

# Čech, Eduard: Textbooks

---

Eduard Čech

Geometrie pro III. třídu středních a měšťanských škol

Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1948, 63 s.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501360>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1946

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*  
<http://dml.cz>

*Knih. 567/III.*

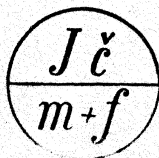
**EDUARD ČECH**

# **GEOMETRIE**

**PRO III. TŘ. STŘEDNÍCH A MĚŠŤANSKÝCH ŠKOL**

**153**

**CENA Kčs 9,40**



**JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ V PRAZE**



*Jč = 567/3*

# GEOMETRIE

pro III. třídu středních a měšťanských škol

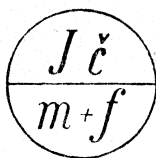
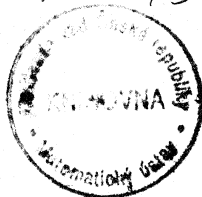
Napsal

EDUARD ČECH

S 91 obrázky

Dotisk pro školní rok 1948/49 povolen výnosem ministerstva školství a osvěty  
ze dne 31. prosince 1947, č. A-263 296/47-III/1.

*Kop 567/3*



*Kop 567*



CENA Kčs 9,40

*i.č. 5043*

PRAHA 1948

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

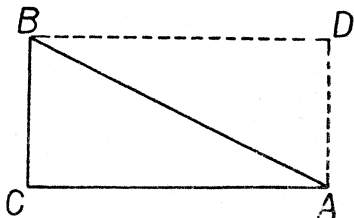
TISKEM KNIHTISKARNY „PROMETHEUS“, PRAHA VIII-94



## § 1. Obsah mnohoúhelníka. Povrch a objem kolmého hranolu.

Víte, že obsah obdélníka dostaneme, znásobíme-li oba rozměry. Při tom si musíme zvolit určitou jednotku délky a vyjádřit oba rozměry v téže jednotce; obsah pak vyjde v plošné jednotce příslušné zvolené jednotce délky. Toto důležité upozornění platí také pro výpočet obsahů jiných rovinných obrazců a je nutno mít je stále na paměti, ač nebude v dalším už výslovně uváděno.

Začneme pravoúhlým trojúhelníkem. V obr. 1 máme pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s přeponou  $AB$ . Zvolíme si určitou jednotku délky a označíme si  $a, b$  délky odvěsen  $BC, AC$ , vyjádřené v této jednotce. Vedeme-li bodem  $B$  rovnoběžku s přímkou  $AC$  a bodem  $A$  rovnoběžku s přímkou  $BC$ , protnou se tyto rovnoběžky v bodě  $D$  a vznikne



Obr. 1.

nám obdélník  $ACBD$ . Trojúhelníky  $ABC, ABD$  jsou shodné (proč?). Tedy mají stejný obsah. Z toho plyne, že obsah trojúhelníka  $ABC$  je polovina obsahu obdélníka  $ACBD$ , jehož rozměry jsou  $a, b$ . Tedy obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami  $a, b$  je

$$\frac{1}{2} ab \quad \text{neboli} \quad \frac{a}{2} b \quad \text{neboli} \quad a \frac{b}{2}.$$

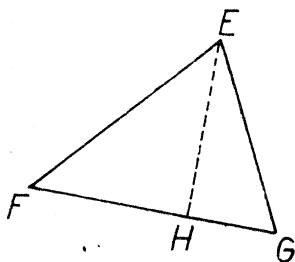
V obr. 2a, 2b máme obecný trojúhelník  $EFG$ . V obou obrazech je vyznačena výška  $EH$  trojúhelníka  $EFG$  příslušná straně  $FG$ .

Slovem **výška** (příslušná straně  $FG$ ) budeme však nyní rozuměti také délku  $\overline{EH}$  úsečky  $EH$ . Trojúhelník  $EFG$  v obr. 2a je výškou  $EH$  rozdělen na dva pravoúhlé trojúhelníky a obsah trojúhelníka  $EFG$  dostaneme, sečteme-li obsahy obou pravoúhlých trojúhelníků. Položme

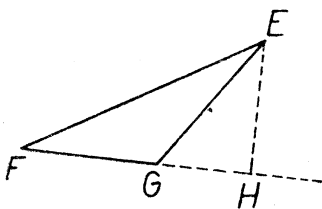
$$\overline{FG} = s, \quad \overline{EH} = v;$$

dále budiž

$$\overline{FH} = s_1, \quad \overline{GH} = s_2, \quad \text{tedy} \quad s_1 + s_2 = s.$$



Obr. 2a.



Obr. 2b.

Pravoúhlý trojúhelník  $EFH$  má obsah  $s_1 \frac{v}{2}$ ; pravoúhlý trojúhelník

$EGH$  má obsah  $s_2 \frac{v}{2}$ ; tedy obsah trojúhelníka  $EFG$  je

$$s_1 \frac{v}{2} + s_2 \frac{v}{2} = (s_1 + s_2) \frac{v}{2} = s \frac{v}{2}.$$

K témuž výsledku dospějeme u trojúhelníka  $EFG$  z obr. 2b, jehož obsah je patrně rovný rozdílu obsahů pravoúhlých trojúhelníků  $EFH$ ,  $EGH$ . Zase položme

$$\overline{FG} = s, \quad \overline{EH} = v;$$

dále budiž

$$\overline{FH} = s_1, \quad \overline{GH} = s_2, \quad \text{tedy} \quad s_1 - s_2 = s.$$

Obsah trojúhelníka  $EFG$  je

$$s_1 \frac{v}{2} - s_2 \frac{v}{2} = (s_1 - s_2) \frac{v}{2} = s \frac{v}{2}.$$

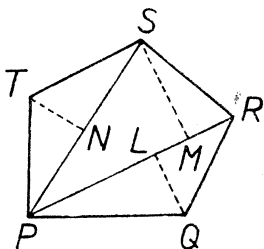
Výsledek: Je-li  $s$  délka jedné strany trojúhelníka a je-li  $v$

příslušná výška, obsah trojúhelníka je

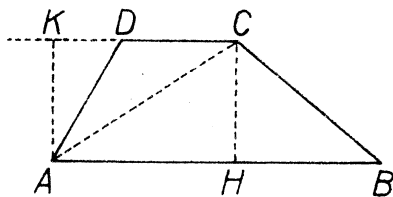
$$\frac{1}{2} sv \quad \text{neboli} \quad \frac{s}{2} v \quad \text{neboli} \quad s \frac{v}{2}.$$

Slovy: obsah trojúhelníka je poloviční součin strany s příslušnou výškou, neboli součin poloviny strany s příslušnou výškou, neboli součin strany s polovinou příslušné výšky.

Jakmile umíme vypočísti obsah trojúhelníka, můžeme také vypočísti obsah libovolného mnohoúhelníka, neboť každý mnohoúhelník



Obr. 3.



[Obr. 4.]

dá se rozdělit na trojúhelníky. Na př. pětiúhelník  $PQRST$  v obr. 3 je rozložen na tři trojúhelníky a obsah každého z nich se dá určit, změříme-li jednu stranu, jakož i příslušnou výšku. Obsah pětiúhelníka  $PQRST$  je polovina výrazu

$$\overline{PR} \cdot \overline{QL} + \overline{PR} \cdot \overline{SM} + \overline{PS} \cdot \overline{TN}.$$

Obsah každého čtyřúhelníka se dá určit tím, že si jej některou úhlopříčkou rozdělíme na dva trojúhelníky. U lichoběžníka vede tento postup k výsledku, který si zapamatujte. V obr. 4 máme lichoběžník  $ABCD$ . Položme

$$\overline{AB} = s_1, \quad \overline{CD} = s_2$$

a označme si  $v$  vzdálenost obou rovnoběžek  $AB, CD$ , takže v obr. 4 je

$$\overline{CH} = v, \quad \overline{AK} = v.$$

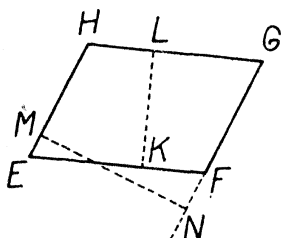
V trojúhelníku  $ABC$  je  $CH$  výškou příslušnou straně  $AB$  a proto jeho obsah je  $\frac{s_1}{2} v$ ; v trojúhelníku  $ACD$  je  $AK$  výškou příslušnou straně



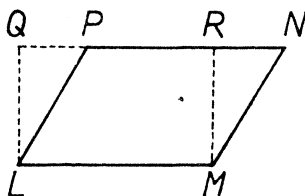
$CD$  a proto jeho obsah je  $\frac{s_2}{2} v$ . Tedy obsah našeho lichoběžníka je

$$\frac{s_1}{2} v + \frac{s_2}{2} v = \frac{s_1 + s_2}{2} v.$$

Obě rovnoběžné strany lichoběžníka se obvykle nazývají jeho základnami a vzdálenost obou rovnoběžek se obvykle nazývá výškou lichoběžníka. Proto můžeme takto vysloviti výsledek, ke kterému jsme dospěli: Obsah lichoběžníka je součin polovičního součtu obou základen s výškou.



Obr. 5.



Obr. 6.

Při odvození vzorce pro obsah lichoběžníka  $ABCD$  jsme užili té okolnosti, že strany  $AB, CD$  jsou mezi sebou rovnoběžné, ale ne-  
užili jsme té okolnosti, že strany  $AC, BD$  nejsou mezi sebou rovnoběžné. Proto výsledek, ke kterému jsme dospěli, platí nejen pro lichoběžník, nýbrž také pro rovnoběžník. Dokonce ho můžeme užiti na rovnoběžník dvojím způsobem. Obsah rovnoběžníka  $EFGH$  z obr. 5 můžeme určit tak, že za základny považujeme strany  $EF, GH$ ; příslušná výška je v obr. 5 označena  $\overline{KL}$ . Je-li  $\overline{EF} = a$ , je také  $\overline{GH} = a$ , takže poloviční součet obou základen je zase  $a$ . Tedy obsah rovnoběžníka  $EFGH$  v obr. 5 je součin  $\overline{EF} \cdot \overline{KL}$ . Druhým způsobem najdeme též obsah, považujeme-li strany  $EH, FG$  za základny; obsah vyjde ve tvaru součinu  $\overline{EH} \cdot \overline{MN}$ . U rovnoběžníka máme dvě výšky; jednou výškou je vzdálenost jednoho páru rovnoběžných stran (měřená na kterékoli společné kolmici), druhou výškou je vzdálenost druhého páru rovnoběžných stran (zase měřená na kterékoli společné kolmici); výška příslušná určité straně je vzdálenost této strany od strany protější. Výsledek, ke kterému jsme dospěli, dá se tedy vyslo-

viti takto: Obsah rovnoběžníka je součin kterékoli strany s příslušnou výškou.

Právě vyslovený výsledek dá se odvoditi také jinak (viz obr. 6). Je-li dán rovnoběžník  $LMNP$ , spustíme s bodů  $L, M$  kolmice na přímkou  $NP$  a označme  $Q, R$  jejich paty. Vznikne nám obdélník  $LMRQ$ . Tento obdélník dostaneme z rovnoběžníka  $LMNP$ , když napřed připojíme trojúhelník  $LPQ$  a potom ubereme trojúhelník  $MNR$ . Avšak  $LPQ \cong MNR$  (proč?). Tedy obsah rovnoběžníka  $LMNP$  je roven obsahu obdélníka  $LMRQ$  neboli je roven součinu  $\overline{LM} \cdot \overline{LQ}$  a to jsme chtěli odvoditi.

Budiž dán jakýkoli kvádr. Zvolme si určitou jednotku délky a označme  $a$  délku,  $b$  šířku a  $c$  výšku našeho kváдру, vyjádřené ve zvolené jednotce. Víme, že objem kváдру, vyjádřený v objemové jednotce příslušné zvolené jednotce délky, rovná se součinu  $abc$ . Tento součin můžeme počítati tak, že napřed znásobíme mezi sebou čísla  $a, b$  a co vyjde, znásobíme číslem  $c$ . Avšak  $ab$  je obsah podstavy (horní nebo dolní, neboť obě podstavy jsou shodné) vyjádřený v plošné jednotce příslušné zvolené jednotce délky. Tedy objem kváдру dostaneme, znásobíme-li obsah podstavy výškou.

Výsledek, k němuž jsme dospěli, je správný nejen pro kvádr, nýbrž pro libovolný kolmý hranol. Tedy: **objem kolmého hranolu dostaneme, násobíme-li obsah podstavy výškou hranolu.** Slovem podstava zase můžeme rozuměti buďto podstavu dolní nebo také horní, neboť obě podstavy jsou shodné. Také o volbě jednotek délky, obsahu a objemu platí stále totéž, co jsme si právě řekli u kváдру.

Důkaz vzorce pro objem kolmého hranolu provedeme napřed pro případ, že podstava je pravoúhlý trojúhelník. Mysleme si, že pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  v obr. 1 je dolní podstavou kolmého hranolu, jehož výška je  $v$ . Je-li pravoúhlý trojúhelník  $ABD$  v obr. 1 dolní podstavou kolmého hranolu se stejnou výškou, tvoří oba ty trojboké hranoly dohromady kvádr, jehož dolní podstavou je obdélník  $ACBD$ . Je-li  $P$  obsah tohoto obdélníka, víme, že objem kváдру je  $Pv$ . Avšak oba naše trojboké hranoly jsou shodné, takže objem každého z nich je polovinou objemu kváдру. Tedy objem hranolu s podstavou  $ABC$  je součin  $\frac{1}{2}P \cdot v$ , a to souhlasí s výše vysloveným obecným vzorcem, neboť  $\frac{1}{2}P$  je obsah trojúhelníka  $ABC$ .

Dále si myslíme, že trojúhelník  $EFG$  v obr. 2a nebo v obr. 2b

je dolní podstavou kolmého hranolu s výškou  $v$ . Budiž  $P$  obsah trojúhelníka  $EFG$ ;  $P_1$  budiž obsah trojúhelníka  $EFH$ ,  $P_2$  budiž obsah trojúhelníka  $EGH$ . V případě obr. 2a se náš hranol skládá z hranolu s dolní podstavou  $EFH$  a z hranolu s dolní podstavou  $EGH$ , při čemž výška obou hranolů je  $v$ . Protože trojúhelníky  $EFH$ ,  $EGH$  jsou pravouhlé, víme, že objemy hranolů nad nimi postavených jsou  $P_1v$ ,  $P_2v$ . Tedy objem hranolu postaveného nad trojúhelníkem  $EFG$  je

$$P_1v + P_2v = (P_1 + P_2)v = Pv$$

v souhlase s výše vysloveným vzorcem. K témuž výsledku dojdeme podobnou úvahou také v případě obr. 2b, kdy objem hranolu postaveného nad trojúhelníkem  $EFG$  vyjde ve tvaru

$$P_1v - P_2v = (P_1 - P_2)v = Pv.$$

Nyní si snadno rozšíříme náš výsledek také na kolmý hranol, jehož podstavou je libovolný mnohoúhelník. Budiž na př. pětiúhelník  $PQRST$  v obr. 3 dolní podstavou kolmého hranolu s výškou  $v$ . Je-li  $P$  obsah pětiúhelníka a jsou-li  $P_1, P_2, P_3$  obsahy trojúhelníků  $PQR, RSP, PST$ , je objem našeho hranolu roven

$$P_1v + P_2v + P_3v = (P_1 + P_2 + P_3)v = Pv.$$

Povrch kolmého hranolu je zřejmá dán vzorcem

$$2P + Q,$$

kde  $P$  znamená obsah podstavy a  $Q$  znamená plášť, t. j. součet obsahů všech pobočných stěn. **Plášť kolmého hranolu je součin obvodu podstavy s výškou.** Odvodme si to třeba pro hranol s výškou  $v$  postavený nad pětiúhelníkem  $PQRST$  v obr. 3. Každá pobočná stěna je obdélník, jehož obsah je součin základny s výškou. Proto je

$$\begin{aligned} Q &= \overline{PQ} \cdot v + \overline{QR} \cdot v + \overline{RS} \cdot v + \overline{ST} \cdot v + \overline{TP} \cdot v = \\ &= (\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TP})v = ov, \end{aligned}$$

kde  $o$  znamená obvod podstavy.

### Cvičení k § 1.

#### 1. Obsah mnohoúhelníka.

1. Sestrojte si trojúhelník  $ABC$ , tak, aby bylo  $\overline{AB} = 85$  mm,  $\overline{BC} = 72$  mm,  $\overline{AC} = 9$  cm. Změřte pečlivě všechny tři výšky a určete trojím způsobem obsah trojúhelníka. Souhlasí navzájem všechny tři výsledky?

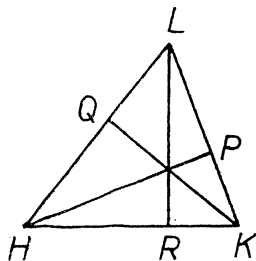
2. Sestrojte si rovnoběžník  $DEFG$  tak, aby bylo  $\overline{DE} = 63$  mm,  $\overline{EF} = 8$  cm,  $\sphericalangle DEF = 75^\circ$ . Změřte pečlivě obě výšky a určete dvojnásobkem obsah rovnoběžníka.

3. (Viz obr. 7, který vysvětluje označení;  $HP, KQ, LR$  jsou výšky trojúhelníka  $HKL$ .)

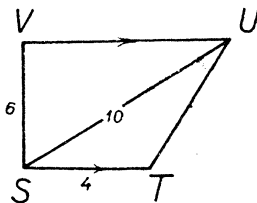
a) Je-li  $\overline{HK} = 12$  cm,  $\overline{LR} = 18$  cm, čemu se rovná obsah trojúhelníka  $HKL$ ?

b) Má-li  $HKL$  obsah  $112$  cm<sup>2</sup> a je-li  $\overline{KL} = 14$  cm, čemu se rovná  $\overline{HP}$ ?

c) Je-li  $\overline{HP} = 5$  cm,  $\overline{HL} = 6$  cm,  $\overline{KQ} = 4$  cm, čemu se rovná  $\overline{KL}$ ?



Obr. 7.



Obr. 8.

4. Narýsujte si podle obr. 8 vlastní obrazec, ve kterém je jednotka 1 cm. Vypočtete, jaký je ve vašem obrazci obsah trojúhelníka  $STU$ . Potom vypočtete, jaká má být ve vašem obrazci vzdálenost bodu  $T$  od přímky  $SU$  a změřte tuto vzdálenost. (V obrazci je  $SV \perp VU$ .)

5. a) Narýsujte si kosočtverec  $ABCD$  tak, aby bylo  $\overline{AC} = 8$  cm,  $\overline{BD} = 6$  cm a určete jeho obsah.

b) Dokažte, že obsah kosočtverce je polovina součinu obou úhlopříček.

c) Kosočtverec má obsah  $196$  cm<sup>2</sup>; jedna úhlopříčka je polovinou druhé. Určete délky obou úhlopříček.

6. Délky základů lichoběžníka jsou  $34,8$  cm;  $25,6$  cm. Výška lichoběžníka je  $18,4$  cm. Určete obsah lichoběžníka.

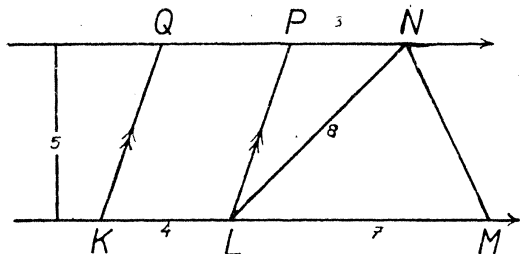
7. Délky základů lichoběžníka  $EFGH$  jsou  $\overline{EF} = 14$  cm,  $\overline{GH} = 6$  cm; obsah lichoběžníka je  $72$  cm<sup>2</sup>. Určete obsah trojúhelníka  $FGH$ .

8. Narýsujte si podle obr. 9 vlastní obrazec, ve kterém je jednotka 1 cm. Vypočtete obsah lichoběžníka  $KMNQ$ . Dále vypočtete obsah rovnoběžníka  $KLPQ$  a trojúhelníků  $LMN, LPN$ . Určete, jaká má být vzdálenost bodů  $M$  a  $P$  od přímky  $LN$  a změřte obě vzdálenosti.

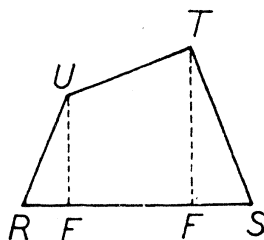
9. Rovnoběžník  $ABCD$  má obsah  $23,52$  dm<sup>2</sup>; jest  $\overline{AB} = 49$  cm,  $\overline{AD} = 56$  cm. Vypočtete obě výšky rovnoběžníka.

10. (Viz obr. 10, který jen vysvětluje označení.) Je-li  $\overline{EU} = 238$  m,  $\overline{FT} = 316$  m,  $\overline{RE} = 95$  m,  $\overline{EF} = 174$  m,  $\overline{FS} = 82$  m, určete obsah čtyřúhelníka  $RSTU$ . (V obrazci je  $EU \perp RS$ ,  $TF \perp RS$ .)

11. Narýsujte si libovolný pětiúhelník (dostí veliký) a určete aspoň dvojnásobkem jeho obsah.



Obr. 9.



Obr. 10.

11. Kolmé hranoly. (Viz též cvič. k § 2, 53 až 56.)

12. Podstava kolmého hranolu je lichoběžník  $ABCD$  znázorněný v obr. 4; výška hranolu je 8 dm. Je-li  $\overline{AB} = 7$  dm,  $\overline{CD} = 4$  dm,  $\overline{CH} = 3$  dm, určete objem hranolu.

13. Nádoba má tvar kolmého hranolu, jehož podstava má obsah  $8,4$  dm<sup>2</sup>. V nádobě je  $5,46$  l vody. Do jaké výše sahá voda v nádobě?

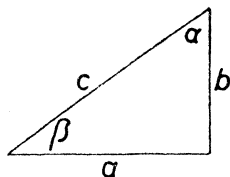
14. Roura má tvar kolmého hranolu s obsahem podstavy  $42$  cm<sup>2</sup>. Rourou protéká voda rychlostí  $1,25$  m za vteřinu. Kolik vody vyteče za minutu?

15. Kolmý hranol má povrch  $13,25$  m<sup>2</sup> a objem  $5,625$  m<sup>3</sup>; výška hranolu je  $2,5$  m. Určete obvod a obsah podstavy.

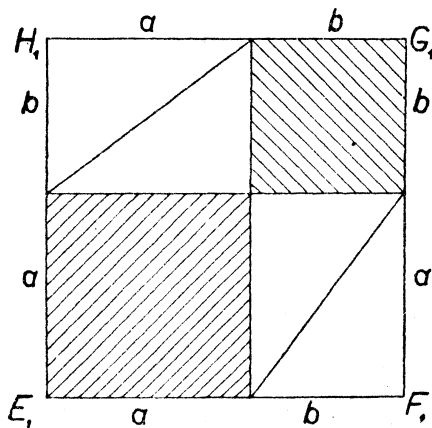
## § 2. Pythagorova věta.

V tomto paragrafu si odvodíme vztah mezi délkami všech tří stran pravouhlého trojúhelníka, který je jedním z nejdůležitějších vztahů celé geometrie. Říká se mu **Pythagorova věta**, protože prý ji objevil Pythagoras, matematik a filosof z řeckého ostrova Samu, který žil v 6. století př. Kr. Kolem r. 540 př. Kr. se usadil Pythagoras v jižní Itálii a založil proslulou školu, která dala Řekům mnoho objevů geometrických a jiných. Žáci Pythagorovi se rozptýlili po smrti svého slavného učitele a roznesli tak známost jeho jména po celém tehdy známém světě.

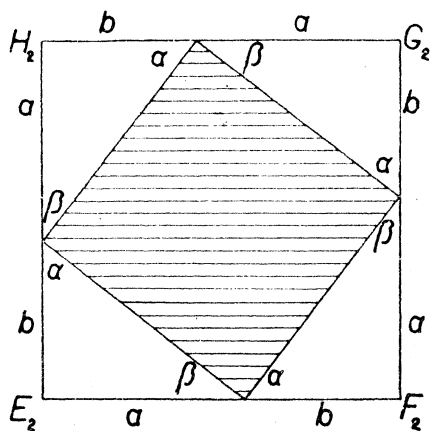
Abychom došli k Pythagorově větě, označme si (viz obr. 11) jako obvykle  $a$ ,  $b$  délky obou odvěsen,  $c$  délku přepony,  $\alpha$ ,  $\beta$  velikosti obou ostrých úhlů. Dále si narýsujeme dva shodné čtverce  $E_1F_1G_1H_1$  (viz obr. 12) a  $E_2F_2G_2H_2$  (viz obr. 13) s délkou strany  $a + b$ . Čtverec  $E_1F_1G_1H_1$  je v obr. 12 rozdělen na čtyři trojúhelníky shodné s trojúhelníkem z obr. 11 a na dva vyčárkované čtverce, jejichž strany mají délky  $a$ ,  $b$ . Čtverec  $E_2F_2G_2H_2$  je v obr. 13 rozdělen zase na čtyři trojúhelníky shodné s trojúhelníkem z obr. 11 a na vyčárkovaný čtyřúhelník, jehož strany mají délku  $c$ ; ježto  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , jsou všechny úhly našeho čtyřúhelníka pravé, takže je to čtverec.



Obr. 11.



Obr. 12.



Obr. 13.

Tím jsme dokázali větu: Čtverec nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu čtverců nad oběma odvěsnami. To je právě Pythagorova věta, která se dá vyjádřit vztahem

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Podle Pythagorovy věty můžeme vypočítati délku třetí strany pravoúhlého trojúhelníka, známe-li délky ostatních dvou stran. Obecně je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad (*)$$

ale je zbytečné učiti se zpaměti těmito třemi vztahy. Stačí si dobře

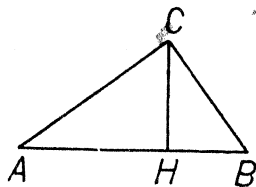
zapamatovati základní tvar věty  $a^2 + b^2 = c^2$ , ze kterého tvary (\*) snadno plynou. Protože délky stran pravoúhlého trojúhelníka je často vhodné označiti jinými písmeny než právě  $a, b, c$ , je nutné pamatovati si také slovní znění Pythagorovy věty.

Víme, že u pravoúhlého trojúhelníka můžeme, známe-li dvě ze tří stran  $a, b, c$ , počítati třetí podle Pythagorovy věty. Ve spojení s jinými poučkami můžeme Pythagorovy věty užití i k jiným výpočtům. Všimneme si na př. výpočtu výšky. Výškou pravoúhlého trojúhelníka rozumíme obyčejně výšku příslušnou přeponě (na př. délku  $\overline{CH}$  v obr. 14), protože výška příslušná odvěsně splyne s druhou odvěsnou. Označíme-li výšku písmenem  $v$ , je obsah trojúhelníka  $ABC$  v obr. 14

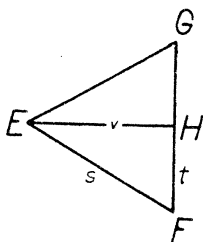
jednak  $\frac{1}{2}cv$ , jednak  $\frac{1}{2}ab$ .

Proto platí u pravoúhlého trojúhelníka vzorec

$$cv = ab.$$



Obr. 14.



Obr. 15.

Známe-li dvě strany pravoúhlého trojúhelníka, vypočteme si třetí podle Pythagorovy věty, načež můžeme vypočísti výšku  $v$  takto:

$$v = \frac{ab}{c}.$$

Pythagorovy věty můžeme užití také na př. u obdélníka, neboť úhlopříčka rozdělí obdélník na dva pravoúhlé trojúhelníky. Jsou-li rozměry obdélníka  $a, b$  a je-li  $u$  délka úhlopříčky, je patrně

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pythagorovy věty můžeme užití také na rovnoramenný trojúhelník, neboť výška příslušná základně rozdělí rovnoramenný trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky, z nichž každý má za přeponu rameno daného trojúhelníka a za odvěsny polovinu základny a výšku příslušnou základně.

Co jsme si řekli o rovnoramenném trojúhelníku, platí také pro trojúhelník rovnostranný. V obr. 15 máme rovnostranný trojúhelník  $EFG$  rozdělený výškou na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky  $EFH$ ,  $EGH$ . Položme

$$\overline{EF} = s, \quad \overline{EH} = v, \quad \overline{FH} = t.$$

Víme, že  $s = 2t$ . Podle Pythagorovy věty je však  $t^2 + v^2 = s^2$ . Ale  $s^2 = (2t)^2 = 4t^2$ , tedy  $t^2 + v^2 = 4t^2$ , z čehož  $v^2 = 3t^2$ , tedy  $v = \sqrt{3} \cdot t$  neboli

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} s,$$

což je vzorec, podle kterého můžeme počítati výšku  $v$  rovnostranného trojúhelníka, známe-li délku strany  $s$ . (Délky všech tří výšek rovnostranného trojúhelníka jsou si ovšem rovny.)

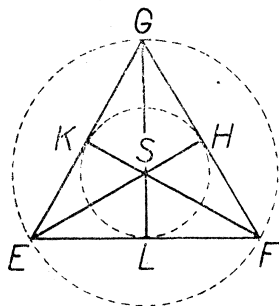
Úhly trojúhelníka  $EFH$  jsou  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ; proti nim leží strany, jejichž délky jsme označili  $t$ ,  $v$ ,  $s$ . Právě jsme odvodili důležitý vztah

$$t : v : s = 1 : \sqrt{3} : 2;$$

tento vztah platí pro strany každého trojúhelníka s úhly  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . Neboť je-li dán takový trojúhelník  $EFH$  (viz obr. 15) a připojíme-li k němu trojúhelník souměrně sdružený podle osy  $EH$ , dostaneme rovnostranný trojúhelník, ve kterém je  $EH$  výškou.

V obr. 16 máme znovu rovnostranný trojúhelník  $EFG$ , ve kterém jsou tentokrát vyznačeny všechny tři výšky  $EH$ ,  $FK$ ,  $GL$ . Víte, že tyto tři výšky se protínají v jednom bodě, který je v obr. 16 označen  $S$ . Výšky rozdělí trojúhelník  $EFG$  na šest shodných trojúhelníků s úhly  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \overline{SE} = \overline{SF} = \overline{SG} &= \frac{2}{3}v, \\ \overline{SH} = \overline{SK} = \overline{SL} &= \frac{1}{3}v, \end{aligned}$$



Obr. 16.

kde  $v$  znamená společnou délku všech tří výšek. Proto je bod  $S$  středem kružnice opsané i středem kružnice vepsané, poloměr opsané kružnice je

$$\frac{2}{3}v = \frac{\sqrt{3}}{3} s$$

a poloměr vepsané kružnice je

$$\frac{1}{3}v = \frac{\sqrt{3}}{6} s$$

kde  $s$  znamená délku strany.



V předcházejícím se nám několikrát vyskytlo číslo  $\sqrt{3}$ . Pamatujte si, že zaokrouhleno na čtyři platné cifry je

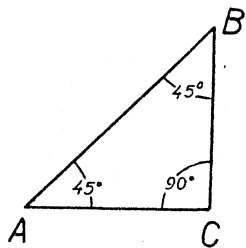
$$\sqrt{3} \doteq 1,732.$$

V obr. 17 je trojúhelník  $ABC$  s úhly  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ , tedy pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Z Pythagorovy věty sami snadno odvodíte, že strany našeho trojúhelníka jsou v poměru

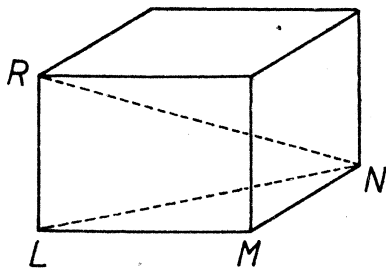
$$1 : 1 : \sqrt{2}.$$

Pamatujte si také tento výsledek a rovněž si pamatujte, že zaokrouhleno na čtyři platné cifry je číslo

$$\sqrt{2} \doteq 1,414.$$

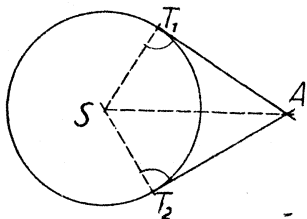


Obr. 17.



Obr. 18.

Pythagorovy věty můžeme užítí u rozmanitých úloh o kružnicích. Budiž na př. dán vně kružnice  $k$  (střed  $S$ , poloměr  $r$ ) bod  $A$  ve vzdálenosti  $d$  od středu (viz obr. 19). Z bodu  $A$  lze ke kružnici  $k$  vésti dvě



Obr. 19.

tečny; jsou-li  $T_1$ ,  $T_2$  jejich body dotyku, víme, že obě úsečky  $AT_1$ ,  $AT_2$  jsou stejně dlouhé. Délku  $t$  kterékoli z těchto dvou úseček nazýváme krátce délkou tečny z bodu  $A$  ke kružnici  $k$ . V obr. 19 je  $AST_1$  pravoúhlý trojúhelník, takže podle Pythagorovy věty je  $t^2 + r^2 = d^2$ , tedy  $t \doteq \sqrt{d^2 - r^2}$ .

Pythagorovy věty lze užítí také při četných úlohách o tělesech. Všimněme si na př. kvádrů znázorněného v obr. 18. Dejme tomu, že

rozměry kváдру jsou

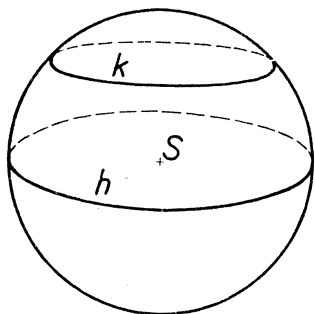
$$\overline{LM} = 6 \text{ cm}, \quad \overline{MN} = 3 \text{ cm}, \quad \overline{LR} = 5 \text{ cm}$$

a že chceme vypočísti délku úhlopříčky  $NR$ . Zvolme 1 cm za jednotku délky. Svislá přímka  $LR$  a vodorovná přímka  $LN$  stojí na sobě kolmo, takže trojúhelník  $LNR$  je pravoúhlý; podle Pythagorovy věty je

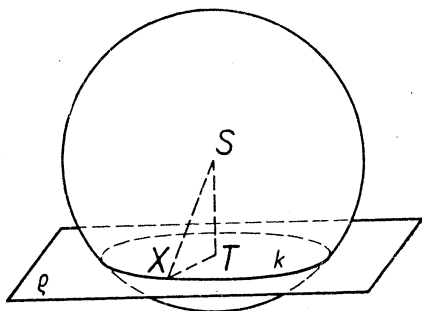
$$\overline{NR}^2 = \overline{LN}^2 + \overline{LR}^2 = \overline{LN}^2 + 25.$$

Dále soudíme podle Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníka  $LMN$ , že

$$\overline{LN}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{MN}^2 = 6^2 + 3^2 = 45.$$



Obr. 20.



Obr. 21.

(Tedy  $\overline{LN} = \sqrt{45}$ , ale výpočet této odmocniny je pro náš účel zbytečný.) Dosadíme-li za  $\overline{LN}^2$  do hořejšího výrazu pro  $\overline{NR}^2$ , dostaneme

$$\overline{NR}^2 = 45 + 25 = 70; \quad \overline{NR} = \sqrt{70} \doteq 8,36.$$

Tedy délka úhlopříčky  $NR$  je 8,4 cm s chybou menší než 1 mm.

Je zřejmé, že rovina vedená středem  $S$  kulové plochy protne tuto plochu v kružnici, jejíž střed je  $S$  a jejíž poloměr se rovná poloměru kulové plochy. Takové kružnice na kulové ploše se jmenují hlavní kružnice kulové plochy (viz kružnici  $h$  v obr. 20). Vedle hlavních kružnic jsou na kulové ploše ještě vedlejší kružnice, které mají střed různý od středu kulové plochy a poloměr menší než je poloměr kulové plochy.

V obr. 21 je znázorněna kulová plocha se středem  $S$  a poloměrem  $r$ , dále rovina  $\rho$ , která neprochází středem  $S$ , ale jejíž vzdálenost  $d$  od

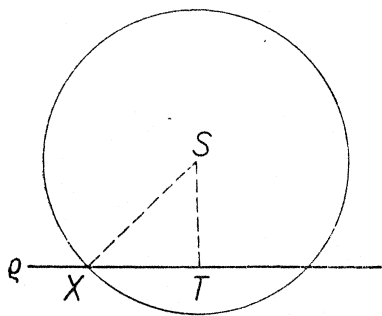
bodů  $S$  je menší než  $r$ . Spustíme s bodu  $S$  kolmici na rovinu  $\rho$  a označme  $T$  její patu, takže  $\overline{ST} = d$ . Leží-li bod  $X$  i v rovině  $\rho$  i na kulové ploše, vznikne nám pravoúhlý trojúhelník  $STX$ , jehož přepona  $SX$  má délku  $r$ , kdežto jedna odvěsna  $ST$  má délku  $d$ . Podle Pythagorovy věty má druhá odvěsna délku

$$\overline{TX} = \sqrt{r^2 - d^2}. \quad (*)$$

Obráceně budiž  $X$  takový bod v rovině  $\rho$ , že platí (\*). Podle Pythagorovy věty je

$$\overline{SX}^2 = \overline{ST}^2 + \overline{TX}^2 = d^2 + (\sqrt{r^2 - d^2})^2 = d^2 + (r^2 - d^2) = r^2,$$

tedy  $\overline{SX} = r$ , takže bod  $X$  leží na kulové ploše. Tedy rovina  $\rho$  protne kulovou plochu v kružnici, jejíž střed je  $T$  a jejíž poloměr je  $\sqrt{r^2 - d^2}$ .



Obr. 22.

Místo obr. 21 jsme mohli užítí jednoduššího obr. 22, ve kterém kulová plocha a rovina  $\rho$  jsou zastoupeny svými průseky s rovinou kolmou na rovinu  $\rho$  a procházející středem  $S$ .

V závěru tohoto paragrafu si ještě dokážeme, že Pythagorova věta platí pouze pro pravoúhlý trojúhelník. Budiž dán trojúhelník  $ABC$  s obvyklým označením  $a, b, c$  pro strany,  $\alpha, \beta, \gamma$  pro úhly. Je-li  $\gamma = 90^\circ$ , je  $c^2 = a^2 + b^2$  podle Pythagorovy věty. Dokážeme, že je

$$c^2 < a^2 + b^2, \text{ je-li } \gamma < 90^\circ,$$

$$c^2 > a^2 + b^2, \text{ je-li } \gamma > 90^\circ.$$

Budiž nejprve  $\gamma < 90^\circ$ . Není-li  $c$  nejdelší strana trojúhelníka, je zřejmě  $c^2 < a^2 + b^2$ . Je-li však  $c$  nejdelší strana, leží proti ní také největší úhel  $\gamma$ . Protože  $\gamma < 90^\circ$ , je tím spíše  $\alpha < 90^\circ$ . Proto pata  $D$  výšky  $BD$  padne dovnitř úsečky  $AC$  (viz obr. 23). Položíme-li

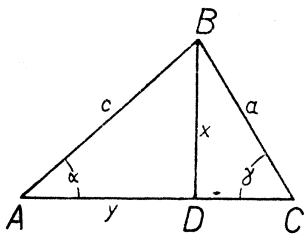
$$\overline{BD} = x, \quad \overline{AD} = y,$$

plyne z pravoúhlého trojúhelníka  $ABD$ , že

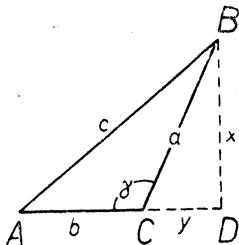
$$c^2 = x^2 + y^2.$$

Avšak  $x < a$ ,  $y < b$ , tedy  $x^2 + y^2 < a^2 + b^2$ ,  
takže  $c^2 < a^2 + b^2$ .

Budiž nyní  $\gamma > 90^\circ$ . Pata  $D$  výšky  $BD$  padne nyní na prodloužení úsečky  $AC$  za bod  $C$  (viz obr. 24). Položíme-li



Obr. 23.



Obr. 24.

$$\overline{BD} = x, \quad \overline{CD} = y,$$

jest  $\overline{AD} = y + b$ . Z pravoúhlého trojúhelníka  $ABD$  plyne podle Pythagorovy věty

$$c^2 = x^2 + (y + b)^2$$

neboli

$$c^2 = x^2 + y^2 + 2by + b^2,$$

takže

$$c^2 > x^2 + y^2 + b^2.$$

Avšak z pravoúhlého trojúhelníka  $BCD$  plyne podle Pythagorovy věty

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{tedy} \quad x^2 + y^2 + b^2 = a^2 + b^2,$$

takže  $c^2 > a^2 + b^2$ .

Chceme-li rozhodnouti, zda trojúhelník, jehož strany známe, je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý, označme si strany písmeny  $a, b, c$  tak, aby  $c$  byla nejdelsí strana. Protože proti nejdelsí straně leží největší úhel, je náš trojúhelník

- ostroúhlý, je-li  $c^2 < a^2 + b^2$ ,
- pravoúhlý, je-li  $c^2 = a^2 + b^2$ ,
- tupoúhlý, je-li  $c^2 > a^2 + b^2$ .

Na př.: Poněvadž  $3^2 + 4^2 = 5^2$ , soudíme, že trojúhelník, jehož strany jsou v poměru  $3 : 4 : 5$ , je pravoúhlý. To bylo známo v Číně již kolem r. 1100 př. Kr.

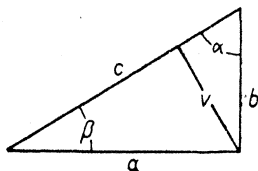
## Cvičení k § 2.

Nelze-li výsledek některého cvičení vyjádřit přesně, zaokrouhlete jej na 2 platné cifry.

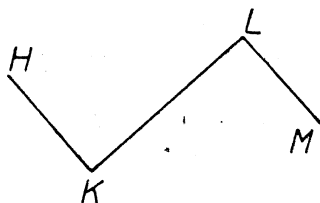
## I. Trojúhelníky a čtyřúhelníky.

16. (Viz obr. 25, kde trojúhelník je pravoúhlý.) Jednotka 1 cm.

- a)  $a = 8$ ;  $b = 15$ ; určete  $c$ .      e)  $c = 75$ ;  $b = 45$ ; určete  $a$ .  
 b)  $a = 5$ ;  $b = 12$ ; určete  $c$ .  
 c)  $a = 2,4$ ;  $b = 3,2$ ; určete  $c$ .  
 d)  $c = 18$ ;  $a = 15$ ; určete  $b$ .



Obr. 25.



Obr. 26.

17. Žebřík dlouhý 10 m je opřen o svislou zeď tak, že jeho spodní konec je vzdálen 6 m ode zdi. Jak vysoko sahá žebřík?

18. Žebřík právě dosáhne vrcholu svíslé zdi vysoké 9 m, je-li jeho spodní konec vzdálen 4 m ode zdi. Jak dlouhý je žebřík?

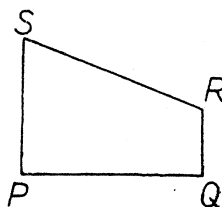
19. Cyklista jel 15 km k severu a potom 5 km k západu. Jak je potom vzdálen od místa, z něhož vyjel?

20. (Viz obr. 26.) Je-li  $\overline{HK} = 4$  cm,  $\overline{KL} = 8$  cm,  $\overline{LM} = 2$  cm,  $HK \perp KL$ ,  $KL \perp LM$ , určete  $\overline{HM}$ .

21. Určete délku úhlopříčky obdélníka s rozměry 5,2 dm; 6,8 dm.

22. Úhlopříčky kosočtverce mají délky 6 cm, 10 cm. Určete délku strany.

23. Strana kosočtverce má délku 3,2 cm; jedna úhlopříčka má délku 4,4 cm. Určete délku druhé úhlopříčky.



Obr. 27.

24. (Viz obr. 27, v němž  $SP \perp PQ$ ,  $RQ \perp PQ$ .)

- a)  $\overline{PS} = 3$  dm;  $\overline{PQ} = 24$  cm;  $\overline{QR} = 12$  cm. Určete  $\overline{RS}$ .  
 b)  $\overline{PS} = 8,4$  m;  $\overline{QR} = 3,6$  m;  $\overline{RS} = 7,2$  m. Určete  $\overline{PQ}$ .

25. Ve čtyřúhelníku  $EFGH$  je  $\sphericalangle EFG = 90^\circ$ ;  $\sphericalangle EGH = 90^\circ$ ;  $\overline{EF} = 12$  cm;  $\overline{FG} = 9$  cm;  $\overline{GH} = 8$  cm. Určete délku strany  $\overline{EH}$  a obsah čtyřúhelníka.

26.  $\overline{AD}$  je výška ostroúhlého trojúhelníka  $ABC$ . Je-li  $\overline{AB} = 2$  m,  $\overline{BC} = 16$  dm,  $\overline{CD} = 5$  dm, vypočtěte  $\overline{AC}$ .

27. V trojúhelníku  $PQR$  je  $\overline{PQ} = \overline{PR} = 26$  cm,  $\overline{QR} = 2$  dm. Určete obsah trojúhelníka.

28. Opakujte úlohu 27 s tím rozdílem, že  $\overline{PQ} = \overline{PR} = 3$  dm,  $\overline{QR} = 36$  cm.

29. (Viz obr. 25, kde  $v$  je výška pravoúhlého trojúhelníka.)

- Je-li  $a = 8$  cm,  $b = 6$  cm, určete  $v$ .
- Je-li  $a = 2,3$  m;  $c = 5,2$  m, určete  $c$ .
- Je-li  $\alpha = 45^\circ$ ,  $a = 36$  cm, určete  $c, v$ .
- Je-li  $\alpha = 45^\circ$ ,  $c = 5,8$  m, určete  $a, v$ .
- Je-li  $\alpha = 60^\circ$ ,  $a = 4$  m, určete  $b, c$ .
- Je-li  $\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 6$  m, určete  $b, c$ .
- Je-li  $\alpha = 60^\circ$ ,  $c = 1$  m, určete  $a, b$ .

30. Do kružnice s poloměrem 17 cm je vepsán

- čtverec;
- rovnostanný trojúhelník.

Určete délku strany.

31. Kružnici s poloměrem 13 cm je opsán rovnostanný trojúhelník. Určete jeho obsah.

32. Délka strany pravidelného šestiúhelníka je 23 cm. Určete poloměr vepsané kružnice.

33.  $ABCDEF$  je pravidelný šestiúhelník;  $\overline{AB} = 13$  mm.

- Určete obsah šestiúhelníka.
- Dokažte, že trojúhelník  $ACE$  je rovnostanný; určete délku jeho strany a obsah.

## II. Kružnice.

34. Na kružnici s poloměrem 6 cm leží body  $K, L$  ve vzdálenosti 8 cm od sebe. Jak daleko je přímka  $KL$  od středu kružnice?

35. Ve vzdálenosti 16 km od přímé trati je dělo, kterým lze stříletí do vzdálenosti 30 km. Jak dlouhý kus trati je v dostřelu?

36. Dvě rovnoběžné tětivy kružnice s poloměrem 6 cm mají délky 6 cm a 10 cm. Jaká je vzájemná vzdálenost obou tětiv? [Jsou dva možné případy.]

37. Tětiva kružnice  $k$  má délku 12 cm a je vzdálena 25 mm od středu  $S$  kružnice  $k$ .

- Jak dlouhá je tětiva kružnice  $k$ , která je vzdálena 5 cm od středu  $S$ ?
- Jak daleko od středu  $S$  je tětiva kružnice  $k$  dlouhá 6 cm?

38. Kružnice  $k$  má střed  $S$  a poloměr 6 cm. Je-li  $\overline{AS} = 1$  dm, určete délku tečny vedené z bodu  $A$  ke kružnici  $k$ .

39. Délka tečny z bodu  $A$  ke kružnici  $k$  je 6 cm; poloměr kružnice  $k$  je 45 mm. Určete vzdálenost bodu  $A$  od nejbližšího bodu kružnice  $k$ .

### III. Tělesa.

40. Místnost je dlouhá 6 m, široká  $4\frac{1}{2}$  m, vysoká  $3\frac{1}{2}$  m.

- Určete vzdálenost rohu podlahy od protějšího rohu stropu.
- Určete vzdálenost rohu podlahy od středu stropu.
- Určete vzdálenost rohu podlahy od středu místnosti.

41. Hrana krychle měří 8 cm. Určete

- délku úhlopříčky,
- vzdálenost středů dvou sousedních stěn.

42. Průměr podstavy rotačního kužele je 14 cm, výška je 12 cm. Určete délku strany.

43. Výška rotačního kužele je 1 dm, délka strany je 16 cm. Určete průměr podstavy.

44. Průměr podstavy rotačního kužele je 8 cm, délka strany je 12 cm. Určete výšku.

45. Délka podstavné hrany pravidelného

- čtyřbokého,
- trojbokého

jehlanu je 4 cm, výška je 5 cm. Určete délku pobočné hrany.

46. Podstava jehlanu je čtverec  $ABCD$  s délkou strany  $\bar{5}$  cm;  $V$  je vrchol jehlanu. Přímka  $AV$  je kolmá na rovinu podstavy; jest  $\bar{AV} = 4$  cm. Určete délky hran  $BV$ ,  $CV$ ,  $DV$ .

47. Čtverec  $EFGH$  s délkou strany 2 cm byl přehnut podél úhlopříčky  $EG$  tak, že roviny trojúhelníků  $EFG$ ,  $EHG$  stojí na sobě kolmo. Jaká je v přehnuté poloze vzdálenost  $\bar{FH}$ ?

48. Sestavte vzorec pro výšku pravidelného čtyřstěnu s délkou hrany  $a$ .

49. Z dřevěné koule poloměru 4 cm byla odříznuta část omezená kruhem o poloměru 2 cm. Zbytek koule je postaven na vodorovnou podložku rovnou kruhovou stěnou. Jak vysoko nad podložkou je nejvyšší bod tělesa?

50. Míč s poloměrem 12 cm pluje na vodě ponořen do hloubky tři čtvrtin průměru. Určete poloměr kružnice, podél níž dosahuje hladina vodní k povrchu míče.

51. Na dutém válci s vnitřním poloměrem 1 dm je postavena koule. Nejvyšší bod koule je 15 cm nad válcem. Určete poloměr koule.

52. Do polokulovité vázy s vnitřním průměrem 6 dm je nalito tolik vody, že největší hloubka vody je 12 cm. Určete poloměr kruhu utvořeného hladinou vody.

53. Podstava kolmého hranolu je rovnoběžník  $ABCD$ ;  $\bar{AB} = 6$  cm,  $\bar{AD} = 5$  cm,  $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ ; výška hranolu je 4 cm. Určete povrch a objem hranolu.

54. Pravidelný trojboký hranol má podstavnou hranu 5 cm, pobočnou hranu 4 cm. Určete povrch a objem hranolu.

55. Pravidelný šestiboký hranol má výšku 5 cm a objem  $100 \text{ cm}^3$ . Určete povrch hranolu.

56. Podstava kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník s délkou základny 5 cm. Výška hranolu je 3 cm a objem hranolu je  $40 \text{ cm}^3$ . Určete povrch hranolu.

#### IV. Obrácení Pythagorovy věty.

57. Rozhodněte, zdali trojúhelník je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý jsou-li při určité volbě délkové jednotky délky stran dány čísly:

- a) 4; 5; 6;                      b) 3; 5; 6;                      c) 5; 12; 13;  
 d) 8; 9; 12;                      e) 12; 36; 34;                      f) 8; 7; 11;  
 g) 15; 16; 22;                      h) 12; 37; 35;                      i) 25,5; 25,7; 3,2;  
 j)  $4n$ ;  $4n^2 - 1$ ;  $4n^2 + 1$ ;    k)  $m^2 + n^2$ ;  $m^2 - n^2$ ;  $2mn$ .

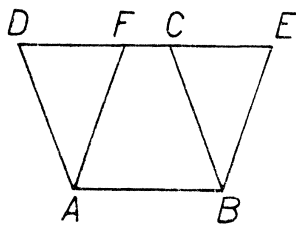
58. Délky úhlopříček rovnoběžníka jsou 5 cm a 12 cm, délka jedné strany je 65 mm. Dokažte, že je to kosočtverec.

59.  $D$  je pata výšky  $AD$  trojúhelníka  $ABC$ ; bod  $D$  leží uvnitř úsečky  $BC$ . Je-li  $\overline{AB} = 1 \text{ dm}$ ,  $\overline{AC} = 75 \text{ mm}$ ,  $\overline{AD} = 6 \text{ cm}$ , určete  $\overline{BC}$  a dokažte, že  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ .

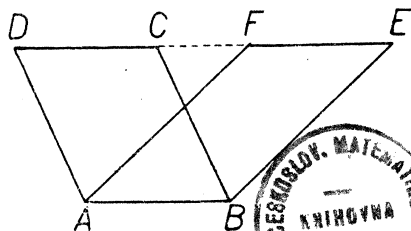
60. Podstava pravidelného čtyřbokého jehlanu s vrcholem  $V$  je čtverec  $EFGH$  se stranou 4 cm. Pobočné stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Dokažte, že  $\sphericalangle EVG = 90^\circ$  a určete výšku jehlanu.

### § 3. Proměna obrazců. Euklidovy věty.

V § 1 jsme poznali, jak se dá počítati obsah jednoduchých rovinných obrazců. Tyto poznatky si nyní doplníme studiem obrazců, které mají různý tvar, ale též obsah. Budeme krátce říkati, že dva obrazce



Obr. 28a.



Obr. 28b.

jsou si rovny, mají-li též obsah. Jsou-li dva obrazce shodné, jsou si rovny; ale dva obrazce, které jsou si rovny, nemusí býti shodné.

Počněme studiem rovnoběžníků! Mají-li dva rovnoběžníky  $ABCD$ ,  $ABEF$  společnou stranu a leží-li protější strany  $CD$ ,  $EF$  v téže přímce, jsou si ty dva rovnoběžníky rovny (viz obr. 28a, b). Poučku právě vyslovenou můžeme si odvoditi ze známého





vzorce pro obsah rovnoběžníka. Neboť tento obsah je  $\overline{AB} \cdot v$ , kde  $v$  znamená výšku příslušnou straně  $AB$ , která je stejná u obou rovnoběžníků  $ABCD$ ,  $ABEF$ . Ale můžeme si dokázati naši poučku také jinak. Za tím účelem si všimněme trojúhelníků  $ADF$ ,  $BCE$ . Jest  $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BCE$  (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami) a z téhož důvodu je  $\sphericalangle AFD = \sphericalangle BEC$ ; mimoto je  $\overline{AD} = \overline{BC}$  (protější strany rovnoběžníka). Tedy

$$ADF \cong BCE \quad (suu)$$

a proto trojúhelníky  $ADF$ ,  $BCE$  jsou si rovny. Nyní si všimněme lichoběžníka  $ABED$ . Ubereme-li od tohoto lichoběžníka trojúhelník  $BCE$ , vznikne rovnoběžník  $ABCD$ ; ubereme-li však od téhož lichoběžníka trojúhelník  $ADF$ , vznikne rovnoběžník  $ABEF$ . Protože oba trojúhelníky jsou si rovny a každý z nich byl ubrán od téhož lichoběžníka, jsou si rovnoběžníky  $ABCD$ ,  $ABEF$  rovny, což jsme měli dokázati.

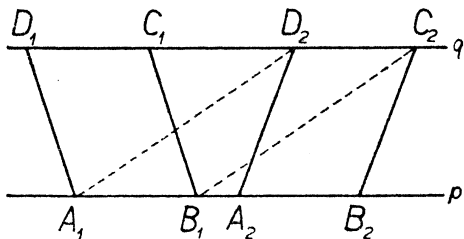
Poznámka. V případě obr. 28a jsme místo lichoběžníka  $ABED$  mohli také užiti lichoběžníka  $ABCF$ . Připojíme-li k lichoběžníku  $ABCF$  nejprve trojúhelník  $ADF$ , vznikne rovnoběžník  $ABCD$ ; připojíme-li však k témuž lichoběžníku trojúhelník  $BCE$  rovný trojúhelníku  $ADF$ , vznikne rovnoběžník  $ABEF$ . Proto jsou si rovny oba rovnoběžníky v obr. 28a; ale tento postup selže u obr. 28b.

Je-li u rovnoběžníků  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$  strana  $A_1B_1$  stejně dlouhá jako strana  $A_2B_2$ , leží-li ty dvě strany v téže přímce  $p$ , a leží-li také obě protější strany v téže přímce  $q$ , jsou si oba rovnoběžníky rovny. Také tato poučka plyne ihned ze vzorce pro obsah rovnoběžníka, neboť obsahy našich rovnoběžníků jsou

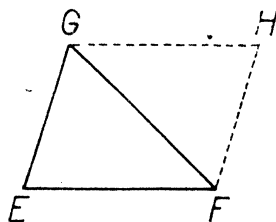
$$\overline{A_1B_1} \cdot v = \overline{A_2B_2} \cdot v,$$

kde táž délka  $v$  znamená i výšku rovnoběžníka  $A_1B_1C_1D_1$  příslušnou straně  $A_1B_1$  i výšku rovnoběžníka  $A_2B_2C_2D_2$  příslušnou straně  $A_2B_2$ . Bez užití vzorce pro obsah můžeme dokázati naši poučku takto (viz obr. 29). Všimněme si čtyřúhelníka  $A_1B_1C_2D_2$ . Jest  $A_1B_1 \parallel D_2C_2$ ; mimoto je však  $\overline{A_1B_1} = \overline{D_2C_2}$ , neboť obě ty délky jsou rovny téže délce  $\overline{A_2B_2}$ . Tedy  $A_1B_1C_2D_2$  je rovnoběžník. Tomuto rovnoběžníku je podle předešlé poučky roven jednak rovnoběžník  $A_1B_1C_1D_1$ , neboť oba rovnoběžníky  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_1B_1C_2D_2$  mají společnou stranu  $A_1B_1$  a protější

strany leží v téže přímce  $q$ ; témuž rovnoběžníku  $A_1B_1C_2D_2$  je však také roven rovnoběžník  $A_2B_2C_2D_2$ , neboť oba rovnoběžníky mají společnou stranu  $C_2D_2$  a protější strany leží v téže přímce  $p$ . Tedy jsou si rovny rovnoběžníky  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ , jak jsme chtěli dokázat.



Obr. 29.



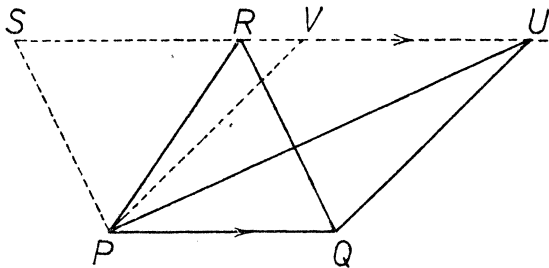
Obr. 30.

Od rovnoběžníků přejdeme snadno ke trojúhelníkům, neboť každý trojúhelník je polovina rovnoběžníka. Je-li dán libovolný trojúhelník  $EFG$  (viz obr. 30), vedeme si vrcholem  $F$  rovnoběžku se stranou  $EG$  a vrcholem  $G$  rovnoběžku se stranou  $EF$ . Vznikne nám rovnoběžník  $EFHG$ . Protože protější strany rovnoběžníka jsou si rovny, jest

$$EFG \cong HGF \quad (sss).$$

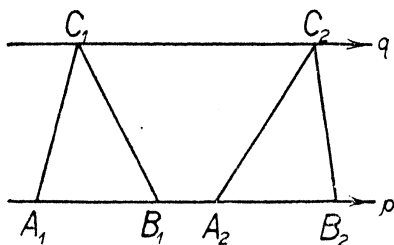
Proto oba trojúhelníky  $EFG$ ,  $HGF$  jsou si rovny, takže každý z nich je polovinou rovnoběžníka  $EFHG$  (t. j. obsah trojúhelníka je polovina obsahu rovnoběžníka).

Mají-li dva trojúhelníky  $PQR$ ,  $PQU$  společnou stranu  $PQ$  a je-li spojnice  $RU$  protějších vrcholů rovnoběžná s přímkou  $PQ$ , jsou si oba trojúhelníky rovny. Vyložte sami, jak lze tuto poučku odůvodnit ze vzorce pro obsah trojúhelníka! Bez užití vzorce ji dokážeme takto (viz obr. 31). Sestrojíme si rovnoběžníky  $PQRS$ ,  $PQUV$ , které mají společnou stranu  $PQ$ ; protože protější strany

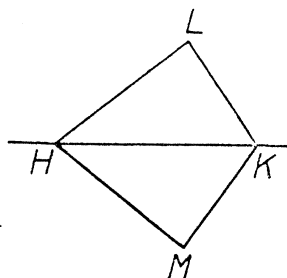


Obr. 31.

$RS$ ,  $UV$  leží v téže přímce, jsou si oba rovnoběžníky  $PQRS$ ,  $PQUV$  rovny. Ale trojúhelník  $PQR$  je polovina rovnoběžníka  $PQRS$  a trojúhelník  $PQU$  je polovina rovnoběžníka  $PQUV$ , takže oba trojúhelníky jsou si rovny.



Obr. 32.

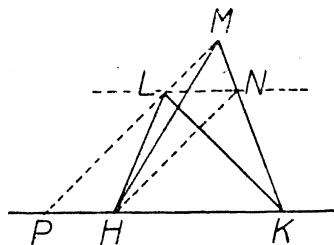


Obr. 33.

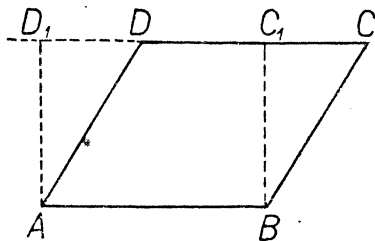
Je-li u trojúhelníků  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$  strana  $A_1B_1$  stejně dlouhá jako strana  $A_2B_2$ , leží-li ty dvě strany v téže přímce  $p$ , a když protější vrcholy  $C_1$ ,  $C_2$  buďto splynou nebo leží na rovnoběžce  $q$  s přímkou  $p$ , jsou si oba trojúhelníky rovny (viz obr. 32). Odůvodněte sami tuto poučku napřed pomocí vzorce pro obsah trojúhelníka, potom bez užití tohoto vzorce. Provedte důkaz také pro případ, že body  $C_1$ ,  $C_2$  splynou!

Poučky, které jsme dosud poznali v tomto paragrafu, dají se v jistém smyslu obrátit. Spokojíme se s jedním příkladem. Mějme dva trojúhelníky  $HKL$ ,  $HKM$  se společnou stranou  $HK$ , které jsou si rovny. Můžeme tvrdit, že přímka  $LM$  je rovnoběžná s přímkou  $HK$ ? Obr. 33 ukazuje, že nikoli, neboť je  $HKL \cong HKM$ , ale přes to není  $LM \parallel HK$ . Platí však tato poučka. Jsou-li si rovny trojúhelníky  $HKL$ ,  $HKM$  se společnou stranou  $HK$  a leželi oba body  $L$ ,  $M$  na téže straně od přímky  $HK$ , jest  $LM \parallel HK$ . Abychom si to dokázali, předpokládejme, že přímka  $LM$  je různoběžná s přímkou  $HK$ , takže přímky  $HK$ ,  $LM$  mají společný bod  $P$ ; máme dokázati, že oba trojúhelníky  $HKL$ ,  $HKM$  nemohou si býti rovny. Protože body  $L$ ,  $M$  leží oba po téže straně od přímky  $HK$ , musí ležeti bod  $P$  na prodloužení úsečky  $LM$  buďto za bod  $L$  nebo za bod  $M$ . Pro určitost necht' leží  $P$  třeba na prodloužení úsečky  $LM$  za bod  $L$  (viz obr. 34). Bod  $L$  leží uvnitř strany  $MP$  trojúhelníka  $PKM$ . Rovnoběžka vedená bodem  $L$  s protější stranou  $PK$  tohoto trojúhelníka protne třetí

stranu  $KM$  v bodě  $N$ . Trojúhelník  $HKM$  je pak zřejmě větší než trojúhelník  $HKN$ . Avšak trojúhelník  $HKN$  se rovná trojúhelníku  $HKL$ , neboť oba trojúhelníky mají společnou stranu  $HK$  a mimoto je  $LN \parallel HK$ . Tedy trojúhelník  $HKL$  je menší než trojúhelník  $HKM$ .



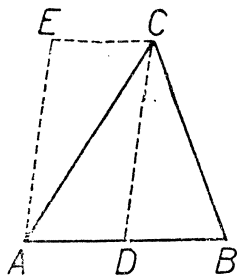
Obr. 34.



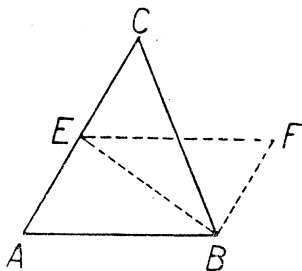
Obr. 35.

Nyní si promluvíme o t. zv. proměně obrazců. To znamená, že se budeme učit, jak se sestrojí obrazec, který se rovná danému obrazci a jehož tvar vyhovuje předepsaným podmínkám.

V obr. 35 je naznačeno, jak lze rovnoběžník  $ABCD$  proměnit v obdélník  $ABC_1D_1$ . Popište sami konstrukci obdélníka! Obdélník je roven rovnoběžníku, protože mají společnou stranu  $AB$  a protější strany  $CD, C_1D_1$  leží obě v téže přímce.



Obr. 36a.

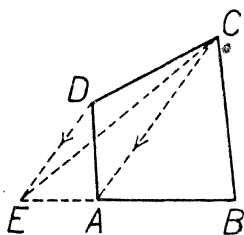


Obr. 36b.

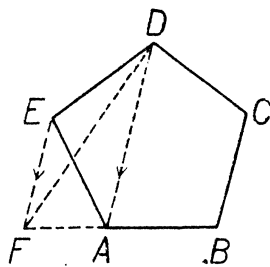
V obr. 36a a 36b jsou naznačeny dva způsoby proměny trojúhelníka  $ABC$  na rovnoběžník. V obr. 36a je  $D$  střed úsečky  $AB$ . Trojúhelník  $ADC$  je polovinou rovnoběžníka  $ADCE$ ; avšak trojúhelníky  $ADC, DBC$  jsou si rovny (proč?), takže trojúhelník  $ADC$  je také polovinou trojúhelníka  $ABC$ , takže tento trojúhelník se rovná rovnoběž-

níku  $ADCE$ . V obr. 36b je  $E$  střed úsečky  $AC$ ; trojúhelník  $ABE$  je jednak polovinou rovnoběžníka  $ABFE$ , jednak polovinou trojúhelníka  $ABC$  (proč?). Proto trojúhelník  $ABC$  se rovná rovnoběžníku  $ABFE$ .

V obr. 37a je naznačeno, jak lze čtyřúhelník  $ABCD$  proměnit na trojúhelník  $EBC$ . Bod  $E$  je průsečík přímky  $AB$  s rovnoběžkou vedenou bodem  $D$  k přímce  $AC$ . Trojúhelníky  $ACD$ ,  $ACE$  mají společnou



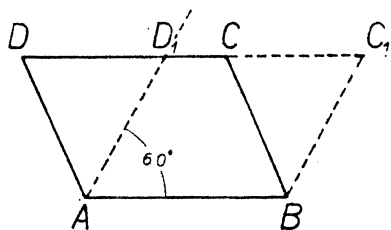
Obr. 37a.



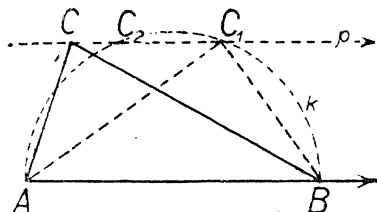
Obr. 37b.

stranu  $AC$  a protější vrcholy  $D$ ,  $E$  leží na rovnoběžce s přímkou  $AC$ ; proto trojúhelníky  $ACD$ ,  $ACE$  jsou si rovny. Připojíme-li trojúhelník  $ABC$  ke trojúhelníku  $ACD$ , vznikne čtyřúhelník  $ABCD$ ; připojíme-li však též trojúhelník  $ABC$  k trojúhelníku  $ACE$ , vznikne trojúhelník  $EBC$ . Proto je čtyřúhelník  $ABCD$  roven trojúhelníku  $EBC$ .

V obr. 37b je naznačeno, jak lze pětiúhelník  $ABCDE$  proměnit na čtyřúhelník  $FBCD$ . Popište sami konstrukci a odůvodněte ji! Podobným způsobem lze každý mnohoúhelník proměnit v jiný, jehož



Obr. 38.

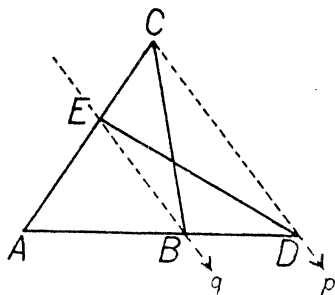


Obr. 39.

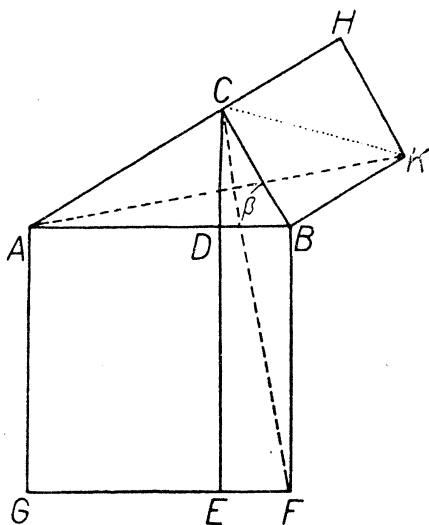
počet stran je o jednu menší. Proto můžeme každý mnohoúhelník postupně proměnit v trojúhelník; protože trojúhelník dovedeme proměnit v rovnoběžník a tento v obdélník, můžeme každý mnohoúhelník proměnit v obdélník.

V obr. 38 je naznačeno, jak lze rovnoběžník  $ABCD$  proměnit v rovnoběžník  $ABC_1D_1$ , u kterého  $\sphericalangle BAD_1 = 60^\circ$ . V obr. 39 je naznačeno, jak lze trojúhelník  $ABC$  proměnit v trojúhelník  $ABC_1$ , u kterého  $\sphericalangle AC_1B = 90^\circ$ . Popište sami tyto konstrukce a odůvodněte je! (V obr. 39 je  $p \parallel AB$  a  $k$  je polokružnice nad průměrem  $AB$ .)

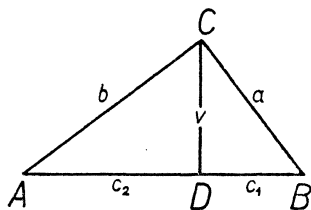
V obr. 40 je naznačeno, jak lze trojúhelník  $ABC$  proměnit v trojúhelník  $ADE$ , u kterého  $\overline{AD}$  je daná délka větší než  $\overline{AB}$ . Vedeme napřed spojnicí  $p$  bodů  $C, D$  a potom bodem  $B$  rovnoběžku  $q$  s přímkou  $p$ , která protne přímku  $AC$  v hledaném bodě  $E$ . Odůvodnění: Trojúhelníky  $BEC, BED$  mají společnou stranu  $BE$  a protější vrcholy  $C, D$  leží na rovnoběžce s přímkou  $BE$ ; proto jsou si trojúhelníky rovny. Připojíme-li však trojúhelník  $BEC$  ke trojúhelníku  $ABE$ , vznikne trojúhelník  $ABC$ ; připojíme-li trojúhelník  $BED$  k témuž trojúhelníku  $ABE$ , vznikne trojúhelník  $ADE$ . Proto jsou si trojúhelníky  $ABC, ADE$  rovny, jak jsme chtěli dokázat. Tých obr. 40 také vysvětluje, jak lze obráceně troj-



Obr. 40.



Obr. 42.



Obr. 41.

úhelník  $ADE$  proměnit v trojúhelník  $ABC$ , ve kterém  $\overline{AB}$  je daná délka menší než  $\overline{AD}$ . Popište sami konstrukci!

Nyní se ještě naučíme, jak lze proměnit obdélník na čtverec. Protože umíme libovolný mnohoúhelník proměnit na obdélník, budeme potom umět proměnu každého mnohoúhelníka na čtverec. Proměna obdélníka na čtverec se dá provést podle kterékoli ze dvou pouček o pravoúhlém trojúhelníku, kterým se říká **věty Euklidovy**, a to Euklidova věta o výšce a Euklidova věta o odvěsně. V obr. 41 máme pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  rozdělený výškou  $CD$  na dva pravoúhlé trojúhelníky. Pata výšky  $D$  rozdělí přeponu  $AB$  na dvě úsečky  $AD$ ,  $BD$ , kterým říkáme krátce **úseky na přeponě**;  $BD$  je úsek přilehlý odvěsně  $a$  a jeho délku značíme  $c_1$ ;  $AD$  je úsek přilehlý odvěsně  $b$  a jeho délku značíme  $c_2$ .

Euklidova věta o výšce zní: Čtverec nad výškou pravoúhlého trojúhelníka rovná se obdélníku, jehož rozměry jsou oba úseky přepony. Krátce je vyjádřena vzorcem

$$h^2 = c_1 c_2.$$

Euklidova věta o odvěsně zní: Čtverec nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka rovná se obdélníku, jehož rozměry jsou přepona a přilehlý úsek. Pro odvěsnu  $a$  je vyjádřena vzorcem

$$a^2 = c_1 c,$$

pro odvěsnu  $b$  vzorcem

$$b^2 = c_2 c.$$

Dokážeme si napřed Euklidovu větu o odvěsně. Stačí ovšem provést důkaz pro odvěsnu  $a$ . V obr. 42 máme opět pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  a jeho výšku  $CD$ . Dále je v obrazci sestrojen čtverec  $ABFG$  nad přeponou a čtverec  $BCHK$  nad odvěsnou  $a$ . Přímka  $CD$  rozdělí čtverec  $ABFG$  na dva obdélníky  $ADEG$ ,  $BDEF$ . Máme dokázat, že obdélník  $BDEF$  se rovná čtverci  $BCHK$ . Polovina obdélníka  $BDEF$  je trojúhelník  $BDF$ ; polovina čtverce  $BCHK$  je trojúhelník  $BCK$ . Proto stačí dokázat, že trojúhelník  $BDF$  se rovná trojúhelníku  $BCK$ . Avšak trojúhelník  $BDF$  se rovná trojúhelníku  $BCF$ , neboť mají společnou stranu  $BF$  a spojnice  $CD$  protějšších vrcholů je rovnoběžná s přímkou  $BF$ ; podobně trojúhelník  $BCK$  se rovná trojúhelníku  $BAK$ , neboť mají společnou stranu  $BK$  a spojnice  $AC$  protějšších vrcholů je rovnoběžná s přímkou  $BK$ . Proto stačí dokázat, že trojúhelník  $BCF$  se rovná trojúhelníku  $BAK$  a důkaz bude hotov, odůvodníme-li, že je dokonce

$$BCF \cong BKA \quad (\text{sus}).$$

To je však snadné, neboť

$$\overline{BC} = \overline{BK} \quad (\text{strany čtverce } BCHK),$$

$$\overline{BF} = \overline{BA} \quad (\text{strany čtverce } ACFG)$$

a z obr. 99 je patrné, že

$$\sphericalangle CBF = \beta + 90^\circ, \quad \sphericalangle KBA = \beta + 90^\circ, \quad \text{tedy} \quad \sphericalangle CBF = \sphericalangle KBA.$$

Provedte sami znovu týž důkaz, tentokrát pro odvěsnu  $b$ !

Při důkaze Euklidovy věty o odvěsně jsme se obešli bez znalosti Pythagorovy věty. Proto si můžeme znovu odvodit Pythagorovu větu na základě věty právě dokázané. Je to velmi snadné, neboť ze vzorců

$$a^2 = c_1c, \quad b^2 = c_2c$$

plyne

$$a^2 + b^2 = (c_1 + c_2)c,$$

což už je Pythagorova věta, neboť zřejmě  $c_1 + c_2 = c$ . Tímto způsobem postupuje Euklid ve svých proslulých Základech.

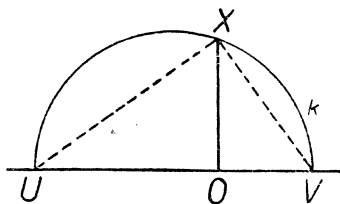
Euklidovu větu o výšce odvodíme snadno z Euklidovy věty o odvěsně, užijeme-li Pythagorovy věty na pravoúhlý trojúhelník  $BDC$  (viz obr. 41). Tím dostaneme

$$v^2 = a^2 - c_1^2;$$

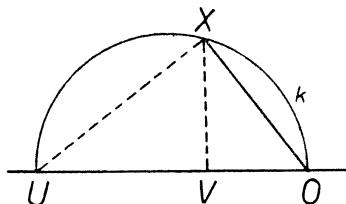
za  $a^2$  dosadíme podle Euklidovy věty o odvěsně hodnotu  $c_1c$  a dostaneme

$$v^2 = c_1c - c_1^2 = c_1(c - c_1) = c_1c_2,$$

neboť  $c - c_1 = c_2$ .



Obr. 43.



Obr. 44.

Máme-li obdélník, jehož rozměry jsou  $u, v$ , proměnit na čtverec, můžeme postupovati dvojím způsobem (viz obr. 43 a 44). V obou



obrazcích je  $\overline{OU} = u$ ,  $\overline{OV} = v$  a strana hledaného čtverce je  $x = \overline{OX}$ . V obr. 43 je sestrojena polokružnice  $k$  nad průměrem  $UV$ ; kolmice vztyčená v bodě  $O$  k přímce  $UV$  protne  $k$  v hledaném bodě  $X$ . Odůvodnění: Podle Thaletovy věty trojúhelník  $UVX$  má pravý úhel při vrcholu  $X$ , takže podle Euklidovy věty o výšce je  $\overline{OX}^2 = \overline{OU} \cdot \overline{OV}$  neboli  $x^2 = uv$ . V obr. 44 předpokládáme, že  $u > v$ ; v obrazci je sestrojena polokružnice  $k$  nad průměrem  $OU$ ; kolmice vztyčená v bodě  $V$  k přímce  $UV$  protne  $k$  v hledaném bodě  $X$ . Odůvodnění: Podle Thaletovy věty má trojúhelník  $OUX$  pravý úhel při vrcholu  $X$ , takže podle Euklidovy věty o odvěsně je  $\overline{OX}^2 = \overline{OU} \cdot \overline{OV}$  neboli  $x^2 = uv$ .

Týž význam jako rovnice

$$x^2 = uv$$

má úměra

$$u : x = x : v;$$

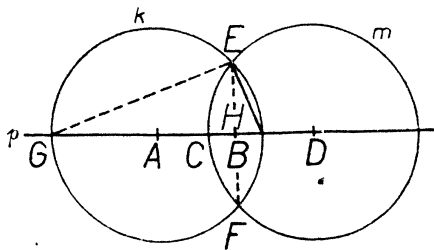
proto říkáme, že délka  $x$  je střední geometrická úměrná délek  $u, v$ .

Naučili jsme se dvěma konstrukcím střední geometrické úměrné  $x$  dvou délek  $u, v$ , znázorněným v obr. 43 a 44. Při obou je třeba rozpůlití úsečky, abychom mohli sestrojiti polokružnici  $k$ . V obr. 45 je znázorněna jednodušší konstrukce, při které půlení odpadne; opět předpokládáme, že je  $u > v$ . Na přímce  $p$  nanese postupně délky

$$\overline{AB} = u, \quad \overline{BC} = v, \quad \overline{CD} = u$$

tak, aby bod  $C$  byl mezi body  $A, B$  a bod  $B$  mezi body  $C, D$ . Potom sestrojíme kružnice  $k, m$  se středy  $A, D$  a s poloměrem  $u$ , takže  $k$  prochází bodem  $B$ ,  $m$  bodem  $C$ .

Je-li  $E$  jeden průsečík obou kružnic, je  $\overline{BE} = x$ . Odůvodnění: Budiž  $F$  druhý průsečík kružnic  $k, m$ ,  $G$  druhý průsečík kružnice  $k$  s přímkou  $p$  a  $H$  průsečík přímky  $EF$  s přímkou  $p$ . Podle konstrukce je  $EF$  osa úsečky  $AD$ , takže je  $EH \perp p$  a mimoto je  $\overline{AH} = \overline{HD}$ . Protože je také  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , je



Obr. 45.

$$\overline{AB} - \overline{AH} = \overline{CD} - \overline{HD}$$

neboli  $\overline{BH} = \overline{CH}$ , takže  $\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{BC}$  neboli  $\overline{BH} = \frac{1}{2}v$ . Trojúhelník  $BEG$  má podle Thaletovy věty pravý úhel při vrcholu  $E$  a  $EH$  je výška tohoto trojúhelníka, takže podle Euklidovy věty o odvěsně je

$$\overline{BE}^2 = \overline{BG} \cdot \overline{BH}.$$

Avšak  $\overline{BG} = 2u$ ,  $\overline{BH} = \frac{1}{2}v$ ,  $2u \cdot \frac{1}{2}v = uv$ , takže  $\overline{BE}^2 = uv$ , tedy  $\overline{BE} = x$ , jak jsme chtěli dokázat.

Známe-li u pravoúhlého trojúhelníka  $ABC$  dvě ze šesti hodnot  $a, b, c, v, c_1, c_2$  (viz obr. 41), můžeme vypočísti ostatní čtyři hodnoty podle vzorců, které nám jsou známy. Je to především zřejmý vzorec

$$c_1 + c_2 = c, \quad \text{dále vzorec} \quad ab = cv,$$

který známe z § 2 (str. 12), potom Euklidovy věty

$$v^2 = c_1c_2, \quad a^2 = c_1c, \quad b^2 = c_2c,$$

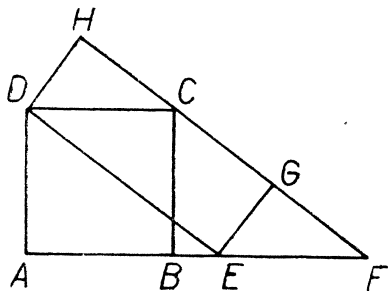
konečně je to Pythagorova věta, které můžeme užiti nejen na trojúhelník  $ABC$ , nýbrž i na trojúhelníky  $ACD, BCD$ , což dává vzorec

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad a^2 = c_1^2 + v^2, \quad b^2 = c_2^2 + v^2.$$

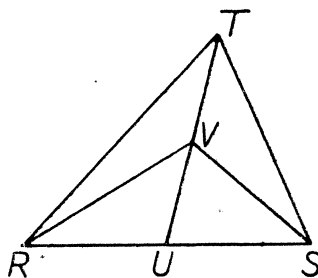
### Cvičení k § 3.

#### I. Rovné rovnoběžníky a trojúhelníky.

**61.** V obr. 46  $ABCD$  je čtverec,  $DEGH$  je obdélník; dokažte, že se oba sobě rovnají. [Porovnejte je s rovnoběžníkem  $CDEF$ .]



Obr. 46.



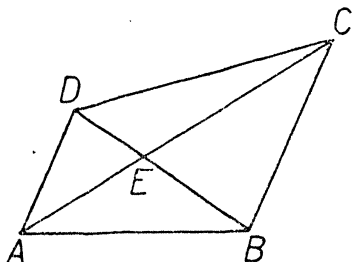
Obr. 47.

**62.**  $KLMN$  je rovnoběžník:  $P$  je střed strany  $KN$ ; bod  $Q$  leží na prodloužení úsečky  $KL$  a jest  $\overline{KL} = \overline{LQ}$ . Dokažte, že trojúhelník  $PQN$  se rovná polovině rovnoběžníka  $KLMN$ .

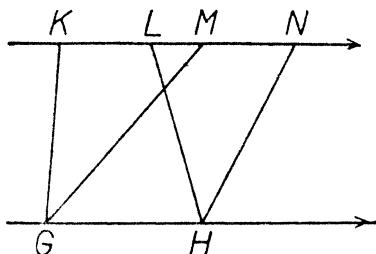
**63.** V obr. 47  $U$  je střed úsečky  $RS$  a  $V$  je střed úsečky  $TU$ . Dokažte, že trojúhelníky  $RTV, STV$  jsou si rovny.

64. (Viz obr. 48.)

- a) Je-li  $AD \parallel BC$ , který trojúhelník v obrazi je rovný trojúhelníku  $ABC$ ?
- b) Je-li  $AD \parallel BC$ , dokažte, že trojúhelníky  $ABE$ ,  $CDE$  jsou si rovný.
- c) Je-li  $E$  střed úsečky  $BD$ , dokažte, že trojúhelníky  $ABC$ ,  $ACD$  jsou si rovný.



Obr. 48.



Obr. 49.

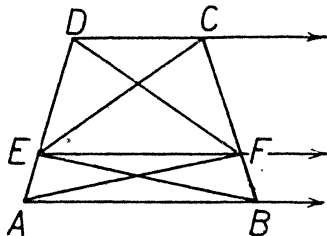
65. V obr. 49 je  $\overline{KL} = \overline{MN}$ ; dokažte, že lichoběžníky  $\hat{GHLK}$ ,  $\hat{GHNM}$  jsou si rovný. (Neužívejte vzorce pro obsah lichoběžníka.)

66. (Viz obr. 50.)

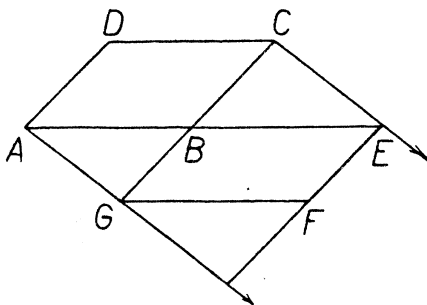
- a) Dokažte, že trojúhelníky  $BCE$ ,  $ADF$  jsou si rovný.
- b) Zvolte si bod  $G$  na úsečce  $AB$  a bod  $H$  na úsečce  $CD$ . Dokažte, že čtyřúhelník  $EGFH$  se rovná trojúhelníku  $ADF$ .

67. Narýsujte si rovnoběžník  $PQRS$ ; zvolte si bod  $X$  na straně  $PS$  a bod  $Y$  na prodloužení strany  $PQ$  za bod  $Q$ . Dokažte, že trojúhelníky  $QRX$ ,  $RSY$  jsou si rovný.

68. V obr. 51 jsou dva rovnoběžníky  $ABCD$ ,  $BEFG$ . Dokažte, že jsou si rovný. [Vedte spojnice  $AC$ ,  $EG$ .]



Obr. 50.



Obr. 51.

69. Narýsujte si libovolný čtyřúhelník  $KLMN$ . Sestrojte bod  $H$  tak, aby bylo  $KH \parallel MN$ ,  $LH \parallel MK$ . Dokažte, že lichoběžník  $HKMN$  se rovná čtyřúhelníku  $KLMN$ .

70. Sestrojte si čtyřúhelník  $TYXZ$  tak, aby úhlopříčka  $TX$  půlila úhlopříčku  $YZ$ . Dokažte, že čtyřúhelník  $TYXZ$  je rozpučen úhlopříčkou  $TX$ .

## II. Proměna obrazců.

71. Narýsujte si pravidelný šestiúhelník s délkou strany 4 cm a vypočtete jeho obsah na dvě platné cifry. Potom proměňte šestiúhelník na obdélník, změřte jeho rozměry, z nich vypočtete obsah obdélníka a porovnejte s obsahem šestiúhelníka.

72. Narýsujte si libovolný pětiúhelník. Proměňte jej dvojným způsobem na trojúhelník. U každého z obou trojúhelníků změřte jednu stranu a příslušnou výšku. Podle provedených měření vypočtete obsahy obou trojúhelníků a porovnejte oba výsledky.

73. Narýsujte si libovolný čtyřúhelník. Proměňte jej dvojným způsobem na obdélník. Vypočtete a porovnejte obsahy obou obdélníků.

74. Narýsujte si trojúhelník  $ABC$  tak, aby bylo  $\overline{AB} = 6$  cm,  $\overline{AC} = 5$  cm,  $\overline{BC} = 7$  cm.

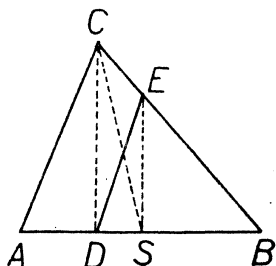
a) Na polopřímce  $AB$  určete body  $D, E$  tak, že  $\overline{AD} = 5$  cm,  $\overline{AE} = 7$  cm. Sestrojte trojúhelníky  $ADF, AEG$  rovné trojúhelníku  $ABC$ .

b) Sestrojte trojúhelníky  $ABH, ABK$  rovné trojúhelníku  $ABC$  tak, aby bylo  $\sphericalangle BAH = 75^\circ$ ,  $\sphericalangle AKB = \sphericalangle KAB$ .

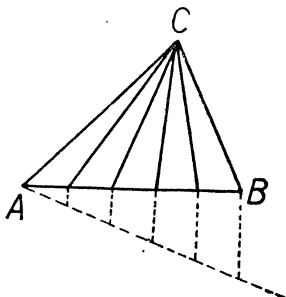
c) Sestrojte trojúhelník  $ALM$  rovný trojúhelníku  $ABC$  tak, aby bylo  $\overline{AL} = 8$  cm,  $\overline{AM} = 4$  cm. [Nejprve proměňte  $ABC$  na  $ALP$ , kde  $L$  leží na  $AB$ ,  $\overline{AL} = 8$  cm; potom proměňte  $ALP$  na  $ALM$ , kde  $MP \parallel AL$ ,  $\overline{AM} = 4$  cm.]

75. Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 6 cm proměňte na kosočtverec s délkou strany 5 cm.

76. V obr. 52 je znázorněno, jak se dá libovolný trojúhelník  $ABC$  rozdělit na dva stejné díly úsečkou  $DE$ , jejíž jeden krajní bod  $D$  je dán na straně  $AB$  a jejíž druhý krajní bod  $E$  se má určit na straně  $BC$ . Popište a odůvodněte konstrukci. [Jest  $\overline{AS} = \overline{SB}$ ,  $CD \parallel ES$ .]



Obr. 52.



Obr. 53.

77. V obr. 53 je znázorněno, jak lze rozdělit trojúhelník  $ABC$  na pět stejných dílů. Popište a odůvodněte konstrukci.

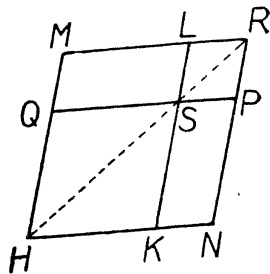
78. Rozdělte trojúhelník  $ABC$  na dva díly tak, aby jeden byl o polovinu větší než druhý.

79. a) Dokažte, že v obr. 54 oba rovnoběžníky  $HKLM$ ,  $HNPQ$  jsou si rovny. [Užijte toho, že každý rovnoběžník je rozpučen úhlopříčkou; napřed porovnejte rovnoběžníky  $LMQS$ ,  $KNPS$ .]

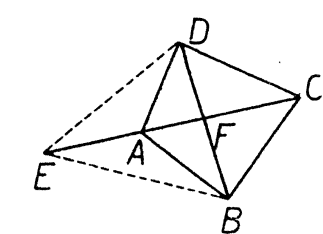
b) Narýsujte si rovnoběžník  $ABCD$ . Zvolte bod  $E$  uvnitř strany  $AB$  a bod  $F$  na prodloužení strany  $AB$  za bod  $B$ . Sestrojte rovnoběžníky  $AEUV$ ,  $AFXV$  rovné rovnoběžníku  $ABCD$ .

80. Čtverec s délkou strany 4 cm proměňte na obdélník, jehož jeden rozměr je 7 cm, užívajíc výsledku cvič. 61.

81. Narýsujte si libovolný čtyřúhelník  $ABCD$ . Vrcholem  $A$  vedte přímkou tak, aby rozpučila daný čtyřúhelník. [Proměňte čtyřúhelník na trojúhelník.]



Obr. 54.



Obr. 55.

82. Obr. 55 znázorňuje, jak lze čtyřúhelník  $ABCD$  proměnit na trojúhelník  $BDE$ . Popište a odůvodněte konstrukci.

[Jest  $\overline{AE} = \overline{CF}$ .]

83. Dokažte, že každý čtyřúhelník se rovná trojúhelníku, jehož dvě strany se rovnají úhlopříčkám čtyřúhelníka, při čemž úhel těmi stranami sevřený je roven úhlu úhlopříček.

### III. Euklidovy věty.

84. Jsou-li u pravoúhlého trojúhelníka  $ABC$  dány dvě ze šesti délek  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $v$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ , určete ostatní čtyři:

- $a = 65$  cm;  $b = 156$  cm;
- $a = 175$  mm;  $c = 625$  mm;
- $a = 3,69$  m;  $v = 3,6$  m;
- $c_1 = 1,21$  cm;  $c_2 = 36$  cm;
- $a = 51$  m;  $c_1 = 45$  m;
- $c = 8,41$  m;  $c_1 = 4,41$  m;
- $v = 18,48$  cm;  $c_1 = 10,89$  cm.

85.  $PQ$  je průměr kružnice  $k$ ;  $RS$  je tětiva kružnice  $k$ ; jest  $PQ \perp RS$ . Je-li  $\overline{PR} = 18,2$  cm;  $\overline{RS} = 18,48$  cm, určete délky obou úseček, na které tětiva  $RS$  rozdělí průměr  $PQ$ .

86. Ke kružnici  $k$  s poloměrem 65 mm jsou vedeny tečny z bodu  $P$ . Spojnice bodů dotyku je vzdálena 16 mm od středu  $S$  kružnice  $k$ . Vypočítejte vzdálenost  $\overline{PS}$ .

87. Tečny vedené z bodu  $A$  ke kružnici  $k$  o středu  $S$  mají body dotyku  $T_1, T_2$ . Je-li  $\overline{AS} = 6,76$  m a je-li 1 m vzdálenost bodu  $S$  od přímky  $T_1T_2$ , vypočtete poloměr kružnice  $k$  a délku tětivy  $T_1T_2$ .

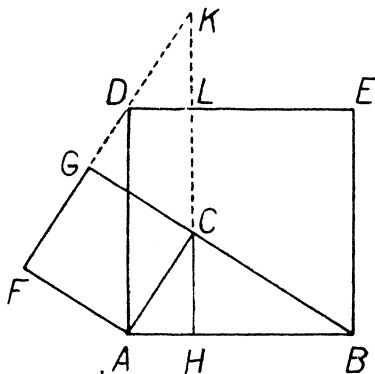
88. Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 53 mm proměňte na čtverec. Potom vypočtete na dvě platné cifry stranu čtverce a přesvědčte se, jak přesně jste rýsovali.

89. a) Sestrojte úsečku délky  $\sqrt{38}$  cm. [Zvolte si dvě čísla  $a, b$  tak, aby se nelišila příliš od sebe a aby bylo  $a \cdot b = 38$ , na př.  $a = 5, b = 3\frac{8}{5}$ ; potom sestrojte střední geometrickou úměrnou dvou úseček, jejich délky jsou  $a$  cm,  $b$  cm. Není výhodné voliti na př.  $a = 2, b = 19$  nebo  $a = 1, b = 38$ .]

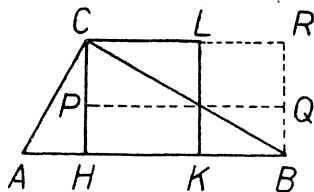
b) Sestrojte délku  $\sqrt{31}$  cm.

c) Sestrojte délku  $\sqrt{9,6}$  dm.

90. Provedte důkaz Euklidovy věty o odvěsně na základě obr. 56. [ $ABED, ACGF$  jsou čtverce; máte dokázat, že čtverec  $ACGF$  se rovná obdélníku  $ADLH$ .]



Obr. 56.



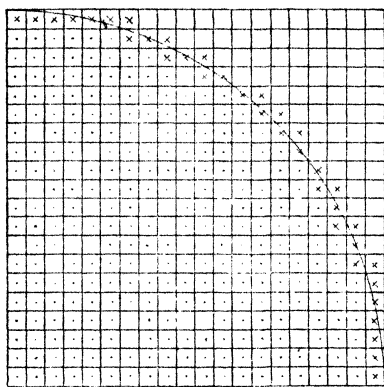
Obr. 57.

91. Provedte důkaz Euklidovy věty o výšce na základě obr. 57. [Čtverec  $HKLC$  se rovná obdélníku  $CPQR$  podle výsledku evič. 79 a).]

## § 4. Obvod a obsah kruhu.

Na čtverečkovaný papír si narýsujme (viz obr. 58) čtvrtkruh  $P$ ; jehož poloměr se rovná třeba dvaceti stranám čtvercové sítě. Všimněme si těch čtverců sítě, které jsou celé obsaženy ve čtvrtkruhu  $P$ . Napočteme jich 294; v obr. 58 jsou vyznačeny tečkami; dohromady

tvoří jakousi plochu  $A$ , která je částí čtvrtkruhu  $P$ . Dále si všimněme těch čtverců sítě, které jen z části zasahují do čtvrtkruhu  $P$ ; je jich 37 a v obr. 58 jsou vyznačeny křížkem. Přidáme-li tyto čtverce ku ploše  $A$ , dostaneme plochu  $B$ , jejíž částí je čtvrtkruh  $P$ . Proto obsah čtvrtkruhu  $P$  je větší než obsah plochy  $A$  a je menší než obsah plochy  $B$ .



Obr. 58.

Je-li  $r$  poloměr kruhu, je strana čtvercové sítě  $\frac{1}{20}r$ , takže obsah každého čtverce sítě je

$$\frac{r^2}{20^2} = \frac{r^2}{400}.$$

Protože plocha  $A$  obsahuje 294 a plocha  $B$   $294 + 37 = 331$  čtverců sítě, je obsah plochy  $A$

$$\frac{294}{400} r^2$$

a obsah plochy  $B$  je roven

$$\frac{331}{400} r^2.$$

Obsah čtvrtkruhu  $P$  je větší než obsah plochy  $A$  a menší než obsah plochy  $B$ ; obsah celého kruhu je čtyřnásobek obsahu čtvrtkruhu. Proto obsah kruhu s poloměrem  $r$  je větší než  $2,94 \cdot r^2$  a menší než  $3,31 \cdot r^2$ .

Kdybychom vyšli od čtvrtkruhu, jebož poloměr se rovná stu stran sítě, skládala by se plocha  $A$  ze 7753 čtverců a plocha  $B$  ještě z dalších 196, tedy celkem ze 7949 čtverců. Obsah jednoho čtverce by byl

$$\frac{r}{100} \cdot \frac{r}{100} = \frac{r^2}{10000},$$

takže obsah plochy  $A$  by byl  $0,7753r^2$  a obsah plochy  $B$  by byl  $0,7949r^2$ .

Z toho plyne, že obsah kruhu s poloměrem  $r$  je větší než  $3,1012 r^2$  a menší než  $3,1796 r^2$ .

Obsah kruhu s poloměrem  $r$  je roven  $\pi r^2$ . Řecké písmeno  $\pi$  (čteme pí) znamená číslo, o kterém už víme, že je větší než  $3,1012$  a menší než  $3,1796$ , což je ovšem jen velmi hrubý odhad pro číslo  $\pi$ .

K lepšímu odhadu dospějeme, zavedeme-li tu plochu  $C$ , která vznikne z plochy  $A$ , přidáme-li jen polovinu každého takového čtverce sítě, který jen částečně zasahuje do čtvrtkruhu  $P$ . Dá se dokázat, že obsah plochy  $C$  je mnohem bližší obsahu čtvrtkruhu  $P$  než jsou obsahy ploch  $A, B$ . Je-li poloměr dvacetinásobek strany čtvercové sítě, skládá se plocha  $C$  ze

$$294 + \frac{1}{2} \cdot 37 = 312\frac{1}{2}$$

čtverců sítě, což dá pro číslo  $\pi$  přibližnou hodnotu 3,125, která je jen o méně než 0,02 menší než přesná hodnota čísla  $\pi$ . Je-li poloměr stonásobek strany čtvercové sítě, skládá se plocha  $C$  ze

$$7753 + \frac{1}{2} \cdot 196 = 7851$$

čtverců sítě, což dá pro číslo  $\pi$  přibližnou hodnotu  $4 \cdot 0,7851 = 3,1404$ , ve které první dvě desetinná místa jsou už správná.

Pohodlněji a přesněji můžeme číslo  $\pi$  odhadnouti pomocí pravidelných mnohoúhelníků vepsaných do kružnice nebo jí opsaných. Při velkém počtu stran se totiž takový mnohoúhelník liší jen nepatrně od kruhu, takže obsah kruhu je přibližně roven obsahu mnohoúhelníka. Pomocí takových mnohoúhelníků počítal číslo  $\pi$  již Archimedes ze Syrakus, nejslavnější starověký matematik (žil ve třetím století př. Kr.). Archimedes dokázal, že číslo  $\pi$  je menší než  $3\frac{1}{7}$  a větší než  $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ . Holandan Ludolf van Ceulen (čti fan Kajlen, 1540—1610) vypočetl Archimedovou metodou číslo  $\pi$  na 35 desetinných míst. Podle něho se číslo  $\pi$  často nazývá Ludolfovým číslem. Metodami vyšší matematiky lze číslo  $\pi$  vypočísti na mnohem větší počet desetinných míst; skutečně bylo vypočteno 707 míst, což ovšem nemá praktického významu. Na třicet desetinných míst je

$$\pi \doteq 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279.*)$$

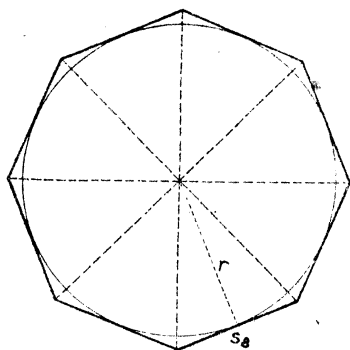
Pro praxi více než dobrá je přibližná hodnota  $\pi \doteq 3,14159$ ; zpravidla vystačíme dokonce s hodnotou  $\pi \doteq 3,14$ ; často se také užívá přibližné hodnoty  $\pi \doteq 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ , která je přesnější než 3,14.

Číslo  $\pi$  slouží nejen k výpočtu obsahu kruhu, nýbrž také k výpočtu obvodu. Kružnici s poloměrem  $r$  opišme pravidelný mnoho-

\*) Kdo by si chtěl zapamatovati tuto přibližnou hodnotu, může se naučiti zpaměti: „Mám, ó bože ó dobrý, pamatovat si takový cifer řad! Velký slovníky Archimedes pomáhaj trápenému; dej mu moc, nazpamět nechť odříká ty slavné sice, ale tak protivné nám ach číslice Ludolfovy“. Počet písmen jednotlivých slov udává postupné cifry čísla  $\pi$ .



úhelník  $M_n$  s délkou strany  $s_n$  (viz obr. 59, ve kterém  $n = 8$ ).  $M_n$  se skládá z  $n$  rovnoramenných trojúhelníků, z nichž každý má obsah  $\frac{1}{2}s_n r$ ; obvod mnohoúhelníka  $M_n$  se rovná  $o_n = ns_n$ , pročež obsah  $P_n$  mnohoúhelníka  $M_n$  je roven  $\frac{1}{2}o_n r$ .



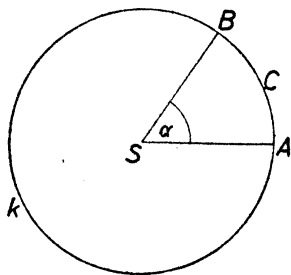
Obr. 59.

Je-li však číslo  $n$  velmi veliké, je obsah  $P_n$  velmi přibližně roven obsahu kruhu  $\pi r^2$  a obvod  $o_n$  je velmi přibližně roven obvodu kruhu  $o$ . Proto musí být

$$\pi r^2 = \frac{1}{2}or, \quad \text{tedy } o = 2\pi r.$$

Obvod kruhu s poloměrem  $r$  je roven  $2\pi r$ . Také můžeme ovšem říci, že obvod kruhu je  $\pi d$ , kde  $d$  znamená průměr; obsah kruhu je ovšem  $\frac{1}{4}\pi d^2$ .

V obr. 60 vidíme oblouk  $ACB$  kružnice  $k$  příslušný středovému úhlu  $\alpha$ . Je zřejmé, že když se úhel  $\alpha$  zdvojnásobí, ztrojnásobí atd., stane se táž změna s délkou oblouku  $ACB$ , t. j. délka oblouku kružnice je přímo úměrná velikosti středového úhlu. Je-li  $\alpha \doteq 360^\circ$ , přejde oblouk v celou kružnici, jejíž délka je  $2\pi r$ . Jestliže  $\alpha$  měří  $n$  stupňů, pak poměr úhlu  $\alpha$  k plnému úhlu je  $n : 360$ , takže délku oblouku dostaneme, zmenšíme-li délku  $2\pi r$  celé kružnice v poměru  $n : 360$ . Tedy délka  $s$  kruhového oblouku je



Obr. 60.

$$s = \frac{n\pi}{180} \cdot r, \quad (1)$$

jestliže  $n$  znamená počet stupňů středového úhlu  $\alpha$ . Je tedy

$$s = \text{arc } \alpha \cdot r, \quad (2)$$

kde  $\text{arc } \alpha$ , což čteme arkus úhlu  $\alpha$ , je délka oblouku kružnice s poloměrem 1 a středovým úhlem  $\alpha$ , neboli

$$\text{arc } \alpha = \frac{n\pi}{180}, \quad (3)$$

jestliže  $\alpha$  měří  $n$  stupňů.

V obr. 60 vidíme dále kruhovou výseč příslušnou středovému úhlu  $\alpha$ . Také plošný obsah kruhové výseče je přímo úměrný

velikosti středového úhlu. Je-li  $\alpha = 360^\circ$ , přejde výseč v celý kruh, jehož obsah je  $\pi r^2$ . Jestliže  $\alpha$  měří zase  $n$  stupňů, pak obsah výseče dostaneme, jestliže obsah kruhu  $\pi r^2$  zmenšíme v poměru  $n : 360$ . Je tedy

$$V = \frac{n\pi}{360} \cdot r^2, \quad (4)$$

což lze psáti

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{n\pi}{180} r \cdot r,$$

neboli podle (1)

$$V = \frac{1}{2} sr. \quad (5)$$

Tedy obsah výseče lze počítati jako obsah trojúhelníka, jehož (křivou) stranou je oblouk a příslušnou výškou poloměr. Podle (2) a (5) je

$$V = \frac{1}{2} \text{arc } \alpha \cdot r^2. \quad (6)$$

V obr. 61 vidíme mezikruží; jeho obsah dostaneme, jestliže od obsahu většího kruhu odečteme obsah menšího. Je-li  $r_1$  poloměr menšího kruhu,  $r_2$  poloměr většího, jsou jejich obsahy  $\pi r_1^2$ ,  $\pi r_2^2$ , takže obsah mezikruží  $M$  je dán vzorcem

$$M = \pi(r_2^2 - r_1^2), \quad (7)$$

který můžeme psáti také ve tvaru

$$M = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1). \quad (8)$$

V obr. 61 vidíme dále výseč mezikruží. Její obsah  $W$  je patrně

$$W = V_2 - V_1,$$

kde  $V_1$ ,  $V_2$  jsou obsahy kruhových výsečí. Podle (6) je

$$V_1 = \frac{1}{2} \text{arc } \alpha \cdot r_1^2, \quad V_2 = \frac{1}{2} \text{arc } \alpha \cdot r_2^2,$$

takže

$$W = \frac{1}{2} \text{arc } \alpha \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

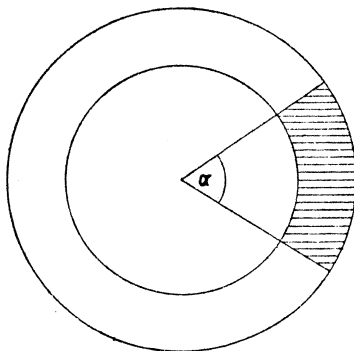
neboli

$$W = \frac{1}{2} \text{arc } \alpha \cdot (r_2 + r_1)(r_2 - r_1).$$

Je tedy

$$W = \left(\frac{1}{2} \text{arc } \alpha \cdot r_2 + \frac{1}{2} \text{arc } \alpha \cdot r_1\right)(r_2 - r_1),$$

takže podle (2) je



Obr. 61.

$$W = \frac{1}{2}(s_2 + s_1)(r_2 - r_1), \quad (9)$$

kde  $s_1, s_2$  jsou délky kruhových oblouků, které tvoří křivou část obvodu výseče mezikruží. Tedy obsah mezikruží lze počítati jako obsah lichoběžníka, jehož (křivými) základnami jsou oblouky obou kružnic a výškou je křivý poloměrů.

#### Cvičení k § 4.

Ve cvič. 92 a 93 volte  $\pi \doteq 3\frac{1}{7}$ !

92. Vypočtete obvod kruhu, je-li

a) poloměr 6,3 cm; b) průměr 5,6 dm; c) průměr 9,1 m.

93. Vypočtete obsah kruhu, je-li

a) poloměr 8,4 cm; b) průměr 7 m; c) průměr 11,2 mm.

Ve cvič. 94 a 95 volte  $\pi \doteq 3,14$  a výsledky zaokrouhlete na dvě platné cifry!

94. Vypočtete obvod kruhu, je-li

a) poloměr 15 cm; b) průměr 2,5 dm; c) průměr 37 m.

95. Vypočtete obsah kruhu, je-li

a) poloměr 23 cm; b) průměr 3,2 dm; c) průměr 0,47 m.

Ve cvič. 96 až 114 volte  $\pi \doteq 3,14$  nebo, kde je to poččetně výhodnější,  $\pi \doteq 3\frac{1}{7}$ . Odpovědi neudávejte na více než tři platné cifry!

96. Určete poloměr kruhu, je-li obvod roven

a) 11 cm; b) 6,4 m; c) 8,8 m; d) 1 km.

97. Obvod polokruhu je 3,5 dm; určete poloměr.

98. Obsah kruhu je 385 m<sup>2</sup>; určete poloměr.

99. Plot kolem pozemku má délku 4400 m. Jaký je obsah pozemku, má-li tvar a) obdélníka, jehož rozměry jsou v poměru 2 : 9; b) obdélníka, jehož rozměry jsou v poměru 5 : 6; c) čtverce; d) kruhu?

[Dá se dokázati, že ze všech uzavřených čar dané délky omezuje kružnice plochu největšího obsahu.]

100. Kus drátu dlouhý 1 m je ohnut do tvaru obvodu

a) kruhu; b) polokruhu; c) čtvrtkruhu. Určete poloměr!

101. Ze studny hluboké 16 $\frac{1}{2}$  m se nabere vědro vody rumpálem. Kolikrát se musí otočiti klikou, je-li průměr hřídele 2 dm? (Zanedbejte tloušťku provazu.)

102. Obvod kola u bicyklu je 7 dm.

a) Kolikrát se otočí kolo, než se ujede 1 km?

b) Otočí-li se koló 25krát za 10 vteřin, jaká je rychlost jízdy v kilometrech za hodinu?

103. Z papírového čtverce o straně 1 dm se vystřihne co největší kruh. Jaký obsah mají odštířky?

104. Kovová kruhová deska s průměrem 18 cm váží 6 kg. Kolik bude vážit, budou-li v ní tři kruhové otvory s průměrem po 36 mm?

105. Pes je přivázán řetězem dlouhým 10 m ke kroužku, který lze posou-

vati podél vodorovně tyče dlouhé 15 m. Určete obsah plochy, po které se pes může pohybovat!

106. Jak veliký je plošný obsah rysu kružnice s poloměrem 6 cm, je-li tloušťka rysu asi 0,1 mm?

107. Určete délku oblouku kružnice s poloměrem 1 dm, je-li středový úhel  $144^\circ$ !

108. Oblouku kružnice patří středový úhel  $108^\circ$ . Je-li délka oblouku 33 mm, určete poloměr kružnice!

109. Velká ručička na hodinách je dlouhá 12 cm.

a) Jakou dráhu urazí její hrot za  $\frac{3}{4}$  hodiny?

b) Jakou rychlostí se pohybuje hrot?

110. Čtyři stejné válcové plechovky s průměrem podstavy 15 cm stojí tak, že se navzájem dotýkají. Jak dlouhého provázku je třeba, chceme-li je svázat dohromady?

111. Opakujte úlohu 110 pro tři plechovky!

112. Určete obsah kruhové výseče, je-li poloměr 6 cm a středový úhel  $54^\circ$ !

113. Kruhová výseč má obsah  $55 \text{ cm}^2$ . Je-li poloměr 7 cm, určete středový úhel!

114. V jakém poměru je kruh rozdělen tětivou, která půlí poloměr, na který je kolmá?

115. (Volte  $\pi \doteq 3,1416$ .) Vypočtěte na čtyři platné cifry:

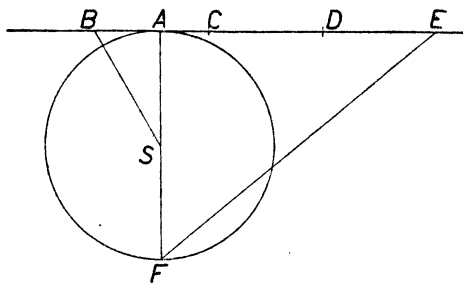
a) arc  $35^\circ$ ; b) arc  $27^\circ 32'$ ; c) arc  $2^\circ 27'$ !

116. (Volte  $\pi \doteq 3,14159$ .) Vypočtěte na šest platných cifer:

a) arc  $7^\circ 15' 36''$ ; b) arc  $19^\circ 23' 42''$ !

117. Přesvědčte se, že je velmi přibližně

$$\pi \doteq \frac{355}{113}!$$

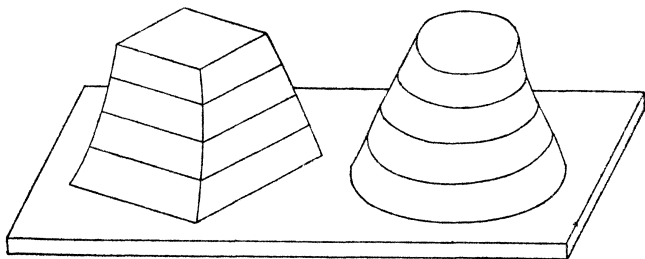


Obr. 62.

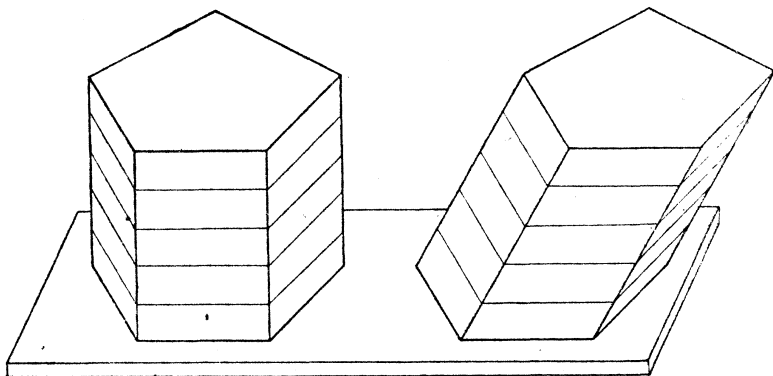
118. V obr. 62 je naznačeno, jak lze přibližně rektifikovati kružnici, t. j. sestrojiti úsečku asi tak dlouhou, jako je obvod kružnice. Jest  $\sphericalangle ASB = 30^\circ$ ,  $\overline{AS} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ . Délka  $\overline{EF}$  je velmi přibližně rovna polovině obvodu kružnice. Zvolte poloměr za jednotku, vypočtěte délku  $\overline{EF}$  na 7 platných cifer a porovnejte s číslem  $\pi$ !

## § 5. Hranoly a jehlany.

V tomto paragrafu a v následujícím poznáme mimo jiné vzorce pro výpočet objemu nejdůležitějších těles. K těmto vzorcům dospějeme na základě t. zv. Cavalieriova principu, který zní takto: Dvě tělesa  $T_1$ ,  $T_2$  mají týž objem, jestliže každá vodorovná rovina, která protne jedno těleso, protne také těleso druhé, a jestliže obě průsečné plochy mají vždy týž obsah. (Italský matematik Cava-



Obr. 63.



Obr. 64.

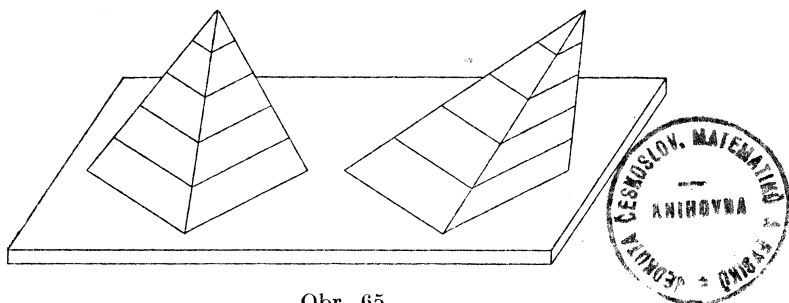
lieri žil v 1. polovině 17. století.) Přesným matematickým odůvodněním Cavalieriova principu se nebudeme zabývatí a místo toho se spokojíme následující jednoduchou úvahou. Mysleme si obě tělesa složena z velkého počtu tenkých plechových lístků. Protože průsečné plochy obou těles s touž vodorovnou rovinou mají vždy týž obsah, mají v obou tělesech stejně vysoko ležící lístky oba touž váhu a proto

také celková váha obou těles je stejná a ježto jsou obě tělesa z téhož materiálu, mají také obě týž objem.

Z Cavalieriova principu lze odvoditi (viz obr. 64 a 65) následující dvě důležité věty:

I. Dva hranoly mají týž objem, mají-li jejich podstavy týž obsah a mají-li oba touž výšku.

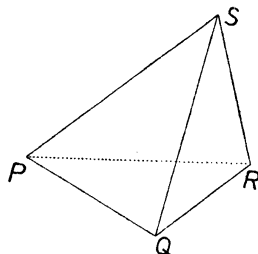
II. Dva jehlany mají týž objem, mají-li jejich podstavy týž obsah a mají-li oba touž výšku.



Obr. 65.

Z věty I následuje: **Objem hranolu se rovná součinu obsahu podstavy s výškou.** Neboť pro kolmý hranol je nám to známo z § 1 a podle I to musí zůstatí správné i pro kosý hranol.

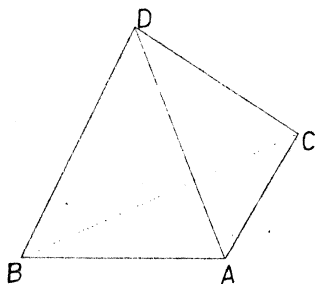
Naším dalším cílem je odvoditi větu: **Objem jehlanu se rovná třetině součinu podstavy s výškou.** To je obtížnější než v případě hranolu. Budeme se nejprve zabývatí trojbokými jehlany (viz obr. 66). Všecky čtyři stěny trojbokého jehlanu jsou trojúhelníky a proto u trojbokého jehlanu lze považovati kteroukoli stěnu za stěnu podstavnou; tím se trojboké jehlany podstatně liší od vícebokých jehlanů. Trojbokému jehlanu říkáme také krátce **čtyrstěn**. Považujeme-li u trojbokého jehlanu  $PQRS$  na př.  $PQS$  za stěnu podstavnou, pak příslušnou výškou rozumíme ovšem vzdálenost vrcholu  $R$  od roviny trojúhelníka  $PQS$ . Máme tedy u čtyrstěnu čtyři výšky, které jsou zpravidla mezi sebou různé, ale v některých případech jsou všechny



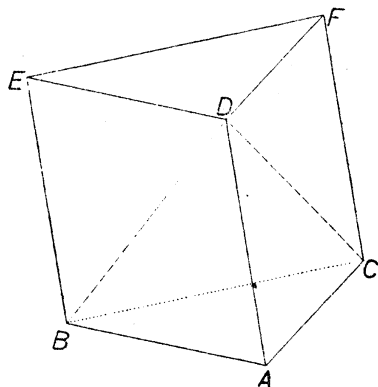
Obr. 66.

čtyři stejné. Takový případ nastane zejména u pravidelného čtyřstěnu, jehož všechny čtyři stěny jsou rovnostranné trojúhelníky.

Budiž nyní dán trojboký jehlan  $ABCD$  (viz obr. 67), který nazveme krátce jehlanem  $J$ . Za podstavou stěnu považujeme trojúhelník  $ABC$ , jehož obsah označme  $p$ . Příslušnou výškou je vzdálenost  $v$  bodu  $D$  od roviny trojúhelníka  $ABC$ . Máme dokázati, že objem jehlanu  $J$  je roven  $\frac{1}{3}pv$ . Jehlan  $J$  je částí hranolu  $H$  (viz obr. 68),

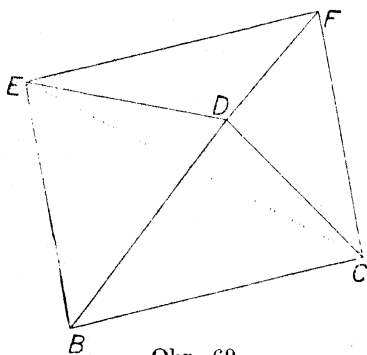


Obr. 67.

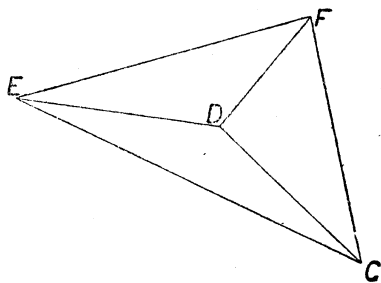


Obr. 68.

jehož podstavami jsou trojúhelníky  $ABC$ ,  $DEF$  a jehož pobočné hrany jsou  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ . Podstavy hranolu  $H$  mají obsah  $p$  a výška je zase  $v$ , takže objem hranolu  $H$  je  $pv$ . Máme tedy dokázati, že objem jehlanu  $J$



Obr. 69.



Obr. 70.

je třetina objemu hranolu  $H$ . Ubereme-li jehlan  $J$  od hranolu  $H$ , zbude nám (viz obr. 69) čtyřboký jehlan  $K$ , jehož podstavou je rovnoběžník  $BCFE$  a vrcholem bod  $D$ . Vedeme-li úhlopříčku  $CE$  rovnoběž-

níka  $BCFE$ , rozdělí se nám tento rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky  $CFE$ ,  $BCE$  a čtyrboký jehlan  $K$  se rozdělí na dva trojboké jehlany  $J_1$ ,  $J_2$  se společným vrcholem  $D$ , z nichž prvý má za podstavu trojúhelník  $CEF$  a druhý trojúhelník  $BCE$ . Tím je hranol  $H$  rozdělen na tři trojboké jehlany  $J$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ . Jehlany  $J_1$ ,  $J_2$  mají shodné podstavy  $CEF$ ,  $BCE$  a výškou je u obou vzdálenost vrcholu  $D$  od společné roviny obou podstav. Podle věty II má tedy jehlan  $J_2$  též objem jako jehlan  $J_1$ . Avšak u jehlanu  $J_1$  (viz obr. 70) můžeme považovati za podstavnou stěnu trojúhelník  $DEF$  shodný (viz obr. 68) s trojúhelníkem  $ABC$ , který je podstavnou stěnou jehlanu  $J$ . Příslušnou výškou je v obou případech vzdálenost obou mezi sebou rovnoběžných rovin  $ABC$ ,  $DEF$ . Podle věty II má tedy jehlan  $J$  též objem jako jehlan  $J_1$ . Totéž však platilo i o jehlanu  $J_2$ , takže hranol  $H$  máme rozdělen na tři jehlany  $J$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ , které mají všechny tři též objem, pročež objem jehlanu  $J$  je třetina objemu hranolu  $H$ , což jsme měli dokázati.

Tím je pro trojboký jehlan dokázáno, že objem se rovná třetině součinu podstavy s výškou. Rozšíření tohoto výsledku na víceboký jehlan je už velmi snadné. Budiž na př. pětiúhelník  $PQRST$  v obr. 3 podstavou pětibokého jehlanu s vrcholem  $V$ . Rozdělíme-li pětiúhelník  $PQRST$  úhlopříčkami  $PR$ ,  $PS$  na trojúhelníky  $PQR$ ,  $PRS$ ,  $PST$ , jejichž obsahy budtež  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , rozdělí se nám pětiboký jehlan na tři trojboké jehlany, jejichž podstavami jsou ty trojúhelníky a jejichž společná výška  $v$  je výškou pětibokého jehlanu. Objemy našich trojbokých hranolů jsou  $\frac{1}{3}p_1v$ ,  $\frac{1}{3}p_2v$ ,  $\frac{1}{3}p_3v$  a objem pětibokého hranolu je

$$\frac{1}{3}p_1v + \frac{1}{3}p_2v + \frac{1}{3}p_3v = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)v = \frac{1}{3}pv,$$

kde  $p = p_1 + p_2 + p_3$  je obsah pětiúhelníka  $PQRST$ .

Povrch kolmého hranolu jsme počítali již v § 1. Výpočtem povrchu kosého hranolu se nebudeme zabývati.

Povrch jehlanu je zřejmě dán vzorcem

$$P + Q,$$

kde  $P$  znamená obsah podstavy a  $Q$  znamená obsah pláště. Plášť jehlanu se skládá z tolika trojúhelníků, kolik stěn má podstava. Budtež

$$a_1, a_2, a_3 \text{ atd.}$$

délky podstavných hran jehlanu. Každá z těchto hran je jednou stranou jednoho z trojúhelníků, ze kterých se skládá plášť, a v tom trojúhelníku přísluší té straně určitá výška. Ty výšky (říkáme jim



stěnové výšky) budtež

$$w_1, w_2, w_3 \text{ atd.}$$

Obsahy pobočných stěn jehlanu jsou

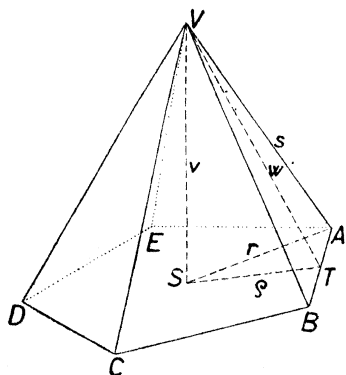
$$\frac{1}{2}a_1w_1, \frac{1}{2}a_2w_2, \frac{1}{2}a_3w_3 \text{ atd.},$$

takže

$$Q = \frac{1}{2}(a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + \text{atd.}).$$

U pravidelného  $n$ -bokého jehlanu mají všechny podstavné hrany touž délku  $a$  a jejich počet je  $n$ ; také všechny stěnové výšky mají touž délku  $w$ . Plášť pravidelného  $n$ -bokého jehlanu je pak dán vzorcem

$$Q = \frac{n}{2} aw = \frac{1}{2}ow,$$



Obr. 71.

kde  $o = na$  je obvod podstavy. Obvykle však stěnová výška  $w$  není dána přímo, nýbrž se musí určit podle Pythagorovy věty. Je-li  $v$  výška jehlanu (určitěji řekneme tělesná výška na rozdíl od stěnové výšky) a je-li  $\rho$  poloměr kružnice podstavy vepsané, plyne z trojúhelníka  $VST$  v obr. 71 podle Pythagorovy věty, že

$$w = \sqrt{v^2 + \rho^2},$$

neboť svislá přímka  $VS$  je kolmá na vodorovnou přímku  $ST$ , takže  $VST$  je pravoúhlý trojúhelník s přeponou  $VT$ .

Místo tělesné výšky  $v$  bývá někdy dána délka  $s$  pobočných hran. Pro tělesnou výšku  $v$  máme potom z pravoúhlého trojúhelníka  $VSA$ , ve kterém je  $AV$  přeponou,

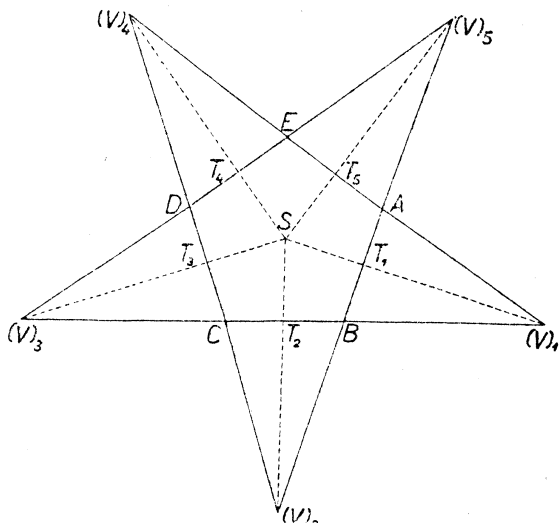
$$v = \sqrt{s^2 - r^2},$$

kde  $r = \overline{AS}$  je poloměr kružnice podstavy opsané. Pro stěnovou výšku  $w$  máme z pravoúhlého trojúhelníka  $VAT$ , ve kterém je  $AV$  přeponou,

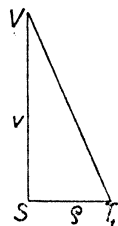
$$w = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Rovina trojúhelníka  $VST$  v obr. 71 je kolmá na přímkou  $AB$ , pročež všechny přímkou této roviny jsou kolmé na  $AB$ ; zejména je  $ST \perp AB$ . Toho můžeme užítí ke konstrukci sítě pravidelného jehlanu, je-li dána podstava  $ABCDE$  a výška  $v$  (viz obr. 72). Se středu  $S$  podstavu spustíme kolmice na všechny strany podstavu; jejich paty budtež  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$ . Všimněme si na př. pobočné stěny  $VAB$ ; je to rovno-

ramenný trojúhelník se základnou  $AB$  a výškou  $VT_1$ . Tento trojúhelník sklopíme kolem přímkou  $AB$  do podstavné roviny, t. j. otáčíme jej kolem přímkou  $AB$  tak dlou-



Obr. 72.

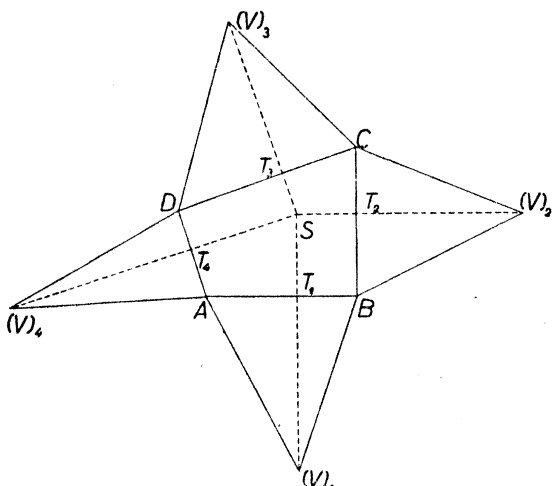


Obr. 73.

ho, až otočená poloha padne do podstavné roviny. Sklopená stěna  $AB(V)_1$  je zase rovnoarmenný trojúhelník se základnou  $AB$  a výškou  $\overline{(V)_1T_1} = \overline{VT_1}$ . Bod  $T_1$  zůstává ovšem patou stěnové výšky i po sklopení. Sklopený vrchol  $(V)_1$  leží tedy na přímce  $ST_1$  a jeho vzdálenost od bodu  $T_1$  je rovna délce  $VT_1$ , kterou si sestrojíme (viz obr. 73) jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají známé délky  $\overline{VS} = v$ ,  $\overline{ST_1} = \rho$ . Stejně sestrojíme i sklopené polohy ostatních pobočných stěn, které spolu s podstavou  $ABCDE$  dávají síť jehlanu.

Touto metodou můžeme snadno sestrojiti i síť nepravidelného jehlanu, známe-li podstavu, patu výšky  $S$  a velikost výšky  $v$ . Budiž podstavou třeba čtyřúhelník  $ABCD$  (viz obr. 74). S bodu  $S$  spustíme kolmice na strany čtyřúhelníka; jejich paty budtež  $T_1, T_2, T_3, T_4$ .

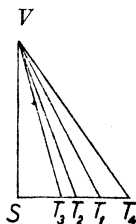
Sklopené polohy  $(V)_1, (V)_2, (V)_3, (V)_4$  vrcholu  $V$  leží na přímkách  $ST_1, ST_2, ST_3, ST_4$  a vzdálenosti  $T_1(V)_1, T_2(V)_2, T_3(V)_3, T_4(V)_4$  určíme (viz obr. 75) jako přepony pravouhlých trojúhelníků, které mají společnou odvěsnu  $\overline{VS} = v$  a jejichž druhé odvěsny  $ST_1, ST_2, ST_3, ST_4$  přeneseme z obr. 74. Kontrolou přesnosti rýsování je to, že musí býti na př.



Obr. 74.

$\overline{A(V)_1} = \overline{A(V)_4}$ ,

$$\overline{A(V)_1} = \overline{A(V)_4},$$



Obr. 75.

neboť obě ty úsečky jsou rovné pobočné hraně  $\overline{AV}$ . Podobně je také

$$\overline{B(V)_1} = \overline{B(V)_2}, \quad \overline{C(V)_2} = \overline{C(V)_3}, \quad \overline{D(V)_3} = \overline{D(V)_4}.$$

Jestliže délky

$$\overline{ST_1} = x_1, \quad \overline{ST_2} = x_2, \quad \overline{ST_3} = x_3, \quad \overline{ST_4} = x_4$$

známe číselně, můžeme počítati podle Pythagorovy věty

$$\overline{VT_1} = w_1 = \sqrt{v^2 + x_1^2}, \quad \overline{VT_2} = w_2 = \sqrt{v^2 + x_2^2},$$

$$\overline{VT_3} = w_3 = \sqrt{v^2 + x_3^2}, \quad \overline{VT_4} = w_4 = \sqrt{v^2 + x_4^2}.$$

Plášť jehlanu je potom

$$Q = \frac{1}{2}(a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 + a_4 w_4),$$

kde  $a_1 = \overline{AB}$ ,  $a_2 = \overline{BC}$ ,  $a_3 = \overline{CD}$ ,  $a_4 = \overline{DA}$ .

#### Cvičení k § 5.

Ve cvičeních 119 až 133 počítejte na dvě nebo tři platné cifry.

119. Trojúhelníkové pravítko má tloušťku 5 mm a odvěsny měří 22,5 cm 39 cm. Určete váhu pravítka, je-li speciifická hmota dřeva  $0,8 \text{ gcm}^{-3}$ .

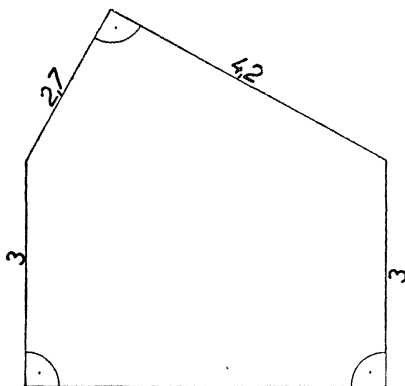
**120.** Povrch vody v basenu je obdélník dlouhý 52 m a široký 14 m; hloubka vody stoupá rovnoměrně od 1 m na jednom konci do 4 m na druhém konci. Určete objem vody v basenu!

**121.** Kolik vody zbude v basenu ze cvič. 120, bylo-li vypuštěno tolik vody, že pouze polovina dna je pod vodou?

**122.** V obr. 76 je vyznačen příčný řez stodoly dlouhé 13,5 m. V obrazy je jednotka 1 m; vyznačené úhly jsou pravé. Určete objem stodoly!

**123.** Dno vodojemu je vodorovný obdélník dlouhý 100 m a široký 50 m. Kratší stěny jsou svislé; delší stěny jsou nakloněny v úhlu  $45^\circ$  k vodorovné poloze. Ve vodojemu je vody do výše 3 m. Kolik hl vody je ve vodojemu?

**124.** Stěny dvou vodojemů jsou svislé; dno měří  $900 \text{ m}^2$  u většího,  $700 \text{ m}^2$  u menšího. Voda se převádí z většího vodojemu do menšího tak, že za minutu se převede 15,9 hl. Oč se změní výška vody ve vodojemech za čtvrt hodiny?



Obr. 76.

**125.** Určete objem jehlanu:

- výška 15 cm; podstava je čtverec o straně 9 cm;
- výška 6 cm; podstava je obdélník s rozměry 4 cm, 5 cm;
- výška 8 cm; podstava je trojúhelník o stranách 3 cm, 4 cm, 5 cm.

**126.** Objem jehlanu je  $97 \text{ cm}^3$ ; podstava je čtverec o straně 5,3 cm. Určete výšku!

**127.** Objem jehlanu je  $147 \text{ cm}^3$ ; výška je 14 cm. Určete obsah podstavy!

**128.** Určete objem jehlanu:

- všecky pobočné hrany mají délku 13 cm; podstava je obdélník s rozměry 6 cm, 8 cm;
- všecky pobočné hrany mají délku 2 m; podstava je čtverec o straně 2 m;
- výška 9 cm; podstava je rovnostranný trojúhelník o straně 8 cm.

**129.** Podstava pravidelného jehlanu je čtverec o straně 4 dm; objem jehlanu je  $32 \text{ dm}^3$ . Určete výšku a délku pobočných hran!

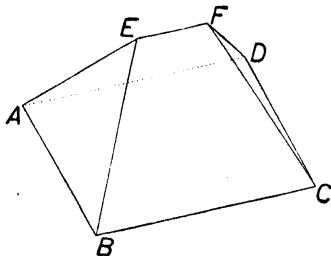
**130.** Určete povrch jehlanu, jehož vrchol je nad středem podstavy:

- podstava je čtverec o straně 6 cm, výška 4 cm;
- podstava je obdélník s rozměry 4 cm, 6 cm, výška 5 cm.

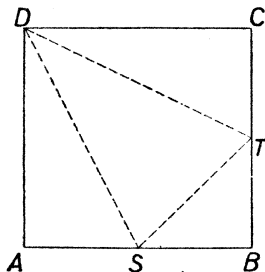
**131.** V krychlové nádrži s délkou hrany 1 m je kovový pravidelný čtyřboký jehlan výšky 1 m, jehož podstava je čtverec s délkou strany 75 cm. Nádrž je naplněna vodou. Oč klesne hladina, odstraní-li se jehlan?

**132.** Obr. 77 znázorňuje hromadu štěrku.  $ABCD$  je obdélník s rozměry  $\overline{AB} = 1,2$  m;  $\overline{BC} = 3$  m. Dále je  $\overline{EF} = 1,8$  m a přímka  $EF$  je ve výši 0,6 m. Určete objem hromady!

**133.** Obr. 78 znázorňuje papírový čtverec  $ABCD$  s délkou strany 15 cm;  $S$  a  $T$  jsou středy stran. Přehneme-li papír podél čárkovaných úseček tak, aby splynulo  $AD$  a  $CD$ ,  $AS$  a  $BS$ ,  $BT$  a  $CT$ , vznikne jehlan. Určete povrch a objem jehlanu! [Pro výpočet objemu si napřed odůvodněte, že po přehnutí bude přímka  $DA$  kolmá na rovinu  $BST$ .]



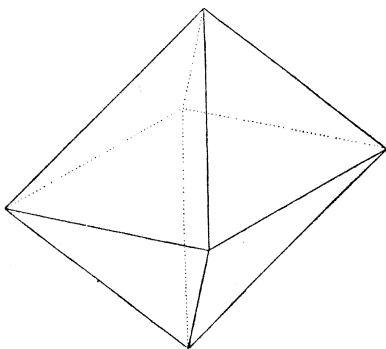
Obr. 77.



Obr. 78.

**134.** (Viz obr. 79.) Najděte vzorec pro povrch a objem pravidelného osmistěnu! (Všecky stěny jsou rovnostranné trojúhelníky.)

**135.** Najděte vzorec pro povrch a objem pravidelného čtyřstěnu!



Obr. 79.

**136.** Nad stěnami krychle jsou vztyčeny čtyřboké jehlany, jejichž výška je pětinou úhlopříčky krychle. Najděte vzorec pro povrch a objem celého tělesa! Narýsujte síť!

**137.** Určete povrch a objem tělesa, které vznikne z krychle tím, že od každého rohu odejmeme jehlan, který utíná pětinu hran krychle. Sestrojte síť tělesa!

**138.** Sestrojte síť pravidelného šestibokého jehlanu; délka podstavných hran 3 cm, výška 4 cm. Vypočítejte na tři platné cifry povrch a objem tělesa.

**139.** Pravidelný trojboký hranol s délkou podstavné hrany 4 cm a výškou 5 cm dá se rozložit podle obr. 68 na trojboký a na čtyřboký jehlan. Sestrojte síť a modely obou jehlanů a sestavte z modelů model hranolu!

**140.** Obdélník  $ABCD$  má rozměry  $\overline{AB} = 5$  cm,  $\overline{BC} = 3$  cm. Uvnitř obdélníka leží bod  $S$  vzdálený 2 cm od strany  $AB$  a 1 cm od strany  $BC$ . Obdélník je podstavou jehlanu s výškou 4 cm; pata výšky padne do bodu  $S$ . Sestrojte síť

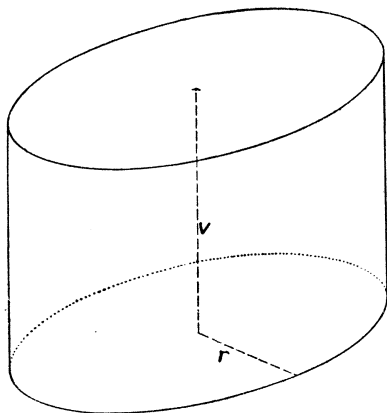
jehlanu! Vypočítejte na tři platné cifry povrch jehlanu! Hodnoty stěnových výšek vypočtené podle Pythagorovy věty porovnejte s hodnotami stěnových výšek naměřenými v síti!

141. Opakujte úlohu 140 s tím rozdílem, že bod  $S$  leží

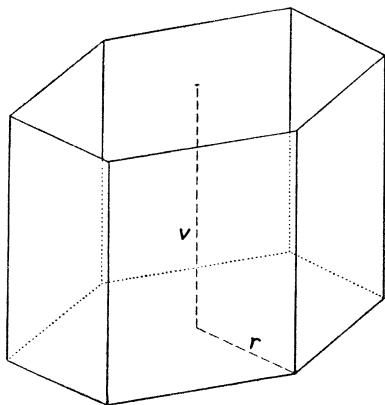
- ve vrcholu  $A$ ;
- uprostřed strany  $AB$ ;
- na straně  $BC$  ve vzdálenosti 1 cm od bodu  $B$ .

## § 6. Válec, kužele a koule.

Rotační válec s poloměrem podstavy  $r$  a výškou  $v$  (viz obr. 80) porovnejme s pravidelným  $n$ -bokým hranolem s poloměrem kružnice podstavy  $r$  a výškou  $v$  (viz obr. 81). Je-li  $n$  velmi veliké, je podstava válce velmi přibližně rovna podstavě hranolu, obvod pod-



Obr. 80.



Obr. 81.

stavy válce obvodu podstavy hranolu, plášť válce pláští hranolu, objem válce objemu hranolu. Budiž u válce  $P$  obsah podstavy,  $O$  obvod podstavy,  $Q$  plášť,  $V$  objem; budtež  $P_n$ ,  $O_n$ ,  $Q_n$ ,  $V_n$  obdobné veličiny u hranolu. Z § 1 víme, že je

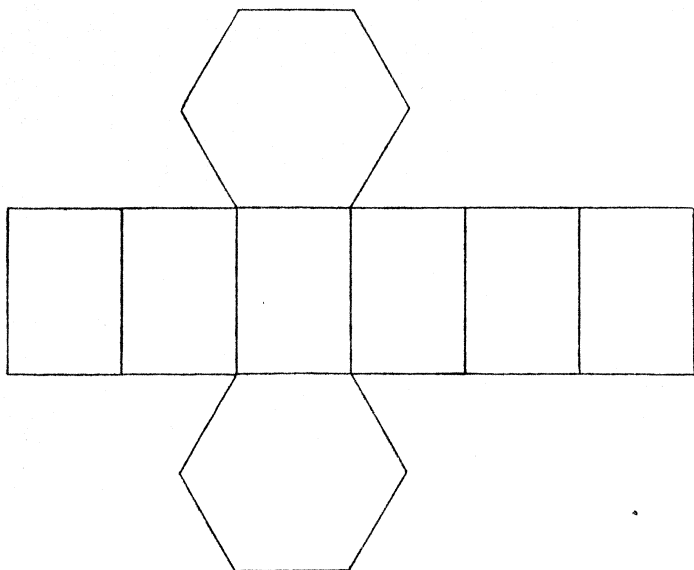
$$Q_n = O_n v, \quad V_n = P_n v$$

a proto musí býti také

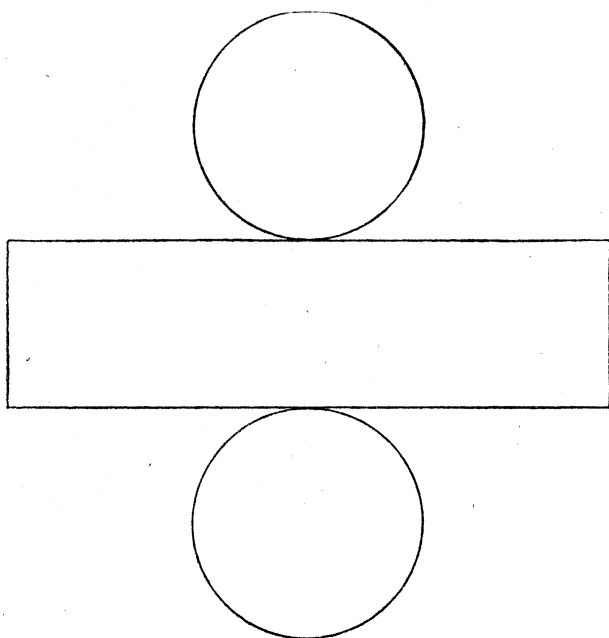
$$Q = O v, \quad V = P v.$$

Avšak z § 4 je nám známo, že  $O = 2\pi r$ ,  $P = \pi r^2$ . Proto jest

$$Q = 2\pi r v, \quad V = \pi r^2 v.$$



Obr. 82.



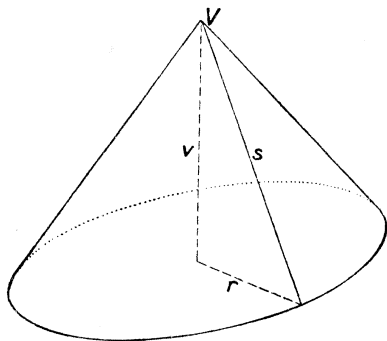
Obr. 83.

Povrch válce je

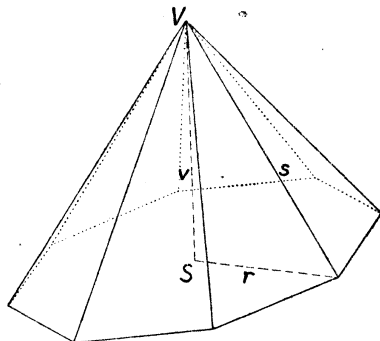
$$2P + Q = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v).$$

Vzorce pro plášť, povrch a objem rotačního válce si zapamatujte!  
Jak znějí tyto vzorce slovy?

Sít hranolu (viz obr. 82) se skládá z obdélníka, jehož rozměry jsou  $O_n$  a  $v$ , který je rozdělen na  $n$  malých obdélníků, a ze dvou pravidelných  $n$ -úhelníků. Podobně síť rotačního válce (viz obr. 83) se skládá z obdélníka, jehož rozměry jsou  $2\pi r$  a  $v$ , a ze dvou kruhů s poloměrem  $r$ , které se dotýkají stran obdélníka délky  $2\pi r$ . Při sestrojování sítě můžeme položit  $\pi \doteq 3\frac{1}{7}$  nebo můžeme užítí výsledku cvič. 118.



Obr. 84.



Obr. 85.

Rotační kužel s poloměrem podstavy  $r$  a výškou  $v$  (viz obr. 84) porovnejme s pravidelným  $n$ -bokým jehlanem s poloměrem kružnice podstavě opsané  $r$  a výškou  $v$  (viz obr. 85). Délka pobočných hran jehlanu budiž  $s$ . Podle Pythagorovy věty je

$$v^2 + r^2 = s^2, \quad \text{tedy} \quad s = \sqrt{v^2 + r^2}, \quad v = \sqrt{s^2 - r^2};$$

$s$  je také délka všech úseček na povrchu kužele, které spojují vrchol  $V$  s jednotlivými body obvodu podstavy; pravíme, že  $s$  je strana kužele. Je-li  $n$  velmi veliké, je podstava kužele velmi přibližně rovna podstavě jehlanu, obvod podstavy kužele obvodu podstavy jehlanu, plášť kužele plášti jehlanu, objem kužele objemu jehlanu. Budiž u kužele  $P$  obsah podstavy,  $O$  obvod podstavy,  $Q$  plášť,  $V$  objem; buďtež  $P_n$ ,  $O_n$ ,  $Q_n$ ,  $V_n$  obdobné veličiny u jehlanu. Z § 5 víme, že je  $V_n = \frac{1}{3}P_n v$  a proto musí býti také  $V = \frac{1}{3}Pv$ . Avšak podle § 4 je



$P = \pi r^2$ , tedy

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v.$$

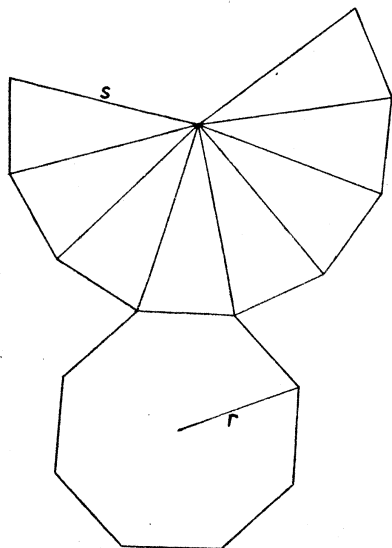
Plášť jehlanu se skládá z  $n$  rovnoramenných trojúhelníků se základnou  $a$  (to je délka podstavné hrany) a s výškou  $w$ , tedy s plošným obsahem  $\frac{1}{2}aw$ . Tedy  $Q_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot aw$  neboli  $Q_n = \frac{1}{2}O_n w$ , neboť  $O_n = na$ . Je-li  $n$  velmi veliké, je  $w$  velmi přibližně rovné  $s$  a proto pro plášť kužele musí platiti  $Q = \frac{1}{2}O s$  neboli

$$Q = \pi r s,$$

neboť podle § 4 je  $O = 2\pi r$ . Povrch kužele je

$$P + Q = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s).$$

Vzorce pro plášť, povrch a objem rotačního kužele si zapamatujte! Jak znějí tyto vzorce slovy?



Obr. 86.

Sít jehlanu (viz obr. 86) se skládá z  $n$  za sebou jdoucích shodných rovnoramenných trojúhelníků s délkou ramene  $s$  a se součtem délek základen  $O_n$ , k nimž je připojen ještě pravidelný  $n$ -úhelník. Sít kužele (viz obr. 87) se skládá z kruhové výseče poloměru  $s$ , k níž je připojen kruh s poloměrem  $r$ , který se dotýká oblouku  $t$ , jenž tvoří křivou část obvodu výseče. Délka oblouku  $t$  je  $O = 2\pi r$ ; délka celé kružnice, jejíž částí je  $t$ , je  $2\pi s$ . Je-li tedy  $\alpha$  středový úhel oblouku  $t$  (viz obr. 87) a měří-li  $\alpha$   $n$  stupňů, pak podle § 4 je

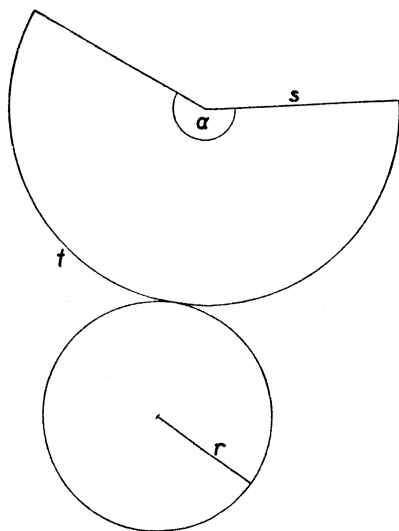
$$n : 360 = 2\pi r : 2\pi s = r : s$$

neboli

$$n = \frac{360r}{s}.$$

Nyní si probereme nejdůležitější věci o kouli. Ježto země má přibližně tvar koule, má geometrie čar na kulové ploše velký praktický

význam, zejména pro plavbu na moři. Již v § 2 jsme mluvili (viz obr. 20) o hlavních a vedlejších kružnicích na kulové ploše. Dvěma body  $A, B$  danými na kulové ploše prochází zpravidla jediná hlavní kružnice. Výjimka nastane na př. pro severní a jižní pól na zeměkouli; obecně nastane výjimka, jestliže přímka  $AB$  prochází středem koule  $S$ . V tomto výjimečném případě prochází body  $A$  a  $B$  nekonečně mnoho hlavních kružnic; každá rovina vedená přímkou  $AB$  protne kulovou plochu v takové hlavní kružnici. Jestliže však přímka  $AB$  neprochází středem  $S$ , existuje jediná rovina  $\rho$ , která spojuje přímkou  $AB$  se středem  $S$  a průsečná čára roviny  $\rho$  s kulovou plochou je jediná hlavní kružnice obsahující body  $A$  a  $B$ . Tyto dva body rozdělí hlavní kružnici na dva oblouky a menší z obou oblouků hlavní kružnice je nejkratší spojení bodů  $A$  a  $B$  na kulové ploše. Proto v geometrii na kulové ploše hrají hlavní kružnice stejnou úlohu jako přímky v geometrii roviny.

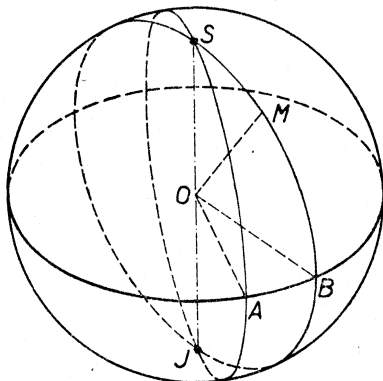


Obr. 87.

Zmíněná vlastnost hlavních kružnic má velkou praktickou důležitost. Melbourne v Australii a Kapské město v Jižní Africe mají přibližně stejnou zeměpisnou šířku. Ale cesta od Kapského města k Melbourne stále k východu, tedy po rovnoběžce, je mnohem delší než cesta po hlavní kružnici, která jde mnohem více k jihu. Ve skutečnosti ovšem nemůže loď plouti po zmíněné hlavní kružnici, protože by se dostala do jižních polárních krajín, ve kterých je plavba velmi nebezpečná.

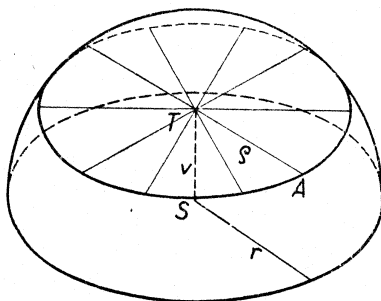
Hlavní kružnice na zeměkouli, jejíž rovina stojí kolmo na spojnici  $SJ$  severního a jižního pólu, jmenuje se rovník. Každým bodem  $M$  na povrchu zeměkoule prochází zcela určitá hlavní půlkružnice spojující oba póly, které se říká poledník. Za základní poledník se bere poledník Greenwichský. V obr. 88 je znázorněn Greenwichský

poledník, který protne rovník v bodě  $A$ , dále poledník procházející libovolným bodem  $M$  na povrchu zeměkoule, který protne rovník v bodě  $B$ . Je-li  $O$  střed zeměkoule, pak  $\sphericalangle AOB$  se jmenuje zeměpisná délka bodu  $M$ ; rozeznáváme západní a východní zeměpisnou délku,



Obr. 88.

které jdou od  $0^\circ$  (na Greenwichském poledníku) do  $180^\circ$  (na protějším poledníku). Úhel  $\sphericalangle BOM$  se jmenuje zeměpisná šířka bodu  $M$ ; rozeznáváme severní a jižní zeměpisnou šířku, které jdou od  $0^\circ$  (na



Obr. 89.

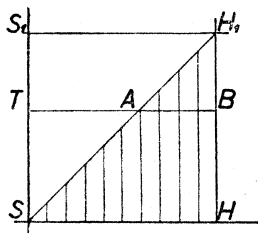
rovníku) do  $90^\circ$  (na pólech). Spojnice bodů stejné zeměpisné délky je poledník; spojnice bodů stejné zeměpisné šířky je vedlejší kružnice zvaná rovnoběžka. Všecky poledníky mají stejnou délku  $\pi r$ , kde  $r$  znamená poloměr zeměkoule. Naproti tomu je délka rovnoběžek ne-

stejná; nejdelší je rovník (délka  $2\pi r$ ); obecně délka rovnoběžky je  $2\pi \rho$ , kde  $\rho$  (poloměr rovnoběžky) je vzdálenost bodu  $M$  od přímky  $SJ$ .

Nyní si určíme objem polokoule (viz obr. 89). Polokoule poloměru  $r$  nechť spočívá rovnou částí svého povrchu na vodorovné podložce. Vodorovná rovina ve výšce  $v$  nad podložkou protne polokouli v kruhu poloměru  $\rho$ , jehož obsah je  $\pi\rho^2$ . Je-li  $T$  střed tohoto kruhu a  $A$  libovolný bod na obvodě, pak  $STA$  je pravoúhlý trojúhelník s přeponou  $\overline{AS} = r$  a odvěsnami  $\overline{ST} = v$ ,  $\overline{TA} = \rho$ , pročež  $v^2 + \rho^2 = r^2$ , tedy

$$\pi\rho^2 = \pi r^2 - \pi v^2.$$

Podle Cavalieriova principu má polokoule týž objem jako kterékoli jiné těleso spočívající na téže podložce a jdoucí až do výšky  $r$ , které každá vodorovná rovina ve výšce  $v$  protne v ploše obsahu  $\pi r^2 - \pi v^2$ . Takové těleso si však snadno opatříme, uvědomíme-li si, že  $\pi r^2 - \pi v^2$  je obsah mezikruží s poloměry  $r$  a  $v$ . Svislá úsečka  $SS_1$  délky  $r$  budiž



Obr. 90.

(viz obr. 90) stranou čtverce  $SS_1H_1H$ . Budiž  $T$  libovolný bod úsečky  $SS_1$ ,  $\overline{ST} = v$ . Vodorovná přímka vedená bodem  $T$  protne  $SH_1$  a  $HH_1$  v bodech  $A, B$  a jest  $\overline{TB} = r$ ,  $\overline{TA} = v$  (neboť v pravoúhlém trojúhelníku  $STA$  je  $\sphericalangle TSA = 45^\circ$ , takže  $\overline{TA} = \overline{ST}$ ). Jestliže nyní otáčíme trojúhelník  $SHH_1$  kolem osy  $SS_1$ , vznikne těleso  $L$ , které jde od vodorovné podložky až do výšky  $r$  a které každá vodorovná rovina ve

výšce  $v$  protne v mezikruží obsahu  $\pi r^2 - \pi v^2$ , takže těleso  $L$  má týž objem jako naše polokoule. Avšak těleso  $L$  vznikne, když z rotačního válce s poloměrem podstavy  $r$  a výškou  $r$  vyjmete rotační kužel s poloměrem podstavy  $r$  a výškou  $r$ . Objem válce je  $\pi r^2 \cdot r = \pi r^3$ , objem kužele je  $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$ , pročež objem tělesa  $L$ , tedy také objem polokoule, je

$$\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Objem koule je ovšem dvojnásobek objemu polokoule, pročež objem koule je dán vzorcem

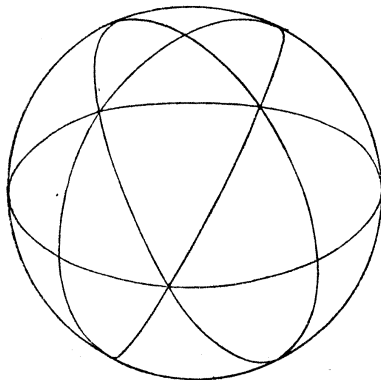
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Nyní si ještě najdeme vzorec pro povrch koule. Povrch koule se dá rozložit na velký počet velmi malých křivočarých troj-

úhelníků, jak je naznačeno v obr. 91. Když každý z těchto křivočarých trojúhelníků nahradíme přímočarým trojúhelníkem s týmiž vrcholy, přejde kulová plocha v plochu  $M$ , která se skládá z velkého počtu malých trojúhelníků a je vepsána do naší kulové plochy. Povrch kulové plochy se rovná velmi přibližně povrchu plochy  $M$ , který je roven

$$t_1 + t_2 + t_3 + \text{atd.},$$

kde  $t_1, t_2, t_3$  atd. jsou obsahy jednotlivých trojúhelníků. Každý z těchto trojúhelníků budiž podstavou trojbokého jehlanu, který má vrchol



Obr. 91.

ve středu  $S$  naší koule; výšky těchto jehlanů buďtež  $v_1, v_2, v_3$  atd. Všecky ty jehlany dohromady vyplní těleso  $T$ , jehož objem je velmi přibližně roven objemu koule. Objemy našich jehlanů jsou

$$\frac{1}{3}t_1v_1, \frac{1}{3}t_2v_2, \frac{1}{3}t_3v_3 \text{ atd.}$$

a objem tělesa  $T$  je

$$\frac{1}{3}(t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 + \text{atd.}).$$

Avšak všechny výšky  $v_1, v_2, v_3$  atd. jsou velmi přibližně rovny  $r$ , takže objem tělesa  $T$  je velmi přibližně roven

$$\frac{1}{3}r(t_1 + t_2 + t_3 + \text{atd.})$$

neboli součinu čísla  $\frac{1}{3}r$  s povrchem plochy  $M$ , který je zase velmi přibližně roven povrchu  $P$  naší koule. Protože však objem tělesa  $T$  je velmi přibližně roven objemu koule, tedy číslu  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , musí být

$$\frac{1}{3}r \cdot P = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Proto povrch koule je dán vzorcem

$$P = 4\pi r^2.$$

Výsledky tohoto paragrafu, jakož i další příbuzné výsledky, které už nebudeme uváděti, objevil slavný starověký matematik Archimedes, o kterém jsme se zmínili již v § 4.

### Cvičení k § 6.

U mnoha příkladů je výhodné voliti  $\pi \doteq 3,14$ . Nepočítejte nikde přesněji než na tři platné cifry.

#### I. Válec.

142. Určete objem, plášť a povrch rotačního válce:

- poloměr podstavy 35 cm; výška 6 dm;
- průměr podstavy 2,1 cm; výška 2 dm;
- průměr podstavy 1,4 m; výška 1 cm;
- poloměr podstavy 0,35 cm; výška  $\frac{1}{2}$  m.

143. Určete výšku rotačního válce:

- objem 66 dm<sup>3</sup>; poloměr podstavy 2 dm;
- objem 4 l; poloměr podstavy 5 cm;
- objem  $\frac{1}{2}$  l; plášť 2 dm<sup>2</sup>.

144. Určete průměr podstavy rotačního válce:

- objem 44 cm<sup>3</sup>; výška 3 $\frac{1}{2}$  cm;
- objem 385 cm<sup>3</sup>; výška 1 dm;
- plášť 396 cm<sup>2</sup>; výška 9 cm.

145. Určete váhu duté kovové roury:

- vnitřní průměr 6 cm, tloušťka 1 cm, délka 6 dm, spec. hmota 8,4 gm<sup>-3</sup>;
- vnější průměr 33 cm, tloušťka 1 $\frac{1}{2}$  cm, délka 9 dm, spec. hmota 7,8 gm<sup>-3</sup>;
- vnější průměr 18 cm, tloušťka  $\frac{3}{4}$  cm, délka 100 m, spec. hmota 7,7 gm<sup>-3</sup>.

146. Kovový válec průměru 15 cm, vysoký 18 cm, je uložen do krabice s vnitřními rozměry 15 cm, 15 cm, 18 cm a zbylý prostor je vyplněn pilinami. Určete objem prostoru vyplněného pilinami!

147. Válcová nádrž s průměrem 1,8 m obsahuje 22 hl vody. Do jaké výše sahá voda?

148. Rourou s průměrem 7,5 cm proudí voda rychlostí 1,8 m za vteřinu. Za kolik hodin se naplní nádrž rozměrů 12 m; 9 m; 2,4 m?

149. Vnitřní řez tunelu je obdélník široký 7,2 m a polokruh nad ním; největší výška je 6 m. Je-li tunel 100 m dlouhý, určete celkový vnitřní povrch tunelu!

150. Kolik stojí nátěr plotu, který se skládá ze 105 válcových tyčí s průměrem 12 cm, vysokých 1 m, přijde-li 1 m<sup>2</sup> plochy na 75 Kčs? [Také vršky tyčí jsou natřeny.]

151. Kolika dm<sup>2</sup> plechu je třeba na zavřenou válcovou plechovku s průměrem 12 cm, vysokou 27 cm, má-li být výška víka 1½ cm?

## II. Kužel.

152. Určete objem rotačního kužele:

- a) výška 4 dm; obsah podstavy 15 dm<sup>2</sup>;
- b) výška 7 cm; poloměr podstavy 3 cm;
- c) výška 6 cm; strana 1 dm;
- d) výška 5 cm; obvod podstavy 22 cm.

153. Určete povrch rotačního kužele:

- a) strana 1 dm; poloměr podstavy 6 cm;
- b) strana 13 cm; výška 12 cm;
- c) výška 12 cm; průměr podstavy 18 cm.

154. Objem rotačního kužele je 462 cm<sup>3</sup>; poloměr podstavy je 7 cm. Určete výšku!

155. Pvrch rotačního kužele je 29,7 dm<sup>2</sup>; průměr podstavy je 42 cm. Určete stranu!

156. Papirový polokruh průměru 18 cm se svine do pláště rotačního kužele. Určete výšku kužele a úhel osového řezu kužele!

157. Podstava kuželovitého stanu má průměr 5 m; výška stanu je 3 m. Určete objem stanu! Kolik plátna se spotřebuje na stan?

158. Sestavte vzorec pro povrch a objem rotačního kužele s poloměrem podstavy  $r$ , jehož rozvinutý plášť tvoří třetinu kruhu!

159. Do kruhu  $K$  s poloměrem  $r$  je vepsán pravidelný šestiúhelník  $M$ ;  $K$  je podstava rotačního kužele,  $M$  je podstava pravidelného šestibokého jehlanu; obě tělesa mají výšku  $v = r$ .

- a) Kolika procentům objemu kužele je roven objem jehlanu?
- b) Kolika procentům pláště kužele je roven plášť jehlanu?

160. Opakujte úlohu 159 s tím rozdílem, že  $v = 2r$ !

## III. Koule.

161. Délka zemského poledníku je 20 001 712 m. Mořská míle je vzdálenost dvou bodů na též poledníku, jejichž zeměpisné šířky se liší o 1'. Kolik měří mořská míle?

162. Určete povrch a objem koule:

- a) poloměr 2,63 cm; b) průměr 7,28 cm.

163. Určete poloměr koule, jejíž povrch je 1 m<sup>2</sup>.

164. Krychle a koule mají stejný povrch. Které těleso má větší objem?

**165.** Kolik dešťových kapek průměru 2 mm vyplní polokulovitou sběračku průměru 8 cm?

**166.** Ve válcové nádrži s průměrem 1,2 m je vody do výše 9 dm. Oč stoupne hladina vodní, ponoří-li se do nádrže kovová koule s průměrem 9 dm?

**167.** Z deseti olověných koulí s průměrem 1 dm se vyrobí válec s průměrem podstavy 4 dm. Určete výšku válce!

**168.** Vnější průměr duté kovové koule je 12 cm, tloušťka 2 cm. Jaký průměr má stejně těžký plný válec z téhož materiálu, je-li jeho výška 10,4 cm?

**169.** Je-li průměr zeměkoule 12 760 km, průměr slunce 1 390 000 km, průměr měsíce 3 473 km, průměr planety Marsu 6 780 km, určete jejich povrchy!

**170.** Povrch země měří 509 951 000 km<sup>2</sup>. Kdyby země měla přesně tvar koule, jaký by byl její poloměr? (Volte  $\pi \doteq 3,14159$  a počítejte přesně na kilometry!)

---





## Obsah.

	Str.
§ 1. Obsah mnohoúhelníka. Povrch a objem kolmého hranolu.....	3—10
Cvičení k § 1. [I. Obsah mnohoúhelníka, cvič. 1 až 11. II. Kolmé hranoly, cvič. 12 až 15.].....	8—10
§ 2. Pythagorova věta .....	10—21
Cvičení k § 2. [I. Trojúhelníky a čtyřúhelníky, cvič. 16 až 33. II. Kružnice, cvič. 34 až 39. III. Tělesa, cvič. 40 až 56. IV. Obrácení Pythagorovy věty, cvič. 57 až 60.] .....	18—21
§ 3. Proměna obrazců. Euklidovy věty .....	21—35
Cvičení k § 3. [I. Rovné rovnoběžníky a trojúhelníky, cvič. 61 až 70. II. Proměna obrazců, cvič. 71 až 83. III. Euklidovy věty, cvič. 84 až 91.].....	31—35
§ 4. Obvod a obsah kruhu.....	35—41
Cvičení k § 4. [Cvič. 92 až 118.] .....	40—41
§ 5. Hranoly a jehlany.....	42—51
Cvičení k § 5. [Cvič. 119 až 141.].....	48—51
§ 6. Válce, kužele a koule .....	51—61
Cvičení k § 6. [I. Válec, cvič. 142 až 151. II. Kužel, cvič. 152 až 160. III. Koule, cvič. 161 až 170.] .....	59—61







Kop 567/3