Eduard Čech

Geometrie pro IV. třídu středních a měšťanských škol

Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1946, 93 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501362

EDUARD ČECH

GEOMETRIE

PRO IV. TŘ. MĚŠŤANSKÝCH A STŘEDNÍCH ŠKOL

(ŠKOL II. STUPNĚ)

154

CENA Kčs 20,—

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

UČEBNICE A POMOCNÉ KNIHY VYDÁVANÉ JEDNOTOU
ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
154

GEOMETRIE

pro IV. třídu měšťanských a středních škol

(škol II. stupně)

NAPSAL

EDUARD ČECH

Se 164 obrazci

Schváleno výnosem ministerstva školství a osvěty ze dne 24. srpna 1946, čís. A-177 698/46-III/1 jako změněný dotisk prvního vydání pro školy měšťanské a nižší střední na školní rok 1946/47

Jč
m+f

CENA Kčs 20,—

PRAHA 1946

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
TISKEM KNIHTISKÁRNY PROMETHEUS, PRAHA VIII - 94

§ 1. Základní vlastnosti polohy.

1. Přímky. Než začneme probírati novou geometrickou látku, zopakujeme si soustavně některé základní poznatky získané v nižších třídách.

Předmětem geometrie je studium **prostoru**. Prostor se skládá z **bodů**, které značíme velkými písmeny A, B, C atd., někdy opatřenými indexy (dole) nebo čárkami (nahoře), na př. S_1, S_2, K', K'' atd.

Z částí prostoru jsou v geometrii nejdůležitější **přímky.** Hlavní vlastnost přímek jest: **dvěma různými body** A, B **prochází právě jedna přímka**, které říkáme přímka AB nebo přímka BA. Přímky, a také jiné čáry, značíme často malými písmeny; pro přímky užíváme často písmen p, q.

Připomeňme si také známý pojem **roviny.** Rovina má tu vlastnost, že jakmile v ní leží dva různé body A, B, leží v ní celá přímka AB. Ta část geometrie, ve které studujeme jenom útvary, které všecky leží v určité rovině, nazývá se **planimetrie.** V tomto roce se budeme zabývati výhradně planimetrií.

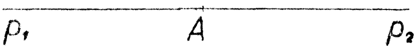
Z hlavní vlastnosti přímek následuje, že dvě různé přímky mají nejvýš jeden společný bod. Dvě různé přímky p_1, p_2, které mají společný bod A, jmenují se **různoběžné přímky**, krátce **různoběžky;** bod A je jejich **průsečík** a říkáme, že p_1, p_2 se v něm **protínají.** Dvě různé přímky, které nemají žádný společný bod, jmenují se **rovnoběžné přímky**, krátce **rovnoběžky***); ale také dvě splývající přímky počítáme za rovnoběžky. Rovnoběžnost přímek p_1, p_2 zapisujeme takto: $p_1 \parallel p_2$.

O rovnoběžkách platí vám známá základní věta: **Daným bodem** A **lze vésti k dané přímce** p **právě jednu rovnoběžku** q. Ze základní věty odvodíme jednoduchým úsudkem další větu: **Jsou-li obě přímky** p_1, p_2 **rovnoběžné s třetí přímkou** q, **jsou** p_1, p_2 **také mezi sebou rovno-**

*) To platí ovšem jenom tehdy, jestliže obě přímky leží v téže rovině. Dvě přímky, které neleží v téže rovině, nemají žádný společný bod; nejsou to však rovnoběžky, nýbrž mimoběžky. Ale v planimetrii se mimoběžky nevyskytují.

běžné. Budiž tedy $p_1 \parallel q$, $p_2 \parallel q$; máme dokázati, že $p_1 \parallel p_2$. To je zřejmé, jestliže p_1, p_2 splynou. Jsou-li však přímky p_1, p_2 různé, nemohou míti žádný společný bod A, protože bodem A nejdou dvě různé rovnoběžky p_1, p_2 s přímkou q.

2. Polopřímky, úsečky, poloroviny. Libovolný bod A na dané přímce (viz obr. 1) rozdělí tuto přímku na dvě **polopřímky** p_1, p_2, které jsou navzájem **opačné.** Bod A je **počátek** obou polopřímek.



Obr. 1.

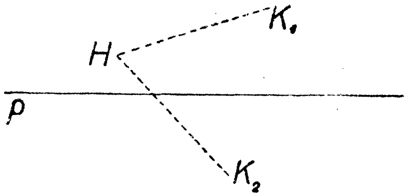
Obr. 2.

Jsou-li A, B dva různé body na přímce p (viz obr. 2), pak polopřímka AB je ta, která má počátek A a prochází bodem B; podobně polopřímka BA má počátek B a prochází bodem A. Ty dvě polopřímky jsou různé; body oběma společné tvoří **úsečku** AB neboli úsečku BA, které také říkáme **spojnice** bodů A, B. Tyto dva body jsou **krajní** body úsečky AB; každý jiný bod té úsečky leží **uvnitř úsečky** neboli **mezi** body A, B; **vně úsečky** AB leží ty body přímky AB, které nenáležejí do úsečky AB. Celá přímka p se skládá ze tří částí, jež jsou:

[1] úsečka AB;

[2] **prodloužení úsečky** AB **za bod** A neboli polopřímka opačná k polopřímce AB;

[3] prodloužení úsečky AB za bod B.

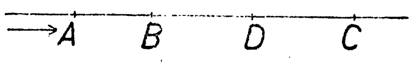


Obr. 3.

Každá přímka p rozdělí rovinu na dvě **poloroviny** a tvoří **hranici** obou polorovin; každý bod ležící mimo p leží **uvnitř** jedné z obou polorovin. Pravíme, že ty poloroviny jsou **vyťaty** přímkou p a že jsou navzájem **opačné**. Leží-li bod C uvnitř jedné z obou polorovin, říkáme jí polorovina pC nebo také polorovina ABC (nebo BAC), jsou-li A, B dva různé body přímky p.

Dva body H, K ležící mimo přímku p (viz obr. 3) jsou od sebe **odděleny** přímkou p, jsou-li poloroviny pH, pK různé; splynou-li poloroviny pH, pK, nejsou H, K od sebe odděleny přímkou p. Abychom poznali, který případ nastane, veďme úsečku H, K. Jsou-li H, K od sebe odděleny, protne p úsečku HK, a nejsou-li od sebe odděleny, neprotne p úsečku HK.

Bod může **probíhati** přímku dvojím způsobem, z nichž jeden je v obr. 4 vyznačen šipkou; říkáme, že bod může probíhati přímku ve dvojím **smyslu**, z nichž někdy volíme jeden za kladný a druhý za záporný. Zejména u vodorovných přímek obyčejně považujeme za kladný smysl od leva do prava, u svislých smysl zdola nahoru. Bez ohledu na smysl můžeme říci, že v obr. 4 máme na přímce p čtyři body v **pořádku** $ABDC$ nebo v pořádku $CDBA$; každý z obou pořádků odpovídá jedné volbě smyslu.



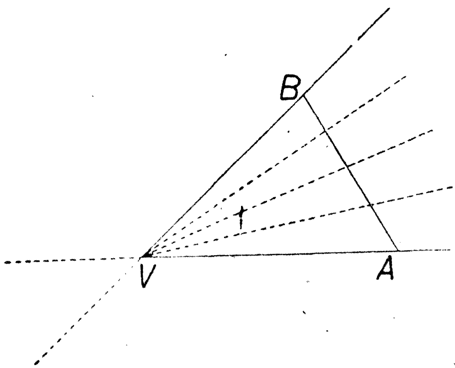
Obr. 4.

Každá polopřímka obsažená v přímce p určuje jeden smysl přímky p; je to ten smysl, při kterém počátek je před ostatními body polopřímky. Dvě polopřímky obsažené v přímce p nazveme **souhlasné**, určují-li obě týž smysl; jinak jsou **nesouhlasné**. Na př. v obr. 4 polopřímky AC, BC nebo polopřímky DA, CA jsou souhlasné, kdežto polopřímky BA, DC nebo polopřímky AC, CA jsou nesouhlasné. Opačné polopřímky jsou nesouhlasné polopřímky s týmž počátkem, kdežto dvě souhlasné polopřímky s týmž počátkem splynou.

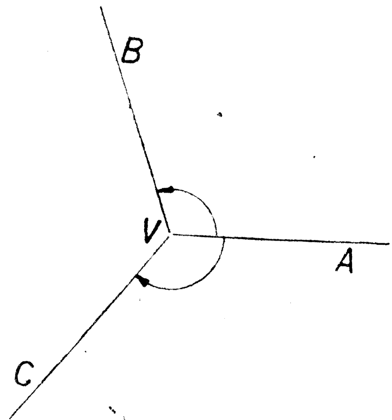
3. Úhly. Všecky polopřímky s daným počátkem V tvoří **svazek polopřímek**, který se vytvoří, jestliže se polopřímka otáčí kolem svého počátku V. Toto otáčení se může díti ve dvojím **smyslu;** buďto ve smyslu **kladném**, t. j. do leva neboli proti pohybu hodinových ručiček nebo ve smyslu **záporném**, t. j. do prava.

Dvě různé polopřímky VA, VB téhož svazku rozdělí svazek na dvě části, kterým říkáme **úhly**. Bod V je **vrchol** obou úhlů, polopřímky VA, VB jsou jejich **ramena**; každá jiná polopřímka svazku leží **uvnitř** jednoho z obou úhlů a **vně** druhého. Leží-li obě ramena v téže přímce p, vyplní každý z obou úhlů jednu polorovinu vyťatou přímkou p; takové úhly se jmenují **úhly přímé**. Jestliže však ramena VA, VB neleží obě v téže přímce, pak jeden z obou úhlů se jmenuje **úhel dutý** a druhý se jmenuje **úhel vypuklý;** dutý úhel se skládá z těch polopřímek s počátkem V, které protnou úsečku AB, vypuklý úhel obsahuje mimo jiné polopřímky opačné k polopřímkám VA, VB (viz obr. 5). My se budeme zabývati hlavně dutými úhly; proto dutý úhel s rameny VA, VB budeme obyčejně nazývati krátce **úhel** AVB nebo ovšem úhel BVA, což píšeme často $\sphericalangle AVB$ nebo $\sphericalangle BVA$. Místo $\sphericalangle AVB$ můžeme psáti ještě kratčeji $\sphericalangle V$, jestliže poloha ramen je zřejmá ze souvislosti nebo z obrazce. Nezřídka značíme také úhly, zejména zase duté úhly, řeckými písmeny nejčastěji písmeny α, β, γ, δ, ω, někdy opatřenými indexy (α_1, α_2, β_1 atd.).

Dva úhly se jmenují **styčné**, jestliže mají jedno rameno VA společné (tudíž i společný vrchol) a jestliže se vytvoří jeden otáčením polopřímky ze základní polohy VA ve smyslu kladném a druhý otáčením z téže základní polohy ve smyslu záporném (viz obr. 6).

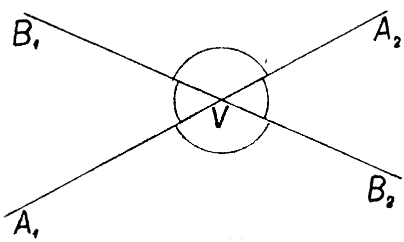


Obr. 5.



Obr. 6.

Dvě různoběžky s průsečíkem V určují (viz obr. 7) čtyři duté úhly s vrcholem V. Dva z nich se jmenují **úhly vedlejší,** mají-li společné rameno, a **úhly vrcholové,** nemají-li společné rameno. K danému dutému úhlu máme vždy dva úhly k němu vedlejší a jediný úhel s ním vrcholový. Oba úhly vedlejší k témuž dutému úhlu jsou navzájem vrcholové. Dva vedlejší úhly jsou úhly styčné, které dohromady tvoří úhel přímý.



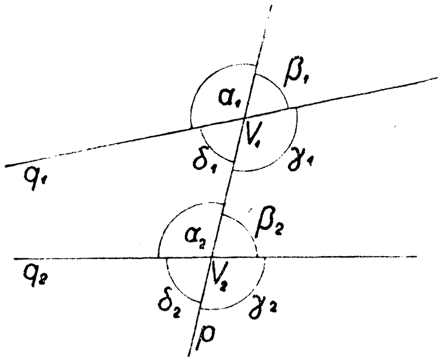
Obr. 7.

Jestliže přímka p protne přímku q_1 v bodě V_1 a přímku q_2 v jiném bodě V_2, vzniknou čtyři úhly při vrcholu V_1 a čtyři úhly při vrcholu V_2. Vybereme-li z těchto osmi úhlů dva, jeden s vrcholem V_1 a druhý s vrcholem V_2, pak ty dva úhly se jmenují

[1] **úhly souhlasné**, jestliže ramena ležící v přímce p jsou dvě souhlasné polopřímky a druhá ramena jsou obě v téže polorovině vyťaté přímkou p (na př. α_1, α_2 v obr. 8);

[2] **úhly přilehlé**, jestliže ramena ležící v přímce p jsou dvě ne souhlasné polopřímky a druhá ramena jsou obě v téže polorovině vyťaté přímkou p (na př. α_1, δ_2 nebo α_2, δ_1 v obr. 8);

[3] **úhly střídavé**, jestliže ramena ležící v přímce p jsou dvě nesouhlasné polopřímky a druhá ramena jsou v různých polorovinách vyťatých přímkou p (na př. α_1, γ_2 nebo α_2, γ_1 v obr. 8);

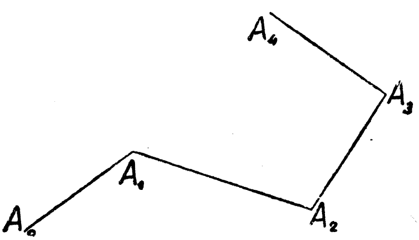


Obr. 8.

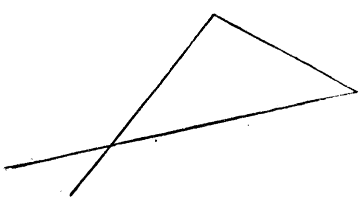
[4] **úhly protilehlé**, jestliže ramena ležící v přímce p jsou dvě souhlasné polopřímky a druhá ramena jsou v různých polorovinách vyťatých přímkou p (na př. α_1, β_2 v obr. 8).

4. Lomené čáry a mnohoúhelníky. Lomená čára $A_0A_1 \ldots A_n$ (viz obr. 9 pro $n = 4$) se skládá z několika úseček

$$A_0A_1,\ A_1A_2,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n,$$



Obr. 9.



Obr. 10.

z nichž dvě **sousední** mají vždy jeden krajní bod společný, ale neleží obě v téže přímce, kdežto dvě nesousední nemají vůbec žádný společný bod, takže na př. čáru z obr. 10 nepovažujeme za lomenou čáru.

Body

$$A_0, A_1, \ldots, A_n$$

jsou **vrcholy** a úsečky

$$A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$$

jsou **strany** lomené čáry $A_0A_1 \ldots A_n$; body A_0, A_n jsou její **krajní body.** Počet vrcholů lomené čáry je vždy o jedničku větší nežli počet stran. Lomená čára $A_0A_1 \ldots A_n$ je ovšem totožná s lomenou čarou $A_nA_{n-1} \ldots A_0$.

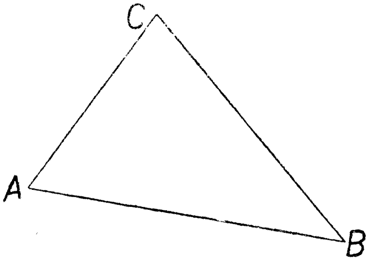
U lomené čáry $A_0A_1 \ldots A_n$ jsou body A_0, A_n od sebe různé. Jestliže A_0 splyne s A_n, přejde lomená čára ve **mnohoúhelník** (určitěji n-**úhelník**) $A_1A_2 \ldots A_n$. Mnohoúhelník má n **vrcholů**

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

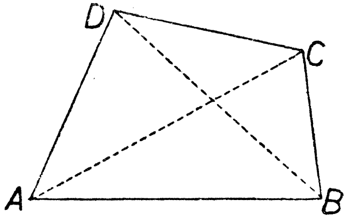
a týž počet n **stran**

$$A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1.$$

Z každého vrcholu vycházejí dvě strany, které se jmenují **sousední;** každá strana má své krajní body ve dvou vrcholech, které se zase



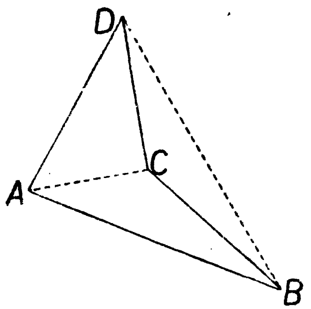
Obr. 11.



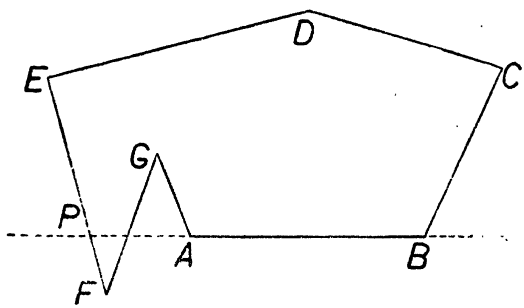
Obr. 12.

jmenují **sousední.** Dvě sousední strany neleží v téže přímce. Dvě nesousední strany nemají žádný společný bod. Úsečka, jejíž krajní body jsou dva nesousední vrcholy, jmenuje se **úhlopříčka** nebo **diagonála** mnohoúhelníka. U **trojúhelníka** ($n = 3$, viz obr. 11) jsou každé dva vrcholy sousední a úhlopříček není. U **čtyrúhelníka** ($n = 4$, viz obr. 12 a 13) jsou dvě úhlopříčky. Vrcholy mnohoúhelníka píšeme vždy v takovém pořádku, že dva vrcholy napsané přímo za sebou jsou sousední; první a poslední vrchol jsou potom také sousední. Při tom můžeme začíti kterýmkoli vrcholem a na druhé místo dáti jeden nebo druhý z obou vrcholů sousedních. Pouze u trojúhelníka můžeme zapsati vrcholy v úplně libovolném pořádku za sebou.

Každý mnohoúhelník rozdělí rovinu na dvě části, z nichž jedna se rozprostírá do nekonečna a jmenuje se **vnějšek** mnohoúhelníka; druhá část, která je celá v konečnu, jmenuje se **vnitřek** mnohoúhelníka. Body mnohoúhelníka nepočítáme ani do vnějšku ani do vnitřku. Mnohoúhelník se svým vnitřkem dohromady tvoří **plochu mnohoúhelníka**. Velmi často se však ploše mnohoúhelníka říká mnohoúhelník; čára zde zvaná mnohoúhelník nese potom název **obvod mnohoúhelníka.**



Obr. 13.

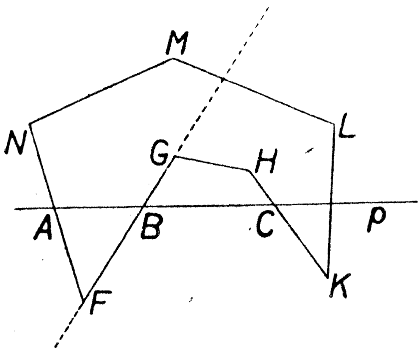


Obr. 14.

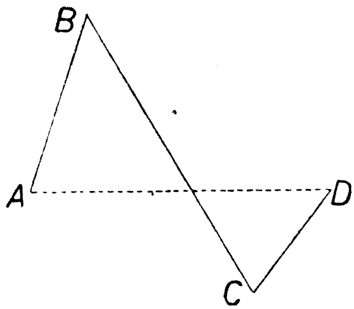
Nejjednodušší a nejdůležitější jsou **mnohoúhelníky vypuklé.** Mnohoúhelník se nazývá vypuklý, jestliže pro každou stranu AB platí, že všechny vrcholy (a tudíž i celý mnohoúhelník i se svým vnitřkem) leží v jediné polorovině vyťaté přímkou AB. Každý trojúhelník je vypuklý. Čtyrúhelník $ABCD$ v obr. 12 je vypuklý, čtyrúhelník $ABCD$ v obr. 13 není vypuklý.

Mnohoúhelník, který není vypuklý, má (viz obr. 14) aspoň jednu takovou stranu AB, že některé dva vrcholy, třeba vrcholy C, F, jsou od sebe odděleny přímkou AB. Ty dva vrcholy jsou na mnohoúhelníku spojeny lomenou čarou, jejíž jedna strana, třeba strana EF, má krajní body od sebe oddělené přímkou AB, pročež ta strana protne přímku AB v bodě P. Tedy mnohoúhelník, který není vypuklý, má aspoň jednu takovou stranu AB, že přímka AB obsahuje aspoň jeden bod mnohoúhelníka ležící mimo úsečku AB. Naproti pro každou stranu AB vypuklého mnohoúhelníka platí, že přímka AB má s mnohoúhelníkem společnou pouze úsečku AB. Nechť naopak (viz zase obr. 14) mnohoúhelník obsahuje bod P ležící třeba na prodloužení úsečky AB za bod A. Vrchol A je krajním bodem strany AG a úsečka BP protne přímku AG v bodě A, takže body B, P mnohoúhelníka jsou od sebe odděleny přímkou AG, pročež mnohoúhelník není vypuklý.

Přímka p, která neobsahuje žádnou stranu vypuklého mnohoúhelníka, protne mnohoúhelník nejvýš ve dvou bodech. Nechť naopak (viz obr. 15) taková přímka p obsahuje tři



Obr. 15.



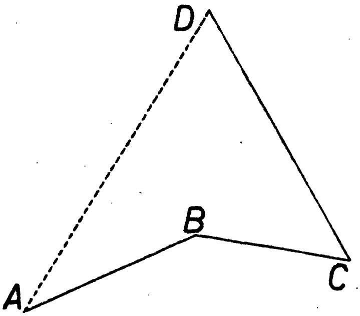
Obr. 16.

různé body A, B, C mnohoúhelníka, při čemž nechť třeba B leží mezi A a C. Bod B náleží určité straně FG mnohoúhelníka, při čemž přímka FG je různá od p. Úsečka AC protne přímku FG v bodě B, takže body A, C mnohoúhelníka jsou od sebe odděleny přímkou FG, pročež mnohoúhelník není vypuklý.

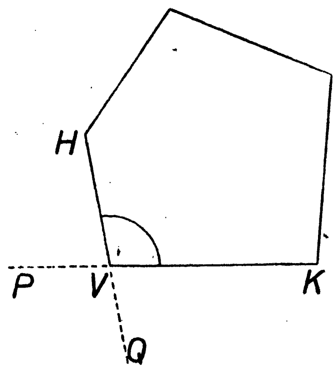
Vypuklé mnohoúhelníky mají řadu jiných jednoduchých vlastností. Na př. každá úhlopříčka vypuklého mnohoúhelníka leží celá (až na své krajní body) uvnitř mnohoúhelníka. Dá se dokázati, že také každý nevypuklý mnohoúhelník má aspoň jednu úhlopříčku, která je celá uvnitř, ale musí také míti aspoň jednu úhlopříčku, která je celá vně a může míti také takové úhlopříčky, které jsou jen z části uvnitř mnohoúhelníka.

Také lomenou čáru nazýváme vypuklou, jestliže pro každou stranu AB platí, že všechny vrcholy (a tudíž i celá lomená čára) leží v jediné polorovině vyťaté přímkou AB. Lomená čára v obr. 9 není vypuklá. Vynecháme-li jednu stranu vypuklého mnohoúhelníka, vznikne vypuklá lomená čára. Obráceně z každé vypuklé lomené čáry připojením spojnice krajních bodů vznikne vypuklý mnohoúhelník. Naproti tomu u nevypuklé lomené čáry se může státi (viz obr. 16), že spojnice krajních bodů lomené čáry tuto čáru protne, takže vůbec nevznikne mnohoúhelník, nebo (viz obr. 17) sice mnohoúhelník vznikne, ne však vypuklý.

Budiž V libovolný vrchol mnohoúhelníka a buďtež H, K oba vrcholy k němu sousední. Jestliže mnohoúhelník je vypuklý (viz obr. 18), leží celý v polorovině HVK a také celý v polorovině KVH, takže



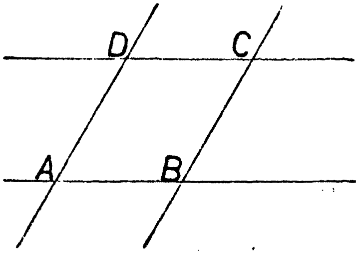
Obr. 17.



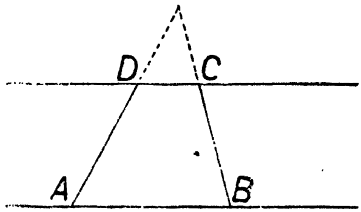
Obr. 18.

leží celý v dutém úhlu $\sphericalangle HVK$; tento dutý úhel se jmenuje **vnitřní úhel** mnohoúhelníka při vrcholu V; také celý vnitřek mnohoúhelníka je částí tohoto úhlu. **Vnějším úhlem** při vrcholu V vypuklého mnohoúhelníka rozumíme úhel vedlejší k úhlu vnitřnímu, takže jsou dva takové úhly; v obr. 18 to jsou $\sphericalangle PVH$, $\sphericalangle QVK$. U nevypuklého mnohoúhelníka nezavádíme pojem vnějšího úhlu a pojem vnitřního úhlu musíme zavésti trochu jinak. Vyložme si to pro čtyrúhelník $ABCD$ v obr. 13! Vnitřek tohoto čtyrúhelníka je částí dutého úhlu $\sphericalangle BAD$, který je vnitřním úhlem při vrcholu A. Dutý úhel $\sphericalangle ABC$ sice neobsahuje celý vnitřek čtyrúhelníka, ale aspoň ta část vnitřku čtyrúhelníka, která je v blízkosti vrcholu B, je částí toho dutého úhlu, který zase je vnitřním úhlem při vrcholu B. Podobně dutý úhel $\sphericalangle ADC$ je vnitřním úhlem při vrcholu D. Naproti tomu ani ta část vnitřku čtyrúhelníka, která je v blízkosti vrcholu C, není částí dutého úhlu $\sphericalangle BCD$, pročež vnitřním úhlem při vrcholu C nerozumíme tento dutý úhel, nýbrž vypuklý úhel s rameny CB, CD. Dá se ukázati, že u každého nevypuklého mnohoúhelníka aspoň tři vnitřní úhly jsou duté a aspoň jeden vnitřní úhel je vypuklý. U vypuklého mnohoúhelníka jsou ovšem všecky vnitřní i vnější úhly duté.

U čtyrúhelníka $ABCD$ se může státi (viz obr. 19), že je $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$; takový čtyrúhelník se jmenuje **rovnoběžník.** Rovnoběžníky se velmi často vyskytují v geometrických úvahách. Může se také



Obr. 19.



Obr. 20.

státi (viz obr. 20), že je sice na př. $AB \parallel CD$, ne však $AD \parallel BC$; takový čtyrúhelník se jmenuje **lichoběžník**, strany AB, CD se jmenují **základny** a strany AD, BC se jmenují **ramena.** Jestliže konečně není ani $AB \parallel CD$, ani $AD \parallel BC$, pak $ABCD$ je **různoběžník.** Každý rovnoběžník a každý lichoběžník je vypuklý; různoběžník může, ale nemusí býti vypuklý (viz obr. 12 a 13).

Cvičení.

1. Je-li přímka p různoběžná s přímkou q_1 a je-li $q_1 \parallel q_2$, dokažte, že přímka p je různoběžná s přímkou q_2!

2. Jsou-li dány čtyři různé přímky, kolik mají celkem průsečíků? (Některé přímky mohou býti rovnoběžné, také mohou více než dvě přímky procházeti jedním bodem. Celkem je osm možných případů. Znázorněte každý případ obrazcem od ruky.)

3. Je dáno n různých přímek; žádné dvě nejsou rovnoběžné; žádné tři nejdou jedním bodem. Kolik mají celkem průsečíků? (Kolik průsečíků má j e d n a z daných přímek s ostatními? Kolik by to bylo celkem průsečíků? Kolikrát by byl každý průsečík počítán?)

4. Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé body na téže přímce.

a) Jestliže B leží mezi A a C a jestliže C leží mezi A a D, co můžete říci o bodech A, B, D? Co o bodech B, C, D?

b) Jestliže B leží mezi A a C a jestliže C leží mezi B a D, co můžete říci o bodech A, B, D? Co o bodech A, C, D?

c) Jestliže B leží mezi A a C a jestliže B leží také mezi A a D, co můžete říci o bodech B, C, D?

5. Jestliže pět různých bodů leží mimo přímku p, kolik úseček spojujících dva z nich protne přímku p? (Jsou tři různé možnosti.)

6. Dutý úhel $\sphericalangle AVB$ je společná část dvou polorovin. Kterých? Vypuklý úhel s týmiž rameny se skládá ze dvou polorovin. Ze kterých?

7. Zapište všecky dvojice vedlejších úhlů v obr. 7! Kolik je jich? Zapište také dvojice vrcholových úhlů! Kolik je jich?

8. V obr. 8 je vyznačeno řeckými písmeny osm úhlů, ze kterých lze sestaviti 28 dvojic úhlů. Vypište všech 28 dvojic a u každé dvojice zapište příslušný název!

9. Dva styčné duté úhly nemají mimo společné rameno žádnou jinou společnou polopřímku. Jestliže ze dvou styčných úhlů je jenom jeden dutý, musí to také platiti? Může to v tomto případě platiti? Co když žádný z obou styčných úhlů není dutý?

10. Plocha trojúhelníka ABC je společná část tří polorovin. Kterých? Podobně u každého vypuklého mnohoúhelníka.

11. Zapište všemi možnými způsoby správně za sebou vrcholy čtyřúhelníka $ABCD$! (Je celkem 8 způsobů.)

12. Kolik úhlopříček má n-úhelník? (Řešte podobně jako cvič. 3.)

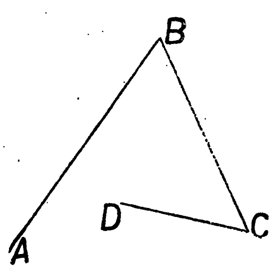
13. Narýsujte si vypuklý pětiúhelník a všech pět jeho úhlopříček. Na jaké mnohoúhelníky se jimi rozdělí plocha pětiúhelníka?

14. Pro polohu úhlopříček nevypuklého pětiúhelníka mohou nastati tyto případy:

a) čtyři úhlopříčky leží uvnitř a pátá leží vně;
b) dvě úhlopříčky leží uvnitř a tři leží vně;
c) tři úhlopříčky leží uvnitř, jedna leží vně, jedna leží zčásti uvnitř;
d) dvě úhlopříčky leží uvnitř, dvě leží vně, jedna leží zčásti uvnitř;
e) dvě úhlopříčky leží uvnitř, jedna leží vně, dvě leží zčásti uvnitř.

Narýsujte příklad pro každou z uvedených pěti možností!

15. Zvolte si trojúhelník ABC. Kde musíte zvoliti bod D, aby vznikl čtyřúhelník $ABCD$? (Dvě nesousední strany se nesmějí protnout a dvě sousední strany nesmějí ležet obě v téže přímce.) Pro které polohy bodu D je ten čtyřúhelník vypuklý? Kde musíte zvolit bod D, aby buďto $ABDC$ nebo $ADBC$ byl vypuklý čtyřúhelník?



Obr. 21.

16. Zvolte si vypuklý různoběžník $ABCD$ a vyznačte vyčárkováním ty části roviny, ve kterých musíte zvoliti bod E, aby buďto $ABCDE$ nebo $ABCED$ nebo $ABECD$ nebo $AEBCD$ byl vypuklý pětiúhelník!

17. Opakujte cvič. 16 s lichoběžníkem $ABCD$!

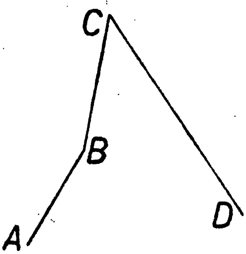
18. Opakujte cvič. 16 s rovnoběžníkem $ABCD$!

19. Zvolte si lomenou čáru asi jako v obr. 21! Vyčárkujte ty části roviny, ve kterých nesmíte zvolit bod E, má-li vám vzniknouti lomená čára $ABCDE$!

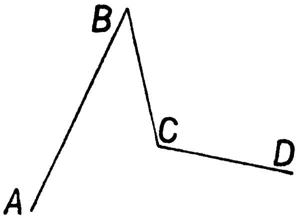
20. Opakujte cvič. 19 s obr. 22!

21. Opakujte cvič. 19 s obr. 23!

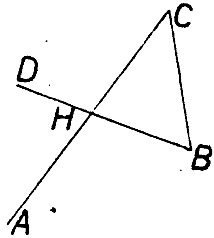
22. Je-li $ABCD$ vypuklý čtyrúhelník, pak žádný jiný čtyrúhelník nemá vrcholy A, B, C, D. Co když čtyrúhelník $ABCD$ není vypuklý?



Obr. 22.

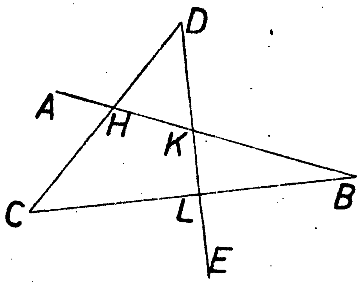


Obr. 23.

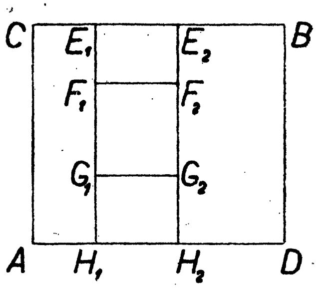


Obr. 24.

23. Body A, D se dají spojiti jedinou lomenou čarou obsaženou v čáře narýsované v obr. 24. Každé jiné dva z bodů A, B, C, D se dají spojiti dvěma různými takovými lomenými čarami. Přesvědčte se o tom! (Úsečky počítáme mezi lomené čáry.)



Obr. 25.



Obr. 26.

24. Pro každé dva body vybrané z pěti bodů A, B, C, D, E vypište všecky je spojující lomené čáry obsažené v čáře narýsované v obr. 25!

25. V čáře narýsované v obr. 26 lze nalézti 24 různých lomených čar spojující body A a B. Vypište aspoň deset těch lomených čar!

26. V čáře narýsované v obr. 26 lze nalézti:

a) 11 čtyrúhelníků, b) 8 šestiúhelníků, c) 8 osmiúhelníků, d) jeden dvanáctiúhelník.

Vypište všecky ty mnohoúhelníky!

27. Nevypuklý pětiúhelník může míti:

a) jediný vypuklý vnitřní úhel,

b) dva vypuklé vnitřní úhly ve dvou sousedních vrcholech,

c) dva vypuklé vnitřní úhly ve dvou nesousedních vrcholech.

Pro každou možnost narýsujte jeden příklad!

28. Plocha vypuklého čtyrúhelníka se dá dvěma způsoby rozložiti na plochy dvou trojúhelníků. Vyložte! Jak je tomu u nevypuklého čtyrúhelníka?

29. Plocha každého vypuklého různoběžníka vznikne *dvojím způsobem* tak, že od plochy jednoho trojúhelníka se ubere plocha jiného trojúhelníka. Jak je tomu u lichoběžníka, u rovnoběžníka a u nevypuklého čtyrúhelníka?

§ 2. Základní vlastnosti velikosti.

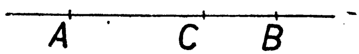
5. Velikost úseček. Dvě dané úsečky A_1B_1, A_2B_2 buďto mají stejnou **velikost** neboli **délku**, načež pravíme, že jsou si **rovny** a píšeme

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} \text{ nebo } \overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1},$$

nebo je jedna z nich **menší** neboli **kratší** než druhá, která je potom **větší** neboli delší než prvá. Je-li na př. $\overline{A_1B_1}$ menší než $\overline{A_2B_2}$, píšeme

$$\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} \text{ nebo } \overline{A_2B_2} > \overline{A_1B_1}.$$

Leží-li bod C mezi body A a B (viz obr. 27), jest



Obr. 27.

$$\overline{AC} < \overline{AB},\ \overline{CB} < \overline{AB};$$

úsečka AB je **součet** úseček AC, CB, což píšeme

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB},$$

a úsečka CB je **rozdíl** úseček AB, AC, což píšeme

$$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB};$$

podobně je ovšem také $\overline{AB} - \overline{CB} = \overline{AC}$. Součet a rozdíl dvou úseček jsou určeny pouze co do *velikosti*, nikoli co do *polohy*.

Můžeme také sčítati tři nebo více úseček. Zvláště důležitý je případ, kdy všichni sčítanci jsou si rovni. Součet CD n úseček rovných úsečce AB se jmenuje **n-násobek** úsečky AB a píšeme

$$\overline{CD} = n \,.\, \overline{AB}.$$

Úsečka AB je potom n-tina úsečky CD a píšeme

$$\overline{AB} = \frac{1}{n} \cdot \overline{CD}.$$

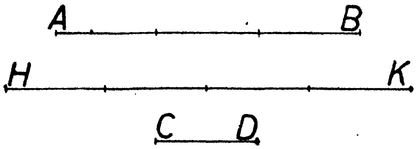
Obecněji, jsou-li m, n celá kladná čísla, znamená

$$\overline{UV} = \frac{m}{n} \overline{PQ},$$

že úsečka UV je m-násobek jedné n-tiny úsečky PQ.

Obyčejně se volí určitá délka $\overline{HK}$ za **délkovou jednotku**: nejčastěji je to 1 cm. Velikost libovolné úsečky AB je potom tvaru

$$\overline{AB} = x \cdot \overline{HK}, \tag{1}$$



Obr. 28.

kde x je kladné číslo, které se jmenuje **měrné číslo** úsečky AB. Je-li délková jednotka známa ze souvislosti, můžeme místo (1) psáti jednoduše $\overline{AB} = x$. Je-li x číslo celé, pak úsečka AB je **násobek** úsečky HK, na př. pro $x = 3$ je AB trojnásobek úsečky HK. Je-li x zlomek, pak jsou obě úsečky AB, HK společnými násobky třetí úsečky: na př. pro $x = \frac{3}{4}$ je (viz obr. 28) úsečka AB trojnásobek úsečky CD, jejímž čtyrnásobkem je úsečka HK.

Číslo x ve vztahu (1) nemusí však býti ani číslo celé ani zlomek, nýbrž to také může býti **číslo iracionální.** Na př. pro úhlopříčku HL čtverce $HKLM$ se stranou HK plyne ze známé Pythagorovy věty vztah

$$\overline{HL} = \sqrt{2} \cdot \overline{HK}.$$

kde číslo

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$$

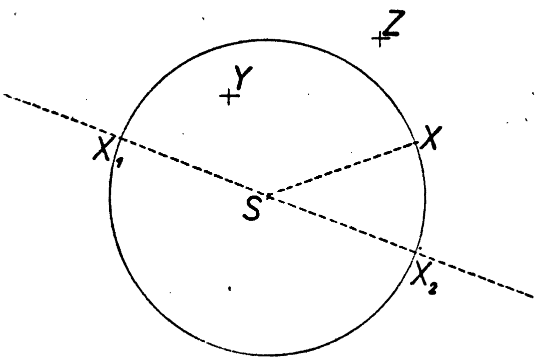
je číslo iracionální. Prakticky můžeme iracionální číslo vždycky nahraditi zlomkem, který se od něho liší tak málo, že na tom nezáleží. V našem případě je na př.

$$\frac{1414213}{1000000} \overline{HK} < \overline{HL} < \frac{1414214}{1000000} \overline{HK},$$

kde úsečka na levo i úsečka na pravo se liší od úsečky $\overline{HL}$ o úsečku kratší než je miliontina úsečky $\overline{HK}$.

Je-li zvolena určitá délková jednotka, pak při sčítání úseček se sečtou jejich měrná čísla; podobně je tomu při odčítání a při násobení úsečky číslem (celým, lomeným nebo iracionálním).

Protože úsečka je úplně určena svými krajními body, závisí velikost úsečky AB pouze na poloze bodů A, B. Z tohoto důvodu se velikost úsečky AB často také nazývá **vzdálenost** bodů A, B (nebo vzdálenost bodu A od bodu B nebo bodu B od bodu A).*)



Obr. 29.

Je-li dán bod S a délka r, pak všecky ty body, jejichž vzdálenost od bodu S je rovna r, vyplní uzavřenou čáru k (viz obr. 29), která se jmenuje **kružnice.** Délka r se jmenuje **poloměr** kružnice. Poloměr kružnice k je co do velikosti jednoznačně určen; co do polohy rozumíme poloměrem kružnice k každou úsečku SX, kde X je libovolný bod na kružnici k, takže v tomto smyslu je poloměrů nekonečně mnoho. Kružnice rozdělí rovinu na dvě části, **vnitřek** a **vnějšek.** Uvnitř kružnice k leží vedle bodu S všecky ty body Y, pro něž je $SY < r$; vně leží ty body Z, pro něž je $\overline{SZ} > r$. Kružnice se svým vnitřkem tvoří plochu, která se jmenuje **kruh**; kružnice je **obvod** kruhu. Každá přímka S protne kružnici k ve dvou bodech X_1, X_2 a kruh v úsečce X_1X_2 zvané **průměr** kružnice. Bod S je **střed úsečky** X_1X_2; to znamená, že je $\overline{SX_1} = \overline{SX_2}$. Pravíme, že S je **střed kružnice** k. Co do velikosti je průměr kružnice jednoznačně určen a je roven $2r$. Kružnicemi se budeme později podrobně zabývati.

*) Splynou-li body A, B, pak jejich vzdálenost je číslo nula.

6. Velikost úhlů. Jako úsečky tak i úhly třídíme podle **velikosti**. Dva úhly α, β jsou si zase buďto **rovny** ($\alpha = \beta$), nebo je α **menší** než β ($\alpha < \beta$ neboli $\beta > \alpha$) nebo je α **větší** než β ($\alpha > \beta$ neboli $\beta < \alpha$). Všecky přímé úhly jsou si rovny. Každý dutý úhel je menší než úhel přímý a každý vypuklý úhel je větší než úhel přímý. Podobně jako u úseček zavádíme i u úhel pojem **součtu** $\alpha + \beta$ (a také pojem součtu více než dvou úhlů), pojem **rozdílu** $\alpha - \beta$ a pojem součinu $x \cdot \alpha$ (kde x je kladné číslo, celé, lomené nebo iracionální).

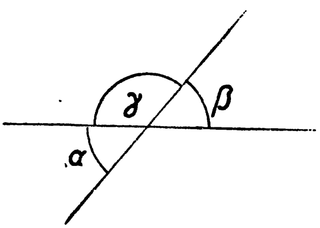
Za **úhlovou jednotku** bereme velmi často úhel, jehož velikost je rovna polovině úhlu přímého. Takový úhel se jmenuje **úhel pravý** a jeho velikost se obyčejně značí R (z latinského rectus = pravý). Velikost přímého úhlu je $2R$; pro dutý úhel α máme $\alpha < 2R$, pro vypuklý úhel α máme $2R < \alpha < 4R$. Je-li $\alpha < 2R$, t. j. je-li α úhel dutý, máme tři možnosti:

[1] $\alpha = R$, α je úhel pravý;
[2] $\alpha < R$, α je **úhel ostrý**;
[3] $R < \alpha < 2R$, α je **úhel tupý**.

Pro ostré a tupé úhly se někdy zavádí společný název **úhly kosé**.

V praxi se od pradávna užívá úhlové jednotky 90krát menší než úhel pravý, která se jmenuje **stupeň** (1°); šedesátina stupně je úhlová **minuta** ($1'$), šedesátina minuty úhlová **vteřina** neboli **sekunda** ($1''$). Příklad: $36^\circ\ 25'\ 34''$.

Dva úhly α, β se jmenují **doplňkové**, je-li $\alpha + \beta = R$ neboli $\alpha + \beta = 90^\circ$; oba úhly jsou ovšem ostré. Dva úhly α, β se jmenují **výplňkové**, je-li $\alpha + \beta = 2R$ neboli $\alpha + \beta = 180^\circ$; takové úhly jsou buďto oba pravé nebo je jeden ostrý a jeden tupý.



Obr. 30.

Zřejmě **vedlejší úhly jsou výplňkové.** Opak neplatí, protože název výplňkové se týká pouze velikosti, ne také polohy.

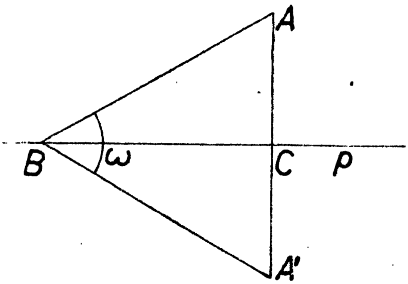
Vrcholové úhly jsou si rovny. Neboť v obr. 30 je $\alpha + \gamma = 2R$, $\beta + \gamma = 2R$, tedy $\alpha = 2R - \gamma$, $\beta = 2R - \gamma$, takže $\alpha = \beta$.

Jestliže jeden ze čtyř úhlů tvořených dvěma různoběžnými přímkami je pravý, jsou všecky čtyři úhly pravé; proč? O takových dvou přímkách p, q pravíme, že **stojí na sobě kolmo** nebo že jedna z nich je **kolmice** ke druhé; označení $p \perp q$ nebo $q \perp p$.

Budiž dán úhel α a polopřímka p_1 s počátkem O. Zvolme si jednu z obou polorovin vyťatých přímkou p, jejíž částí je polopřímka p_1. Pak je v této polorovině právě jedna polopřímka q, která spolu s polopřímkou p_1 dává ramena úhlu rovného úhlu α. Je-li zejména $\alpha = R$, vychází: **Bodem O daným na přímce p lze vésti k této přímce právě jednu kolmici q.** Pravíme, že q je kolmice **vztyčená** k přímce p v bodě O.

7. Osová souměrnost; osa úsečky; rovnoramenný trojúhelník. Jedním z nejzákladnějších pojmů v geometrii je obecný pojem **shodnosti.** Dva geometrické útvary se jmenují shodné, je-li možné jeden z nich **přemístiti** tak, aby se úplně kryl s druhým. Při přemístění se nemění ani velikost úseček ani velikost úhlů.

Jeden z nejdůležitějších druhů přemístění je **osová souměrnost** neboli překlopení roviny kolem přímky p, zvané **osou souměrnosti.** Každý bod na ose p splyne se svým souměrně sdruženým. Leží-li však bod A mimo osu p (viz obr. 31), nesplyne bod A se souměrně sdruženým bodem A', nýbrž body A, A' jsou od sebe odděleny přímkou p, která proto protne úsečku AA' v určitém bodě C. Budiž B kterýkoli jiný bod osy p. Jelikož při osové souměrnosti velikost úhlů se nemění, je $\sphericalangle ABC$ polovina přímého úhlu s rameny CA, CA', kdežto $\sphericalangle ABC$ je polovina dutého úhlu $\sphericalangle ABA'$. Tedy $\sphericalangle ACB$ je úhel pravý, $\sphericalangle ABC$ je úhel ostrý.



Obr. 31.

Z toho plyne především: **Bodem A daným mimo přímku p lze vésti k této přímce právě jednu kolmici*)** AC. Pravíme, že AC je kolmice **spuštěná** na přímku p s bodu A a že bod C je **pata** této kolmice.

Jsou-li q_1, q_2 dvě kolmice k téže přímce p, je $q_1 \parallel q_2$. To je zřejmé, jestliže přímky q_1, q_2 splynou. Jsou-li však přímky q_1, q_2 různé, nemohou míti žádný společný bod H, neboť takovým bodem H by procházely dvě různé kolmice q_1, q_2 ke přímce p, což je nemožné. Obráceně platí: **Je-li $q_1 \perp p$ a je-li $q_1 \parallel q_2$, je také $q_2 \perp p$.** Neboť bodem K libovolně zvoleným na přímce q_2 lze jistě vésti kolmici q'_2 ke přímce p.

*) O bodech ležících na přímce p je nám to již známo (viz konec odst. 6).

Pak je $q_1 \perp p$, $q'_2 \perp p$ a tedy podle předešlé věty je $q_1 \parallel q'_2$. Ježto také $q_1 \parallel q_2$, je $q_2 \parallel q'_2$ a ježto obě přímky q_2, q'_2 mají společný bod K, musí splynout, takže q_2 stojí kolmo na p.

Vraťme se k obr. 31! Ježto při osové souměrnosti se nemění velikost úseček, je C střed úsečky AA'. Tedy bod A' souměrně sdružený s bodem A vzhledem ke přímce p dostaneme, jestliže určíme patu C kolmice spuštěné s bodu A na přímku p a na prodloužení úsečky AC za bod C naneseme $\overline{CA'} = \overline{AC}$.

Budiž dána libovolná úsečka AA' (viz zase obr. 31). **Osou úsečky** AA' rozumíme kolmici p vztyčenou k přímce AA' ve středu C úsečky AA'. Podle předešlého jsou body A, A' souměrné vzhledem k přímce p, pročež $\overline{AB} = \overline{A'B}$ pro každý bod B přímky p. Tedy **každý bod na ose úsečky** AA' **je stejně vzdálen od obou bodů** A, A'. Že pouze body na ose úsečky AA' mají tuto vlastnost, to poznáme za nedlouho.

Obr. 31 může vzniknouti také tak, že nejprve je dán libovolný dutý úhel ω s vrcholem B. Zvolíme-li na ramenech úhlu ω po jenom bodě A, A' tak, že je $\overline{BA} = \overline{BA'}$, vznikne $\triangle\, AA'B$*), jehož dvě strany jsou si rovny. Takový trojúhelník se jmenuje **rovnoramenný**, obě sobě rovné strany BA, BA' jsou jeho **ramena** a třetí strana AA' je jeho **základna.** Uvnitř základny si můžeme zvolit bod C tak, že je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'BC$. Polopřímka BC tedy půlí úhel ω a říkáme jí **osa úhlu** ω; je částí přímky p, kterou zvolíme za osu souměrnosti. Protože se při souměrnosti zachová poloha polopřímky BC a velikost úhlu $\sphericalangle ABC$, je k polopřímce BA souměrně sdružena polopřímka BA', a protože se při souměrnosti zachová také velikost úsečky BA, je k bodu A souměrně sdružen bod A', pročež přímka p je osou úsečky AA'. Tedy (jak jsme již ohlásili): **každý bod** B **stejně vzdálený ode dvou bodů** A, A' **leží na ose úsečky** AA'. Mimo to jsme poznali, že **u rovnoramenného trojúhelníka osa úhlu proti základně prochází středem základny a stojí kolmo na základně.** Protože při souměrnosti se zachová velikost úhlů, je v obr. 31 ještě $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BA'A$. Tedy **u rovnoramenného trojúhelníka oba úhly při základně jsou si rovny.**

8. Středová souměrnost; rovnoběžník. Zvolme libovolný bod S a veďme jím dvě k sobě kolmé přímky p, q. Jaké přemístění vznikne, jestliže překlopíme rovinu nejprve kolem osy p a potom ještě jednou

*) Značka $\triangle$ zde i v dalším znamená trojúhelník.

kolem osy q? Bod S zajisté zůstane na svém místě, ale každý jiný bod A přejde do takové polohy A', že body A, S, A' leží na přímce a S je střed úsečky AA'. To se nejprve nahlédne velmi snadno pro případ, že A leží na jedné z přímek p, q. Jinak (viz obr. 32) nechť při prvém překlopení (kolem p) přejde bod A do polohy A_1 a při druhém (kolem q) bod A_1 do polohy A'. Pak je předně

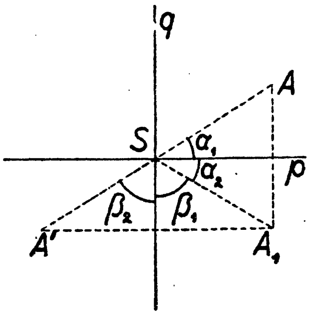
$$\overline{SA} = \overline{SA_1},\ \overline{SA_1} = \overline{SA'},\ \text{tedy}\ \overline{SA} = \overline{SA'}.$$

Za druhé je v našem obrazci

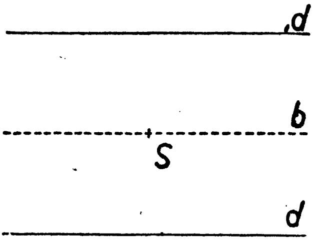
$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \alpha_2 + \beta_1 = R,$$

tedy
$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) = 2R,$$

takže vznikne přímý úhel s rameny SA, SA'. Tím je vše dokázáno.



Obr. 32.



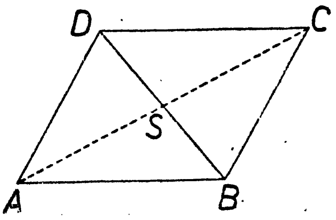
Obr. 33.

Při středové souměrnosti se středem souměrnosti S splyne bod S se svým souměrně sdruženým a ke každému jinému bodu A dostaneme souměrně sdružený bod A' tím, že na prodloužení úsečky AS za bod S naneseme $\overline{SA'} = \overline{AS}$. Podle předchozího středová souměrnost je přemístění, takže při středové souměrnosti se nemění ani velikost úseček ani velikost úhlů.

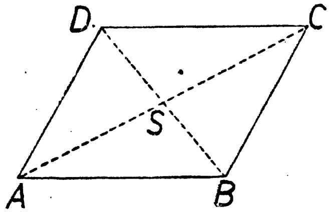
Dvě středově souměrně sdružené přímky jsou mezi sebou rovnoběžné. Budiž tedy p' přímka souměrně sdružená s přímkou p vzhledem ke středu S. Máme dokázati, že je $p \parallel p'$. To je zřejmé, jestliže p prochází středem S, neboť pak přímky p, p' splynou. Jestliže však p neprochází středem S (viz obr. 33), veďme bodem S přímku $q \parallel p$. Přímky p, q nemají žádný společný bod; to musí platit i po přemístění, t. j. ani souměrně sdružené přímky p', q'

nemají žádný společný bod, tedy $p' \parallel q'$. Avšak přímky q, q' splynou, takže obě přímky p, p' jsou rovnoběžné s přímkou q a jsou tudíž i mezi sebou rovnoběžné.

Jestliže úhlopříčky čtyrúhelníka $ABCD$ **se navzájem půlí, je** $ABCD$ **rovnoběžník.** Budiž tedy v obr. 34 $\overline{AS} = \overline{CS}$, $\overline{BS} = \overline{DS}$. Vzhledem ke středu S jsou body A, C navzájem souměrně sdružené, rovněž body B, D, tedy také přímky AB, CD jsou navzájem souměrně sdružené a rovněž přímky AD, BC, z čehož plyne $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, t. j. $ABCD$ je rovnoběžník.



Obr. 34.



Obr. 35.

Obráceně platí: **Úhlopříčky rovnoběžníka** $ABCD$ **se navzájem půlí.** V obr. 35 je S střed jedné úhlopříčky BD rovnoběžníka $ABCD$. Máme dokázati, že také druhá úhlopříčka AC prochází bodem S. Zvolíme-li S za střed souměrnosti, jsou body B, D navzájem souměrně sdružené. Přímka souměrně sdružená s přímkou AB musí procházeti bodem D souměrně sdruženým s B a musí býti rovnoběžná s AB; je to tedy přímka CD; podobně je BC přímka souměrně sdružená s přímkou AD. Bod A je průsečík přímek AB, AD; bod k němu souměrně sdružený je tedy průsečík souměrně sdružených přímek CD, BC. Tedy body A, C jsou souměrně sdružené vzhledem ke středu S, takže přímka AC prochází bodem S, který je středem úsečky AC.

Výsledek právě provedených úvah můžeme vysloviti také takto: **Čtyrúhelník souměrný vzhledem ke středu** S **je rovnoběžník a bod** S **je průsečík jeho úhlopříček. Obráceně rovnoběžník je středově souměrný vzhledem k průsečíku svých úhlopříček.**

Jelikož u rovnoběžníka $ABCD$ jsou úsečky AB, CD navzájem středově souměrně sdružené, je $\overline{AB} = \overline{CD}$ a z téhož důvodu je také $\overline{AD} = \overline{BC}$. Tedy **dvě protější strany rovnoběžníka jsou si rovny.**

Obráceně platí: **Jestliže u čtyrúhelníka** $ABCD$ **je** $AB \parallel CD$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, **pak** $ABCD$ **je rovnoběžník.** Volme zase (viz obr. 35) střed S úsečky BD za střed souměrnosti. K bodu B je souměrně sdružen bod D. Přímka souměrně sdružená s přímkou BA prochází bodem D a je rovnoběžná s BA; je to tedy přímka DC. Zřejmě s polopřímkou BA je souměrně sdružená polopřímka DC a protože souměrně sdružené úsečky mají stejnou velikost, je s úsečkou BA souměrně sdružena úsečka DC. Čtyrúhelník $ABCD$ je tedy souměrný vzhledem ke středu S a proto je to rovnoběžník.

9. Úhly dvou přímek proťatých příčkou; součet úhlů trojúhelníka; úhly čtyrúhelníka. V obr. 36 máme dvě rovnoběžky q_1, q_2 proťaté v bodech V_1, V_2 příčkou p. Zvolme střed S úsečky V_1V_2 za střed souměrnosti. K bodu V_1 je souměrně sdružen bod V_2 a k přímce q_1 souměrně sdružená přímka jde bodem V_2 rovnoběžně s přímkou q_1, je to tedy přímka q_2. Zvolme na q_1 bod U_1 různý od V_1; bod U_2 souměrně sdružený k U_1 leží potom na q_2. K úhlu $\delta_1 = \sphericalangle SV_1U_1$ je souměrně sdružen úhel $\beta_2 = \sphericalangle SV_2U_2$, pročež $\delta_1 = \beta_2$. Ježto vrcholové úhly jsou si rovny, je $\delta_1 = \beta_1$, $\beta_2 = \delta_2$, tedy musí býti

$$\beta_1 = \delta_1 = \beta_2 = \delta_2. \tag{1}$$

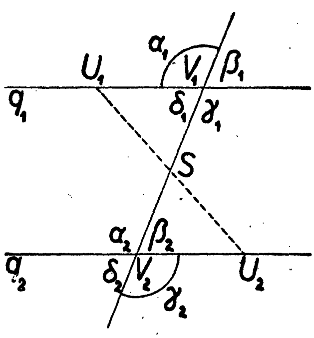
Ježto vedlejší úhly jsou výplňkové, jsou úhly α_1, γ_1 oba rovny $2R - \beta_1$ a úhly α_2, γ_2 jsou oba rovny $2R - \beta_2$. Podle (1) je tedy

$$\alpha_1 = \gamma_1 = \alpha_2 = \gamma_2, \tag{2}$$

$$\alpha_1 + \delta_2 = \beta_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + \beta_2 = \delta_1 + \alpha_2 = 2R, \tag{3}$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = \beta_1 + \alpha_2 = \gamma_1 + \delta_2 = \delta_1 + \gamma_2 = 2R. \tag{4}$$

Ze vztahů (1) až (4) plyne, že dva souhlasné i dva střídavé úhly jsou si rovny, a že dva přilehlé i dva protilehlé úhly jsou výplňkové. Jestliže nyní v obr. 36 podržíme polohu přímek p a q_1, ale přímku q_2 pootočíme kolem bodu V_2 tak, že už nebude rovnoběžná s přímkou q_1, zůstanou úhly α_1, β_1, γ_1, δ_1 beze změny, ale velikost každého z úhlů α_2, β_2, γ_2, δ_2 se změní, takže ani dva souhlasné ani dva střídavé úhly nebudou sobě rovny, ani dva přilehlé ani dva protilehlé úhly nebudou výplňkové.



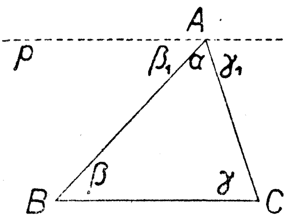
Obr. 36.

Výsledek: **Souhlasné úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny. Střídavé úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny. Přilehlé úhly mezi rovnoběžkami jsou výplňkové. Protilehlé úhly mezi rovnoběžkami jsou výplňkové.** Obráceně: **Jestliže dvě přímky** q_1, q_2 **jsou proťaty příčkou** p, **a jestliže**

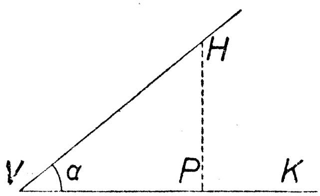
dva souhlasné úhly jsou si rovny, nebo
dva střídavé úhly jsou si rovny, nebo
dva přilehlé úhly jsou výplňkové, nebo
dva protilehlé úhly jsou výplňkové,

pak proťaté přímky q_1, q_2 **jsou rovnoběžné.**

V obr. 37 máme $\triangle ABC$, jehož úhly jsou jako obvykle označeny α, β, γ. Vedeme-li bodem A rovnoběžku p s přímkou BC, vzniknou při vrcholu A další dva úhly β_1, γ_1 a jest $\alpha + \beta_1 + \gamma_1 = 2R$. Protože



Obr. 37.

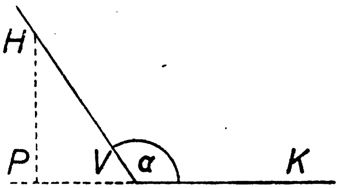


Obr. 38.

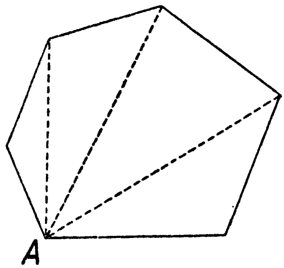
však střídavé úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny, je $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$. Z toho plyne $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, tedy **součet vnitřních úhlů trojúhelníka je roven** $2R$. Jsou-li si dvě strany rovny, víme, že také protější úhly jsou si rovny. Jsou-li si tedy všecky tři strany rovny neboli je-li dán **rovnostranný** trojúhelník, jsou si rovny všecky tři úhly a protože jejich součet je 180°, vychází: **Velikost každého vnitřního úhlu rovnostranného trojúhelníka je 60°.**

Ježto $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, jsou aspoň dva ze tří úhlů α, β, γ menší než R, neboli každý trojúhelník má aspoň dva úhly ostré. Rozeznáváme proto **pravoúhlé** trojúhelníky s jedním úhlem pravým a dvěma ostrými, **ostroúhlé** trojúhelníky se třemi ostrými úhly, **tupoúhlé** trojúhelníky s jedním úhlem tupým a dvěma ostrými. U pravoúhlého trojúhelníka strana proti pravému úhlu je jeho **přepona,** druhé dvě strany jsou jeho **odvěsny.**

Budiž dán dutý $\sphericalangle HVK = \alpha$; s bodu H spusťme kolmici na přímku VK a označme P její patu. Je-li $\alpha = R$, pak ovšem P splyne s bodem V. Je-li však α úhel kosý, je bod P různý od V a padne (viz obr. 38 a 39) buďto na polopřímku VK nebo na polopřímku opačnou. Ježto však $\triangle HVP$ má při vrcholu P úhel pravý, je $\sphericalangle HVP$ vždy ostrý. Tedy pata kolmice spuštěné s bodu uvnitř jednoho ramene kosého úhlu α na druhé rameno padne dovnitř druhého ramene, je-li α úhel ostrý, a padne na jeho prodloužení, je-li α úhel tupý.



Obr. 39.



Obr. 40.

Součet všech úhlů n-úhelníka je roven $(n - 2) \,.\, 2R$. Ačkoli tato věta je správná pro každý n-úhelník, provedeme si důkaz pouze pro n-úhelník vypuklý. Zvolme si libovolný vrchol A (viz obr. 40). Náš n-úhelník má n stran, z nichž dvě obsahují vrchol A. Každá ze zbývajících $n - 2$ stran spolu s bodem A určuje trojúhelník a plocha našeho n-úhelníka se dá rozložit na plochy těchto $n - 2$ trojúhelníků. Z toho následuje snadno (viz obrazec), že součet všech úhlů našeho n-úhelníka se dostane, sečtou-li se úhly všech těch $n - 2$ trojúhelníků. Avšak součet úhlů jednoho trojúhelníka je $2R$, takže součet všech úhlů všech $n - 2$ trojúhelníků, tedy i součet úhlů n-úhelníka, je roven $(n - 2) \,.\, 2R$.

U každého vrcholu vypuklého mnohoúhelníka máme (viz obr. 18 na str. 11) co do polohy dva vnější úhly, jež jsou navzájem vrcholové, tedy jsou si rovny, takže co do velikosti máme u každého vrcholu jen jeden vnější úhel. **Součet všech n vnějších úhlů vypuklého n-úhelníka je roven** $4R$. Neboť u každého vrcholu máme jeden vnitřní a jeden vnější úhel, které dohromady dají $2R$. To dá celkem $n \,.\, 2R$ pro součet všech vnitřních i vnějších úhlů. Z toho připadá $(n - 2) \,.\, 2R$ na úhly vnitřní, tedy

$$n \,.\, 2R - (n - 2) \,.\, 2R = 2 \,.\, 2R = 4R$$

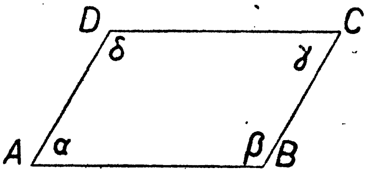
na úhly vnější.

Budiž dán čtyrúhelník $ABCD$ (viz obr. 41 až 43). Vnitřní úhly při vrcholech A, B, C, D označme jako obvykle α, β, γ, δ. Víme, že je

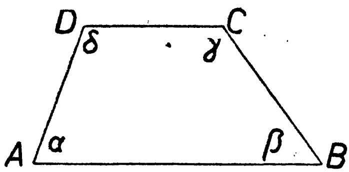
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R.$$

Všimněme si dvou sousedních úhlů, třeba úhlů α, β. Jestliže přímky AD, BC protneme příčkou AB, tvoří α, β dvojici úhlů přilehlých. Je-li tedy $AD \parallel BC$, jest $\alpha + \beta = 2R$ a obráceně, je-li $\alpha + \beta = 2R$, je $AD \parallel BC$. Z toho vychází nejprve, že **u rovnoběžníka každé dva sousední úhly jsou výplňkové;** na př. v obr. 41 je

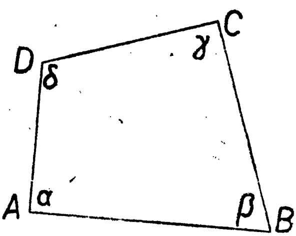
$$\alpha + \beta = \alpha + \delta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = 2R. \tag{1}$$



Obr. 41.



Obr. 42.



Obr. 43.

Dále vidíme, že **u lichoběžníka oba úhly při témž rameni jsou výplňkové;** na př. v obr. 42 je

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 2R.$$

Naproti tomu u různoběžníka žádné dva sousední úhly nejsou výplňkové. Ze vztahů (1) následuje snadno, že

$$\alpha = \gamma,\ \beta = \delta,$$

t. j. **u rovnoběžníka každé dva protější úhly jsou si rovny.**

10. Velikost stran a úhlů trojúhelníka. Víme, že u trojúhelníka ABC je $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, tedy $\alpha + \beta = 2R - \gamma$. Avšak $2R - \gamma$ je velikost vnějšího úhlu při vrcholu C. Tedy **vnější úhel trojúhelníka se rovná součtu obou protějších úhlů vnitřních.** Z toho plyne důsledek: **Vnější úhel trojúhelníka při jednom vrcholu je vždy větší než vnitřní úhel při jiném vrcholu.**

Budiž dán $\triangle ABC$. Je-li $\overline{AB} = \overline{AC}$, víme z odst. 7, že $\beta = \gamma$. Budiž nyní $\overline{AB} > \overline{AC}$; dokážeme, že je $\beta < \gamma$. Uvnitř strany AB máme (viz obr. 44) bod D takový, že $\overline{AC} = \overline{AD}$. Z toho plyne, že

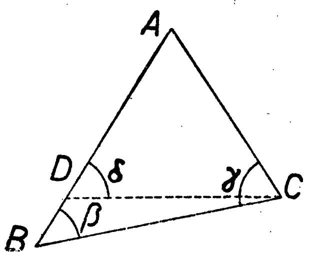
$\sphericalangle ADC = \delta$ se rovná $\sphericalangle ACD$, který je zřejmě menší než γ. Tedy $\delta < \gamma$; naproti tomu je $\delta > \beta$ (a tedy $\beta < \gamma$), neboť v $\triangle BCD$ je δ vnější úhel při vrcholu D a β je vnitřní úhel při vrcholu B. Jelikož dokázaný výsledek je správný i při jiné volbě písmen, musí v případě $\overline{AC} > \overline{AB}$ býti $\gamma < \beta$. Tedy nastane u každého $\triangle ABC$ jeden z těchto tří případů:

(1) $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\beta = \gamma$;

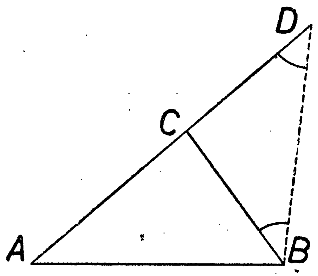
(2) $\overline{AB} > \overline{AC}$, $\beta < \gamma$;

(3) $\overline{AB} < \overline{AC}$, $\beta > \gamma$.

Výsledek: **U trojúhelníka leží proti dvěma sobě rovným stranám dva sobě rovné úhly a proti dvěma sobě rovným úhlům leží dvě sobě rovné**



Obr. 44.



Obr. 45.

strany. Proti delší straně leží vždy větší úhel a proti většímu úhlu leží delší strana. Zejména trojúhelník, jehož dva úhly jsou si rovny, je rovnoramenný a trojúhelník, jehož všecky tři úhly jsou si rovny, je rovnostranný.

U pravoúhlého trojúhelníka je pravý úhel větší než oba ostatní, které jsou ostré. Proto **přepona pravoúhlého trojúhelníka je větší než kterákoli odvěsna.** Jestliže nyní bod A leží mimo přímku p, budiž (viz obr. 31 na str. 19) C pata kolmice spuštěné s bodu A na přímku p a budiž B kterýkoli jiný bod na přímce p. V pravoúhlém $\triangle ABC$ je AC odvěsnou, AB přeponou a proto je $\overline{AC} < \overline{AB}$. Bod C leží tedy ze všech bodů přímky p nejblíže k bodu A a proto délka AC se jmenuje **vzdálenost bodu A od přímky p.**

Budiž dán trojúhelník ABC (viz obr. 45). Na prodloužení úsečky AC za bod C nanesme $\overline{CD} = \overline{CB}$. Vznikne nám rovnoramenný

$\triangle\, BCD$, jehož úhel při vrcholu D je roven $\sphericalangle\, CBD$, který je zřejmě menší než $\sphericalangle\, ABD$. Proto $\triangle\, ABD$ má při vrcholu D menší úhel než při vrcholu B, a proto strana AB proti vrcholu D je kratší než strana proti vrcholu B, jejíž délka je

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Tedy $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, nebo slovy: **strana trojúhelníka je menší než součet ostatních dvou stran.**

Dále platí: **strana trojúhelníka je větší než rozdíl dvou stran.** To je pro stranu AB zřejmé, je-li $\overline{AC} = \overline{BC}$, neboť pak rozdíl ostatních dvou stran je 0. Je-li však třeba $\overline{AC} > \overline{BC}$, máme dokázati, že $\overline{AC} - \overline{BC} < \overline{AB}$. My však víme, že $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ a tato nerovnost musí zůstati správná, jestliže obě strany zmenšíme o touž délku BC, čímž právě dostaneme $\overline{AC} - \overline{BC} < \overline{AB}$.

11. Shodnost trojúhelníků. V tomto odstavci si zopakujeme čtyři základní věty o shodnosti trojúhelníků.

Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném (*sus*). Nechť na př. pro $\triangle\, A_1B_1C_1$, $\triangle\, A_2B_2C_2$ jest

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}, \quad \overline{A_1C_1} = \overline{A_2C_2}, \quad \sphericalangle\, A_1 = \sphericalangle\, A_2.$$

Můžeme přímo nahlédnouti, že $\triangle\, A_2B_2C_2$ lze přemístiti tak, aby se kryl s $\triangle\, A_1B_1C_1$. Neboť ježto $\sphericalangle\, A_1 = \sphericalangle\, A_2$, můžeme $\sphericalangle\, A_2$ přemístiti tak, že po přemístění se bod A_2 kryje s bodem A_1, polopřímka A_2B_2 s polopřímkou A_1B_1, polopřímka A_2C_2 s polopřímkou A_1C_1. Protože však při přemístění velikost úsečky se nemění, bude se po přemístění bod B_2 krýti s bodem B_1 a bod C_2 s bodem C_1.

Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou úhlech přilehlých (*usu*). Budiž na př.

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}, \quad \sphericalangle\, A_1 = \sphericalangle\, A_2, \quad \sphericalangle\, B_1 = \sphericalangle\, B_2.$$

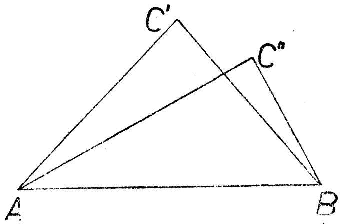
Zase můžeme přímo nahlédnouti, že $\triangle\, A_2B_2C_2$ lze přemístiti tak, aby se kryl s $\triangle\, A_1B_1C_1$. Neboť ježto $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, můžeme přemístění $\triangle\, A_2B_2C_2$ provésti tak, že po přemístění se bod A_2 kryje s bodem A_1, bod B_2 s bodem B_1. To přemístění můžeme pak provésti tak, že po přemístění bod C_2 bude v téže polorovině vyťaté přímkou A_1B_1, ve které je bod C_1. Protože při přemístění velikost úhlů se nemění, bude se po přemístění krýti polopřímka A_2C_2 s polopřímkou A_1C_1 a polopřímka B_2C_2 s polopřímkou B_1C_1. Tudíž bod C_2, který je jediný bod společný oběma polopřímkám A_2C_2, B_2C_2, bude se po přemístění krýti s bodem C_1, který je jediný bod společný polopřímkám A_1C_1, B_1C_1.

Zbývající dvě věty nemůžeme dokázati jednoduchým přemístěním, nýbrž musíme si důkaz každé z nich připraviti pomocnou úvahou.

Jestliže dva různé trojúhelníky ABC', ABC'' mají společnou stranu AB a jestliže body C', C'' nejsou od sebe odděleny přímkou AB, pak nemůže býti současně

$$\overline{AC'} = \overline{AC''}, \quad \overline{BC'} = \overline{BC''}. \tag{1}$$

Předpokládejme naopak (viz obr. 46), že platí oba vztahy (1). Bod A je potom stejně vzdálen od C' jako od C'', takže A leží na ose úsečky $C'C''$ (viz odst. 7). Stejně i B leží na této ose. Z toho následuje, že osou úsečky $C'C''$ je přímka AB. To je však nemožné, protože osa úsečky $C'C''$ odděluje od sebe oba body $C'C''$.



Obr. 46.

Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech stranách (*sss*). Budiž na př.

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}, \quad \overline{A_1C_1} = \overline{A_2C_2}, \quad \overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}.$$

Ježto $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, můžeme oba trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ přemístiti do nových poloh $\triangle ABC'$, $\triangle ABC''$, ve kterých mají společnou stranu AB, při čemž oba body C', C'' leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB. Ježto při přemístění délka úseček se nemění, musí platiti vztahy (1), ze kterých plyne, že body C', C'' a tudíž i $\triangle ABC'$, $\triangle ABC''$ splynou.

Než přistoupíme ke čtvrté větě o shodnosti, provedeme si jeden doplněk k odst. 8. Tam jsme dokázali, že u rovnoběžníka $ABCD$ platí

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AD} = \overline{BC}. \tag{2}$$

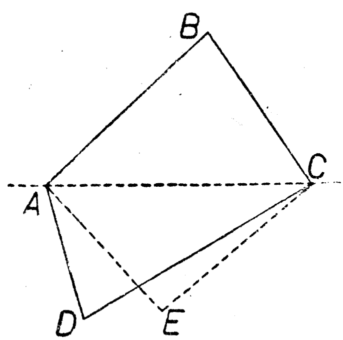
Obráceně platí: **Jestliže u čtyrúhelníka** $ABCD$ **každé dvě protější strany jsou si rovny, pak** $ABCD$ **je rovnoběžník.** Budiž naopak dán čtyrúhelník $ABCD$, který není rovnoběžníkem, pro který však platí vztahy (2). Aspoň jedna z obou úhlopříček má jistě tu vlastnost, že přímka, jejíž je částí, odděluje od sebe ty dva vrcholy, které na ní neleží. Nechť třeba úhlopříčka AC má tu vlastnost. Určeme bod E tak, že $ABCE$ je rovnoběžník. Protože $ABCD$ není rovnoběžník, jsou body D, E od sebe různé, nejsou však od sebe odděleny přímkou AC. Vedle vztahů (2) platí pro rovnoběžník $ABCE$ obdobné vztahy

$$\overline{AB} = \overline{CE}, \quad \overline{AE} = \overline{BC} \tag{3}$$

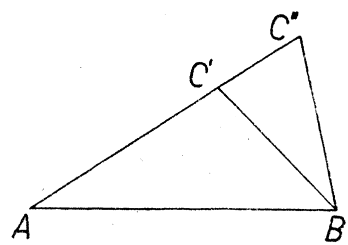
a ze vztahů (2), (3) plynou vztahy

$$\overline{AD} = \overline{AE}, \quad \overline{CD} = \overline{CE},$$

které podle výše provedené pomocné úvahy jsou nemožné.



Obr. 47.



Obr. 48.

Důkaz poslední věty o shodnosti připravíme novou pomocnou úvahou.

Jestliže dva různé trojúhelníky ABC', ABC'' mají společnou stranu AB a jestliže $\overline{BC'} = \overline{BC''}$ a polopřímky AC', AC'' splynou, pak jeden z obou úhlů $\sphericalangle AC'B$, $\sphericalangle AC''B$ je tupý. Ježto polopřímky AC', AC'' splynou, leží buďto C' mezi body A, C'' nebo C'' mezi body A, C'. Leží-li třeba C' mezi body A, C'' (viz obr. 48), pak $\sphericalangle AC'B$ je vnější úhel $\triangle BC'C''$ při vrcholu C'. Ježto $\overline{BC'} = \overline{BC''}$, jsou vnitřní úhly $\triangle BC'C''$ při vrcholech C', C'' sobě rovny a jelikož aspoň dva úhly trojúhelníka jsou vždy ostré, jsou ty vnitřní úhly ostré a vnější úhel $\sphericalangle AC'B$ je tupý.

Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich. Budiž na př.

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} < \overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}, \quad \sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2.$$

Ježto $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, můžeme oba trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ přemístiti do nových poloh $\triangle ABC'$, $\triangle ABC''$, ve kterých mají společnou stranu AB, při čemž oba body C', C'' leží v téže polorovině vyťaté přímkou AB. Ježto při přemístění velikost úhlu se nemění, splyne polopřímka AC' s polopřímkou AC''. Ježto při přemístění délka úseček se nemění, jest

$$\overline{BC'} = \overline{BC''} > \overline{AB}.$$

Ježto proti tupému úhlu leží vždy nejdelší strana, žádný z obou úhlů $\sphericalangle AC'B$, $\sphericalangle AC''B$ není tupý, takže podle pomocné úvahy body C', C'' splynou.

Ježto součet úhlů trojúhelníka je $2R$, musí se dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, shodovati i v úhlu třetím. Proto z věty (*usu*) plyne ještě: **Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně, v protějším úhlu a v jednom úhlu přilehlém** (*suu*).

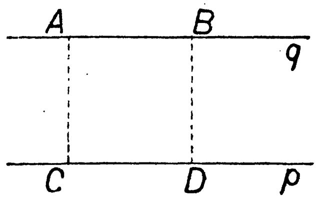
12. Geometrická místa. Čára c se nazývá **geometrické místo** bodů majících určitou vlastnost, jestliže

(1) každý bod čáry c má tu vlastnost,

(2) každý bod, který tu vlastnost má, leží na čáře c.

Na př. geometrické místo bodů, které mají od daného bodu S danou vzdálenost r, je kružnice se středem S a poloměrem r.

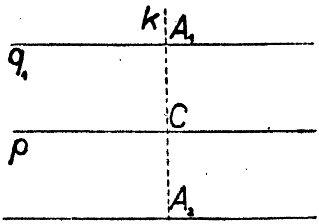
V odst. 7 bylo dokázáno, že každý bod na ose úsečky AB je stejně vzdálen od A i od B a že každý bod stejně vzdálený od A i od B leží na ose úsečky AB. Tedy geometrické místo bodů stejně vzdálených od daného bodu A jako od daného bodu B je osa úsečky AB. Připomeňme si, že osa úsečky AB je kolmice vztyčená k přímce AB ve středu S úsečky AB.



Obr. 49.

Jsou-li p, q dvě rovnoběžky, pak všecky body přímky q jsou stejně vzdáleny od přímky p. Neboť vzdálenosti bodů A, B, přímky q od přímky p jsou AC, BD, kde C, D jsou (viz obr. 49) paty kolmic spuštěných s bodů A, B na přímku p. Ježto $AC \perp p$, $BD \perp p$, je $AC \parallel BD$; mimo to $AB \parallel CD$, takže AC, BD jsou dvě protější strany rovnoběžníka, pročež $\overline{AC} = \overline{BD}$. Ježto $AC \perp p$, $p \parallel q$, je $AC \perp q$

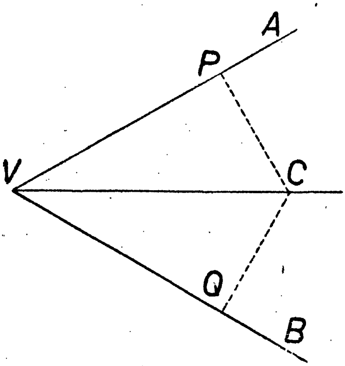
a stejně $BD \perp q$. Tedy také všecky body přímky p mají od přímky q touž vzdálenost $r = \overline{AC} = \overline{BD}$, jakou mají všecky body přímky q od přímky p. Proto r se nazývá stručně **vzdálenost rovnoběžek** p, q.



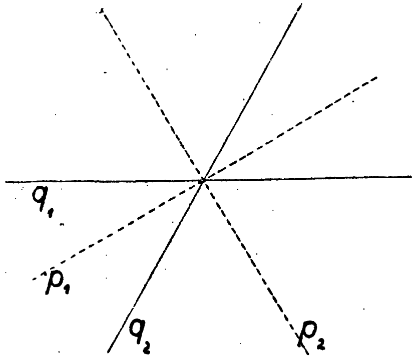
Obr. 50.

Je-li dána přímka p a vzdálenost r, jsou dvě rovnoběžky q_1, q_2 s přímkou $p$mající od p vzdálenost r. Dostaneme je (viz obr. 50), jestliže zvolíme bod C libovolně na přímce p, vztyčíme v něm kolmici k k přímce p, určíme na přímce k body A_1, A_2 tak, že $\overline{A_1C} = \overline{A_2C} = r$ a vedeme body A_1, A_2 rovnoběžky q_1, q_2 s přímkou p. Zřejmě geometrické místo bodů, které mají od dané přímky p danou vzdálenost r, skládá se ze dvou rovnoběžek q_1, q_2 s přímkou p, které jsou od sebe odděleny přímkou p.

Geometrické místo bodů stejně vzdálených ode dvou rovnoběžných přímek q_1, q_2 je přímka p rovnoběžná s přímkami q_1, q_2. To už sami snadno dokážete (viz zase obr. 50).



Obr. 51.



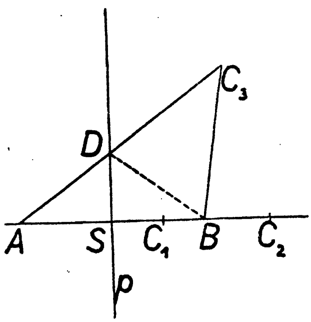
Obr. 52.

Geometrické místo bodů uvnitř úhlu $\sphericalangle AVB$ stejně vzdálených od přímky AV jako od přímky BV je osa úhlu $\sphericalangle AVB$. Předpokládejme nejprve, že bod C leží na ose úhlu $\sphericalangle AVB$. Jsou-li P, Q paty kolmic spuštěných s bodu C na přímky AV, BV, máme dokázati, že $\overline{CP} = \overline{CQ}$. Trojúhelníky $\triangle CPV$, $\triangle CQV$ se shodují ve straně CV a ve dvou úhlech, neboť

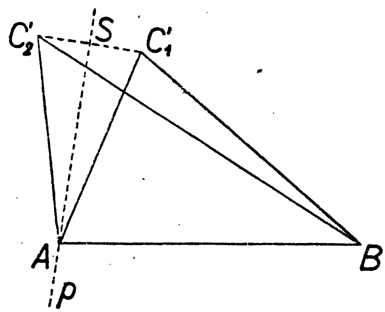
$$\sphericalangle CVP = \sphericalangle CVQ = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AVB,$$
$$\sphericalangle CPV = \sphericalangle CQV = R,$$

jsou tedy shodné podle (*suu*), z čehož plyne $\overline{CP} = \overline{CQ}$. Obráceně budiž C takový bod uvnitř $\sphericalangle AVB$, že $\overline{CP} = \overline{CQ}$, kde zase P, Q jsou paty řečených kolmic. Pravoúhlé trojúhelníky $\triangle CPV$, $\triangle CQV$ se shodují v přeponě CV, v jedné odvěsně $\overline{CP} = \overline{CQ}$ a v pravém úhlu, tedy ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich. Jsou tedy shodné, z čehož plyne $\sphericalangle CVP = \sphericalangle CVQ$, t. j. C leží na ose úhlu $\sphericalangle AVB$.

Geometrické místo bodů stejně vzdálených ode dvou daných různoběžných přímek q_1, q_2 se skládá ze dvou k sobě kolmých přímek p_1, p_2, které procházejí průsečíkem přímek q_1, q_2. To už zase sami snadno dokážete (viz. obr. 52), neboť podle předešlé věty žádané geometrické místo se skládá z os čtyř úhlů tvořených různoběžkami q_1, q_2.



Obr. 53.



Obr. 54.

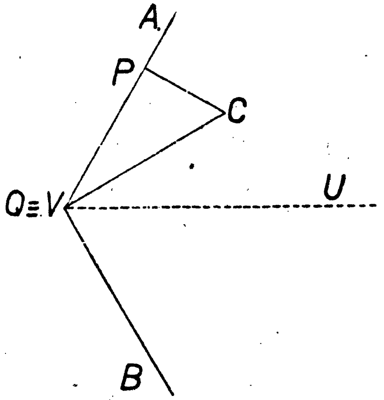
Leží-li bod C mimo osu p úsečky AB, odděluje p bod C od jednoho z bodů A, B a víme, že vzdálenosti AC, BC jsou nestejné. Určitěji však můžeme říci toto: Jestliže osa p úsečky AB odděluje bod C od bodu A, pak jest $\overline{AC} > \overline{BC}$. Mohou totiž nastati tyto tři případy (viz body C_1, C_2, C_3 v obr. 53): [1] C leží uvnitř úsečky SB, kde S je střed úsečky AB; [2] C leží na prodloužení úsečky AB za bod B; [3] C leží mimo přímku AB. V případě [1] je $\overline{AC} > \overline{AS} = \overline{BS} > \overline{BC}$, tedy $\overline{AC} > \overline{BC}$. V případě [2] je $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, tedy zase $\overline{AC} > \overline{BC}$. V případě [3] protne úsečka AC osu p v bodě D; jest $\overline{AD} = \overline{BD}$, takže v $\triangle ABD$ úhly při vrcholech A, B jsou si rovny. Proto $\triangle ABC$

má při vrcholu B větší úhel než při vrcholu A; ježto proti většímu úhlu je větší strana, je $\overline{AC} > \overline{BC}$.

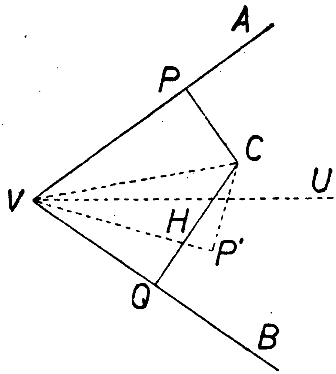
Právě odvozená věta má tento důsledek: Jestliže pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ platí

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}, \quad \overline{A_1C_1} = \overline{A_2C_2}, \quad \sphericalangle A_1 < \sphericalangle A_2,$$

pak je také $\overline{B_1C_1} < \overline{B_2C_2}$. Přemístěme napřed dané trojúhelníky do takových poloh $\triangle ABC'_1$, $\triangle ABC'_2$, že poloroviny ABC'_1, ABC'_2 splynou (viz obr. 54). Pak je $\overline{AC'_1} = \overline{AC'_2}$, $\sphericalangle BAC'_1 < \sphericalangle BAC'_2$ a máme dokázati, že $\overline{BC'_1} < \overline{BC'_2}$. Je-li S střed úsečky $C'_1C'_2$, pak v rovnoramenném $\triangle AC'_1C'_2$ je $AS \perp C'_1C'_2$, t. j. AS je osa úsečky $C'_1C'_2$. Ježto však $\sphericalangle BAC'_1 < \sphericalangle BAC'_2$, odděluje přímka AS bod B od bodu C'_2, takže podle předešlé věty je $\overline{BC'_1} < \overline{BC'_2}$.



Obr. 55.

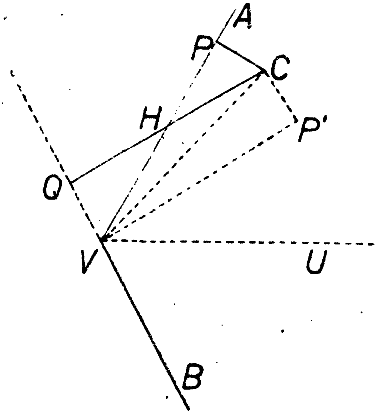


Obr. 56.

Leží-li bod C uvnitř úhlu $\omega = \sphericalangle AVB$, ale mimo osu VU úhlu ω, leží bod C uvnitř jednoho z úhlů $\sphericalangle AVU$, $\sphericalangle BVU$ a víme, že vzdálenosti bodu C od přímek VA, VB jsou nestejné. Určitěji však můžeme říci toto: Budiž VU osa dutého úhlu $\omega = \sphericalangle AVB$. Leží-li bod C uvnitř $\sphericalangle AVU$, má od přímky AV vzdálenost menší než od přímky BV. Ježto

$$\sphericalangle AVC < \sphericalangle AVU = \tfrac{1}{2}\omega < R,$$

je $\sphericalangle AVC$ úhel ostrý. Naproti tomu $\sphericalangle BVC$, který je jistě větší než $\sphericalangle AVC$, může býti pravý, ostrý nebo tupý (viz obr. 55 až 57). Buďtež P, Q paty kolmic spuštěných s bodu C na přímky VA, VB; máme dokázati, že je $\overline{CP} < \overline{CQ}$. Protože $\sphericalangle AVC$ je ostrý, padne P dovnitř polopřímky VA (viz obr. 38 na str. 24). Je-li $\sphericalangle BVC$ pravý, splyne Q s bodem P a jest $\overline{CP} < \overline{CQ}$, neboť v pravoúhlém $\triangle CPQ$ (viz obr. 55) je CP odvěsnou, CQ přeponou. Jinak (viz obr. 56 a 57) buďiž P' bod souměrně sdružený s bodem P vzhledem k přímce VC. Protože $\sphericalangle CVP' = \sphericalangle AVC < \sphericalangle BVC$, leží celá přímka VB (až na bod V) vně úhlu $\sphericalangle PVP'$. Zejména bod Q leží vně $\sphericalangle PVP'$, kdežto C leží uvnitř tohoto úhlu, takže úsečka CQ musí protnouti jedno z obou ramen úhlu $\sphericalangle PVP'$ v bodě H a jest $\overline{CH} < \overline{CQ}$. Naproti tomu je $\overline{CP} \leqq \overline{CH}$, protože $\overline{CP} = \overline{CP'}$ je nejkratší vzdálenost bodu C od ramen CP, CP' našeho $\sphericalangle PVP'$. Z toho plyne $\overline{CP} < \overline{CQ}$, což jsem měli dokázati.



Obr. 57.

Cvičení.

a) *K odstavci 5.*

30. Čtyři body na přímce jsou v pořádku $ABCD$. Je-li $\overline{AC} = x$, $\overline{BD} = y$, $\overline{AD} = z$, určete $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$!

31. Čtyři různé body A, B, C, D přímky mohou ležeti za sebou ve 12 různých pořádcích (na smysl nehledíme, takže na př. pořádek $ABCD$ považujeme za týž jako $DCBA$). Naznačte jednotlivé možnosti obrazci od ruky! Jestliže víme, že $\overline{AB} = \overline{CD}$, odpadnou čtyři z 12 pořádků; které? Přesvědčte se, že pro čtyři z osmi možných pořádků musí býti $\overline{AC} = \overline{BD}$; co pro ostatní čtyři pořádky?

32. Čtyři body na přímce jsou v pořádku $ABCD$. Dokažte, že je

$$\overline{AC} \,.\, \overline{BD} = \overline{AB} \,.\, \overline{CD} + \overline{AD} \,.\, \overline{BC}. \tag{1}$$

33. Co můžete říci o pořádku čtyř bodů přímky, víte-li, že mezi jejich vzdálenostmi platí vztah (1)?

34. Pro pět bodů na přímce platí

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}.$$

Které z ostatních vzdáleností dvou z našich pěti bodů musí býti sobě rovny?

35. Pro pět různých bodů A, B, C, D, E na přímce platí $\overline{AC} = \overline{CE}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$. Dokažte, že je také $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AD} = \overline{BE}$! (V jakém pořádku jsou body A, B, C, D, E? Jsou čtyři možnosti, které si naznačte obrazci od ruky.)

36. Čtyři body na přímce jsou v pořádku $ABCD$. Některé ze šesti vzdáleností

$$\overline{AB} = x,\ \overline{BC} = y,\ \overline{CD} = z,\ \overline{AC},\ \overline{BD},\ \overline{AD}$$

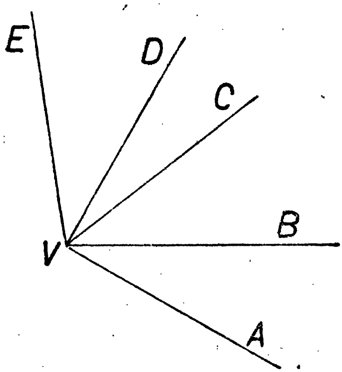
mohou býti sobě rovny. Vyšetřete všecky možné případy. ([1] $x = y = z$; [2] $x = y$, $z = 2x$ nebo $y = z$, $x = 2z$; [3] $x = z$; [4] $x = y$ nebo $y = z$; [5] $z = x + y$ nebo $x = y + z$; [6] všecky vzdálenosti jsou od sebe různé.)

b) *K odstavci* **6.**

37. Dokažte, že osy dvou vedlejších úhlů svírají úhel pravý a osy dvou vrcholových úhlů úhel přímý!

38. Ze dvou doplňkových úhlů je jeden n-násobek druhého. Jak velké jsou ty úhly? Pro která n je velikost obou úhlů dána celým počtem stupňů? (Je 9 takových n, počítáme-li i hodnotu $n = 1$.)

39. Budiž $\alpha = 40°$. V jakých mezích musí ležeti úhel β, má-li býti $\alpha + \beta$ úhel ostrý, ale $\alpha + 2\beta$ úhel tupý? Stanovte meze pro β také obecně, není-li velikost ostrého úhlu α číselně dána!



Obr. 58.

40. Jaký úhel svírají velká a malá hodinová ručička

a) v 8 hod. 30 min., b) v 5 hod. 40 min., c) v 7 hod. 20 min., d) ve 3 hod. 50 min.?

41. (Viz obr. 58.)

a) Jestliže $\sphericalangle BVD = \sphericalangle CVE$, dokažte, že $\sphericalangle BVC = \sphericalangle DVE$!

b) Dokažte, že $\sphericalangle AVC + \sphericalangle BVD = \sphericalangle AVD + \sphericalangle BVC$!

c) Jestliže VC je osa úhlu $\sphericalangle BVE$, dokažte, že $\sphericalangle CVD = \frac{1}{2}(\sphericalangle BVD - \sphericalangle DVE)$!

d) Jestliže $\sphericalangle AVE = 2 . \sphericalangle BVD$ a jestliže VC je osa úhlu $\sphericalangle AVE$, dokažte, že $\sphericalangle AVB = \sphericalangle CVD$!

(Velikosti úhlů $\sphericalangle AVB$ až $\sphericalangle DVE$ si vyznačte řeckými písmeny.)

c) *K odstavci* **7** *a* **8.**

42. Sestrojte útvar souměrně sdružený k $\triangle ABC$ podle osy p, která

a) leží vně trojúhelníka,

b) protíná dvě strany, ale žádnou z nich kolmo!

Čtyrúhelník $ABCD$ se jmenuje **deltoid,** jestliže je souměrný vzhledem k jedné úhlopříčce (v obr. 59 je to úhlopříčka AC), která se jmenuje o s a d e l t o i d u.

43. a) Je-li AC osa deltoidu $ABCD$, jest $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{CB} = \overline{CD}$. Vyslovte a dokažte také obrácenou větu!

b) Je-li AC osa deltoidu $ABCD$, je AC osa úhlu α, CA osa úhlu γ. Vyslovte a dokažte také obrácenou větu!

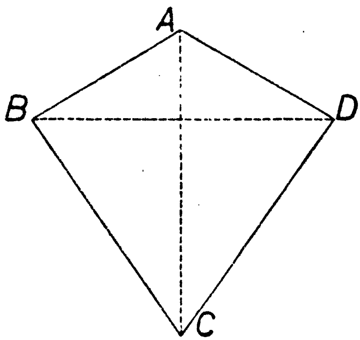
c) Úhlopříčky deltoidu stojí na sobě kolmo a jedna z nich (která?) půlí druhou. Vyslovte a dokažte také obrácenou větu!

d) U čtyrúhelníka $ABCD$ je $\overline{AB} = \overline{AD}$ a AC je osa úhlu α. Dokažte, že $ABCD$ je deltoid!

e) Narýsujte čtyrúhelník $ABCD$ tak, že $\overline{AB} = \overline{AD}$, že CA je osa úhlu γ, že však $ABCD$ není deltoid! Dokažte, že úhly β, δ jsou výplňkové!

f) Úhlopříčky čtyrúhelníka stojí na sobě kolmo a dvě sousední strany jsou si rovny. Dokažte, že je to deltoid!

g) U čtyrúhelníka $ABCD$ je $AC \perp BD$ a AC je osa úhlu α. Dokažte, že je to deltoid!



Obr. 59.

44. Budiž z délka základny, r délka ramene, p velikost obvodu rovnoramenného trojúhelníka. Napište vzorec, který vyjadřuje a) z pomocí p a r, b) r pomocí p a z!

45. a) Úhel proti základně rovnoramenného trojúhelníka je n-násobek úhlu při základně. Jak veliké jsou ty úhly? Pro která n je velikost obou úhlů dána celým počtem stupňů? (Je 15 takových n, nepočítáme-li hodnotu $n = 1$, která vede na rovnostranný trojúhelník.)

b) Úhel při základně rovnoramenného trojúhelníka je n-násobek úhlu proti základně. Jak veliké jsou ty úhly? Pro která n je velikost obou úhlů dána celým počtem stupňů? (Jsou čtyři taková n, jestliže nepočítáme rovnostranný trojúhelník.)

46. Sestrojte útvar souměrně sdružený k $\triangle ABC$ podle středu S, který leží a) vně trojúhelníka, b) v jednom vrcholu, c) na straně AB tak, že $\overline{AS} = 2\,\overline{BS}$, d) uvnitř trojúhelníka!

47. Úhlopříčka AC čtyrúhelníka $ABCD$ půlí úhlopříčku BD.

a) Je-li $AD \parallel BC$, dokažte, že $ABCD$ je rovnoběžník!

b) Je-li $\overline{AD} = \overline{BC}$, musí $ABCD$ býti rovnoběžník?

Čtyrúhelník, jehož všecky strany jsou si rovny, jmenuje se **kosočtverec**.

48. a) Obě úhlopříčky kosočtverce jsou jeho osami souměrnosti a stojí na sobě kolmo. Proto každý kosočtverec je rovnoběžníkem.

b) Jestliže obě úhlopříčky čtyrúhelníka jsou jeho osami souměrnosti, je to kosočtverec.

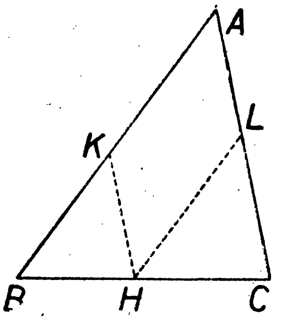
c) Rovnoběžník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo, je kosočtverec.

d) Každý úhel kosočtverce je půlen úhlopříčkou vycházející z jeho vrcholu.

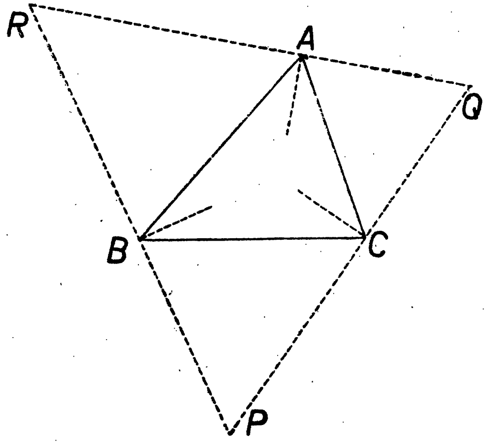
e) Jestliže úhlopříčka AC půlí úhel α rovnoběžníka $ABCD$, pak $ABCD$ je kosočtverec. (Pomocí vět o úhlech rovnoběžníka a pomocí součtu úhlů $\triangle ABC$ dokažte napřed, že úhlopříčka AC půlí také úhel γ, takže AC je osa souměrnosti.)

f) Jestliže tři úhly čtyrúhelníka $ABCD$ jsou půleny úhlopříčkami, platí totéž o čtvrtém úhlu a $ABCD$ je kosočtverec. (Jestliže úhlopříčka AC půlí úhly α, γ, je AC osou souměrnosti. Ze souměrnosti plyne, že osy úhlů β, δ se protnou v bodě S na AC; je-li úhel β půlen úhlopříčkou BD, leží BSD na přímce, BD půlí δ a také BD je osa souměrnosti.)

49. (Viz obr. 60.) Vedeme-li z libovolného bodu H základny BC rovnoramenného $\triangle ABC$ rovnoběžky k oběma ramenům, vznikne rovnoběžník $AKHL$. Dokažte, že obvod tohoto rovnoběžníka je nezávislý na poloze bodu H uvnitř úsečky BC!



Obr. 60.



Obr. 61.

d) *K odstavci 9.*

50. Dokažte, že vypuklý mnohoúhelník nemůže míti více než 3 ostré úhly! Dále dokažte, že nejvýš pět úhlů je menších než 120°, nejvýš sedm je jich menších než 135°, nejvýš osm menších než 140°! (Užijte věty o součtu vnějších úhlů.)

51. Čtyrúhelník má buďto všecky úhly pravé nebo aspoň jeden ostrý. Šestiúhelník má buďto všecky úhly rovné 120° nebo aspoň jeden menší než 120° a aspoň jeden větší než 120°. Jak je tomu pro pětiúhelník?

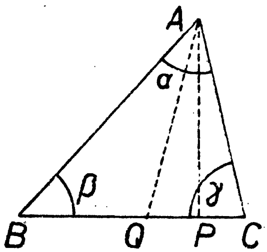
52. Nevypuklý mnohoúhelník má aspoň tři duté úhly a má-li jen tři, jsou aspoň dva z nich ostré a aspoň jeden z nich je menší než 60°. Zejména každý nevypuklý čtyrúhelník má aspoň dva úhly ostré a aspoň jeden z nich je menší než 60°. Každý nevypuklý pětiúhelník má aspoň jeden úhel ostrý.

53. V obr. 61 jsou přímky QR, RP, PQ kolmé na osy úhlů α, β, γ trojúhelníka ABC. Vyjádřete úhly $\triangle ABR$, $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$ pomocí úhlů α, β, γ!

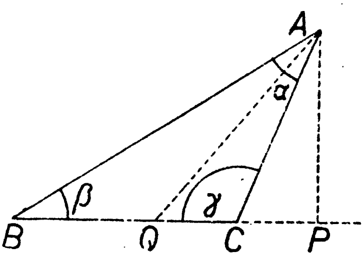
54. V obr. 62 a 63 je $\overline{AB} > \overline{AC}$, $AP \perp BC$, AQ je osa úhlu α. Dokažte, že $\sphericalangle PAQ = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$!

55. Dokažte, že u vypuklého čtyrúhelníka $ABCD$ osy úhlů α, δ svírají úhel rovný $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$!

56. V obr. 64 jsou EV, FV osy úhlů $\sphericalangle AED$, $\sphericalangle CFD$. Dokažte, že $\sphericalangle EVF = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$.

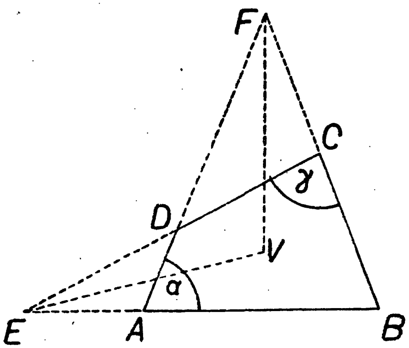


Obr. 62.

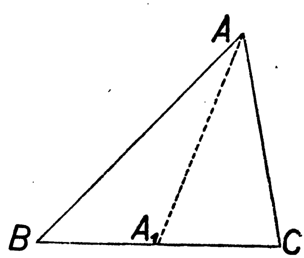


Obr. 63.

57. Osy úhlů vypuklého čtyrúhelníka tvoří čtyrúhelník, jehož protější úhly jsou výplňkové. Jestliže prvý čtyrúhelník je rovnoběžník, druhý je obdélník. Jestliže prvý čtyrúhelník je obdélník, druhý je čtverec.



Obr. 64.



Obr. 65.

58. a) V trojúhelníku ABC budiž $2\gamma = \beta < R$. Budiž D pata kolmice spuštěné s bodu A ma BC. Na prodloužení úsečky AB za bod B naneste $\overline{BE} = \overline{BD}$. Budiž F průsečík přímek AC, DE. Dokažte, že $\overline{AF} = \overline{CF} = \overline{DF}$ a že strana AB se rovná rozdílu úseček BD, CD!

b) V trojúhelníku ABC budiž $2\gamma = \beta > R$. Budiž D pata kolmice spuštěné s bodu A na BC. Na polopřímku BA naneste $\overline{BE} = \overline{BD}$. Budiž F průsečík přímek AC, DE. Dokažte, že $\overline{AF} = \overline{CF} = \overline{DF}$ a že strana AB se rovná součtu úseček BD, CD!

c) *K odstavci* **10.**

Těžnice trojúhelníka ABC vedená z vrcholu A je úsečka AA_1, kde (viz obr. 65) A_1 je střed strany BC. Každý trojúhelník má tedy tři těžnice.

59. Úhel α trojúhelníka ABC je pravý, ostrý nebo tupý podle toho, zda těžnice AA_1 je rovna $\frac{1}{2}\overline{BC}$, je větší či menší než $\frac{1}{2}\overline{BC}$.

60. Uvnitř $\triangle ABC$ leží bod U. Dokažte, že $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$!

61. Osa úhlu α trojúhelníka ABC protne stranu BC v bodě D. Dokažte, že $\overline{AB} > \overline{BD}$!

62. Uvnitř strany BC trojúhelníka ABC leží bod D. Dokažte, že AD je menší než polovina obvodu trojúhelníka!

63. Uvnitř $\triangle ABC$ leží bod U. Dokažte, že $\overline{BU} + \overline{UC} < \overline{BA} + \overline{AC}$!

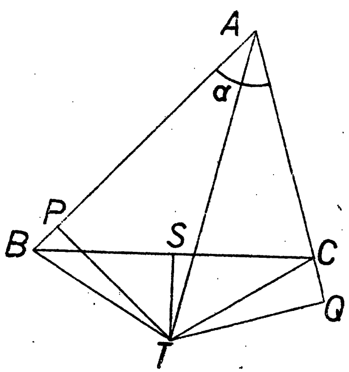
64. Uvnitř vypuklého čtyrúhelníka $ABCD$ leží bod U. Dokažte, že součet $\overline{AU} + \overline{BU} + \overline{CU} + \overline{DU}$ je větší než součet úhlopříček nebo je mu roven, při čemž rovnost nastane pouze v tom případě, že U je průsečík úhlopříček!

65. Největší strana vypuklého čtyrúhelníka $ABCD$ je AB, nejmenší strana je CD. Dokažte, že $\beta < \delta$! (Spojte BD.)

f) *K odstavci* **11.**

66. Ze základních vět o shodnosti trojúhelníků odvoďte věty o shodnosti trojúhelníků pravoúhlých!

67. V obr. 66 je ST osa strany BC, AT osa úhlu α, dále je $TP \perp AB$, $TQ \perp AC$. Najděte v obrazci tři páry shodných trojúhelníků a dokažte shodnost! Dále dokažte, že $\overline{AP} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$!



Obr. 66.

68. Nad stranami ostroúhlého $\triangle ABC$ jsou sestrojeny rovnostranné $\triangle ABH$, $\triangle ACK$ vně $\triangle ABC$. Dokažte, že $CH = BK$! Je-li L průsečík přímek CH, BK, dokažte dále, že $\sphericalangle BLC = 120°$!

69. $ABCD$ je rovnoběžník. $ABHK$ je čtverec v polorovině ABC; $BCPQ$ je čtverec v polorovině BCA. Dokažte, že $\sphericalangle QBH = \sphericalangle BAD$. Dále dokažte, že $\overline{QH} = \overline{BD}$!

70. Budiž S průsečík úhlopříček čtverce $ABCD$; budiž P libovolný bod uvnitř úsečky DS a budiž Q takový bod na přímce AC, že $BQ \perp AP$. Dokažte, že trojúhelníky ABP a BCQ jsou shodné!

71. Dva vypuklé čtyrúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech stranách a v úhlu jedním párem příslušných stran sevřeném.

72. Dva lichoběžníky jsou shodné, shodují-li se v obou základnách i v obou ramenech.

73. Přímka procházející středem rovnoběžníka rozdělí jej na dva shodné lichoběžníky.

g) *K odstavci* **12.**

74. Budiž BC základna rovnoramenného $\triangle ABC$. Je-li H libovolný bod uvnitř úsečky BC, pak součet vzdáleností bodu H od přímek AB, AC je nezávislý na poloze bodu H.

75. Budiž dán rovnostranný trojúhelník. Je-li H libovolný bod uvnitř trojúhelníka, pak součet vzdáleností bodu H od všech tří stran trojúhelníka je nezávislý na poloze bodu H.

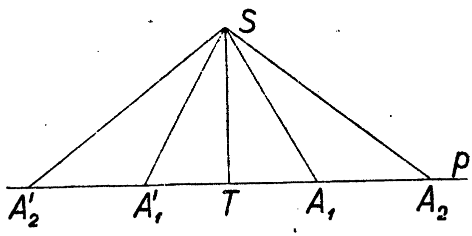
76. Jsou-li p, q dvě dané různoběžky, pak geometrické místo bodů, jejichž vzdálenosti od přímek p, q mají daný součet, je obdélník, jehož úhlopříčky leží v přímkách p, q.

77. Budiž s vzdálenost dvou rovnoběžek p, q. Geometrické místo bodů, jejichž vzdálenosti od přímek p, q mají daný součet větší než s, skládá se ze dvou přímek rovnoběžných s přímkami p, q. Podobný tvar má geometrické místo bodů, jejichž vzdálenosti od přímek p, q mají daný rozdíl menší než s. Může součet vzdáleností nějakého bodu od přímek p, q býti menší než s? Může rozdíl těch vzdáleností býti větší než s?

78. Vně rovnoběžníka $ABCD$ sestrojte rovnostranné trojúhelníky ABH, BCK, CDL, DAM. Dokažte, že $HKLM$ je rovnoběžník! (Dokažte rovnost protějších stran.)

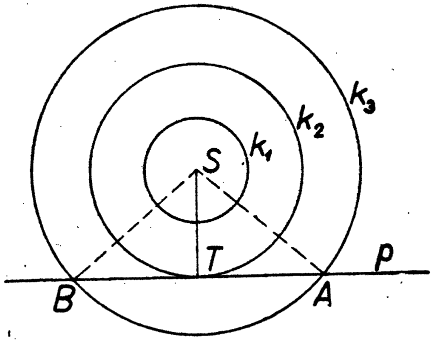
§ 3. Kružnice.

13. Kružnice a přímka; oblouk kružnice. Budiž dána přímka p a mimo ni bod S (viz obr. 67). Budiž T pata kolmice spuštěné s bodu S na přímku p. Je-li A kterýkoli jiný bod přímky p, víme, že je $\overline{ST} < \overline{SA}$. Jsou-li dva body A, A' přímky p stejně vzdáleny od bodu T, leží souměrně vzhledem ke přímce ST, takže $\overline{SA} = \overline{SA'}$. Jestliže však pro dva body A_1, A_2 přímky p platí $\overline{TA_2} < \overline{TA_1}$, pak dokážeme, že je také $\overline{SA_2} < \overline{SA_1}$. Stačí to dokázati pro případ pořádku TA_1A_2 na přímce p. Pravoúhlý $\triangle STA_1$ má při vrcholu A_1 úhel ostrý, takže v $\triangle SA_1A_2$ je při vrcholu A_1 úhel tupý, tedy při vrcholu A_2 úhel ostrý a protože proti většímu úhlu leží větší strana, musí býti $\overline{SA_2} > \overline{SA_1}$. Výsledek: **Dva body přímky p stejně vzdálené od T jsou stejně vzdáleny od S a bod vzdálenější od T je také vzdálenější od S.**

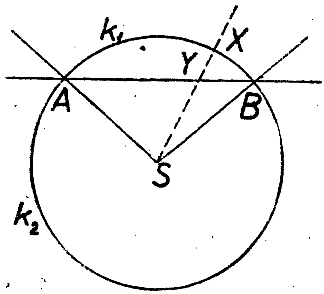


Obr. 67.

Budiž nyní S střed kružnice k s poloměrem r (viz obr. 68). Je-li předně $r < \overline{ST}$, je $r < \overline{SX}$ pro všecky body X přímky p a celá přímka p leží vně kružnice k. Je-li za druhé $r = \overline{ST}$, je $r < \overline{SX}$ pro všecky body X přímky p mimo bod T. Taková přímka se jmenuje **tečna** kružnice k v bodě T, který je její **bod dotyku.** Je-li za třetí $r > \overline{ST}$, protne přímka p kružnici k ve dvou bodech A, B. Je tedy $\overline{SA} = \overline{SB} = r$; pro body X uvnitř úsečky AB je $\overline{SX} < r$, pro ostatní body X přímky p je $\overline{SX} > r$; tedy úsečka AB leží (až na své krajní body) uvnitř kružnice k a ostatek přímky AB leží vně k. Taková přímka se jmenuje **sečna** kružnice a úsečka AB se jmenuje **tětiva.**



Obr. 68.



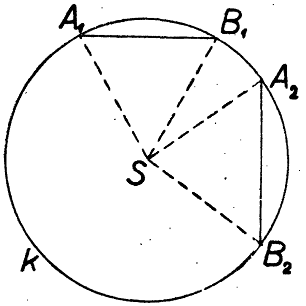
Obr. 69.

Při tom jsme předpokládali, že přímka p neprochází středem S kružnice k. Každá přímka jdoucí středem S je ovšem také s e č n o u a příslušná tětiva je p r ů m ě r kružnice.

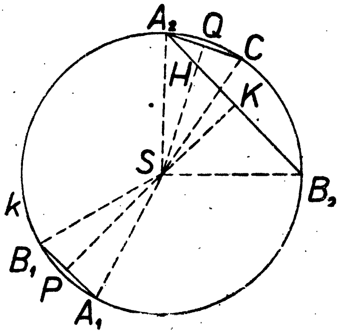
Z předchozího plyne: K r u ž n i c e m á v k a ž d é m s v é m b o d ě T p r á v ě j e d n u t e č n u; j e t o k o l m i c e v z t y č e n á v b o d ě T n a p o l o m ě r ST. T e č n a l e ž í a ž n a b o d d o t y k u v n ě k r u ž n i c e. V z d á l e n o s t t e č n y o d s t ř e d u k r u ž n i c e j e r o v n a p o l o m ě r u. Jiný důležitý výsledek naší úvahy jest: O s a k a ž d é t ě t i v y p r o c h á z í s t ř e d e m k r u ž n i c e neboli k o l m i c e s p u š t ě n á n a t ě t i v u s e s t ř e d u k r u ž n i c e p ů l í t ě t i v u neboli k o l m i c e v z t y č e n á n a t ě t i v u v j e j í m s t ř e d u p r o c h á z í s t ř e d e m k r u ž n i c e.

Budiž dána libovolná tětiva AB, která nechť neprochází středem kružnice (viz obr. 69). Přímka AB rozdělí rovinu na dvě poloroviny a tím i kružnici k na dva **oblouky** s krajními body A, B, které si označme k_1, k_2 tak, že k_2 leží v polorovině ABS. Body A, B jsou k r a j n í b o d y oblouků k_1, k_2; každý jiný bod kružnice k leží u v n i t ř jednoho z nich. Je-li X bod uvnitř k_1, jsou body S, X od sebe odděleny přímkou AB, pročež úsečka SX protne přímku AB v bodě Y; jest $\overline{SY} < \overline{SX} = r$, takže Y leží uvnitř k a tedy uvnitř úsečky AB. Obráceně, leží-li Y uvnitř úsečky AB, jest $\overline{SY} < r$ a proto na prodloužení úsečky SY za bod Y máme bod X takový, že $\overline{SX} = r$. Body S, X jsou od sebe odděleny přímkou AB, takže X leží na oblouku k_1. Z toho plyne, že oblouk k_1 je ta část kružnice k, která leží v dutém úhlu $\sphericalangle ASB$ a oblouk k_2 je ta část kružnice k, která leží ve vypuklém úhlu s rameny SA, SB. Dutý úhel $\sphericalangle ASB$ se jmenuje **středový úhel nad obloukem** k_1 a vypuklý úhel s rameny SA, SB je středový úhel nad obloukem k_2. Středovým úhlem nad tětivou AB rozumíme dutý úhel $\sphericalangle ASB$.

Jestliže tětiva AB prochází středem S kružnice k, pak oblouky k_1, k_2 jsou polokružnice a příslušné středové úhly jsou přímé. Délka tětivy procházející středem je ovšem $2r$. Pro ostatní tětivy máme však (viz obr. 69) $\triangle ABS$, ve kterém strana AB je menší než součet $\overline{AS} + \overline{BS}$ ostatních dvou stran. Tedy **tětiva neprocházející středem je kratší než průměr.**



Obr. 70.

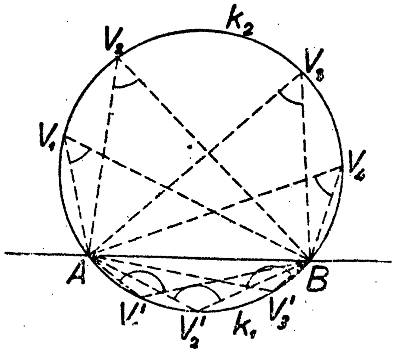


Obr. 71.

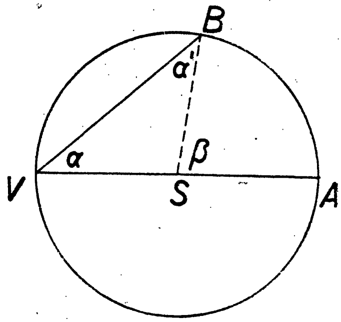
Mějme nyní dvě tětivy A_1B_1, A_2B_2 kružnice k (viz obr. 70). Pak $\triangle SA_1B_1$, $\triangle SA_2B_2$ se shodují ve stranách vycházejících z vrcholu S. Je-li také $\sphericalangle A_1SB_1 = \sphericalangle A_2SB_2$, jsou oba trojúhelníky shodné (*sus*), takže $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$. Je-li však na př. $\sphericalangle A_1SB_1 < \sphericalangle A_2SB_2$, pak podle odst. 12 (viz obr. 54) je $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2}$. Tedy **dvě tětivy nad rovnými středovými úhly jsou si rovny. Nad menším středovým úhlem leží**

menší tětiva. Z toho plyne dále: **Dvě rovné tětivy leží nad rovnými středovými úhly. Menší tětiva leží nad menším středovým úhlem.**

Jsou-li dvě tětivy A_1B_1, A_2B_2 sobě rovny, víme, že $\triangle SA_1B_1 \cong \cong \triangle SA_2B_2$. Lze tedy $\triangle SA_1B_1$ přemístiti tak, aby se kryl s $\triangle SA_2B_2$. Bod S, jehož poloha se při přemístění nemění, je tedy stejně vzdálen od obou přímek A_1B_1, A_2B_2. Je-li však na př. $\overline{A_1B_1} < A_2B_2$, dokážeme, že bod S má od přímky A_1B_1 vzdálenost větší než od přímky A_2B_2. Ježto $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2}$, jest $\sphericalangle A_1SB_1 < \sphericalangle A_2SB_2$. Proto můžeme (viz obr. 71) určiti na kružnici k uvnitř $\sphericalangle A_2SB_2$ bod C tak, že $\sphericalangle A_2SC = \sphericalangle A_1SB_1$. Tětivy A_1B_1, A_2C leží pak nad týmž středovým úhlem, proto jsou si rovny a jejich vzdálenosti $\overline{SP}$, $\overline{SQ}$ od bodu S jsou si rovny. Avšak přímka A_2B_2 odděluje bod S od bodu C, tedy také od úsečky A_2C a od bodu Q. Proto úsečka SQ protne přímku A_2B_2 v bodě H a jest $\overline{SH} < \overline{SQ} = \overline{SP}$. Nejkratší vzdálenost $\overline{SK}$ bodu S od přímky A_2B_2 je pak tím spíše menší než $\overline{SP}$. Tedy **dvě rovné tětivy mají rovné vzdálenosti od středu kružnice. Menší tětiva je vzdálenější od středu kružnice.**



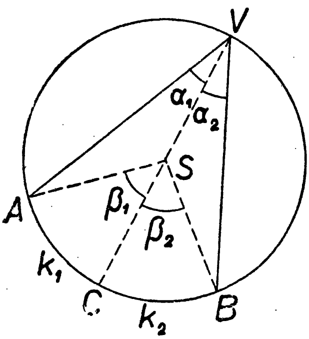
Obr. 72.



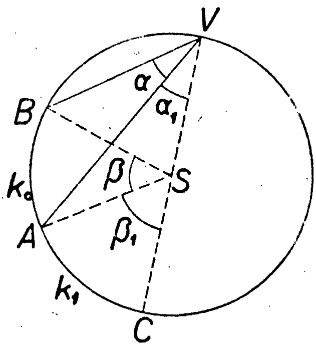
Obr. 73.

14. Obvodové úhly; úsekové úhly. Dva různé body A, B kružnice k rozdělí k na dva oblouky k_1, k_2 (viz obr. 72). Úhel $\sphericalangle AVB$, jehož vrchol V leží kdekoli uvnitř oblouku k_2, jmenuje se **obvodový úhel nad obloukem** k_1, protože k_1 je ta část kružnice k, která leží v tomto úhlu. Podobně obvodový úhel nad obloukem k_2 je úhel $\sphericalangle AV'B$, jehož vrchol V' leží kdekoli uvnitř oblouku k_1. Společný název pro oba druhy úhlů jest **obvodové úhly nad tětivou** AB. Dva obvodové úhly nad touž tětivou leží tehdy a jen tehdy nad týmž obloukem, jestliže jejich vrcholy nejsou od sebe odděleny přímkou AB. Každý obvodový úhel je úhel dutý.

Obvodový úhel je polovina středového úhlu nad týmž obloukem. Tuto důležitou větu si dokážeme (viz obr. 73) nejprve pro takový $\sphericalangle AVB$, jehož jedno rameno, třeba rameno VA, prochází středem S kružnice k. Budiž $\sphericalangle AVB = \alpha$, $\sphericalangle ASB = \beta$. Máme dokázati, že $\beta = 2\alpha$. Avšak v $\triangle SBV$ je β vnější úhel při vrcholu S, α vnitřní úhel při vrcholu V, takže $\beta = \alpha + \alpha'$, kde α' je vnitřní úhel při vrcholu B. Ježto $\overline{SV} = \overline{SB}$, je $\alpha = \alpha'$, takže $\beta = 2\alpha$.



Obr. 74.



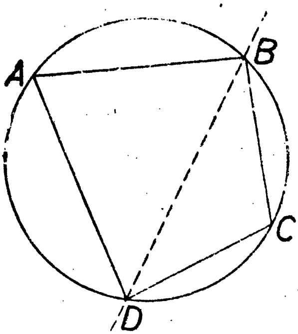
Obr. 75.

Za druhé vyšetříme případ takového obvodového úhlu $\alpha = \sphericalangle AVB$ nad obloukem k_0, že střed S kružnice k leží uvnitř α (viz obr. 74). Máme dokázati, že $\beta = \sphericalangle ASB = 2\alpha$. Polopřímka VS leží uvnitř úhlu α a protne oblouk k_0 v bodě C. Bod C rozdělí k_0 na dva oblouky k_1, k_2. Podle obrazce je $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Podle případu již vyšetřeného (viz obr. 73) je však $\beta_1 = 2\alpha_1$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, takže $\beta = 2\alpha$.

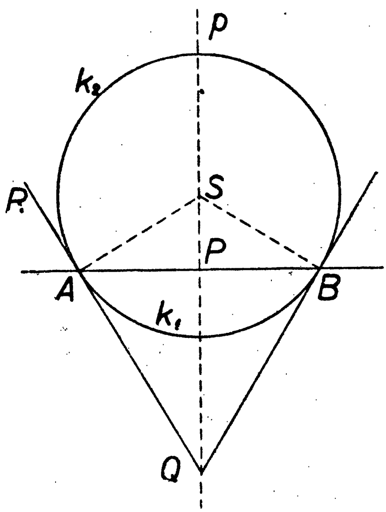
Zbývá případ takového obvodového úhlu $\alpha = \sphericalangle AVB$ nad obloukem k_0, že střed S kružnice k leží vně α (viz obr. 75). Máme dokázati, že $\beta = \sphericalangle ASB = 2\alpha$. Polopřímka VS leží vně úhlu α a protne kružnici k v bodě C. Celý úhel α, tudíž i oba body A, B, leží v jedné polorovině vyťaté přímkou VC a proto jeden z obou úhlů $\sphericalangle ASC$, $\sphericalangle BSC$ je částí druhého. Budiž třeba $\sphericalangle ASC$ částí $\sphericalangle BSC$. Podle obrazce je $\alpha + \alpha_1$ obvodový a $\beta + \beta_1$ středový úhel nad obloukem $k_0 + k_1$; α_1 je středový a β_1 je obvodový úhel nad obloukem k_1.

Podle případu již vyšetřeného (viz obr. 73) je však $\beta + \beta_1 = 2(\alpha + \alpha_1)$, $\beta_1 = 2\alpha_1$, takže $\beta = 2\alpha$.

Z právě dokázané věty plyne, že co do velikosti máme nad každým obloukem jediný obvodový úhel rovný polovině úhlu středového. Nad tětivou máme pak co do velikosti dva obvodové úhly. Obvodové úhly $\sphericalangle AV_1B$, $\sphericalangle AV_2B$ nad touž tětivou AB jsou si rovny, jestliže vrcholy V_1, V_2 nejsou od sebe odděleny přímkou AB. Jsou-li však V_1, V_2 od sebe odděleny přímkou AB, jsou obvodové úhly výplňkové, neboť oba středové úhly dávají dohromady $4R$, tedy obvodové úhly $\frac{1}{2} . 4R = 2R$. Obvodový úhel $\sphericalangle AVB$ nad tětivou AB je ostrý, není-li vrchol V oddělen přímkou AB od středu S kružnice k, a $\sphericalangle AVB$ je tupý, jsou-li body V, S od sebe odděleny přímkou AB. **Leží-li vrcholy čtyrúhelníka $ABCD$ na kružnici k, jsou protější úhly výplňkové.** Neboť na př. $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle BCD$ jsou obvodové úhly nad tětivou BD, jejichž vrcholy A, C jsou od sebe odděleny přímkou BD.



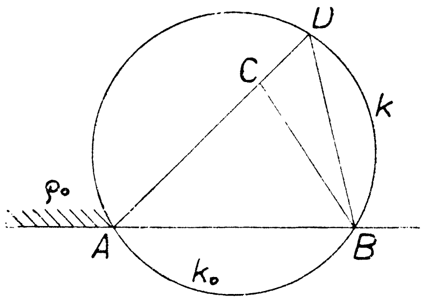
Obr. 76.



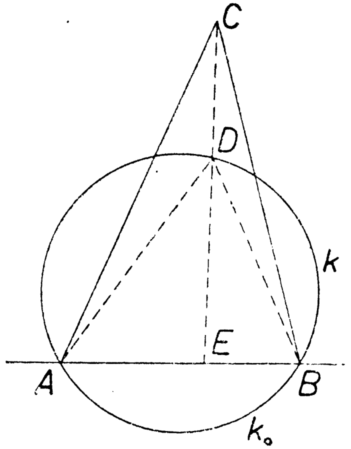
Obr. 77.

Obvodový úhel nad průměrem je pravý (Thaletova věta), protože příslušný středový úhel je přímý.

Jsou-li A, B dva různé body kružnice k a je-li AT tečna kružnice k, pak $\sphericalangle BAT$ nazýváme **úsekovým úhlem** nad tím obloukem kružnice k, který leží v polorovině ABT. Nad každým obloukem máme co do polohy dva úsekové úhly; vrcholem jednoho je bod A, vrcholem druhého je bod B. Nad tětivou AB máme potom co do polohy čtyři obvodové úhly. Co do velikosti máme nad každým obloukem jediný úsekový úhel, neboť **úsekový úhel se rovná polovině středového úhlu nad týmž obloukem** neboli úsekový úhel se rovná obvodovému úhlu nad týmž obloukem. To je jasné, je-li AB průměr kružnice, neboť úsekový úhel nad průměrem je zřejmě úhel pravý. Nechť tedy tětiva AB není průměrem kružnice k (viz obr. 77). Budiž p osa úsečky AB; p prochází středem S a protne AB ve středu P úsečky AB. Body A, B jsou souměrně sdružené vzhledem k přímce p, kružnice k je souměrná a proto tečny v bodech A, B se protnou v bodě



Obr. 78.



Obr. 79.

Q na přímce p. V pravoúhlém $\triangle\ APQ$ je $\sphericalangle\ PAQ$ ostrý, tedy menší než pravý $\sphericalangle\ SAQ$; proto body S, Q jsou od sebe odděleny přímkou AB. Body A, B rozdělí kružnici k na dva oblouky k_1, k_2, při čemž leží k_1 v polorovině ABQ, k_2 v polorovině ABS. Pravoúhlé $\triangle\ APQ$, $\triangle\ ASQ$ dají

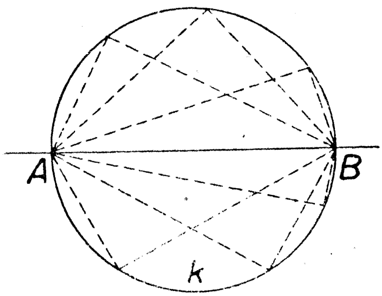
$$\sphericalangle\ BAQ + \sphericalangle\ AQS = R, \quad \sphericalangle\ ASQ + \sphericalangle\ AQS = R,$$

pročež úsekový úhel $\sphericalangle\ BAQ$ nad obloukem k_1 je roven $\sphericalangle\ ASQ$, který podle souměrnosti je roven polovině středového úhlu $\sphericalangle\ ASB$ nad týmž obloukem. Úsekový úhel $\sphericalangle\ BAR$ nad obloukem k_2 je vedlejší k $\sphericalangle\ BAQ$, je tedy roven

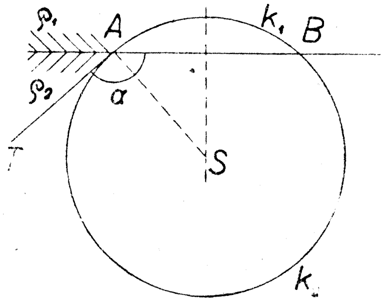
$$2R - \sphericalangle\ BAQ = \tfrac{1}{2}(4R - \sphericalangle\ ASB),$$

t. j. zase polovině středového úhlu nad týmž obloukem.

Budiž zase AB tětiva kružnice k a budiž k_0 jeden oblouk kružnice k s krajními body AB. Budiž ϱ_0 ta polorovina vyťatá přímkou AB, ve které neleží oblouk k_0. Co lze říci o velikosti úhlu $\sphericalangle ACB$, jehož vrchol C leží kdekoli uvnitř poloroviny ϱ_0? Leží-li C na kružnici k, je $\sphericalangle ACB$ obvodový úhel nad obloukem k_0 a proto co do velikosti je tento úhel α jednoznačně určen. Dokážeme si nyní, že $\sphericalangle ACB > \alpha$, **leží-li** C **uvnitř** k, $\sphericalangle ACB < \alpha$, **leží-li** C **vně** k. Budiž nejprve C uvnitř k (viz obr. 78). Prodloužení úsečky AC za bod C protne k v bodě D a jestliže v $\triangle BCD$ porovnáme vnější úhel při vrcholu C s vnitřním



Obr. 80.



Obr. 81.

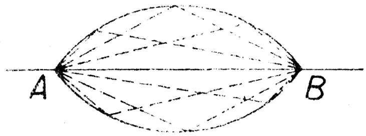
při vrcholu D, dostaneme $\sphericalangle ACB > \alpha$. Budiž za druhé C vně k (viz obr. 79). Zvolme bod E uvnitř úsečky AB. Úsečka CE má krajní bod C vně k a krajní bod E uvnitř k, protne tedy kružnici k v bodě D. Jestliže v trojúhelnících ACD, BCD porovnáme vnější úhel při vrcholu D s vnitřním při vrcholu C, dostaneme

$$\sphericalangle ACE < \sphericalangle ADE, \quad \sphericalangle BCE < \sphericalangle BDE,$$

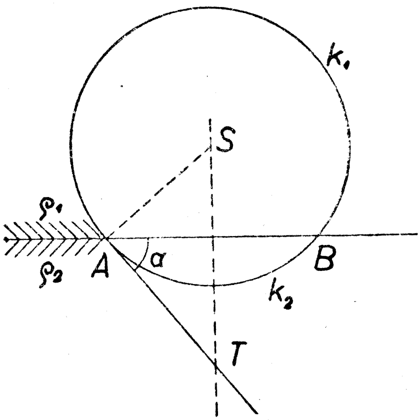
z čehož plyne sečtením $\sphericalangle ACB < \alpha$.

Buďtež nyní dány dva různé body A, B a dutý úhel α. Určíme si geometrické místo těch bodů X, z nichž je viděti úsečku AB pod úhlem α, t. j. pro které platí $\sphericalangle AXB = \alpha$. Je-li $\alpha = R$, pak hledané geometrické místo je kružnice k nad průměrem α (viz obr. 80). Neboť víme, že $\sphericalangle AXB = R$, leží-li X na k, $\sphericalangle AXB > R$, leží-li X uvnitř k, $\sphericalangle AXB < R$, leží-li X vně k.

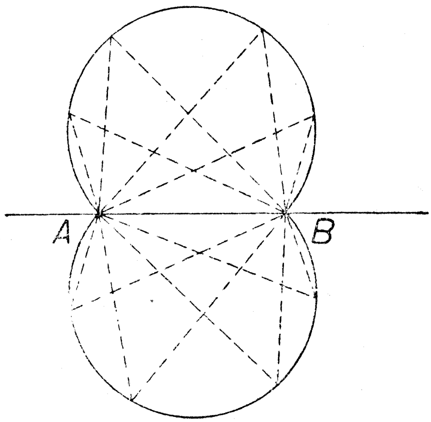
Je-li α úhel kosý, pak hledané geometrické místo se skládá ze dvou oblouků souměrně sdružených vzhledem k přímce AB; není to kružnice. Přímka AB vytíná dvě poloroviny ϱ_1, ϱ_2; stačí vyšetřiti body X uvnitř ϱ_1. Určeme (viz obr. 81 a 82) v polorovině ϱ_2 bod T tak, že $\sphericalangle BAT = \alpha$. Kolmice vztyčená v bodě A k přímce AT protne osu úsečky AB v bodě S. Kružnice k se středem S a poloměrem $\overline{SA} = \overline{SB}$ vytíná tětivu AB a přímka AT je tečnou v bodě A. Body A, B rozdělí k na dva oblouky k_1, k_2, z nichž prvý leží v polorovině ϱ_1. Zřejmě $\sphericalangle BAT$ je tečnový úhel nad obloukem k_2, takže také obvodový úhel nad týmž obloukem je roven $\sphericalangle BAT = \alpha$. Z toho plyne pro body X uvnitř ϱ_1: $\sphericalangle AXB = \alpha$, leží-li X na k, $\sphericalangle AXB > \alpha$, leží-li X uvnitř k, $\sphericalangle AXB < \alpha$, leží-li X vně k. Tedy část hledaného geometrického místa ležící v polorovině



Obr. 83.



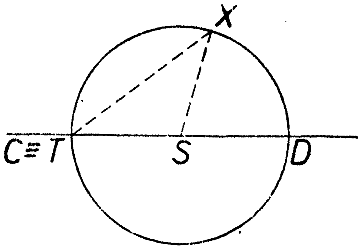
Obr. 82.



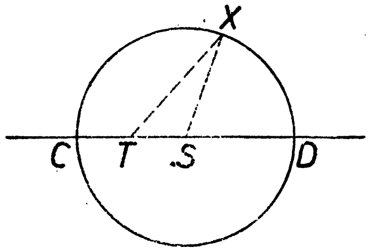
Obr. 84.

ϱ_1 je oblouk k_1. Celé geometrické místo těch bodů X, z nichž je viděti úsečku AB pod úhlem α, skládá se ze dvou oblouků souměrně sdružených vzhledem k AB (viz obr. 83 pro tupý úhel α, obr. 84 pro ostrý úhel α).

15. Dvě kružnice. Budiž dána kružnice k se středem S a bod T. Splynou-li body S, T, je vzdálenost TX stejná pro všecky body X na kružnici k. Jsou-li však S, T dva různé body, pak přímka ST protne kružnici k ve dvou bodech C, D; označení volme tak, aby bod T ležel na polopřímce SC (viz obr. 85 až 87). Pak je $\overline{TC} < \overline{TD}$ a pro každý jiný bod X na kružnici k je $\overline{TC} < \overline{TX} < \overline{TD}$. Neboť v $\triangle\, STX$ je strana TX jednak menší než součet stran $\overline{ST}$ a $\overline{SX} = \overline{SD}$, t. j. menší než $\overline{TD}$, jednak je strana $\overline{TX}$ větší než rozdíl stran $\overline{ST}$ a $\overline{SX} = \overline{SC}$, t. j. větší než $\overline{TC}$. Tedy ze všech bodů kružnice k je bod C nejblíže k bodu T, bod D nejdále od bodu D.

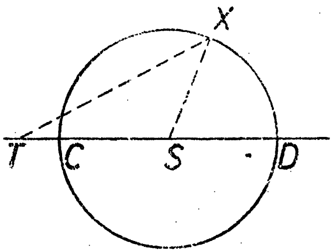


Obr. 85.

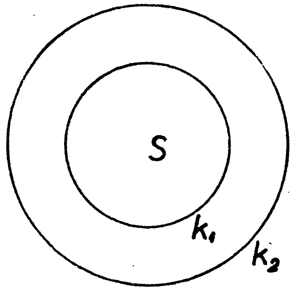


Obr. 86.

Mějme nyní dány dvě různé kružnice k_1, k_2 se středy S_1, S_2 a poloměry r_1, r_2. Splynou-li oba středy S_1, S_2 (viz obr. 88), pravíme, že kružnice k_1, k_2 jsou **soustředné**; obě kružnice nemají žádný společný bod a je-li na př. $r_1 < r_2$, leží celá kružnice k_1 uvnitř k_2, která zase leží celá vně k_1.

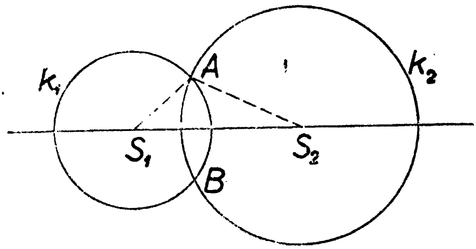


Obr. 87.

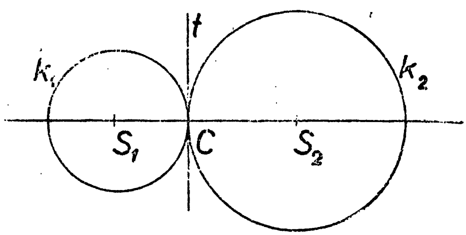


Obr. 88.

V případě, že středy S_1, S_2 jsou od sebe různé, může býti $r_1 = r_2$; jsou-li však poloměry různé, budiž $r_1 < r_2$. Mají-li kružnice k_1, k_2 dva různé společné body A, B, je AB společná tětiva obou kružnic, takže osa úsečky AB musí procházeti i bodem S_1 i bodem S_2, t. j. přímka S_1S_2 je osou úsečky AB. Z toho plyne, že body A, B jsou navzájem souměrně sdružené vzhledem k přímce S_1S_2. Kružnice k_1, k_2 nemohou tedy míti více než dva společné body, neboť kdyby A, B, C byly tři různé společné body, pak by k bodu A byl vzhledem k přímce S_1S_2 souměrně sdružený i bod B i bod C a to je nemožné. Jsou-li dva různé společné body A, B, pak z jejich souměrnosti vzhledem k přímce S_1S_2 plyne, že žádný z nich neleží na této přímce a proto mají obě kružnice v bodě A (a stejně i v bodě B) různé tečny, neboť v bodě A stojí kolmo na tečně kružnice k_1 přímka S_1A a na tečně kružnice k_2 jiná přímka S_2A. Pravíme, že kružnice k_1, k_2 se **protínají** v bodech A, B (viz obr. 89). V $\triangle S_1S_2A$ je strana S_1S_2 menší než součet a větší než rozdíl druhých dvou stran, t. j.



Obr. 89.



Obr. 90.

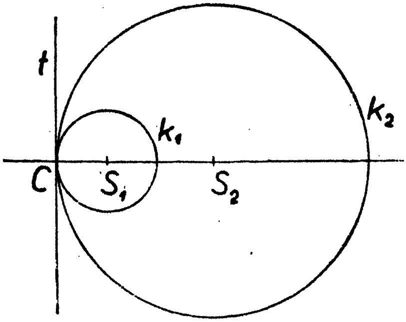
$$r_2 - r_1 < \overline{S_1S_2} < r_1 + r_2. \qquad (1)$$

Předpokládejme dále, že kružnice k_1, k_2 mají jediný bod C společný. Bod C musí ležeti na přímce S_1S_2, neboť jinak by bod souměrně sdružený s bodem C vzhledem k S_1S_2 byl druhý společný bod. Obě kružnice se **dotýkají** v bodě C, neboť tečna t obou v bodě C musí býti kolmá k přímce S_1S_2. Jestliže bod C leží uvnitř úsečky S_1S_2 (viz obr. 90), máme **vnější dotyk.** Je-li bod X kružnice k_1 různý od C, jest $\overline{S_2X} > \overline{S_2C} = r_2$. Proto kružnice k_1 leží až na bod dotyku C vně kružnice k_2 a podobně leží kružnice k_2 až na bod dotyku C vně kružnice k_1. Každá z obou kružnic k_1, k_2 leží v jiné polorovině vyťaté společnou tečnou t. Zřejmě

$$\overline{S_1S_2} = r_1 + r_2. \qquad (2)$$

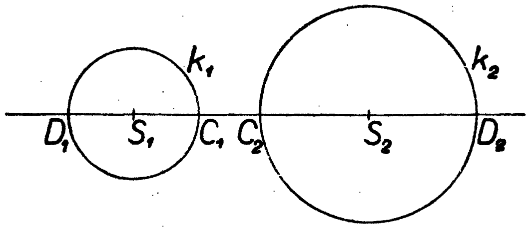
Jestliže bod C leží vně úsečky S_1S_2 (viz obr. 91), máme **vnitřní dotyk.** Je-li X bod kružnice k_1 různý od bodu C, jest $\overline{S_2X} < \overline{S_2C} = r_2$. Proto kružnice k_1 leží až na bod dotyku C uvnitř kružnice k_2. Je-li Y bod kružnice k_2 různý od bodu C, jest $\overline{S_1Y} > \overline{S_1C} = r_1$. Proto kružnice k_2 leží až na bod dotyku C vně kružnice k_1. Obě kružnice k_1, k_2 leží v téže polorovině vyťaté společnou tečnou t. Zřejmě

$$\overline{S_1S_2} = r_2 - r_1. \tag{3}$$



Obr. 91.

Předpokládejme konečně, že kružnice k_1, k_2 nemají žádný společný bod. Přímka S_1S_2 protne k_1 v bodech C_1, D_1, k_2 v bodech C_2, D_2 různých od bodů C_1, D_1. Body C_1, D_1 leží buďto oba uvnitř úsečky C_2D_2 nebo oba vně úsečky C_2D_2. Neboť jinak by ležel z bodů C_1, D_1 kružnice k_1 jeden uvnitř a druhý vně kružnice k_2 a potom by se kružnice k_1, k_2 protínaly. Podobně body C_2, D_2 leží oba vně úsečky C_1D_1. (Nemohou ležeti oba uvnitř úsečky C_1D_1, neboť pak by bylo $2r_2 = \overline{C_2D_2} < \overline{C_1D_1} = 2r_1$.) Jsou tedy jen dvě možnosti. Buďto (viz obr. 92) leží úsečky C_1D_1, C_2D_2 každá vně druhé. Při vhodném označení leží úsečka C_1C_2 uvnitř úsečky D_1D_2. Ze všech bodů kružnice k_1 leží C_1 nejblíž k S_2 a protože $\overline{C_1S_2} > r_2$, je celá kružnice k_1 vně kružnice k_2 a podobně je i celá kružnice k_2 vně kružnice k_1.



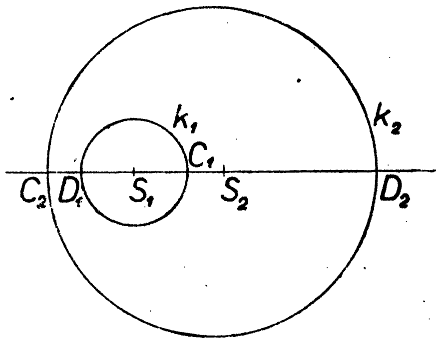
Obr. 92.

Ježto $\overline{S_1S_2} = \overline{S_1C_1} + \overline{S_2C_2} + \overline{C_1C_2}$, je

$$\overline{S_1S_2} > r_1 + r_2. \tag{4}$$

Nebo (viz obr. 93) leží úsečka C_1D_1 uvnitř úsečky C_2D_2. Při vhodném označení leží bod C_1 na polopřímce S_1S_2 a bod C_2 na polopřímce S_2S_1. Ze všech bodů kružnice k_1 leží bod D_1 nejdále od bodu S_2 a protože $\overline{D_1S_2} < r_2$, je celá kružnice k_1 uvnitř kružnice k_2. Ze všech bodů kružnice k_2 leží bod C_2 nejblíže bodu S_1 a protože $\overline{C_2S_1} > r_1$, je celá kružnice k_2 vně kružnice k_1. Ježto $\overline{S_1S_2} = \overline{S_2C_2} - \overline{S_1D_1} - \overline{C_2D_1}$, je

$$\overline{S_1S_2} < r_2 - r_1. \qquad (5)$$



Obr. 93.

Shledali jsme, že může nastat jeden z pěti případů a v každém z nich jsme nalezli pro délku $\overline{S_1S_2}$ jeden ze vztahů (1) až (5). Protože jistě platí právě jeden ze vztahů (1) až (5), můžeme výsledek vysloviti takto: Dvě kružnice k_1, k_2 (středy S_1, S_2, poloměry $r_1 \leq r_2$) mají paterou možnou polohu:

[1] $r_2 - r_1 < \overline{S_1S_2} < r_1 + r_2$, kružnice se protínají;

[2] $\overline{S_1S_2} = r_1 + r_2$, kružnice mají vnější dotyk;

[3] $\overline{S_1S_2} = r_2 - r_1$, kružnice mají vnitřní dotyk;

[4] $\overline{S_1S_2} > r_1 + r_2$, každá z obou kružnic je celá vně druhé;

[5] $\overline{S_1S_2} < r_2 - r_1$, menší kružnice je celá uvnitř větší, větší je celá vně menší. U soustředných kružnic je $\overline{S_1S_2} = 0$ a nastane případ [5].

Mimo to si ještě zaznamenejme tento důležitý výsledek našich úvah: **Dotýkají-li se dvě kružnice, leží bod dotyku na přímce spojující středy obou kružnic. Dotyk je vnější, leží-li bod dotyku uvnitř úsečky spojující středy, a je vnitřní, leží-li bod dotyku na prodloužení této úsečky.**

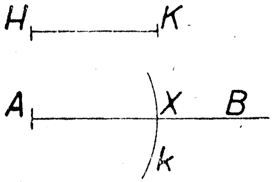
16. Euklidovské konstrukce. Jak známo, nazýváme euklidovskou takovou konstrukci, při které se stále užívá pouze dvou základních výkonů:

(1) narýsovati přímku, která prochází dvěma danými body,

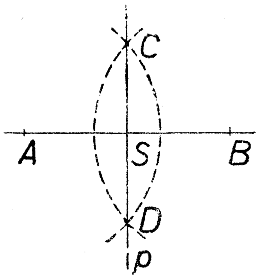
(2) narýsovati kružnici, která má daný střed a daný poloměr.

Nejprve si zopakujeme několik nejjednodušších euklidovských konstrukcí, na které se potom převádějí konstrukce složitější. Nejprostší je tato úloha (viz obr. 94): Na danou polopřímku AB nanésti úsečku AX rovnou dané úsečce HK. Sestrojíme kružnici k se středem A a poloměrem HK; k protne přímku AB ve dvou bodech, z nichž ten, který leží na polopřímce AB, je žádaný bod X.

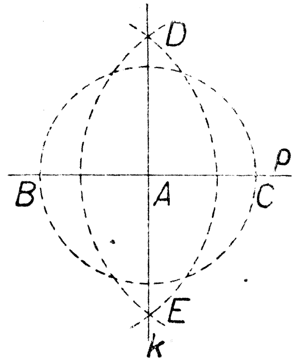
Některé úlohy se euklidovsky řeší velmi snadno pomocí osové souměrnosti: Jsou to zejména tyto základní úlohy: (1) Sestrojiti



Obr. 94.

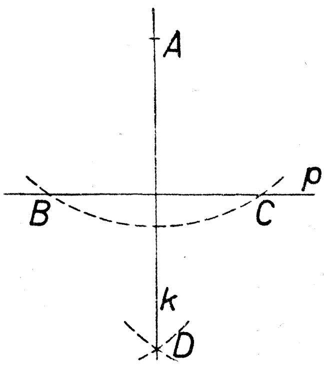


Obr. 95.

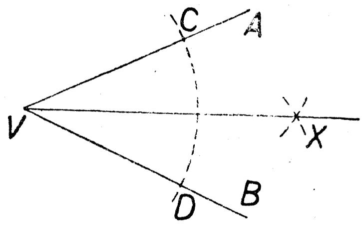


Obr. 96.

osu p dané úsečky AB (viz obr. 95). (2) Sestrojiti střed S dané úsečky AB (viz zase obr. 95). (3) K dané přímce p vztyčiti kolmici k v daném bodě A přímky p (viz obr. 96). (4) Na danou přímku p spustiti kolmici k s daného bodu A mimo přímku p (viz obr. 97). (5) Sestrojiti osu VX daného úhlu $\sphericalangle AVB$ (viz obr. 98). Popište všecky tyto konstrukce a odůvodněte jejich správnost známými vlastnostmi osové souměrnosti!



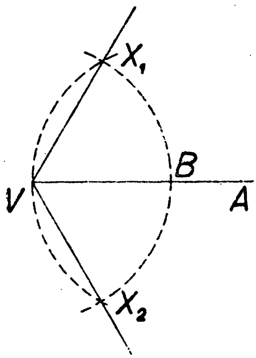
Obr. 97.



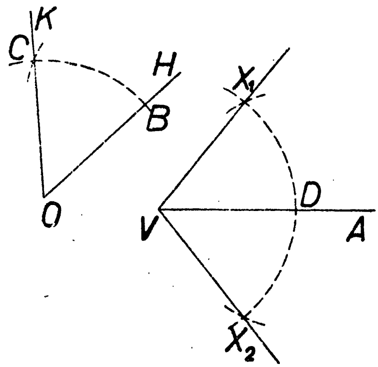
Obr. 98.

V obr. 99 je řešena úloha: Sestrojiti úhel $\sphericalangle AVX = 60°$, je-li dáno jedno rameno VA. Popište a odůvodněte konstrukci!

V obr. 100 je řešena úloha: Sestrojiti úhel $\sphericalangle AVX$ rovný danému $\sphericalangle HOK$, je-li dáno jedno rameno VA. Popište a odůvodněte konstrukci! V obr. 101 je řešena úloha: Daným bodem A vésti rovnoběžku k dané přímce p. Na přímce p zvolíme libovolně body B, C. Kružnice se středem A a poloměrem BC a kruž-

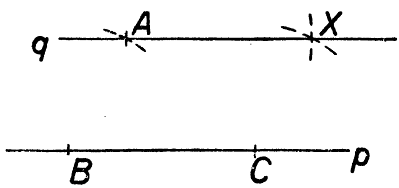


Obr. 99.



Obr. 100.

nice se středem C a poloměrem AB se protnou ve dvou bodech souměrně sdružených vzhledem k přímce AC. Budiž X ten z nich, který je od bodu B oddělen přímkou AC. Vznikne čtyrúhelník $ABCX$, jehož protější strany jsou si rovny; je to rovnoběžník, pročež přímka AX je žádaná rovnoběžka q.

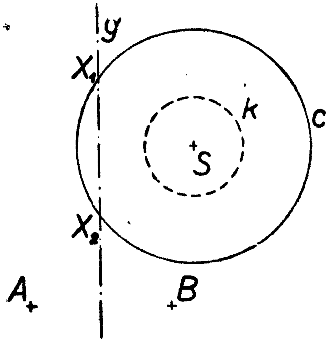


Obr. 101.

Pomocí uvedených základních úloh řešíme snadno velkou řadu úloh jiných. Budiž na př. úkolem sestrojiti k přímce p rovnoběžku v dané vzdálenosti HK. Zvolíme bod A libovolně na přímce p, vztyčíme v něm kolmici k k přímce p, na k naneseme $\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = \overline{HK}$ a vedeme body B_1, B_2 přímky q_1, q_2 rovnoběžně s p. Přímky q_1, q_2 dávají řešení úkolu. Proveďte konstrukci třeba s volbou $\overline{HK} =$ $= 3$ cm! Jiným úkolem budiž třeba konstrukce úhlu $\sphericalangle AVX =$ $= 75°$ s daným ramenem VA. Sestrojíme napřed $\sphericalangle AVB = 90°$, $\sphericalangle AVC = 60°$ tak, že body B, C nejsou od sebe odděleny přímkou

VA; osa VX úhlu $\sphericalangle BVC$ dá žádaný $\sphericalangle AVX$. Proveďte a odůvodněte konstrukci!

Při řešení konstruktivních úloh se často užívá **geometrických míst**. Nejjednodušší je tento případ. Budiž dána čára c a budiž úkolem sestrojiti na c bod X tak, aby měl určitou vlastnost. Všecky body X mající tu vlastnost vyplní nějaké geometrické místo g. Narýsujeme g a hledané body X jsou průsečíky obou čar c a g. Na př. buďtež dány (viz obr. 102) dva body A, B a kružnice c se středem S. Úkolem je sestrojiti na c bod X tak, aby bylo $\overline{AX} = \overline{BX}$. Geometrické místo všech bodů X, pro které platí $\overline{AX} = \overline{BX}$, je osa g úsečky AB, kterou umíme euklidovsky sestrojiti. Hledané body jsou průsečíky kružnice c s přímkou g. V obr. 102 jsou dva takové body X_1, X_2, t. j. úloha má dvě řešení. Kdyby však kružnice c byla nahrazena menší soustřednou kružnicí k, neměla by úloha žádné řešení, a kdyby kružnice c byla nahrazena (v obr. 102 nenarýsovanou) soustřednou kružnicí, jejímž poloměrem by byla vzdálenost bodu S od přímky g, měla by úloha jediné řešení. Táž obecná úloha nemusí tedy při různých polohách daných útvarů míti vždy týž počet řešení.



Obr. 102.

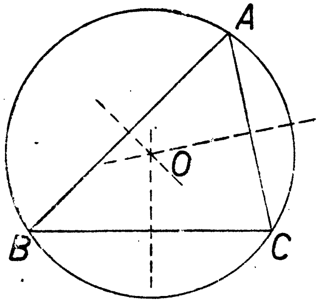
Velmi důležitá je **metoda dvou geometrických míst**. Hledajíce touto metodou bod X, který vyhovuje daným podmínkám, vynecháme jednu podmínku a najdeme, že body vyhovující ostatním podmínkám úlohy vyplní geometrické místo g_1; potom vynecháme jinou podmínku a najdeme obdobně jiné geometrické místo g_2. Hledané body X jsou průsečíky čar g_1, g_2. Budiž na př. úkolem najíti bod X stejně vzdálený od tří daných bodů A, B, C, mezi sebou různých. Podmínky pro bod X jsou

$$\overline{AX} = \overline{BX} = \overline{CX}; \tag{1}$$

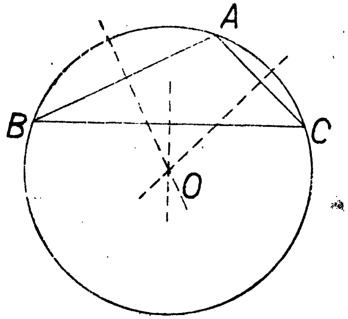
vynecháme-li bod C, máme jako geometrické místo g_1 osu úsečky AB; vynecháme-li bod B, máme jako geometrické místo g_2 osu úsečky AC. Hledaný bod X je průsečík přímek g_1, g_2. Jestliže dané body A, B, C

leží všecky na jedné přímce, jest $g_1 \parallel g_2$ a daná úloha nemá žádné řešení. Jestliže však body A, B, C neleží na přímce, jsou přímky g_1, g_2 různoběžné a daná úloha má jediné řešení.

I když při původním znění úlohy nejde o stanovení bodu, nýbrž kružnice, přímky a pod., přece lze zpravidla úlohu upraviti tak, že v novém znění běží o určení bodu X, který vyhovuje daným podmín-

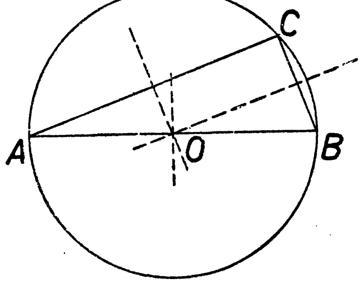


Obr. 103.



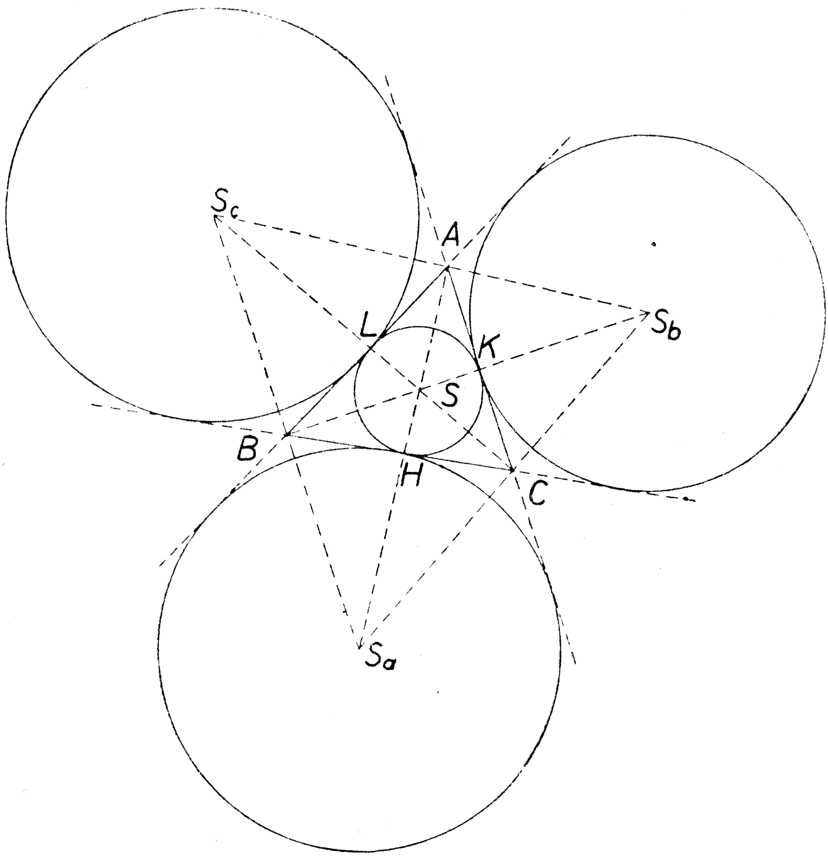
Obr. 104.

kám. Máme-li na př. sestrojiti kružnici opsanou danému trojúhelníku ABC a označíme-li si X střed hledané kružnice, pak máme určiti bod X vyhovující hořejším podmínkám (1), takže naše úloha má jediné řešení; viz obr. 103 až 105, ve kterých střed opsané kružnice je jako obvykle označen O. Bod O jsme dostali jako průsečík os stran AB, AC, ale prochází jím ovšem také osa třetí strany BC. Úhel α je v opsané kružnici obvodový úhel nad tětivou BC a proto O leží v polorovině BCA, je-li α úhel ostrý, a v polorovině opačné, je-li α úhel tupý (viz str. 49). Proto u ostroúhlého $\triangle ABC$ leží O uvnitř trojúhelníka, u tupoúhlého vně. U pravoúhlého $\triangle ABC$ je O střed přepony.



Obr. 105.

Hledejme dále kružnici vepsanou danému trojúhelníku ABC. Střed S hledané kružnice leží uvnitř $\triangle ABC$ a jeho vzdálenosti od přímek AB, AC, BC jsou rovny poloměru ϱ vepsané kružnice. Máme tedy určiti uvnitř trojúhelníka bod S tak, aby jeho vzdálenosti od tří přímek AB, AC, BC byly si rovny. Geometrické místo bodů uvnitř trojúhelníka stejně vzdálených od AB jako od AC je úsečka AH, kde AH půlí úhel α. Geometrické místo bodů uvnitř trojúhelníka stejně vzdálených od AB jako od BC je úsečka BK, kde BK

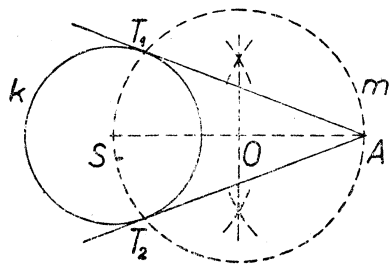


Obr. 106.

půlí úhel β. Je tedy jediná kružnice vepsaná a její střed S je průsečík úseček AH, BK. Bod S leží ovšem také na úsečce CL, kde CL půlí úhel γ. Bod S není jediný bod stejně vzdálený od tří přímek AB, AC, BC, nýbrž jsou ještě tři další takové body S_a, S_b, S_c (viz obr. 106). Geometrické místo g_1 bodů stejně vzdálených od AB jako od AC se skládá z přímky AH a z kolmice na ni vztyčené v bodě A; geometrické místo g_2 bodů stejně vzdálených od AB jako od BC se skládá z přímky BK a z kolmice na ni vztyčené v bodě B; čáry g_1, g_2 se protnou ve čtyřech bodech S, S_a, S_b, S_c. Body S_a, S_b, S_c jsou středy kružnic vně vepsaných trojúhelníku ABC.

17. Tečny kružnice z daného bodu; společné tečny dvou kružnic. Při řešení konstruktivních úloh je účelné postupovati takto. Nejprve provedeme rozbor úlohy, ve kterém si myslíme úlohu už řešenu, načrtneme si obrazec od ruky a hledáme v něm takové vztahy, které by mohly vésti ke konstrukci; často si pomáháme tím, že vedeme různé pomocné čáry. Výsledek rozboru je konstrukce, kterou provádíme zpravidla euklidovsky. Protože však při rozboru vycházíme od neodůvodněného předpokladu, že daná úloha je řešitelná, je ve složitějších případech třeba ještě důkazu, že nalezená konstrukce je správná. K dokonalému řešení konstruktivní úlohy patří také determinace, t. j. stanovení podmínek pro vzájemnou polohu daných prvků, za kterých je úloha řešitelná, a stanovení počtu řešení pro jednotlivé možné polohy. Ale u některých úloh, které jinak nejsou příliš nesnadné, je determinace pro školu příliš obtížná.

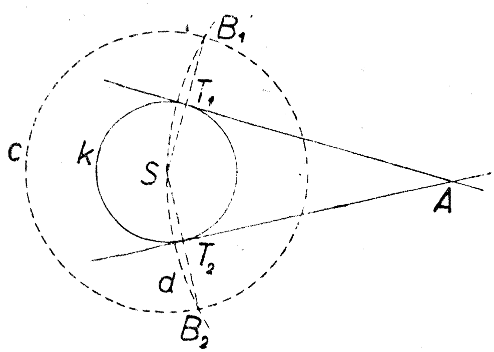
Budiž dána kružnice k se středem S a mimo kružnici bod A. Úkolem budiž vésti z bodu A tečnu ke kružnici k. Protože tečna leží až na dotyčný bod vně kružnice, může býti úloha řešitelná pouze tehdy, jestliže bod A leží vně kružnice k. Při rozboru si zvolíme kružnici k se středem S, na ní libovolný bod T a v něm vedeme tečnu, na které si zvolíme bod A. Pozorujeme, že úsečku AS je viděti z bodu T pod úhlem 90°; geometrické místo bodů, z nichž je viděti AS pod úhlem 90°, je však kružnice nad průměrem AS. Tím jsme vedeni k této konstrukci (viz obr. 107). Nad průměrem AS sestrojíme pomocnou kružnici m (její střed O je střed úsečky AS), která protne kružnici k ve dvou bodech T_1, T_2. Přímky AT_1, AT_2 jsou hledané tečny. Nalezená konstrukce je správná, neboť podle Thaletovy věty



Obr. 107.

jsou úhly $\sphericalangle ST_1A$, $\sphericalangle ST_2A$ pravé, takže přímka T_1A je tečnou kružnice k v bodě T_1 a podobně i T_2A. Úloha má vždy dvě řešení, neboť ježto pomocná kružnice m prochází bodem S uvnitř k a bodem A vně k, protne kružnici k ve dvou bodech T_1, T_2. Tedy každým vnějším bodem A procházejí dvě tečny ke kružnici k. Ježto S, A jsou středy kružnic k, m, leží průsečíky T_1, T_2 souměrně vzhledem k přímce SA. Z toho plyne: Obě tečny vedené z bodu A mají stejnou délku, rozumíme-li **délkou tečny** vzdálenost bodu A od bodu dotyku. Polopřímka AS půlí úhel tečen $\sphericalangle T_1AT_2$.

Nalezené řešení dané konstruktivní úlohy není ovšem jediné možné řešení. Odvoďme si řešení jiné! Při rozboru zvolíme zase kružnici k se středem S, na ní bod T, v něm tečnu a na tečně bod A. Zaveďme pomocný bod B souměrně sdružený s bodem S vzhledem k přímce AT. Pozorujeme, že $\overline{AB} = \overline{AS}$, $\overline{SB} = 2 \, . \, \overline{ST}$. Tím jsme vedeni k této konstrukci (viz obr. 108). Sestrojíme dvě pomocné kružnice c, d, z nichž c má střed S a poloměr $2r$ rovný průměru kružnice k, d má střed A a poloměr rovný SA. Kružnice c, d se protnou ve dvou bodech B_1, B_2 a průsečíky T_1, T_2 úseček SB_1, SB_2 s kružnicí k jsou body dotyku hledaných tečen. Odůvodněte sami, že nalezená konstrukce je správná a dokažte i touto cestou, že úloha má vždy dvě řešení!

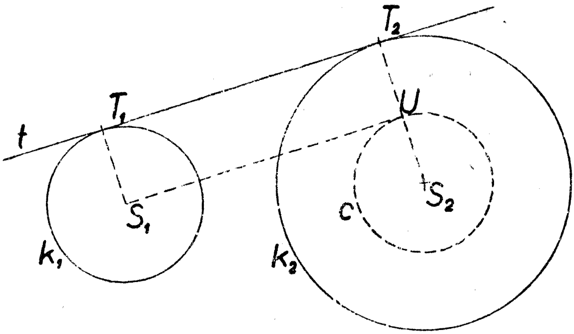


Obr. 108.

Společná tečna t **dvou kružnic** k_1, k_2 (středy S_1, S_2) se jmenuje **vnější,** leží-li obě kružnice v téže polorovině vyťaté přímkou t, a jmenuje se **vnitřní,** leží-li každá z obou kružnic v jiné polorovině vyťaté přímkou t. V obr. 109 jsou T_1, T_2 body dotyku vnější společné tečny t dvou kružnic k_1, k_2; poloměr r_1 kružnice k_1 je menší než poloměr r_2 kružnice k_2. Uvnitř úsečky S_2T_2 určeme bod U tak, že $\overline{T_2U} = \overline{T_1S_1}$. Úsečky T_2U, T_1S_1 jsou obě kolmé na t, jsou tedy rovnoběžné a jsou také stejně dlouhé. Proto je $S_1T_1T_2U$ rovnoběžník, takže $S_1U \parallel T_1T_2$, tedy $S_1U \perp S_2U$; mimo to je $\overline{T_1S_1} = \overline{T_2U}$, pročež $\overline{S_2U} = r_2 - r_1$.

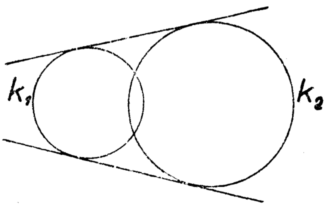
Vedeme-li tedy pomocnou kružnici c se středem S_2 a poloměrem $r_2 - r_1$, je S_1U tečna kružnice c s bodem dotyku U.

Obráceně budiž U takový bod na kružnici c se středem S_2 a poloměrem $r_2 - r_1$, že tečna kružnice c v bodě U prochází bodem S_1. Bod U leží uvnitř k_2, takže na prodloužení úsečky S_2U za bod U leží bod T_2 kružnice k_2. Určeme bod T_1 kružnice k_1 tak, že $S_1T_1 \parallel S_2T_2$ a že body

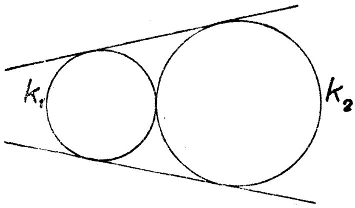


Obr. 109.

T_1, T_2 nejsou od sebe odděleny přímkou S_1S_2. Vznikne rovnoběžník $S_1T_1T_2U$ a ježto $S_1U \perp S_2U$, je $T_1T_2 \perp S_1T_1$, $T_1T_2 \perp S_2T_2$. Proto T_1T_2 je společná tečna kružnic k_1, k_2 a T_1, T_2 jsou její body dotyku. Body T_1, T_2 nejsou od sebe odděleny přímkou S_1S_2 a proto běží o vnější společnou tečnu.

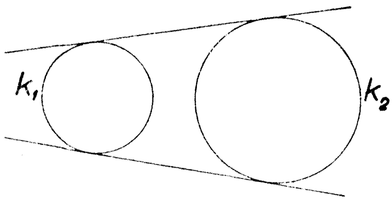


Obr. 110.



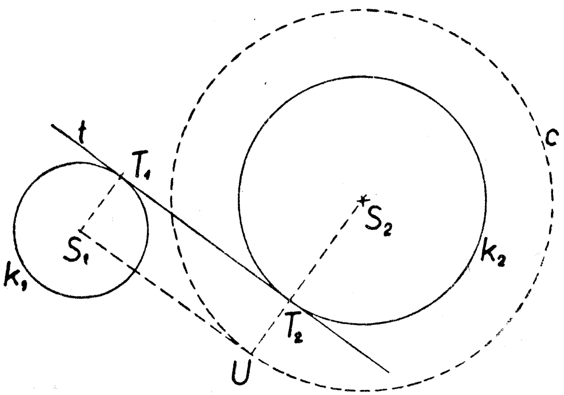
Obr. 111.

V případě obr. 109 leží bod S_1 vně pomocné kružnice c a proto jím procházejí dvě tečny ke kružnici c a kružnice k_1, k_2 mají dvě vnější společné tečny. Tento případ nastane tehdy a jen tehdy, jestliže $\overline{S_1S_2} > r_2 - r_1$, t. j. (viz obr. 110 až 112) jestliže kružnice k_1, k_2 buďto se protínají, nebo mají vnější dotyk, nebo každá z nich leží vně druhé. Jestliže však bod S_1 leží uvnitř kružnice c, nemají kružnice k_1, k_2 žádnou vnější společnou tečnu; tento případ nastane tehdy a jen tehdy, jestliže $\overline{S_1S_2} < r_2 - r_1$, t. j. jestliže k_1 leží uvnitř k_2. Jestliže konečně $\overline{S_1S_2} = r_2 - r_1$, mají kružnice k_1, k_2 vnitřní dotyk v určitém bodě; M kolmice vztyčená v M k přímce S_1S_2 je jediná vnější společná tečna a oba body dotyku T_1, T_2 splynou s bodem M, se kterým splyne také bod U.



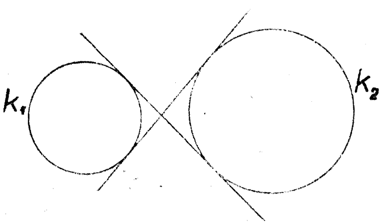
Obr. 112.

Proberte sami v textu vyloučený případ, že poloměry r_1, r_2 kružnic k_1, k_2 jsou si rovny! Pomocná kružnice c se v tomto případě smrští na bod S_2, se kterým splyne také bod U, a vnější společné tečny kružnic k_1, k_2 jsou obě rovnoběžné s přímkou S_1S_2.



Obr. 113.

Pro vnitřní společné tečny platí obdobná úvaha, kterou už můžete provésti sami. Viz obr. 113, který se liší od obr. 109 hlavně tím, že poloměr pomocné kružnice c je nyní $r_1 + r_2$. Leží-li bod S_1 vně kružnice c, máme dvě vnitřní společné tečny. Tento případ nastane tehdy a jen tehdy, jestliže $\overline{S_1S_2} > r_1 + r_2$, t. j. (viz obr. 114) jestliže každá z obou kružnic k_1, k_2 leží vně druhé. Leží-li S_1 uvnitř c, nemají k_1, k_2 žádnou vnitřní společnou tečnu. Tento případ nastane tehdy a jen tehdy, jestliže $\overline{S_1S_2} < r_1 + r_2$, t. j. jestliže kružnice k_1, k_2 se protínají nebo mají vnitřní dotyk nebo leží jedna uvnitř druhé. Jest-



Obr. 114.

liže konečně $\overline{S_1S_2} = r_1 + r_2$, mají k_1, k_2 vnější dotyk v určitém bodě M a společná tečna v bodě M je jediná vnitřní společná tečna.

Cvičení.

a) *Tětivy a tečny.*

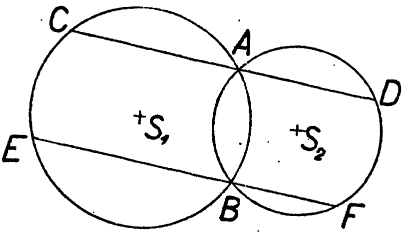
79. Na kružnici jsou dány čtyři body v pořádku $ABCD$. Je-li $\overline{AB} = \overline{CD}$, dokažte pomocí středových úhlů, že $\overline{AC} = \overline{BD}$!

80. Kružnice k_1, k_2 se protnou v bodech A, B. Přímka $p \parallel AB$ protne k_1 v bodech H, M, k_2 v bodech K, L; na přímce p máme pořádek $HKLM$. Dokažte, že $\overline{HK} = \overline{LM}$!

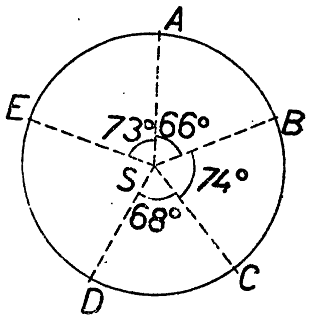
81. Kružnice k_1, k_2 (středy S_1, S_2) se protnou v bodech A, B. Rovnoběžka k S_1S_2 vedená bodem A protne k_1 znovu v bodě C_1, k_2 v bodě C_2. Dokažte, že $\overline{C_1C_2} = 2 . \overline{S_1S_2}$!

82. Je dán čtyrúhelník $ABCD$. Sestrojte dvě soustředné kružnice tak, aby prvá procházela body A, B, druhá body C, D! Kdy je to nemožné?

83. V obr. 115 je $CD \parallel EF$. Dokažte, že $\overline{CD} = \overline{EF}$!



Obr. 115.



Obr. 116.

84. AB je tětiva kružnice (střed S). P je pata kolmice spuštěné s bodu A na tečnu v bodě B. Dokažte, že AB půlí $\sphericalangle SAP$!

85. Tečna kružnice v bodě A protne soustřednou kružnici v bodech B, C. Dokažte, že $\overline{AB} = \overline{AC}$!

86. AB je průměr kružnice, na které leží bod C. Paty kolmic spuštěných s bodů A, B na tečnu v bodě C jsou P, Q. Dokažte, že $\overline{CP} = \overline{CQ}$!

87. Tečny kružnice (střed S) v bodech A, B se protnou v bodě C.

a) Dokažte pomocí shodných trojúhelníků, že $\overline{AC} = \overline{BC}$ a že CS je osa $\sphericalangle ACB$!

b) Jestliže kolmice vztyčená v bodě C k přímce BC protne přímku AS v bodě D, dokažte, že $\overline{SD} = \overline{CD}$!

V obr. 116 až 118 bod S je střed kružnice.

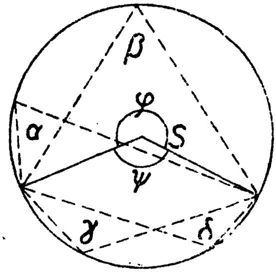
88. (Viz obr. 116.) Seřaďte úsečky AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE od nejmenší k největší!

89. V odst. 13 bylo dokázáno, že dvě sobě rovné tětivy jsou stejně vzdáleny od středu kružnice a že menší tětiva je vzdálenější od středu kružnice. Dokažte to jinak pomocí Pythagorovy věty!

b) *Obvodové úhly.*

90. (Viz obr. 117.)

a) Je-li $\psi = 130°$, určete α, β!
b) Je-li $\beta = 74°$, určete ψ, α!
c) Je-li $\alpha = 66°$, určete β!
d) Je-li $\varphi = 230°$, určete γ, δ!
e) Je-li $\alpha = 64°$, určete ψ, φ, δ!
f) Je-li $\psi = 126°$, určete β, δ!
g) Je-li $\alpha = 58°$, určete δ!
h) Je-li $\gamma = 110°$, určete β!



Obr. 117.

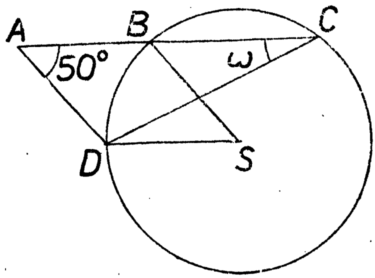
91. V obr. 118 *ABSD* je rovnoběžník. Určete ω!

92. Úhel α rovnoramenného $\triangle ABC$ je roven 32°. Určete středové úhly nad oblouky, na které strany trojúhelníka rozdělí opsanou kružnici. (Kterákoli strana může býti základnou!)

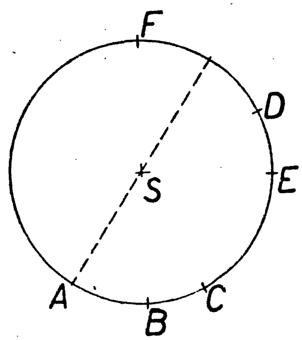
93. V obrazu 119 *S* je střed kružnice, $\sphericalangle ASB = 36°$, $\sphericalangle ASC = 60°$, $\sphericalangle ASD = 150°$.

a) Určete $\sphericalangle AFB$, $\sphericalangle BFC$, $\sphericalangle AED$, $\sphericalangle CED$!
b) Je-li $\sphericalangle ASF = 2 \,.\, \sphericalangle DSF$, určete $\sphericalangle DAF$!

94. *ABCDE* je pravidelný pětiúhelník. Určete úhly trojúhelníka *ABD*!



Obr. 118.



Obr. 119.

95. Určete úhly trojúhelníka, který dostanete, spojíte-li na hodinách číslice 2, 6, 9!

96. Dokažte, že na hodinách spojnice číslic 1, 4 stojí kolmo na spojnici číslic 2, 9!

97. Dvě tětivy *AB, CD* se protínají kolmo uvnitř kružnice. Je-li $\sphericalangle BAC =$ $= 35°$, určete $\sphericalangle ABD$!

98. Body C, D leží na kružnici s průměrem AB.

a) Je-li $\sphericalangle ADC = 127°$, určete $\sphericalangle BAC$!

b) Je-li $\sphericalangle BCD = 25°$, určete $\sphericalangle ABC$!

99. Čtyrúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice.

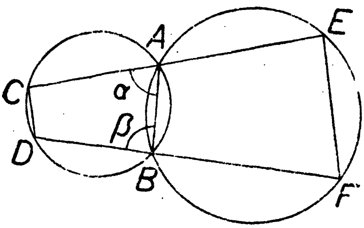
a) Je-li $\sphericalangle ADC = 70°$, $\sphericalangle ACD = 50°$, určete $\sphericalangle CBD$!

b) Je-li N průsečík úhlopříček, $\sphericalangle BAC = 42°$, $\sphericalangle BNC = 114°$, $\sphericalangle ADB = 33°$, určete $\sphericalangle BCD$!

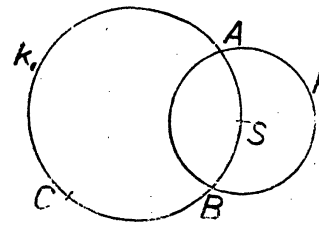
c) Je-li $\sphericalangle BAD = 98°$, $\sphericalangle ABC = 106°$, $\sphericalangle BDC = 50°$, určete ostrý úhel, jehož ramena leží v přímkách AC, BD!

100. Šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsán do kružnice. Dokažte, že

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 4R. \qquad \text{(Spojte } AD.\text{)}$$



Obr. 120.



Obr. 121.

101. V obr. 120 vyjádřete všecky úhly čtyrúhelníka $CDFE$ pomocí úhlů α, β! Z výsledku odvoďte, že $CD \parallel EF$!

102. $ABCD$ je rovnoběžník. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC protne přímku CD (mimo bod C ještě) v bodě E. Dokažte, že $\triangle ADE$ je rovnoramenný!

103. Dvě kružnice se protnou v bodech A, B. Jsou-li AC, AD průměry kružnic, dokažte, že body B, C, D leží na přímce! (Spojte AB.)

104. Zvolte si ostroúhlý trojúhelník EFG a libovolný bod L na straně EF. Určete na straně EG bod H a na straně FG bod K tak, aby bylo $\sphericalangle ELH = 60° = \sphericalangle FLK$. Trojúhelníku HKL opište kružnici, která protne přímku EF (mimo bod L ještě) v bodě M. Dokažte, že $\triangle HKM$ je rovnostranný!

105. Čtyrúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice. Je-li $\overline{AB} = \overline{CD}$, dokažte, že $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$!

106. Šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsán do kružnice. Je-li $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, dokažte, že $AF \parallel CD$! (Spojte AD.)

107. (Viz obr. 121, ve kterém S je střed kružnice k_2.) Dokažte, že CS je osa úhlu $\sphericalangle ACB$!

108. Na kružnici k máme čtyři body v pořádku $ABCD$. Dokažte, že osy úhlů $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BDC$ se protnou na kružnici k!

109. Sestrojte čtverec $ABCD$ (strana 5 cm) a vyčárkujte tu plochu, z jejichž bodů vidíte všecky strany čtverce pod úhly

a) menšími než 120°,

b) většími než 60°!

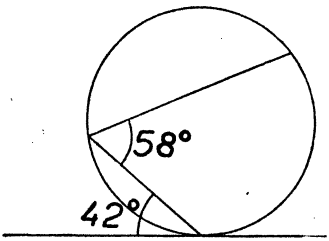
110. Sestrojte pravidelný šestiúhelník (strana 4 cm) a vyčárkujte tu plochu, z jejíchž bodů vidíte všecky strany šestiúhelníka pod úhly ostrými!

111. Narýsujte libovolný $\triangle\ ABC$. Zvolte libovolně: bod D na straně AB, bod E ma straně AC, bod F na straně BC. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ADE, BDF, CEF se protnou v jednom bodě K! Čemu se rovnají úhly $\sphericalangle\ DKE$, $\sphericalangle\ DKF$, $\sphericalangle EKF$?

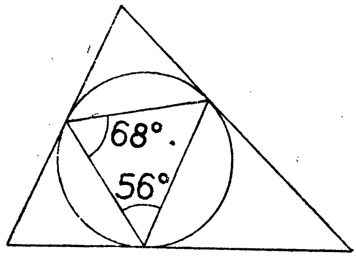
c) *Úsekové úhly.*

112. Určete všecky úhly, které vidíte v obr. 122!

113. Určete všecky úhly, které vidíte v obr. 123!



Obr. 122.



Obr. 123.

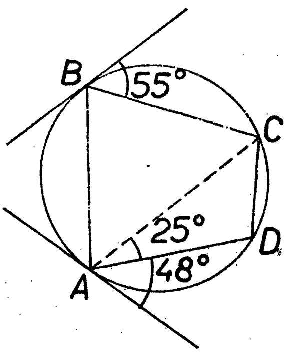
114. Určete všecky úhly čtyrúhelníka $ABCD$ v obr. 124!

115. V trojúhelníku ABC je $\beta = 2\alpha$. Dokažte, že tečna opsané kružnice v bodě C je rovnoběžná s osou úhlu β!

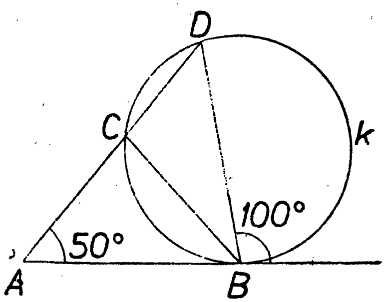
116. N je průsečík úhlopříček čtyrúhelníka $ABCD$ vepsaného do kružnice; k je kružnice opsaná trojúhelníku ABN. Dokažte, že tečna kružnice k v bodě N je rovnoběžná s přímkou CD!

117. Dokažte, že v obr. 125 je

a) $\overline{AC} = \overline{BC}$;
b) CD rovné poloměru kružnice k!



Obr. 124.



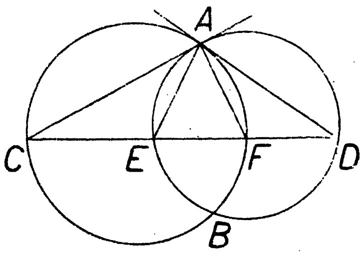
Obr. 125.

118. Body A, B, C, D leží na přímce p, bod E leží mimo p. Je-li $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BE} = \overline{CE}$, dokažte, že přímka AE je tečnou v bodě E ke kružnici opsané trojúhelníku BDE!

119. $\triangle ABC$ je vepsán do kružnice k (střed S); tečny kružnice k v bodech A, B se protnou v bodě D. Je-li $\sphericalangle ADB = 36°$, $\sphericalangle ASB = 3 \cdot \sphericalangle BSC$, určete $\sphericalangle CAD$. (Dvoje řešení.)

120. V obr. 126 jsou AC, AD tečny. Dokažte, že $\overline{AE} = \overline{AF}$!

121. $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Úsečky BD, CE se protnou v bodě F. Dokažte, že přímka BC je tečna kružnice opsané trojúhelníku BEF.



Obr. 126.

d) *Vzájemná poloha kružnic.*

122. Určete vzájemnou polohu dvou kružnic (středy S_1, S_2, poloměry r_1, r_2)!

a) $r_1 = 5$, $r_2 = 8$, $\overline{S_1S_2} = 10$;
b) $r_1 = 8$, $r_2 = 9$, $\overline{S_1S_2} = 18$;
c) $r_1 = 7$, $r_2 = 10$, $\overline{S_1S_2} = 3$;
d) $r_1 = 8$, $r_2 = 11$, $\overline{S_1S_2} = 2$;
e) $r_1 = 17$, $r_2 = 25$, $\overline{S_1S_2} = 42$.

123. Narýsujte kružnici k_1 (střed S_1, poloměr 25 mm) a kružnici k_2 (střed S_2, poloměr 4 cm, $\overline{S_1S_2} = 45$ mm).

a) Narýsujte všecky kružnice, které mají střed na přímce S_1S_2 a dotýkají se obou kružnic k_1, k_2! Jaké jsou jejich poloměry? (Čtyři řešení.)
b) Jak by se musil změnit poloměr kružnice k_2 (beze změny středu), aby se nová kružnice dotýkala kružnice k_1? (Dvě řešení.)
c) Jak by se musil posunout střed kružnice k_1 po přímce S_1S_2 (beze změny poloměru), aby se nová kružnice dotýkala kružnice k_2? (Čtyři řešení.)

124. $\triangle ABC$ je rovnostranný. Kolem každého vrcholu je opsána kružnice tak, že každé dvě se navzájem dotýkají; dotyk kružnic se středy A, B je vnější a obě ty kružnice jsou (až na bod dotyku) uvnitř třetí. Dokažte, že obě kružnice se středy A, B mají týž poloměr, který je třetinou poloměru kružnice se středem C!

125. Jsou dány dvě kružnice (středy S_1, S_2). Mimo to jsou dány další dvě kružnice (středy S_3, S_4), z nichž každá má vnější dotyk s oběma prvými. Dokažte, že

$$\overline{S_1S_3} + \overline{S_2S_4} = \overline{S_1S_4} + \overline{S_2S_3}!$$

126. Jestliže u rovnoběžníka $ABCD$ kružnice nad průměrem AB se dotýká kružnice nad průměrem CD, dokažte, že $ABCD$ je kosočtverec! (Spojte středy obou kružnic.)

e) *Geometrická místa.*

127. Určete geom. místo středů kružnic s daným poloměrem, které se dotýkají dané přímky!

128. Určete geom. místo středů kružnic s daným poloměrem, které mají s danou kružnicí vnější dotyk!

129. Určete geom. místo středů kružnic s daným poloměrem r, které mají s danou kružnicí poloměru ϱ vnitřní dotyk! Čím se liší při stejném rozdílu poloměrů případ $r > \varrho$ od případu $r < \varrho$? Co když $r = \varrho$?

130. Určete geom. místo středů kružnic, které procházejí dvěma danými body!

131. Určete geom. místo středů kružnic, které se dotýkají

a) dané přímky v daném bodě,

b) dané kružnice v daném bodě!

132. Určete geom. místo středů všech tětiv dané kružnice s poloměrem r, které mají danou délku $d < 2r$! Co když $d = 2r$?

133. Určete geometrické místo středů všech tětiv dané kružnice k, které procházejí bodem A daným na kružnici k!

134. Určete geom. místo středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných rovnoběžek!

135. Určete geom. místo středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných různoběžek!

f) *Různé konstrukce.*

136. Z daného součtu a rozdílu dvou úseček sestrojte tyto úsečky!

137. Z daného součtu a rozdílu dvou úhlů sestrojte tyto úhly!

138. Bodem daným vně nebo uvnitř úhlu veďte úsečku tak, aby vyťala z obou ramen úsečky sobě rovné!

139. Na dané přímce p určete bod stejně vzdálený ode dvou daných bodů A, B!

140. Na přímce protínající obě ramena úhlu určete bod stejně vzdálený od obou ramen!

141. Mezi obě ramena daného ostrého úhlu umístěte úsečku dané délky kolmo k jednomu rameni!

142. K dané přímce p veďte rovnoběžku q ve vzdálenosti 4 cm! Bodem A zvoleným mezi p, q veďte přímku tak, aby její část obsažená mezi p, q měla délku 6 cm!

143. Budiž dán $\triangle ABC$. Určete bod H na straně AB a bod K na straně AC tak, aby bylo $HK \parallel BC$, $\overline{BH} + \overline{CK} = \overline{HK}$. (Úsečka HK obsahuje bod S takový, že $\overline{BH} = \overline{HS}$, $\overline{CK} = \overline{KS}$. Jestliže rovnoběžka vedená bodem A s přímkou BC protne BS v bodě D, CS v bodě E, co platí o délkách AD, AE?)

144. Budiž dán $\triangle ABC$. Určete bod H na straně AB a bod K na straně

AC tak, aby bylo $HK \parallel BC$, $\overline{BH} = \overline{AK}$. (Jestliže $AKHD$ je rovnoběžník, pak osa úhlu α je rovnoběžná s BD.)

g) *Konstruktivní úlohy o kružnicích.*

145. Je dána kružnice k a bod A. Sestrojte kružnici se středem A, která půlí kružnici k!

146. Bodem A daným uvnitř kružnice k veďte tětivu tak, aby byla bodem A půlena!

147. Je dána tětiva AB kružnice k a je dán ostrý úhel α. Sestrojte tětivu CD kružnice k tak, aby byla tětivou AB půlena a svírala s ní úhel α! Pro jaké úhly α je úloha možná?

148. Uvnitř kružnice k je dán bod A. Veďte jím tětivu BC tak, aby rozdíl $\overline{AB} - \overline{AC}$ měl danou délku d! Pro jaké hodnoty je úloha možná?

149. Jsou dány body A, B. Veďte jimi kružnici s daným poloměrem r. Pro jaké hodnoty r je úloha možná?

150. Je dána přímka p a mimo ni bod A. Sestrojte kružnici s daným poloměrem r tak, aby procházela bodem A a dotýkala se přímky p. Pro jaké hodnoty r je úloha možná?

151. Je dána kružnice k (střed S, poloměr ϱ) a bod A vně kružnice k. Veďte bodem A kružnici daného poloměru r tak, aby měla s kružnicí k vnější dotyk! Dokažte, že úloha je možná tehdy a jen tehdy, jestliže $r \geqq \frac{1}{2}(\overline{SA} - \varrho)$ a proveďte konstrukci pro $\varrho = 3$ cm, $\overline{SA} = 5$ cm, $r = 25$ mm!

152. Je dána kružnice k (střed S, poloměr ϱ) a bod A vně kružnice k. Veďte bodem A kružnici daného poloměru $r > \varrho$ tak, aby měla s kružnicí k vnitřní dotyk! Dokažte, že úloha je možná tehdy a jen tehdy, jestliže $r \geqq \frac{1}{2}(\overline{SA} + \varrho)$ a proveďte konstrukci pro $\varrho = 3$ cm, $\overline{SA} = 5$ cm, $r = 55$ mm!

153. Je dána kružnice k (střed S, poloměr ϱ) a bod A uvnitř kružnice k. Veďte bodem A kružnici daného poloměru $r < \varrho$ tak, aby měla s kružnicí k vnitřní dotyk! Dokažte, že úloha je možná tehdy a jen tehdy, jestliže $\frac{1}{2}(\varrho - \overline{SA}) \leqq r \leqq \frac{1}{2}(\varrho + \overline{SA})$ a proveďte konstrukci pro $\varrho = 5$ cm, $\overline{SA} = 2$ cm a pro r rovné každé ze tří délek 2 cm, 25 mm, 35 mm!

154. Sestrojte kružnici daného poloměru tak, aby se dotýkala dvou daných různoběžek! Kolik je řešení?

155. Je dána kružnice k (střed S, poloměr ϱ) a její sečna p. Sestrojte kružnici daného poloměru r, která se dotýká přímky p a s kružnicí k má vnější dotyk! (Úloha má čtyři řešení, dvě z nich leží v polorovině pS, dvě v polorovině opačné.)

156. Je dána kružnice k (střed S, poloměr ϱ) a její sečna p. Sestrojte kružnici daného poloměru r, která se dotýká přímky p a s kružnicí k má vnitřní dotyk! [Úloha má v polorovině pS řešení tehdy a jen tehdy, jestliže $r \leqq \frac{1}{2}(\varrho + d)$, kde d je vzdálenost bodu S od přímky p; v polorovině opačné má úloha řešení tehdy a jen tehdy, jestliže $r \leqq \frac{1}{2}(\varrho - d)$.]

157. Je dána kružnice k (střed S, poloměr ϱ) a přímka p ve vzdálenosti $d > \varrho$ od bodu S. Sestrojte kružnici daného poloměru r, která se dotýká přímky

p a s kružnicí k má

a) vnější dotyk, b) vnitřní dotyk!

[Pro vnější dotyk je úloha řešitelná tehdy a jen tehdy, jestliže $r \geqq \frac{1}{2}(d - \varrho)$, pro vnitřní dotyk tehdy a jen tehdy, jestliže $r \geqq \frac{1}{2}(d + \varrho)$.]

158. Jsou dány kružnice k_1 (střed S_1, poloměr ϱ_1), k_2 (střed S_2 různý od S_1, poloměr $\varrho_2 \geqq \varrho_1$. Sestrojte kružnici daného poloměru r, která má s oběma kružnicemi k_1, k_2

a) vnější dotyk, b) vnitřní dotyk!

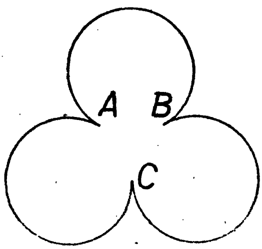
[Pro vnější dotyk je úloha vždy řešitelná, jestliže k_1, k_2 se protínají nebo se dotýkají a je nemožná, leží-li k_1 uvnitř k_2; leží-li k_1 vně k_2, je $r \geqq \frac{1}{2}(\overline{S_1S_2} - \varrho_1 - \varrho_2)$ podmínka pro řešitelnost. Pro vnitřní dotyk podmínka řešitelnosti je tato: $r \leqq \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 - \overline{S_1S_2})$, jestliže k_1 leží uvnitř k_2; $\frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 - \overline{S_1S_2}) \leqq r \leqq \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \overline{S_1S_2})$, jestliže k_1 a k_2 se protínají; $r \geqq \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2 + \overline{S_1S_2})$, jestliže k_1 leží vně k_2.]

159. Jsou dány dvě kružnice k_1 (střed S_1, poloměr ϱ_1), k_2 (střed S_2, poloměr ϱ_2). Sestrojte kružnici daného poloměru r, která má s jednou z obou daných kružnic dotyk vnější a se druhou dotyk vnitřní! [Podmínka řešitelnosti budiž vyslovena třeba pro případ, že obě kružnice k_1, k_2 leží každá vně druhé, že tedy $\overline{S_1S_2} > \varrho_1 + \varrho_2$. Má-li býti vnější třeba dotyk s kružnicí k_1, je úloha řešitelná pro $r \geqq \frac{1}{2}(\overline{S_1S_2} + \varrho_2 - \varrho_1)$.]

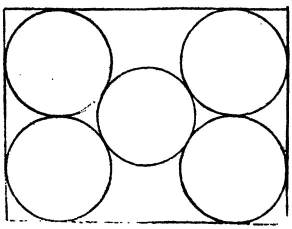
160. Je dána přímka nebo kružnice c, na ní bod A a mimo ni bod B. Sestrojte kružnici, která prochází bodem B a dotýká se c v bodě A!

161. Jsou dány dvě rovnoběžky p, q a mezi nimi bod A. Veďte bodem A kružnici tak, aby se dotýkala přímek p, q! (Dá se převésti na úlohu 150.)

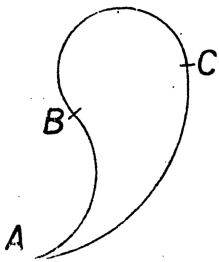
162. Kolem každého vrcholu $\triangle ABC$ je opsána týmž poloměrem kružnice. Sestrojte co nejmenší kruh obsahující všecky tři dané kružnice!



Obr. 127.



Obr. 128.



Obr. 129.

163. Sestrojte obr. 127! V bodech A, B, C je dotyk, všecky tři kružnice mají poloměr 2 cm.

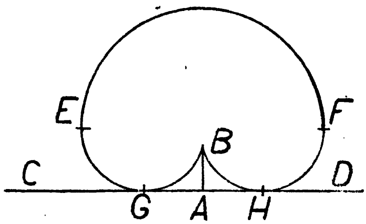
164. Sestrojte obr. 128! Rozměry obdélníka 6 cm, 8 cm.

165. Sestrojte obr. 129! V bodech A, B, C je dotyk, oblouk AB má poloměr 35 mm, oblouk AC 7 cm, oblouk BC 25 mm.

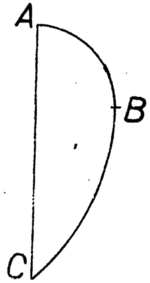
166. Sestrojte obr. 130! Jest $AB \perp CD$, $\overline{AB} = 3$ cm. V bodech E, F, G, H je dotyk, v bodě B není dotyk. Oblouk EF má poloměr 8 cm, oblouky BGE, BHF mají poloměr 4 cm.

167. Sestrojte obr. 131! Přímka BD je osa souměrnosti. V bodech A, C, E, F je dotyk, ABC je polokružnice s poloměrem 2 cm, oblouk EDF má poloměr 1 cm, $\overline{BD} = 7$ cm.

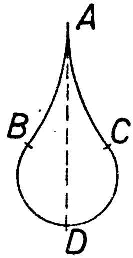
168. Sestrojte obr. 132! Přímka AD je osa souměrnosti. V bodech A, B, C je dotyk, oblouky AB, AC mají poloměr 6 cm, $\overline{AD} = 6$ cm.



Obr. 130.



Obr. 131.

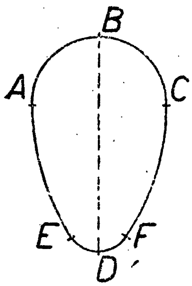


Obr. 132.

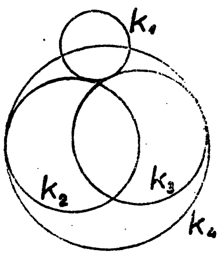
169. Sestrojte obr. 133! V bodě B je dotyk, AB je čtvrtina kružnice s poloměrem 25 mm, jejíž střed je na AC; $\overline{AC} = 7$ cm.

170. Sestrojte obr. 134! Kružnice k_1 má střed na kružnici k_4 a poloměr 1 cm; kružnice k_2, k_3 mají poloměr 2 cm; kružnice k_4 má poloměr 3 cm.

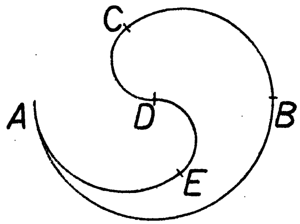
171. Sestrojte obr. 135! V bodech A, B, C, D, E je dotyk oblouků, AB je polokružnice s průměrem 3 cm a středem D, oba oblouky DC, DE mají poloměr 1 cm a v bodě D se dotýkají přímky AB.



Obr. 133.



Obr. 134.



Obr. 135.

h) *Konstrukce tečen; společné tečny dvou kružnic.*

172. Určete geometrické místo těch bodů X, z nichž vedené tečny k dané kružnici k mají danou délku!

173. Určete geometrické místo těch bodů X, z nichž je viděti danou kružnici k pod daným úhlem!

174. Dokažte, že všecky tětivy dané kružnice k, které mají danou délku, dotýkají se určité soustředné kružnice! Dá se ta věta obrátit?

175. K dané kružnici poloměru 3 cm sestrojte tětivy délky 35 mm rovnoběžné s danou přímkou!

176. Je dána kružnice k (střed S, poloměr 4 cm) a bod A ($\overline{AS} = 5$ cm). Veďte bodem A přímku tak, aby z kružnice k vytínala tětivu délky 2 cm!

177. Jsou dány dvě kružnice k_1 (střed S_1, poloměr 3 cm) a k_2 (střed S_2, poloměr 2 cm, $\overline{S_1S_2} = 6$ cm).

a) Sestrojte bod A, z něhož vedené tečny ke kružnicím k_1, k_2 mají všecky délku 4 cm!

b) Sestrojte bod B, z něhož je viděti kružnici k_1 pod úhlem 120° a kružnici k_2 pod úhlem pravým!

178. Narýsujte kružnice k_1, k_2 (středy S_1S_2, poloměry r_1, r_2) podle následujících údajů a sestrojte všecky jejich společné tečny!

a) $r_1 = r_2 = 3$ cm; $\overline{S_1S_2} = 7$ cm;

b) $r_1 = 46$ mm; $r_2 = 38$ mm; $\overline{S_1S_2} = 4$ cm;

c) $r_1 = 2$ cm; $r_2 = 4$ cm; $\overline{S_1S_2} = 75$ mm;

d) $r_1 = 24$ mm; $r_2 = 36$ mm; $\overline{S_1S_2} = 6$ cm.

179. Jsou dány dva body A, B ve vzdálenosti $\overline{AB} = 5$ cm. Sestrojte přímku vzdálenou 2 cm od bodu A, 15 mm od bodu B!

180. Narýsujte kružnici k_1 (střed S_1, poloměr 3 cm) a kružnici k_2 (střed S_2, poloměr 4 cm, $\overline{S_1S_2} = 6$ cm)!

a) Sestrojte tečnu kružnice k_1, která vytíná z kružnice k_2 tětivu délky 2 cm!

b) Sestrojte přímku p tak, aby vytínala z kružnice k_1 tětivu délky 2 cm, z kružnice k_2 tětivu délky 3 cm!

181. Dvě kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk v bodě A. Vnější společná tečna s body dotyku T_1 na k_1, T_2 na k_2 je protata vnitřní společnou tečnou v bodě B.

a) Dokažte, že B je střed úsečky B_1B_2!

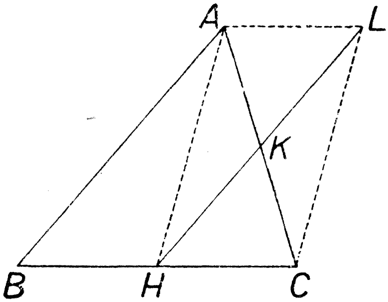
b) Dokažte, že $\sphericalangle\, T_1AT_2 = R$!

§ 4. Trojúhelník a čtyrúhelník.

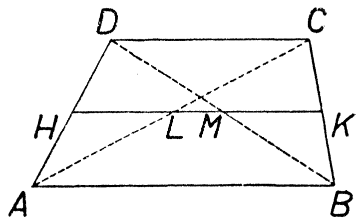
18. **Střední příčky, těžiště a průsečík výšek trojúhelníka.** Budiž dán $\triangle ABC$ (viz obr. 136). Jsou-li H, K středy stran BC, AC, nazýváme úsečku HK **střední příčkou trojúhelníka** (příslušnou straně AB). Platí pak tato věta. **Střední příčka trojúhelníka je rovnoběžná s příslušnou stranou a její délka je polovina té strany.** Abychom si to odůvodnili, nanesme $\overline{KL} = \overline{HK}$ na prodloužení úsečky HK za bod K.

Vznikne nám čtyrúhelník $AHCL$, jehož úhlopříčky se navzájem půlí. Podle odst. 8 je tedy $AHCL$ rovnoběžník, takže $AL \parallel HC$, $\overline{AL} = \overline{HC}$. Ježto $\overline{BH} = \overline{HC}$, je $AL \parallel BH$, $\overline{AL} = \overline{BH}$, pročež také $ABHL$ je rovnoběžník. Z toho plyne předně, že přímka HL neboli přímka HK je rovnoběžná s přímkou AB, a za druhé, že $\overline{HL} = \overline{AB}$; ježto $\overline{HK} = \frac{1}{2}\overline{HL}$, je $\overline{HK} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Vedeme-li středem H strany BC trojúhelníka ABC rovnoběžku p se stranou AB, prochází p také středem strany AC, takže p obsahuje střední příčku příslušnou straně AB. Neboť



Obr. 136.

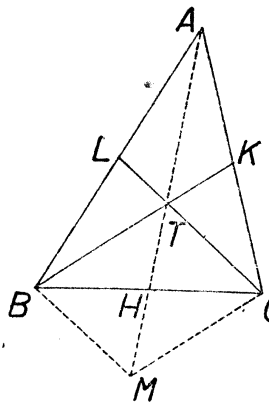


Obr. 137.

je-li zase K střed strany BC, pak bodem H procházejí dvě přímky, totiž p a HK, obě rovnoběžné s AB. Protože bodem H jde jediná rovnoběžka s HK, musí přímky p a HK splynout.

Budiž dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD (viz obr. 137). Jsou-li H, K středy ramen AD, BC, nazýváme úsečku HK **střední příčkou lichoběžníka.** Platí pak tyto věty. **Střední příčka lichoběžníka je rovnoběžná se základnami a obsahuje středy L, M obou uhlopříček AC, BD. Střední příčka je rovna polovině součtu obou základen a úsečka LM je rovna polovině rozdílu obou základen.** Neboť úsečka HL je střední příčka trojúhelníka ACD příslušná straně CD a proto je $HL \parallel CD$, $\overline{HL} = \frac{1}{2}\overline{CD}$; podobně úsečka LK je střední příčka trojúhelníka ABC příslušná straně AB a proto je $LK \parallel AB$, $\overline{LK} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Ježto $AB \parallel CD$, jsou obě přímky HL, LK rovnoběžné s AB; ale bodem L jde jediná rovnoběžka s AB, takže přímky HL, LK splynou, t. j. střední příčka je rovnoběžná se základnami a obsahuje střed L úhlopříčky AC. Mimo to $\overline{HL} = \frac{1}{2}\overline{CD}$, $\overline{LK} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, takže

$\overline{HK} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$. Z trojúhelníka ABD, ve kterém je HM střední příčkou, následuje předně, že $HM \parallel AB$, takže střední příčka obsahuje také bod M, a za druhé, že $\overline{HM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Ježto $\overline{HL}$, $\overline{HM}$ jsou rovny polovinám základen, je úsečka LM rovna polovině rozdílu základen.

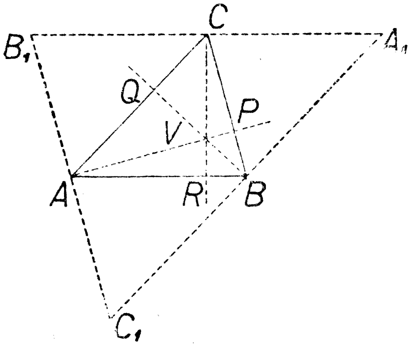


Obr. 138.

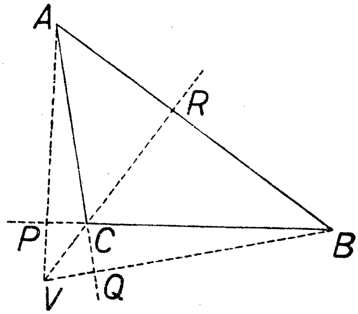
Vedeme-li středem jednoho ramene nebo středem jedné úhlopříčky lichoběžníka rovnoběžku p se základnami, prochází p středy obou ramen i obou úhlopříček lichoběžníka. To už sami snadno dokážete.

Na str. 39 jsme nazvali těžnicí trojúhelníka spojnici vrcholu se středem protější strany. Platí pak tyto věty. **Všecky tři těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě,** který se jmenuje **těžiště** trojúhelníka. **Těžiště dělí každou těžnici ve dvě úsečky, z nichž ta, která obsahuje vrchol, je dvojnásobek druhé.** Abychom to dokázali, označme (viz obr. 138) L, K středy stran AB, AC trojúhelníka ABC. Úsečky BK, CL jsou dvě těžnice a protnou se uvnitř trojúhelníka v bodě, který označme T. Na prodloužení úsečky AT za bod T nanesme $\overline{TM} = \overline{AT}$. V trojúhelnících ABM, ACM jsou LT, KT střední příčky a proto je jednak $\overline{TL} = \frac{1}{2}\overline{BM}$, $\overline{TK} = \frac{1}{2}\overline{CM}$, jednak $TL \parallel BM$, $TK \parallel CM$ neboli $TC \parallel BM$, $TB \parallel CM$. Čtyrúhelník $BTCM$ je tedy rovnoběžník. Ježto protější strany rovnoběžníka jsou si rovny, je $\overline{TC} = \overline{BM}$, $\overline{TB} = \overline{CM}$, takže $\overline{TL} = \frac{1}{2}\overline{TC}$, $\overline{TK} = \frac{1}{2}\overline{TB}$. Ježto úhlopříčky rovnoběžníka $BTCM$ se navzájem půlí, je jejich průsečík H předně středem úsečky BC, takže bod T leží na těžnici AH, a za druhé je H středem úsečky TM, takže $\overline{TH} = \frac{1}{2}\overline{TM}$ neboli $\overline{TH} = \frac{1}{2}\overline{TA}$.

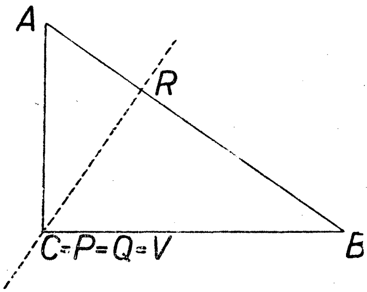
Kolmice AP, BQ, CR **spuštěné s vrcholů** $\triangle ABC$ **na protější strany se protínají v jednom bodě** V. Abychom si to dokázali, veďme (viz obr. 139) každým vrcholem $\triangle ABC$ rovnoběžku k protější straně. Tím vznikne $\triangle A_1B_1C_1$ a z rovnoběžníků ABA_1C, BAB_1C, CAC_1B následuje, že v novém trojúhelníku jsou body A, B, C středy stran, tudíž kolmice AP, BQ, CR osami stran, o kterým víme z odst. 11, že se protínají v jednom bodě. Jsou-li P, Q, R paty kolmic AP, BQ, CR, pak úsečky AP, BQ, CR se jmenují **výšky trojúhelníka** ABC a bod V se jmenuje obyčejně **průsečík výšek,** ačkoli u tupoúhlého trojúhelníka (viz obr. 140) je V průsečík prodloužení úseček AP, BQ, CR. Snadno se nahlédne (viz obr. 103 a 104 na str. 57), že u ostroúhlého $\triangle ABC$ leží V uvnitř trojúhelníka, u tupoúhlého vně. U pravoúhlého $\triangle ABC$ s přeponou AB splyne bod V s vrcholem C (viz obr. 141).



Obr. 139.



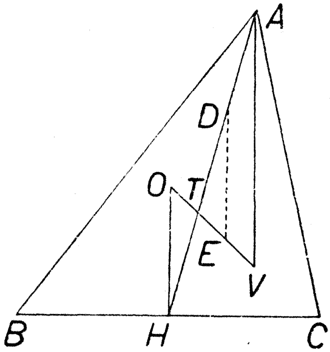
Obr. 140.



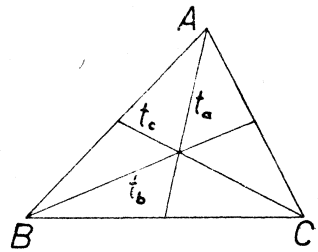
Obr. 141.

Snadno se dokáže, že u rovnostranného $\triangle ABC$ těžiště T, průsečík výšek V a střed opsané kružnice O splynou. Není-li $\triangle ABC$ rovnostranný, můžeme předpokládati, že třeba $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Těžnice AH nestojí potom kolmo na BC, ježto by jinak byla osou úsečky BC a bylo by $\overline{AB} = \overline{AC}$. Body O, T, V jsou pak zřejmě od sebe různé. Platí však toto: Střed kružnice opsané O, těžiště T a průsečík výšek V leží na jedné přímce, která se jmenuje **Eulerova přímka.** (Slavný matematik Leonhard Euler žil v letech 1707 až 1783.) Bod T leží uvnitř úsečky OV a jest $\overline{OT} = \frac{1}{2}\overline{TV}$. Abychom to dokázali, označme T jako obvykle těžiště, O střed opsané kružnice, ale písmenem V označme prozatím ten bod na prodloužení úsečky

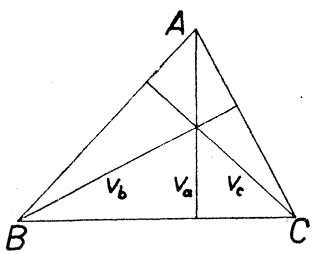
OT' za bod T, pro který platí $\overline{TV} = 2 . \overline{OT}$. Stačí dokázati, že přímky AV, BV, CV stojí kolmo na stranách BC, AC, AB.*) Dokažme na př., že $AV \perp BC$ neboli že $AV \parallel HO$, kde H je střed strany BC (viz obr. 142). Označme D, E středy úseček TA, TV, takže DE je střední



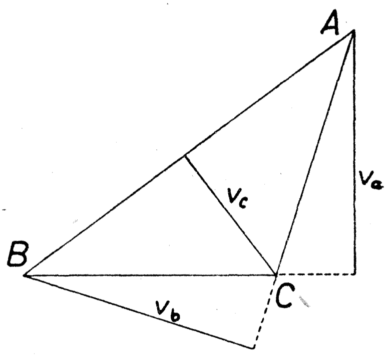
Obr. 142.



Obr. 143.



Obr. 144.



Obr. 145.

příčka trojúhelníka ATV, pročež $DE \parallel AV$. Ježto však $\overline{TA} = 2 . \overline{TH}$, $\overline{TV} = 2 . \overline{TO}$, je $\overline{TH} = \overline{TD}$, $\overline{TO} = \overline{TE}$, takže úsečky DE, HO jsou souměrně sdružené vzhledem ke středu T, pročež $DE \parallel HO$; ježto také $DE \parallel AV$, je vskutku $AV \parallel HO$.

19. Konstrukce trojúhelníka. Jako obvykle označíme vrcholy trojúhelníka A, B, C, úhly α, β, γ, strany a, b, c, takže

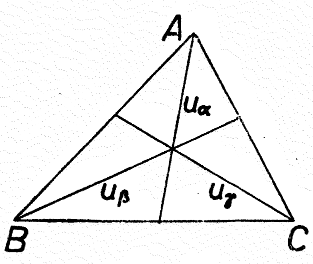
$$\alpha = \sphericalangle A,\ \beta = \sphericalangle B,\ \gamma = \sphericalangle C;\ a = \overline{BC},\ b = \overline{AC},\ c = \overline{AB}.$$

Dále označíme t_a, t_b, t_c těžnice (viz obr. 143), v_a, v_b, v_c výšky (viz obr. 144 a 145), u_α, u_β, u_γ úsečky na osách úhlů od vrcholu až ku protější

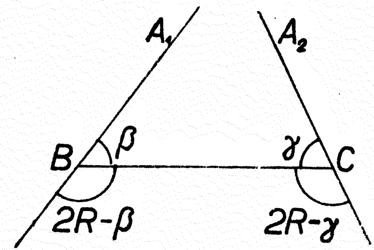
*) Zároveň tím bude podán nový důkaz, že kolmice AP, BQ, CR se protínají v jednom bodě.

straně (viz obr. 146), r poloměr kružnice opsané, ϱ poloměr kružnice vepsané. U pravoúhlého $\triangle ABC$ volíme $\gamma = R$, takže c je přepona.

Základní úlohy na konstrukci trojúhelníka vzniknou, jsou-li dány tři vhodně volené ze šesti základních veličin $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. Nesmí to býti vesměs úhly, protože $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, takže tři údaje α, β, γ neznamenají o nic více, než dva z nich.



Obr. 146.



Obr. 147.

Budiž nejprve dáno b, c, α.*) Podle věty *sus* o shodnosti je $\triangle ABC$ určen jednoznačně. To ovšem neznamená, že by byla určena poloha trojúhelníka, která musí býti libovolná, jsou-li dány pouze velikosti stran a úhlů, nýbrž znamená to pouze, že dva trojúhelníky $\triangle ABC$, u kterých velikosti b, c, α jsou stejné, musí býti shodné, neboli že lze jeden z nich přemístiti tak, aby se kryl s druhým. Ať jsou velikosti úseček b, c a dutého úhlu α jakkoli dány, je úloha vždy řešitelná. Při konstrukci můžeme zvoliti v libovolné poloze úsečku $\overline{AB} = c$ (mohli bychom ovšem začíti také úsečkou $\overline{AC} = b$) a mimo to můžeme předepsati, ve které polorovině vyťaté přímkou AB má ležeti bod C. Konstrukce bodu C je v našem případě zřejmá: určíme ve zvolené polorovině polopřímku AC_1 tak, aby bylo $\sphericalangle BAC_1 = \alpha$ a na tu polopřímku naneseme $\overline{AC} = b$.

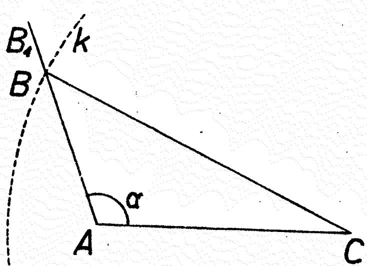
Za druhé budiž dáno a, β, γ.**) Podle *usu* je $\triangle ABC$ určen jednoznačně, ale ze známého vztahu $\alpha + \beta + \gamma = R$ plyne nyní podmínka řešitelnosti $\beta + \gamma < 2R$. Je-li splněna, je úloha vždy řešitelná. Zvolíme v libovolné poloze úsečku $\overline{BC} = a$ (viz obr. 147) a zvo-

*) Znáti a, c, β nebo a, b, γ je v podstatě totéž jako znáti b, c, α, protože vrcholy trojúhelníka si můžeme označiti A, B, C v libovolném pořádku. Obdobnou poznámku lze učiniti ke všem následujícím úlohám.

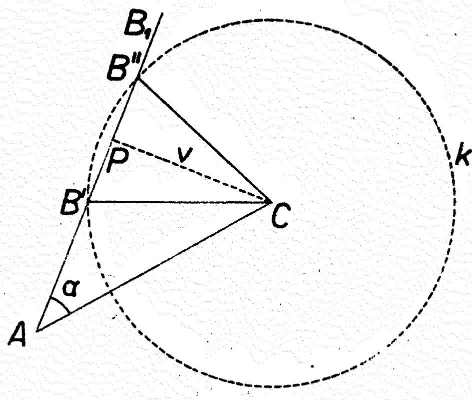
**) Je-li dáno a, α, β, je to vzhledem ke vztahu $\alpha + \beta + \gamma$ v podstatě totéž; podmínka řešitelnosti je pak $\alpha + \beta < 2R$.

líme jednu polorovinu vyťatou přímkou BC. Ve zvolené polorovině určíme polopřímky BA_1, CA_2 tak, že $\sphericalangle CBA_1 = \beta$, $\sphericalangle BCA_2 = \gamma$. Musíme ukázati, že BA_1, CA_2 se protnou ve zvolené polorovině v bodě A. Předně není $BA_1 \parallel CA_2$, protože přilehlé úhly β, γ nejsou výplňkové. Průsečík A přímek BA_1, CA_2 musí ležeti ve zvolené polorovině, protože jinak by $\triangle ABC$ měl při vrcholech B, C úhly $2R - \beta$, $2R - \gamma$, což je nemožné, ježto jejich součet by byl větší než $2R$.

Za třetí budiž dáno a, b, c. Podle *sss* je $\triangle ABC$ určen jednoznačně. Podmínku řešitelnosti můžeme vysloviti tak, že úsečka c je menší než součet a větší než rozdíl úseček a, b.*) Je-li splněna,



Obr. 148.



Obr. 149.

je úloha vždy řešitelná. Zvolíme v libovolné poloze úsečku $AB = c$ a zvolíme jednu polorovinu vyťatou přímkou AB. Dále určíme kružnici k_1 se středem A a poloměrem b a kružnici k_2 se středem B a poloměrem a. Vzdálenost středů je menší než součet a větší než rozdíl poloměrů, pročež kružnice k_1, k_2 se protnou ve dvou bodech, z nichž C je ten, který leží ve zvolené polorovině.

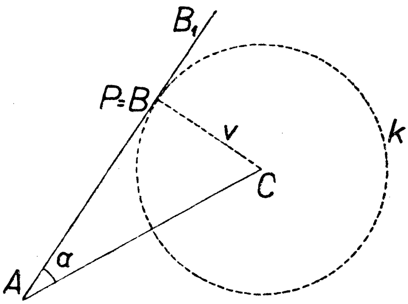
Poslední základní úloha vznikne, je-li dáno a, b, α. Předpokládejme nejprve, že $a > b$. Podle čtvrté věty o shodnosti je $\triangle ABC$ určen jednoznačně. Úloha je vždy řešitelná. Zvolíme v libovolné poloze úsečku $\overline{AC} = b$ (viz obr. 148) a zvolíme jednu polorovinu vyťatou přímkou AC. Ve zvolené polorovině určíme polopřímku AB_1 tak, že $\sphericalangle CAB_1 = \alpha$; dále sestrojíme kružnici k se středem C a poloměrem a.

*) Je-li c největší strana, stačí ovšem žádati $c < a + b$.

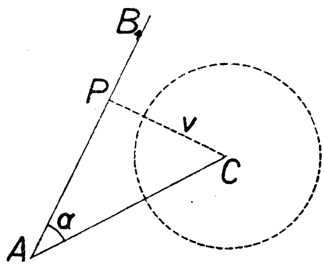
Protože $a > \overline{AC}$, leží bod A uvnitř k, takže polopřímka AB_1 protne k v jediném bodě B.

Jestliže při daných a, b, α je $a = b$, musí býti $\alpha = \beta$, a obráceně pro $\alpha = \beta$ musí býti $a = b$. Proto na danou úlohu můžeme nazírati tak, že je dáno a, α, β (při čemž $\alpha = \beta$). Tedy $\triangle\ ABC$ je určen jednoznačně a podmínku řešitelnosti $\alpha + \beta < 2R$ můžeme vysloviti $\alpha < R$.

Budiž konečně dáno a, b, α tak, že $a < b$. Protože proti menší straně leží menší úhel, musí především býti α úhel ostrý, což však



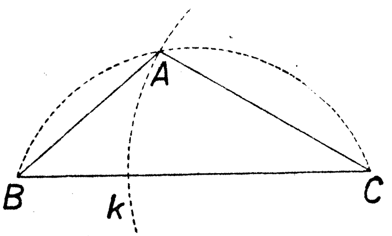
Obr. 150.



Obr. 151.

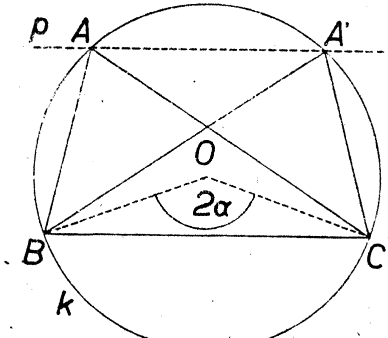
není jediná podmínka řešitelnosti. Zvolíme v libovolné poloze úsečku $\overline{AC} = b$ a zvolíme jednu polorovinu vyťatou přímkou AC. Ve zvolené polorovině určíme polopřímku AB_1 tak, že $\sphericalangle\ ACB_1 = \alpha$, dále sestrojíme kružnici k se středem C a poloměrem a (viz obr. 149 až 151); protože $a < \overline{AC}$, leží bod A vně kružnice k. Hledaný bod B je průsečík kružnice k s polopřímkou AB_1. Budiž P pata kolmice spuštěné s bodu C na přímku AB_1, takže $v = \overline{CP}$ je vzdálenost bodu C od přímky AB_1. Druhá podmínka řešitelnosti je patrně $a \geqq v$. V případě $a > v$ je $\triangle\ ABC$ určen dvojznačně (viz obr. 149), v případě $a = v$ jednoznačně (viz obr. 150) a v případě $a < v$ je úloha neřešitelná (viz obr. 151).

Budiž ještě poznamenáno, že při konstrukci $\triangle\ ABC$ z veličin a, b, α můžeme také (viz obr. 152, ve kterém je voleno $a > b$) vyjíti od libovolné polohy úsečky $\overline{BC} = a$. Zvolíme polorovinu vyťatou přímkou BC, ve které má ležeti bod A. Protože je dána velikost úhlu α, musí ležeti A na oblouku o nad tětivou BC, který umíme sestrojiti (viz obr. 82 na str. 49). Protože je dána velikost úsečky AC, musí bod A ležeti na kružnici k se středem C a poloměrem b. Oblouk o a kružnice k se protnou ve hledaném bodě A. Proveďte konstrukci touto metodou také pro případ, že $a < b$!

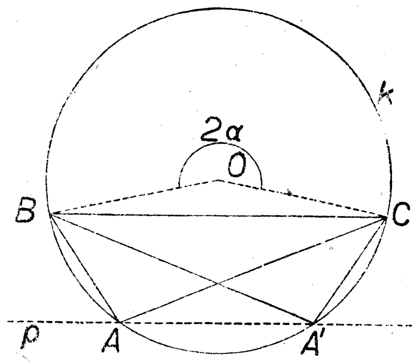


Obr. 152.

Právě provedená úvaha (viz obr. 152) ukazuje, jak se při konstrukcích trojúhelníků užívá geometrických míst. Porovnání obrazců 148 a 152 ukazuje, že lze někdy touž konstruktivní úlohu řešiti dvěma naprosto různými způsoby podle toho, co si napřed zvolíme v určité poloze; v obr. 148 je to strana AC, v obr. 152 strana BC, jejíž poloha byla předem zvolena. Nemusíme však vždycky vyjíti právě od libovolně zvolené polohy jedné **strany** trojúhelníka. Budiž na př. dáno r, v_a, α. Zde si s výhodou zvolíme libovolně střed O opsané kružnice.



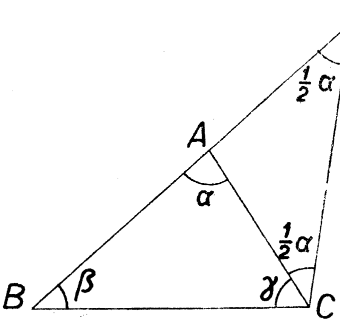
Obr. 153.



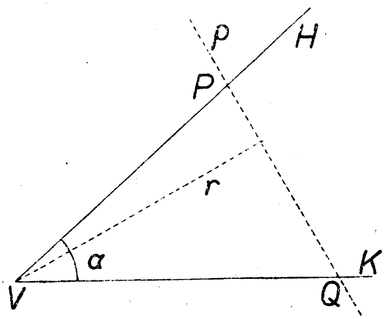
Obr. 154.

Ježto poloměr r známe, můžeme (viz obr. 153 a 154) narýsovati opsanou kružnici k. Úhel $\sphericalangle BAC = \alpha$ je v kružnici k obvodový úhel a příslušný středový úhel má velikost 2α. Tento středový úhel s daným vrcholem O si narýsujeme v libovolné poloze, čímž je nejen dána poloha strany BC, nýbrž také je dáno, ve které polorovině vyťaté přímkou BC má ležeti bod A (A leží v polorovině BCO při ostrém α, v polorovině opačné při tupém α). Jelikož známe vzdálenost v_a bodu

A od přímky BC, musí A ležeti na určité rovnoběžce p s přímkou BC. Je-li délka v_a příliš veliká, leží p mimo kružnici k a úloha je neřešitelná. Je-li p sečnou kružnice k, protne p kružnici k ve dvou bodech (viz obr. 153 a 154), takže se zdá, jakoby úloha byla dvojznačná. Je však jednoznačná, neboť oba trojúhelníky ABC, $A'BC$ jsou souměrně sdružené vzhledem k ose úsečky BC a proto jsou shodné.



Obr. 155.



Obr. 156.

Při konstruktivních úlohách o trojúhelníku je často výhodné, sestrojiti napřed vhodně zvolený pomocný trojúhelník. Objasníme si to na příkladě obrazcem 155, ve kterém je $\overline{AD} = \overline{AC}$. V rovnoramenném $\triangle ACD$ máme při vrcholu A vnější úhel α, takže při vrcholech C, D máme vnitřní úhly rovné $\frac{1}{2}\alpha$. Tedy v $\triangle BCD$ máme při vrcholech B, D úhly β, $\frac{1}{2}\alpha$ a při vrcholu C úhel

$$\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha = \gamma + \tfrac{1}{2}(2R - \beta - \gamma) = R + \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = R - \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

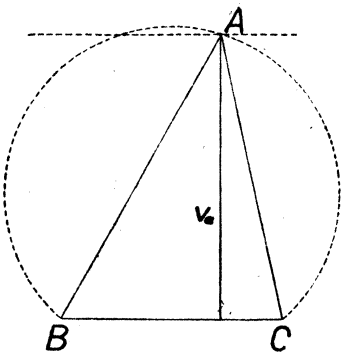
který je ostrý pro $\beta > \gamma$ neboli pro $b > c$, tupý pro $\gamma > \beta$ neboli pro $c > b$. V témž $\triangle BCD$ je dále $\overline{BC} = a$, $\overline{BD} = b + c$. Budiž nyní úkolem sestrojiti $\triangle ABC$, jsou-li dány některé tři z pěti veličin

$$a,\ b + c,\ \alpha,\ \beta,\ \beta - \gamma \text{ nebo } \gamma - \beta$$

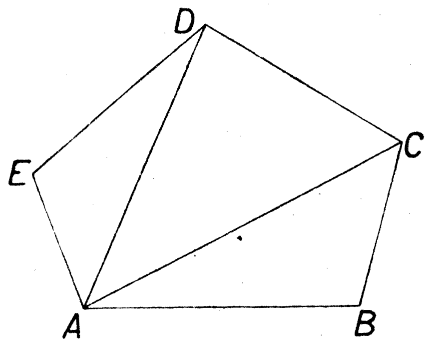
(ne ovšem jenom úhly); sestrojíme si napřed $\triangle BCD$, načež bod A leží na ose úsečky BC.

20. Čtyrúhelník. Na konstrukci trojúhelníků se dají převésti četné jiné úlohy. Budiž na př. (viz obr. 156) dán v určité poloze $\sphericalangle HVK = \alpha$ a budiž úkolem sestrojiti v dané vzdálenosti r od bodu V přímku p, ze které daný úhel vytíná úsečku PQ dané délky d. Vznikne nám

$\triangle\ VPQ$, ve kterém známe stranu PQ, příslušnou výšku a protější úhel. Sestrojíme si proto napřed (viz obr. 157) $\triangle\ ABC$ tak, že α, $a = d$, $v_a = r$ mají předepsané hodnoty, načež stačí na ramena daného úhlu nanésti $\overline{VP} = \overline{AC}$, $\overline{VQ} = \overline{AB}$. (Úloha je dvojznačná, protože jsme mohli také nanésti $\overline{VP} = \overline{AB}$, $\overline{VQ} = \overline{AC}$.)



Obr. 157.



Obr. 158.

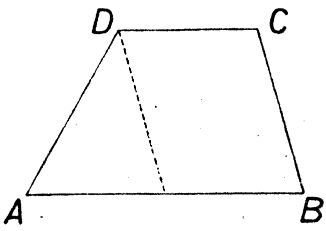
Na konstrukci trojúhelníků se převádí zejména **konstrukce mnohoúhelníků**; n-úhelník $ABCD\ldots$ (viz obr. 158 pro $n = 5$) se totiž úhlopříčkami vycházejícími z vrcholu A rozdělí na $n - 2$ trojúhelníky. Konstrukci mnohoúhelníka provedeme potom tak, že sestrojíme postupně $\triangle\ ABC$, $\triangle\ ACD$, ...; ke konstrukci prvého trojúhelníka potřebujeme znáti tři určující části, ke konstrukci každého následujícího však už jenom dvě, protože dva sousední trojúhelníky mají společnou stranu. Ke **konstrukci n-úhelníka je třeba znáti $2n - 3$ určující části,** neboť

$$3 + (n - 3) \,.\, 2 = 3 + 2n - 6 = 2n - 3.$$

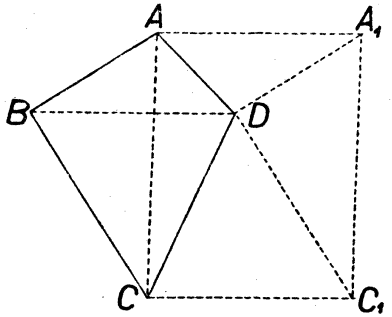
Stačí znáti na př. velikosti všech n stran a všech $n - 3$ úhlopříček vycházejících z vrcholu A.

Zejména pro konstrukci čtyrúhelníka potřebujeme pět údajů. U lichoběžníka spočívá jeden z pěti údajů v tom, že dvě strany jsou rovnoběžné, takže ke konstrukci lichoběžníka je třeba znáti čtyři údaje. Podobně je třeba tří údajů ke konstrukci rovnoběžníka nebo rovnoramenného lichoběžníka, dvou ke konstrukci obdélníka nebo kosočtverce, jednoho ke konstrukci čtverce.

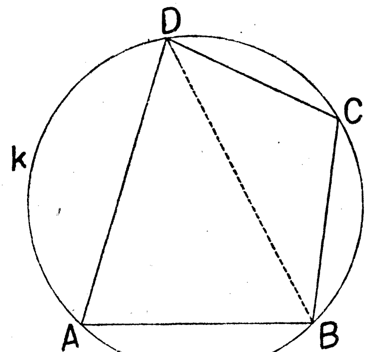
Při konstrukcích lichoběžníka bývá výhodné zavésti pomocnou čáru (viz obr. 159), která jej rozdělí na trojúhelník a na rovnoběžník. Také konstrukci obecného čtyrúhelníka převádíme často s výhodou na konstrukci rovnoběžníka (viz obr. 160). Určeme body A_1, C_1 tak, že $ABDA_1$, $DBCC_1$ jsou rovnoběžníky. Obě úsečky AA_1, CC_1 jsou potom rovnoběžné a stejně dlouhé s úsečkou BD, pročež jsou i mezi sebou rovnoběžné a stejně dlouhé, takže také ACC_1A_1 je rovnoběžník. Úhlopříčky původního čtyrúhelníka $ABCD$ jsou rovny stranám rovnoběžníka ACC_1A_1, strany čtyrúhelníka $ABCD$ jsou rovny vzdálenostem bodu D od vrcholů rovnoběžníka ACC_1A_1, úhly úhlopříček čtyrúhelníka jsou rovny vnitřním úhlům rovnoběžníka a konečně vnitřní úhly čtyrúhelníka jsou rovny úhlům polopřímek DA, DC, DC_1, DA_1 (proč?).



Obr. 159.

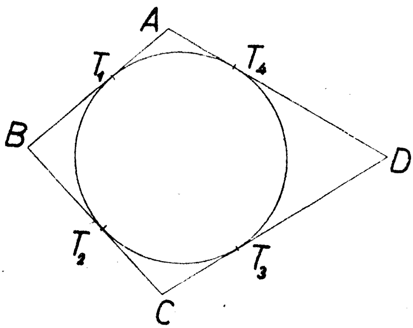


Obr. 160.

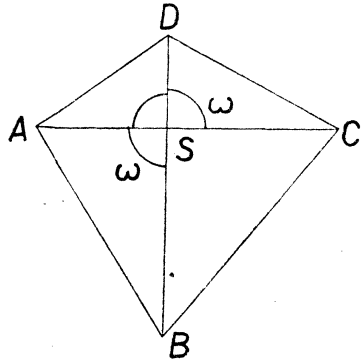


Obr. 161.

Kdežto každému trojúhelníku lze opsati i vepsati kružnici, u čtyrúhelníka už tomu tak není. Čtyrúhelník, kterému lze opsati kružnici, nazývá se **tětivový čtyrúhelník**, protože jeho strany jsou tětivy opsané kružnice. Víme (viz odst. 14, str. 46), že protější úhly tětivového čtyrúhelníka jsou výplňkové. Obráceně, jestliže dva protější úhly vypuklého čtyrúhelníka $ABCD$ jsou výplňkové, jest $ABCD$ tětitový čtyrúhelník. Neboť nechť na př. $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$ jsou výplňkové. Trojúhelníku ABD lze jistě opsati kružnici k (viz obr. 161); úhlopříčka BD rozdělí rovinu na poloroviny BDA, BDC a z odst. 14 víme, že pro bod X uvnitř poloroviny BDC platí $\sphericalangle BXD = 2R - \sphericalangle A$ tehdy a jen tehdy, jestliže X leží na kružnici k. Z toho plyne, že C leží na kružnici k, která je tudíž kružnicí opsanou čtyrúhelníku $ABCD$.



Obr. 162.



Obr. 163.

Čtyrúhelník, kterému lze vepsati kružnici, nazývá se **tečnový čtyrúhelník.** U tečnového čtyrúhelníka $ABCD$ platí

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}. \qquad (1)$$

Neboť v obr. 162 platí vztahy $\overline{AT_1} = \overline{AT_4}$, $\overline{BT_1} = \overline{BT_2}$, $\overline{CT_3} = \overline{CT_2}$, $\overline{DT_3} = \overline{DT_4}$, ze kterých vychází sečtením vztah

$$(\overline{AT_1} + \overline{BT_1}) + (\overline{CT_3} + \overline{DT_3}) = (\overline{AT_4} + \overline{DT_4}) + (\overline{BT_2} + \overline{CT_2})$$

neboli vztah (1). Obráceně, jestliže platí vztah (1), dá se dokázati, že $ABCD$ je tečnový čtyrúhelník.

Při konstruktivních úlohách o čtyrúhelníku položíme $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$, $\sphericalangle D = \delta$. Znamená-li S průsečík úhlopříček, položíme (viz obr. 163) $\sphericalangle ASB = \omega$, takže je také $\sphericalangle CSD = \omega$, kdežto $\sphericalangle BSC = \sphericalangle ASD = 2R - \omega$.

Cvičení.

a) *Střední příčky.*

182. Jsou-li A_1, B_1, C_1 středy stran BC, AC, AB trojúhelníka ABC, dokažte, že $AB_1A_1C_1$ je rovnoběžník!

183. Je-li S střed těžnice AA_1 trojúhelníka ABC a je-li T průsečík přímek AC, BS, dokažte, že $\overline{CT} = 2 \,.\, \overline{AT}$! (Veďte $A_1U \parallel AB$.)

184. Jsou-li E, F, G, H středy stran AB, BC, CD, DA čtyrúhelníka $ABCD$, dokažte, že $EFGH$ je rovnoběžník!

185. Jsou-li E, F středy stran AB, CD rovnoběžníka $ABCD$, dokažte, že DE, FB dělí úsečku AC na tři stejné díly!

186. Jsou-li D, E středy stran AB, BC trojúhelníka ABC a je-li A střed úsečky DF, G průsečík přímek AC, EF, dokažte, že $\overline{AG} = \frac{1}{4}\,\overline{AB}$!

187. Bod A leží mimo přímku p; bod X probíhá přímku p. Určete geometrické místo středu úsečky AX!

188. Je dán bod A a kružnice k; bod X probíhá kružnici k. Určete geometrické místo středu úsečky AX!

189. Budiž S střed úsečky AB; buďtež v_1, v_2, v_0 vzdálenosti bodů A, B, S od přímky p.

a) Nejsou-li body A, B od sebe odděleny přímkou p, dokažte, že $v_0 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$!

b) Co když body A, B jsou od sebe odděleny přímkou p?

190. AB, CD jsou dva průměry kružnice, B je střed úsečky AE. Dokažte, že BC půlí úsečku DE!

b) *Těžiště trojúhelníka.*

191. Jsou-li AH, BK, CL těžnice trojúhelníka ABC, dokažte, že $\triangle ABC$, $\triangle HKL$ mají totéž těžiště!

192. T je těžiště trojúhelníka ABC. Je-li $\overline{AT} = \overline{BC}$, dokažte, že $BT \perp CT$!

193. $HKLM$ je rovnoběžník; N je střed strany HK; P je průsečík přímek KM, LN. Dokažte, že přímka HP prochází středem strany KL!

194. $RSTU$ je rovnoběžník; U je střed úsečky SV. Dokažte, že přímka RU půlí úsečku TV a že přímka TU půlí úsečku RV!

195. Na prodloužení těžnice AD trojúhelníka ABC za bod A naneste $\overline{AE} = 2\,.\,\overline{AD}$! Dokažte, že přímka AB půlí úsečku CE!

c) *Průsečík výšek.*

196. Je-li V průsečík výšek trojúhelníka ABC, je A průsečík výšek trojúhelníka VBC. Je-li $\triangle ABC$ ostroúhlý, je $\triangle VBC$ tupoúhlý. Co když $\triangle ABC$ je tupoúhlý?

197. Je-li V průsečík výšek ostroúhlého $\triangle ABC$, pak úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BVC$ jsou výplňkové; stejně ovšem úhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AVC$ a úhly $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle AVB$. Jak je tomu u tupoúhlého $\triangle ABC$?

198. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 45°$, V je průsečík výšek, P je pata výšky CP. Dokažte, že $\overline{PB} = \overline{PV}$!

199. Body souměrně sdružené k průsečíku výšek trojúhelníka vzhledem k jeho stranám leží na kružnici opsané.

200. Vzdálenost průsečíku výšek trojúhelníka od vrcholu je dvojnásobek vzdálenosti středu opsané kružnice od protější strany. (Viz obr. 142.)

201. Je-li V průsečík výšek AP, BQ, CR ostroúhlého $\triangle ABC$, pak V je střed vepsané kružnice trojúhelníka PQR. Je-li však $\triangle ABC$ tupoúhlý, je V střed jedné vně vepsané kružnice trojúhelníka PQR.

202. Je-li V průsečík výšek trojúhelníka ABC, pak $\triangle ABC$, $\triangle ABV$, $\triangle ACV$, $\triangle BCV$ mají týž poloměr kružnice opsané. (Užijte výsledku úlohy 199.)

d) *Konstrukce trojúhelníka ze tří určujících částí.*

203. Dáno a, b, v_a. Stanovte podmínku řešitelnosti! Kolik je řešení?

204. Dáno a, β, v_a. Proveďte pro ostrý i pro tupý úhel β!

205. Dáno α, β, v_c. Podmínka řešitelnosti je $\alpha + \beta < 2R$. Proveďte pro $\alpha < R$, $\beta < R$ i pro $\alpha > R$, $\beta < R$!

206. Dáno a, t_a, v_a. Stanovte podmínku řešitelnosti!

207. Dáno r, α, β. Stanovte podmínku řešitelnosti!

208. Dáno ϱ, α, β. Stanovte podmínku řešitelnosti!

209. Dáno v_a, u_α, α, při čemž $v_a < u_\alpha$. Zvolte délky v_a, u_α a určete, pro které úhly α je úloha řešitelná!

210. Dáno a, ϱ, β. Proveďte nejprve tak, že zvolíte libovolně polohu strany BC! Při tom zvolte a, β libovolně a určete, pro jakou velikost úsečky ϱ je úloha řešitelná! Potom proveďte znovu tak, že zvolíte libovolně polohu středu vepsané kružnice! Při tom zvolte ϱ, α libovolně a určete, pro jakou velikost úsečky a je úloha řešitelná!

211. Dáno a, ϱ, α. (Napřed sestrojte $\triangle BCS$, kde S je střed vepsané kružnice.) Zvolte a, α libovolně a určete, pro jakou velikost úsečky ϱ je úloha řešitelná!

212. Dáno a, v_b, v_c, při čemž $a > v_b$, $a > v_c$. Úloha má dvě různá řešení. Proveďte třikrát pro $a = 5$ cm, $v_b = 4$ cm, při čemž nechť poprvé $v_c > 3$ cm, podruhé $v_c < 3$ cm, potřetí $v_c = 3$ cm!

213. Dáno a, v_b, r, při čemž $a > v_b$. Zvolte délky a, v_b a dokažte, že pro každé $r > \frac{1}{2}a$ má úloha dvě různá řešení až na jednu výjimečnou délku r, pro kterou úloha má jediné řešení!

214. Dáno a, t_a, α. Zvolte délku a i úhel α a určete, pro které délky t_a je úloha řešitelná! Při tom musíte rozeznávati případy $\alpha < R$, $\alpha > R$, $\alpha = R$.

215. Dáno ϱ, u_α, α. Zvolte ϱ, α libovolně a určete, jaká musí býti velikost úsečky u_α, aby úloha byla řešitelná. (Úsečka u_α nesmí býti ani příliš malá ani příliš veliká.)

216. Dáno v_a, t_a, r, při čemž $v_a < t_a$. Zvolte délky v_a, t_a a určete, jaká musí býti velikost úsečky r, aby úloha

a) měla dvě různá řešení,

b) měla jediné řešení!

217. Dáno a, v_b, t_a, při čemž $a > v_b$. Zvolte délky a, v_b a určete, jaká musí býti velikost úsečky t_a, aby úloha byla řešitelná! Kolik řešení má úloha?

218. Dáno a, v_b, t_b, při čemž $a > v_b$. Zvolte délky a, v_b a určete, jaká musí býti velikost úsečky t_b, aby úloha byla řešitelná! Kolik řešení má úloha?

219. Dáno v_a, v_b, β. Zvolte v_a, β libovolně a určete, jaká musí býti velikost úsečky v_b, aby úloha byla řešitelná! Proveďte také pro tupý úhel β!

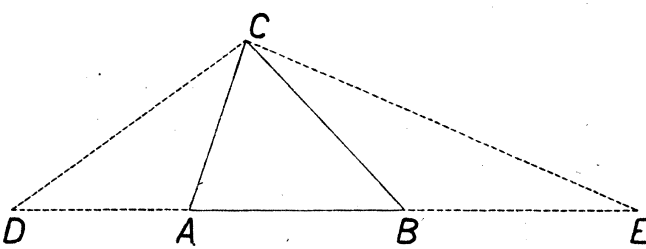
220. Dáno a, b, u_γ. Stanovte podmínku řešitelnosti! (Je-li D takový bod na přímce BC, že $AD \parallel u_\gamma$, sestrojte napřed $\triangle ACD$.)

221. Dáno a, $b + c$, v_b, při čemž $v_b < a < b + c$. Úloha má dvě různá řešení!

222. Dáno a, $b + c$, α, při čemž $a < b + c$. Zvolte na př. $b + c = 5$ cm, $\alpha = 75°$ a určete pro jaká $a < b + c$ je úloha řešitelná. Úloha má jediné řešení!

223. Dáno b, $a - c$, α, při čemž $a > c$, $a - c < b$. Zvolte na př. $b = 4$ cm, $a - c = 3$ cm, $\alpha = 60°$ nebo $\alpha = 120°$!

224. Dáno b, $c - a$, α, při čemž $a < c$, $c - a < b$. Zvolte na př. $b = 5$ cm, $c - a = 2$ cm, $\alpha = 45°$! Může se úhel α voliti tupý?



Obr. 164.

225. Dáno $a + b + c$, α, β. Sestrojte napřed $\triangle CDE$ (viz obr. 164), kde $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$!

226. Dáno $a + b + c$, α, v_c. (Zase sestrojte napřed $\triangle CDE$.)

227. Dáno a, b, t_c. Stanovte podmínku řešitelnosti! (Zaveďte pomocný rovnoběžník $ACBD$.)

228. Dáno a, v_a, t_b. Stanovte podmínku řešitelnosti! (Zase zaveďte pomocný rovnoběžník.)

229. Dáno a, t_b, t_c. Stanovte podmínku řešitelnosti! (Napřed sestrojte $\triangle BCT$.)

230. Dáno t_a, t_b, t_c. Stanovte podmínku řešitelnosti! (Napřed sestrojte $\triangle BTM$, viz obr. 138 na str. 74.)

e) *Konstrukce čtyrúhelníků z určujících částí.*

231. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jsou-li dány strany AB, AD a úhlopříčka AC! Stanovte podmínku řešitelnosti!

232. Sestrojte rovnoběžník, je-li dána jedna strana a obě úhlopříčky! Stanovte podmínku řešitelnosti!

233. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jsou-li dány obě úhlopříčky AC, BD a jejich úhel ω!

234. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dána strana AB, její vzdálenost v od protější strany a úhlopříčka AC! Stanovte podmínku řešitelnosti!

235. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dána délka úhlopříčky a úhel ω!

236. Sestrojte kosočtverec, je-li dána délka strany a jedné úhlopříčky! Stanovte podmínku řešitelnosti!

237. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dána vzdálenost protějších stran AB, CD a délka úhlopříčky AC! Stanovte podmínku řešitelnosti!

238. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dána úhlopříčka AC a úhel β!

239. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dán součet obou úhlopříček a úhel $\sphericalangle BAC$!

240. Sestrojte čtverec, je-li dána úhlopříčka!

241. Sestrojte čtverec, je-li dán součet strany a úhlopříčky!

242. Sestrojte čtverec, je-li dán rozdíl mezi stranou a úhlopříčkou!

243. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dána základna AB, obě ramena a úhel α! (Mohou býti dvě řešení, jedno nebo žádné.)

244. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dána obě ramena AD, BC, rozdíl základen $(\overline{AB} > \overline{CD})$ a úhlopříčka AC nebo úhlopříčka BD! Stanovte podmínky řešitelnosti!

245. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány všecky strany. Stanovte podmínky řešitelnosti!

246. Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány obě základny a obě úhlopříčky. Stanovte podmínky řešitelnosti!

247. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dána základna AB, její vzdálenost v od druhé základny a obě úhlopříčky. Zvolte nejprve délky AB, v; jak musíte potom zvoliti délku AC? Jsou-li délky AB, v, AC zvoleny, určete, jaká musí býti velikost úhlopříčky BD, aby úloha byla řešitelná!

248. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AC, BD, CD a úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAD$. (Úloha může míti dvě řešení, jedno nebo žádné.)

249. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AB, BC, BD a úhly α, β! (Úloha může míti dvě řešení, jedno nebo žádné.)

250. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AB, AC a úhly α, γ, δ! (Napřed sestrojte $\triangle ABC$.)

251. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AB, AC, CD a úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABD$. (Úloha může míti dvě řešení, jedno nebo žádné.)

252. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AB, AC, BC, BD a úhel δ! (Úloha může míti dvě řešení, jedno nebo žádné.)

253. Sestrojte tětivový čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AB, AC, BD a úhel α! Proveďte nejprve tak, že úhlopříčka BD má libovolně zvolenou polohu, potom tak, že strana AB má libovolně zvolenou polohu! (Je-li úloha řešitelná, má nejvýše čtyři řešení.)

254. Sestrojte tětivový čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AB, AC, BC a úhel ω! Jaké podmínce jsou podrobeny úsečky AB, AC, BC? Je-li tato podmínka splněna, jak se musí zvolit úhel ω?

255. Sestrojte tětivový čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AC, BD a úhly $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle ABD$! (Úloha může míti dvě řešení, jedno nebo žádné.)

256. Sestrojte tětivový čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AC, BD a úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BAD$! (Úloha může míti dvě řešení, jedno nebo žádné.)

257. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AC, BD a úhly α, γ, ω! (Viz obr. 161.)

258. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AC, BD a úhly ω, $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAD$! (Viz obr. 161.)

259. Sestrojte tětivový čtyrúhelník $ABCD$, jsou-li dány úsečky AC, BD a úhly ω, $\sphericalangle BAC$! (Viz obr. 161.)

Opakovací příklady na větu Pythagorovu a věty Euklidovy (viz učebnici pro III. třídu).

Nelze-li výsledek některého cvičení udati přesně, počítejte na tři platné cifry!

a) *Užití Pythagorovy věty na trojúhelníky a čtyrúhelníky.*

260. Jak dlouhé je zábradlí nad schodištěm ze 17 stupňů, je-li každý stupeň 32 cm široký a 14,5 cm vysoký?

261. Ramena dvojitého žebříku jsou 3 m dlouhá.

a) Do jaké výše sahá žebřík při rozpětí 1,2 m?

b) Při jakém rozpětí sahá žebřík do výše 2,75 m?

262. Cyklista jel 20 km k severu a potom 5 km

a) k severozápadu,

b) k jihozápadu.

Jak je potom vzdálen od místa, z něhož vyjel?

263. $\triangle ABC$ je pravoúhlý ($\gamma = 90°$), $\overline{AB} = 17$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm; na odvěsně BC leží bod D tak, že $\overline{CD} = 5$ cm. Vypočtěte obsah $\triangle ABD$!

264. Znajíce délky stran trojúhelníka, rozhodněte, je-li pravoúhlý, ostroúhlý či tupoúhlý!

a) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 8$ cm;

b) $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm;

c) $a = 12$ cm, $b = 35$ cm, $c = 37$ cm.

265. Obdélník $ABCD$ má rozměry $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AD} = 11$ cm. Bod E leží na straně CD tak, že $\overline{DE} = 3$ cm; bod F leží na straně BC tak, že $\overline{CF} = 8$ cm. Vypočtěte

a) obsah trojúhelníka AEF;

b) délku spojnice středů úseček AE, EF!

266. Obdélník $HKLM$ má rozměry $\overline{HK} = 13$ cm, $\overline{HM} = 6$ cm; na straně LM leží bod N tak, že $\overline{LN} = 8{,}5$ cm. Vypočtěte

a) obsah trojúhelníka HKN;

b) délku HN;

c) vzdálenost bodu K od přímky HN!

267. Je-li $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\sphericalangle ABC = 45°$, vypočtěte
a) obsah trojúhelníka ABC,
b) délku AC!

268. $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm. Vypočtěte délku ramene!

269. Uvnitř úsečky BC leží bod D tak, že $AD \perp BC$. Je-li $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{AC} = 7{,}5$ cm, $\overline{AD} = 6$ cm, vypočtěte $\overline{BC}$ a dokažte, že $\sphericalangle BAC = 90°$!

270. Kosočtverec $ABCD$ s délkou strany 10 cm má při vrcholu A úhel 120°. Vypočtěte délky obou úhlopříček!

b) *Užití Pythagorovy věty na kružnice.*

271. Dvě tětivy AB, CD kružnice se středem S a poloměrem 7 cm protínají se kolmo v bodě T. Je-li $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{CD} = 10$ cm, vypočtěte vzdálenost $\overline{ST}$!

272. Ze dvou tětiv AB, CD kružnice má prvá od středu vzdálenost 1 cm, druhá 7 cm. Je-li $\overline{AB} = 2 \,.\, \overline{CD}$, určete poloměr kružnice a délky obou tětiv!

273. Tětiva kružnice k má délku 6 cm a je vzdálena 11 cm od středu S kružnice k. Jak dlouhá je tětiva kružnice k, která je 9 cm vzdálena od S?

274. Dvě kružnice mají poloměry 8 cm, 3 cm; vzdálenost středů je 13 cm. Určete délku vnější společné tečny!

275. Dvě kružnice mají poloměry 11 cm, 5 cm; vzdálenost středů je 2 dm. Určete délku vnitřní společné tečny!

276. Proměnná tětiva XY kružnice k s poloměrem 7,5 cm má pevnou délku 9 cm. Určete geometrické místo středu proměnné tětivy!

c) *Prostorové úlohy na Pythagorovu větu.*

277. Obdélník $ABCD$ s rozměry $\overline{AB} = 24$ cm, $\overline{AD} = 2$ dm je dolní podstavou kvádru s výškou 1 dm. Je-li S střed horní podstavy, vypočtěte obsah trojúhelníka BCS!

278. Vejde se tyč délky 1 m do bedny s rozměry 72 cm, 6 dm, 48 cm?

279. Podstava pravidelného čtyrbokého jehlanu je čtverec se stranou 12 cm; stěnové výšky měří 1 dm. Vypočtěte tělesnou výšku a délku pobočných hran!

280. Pravidelný trojboký jehlan má podstavné hrany s délkou 9 cm, pobočné hrany s délkou 6 cm. Určete objem jehlanu!

281. Na kulové ploše s průměrem 6 cm je kružnice k s poloměrem 2 cm. Jak daleko od středu koule je rovina kružnice k?

282. Určete poloměr koule opsané kvádru s rozměry 2 dm, 3 dm, 6 dm!

283. Na stole leží čtyři koule s poloměrem 1 dm tak, že každá z nich se dotýká dvou z ostatních, takže jejich středy jsou vrcholy čtverce. Pátá koule téhož poloměru spočívá na prvých čtyřech. Jak vysoko nad stolem je střed páté koule?

284. Jak veliká koule se vejde do krychlové bedny s hranou 4 dm zároveň s koulí poloměru 1 dm?

d) *Úlohy na Euklidovy věty.*

285. Průměr AB kružnice k je v bodě E kolmo protat tětivou CD.

a) Je-li $\overline{AE} = 1$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm, určete poloměr kružnice k!

b) Je-li $\overline{AE} = 2$ cm, $\overline{BE} = 8$ cm, určete délku tětivy CD!

286. ABC je rovnoramenný trojúhelník ($\overline{AB} = \overline{AC}$).

a) Je-li $\overline{AB} = 13$ cm, $\overline{BC} = 10$ cm, určete poloměr opsané kružnice!

b) Je-li $\overline{AB} = 10$ cm a je-li poloměr opsané kružnice 6 cm, určete $\overline{BC}$ a obsah trojúhelníka ABC!

287. Pravoúhlý $\triangle\ ABC$ má odvěsny $\overline{AC} = 12$ cm, $\overline{BC} = 18$ cm. Určete poloměr kružnice, která se dotýká AC v bodě A a prochází bodem B!

288. CD je výška pravoúhlého trojúhelníka ABC ($\gamma = 90°$).

a) Je-li $\overline{AB} = 2 . \overline{BC}$, dokažte, že $\overline{AD} = 3 . \overline{BD}$!

b) Je-li $\overline{AC} = 2 . \overline{BC}$, dokažte, že $\overline{AD} = 4 . \overline{BD}$!

289. $ABCD$ je čtverec; na polopřímce AB leží bod E tak, že $\overline{AE} = \overline{AC}$. Je-li P pata kolmice spuštěné s bodu A na přímku DE, dokažte, že $\overline{EP} = 2 . \overline{DP}$!

290. Dvě kružnice (středy S_1, S_2, poloměry 6 cm, 8 cm, $\overline{S_1S_2} = 1$ dm) se protínají v bodech A, B. Určete vzdálenosti středů S_1, S_2 od přímky AB a délku úsečky AB! [Napřed dokažte, že $\triangle\ AS_1S_2$ je pravoúhlý.]

e) *Další úlohy na Pythagorovu větu.*

291. $ABCD$ je kosočtverec. Dokažte, že $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4 . \overline{AB}^2$!

292. Čtyřúhelník $HKLM$ má při vrcholech K, M pravé úhly. Dokažte, že $\overline{HK}^2 - \overline{HM}^2 = \overline{LM}^2 - \overline{LK}^2$!

293. Čtyřúhelník $PQRS$ má při vrcholech Q, R pravé úhly. Je-li $\overline{PQ} = \overline{PR} = 2 . \overline{RS}$, dokažte, že $\overline{PS} = 3 . \overline{RS}$!

294. AD je výška $\triangle\ ABC$. Je-li $\gamma = 45°$, dokažte, že $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$!

295. Uvnitř obdélníka $EFGH$ leží bod V. Dokažte, že $\overline{EV}^2 + \overline{GV}^2 = \overline{FV}^2 + \overline{HV}^2$! Je to správné, i když bod V leží vně obdélníka? Co když bod V leží mimo rovinu obdélníka?

Obsah