. Lze na něm najít dvě strany k sobě kolmé? Návod: hledejte tětivu AB tak, aby $\triangle ABV$ byl pravoúhlý. Vypočtěte AB.

309. Na obr. 172 je znázorněna budova s věží; rozměry některých hran jsou uvedeny v metrech. Vrchol věže je 23 m, hřeben střechy 13 m nad zemí. a) Drát hromosvodu tvoří lomenou čáru $ABCDEF$. Vypočtěte délku drátu. b) Vypočtěte vzdušnou vzdálenost bodů A, D. c) Vypočtěte spotřebu krytiny, pokryje-li se 1 m² střechy 25 taškami.

310. Obr. 173. Dvě přímé tyčky a, b jsou zabodnuty do rovné desky ϱ v bodech přímky p. 1. Ráno jsme pozorovali, že stíny obou tyček byly rovnoběžné úsečky a', b'. 2. V poledne jsme pozorovali, že přímky obou tyček padly do přímky p. Co dovedete říci o vzájemné poloze obou tyček? Návod: uvažujte zvlášť, co můžete usoudit ze samotného pozorování prvního a co ze samotného pozorování druhého. Stíny vznikají při slunečním světle, jeho paprsky pokládáme za rovnoběžné.

311. Na obr. 174 vidíte domek s vepsanými rozměry v metrech. Výška hřebene střechy nad zemí je 7 m. Vypočtěte povrch střechy. Použijte k tomu pravoúhlých trojúhelníků PQR, PQT; v nich dovedete snadno určiti strany PQ, QR, QT.

***312.** Obr. 175. Body K, L, M na svislých hranách kvádru je určena rovina ϱ. Průsek roviny ϱ s kvádrem je zakreslen v síti kvádru. a) Popište tu konstrukci. b) Odůvodněte ji. Návod: uvažte, jaký obrazec je průsek ve skutečnosti (cvičení 151) a co se s ním stane, rozvineme-li plášť kvádru.

***313.** Těleso na obrazci 176 vzniklo z krychle vyříznutím jiné krychle s poloviční hranou. a) Lze vybrati mezi hranami viditelnými na obrázku čtyři takové, z nichž jsou každé dvě mimoběžné? b) Srovnejte povrch, objem i součet délek hran tohoto tělesa s povrchem, objemem a součtem délek hran původní krychle.

***314.** Kvádr na obr. 177 znázorňuje místnost, rozměry jsou uvedeny na obrázku v metrech. Body A, B na protějších stěnách mají být spojeny elektrickým vedením (zasekaným do zdí). Vedení má být co nejkratší. Povedeme je po stropě nebo po přední stěně? Sestrojte síť kvádru dvojím způsobem, zakreslete vedení a srovnejte jejich délky. Dovedete to provést také početně?

315. Obr. 178. Železniční závory jsou 6 m dlouhé a otáčejí se ve dvou rovnoběžných rovinách vzdálených od sebe 5 m. Spuštěné závory jsou ve vodorovné poloze 1 m nad zemí, otevřené svírají s vodorovnou polohou úhel 60°. Jak jsou vzdáleny od sebe konce závor a) jsou-li spuštěny; b) jsou-li zdviženy?

***316.** Obr. 179. Pravidelný jehlan čtyrboký má každou hranu 10 m. Z jehlanu je vyříznut kvádr, jehož vrcholy P, Q jsou středy pobočných hran jehlanu. Vypočtěte délky hran kvádru. Návod: veďte si rovinu, která obsahuje výšku jehlanu.

317. Obr. 180. Rotační válec má poloměr podstavy 5 cm a výšku 8 cm. Bod A leží na obvodu horní podstavy. Na obvodu dolní podstavy máme najíti bod B vzdálený 12 cm od bodu A. Zjistěte, zdali spojnice AB protíná osu válce. Návod: veďte stranu válce AC a vypočtěte BC. Jakou délku musí mít BC, má-li AB protínat osu válce?

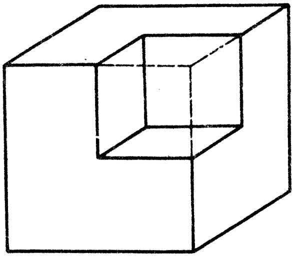
***318.** Obr. 181. V kuželové střeše je okno $CDFE$ omezené dvěma úsečkami CE, DF a dvěma kruhovými oblouky CD, EF. Sestrojte síť střechy a v ní výřez pro okno. Je dáno: poloměr podstavy 2 m, výška střechy 4 m a délky: $\overline{AB} = 1$ m, $\overline{VE} = 2$ m, $\overline{CE} = 5$ dm. Měřítko 1 : 100.

319. Obr. 182 znázorňuje papírový čtverec $ABCD$ s délkou strany 15 cm. S, T jsou středy stran. Přehneme-li papír podle čárkovaných úseček tak, aby splynulo AD a CD, AS a BS, BT a CT, vznikne jehlan. a) Odůvodněte, že po přehnutí bude přímka DA kolmá k rovině BST. b) Vyjádřete povrch a objem jehlanu pomocí strany čtverce $ABCD$.

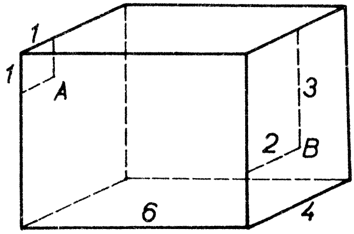
***320.** Obr. 183. Pravidelný osmistěn je těleso složené ze dvou pravidelných jehlanů čtyrbokých $ABCDE$ a $ABCDF$, které mají všecky hrany stejně dlouhé. a) Popište stěny pravidelného osmistěnu. b) Dokažte, že čtyrúhelník $AFCE$ je čtverec. c) Najděte všecky čtverce tvořené hranami osmistěnu. d) Dokažte, že úsečky AC, BD, EF jsou stejně dlouhé a protínají se v jednom bodě. [Použijte výsledků b) a c).] e) Vyjádřete povrch tělesa pomocí délky hrany. f) Vyjádřete objem tělesa pomocí délky hrany. Návod k řešení b): všimněte si cvičení 114.

321. Stěny dvou vodojemů jsou svislé. Dno měří 900 m^2 u většího, 700 m^2 u menšího. Voda se převádí z většího vodojemu do menšího tak, že za minutu přeteče 15,9 hl vody. Oč se změní výška vody ve vodojemech za čtvrt hodiny?

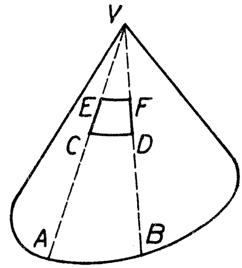
322. *V krychlové nádrži s délkou hrany 1 m je pravidelný čtyrboký kovový jehlan výšky 1 m, jehož podstava je čtverec o straně 75 cm. Nádrž je naplněna vodou. Oč klesne hladina, odstraní-li se jehlan?



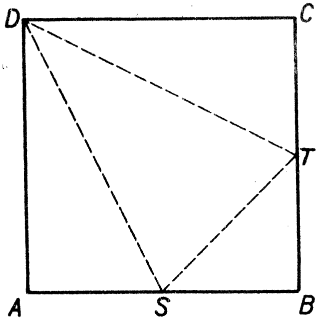
Obr. 176.



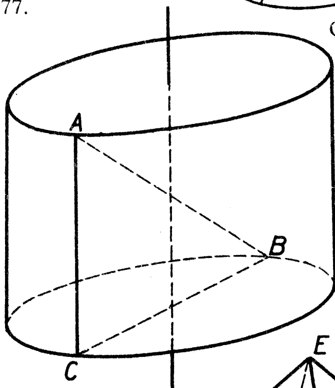
Obr. 177.



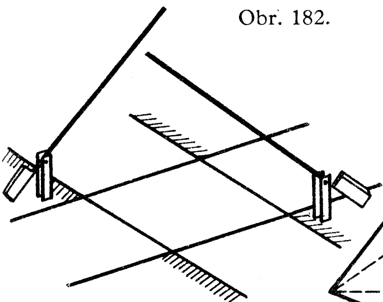
Obr. 181.



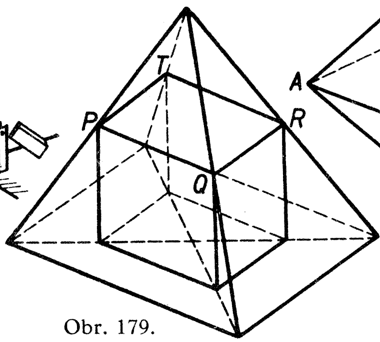
Obr. 182.



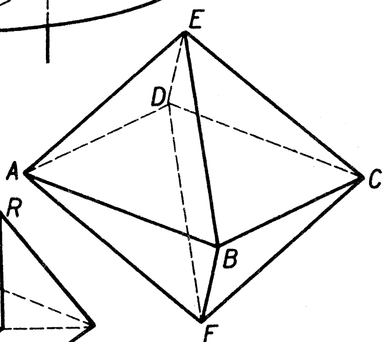
Obr. 180.



Obr. 178.



Obr. 179.



Obr. 183.

***323.** Povrch vody v bazénu je obdélník dlouhý 52 m a široký 14 m. Hloubka vody stoupá rovnoměrně od 1 m na jednom konci do 4 m na druhém konci . Určete v hl množství vody v bazénu.

***324.** Určete váhu duté kovové roury. Vnitřní průměr je 6 cm, tloušťka 1 cm, délka 60 cm, měrná váha materiálu 8,4 g/cm^2.

325. Kolik stojí nátěr plotu, který se skládá ze 105 válcových tyčí s průměrem 6 cm, vysokých 1 m, jestliže nátěr 1 m^2 stojí 75 Kčs? (Také vršky tyčí jsou natřeny.)

326. Kolik váží telefonní vedení o 5 drátech dlouhé 650 m, stavěné z měděného drátu tloušťky 2 mm? Měrná váha mědi je 8,7 g/cm^3.

Z HISTORIE GEOMETRIE.

Většina toho, čemu jste se naučili z geometrie na střední škole, jsou věci známé lidstvu již ve starověku. Jako každý obor lidského poznání, vznikla i geometrie z hospodářských potřeb společnosti. Staří národové potřebovali jednoduché geometrické znalosti při vyměřování pozemků, při stavbách, zejména stavbách chrámů a pyramid (v Egyptě již 4000 let před n. l.), v mořeplavectví a ve hvězdářství. (Pozemky kolem Nilu se musely každoročně vyměřovat, neboť po povodních Nilu hranice pozemků byly zničeny.) Samo slovo geometrie (gé = země, metrein = měřiti) svědčí o praktickém původu geometrie.

Na počátku byly geometrické znalosti brány ze zkušenosti. Dlouho trvalo, než si lidstvo začalo všímat *souvislostí* mezi jednotlivými poznatky a tak ponenáhlu vytvořilo z velké řady různorodých jednotlivých výsledků soustavnou vědeckou nauku. To bylo provedeno ve starém Řecku. Všichni znáte dobře větu Pythagorovu (Pythagoras žil asi 580—501 př. n. l.) a větu Thaletovu (Thales asi 624—540 př. n. l.). Geometrické vědě se vyučovalo nejprve jenom ústně; v athénské Akademii, ve které byli athénští šlechtici školeni ve filosofii, byl nápis svědčící o velké důležitosti, kterou Řekové přikládali geometrii: „Nikdo ať sem nevstupuje, kdo nezná geometrii.“ To bylo za časů Platonových (Platon žil 429—348 př. n. l.; od něho pochází dobře vám známý pojem geometrického místa). Teprve po jeho smrti napsal kolem r. 325 př. n. l. Eukleides (v Alexandrii v Egyptě) proslulou knihu *Základy* (řecky Stoicheia). Základy byly nesmírně rozšířeny a byly přeloženy do velkého počtu jazyků. Od 14. století bylo Základů užíváno jako školní učebnice; v Anglii tomu tak bylo až do konce 19. století, ale podstatný vliv na učebnice geometrie u všech národů mají Základy dodnes. Zahrnují soustavný výklad geometrie v tehdy známém rozsahu a mimo to jsou v nich zpracovány některé oddíly aritmetiky. Základy se skládají ze 13 knih (oddílů). Pět knih jedná o rovinné geometrii, tři o vlastnostech celých čísel, dvě o poměrech úseček (a to i o takových poměrech, které se nedají vyjádřit přesně zlomkem, jako na př. poměr strany a uhlopříčky čtverce) a posléze tři o prostorové geometrii. Po Eukleidovi vynikli ještě dva řečtí geometři: Apollonius z Pergy (250—200 př. n. l.), který napsal dílo o kuželosečkách, t. j. o čarách, ve kterých rovina protíná plášť kužele, a Archimedes (287—212 př. n. l.), slavný matematik starověku. Archimedes se narodil a strávil celý svůj život v Syrakusách na Sicilii a získal slávu nejen objevy matematickými, nýbrž také fysikálními (znáte důležitý Archimedův zákon, který jste probírali ve druhém ročníku v hydrodynamice).

Technické vynálezy Archimedovy mu již za jeho žití zajistily nehynoucí slávu; on sám však v duchu tehdejší doby nepřikládal jim velkého významu a daleko výše cenil dva ryze theoretické objevy v geometrii. Archimedes první přesně vědecky odvodil přibližnou hodnotu čísla π; dokázal, že $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Před Archimedem se užívalo v Alexandrii hrubší hodnoty $\pi \doteq (\frac{16}{9})^2 \doteq 3,1605$, známé v Egyptě už o 2000 let dříve, ale o vědeckém odůvodnění tu ovšem nebylo řeči. Teprve koncem 16. století dokázal Vieta (1540—1603), že

$$3,1415926535 < \pi < 3,1415926537$$

a později Ludolf van Ceulen (1540—1610) vypočet číslo π na 35 desetinných míst. Všecky tyto výpočty byly provedeny přesně Archimedovým způsobem; velké ulehčení při tom arci znamenaly desetinné zlomky, které Řekům nebyly známy. Teprve Gregory (1638—1675), žák slavného Newtona (1643—1727) nalezl podstatně pohodlnější způsob výpočtu čísla π, založený na t. zv. vyšší matematice.

Za svůj nejskvělejší výkon považoval Archimedes svoje vzorce $4\pi r^2$ pro povrch koule a $\frac{4}{3}\pi r^3$ pro objem koule; tento výkon si Archimedes tak cenil, že projevil přání, aby obrazec jej připomínající byl vyryt na jeho náhrobku. Že povrch koule je roven ar^2 a objem koule $\frac{4}{3}ar^3$, kde a znamená jakési číslo, věděl už Eukleides. Že však číslo a je rovné 4π, to byl na tehdejší dobu ohromný vědecký výkon. Právě připomenuté a jiné Archimedovy výkony byly založeny na myšlenkách, na kterých spočívá vyšší matematika; je tedy Archimedes myšlenkovým předchůdcem vyšší matematiky, která se vyvinula až skoro o 2000 let později zároveň s obrovským pokrokem přírodních věd. V době, kdy vědou se zabývala pouze nepracující vládnoucí třída, nebylo zájmu o praktické využití vědeckých výsledků, což vedlo nutně ponenáhlu k naprostému úpadku vědy odtržené od života. V 16., 17. a 18. století nastal další rozvoj geometrie. Ale v základních pojmech vedl stále Eukleides a určité základní nedostatky v jeho Základech se projevovaly stále zřetelněji. Další rozvoj vyžadoval nezbytně vrátit se k základním pojmům a vyjasnit některé pochybné body u Eukleida. To se stalo především zásluhou ruského matematika Nikolaje Ivanoviče Lobačevského (1793—1856), zvaného „Koperníkem geometrie". Velký objev Lobačevského, jehož význam daleko přesahuje obor geometrie, vedly k novému kritickému vybudování základů geometrie ve dvou posledních desítiletích 19. století, jež v tomto století vedlo posléze ke „geometrisaci" celé matematiky, jež podle slavného sovětského matematika A. N. Kolmogorova (nar. 1903) je příznačným rysem matematiky 20. století, využívající nejabstraktnějších theorií k řešení důležitých praktických úkolů.

Ve vlastní elementární geometrii, která se úzce připíná na učivo střední školy, vynikli zejména také čeští geometři, zvláště bratři Emil Weyr (1848—1894) a Eduard Weyr (1852—1903), Karel Pelc (1845—1908) a Jan Sobotka (1862 až 1931).

Výsledky cvičení.

Obrázky 184 – 196 jsou zařazeny na str. 102, 103.

OPAKOVÁNÍ.

1. Sestrojíme $\triangle ABD$ a doplníme jej na rovnoběžník. Přímku CD protneme kružnicí se středem A a poloměrem $\overline{AB}$. Úloha má 2 řešení. **2.** Protější strana k AC jde vrcholem B. **3.** Šestiúhelník $ABCDEF$ rozdělíme na dva lichoběžníky $ABCF$, $FCDE$, každý z nich proměníme na obdélník. Oba ty obdélníky jsou shodné a lze z nich složit nový obdélník. **4.** 37,5%. **5.** Výška v_a je největší pro $\gamma = 90°$. **6.** a) Ano, b) nikoli, c) ano, je-li pravoúhlý. **7.** 9,6 cm. **8.** 12 cm, 6 cm.

9. a) $P = \frac{ab}{4}\sqrt{2}$, b) $P = \frac{ab}{4}\sqrt{3}$, c) $P = \frac{ab}{4}$. **10.** 30 cm.

11. Asi 32%. **12.** 12,6 cm, 3,4 cm². **13.** $r = 2$ cm. **14.** $r' = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, t. j. r' je výškou rovnostranného trojúhelníka, jehož stranou je r. **15.** Je to přímka p' rovnoběžná s přímkou p taková, že bod A půlí vzdálenost mezi p, p'. **16.** Jsou to dvě rovnoběžky s danou přímkou; jejich vzdálenost je výška rovnoramenného trojúhelníka, jehož základna je délka dané tětivy a rameno délka poloměru. **17.** Střed vepsané kružnice je průsečík úhlopříček kosočtverce. **18.** Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník se základnou 2 cm a ramenem 4 cm a doplníme jej na lichoběžník. Střed kružnice je průsečík os stran lichoběžníka. **19.** Sestrojíme základnu a kružnici o poloměru 1,5 cm, která se jí dotýká ve středu. Pak vedeme z krajních bodů základny tečny ke kružnici. **20.** Přepona je 2 . 25 mm = 5 cm, úhly jsou $67\frac{1}{2}°$, $22\frac{1}{2}°$.

II. MNOHOÚHELNÍKY.

1. Lomené čáry a mnohoúhelníky.

21. $HVKLM$, $VKLMH$, $KLMHV$, $LMHVK$, $MHVKL$. **22.** $PQRSTP$, $PQRTSP$, $PQTRSP$, $PTQRSP$. Žádný není vypuklý. **23.** a) $ABCD$; AH_1E_1D; AH_2E_2D; BH_2E_2C, BH_1E_1C; $H_1H_2E_2E_1$; $H_1H_2G_2G_1$; $H_1H_2F_2F_1$; $E_1E_2G_2G_1$; $E_1E_2F_2F_1$; $F_1F_2G_2G_1$. b) $AH_2G_2G_1E_1D$; $AH_1G_1G_2E_2D$; $AH_2F_2F_1E_1D$; $AH_1F_1F_2E_2D$; $BH_1G_1G_2E_2C$; $BH_2G_2G_1E_1C$; $BH_1F_1F_2E_2C$; $BH_2F_2F_1E_1C$. c) $AH_2G_2G_1F_1F_2E_2D$; $AH_1G_1G_2F_2F_1E_1D$; $BH_1G_1G_2F_2F_1E_1C$; $BH_2G_2G_1F_1F_2E_2C$; $AH_1G_1G_2H_2BCD$; $AH_1F_1F_2H_2BCD$; $ABCE_2F_2F_1E_1D$; $ABCE_2G_2G_1E_1D$. d) $AH_1G_1G_2H_2BCE_2F_2F_1E_1D$.

24. $\frac{n(n-3)}{2}$.

25.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{n(n-3)}{2}$	0	2	5	9	14	20	27	35

Jsou to n-úhelníky pro $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

26. a) Shodné tak, že $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. b) Pravoúhlé s přeponou AC a zároveň shodné tak, že $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. c) Rovnoramenné kosoúhlé. d) Rovnoramenné pravoúhlé s přeponou AC. e) Tak, aby $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$. f) Na př. tak, aby $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = 180°$. **27.** Obr. 184. Lichoběžník vznikne jen jedním způsobem tak, že od trojúhelníka ubereme jiný trojúhelník. Rovnoběžník nelze tak vytvořit. **28.** a) 77°, b) 122°, c) 59°43′, d) 137°59′8″. **29.** 82°17′2″. **30.** a) $n = 8$; b) takový n-úhelník neexistuje.

31. $n = 41, 42, 43, 44, 45, 46$. **32.** 131°52′10″. **33.** 34°40′48″. **34.** Pětiúhelník se 4 vnitřními ostrými nebo pravými úhly má součet vnitřních úhlů menší než $4.R + 2R = 6R$. Proto je pětiúhelník bez tupého vnitřního úhlu nebo s jedním tupým vnitřním úhlem nemožný. Pětiúhelník má nejvýše 3 ostré vnitřní úhly, na př. 66°, 66°, 66°, 171°, 171°. **35.** Trojúhelníků je n-1. Součet vnitřních úhlů n-úhelníka je $(n - 1).2R - 2R = (n - 2).2R$. **36.** Trojúhelníků je n. Součet vnitřních úhlů n-úhelníka je $n.2R - 4R = (n - 2).2R$. **38.** 120°.

2. Pravidelné mnohoúhelníky.

42. Vnější úhly jsou: 72°, 51°25′43″, 36°, 30°, 24°, 20°, 12°. Vnitřní úhly jsou: 108°, 128°34′17″, 144°, 150°, 156°, 160°, 168°. **43.** $\sphericalangle CBX = \sphericalangle BCX = 72°$,

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle DBC = \frac{180° - 108°}{2} = 36°, \sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA = 108° - 36° = 72°.$$

Věta *usu*. **44.** a), d), e), f) ano, b), c) nikoli. **45.** a), b), d), e), f) ano, c) nikoli. **46.** $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. **47.** Pro vnější úhly platí $\frac{4R}{n} < \frac{4R}{k}$, je-li $n > k$. **48.** 37-úhelník. **49.** Součet polovičních základen těch trojúhelníků je poloviční obvod mnohoúhelníka. Výška všech trojúhelníků je poloměr kružnice vepsané. **50.** $\sphericalangle ABC =$

$$= \sphericalangle BCD = 120°, \sphericalangle CDA = \sphericalangle BAD = \frac{120°}{2} = 60°.$$

51. a) Všechny úhly jsou 135° velké. b) $6 - 2x = x\sqrt{2}$, t. j. $x \doteq 18$ mm.

$$\text{c) } \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDB = \frac{180° - 135°}{2} = 22°30′; \sphericalangle ABD = 135° - 22°30′ = 112°30′,$$

$\sphericalangle BAD = 135° - 90° = 45°$, $\sphericalangle BDA = 180° - (112°30′ + 45°) = 22°30′$. V $\triangle ABD$ je známa strana $\overline{AD}$ (= 6 cm) a všecky jeho úhly. **52.** Trojúhelníky ABC, CDE, EFG, GHA jsou rovnoramenné a shodné, jejich úhly při základnách jsou 22°30′. Čtyrúhelník $ACEG$ má tedy všecky strany stejně dlouhé a všecky úhly pravé. Sestrojíme čtverec $ACEG$, opíšeme mu kružnici; osy úseček AC, CE protnou kružnici v bodech B, F, D, H.

III. ZÁKLADY STEREOMETRIE.

1. Základní poučky stereometrické.

55. Přímky AB, BC, CA leží podle poučky I v rovině ABC. Každá z uvedených přímek leží podle téže poučky v rovině ABC. **57.** Stačí podložit j e d i n o u ze čtyř noh (ovšem deska stolu nebude možná vodorovná). Odůvodnění: Každými třemi body lze položit rovinu, každými čtyřmi nikoliv. **59.** Rovinu. **60.** Přímka, která jde bodem Q; je to průsečnice rovin ϱ, Sp, které mají podle předpokladu společný bod Q.

61. a) ABC, BCD, CDA, DAB, ABM, BCM, CDM, DAM. b) První čtyři. c) Každé dvě; průsečnice rovin ABM, BCM je přímka BM a pod. **62.** Body A', C', M neurčují rovinu, neboť leží v přímce. Splynou na př. roviny $A'C'B$, $A'MB$, $C'MB$. Roviny $A'C'B$, BDM se protínají v přímce BM a pod. **63.** Splynou na př. roviny $A'C'B'$, $A'MB'$, $MC'B'$, neboť body A', B', C', M leží v rovině. Průsečnice jsou přímky $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, BA', BB', BC', BM. **64.** Splynou roviny, které obsahují 3 z bodů A, B, C, D, F. Průsečnice jsou spojnice kterýchkoli dvou z daných šesti bodů. **65.** $A'B'$, $B'D'$. **66.** $A'C'$, $A'B$, BC'. **67.** a) Všech šest. b) BM. c), d). Obr. 185. **68.** a) $A'B$, $A'M$, BM. b) Obr. 186. c) $\overline{A'B} = 4 \cdot \sqrt{2}$ cm $\doteq$ 57 mm. $\overline{A'M} = \overline{BM} = \sqrt{4^2 + 8^2}$ cm $\doteq$ $\doteq$ 89 mm; obvod je 175 mm. **69.** a) PM, BP, BM. b) Obr. 187. **70.** a) Průsečnice jsou přímky: BA, BA', BQ. b) Není, neboť rovina ABC' protíná stěnu $ABB'A'$ v hraně AB. **71.** $p \equiv BQ$.

2. Rovina kolmá k přímce. Tělesová úhlopříčka kvádru.

72. a) 7 cm, b) 4,1 cm. **73.** 7,1 cm. **74.** Nestačí, neboť $\sqrt{50^2 + 35^2 + 15^2} \doteq 62{,}8 > 62$. **75.** 8,7 cm. **76.** 12,2 cm. **77.** 9,4 m. **78.** 6; 10; 15 dm. **79.** 3,6; 6; 7,1 cm. **80.** 4,9 cm.

81. $\overline{AC'} \doteq 11{,}8$ cm, $\overline{BD'} \doteq 9{,}4$ cm. **82.** $a^2 + b^2 < a^2 + b^2 + c^2$, neboť $c > 0$. **83.** a) PQ je kratší než stěnová úhlopříčka a tedy podle výsledku cvičení **82** i než tělesová úhlopříčka. b) Nový kvádr má rozměry nejvýš rovné danému kvádru. **84.** Nelze, neboť $1{,}4^2 > 1{,}2^2 + 0{,}5^2 + 0{,}4^2$. **85.** Do výše 38 cm. **86.** a) $\overline{CF} = 10$ cm, $\overline{CF'} \doteq$ $\doteq$ 12,2 cm.

3. Kolmice vztyčená k rovině.

87. Jedinou; vznikne otáčením kolmice spuštěné z A na p kolem přímky p. **88.** a) Kolmice spuštěná z bodu B na přímku AC je úhlopříčka čtverce $ABCD$ a jde tedy jeho středem. b) 4,9 cm. **90.** Vzdálenost je asi 120 m.

92. a) $\overline{BA} = \overline{BC} = \overline{DA} = \overline{DC}$ (délka hrany krychle), $\overline{B'A} = \overline{B'C} = \overline{D'A} = \overline{D'C}$ (délka stěnové úhlopříčky). b) $BB' \parallel DD'$, neboť leží v téže rovině a $\overline{BD} = \overline{B'D'}$. $\overline{BB'} = \overline{DD'}$ **93.** U každého z pravoúhlých rovnoběžníků $ABB'A'$, $CBB'C'$, $DBB'D'$ jsou spojnice středů stran AA', CC', DD' s vrcholy B, B' stejně dlouhé.

4. Rovnoběžky v prostoru. Střed kvádru.

94. $AB \parallel DE \parallel A'B' \parallel D'E'$; $BC \parallel EF \parallel B'C' \parallel E'F'$; $CD \parallel FA \parallel C'D' \parallel F'A'$; $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel EE' \parallel FF'$. **95.** $AA'C'C$ je obdélník (nikoli čtverec); proto není $AC' \perp A'C$. **96.** a) Sestrojíme čtverec o straně $5.\sqrt{2}$ cm; b) sestrojíme obdélník o základně $5.\sqrt{2}$ cm, jehož úhlopříčky svírají se základnou úhly 60°. **97.** Polovina tělesové úhlopříčky je $\overline{AS} = \overline{BS} = \frac{10}{\sqrt{2}}$ cm $\doteq 7{,}1$ cm. $\overline{BS} = \overline{CS} = \overline{BC}$. Třetí rozměr je také 7,1 cm. **99.** $\triangle APQ \cong \triangle BTQ \cong \triangle C'RT \cong \triangle D'RP$ (*sus*); úhly při vrcholech P, Q, R, T nejsou 45°, neboť trojúhelníky nejsou rovnoramenné; proto $PQRT$ není čtverec. $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2} \doteq 6{,}9$ cm (polovina tělesové úhlopříčky, neboť PQ je střední příčka v trojúhelníku ABD'). **100.** $\overline{PT} = \overline{QR}$ (polovina stěnové úhlopříčky), $\overline{PQ} = \overline{RT}$ (délka hrany krychle), $PQ \parallel BB' \parallel RT$. Obsah je $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

101. a) Příslušné střední příčky trojúhelníků ABC, ABD jsou rovnoběžné se stranou AB; podobně je tomu u trojúhelníků ACD, BCD. b) 10,5 cm.

5. Roviny navzájem kolmé.

103. Kolmice spuštěná na rovinu σ z některého bodu průsečnice rovin ϱ, τ leží i v rovině ϱ (neboť $\varrho \perp \sigma$), i v rovině τ (neboť $\tau \perp \sigma$); proto tato kolmice splyne s průsečnicí. **104.** $PQ \parallel AA' \perp (ABCD)$. **105.** $AC \perp BB'D$, neboť $AC \perp BD$; AC je kolmá i ke spojnici středů horní a dolní podstavy, neboť tato spojnice je rovnoběžná s AA'. **106.** Buď rovinu kolmou k ϱ nebo všechny splynou s přímkou a. **107.** Obr. 188, 189. **108.** Obr. 190, 191. **109.** Roviny souměrnosti úseček AB, BC, CA protnou rovinu ABC v osách stran trojúhelníka ABC. Tyto osy se protnou ve středu kružnice jemu opsané. Kolmice vztyčená v tomto bodě k rovině ABC leží podle výsledku cvičení 103 ve všech třech rovinách souměrnosti a je tedy hledaným geometrickým místem bodů. **110.** $\overline{B'A'} = \overline{B'B} = \overline{B'C'}$ (hrana krychle), $\overline{DA'} = \overline{DB} = \overline{DC'}$ (stěnová úhlopříčka). Body B', D náležejí tedy geometrickému místu bodů stejně vzdálených od všech tří vrcholů $\triangle A'BC'$; toto geometrické místo je podle výsledku cvičení 109 přímka kolmá k rovině $A'BC'$. Proto je $B'D \perp A'BC'$.

6. Jehlany.

111. Obr. 192. $ABCF$, $ACED$, $ACFE$. **112.** a) $\overline{A'C'} = \overline{A'B} = \overline{BC'}$ (stěnová úhlopříčka); podstava je pravidelný trojúhelník $A'BC'$. Pobočné stěny $A'BB'$, $BC'B'$, $C'A'B'$ jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky. b) $AA'CB$, $CC'A'B$, $ACD'D$, $AA'CD'$, $CC'A'D'$. Jehlan $ACD'D$ je pravidelný (z týchž důvodů jako $A'BC'B'$). **113.** Trojúhelníky ACV, BDV jsou rovnoramenné, $VP \perp AC$, $VP \perp BD$, proto $VP \perp ABCD$. **114.** $b = a$. Pobočné stěny jsou trojúhelníky rovnostranné. **115.** $b = a\sqrt{2}$. Pobočné stěny jsou trojúhelníky nerovnostranné. **116.** a) $b = 2a$; b) $b = a\sqrt{3}$. **117.** a) $b = a\sqrt{2}$; b) $b = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. **118.** a) $b = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; b) $b = a$; c) tento případ je nemožný. **119.** a) 73 cm², b) 112 cm². **120.** 4,6 m².

7. **Kolmice z bodu k rovině.**

124. 7,2 cm. **125.** 6,2 cm. **126.** 7,5 cm. **127.** 4,9 cm. **128.** 240 m^2 **129.** Výška je 5,2 cm, pobočná hrana 6,7 cm.

132. $a = 6{,}2$ cm, $P = 23$ cm^2. **135.** Hlavní vrchol čtyrstěnu je stejně vzdálen od všech tří vrcholů podstavy.

8. **Vzájemná poloha přímek a rovin.**

136. AB, CV — AB, DV — AB, EV — AB, FV a podobně další. **137.** Je-li $M \neq B$, je $\overline{CM} > \overline{BC}$, je-li $M = B$ je $\overline{CM} = \overline{BC}$, t. j. vždy platí $\overline{CM} \geqq \overline{BC}$. Podobně vždy platí $\overline{PM} \geqq \overline{CM}$, t. j. $\overline{PM} \geqq \overline{BC}$. **138.** Takové dvě přímky nemají společný bod, proto nejsou různoběžné. **139.** a, c se protínají v bodě P, b, c se protínají v bodě Q. $P \neq Q$, neboť všecky tři přímky nejdou týmž bodem. Podle poučky I přímka c leží v rovině ab. **140.** Vzdálenost je rovna polovině stěnové úhlopříčky.

142. Vzdálenost je rovna polovině výšky, t. j. asi 3 cm. **143.** a) Na čtyrstěn $PBCQ$ a na čtyrboký jehlan $APQDC$. b) Žádný z obou středů neleží v poloprostoru ϱ B. **144.** Čtyrboký jehlan $ADD'A'B$. **145.** Ano, neboť aspoň dva z bodů A, B, C leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou ϱ. **146.** Označíme q přímku roviny ϱ, pro niž je $p \parallel q$. Pak je buď $p = q$, t. j. $p \parallel \varrho$, nebo je $p \neq q$; pak nemají p, q společný bod, t. j. též p, ϱ nemají společný bod, a je tedy $p \parallel \varrho$. **147.** B, D leží v témž poloprostoru vyťatém rovinou $A'B'C'$ a mají od této roviny stejnou vzdálenost, rovnou délce hrany krychle. **148.** Jsou-li $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ podstavy obou hranolů, je $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. Vzdálenost obou rovin je výška hranolu. **149.** Obě jsou kolmé k přímce $B'D$. KM je střední příčka $\triangle DBL$, proto $\overline{DK} = \overline{KL}$. PL je střední příčka $\triangle B'D'K$, proto $\overline{B'L} = \overline{KL}$. Je tedy $\overline{KL}$ třetina tělesové úhlopříčky krychle, t. j. 10,4 cm. Obr. 193. **150.** a) $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ (podle vlastnosti střední příčky v trojúhelníku); b) jejich vzdálenost je rozdíl výšek čtyrstěnů $ABCD$ a $A'B'C'D$, t. j. 4,1 cm.

151. Buď ϱ, σ splynou, pak splynou i r, s a je $r \parallel s$. Je-li $\varrho \neq \sigma$, pak r, s nemají společného bodu; protože však leží v téže rovině τ, je $r \parallel s$. **152.** Musí být $PQ \parallel RT$, t. j. $\alpha = 180° - \alpha$, čili $\alpha = 90°$. Body P, Q, R, T leží v rovině jen tehdy, je-li přímka PQ kolmá k hraně kvádru. **153.** Obr. 194. **155.** Dvě roviny rovnoběžné s rovinou ϱ. **156.** Jsou to čtyři přímky rovnoběžné s přímkou CC'.

9. **Rotační válec a kužel.**

157. 130 cm^2. **158.** Jsou stejné. **159.** Ve vzdálenosti 20 cm od osy. **160.** 53 dm^2.

161. Každý bod průsečné křivky má od průsečíku roviny s osou válce vzdálenost rovnou poloměru podstavy. **162.** Každý bod M' průsečné křivky má od průsečíku S' roviny s osou kužele touž vzdálenost $\overline{S'M'}$. **163.** $S = 94$ cm^2, $v = 6{,}3$ cm. **164.** $S = \pi r^2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \doteq 7{,}58\, r^2$. **165.** Označíme-li s délku strany a t délku tětivy, je obvod trojúhelníka $2s + t$. Toto číslo je největší, je-li t co možná největší, t. j. pro $t = 2r$. **166.** a) $s = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, b) $v = \frac{r}{\sqrt{3}}$, c) $S = \frac{2\pi r^2}{\sqrt{3}}$. **169.** 148 cm^2. **170.** 95 cm^2.

174. 47 cm^2. **175.** Plášť kužele je asi o 13 cm^2 větší než plášť jehlanu. **176.** Výsledek jako ve cvičení 175.

10. Plocha kulová a koule.

177. a) Je nesečná, b) je tečná, c) je sečná. **178.** b) 2,6 cm. **179.** b) 9,8 cm. **180.** 73 mm.

181. $r = 4{,}1$ cm. **182.** Vzdálenost středu koule od každé z desek je rovna poloměru koule. **183.** Dvě roviny rovnoběžné s rovinou ϱ vedené ve vzdálenosti r. **184.** Přímku rovnoběžnou s dolní hranou uvedené stěny. **185.** Neprochází-li PQ středem S kulové plochy, pak z trojúhelníka PQS plyne $\overline{SP} + \overline{SQ} > \overline{PQ}$, t. j. $2r > \overline{PQ}$. Prochází-li PQ středem kulové plochy, je $\overline{PQ} = 2r$. **186.** 54,9 dm, 44,8 dm. **187.** 15 600 km. **188.** 3100 km. **189.** a) $\frac{r}{2}\sqrt{3}$, b) $\frac{r}{2}$. **190.** 7380 km.

11. Objemy a povrchy těles.

191. a) 405 cm^3, b) 40 cm^3, c) 16 cm^3. **192.** 104 mm. **193.** 31,5 cm^2. **194.** 620 dm^3, 487 dm^2. **195.** 192 cm^3, 223 cm^2. **196.** Výška je 6 dm, pobočná hrana 6,6 dm. **197.** $V = h^3\frac{\sqrt{2}}{12}$; 0,05 m^3. **198.** Přes 6 milionů tun. **199.** a) 20 dm^3, b) 66 cm^3, c) 402 cm^3, d) 64 cm^3. **200.** 9 cm.

201. 20 m^3. **202.** 16,6 cm. **203.** 3,14 dm^3, 13,5 dm^2. **204.** a) 73,4 cm^3, 84,8 cm^2. b) Asi 16 640 cm^2, asi 202 000 cm^3. **205.** 28 cm. **206.** Asi o 36%. **207.** 7,3 kg. **208.** 40,7 cm^2. **209.** 510 milionů km^2. **210.** Asi 32 000.

211. 2060 cm^3. **212.** Asi o 34 cm.

12. Závislost povrchů a objemů na určujících pracích.

213. Povrch původního je $S = 2ab + 2bc + 2ac$, povrch nového $S' = 8ab + 4bc + 4ac$. Objem se zečtyrnásobil. **214.** Objem se zdvojnásobil. **215.** $b = a \,.\, \sqrt[3]{2}$. **216.** Označíme r původní poloměr, r' nový poloměr. a) $r' : r = \sqrt[3]{3}$, b) $r' : r = \sqrt{3}$. **217.** 2 : 3. **218.** $V_1 : V_2 = a : b$. **219.** a) 234 cm^2; b) přes 2000 cm^3 (2050). **220.** Asi o 330 cm^2.

IV. KONSTRUKTIVNÍ ÚLOHY.

1. Úlohy o kružnici.

221. $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SBC = \gamma_2$; $\triangle SAC \cong \triangle SBC$ (*usu*), proto $\overline{AC} = \overline{BC}$. **222.** $\sphericalangle BFE = \alpha$, $\sphericalangle AEF = \beta$, $\sphericalangle BDC = 2R - \alpha$, $\sphericalangle ACD = 2R - \beta$, t. j. $\sphericalangle ACD = 2R - \sphericalangle AEF$. **223.** Určíme délky tětiv, k nimž příslušejí obvodové úhly 45°, 120°; tím dostaneme délky úhlopříček BD, AC. **224.** a) Osy dvou vnitřních úhlů deltoidu splynou, osy druhých dvou vnitřních úhlů se protínají na ose souměrnosti. b) Skládá-li se ze dvou pravoúhlých trojúhelníků. **226.** $\overline{AA_1} = \overline{AD_1}$, neboť jsou to délky tečen, vedených z bodu A ke kružnici vepsané. Z téhož důvodu je $\overline{BA_1} = \overline{BB_1}$, $\overline{CB_1} = \overline{CC_1}$, $\overline{DC_1} = \overline{DD_1}$. Proto $\overline{AA_1} + \overline{BA_1} + \overline{CC_1} + \overline{DC_1} = \overline{AD_1} + \overline{BB_1} + \overline{CB_1} + \overline{DD_1}$, čili $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$. **227.** a) V tečnovém rovnoramenném lichoběžníku je délka střední příčky a ramene stejná. b) Z předpokladu plyne, že $\overline{UD} = \overline{US}$, t. j. $\sphericalangle UDS = \sphericalangle USD$. Ježto úhly USD, SDC jsou střídavé, je také $\sphericalangle UDS = \sphericalangle SDC$. **229.** Rameno je $\frac{5}{2}a$, výška je $2a$. **230.** Ježto S je střed kružnice opsané, je $\overline{AS} = \overline{BS}$, výška SA_1 dělí rovnoramenný trojúhelník ve dva shodné trojúhelníky AA_1S, BA_1S. Podobně je $\triangle BB_1S \cong \triangle CB_1S$; $\triangle CC_1S \cong \triangle DC_1S$, $\triangle DD_1S \cong \triangle AD_1S$. Ježto S je střed kružnice vepsané, jsou trojúhelníky AA_1S, AD_1S shodné a podobně $\triangle BA_1S \cong \triangle BB_1S$, $\triangle CB_1S \cong \triangle CC_1S$, $\triangle DC_1S \cong \triangle DD_1S$. Všech osm trojúhelníků jsou shodné trojúhelníky, proto má čtyrúhelník $ABCD$ všecky strany stejně dlouhé a všecky vnitřní úhly stejně velké.

231. Sestrojíme $\triangle ABC$ (*sus*) a opíšeme mu kružnici; na ní leží bod D. **232.** $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$; ježto $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$, je $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$. **233.** a) $\alpha = \beta = 65°$, b) $\psi = 148°$, $\alpha = 74°$, c) $\beta = 66°$, d) $\gamma = \delta = 115°$, e) $\psi = 128°$, $\varrho = 232°$, $\delta = 116°$, f) $\beta = 63°$, $\delta = 117°$, g) $\delta = 122°$, h) $\beta = 70°$. **234.** $\omega = 25°$. **235.** 64°, 64°, 232° nebo 64°, 148°, 148°. **236.** 72°, 72°, 36°. 237. a) $\sphericalangle AFB = 18°$, $\sphericalangle BFC = 12°$, $\sphericalangle AED = 180° - \sphericalangle AFD = 105°$, $\sphericalangle CED = 180° - \sphericalangle CFD = 135°$. b) $\sphericalangle DAF = \frac{1}{4} \sphericalangle ASF$. **238.** 45°, 75°, 60°. **239.** $\sphericalangle 294 = 30°$, $\sphericalangle 149 = 60°$. **240.** $\sphericalangle ABD = 55°$.

241. a) $\sphericalangle ABC = 53°$, $\sphericalangle ACB = 90°$, $\sphericalangle BAC = 37°$. b) $\sphericalangle DAB = 25°$, $\sphericalangle ADB = 90°$, $\sphericalangle ABD = 65°$. **242.** a) $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = 60°$. b) 72°. **243.** $\sphericalangle ABC = 90°$, $\sphericalangle ABD = 90°$. **244.** Přímka AD protne kružnici opsanou trojúhelníku ABC mimo bod A ještě v bodě E. $\sphericalangle AEC = 2R - \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$. Je tedy $\triangle ACD \cong \triangle ACE$ (*usu*); oba trojúhelníky leží v téže polorovině vyťaté přímkou AC, proto body D, E splynou. **245.** Buď $\sphericalangle AEC = 2R - \sphericalangle ABC$; $\sphericalangle EDA = 180° - \sphericalangle ADC$, t. j. $\sphericalangle AEC = \sphericalangle EDA$ nebo $\sphericalangle AED = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ADE$. **246.** Tětivy AS, BS jsou stejně dlouhé; proto obvodové úhly ACS, BCS k nim příslušné jsou stejně velké. **247.** 57°. **248.** 5,7 cm. **249.** $\sphericalangle ASB = 80°$, $\sphericalangle ACB = 40°$; $\sphericalangle BSC = 120°$, $\sphericalangle BAC = 60°$; $\sphericalangle CSA = 160°$, $\sphericalangle CBA = 80°$. **250.** 60°, 84°, 120°, 96°.

251. Označíme E průsečík kružnice k s osou úhlu BAC; pak je $\overline{BE} = \overline{CE}$ a proto též $\sphericalangle BDE = \sphericalangle CDE$, t. j. DE je osa úhlu BDC. **252.** Sestrojíme nad tětivou CD kružnici tak, aby středový úhel příslušný k tětivě CD byl a) 90°, b) 100°, c) 180°. Úloha c) je neřešitelná. **253.** Sestrojíme k tětivám AB, BC příslušné kružnice; ty se protnou mimo bod B ještě v dalším bodě ležícím na přímce BD. Úloha a) čtyř. — b) jednoznačná. **254.** Sestrojíme k tětivě AB příslušné oblouky kružnic a spojíme bod A se středem kružnic. Druhé krajní body těchto průměrů jsou hledané body (2 řešení). **255.** Je to jediný bod, totiž pata výšky spuštěné na přeponu. **256.** Sestrojíme k tětivám AC, BC příslušné kružnice. Hledaný bod je jejich průsečík různý od bodu C. **257.** Třetí stranu je viděti také pod úhlem 120°. Takový bod lze sestrojiti pro libovolný trojúhelník. **258.** K tětivě AB sestrojíme příslušnou kružnici a protneme ji rovnoběžkou s přímkou AB vedenou bodem C. **259.** Nad průměrem AC sestrojíme kružnici a protneme ji rovnoběžkami s přímkou AC vedenými body B, D. **260.** Úsečky AB, BC se jeví z bodu E pod úhly 45°. Sestrojíme tedy k tětivám AB, BC příslušné kružnice; jejich průsečík rozdílný od bodu B je hledaný bod E.

261. K tětivě AB sestrojíme příslušnou kružnici a najdeme její průsečíky s osou úsečky AB. Jeden z nich je hledaný vrchol C. **262.** Je to průsečík čtvrtkružnice s osou úhlu ASB. Úhel je 67°30′. **263.** $\sphericalangle AXB = \sphericalangle AUB > \sphericalangle AVB = \sphericalangle AYB$. **264.** V kružnici opsané je úhel 60° obvodový úhel příslušný k úhlopříčce jako tětivě. Sestrojíme úsečku AC délky 6 cm a opsanou kružnici k. Kolem středu C opíšeme kružnici poloměrem 2,5 cm a k ní vedeme tečny z bodu A. Kružnice k na ní vymezí jednu základnu lichoběžníka. Úloha má 2 řešení. **265.** b) $\sphericalangle FQD = 2R - \alpha$, $\sphericalangle DQE = 2R - \beta$; $\sphericalangle EQF = 360° - \sphericalangle FQD - \sphericalangle DQE = \alpha + \beta = 2R = \gamma$. Podle výsledku cvičení 263 je čtyrúhelník $CFQE$ tětivový, t. j. kružnice opsaná trojúhelníku CEF prochází bodem Q.

2. Konstrukce trojúhelníků.

266. Určíme konstruktivně $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$; úloha je řešitelná, je-li $\alpha + \beta < 2R$ a má jediné řešení. **267.** $t_c = \dfrac{c}{2}$. Sestrojíme úsečku délky c, nad ní jako nad průměrem kružnici a protneme ramenem úhlu α. Řešení je jediné. **268.** Sestrojíme b, α, kolem středu C opíšeme kružnici poloměrem a a jí protneme druhé rameno úhlu α. Podmínka řešitelnosti: vzdálenost bodu C od ramene úhlu α musí být menší nebo rovna délce a. Úloha má nejvýše 2 řešení. **269.** Sestrojíme úsečku $\overline{BC} = a$; vedeme s ní rovnoběžku p ve vzdálenosti v_a a kolem středu B opíšeme kružnici k o poloměru v_b. Ke kružnici k vedeme z bodu C obě tečny a protneme jimi přímku p. Podmínka řešitelnosti je $v_b \leqq a$; úloha má nejvýše dvě řešení. **270.** Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník o odvěsně $\dfrac{a}{2}$ a přeponě t_a a doplníme jej na hledaný. Podmínka řešitelnosti je $2t_a > a$; úloha má jediné řešení.

271. Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABD s odvěsnou $\overline{AD} = v_a$ a protějším úhlem β ($\sphericalangle ADB = 90°$). Kolem bodu A opíšeme kružnici k poloměrem b a protneme jí přímku BD. Podmínka řešitelnosti je $b \geqq v_a$; úloha má nejvýše dvě řešení. **272.** Sestrojíme kružnici o poloměru r a sestrojíme dva vedlejší úhly s vrcholem v jejím středu velikosti 2α, 2β. Jejich ramena protnou kružnici ve vrcholech hledaného trojúhelníka. Podmínka řešitelnosti je $\alpha + \beta < 2R$. **273.** Sestrojíme kružnici o poloměru r, v ní libovolnou tětivu délky a a dále úhel β. Rameno úhlu β protne kružnici ve vrcholu A. **274.** Hledaný trojúhelník ABC si doplníme na kosočtverec $ADBC$ a sestrojujeme nejprve rovnoramenný trojúhelník CDB takto: narýsujeme úsečku $\overline{CD} = 2v_c$, kolem středu D opíšeme kružnici k poloměrem v_a; ke kružnici k vedeme z bodu C jednu tečnu; tuto tečnu protneme osou úsečky CD; tak dostaneme bod B. Trojúhelník CDB doplníme na kosočtverec $ADBC$. **275.** Do pravého úhlu vpíšeme kružnici k o poloměru ϱ, na jedno jeho rameno naneseme délku a, tak dostaneme vrchol B; z bodu B vedeme zbývající tečnu ke kružnici k. Podmínka řešitelnosti je $a > 2\varrho$. **276.** *Sestrojíme úsečku* $\overline{BC} = a$. Kolem středů B, C opíšeme kružnice poloměry v_c, v_b; k nim vedeme z bodů C, B tečny. Podmínka řešitelnosti je $v_b \leq a$, $v_c \leq a$, *při čemž aspoň v jedné z těchto* nerovností je znaménko $<$. Úloha má nejvýše dvě řešení. **277.** Do úhlu α vpíšeme kružnici o poloměru ϱ; sestrojíme k ní tečnu tak, aby s jedním ramenem úhlu α svírala úhel β a aby narýsovaná kružnice ležela uvnitř vzniklého trojúhelníka. Podmínka řešitelnosti je $\alpha + \beta < 2R$. **278.** Pomocný trojúhelník BA_1T má strany $\overline{BA_1} = \frac{a}{2}$, $\overline{TA_1} = \frac{t_a}{3}$, $\overline{BT} = \frac{2t_b}{3}$. Prodloužíme BA_1 za bod A_1 a naneseme $\frac{a}{2}$, tak dostaneme vrchol C. Prodloužíme A_1T za bod T a naneseme $\frac{2t_a}{3}$, tak dostaneme vrchol A. **279.** V trojúhelníku BA_1T známe dvě strany: $\overline{BA_1} = \frac{a}{2}$, $\overline{BT} = \frac{2t_b}{3}$ a úhel $\sphericalangle BA_1T = 90°$. **280.** $\sphericalangle BSC = 180° - \sphericalangle SBC - \sphericalangle SCB = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180° - (90° - \frac{\alpha}{2}) = 90° + \frac{\alpha}{2}$. K úsečce $\overline{BC} = a$ jako tětivě sestrojíme oblouk kružnice tak, aby obvodový úhel byl $90° + \frac{\alpha}{2}$ a protneme jej rovnoběžkou s BC vedenou ve vzdálenosti ϱ.

281. a je tětivou kružnice o poloměru r, příslušnou k středovému úhlu 2α. **282.** $t_c = \frac{c}{2} = r$ je poloměr kružnice opsané. Je-li AB přepona trojúhelníka, S střed kružnice, vepsané, je $\sphericalangle ASB = 135°$. Dále jako ve cvičení 280. **283.** Rovnoběžník $ABDC$ se dělí úhlopříčkou AD ve dva shodné trojúhelníky: $\triangle ABD \cong \triangle DCA$. Je tedy $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADB$, avšak podle předpokladu též $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD$. Trojúhelník ADB je tudíž rovnoramenný, $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{AC}$, t. j. $\triangle ABC$ je také rovnoramenný. **284.** Označíme T těžiště, A_1, B_1 středy stran BC, AC. $\triangle ABT$ je rovnoramenný, neboť $\overline{AT} = \overline{BT} = \frac{2}{3} t_a$. $\triangle ABB_1 \cong \triangle BAA_1$ (*sus*, $\overline{AA_1} = BB_1$, $\sphericalangle A_1AB = \sphericalangle B_1BA$), proto $\frac{b}{2} = \overline{AB_1} = \overline{BA_1} = \frac{a}{2}$, čili $a = b$.

3. Společné tečny dvou kružnic.

286. Je to společná tečna kružnic o středech A, B a poloměrech 2 cm, 15 mm. **287.** a) Sestrojíme kružnici k'_2 soustředěnou s k_2, která je geometrickým místem středů tětiv kružnice k_2, jejichž délka je 2 cm. Pak vedeme společné tečny ke kružnicím k_1, k'_2. b) Sestrojíme obdobné soustředné kružnice k oběma kružnicím k_1, k_2. **288.** Označíme T_1, T_2 dotykové body tečny u s kružnicemi k_1, k_2. Pak je $\triangle JS_1T_1 \cong \triangle JS_2T_2$ (*usu*, $\sphericalangle S_1JT_1 = \sphericalangle S_2JT_2$, $\sphericalangle S_1T_1J = \sphericalangle S_2T_2J = 90°$, $\overline{S_1J} = \overline{S_2J}$), proto $\overline{S_1T_1} = \overline{S_2T_2}$. **289.** a) $\overline{BT_1} = \overline{BA}$ (délka tečen vedených z bodu B ke kružnici k_2), obdobně $\overline{BT_2} = \overline{BA}$, proto $\overline{BT_1} = \overline{BT_2}$. b) Kružnice opsaná kolem středu B poloměrem $\overline{BT_1}$ jde body T_1, T_2, A. Proto je trojúhelník T_1T_2A pravoúhlý. **290.** Do pravého úhlu s vrcholem C vpíšeme kružnici k_1 o poloměru ϱ a kolem středu C opíšeme kružnici k_2 s poloměrem v_c. Sestrojíme společné vnější tečny kružnic k_1, k_2.

291. Do úhlu α s vrcholem A vpíšeme kružnici k_1 o poloměru ϱ a kolem středu A opíšeme kružnici k_2 s poloměrem v_a. Sestrojíme společné vnější tečny kružnic k_1, k_2. **292.** Určíme konstruktivně výšky v, v' rovnostranných trojúhelníků o stranách 20 mm, 35 mm. Kolem středů A, A' opíšeme kružnice poloměry v, v' a k nim sestrojíme společné tečny. **293.** b) $\overline{S_1S_2} = 4$ dm, c) 279 cm. **294.** b) $\overline{S_1S_2} = 8{,}5$ dm, c) 403 cm. **295.** 86,4 cm.

V. ZÁVĚREČNÉ OPAKOVÁNÍ.

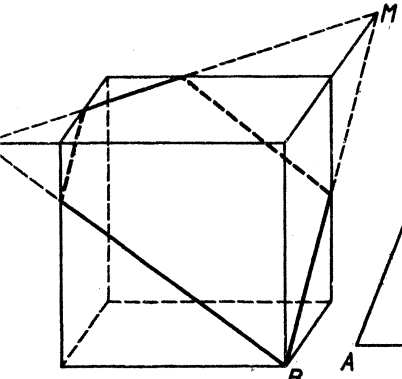
296. a) $\sphericalangle ABA' = \sphericalangle BAA' = 36°$ (z $\triangle ACB$). Jsou shodné podle *usu*. b) $\sphericalangle A'AE' = 36°$. Cípy jsou shodné podle *sus*. c) Podle definice. d) $\sphericalangle C'A'E' = \sphericalangle C'E'A' = 72°$. **297.** Asi 14 400. **298.** $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 \doteq 25°43'$, $\alpha_3 \doteq 51°25'$. **299.** a) Čtyrúhelník $ABCS$ má poloviční obsah jako vyčárkovaný obdélník; b) $2r^2\sqrt{2}$; c) asi 59 cm.

301. $n = 3, 4, 6$; plný úhel musí být k-násobkem vnitřního úhlu n-úhelníku (k celé). **302.** K je střed kružnice opsané lichoběžníku $ABCD$. **303.** AB je osa úhlu sevřeného okraji 1, 2; proto střed dna leží na přímce AB. **304.** Oba konce vlaku a stanoviště pozorovatele tvoří trojúhelník, který je určen stranou, protějším úhlem a příslušnou výškou. **305.** Bod S je průsečík kružnic, z nichž každá je dána tětivou a příslušným obvodovým úhlem. **306.** Sestrojíme na přímce KA bod M tak, že $\overline{AM} = \overline{AK}$. Sestrojíme rovnoběžník a úhlopříčkou KM, jehož strany leží v silnicích. Druhá jeho úhlopříčka je hledaná cesta.

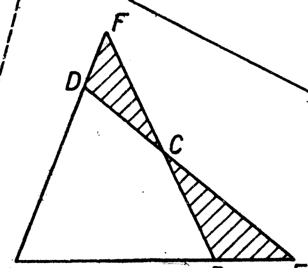
307. Jsou mimoběžné. **308.** Délka tětivy je $\sqrt{82} \doteq 9$. **309.** a) 41,7 m, b) 22,4 m, c) 9630 tašek. **310.** Z 1. pozorování plyne, že tyčky leží ve dvou rovnoběžných rovinách. Z 2. pozorování plyne, že leží v téže rovině. Závěr: obě tyčky jsou rovnoběžné (viz cvičení 151).

311. 106 m^2. **312.** Trojúhelník KLM doplníme naznačeným způsobem na rovnoběžník, vrcholy K, N posuneme po rovnoběžkách na příslušné pobočné hrany. **313.** a) Nelze, neboť každá z hran je rovnoběžná s některou hranou krychle. b) Povrchy obou těles jsou stejné, objem krychle se vyříznutím zmenšil o osminu. **314.** Obr. 195, 196. Porovnáme přepony AB, $A'B'$ pravoúhlých trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ na obou obrázcích. Početně: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{101}$; $\overline{A'B'} = \sqrt{\overline{A'C'}^2 + \overline{B'C'}^2} = \sqrt{85}$, $\overline{A'B'} < \overline{AB}$; výhodnější je vedení po přední stěně. **315.** a) 7,8 m, b) 5 m. **316.** Podstava je čtverec o hraně 5 m, výška je 3,5 m (polovina výšky jehlanu). **317.** $\overline{BC} = 8{,}9$ cm, AB neprotíná osu válce. Aby AB protínala osu válce, musí být $\overline{AB} = 12{,}8$ cm. **319.** a) $DA \perp AS$, proto bude $DA \perp BS$; $DC \perp CT$, proto bude $DC \perp BT$. Protože DA, DC splynou, bude po přehnutí $DA \perp BS$, $DA \perp BT$. b) Je-li a strana čtverce, je $S = a^2$, $V = \frac{a^3}{24}$. **320.** a) Jsou to shodné rovnostranné trojúhelníky. b) Body A, C, E, F leží v rovině, neboť spojnice EF jde středem čtverce $ABCD$. Čtyrúhelník $AFCE$ je rovnostranný, $\sphericalangle AEC = 90°$, neboť $\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} = \overline{AE} \cdot \sqrt{2}$. c) $ABCD$, $AECF$, $BEDF$. d) Čtverce uvedené v c) jsou shodné, úsečky AC, BD, EF jsou jejich úhlopříčky. Každé dvě z těchto úhlopříček se navzájem půlí. e) $S = 2h^2\sqrt{3}$. f) $V = \frac{h^3}{3}\sqrt{2}$.

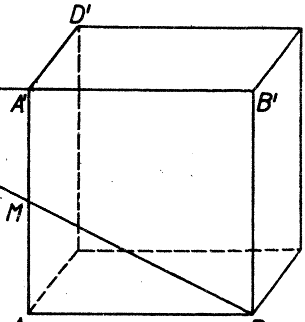
321. Ve větším klesne hladina o 26 mm, v menším stoupne o 34 mm. **322.** Asi o 19 cm. **323.** 18 200 hl. **324.** Asi 11 kg. **325.** Asi 1500 Kčs. **326.** Asi $88\frac{3}{4}$ kg.



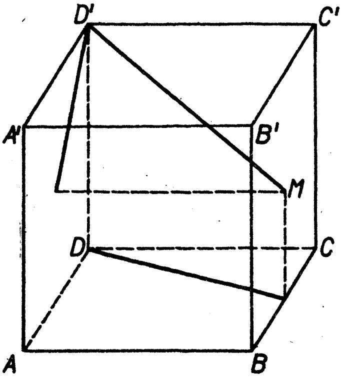
Obr. 187.



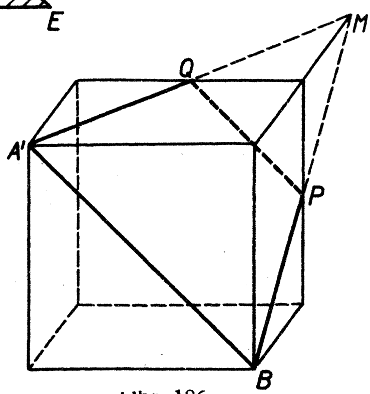
Obr. 184.



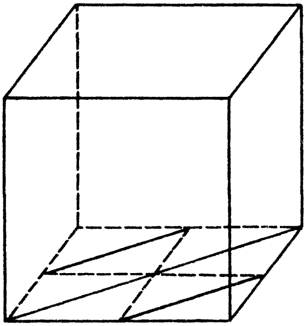
Obr. 185.



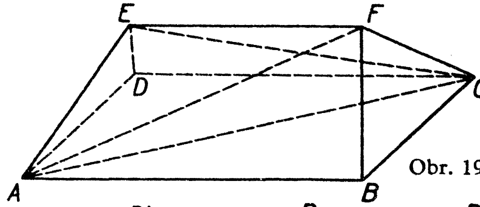
Obr. 189.



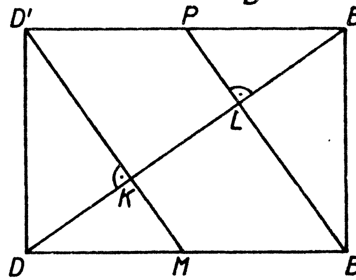
Obr. 186.



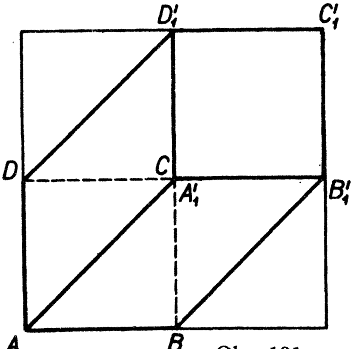
Obr. 190.



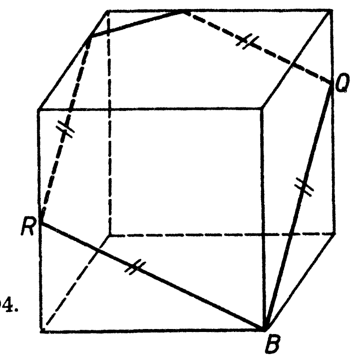
Obr. 192.



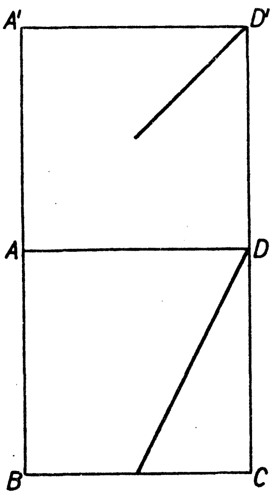
Obr. 193.



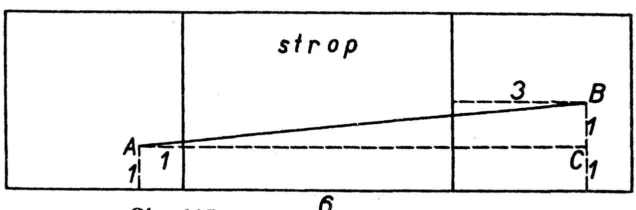
Obr. 191.



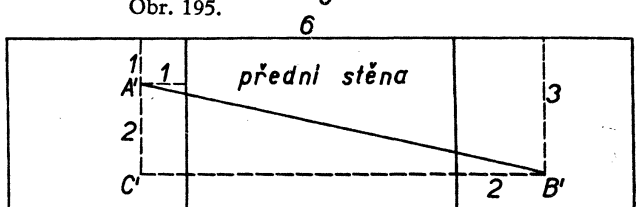
Obr. 194.



Obr. 188.



Obr. 195.



Obr. 196.

REJSTŘÍK.

Číslo značí stránku, kde je pojem vysvětlen.

OBSAH:

8 Čkm. 238-IV

VÝZKUMNÝ ÚSTAV PEDAGOGICKÝ J. A. KOMENSKÉHO

Redakční rada pro učebnice. Předseda: BOHUMÍR KUJAL
Komise pro matematiku. Předseda: prof. Dr FRANTIŠEK VYČICHLO
Subkomise pro školy střední. Předseda: prof. Dr EDUARD ČECH

GEOMETRIE pro IV. třídu středních škol

Autoři: Dr EDUARD ČECH, ALFONS FIŠER, VÍTĚZSLAV JOZÍFEK,
Ing. KAREL KOMÍNEK, JAN VYŠÍN, RUDOLF ZELINKA

Obálku navrhla MARIE TŮMOVÁ

Schváleno výnosem ministerstva školství, věd a umění ze dne 11. února 1950, č. 52 801/50-I/1, v druhém vydání jako učebnice pro školy střední

Vydalo r. 1950 Státní nakladatelství v Praze
Druhé vydání (83 001. – 148 000. výt.)
Vytiskla Státní tiskárna, závod 03 v Praze, v nákladu 65 000 výtisků
Cena sešitého výtisku Kčs 10,80

B73

Čkm. 238-IV

Cena 10,80