Eduard Čech

Geometrie pro II. třídu středních a měšťanských školGeometry for 2nd high school and town school class

Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1945, 77 s.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/501357`

EDUARD ČECH

GEOMETRIE

PRO II. TŘ. MĚŠŤANSKÝCH A STŘEDNÍCH ŠKOL

156

CENA Kčs 15,—

Jč
m+f

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

UČEBNICE A POMOCNÉ KNIHY VYDÁVANÉ JEDNOTOU
ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
156

GEOMETRIE

pro II. třídu měšťanských a středních škol

Napsal
EDUARD ČECH

Se 130 obrazci

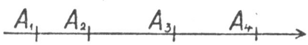
Schváleno výnosem ministerstva školství a osvěty ze dne 28. února 1947,
čís. A-269 568/46-III/1 jako dotisk prvního vydání pro školní rok 1947/48
a dobu přechodnou

CENA Kčs 15,—

PRAHA 1947
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“, PRAHA VIII-94

§ 1. Dvě přímky proťaté příčkou.

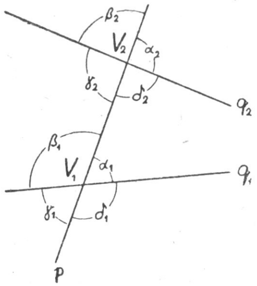
Víte, že body značíme velkými písmeny. Když jsme si v nějakém obrazci chtěli vyznačiti body písmeny, dělali jsme to dosud tak, že jsme užili pro každý bod jiného písmene. Ale můžeme také užíti jednoho písmene k vyznačení několika bodů. K rozlišení těch bodů pak užijeme *indexů*. Indexy jsou číslice, které píšeme *dole vpravo*. Na př. A_1, A_2, A_3, A_4 v obr. 1. (Čteme A jedna, A dvě atd.) Indexy píšeme maličké, ale zřetelné!



Obr. 1.

Víte, že body na dané přímce můžeme sledovati ve dvojím *pořádku*. Rozhodneme-li se pro určitý pořádek, můžeme si to znázorniti *šipkou* jako v obr. 1. Záleží na tom, na kterém místě přímky je šipka vyznačena? Na čem záleží?

Zvolme si v obr. 1 třeba bod A_2. Přímka se jím rozdělí na dvě *polopřímky*. Jedna z nich, totiž polopřímka A_2A_3, odpovídá pořádku vyznačenému šipkou; druhá z nich, totiž polopřímka A_2A_1, odpovídá druhému možnému pořádku bodů na naší přímce. O dvou polopřímkách na dané přímce říkáme, že mají (mezi sebou) *stejný smysl*, když odpovídají obě stejnému pořádku bodů na přímce; říkáme, že mají (mezi sebou) *opačný smysl*, když každá odpovídá jinému pořádku. Tak na př. mají v obr. 1 polopřímka A_1A_3 a A_2A_3 stejný smysl, odpovídající vyznačenému pořádku. Také polopřímky A_3A_1 a A_4A_1 mají stejný smysl, tentokrát neodpovídající zvolenému pořádku. Naproti tomu mají polopřímky A_1A_4 a A_4A_1 opačný smysl (první odpovídá vyznačenému pořádku, druhá mu neodpovídá).



Obr. 2.

V obr. 2 vidíme tři přímky. Jedna z nich je označena p, ostatní dvě jsou označeny q_1 a q_2. Přímky p a q_1 se protnou v bodě, který je označen V_1. Přímky p a q_2 se protnou v bodě, který je označen V_2. (Přímky q_1 a q_2 by se v našem případě také protaly, kdybychom si obrazec prodloužili. Ale na tom nezáleží; přímky q_1 a q_2 v takovém obrazci by také mohly býti rovnoběžné.) Máme-li takový obrazec, říkáme přímce p *příčka*; q_1 a q_2 nazveme *protaté přímky*. Celý obrazec se tedy jmenuje: *dvě přímky protaté příčkou*.

Při vrcholu V_1 máme čtyři úhly, které jsou v obrazci označeny $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$. Také při vrcholu V_2 máme čtyři úhly, v obrazci označené $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$. Celkem máme v obrazci osm úhlů; každý z nich má jedno rameno v příčce a druhé rameno v jedné z obou protatých přímek.

Z těchto osmi úhlů si můžeme mnoha způsoby vybrati dva. Tak dostaneme rozmanité *dvojice úhlů*. Některé z těch dvojic mají určitá jména, která si musíte zapamatovat. Jestliže oba úhly v dvojici mají stejný vrchol (ať už je to vrchol V_1 či vrchol V_2), je to buďto *dvojice vedlejších úhlů* nebo *dvojice vrcholových úhlů*. Oba ty názvy už znáte.

S novými jmény se tedy setkáme pouze u těch dvojic, kde jeden úhel má vrchol V_1 a druhý vrchol V_2. Důležité jsou především tyto čtyři dvojice:

$$\alpha_1, \alpha_2; \quad \beta_1, \beta_2; \quad \gamma_1, \gamma_2; \quad \delta_1, \delta_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **souhlasných úhlů.** U souhlasných úhlů mají ramena ležící v příčce stejný smysl; ramena ležící v protatých přímkách leží obě na stejné straně od příčky.

Dále jsou důležité tyto čtyři dvojice:

$$\alpha_1, \gamma_2; \quad \beta_1, \delta_2; \quad \gamma_1, \alpha_2; \quad \delta_1, \beta_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **střídavých úhlů.** U střídavých úhlů mají ramena ležící v příčce opačný smysl; ramena ležící v protatých přímkách leží každé na jiné straně od příčky.

Z ostatních dvojic si pojmenujeme ještě pouze dvojice:

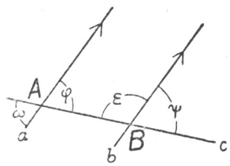
$$\alpha_1, \delta_2; \quad \beta_1, \gamma_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **přilehlých úhlů.** U přilehlých úhlů ramena ležící v příčce obsahují úsečku V_1V_2; ramena ležící v proťatých přímkách leží obě na stejné straně od příčky.

Často se vyskytují obrazce, ve kterých jsou dvě přímky, o kterých je nám známo, že jsou rovnoběžné. Abychom měli tu rovnoběžnost dobře na paměti, děláme si na obou rovnoběžkách šipky (viz obr. 3 a jiné). Na jedné z nich si zvolíme šipku libovolně, ale na druhé přímce uděláme šipku tak, aby obě šipky vyznačovaly souhlasný pořádek. Takový souhlasný pořádek dostaneme, představíme-li si, že se dva body pohybují současně, každý po jedné z obou rovnoběžek, a to tak, že jsou stále stejně od sebe vzdáleny.

V obrazcích, které sami rýsujete, můžete si rovnoběžnost vyznačit výrazněji, užijete-li barevné tužky. (Obě šipky stejnou barvou!) Někdy se vyskytují v témž obrazci dva páry rovnoběžek. Tak je tomu na př. v obr. 16; jeden pár rovnoběžek je vyznačen jednoduchými šipkami, druhý pár dvojitými. Ve vlastním obrazci můžete užíti dvou různých barev.

V obr. 3 vidíte, stejně jako v obr. 2, dvě přímky proťaté příčkou; ale tentokrát jsou proťaté přímky mezi sebou rovnoběžné. Budeme nyní obr. 3 zkoumat a to tak, že si pokaždé všimneme jedné dvojice úhlů. Výsledkem toho zkoumání budou poznatky, které si musíte dobře vštípiti v pamět, protože, jak uvidíte na příkladech, dá se jich užít k řešení rozmanitých úloh. Takovým důležitým poznatkům říkáme poučky. Některé poučky již znáte. Uveďme si dvě takové známé poučky.



Obr. 3.

Vrcholové úhly jsou si rovny. (Na př. $\omega = \varphi$ v obr. 3.)

Vedlejší úhly jsou výplňkové. (Na př. $\varepsilon + \psi = 2R$ v obr. 3.)

Všimněme si nyní v obr. 3 dvojice souhlasných úhlů φ, ψ. Posouváme-li úhel φ podél příčky c tak daleko, až vrchol přejde z polohy A do polohy B, přejde úhel φ na konec v úhel ψ. Protože při posouvání zůstává velikost úhlu nezměněna, je $\varphi = \psi$.

Souhlasné úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny.

Nyní si všimněme v obr. 3 dvojice střídavých úhlů ω, ψ. Jest $\omega = \varphi$ (vrcholové úhly), ale také $\psi = \varphi$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami; proto je $\omega = \psi$.

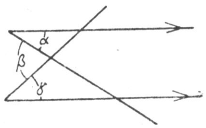
Střídavé úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny.

Dále si všimněme v obr. 3 dvojice přilehlých úhlů φ, ε. Jest $\psi + \varepsilon = 2R$ (vedlejší úhly); ale $\varphi = \psi$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami); proto je $\varphi + \varepsilon = 2R$.

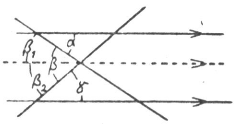
Přilehlé úhly mezi rovnoběžkami jsou výplňkové.

Příklad. V obr. 4a je $\alpha = 32°$, $\gamma = 41°$. Určete β.

Jako mnohé jiné geometrické úlohy, rozřeší se i tato úloha snadno, provedeme-li napřed pomocnou konstrukci. To znamená, že do daného obrazce přirýsujeme jednu novou čáru nebo několik nových čar, volených tak, aby se řešení úlohy ulehčilo. V našem případě je vhodné vésti k oběma daným rovnoběžkám třetí rovnoběžku vrcholem



Obr. 4a.



Obr. 4b.

úhlu β (viz obr. 4b). Úhel β se nám rozdělí na dva úhly β_1 a β_2. Jest $\beta_1 = \alpha$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami), dále $\beta_2 = \gamma$ (z téhož důvodu); tedy $\beta_1 = 32°$, $\beta_2 = 41°$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 73°$. Pomocná čára byla v obr. 4b čárkována, aby bylo patrné, že nepatří k původnímu obrazci.

Všimněme si znovu obrazce 3! V tomto obrazci jsou φ a ψ souhlasné úhly mezi rovnoběžkami a proto je $\varphi = \psi$. Nyní si mysleme náš obrazec poněkud změněn. Přímky a a c ať zůstanou stále v původní poloze, ale přímku b si mysleme z původní polohy pootočenu (kolem středu B). Co se stane se souhlasnými úhly φ a ψ? Úhel φ zůstane beze změny, ale velikost úhlu ψ se jistě změní. Proto už nebude $\varphi = \psi$. Kdežto souhlasné úhly mezi rovnoběžkami jsou stejné, vidíte, že souhlasné úhly mezi různoběžkami stejné býti nemohou. Proto když o dvou souhlasných úhlech víme, že jsou stejné, můžeme z toho soudit, že jsou mezi rovnoběžkami. Říkáme, že poučka o rovnosti souhlasných úhlů mezi rovnoběžkami se dá obrátit. Původní poučka říká, že když víme, že proťaté přímky jsou rovnoběžné, můžeme usoudit, že souhlasné úhly jsou si rovny. Obrácená poučka říká, že když víme, že dva souhlasné úhly jsou si rovny, můžeme usoudit, že proťaté přímky jsou rovnoběžné.

Každá poučka se obrátit nedá. Na př. „Když dva úhly jsou vrcholové, jsou si rovné“ je správná poučka. Obrácení by znělo „Když dva úhly jsou si rovny, jsou to úhly vrcholové“, ale to není správné.

Vyslovme si ještě jednou obrácenou poučku o souhlasných úhlech:

Jsou-li dva souhlasné úhly sobě rovny, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

Nyní se snadno přesvědčíme, že také poučka o střídavých úhlech se dá obrátit:

Jsou-li dva střídavé úhly sobě rovny, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

Abychom se o správnosti této poučky přesvědčili, podívejme se znovu na obr. 3. V něm jsou ω a ψ dva střídavé úhly. Víme, že $\omega = \psi$ a máme se přesvědčit, že $a \parallel b$. Vezmeme si na pomoc úhel φ. Jest $\omega = \varphi$ (vrcholové úhly). Proto je také $\varphi = \psi$, ale φ a ψ jsou souhlasné úhly, takže $a \parallel b$.

Také obrácená poučka o přilehlých úhlech je správná:

Jsou-li dva přilehlé úhly výplňkové, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

O správnosti se přesvědčíme zase podle obr. 3. Víme, že

$$\varphi + \varepsilon = 2R$$

a máme se přesvědčit, že $a \parallel b$. Vezmeme na pomoc úhel ψ. Jest

$$\psi + \varepsilon = 2R$$

(vedlejší úhly). Proto je $\varphi = \psi$, ale φ a ψ jsou souhlasné úhly, takže $a \parallel b$.

Vraťme se ještě jednou k obr. 3! Proťaté přímky a, b jsou rovnoběžné a jest $\varphi + \varepsilon = 2R$. Zase si mysleme, že přímky a a c zůstanou každá ve své poloze, ale že se přímka b pootočí kolem středu B. Pootočená přímka b bude s přímkou a různoběžná a proto ji protne. Pootočení přímky b můžeme provésti dvojím způsobem. Předně můžeme přímku b otočit tak, že se úhel ε zmenší, takže bude $\varphi + \varepsilon < 2R$. V tomto případě se protnou ramena úhlů φ a ε ležící v proťatých přímkách. Za druhé můžeme přímku b otočit tak, že se úhel ε zvětší, takže bude $\varphi + \varepsilon > 2R$. Teď se ramena úhlů φ a ε (ležící v přímkách a a b) neprotnou, protože průsečík přímek a a b bude teď na druhé straně od příčky.

Mají-li dva přilehlé úhly součet menší než $2R$, pak se ramena ležící v prot'atých přímkách protnou.

Cvičení k § 1.

1. Co můžete říci o smyslu dvou polopřímek, víte-li, že jedna je částí druhé?

2. Na dané přímce si zvolíme dvě polopřímky opačného smyslu. Které body jsou oběma polopřímkám společné? (Jsou tři možné případy.)

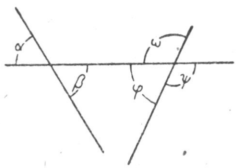
3. Mohou dvě polopřímky stejného smyslu dohromady vyplniti celou přímku?

4. Musí dvě polopřímky opačného smyslu dohromady vyplniti celou přímku?

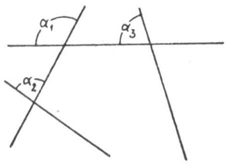
5. Jmenujte všecky dvojice vedlejších úhlů v obr. 2 (str. 4)!

6. Jmenujte všecky dvojice vrcholových úhlů v obr. 2!

7. V obr. 5 udejte název dvojice úhlů:



Obr. 5.



Obr. 6.

a) α, β. b) α, ω. c) ω, φ.
d) β, ψ. e) β, ω. f) β, φ.

8. Narýsujte si od ruky obrazec podobný obr. 6.
α_1, α_2 a α_1, α_3 jsou dvě dvojice souhlasných úhlů.

a) Ve svém obrazci si označte $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$ ostatní tři úhly, které mají týž vrchol jako úhel α_1. Podobně pro úhly α_2 a α_3.

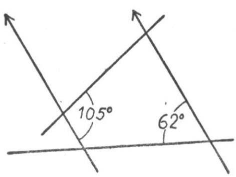
b) Vypište podle svého obrazce všecky dvojice souhlasných úhlů!

c) Vypište všecky dvojice stř davých úhlů!

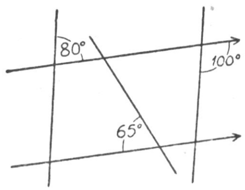
d) Vypište všecky dvojice přilehlých úhlů!

9. Sestrojte si od ruky obrazec podobný obr. 7. Vpište do svého obrazce velikosti všech úhlů! (Celkem máte 16 úhlů.)

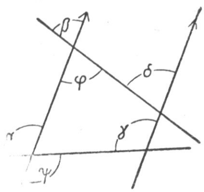
10. Opakujte s obr. 8. (Celkem máte 24 úhly.)



Obr. 7.



Obr. 8.



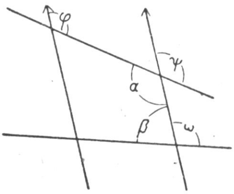
Obr. 9.

Také ve cvičeních 11 až 18 pokaždé si narýsujte vlastní obrazec od ruky.

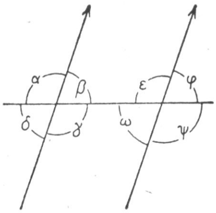
11. V obr. 9 jest $\varphi = 73°$, $\psi = 114°$. Určete α, β, γ, δ. Udávejte důvody!

12. V obr. 10 jest $\alpha = 127°$, $\beta = 87°$. Určete φ, ψ, ω. Udávejte důvody!

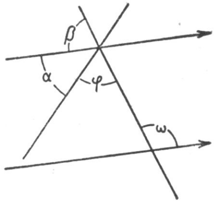
Také ve cvičeních 13 až 18 udávejte důvody!



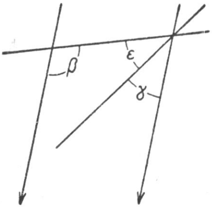
Obr. 10.



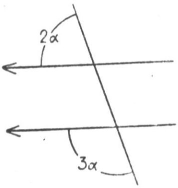
Obr. 11.



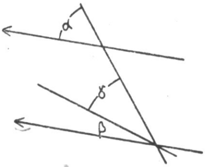
Obr. 12.



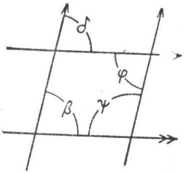
Obr. 13.



Obr. 14.



Obr. 15.



Obr. 16.

13. Následující úlohy se týkají obr. 11, který není přesně rýsován.

a) Jest $\beta = 72°$; určete ω.

b) Jest $\psi = 106°$; určete α.

c) Jest $\delta = 63°$; určete ε.

d) Jest $\varphi = 82°$; určete γ.

e) Jest $\alpha = 2\varphi$; určete φ.

f) Jest $\gamma - \omega = 72°$; určete ω.

14. V obr. 12 jest $\varphi = 65°$, $\omega = 114°$. Určete α a β.

15. V obr. 13 jest $\beta = 107°$, $\gamma = 35\frac{1}{2}°$. Určete ε.

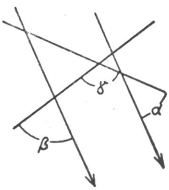
16. V obr. 14 určete α.

17. V obr. 15 je $\alpha = 51°$, $\gamma = 2\beta$. Určete β a γ.

18. V obr. 16 je $\beta = 79\frac{1}{2}°$. Určete δ, φ a ψ.

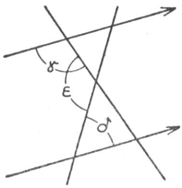
Ve cvičeních 19 až 24 rýsujte vlastní obrazce od ruky! Pomocné čáry čárkujte! Udávejte důvody!

19. V obr. 17 jest $\alpha = 42°$, $\beta = 76°$. Určete γ.

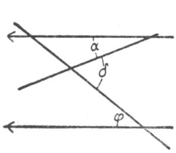


Obr. 17.

Obr. 18.

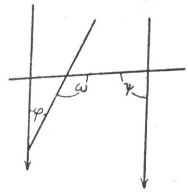


Obr. 19.

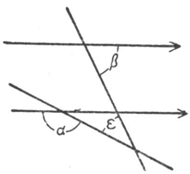


Obr. 20.

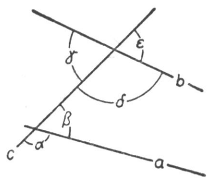
20. V obr. 18 jest $\varphi = 132°$, $\psi = 154°$. Určete ω.
21. V obr. 19 jest $\gamma = 112°$, $\delta = 58°$. Určete ε.
22. V obr. 20 jest $\alpha = 21°$, $\delta = 57°$. Určete φ.
23. V obr. 21 jest $\varphi = 25°$, $\omega = 121°$. Určete ψ.
24. V obr. 22 jest $\beta = 63°$, $\varepsilon = 36°$. Určete α.



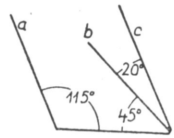
Obr. 21.



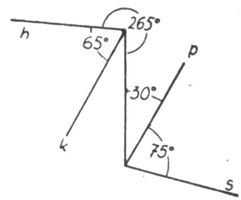
Obr. 22.



Obr. 23.



Obr. 24.



Obr. 25.

25. Dá se následující poučka obrátit?

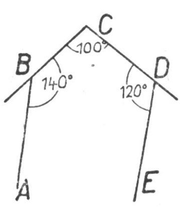
a) Když úhel φ je ostrý, je menší než jeho vedlejší úhel.

b) Když trojúhelník má jeden úhel pravý, má dva úhly ostré.

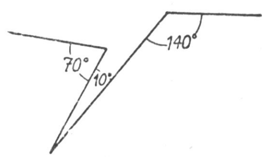
Ke cvič. 26 až 28 rýsujte vlastní obrazce od ruky! Udávejte důvody!

26. V obr. 23, který není přesně rýsován, zkoumejte podle daných číselných údajů, je-li $a \parallel b$. Není-li, řekněte, zda se přímky a a b protnou nalevo či napravo od přímky c.

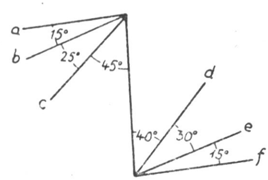
a) $\beta = 60°$, $\varepsilon = 70°$.
b) $\beta = 55°$, $\delta = 125°$.
c) $\alpha = 115°$, $\varepsilon = 65°$.
d) $\beta = 65°$, $\gamma = 60°$.



Obr. 26.



Obr. 27.



Obr. 28.

27. a) Zkoumejte, je-li v obr. 24 nějaký pár rovnoběžek!

b) Opakujte s obr. 25!

c) Opakujte s obr. 26! (Pomocná konstrukce: Bodem C veďte rovnoběžku s přímkou AB.)

d) Opakujte s obr. 27! (Zase pomocná konstrukce.)

28. Hledejte páry rovnoběžek v obr. 28!

29. Které nové geometrické výrazy jste poznali v tomto paragrafu? Zapište si je!

30. Zapište si všecky poučky, které jste poznali v tomto paragrafu.

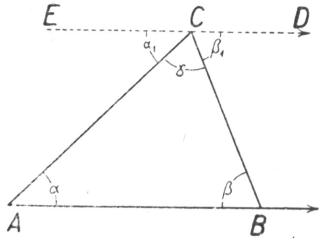
§ 2. Úhly mnohoúhelníka.

Součet úhlů trojúhelníka je $2R$. Tuto důležitou poučku už znáte. Můžeme si ji dokázati takto (viz obr. 29). Vrcholem C si vedeme přímku ECD rovnoběžnou s přímkou AB. Podle obrazce jest

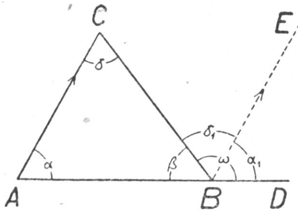
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 2R.$$

Avšak $\alpha_1 = \alpha$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\beta_1 = \beta$ (z téhož důvodu). Tedy

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$



Obr. 29.



Obr. 30.

Při důkaze právě provedeném jsme vedli pomocnou čáru vrcholem C. Místo toho jsme mohli vésti pomocnou čáru vrcholem A nebo vrcholem B. Proveďte to!

Vnější úhel trojúhelníka se rovná součtu obou protějších úhlů vnitřních. Také tato poučka je vám už známa. Můžeme si ji dokázati takto (viz obr. 30). Máme dokázati, že $\omega = \alpha + \gamma$. Vrcholem B si vedeme přímku BE rovnoběžnou s přímkou AC. Podle obrazce jest $\omega = \alpha_1 + \gamma_1$. Avšak $\alpha_1 = \alpha$ (proč?), $\gamma_1 = \gamma$ (proč?), takže je opravdu $\omega = \alpha + \gamma$.

Vnější úhel při vrcholu B jsme si mohli také opatřiti prodloužením strany BC za vrchol B (místo prodloužení strany AB). Proveďte důkaz s touto změnou.

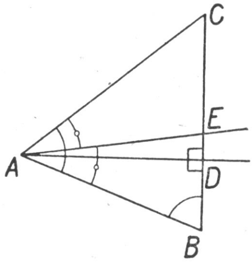
Proveďte důkaz také pro vnější úhel při vrcholu C!

Poučku o vnějším úhlu odvoďte z poučky o součtu úhlů!

Poučku o součtu úhlů odvoďte z poučky o vnějším úhlu!

U pravoúhlého trojúhelníka je jeden úhel roven R, tedy **součet obou ostrých úhlů pravoúhlého trojúhelníka je R.**

Příklad (viz obr. 31). V trojúhelníku ABC úhel při vrcholu A měří 60°, úhel při vrcholu B 70°. AE je osa úhlu $\sphericalangle BAC$. D je pata kolmice spuštěné s bodu A na přímku BC. Vypočtěte $\sphericalangle DAE$.



Obr. 31.

[Polopřímka AE rozdělí $\sphericalangle BAC$ na dva stejné úhly. Abychom to měli na mysli, jsou oba úhly v obrazci vyznačeny malými obloučky, které jsou přerušeny malým kroužkem. Ve svém obrazci můžete užít barevných obloučků (oba stejné barvy). Všimněte si také obou malých čtverečků u bodu D. Ty nám připomínají, že oba úhly s vrcholem D jsou pravé. Zase můžete ve svém obrazci docíliti výraznosti barvou.]

Protože AE je osa úhlu $\sphericalangle BAC$, rovného 60°, je

$$\sphericalangle BAE = 30°, \qquad \sphericalangle EAC = 30°.$$

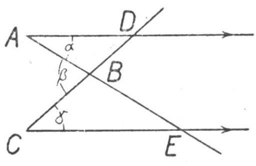
Všimněme si pravoúhlého trojúhelníka ABD. Víme, že jeho úhel při vrcholu B měří 70°. Proto si můžeme vypočítat jeho úhel při vrcholu A. Najdeme

$$\sphericalangle BAD = 20°.$$

Nám běží o úhel $\sphericalangle DAE$. Ten dostaneme, když od úhlu $\sphericalangle BAE$ ubereme úhel $\sphericalangle BAD$. Protože $30 - 20 = 10$, jest $\sphericalangle DAE = 10°$.

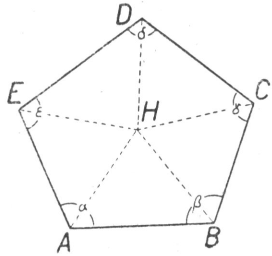
Příklad. V obr. 4a (str. 6) je $\alpha = 32°$, $\gamma = 41°$. Určete β.

Tuto úlohu jsme už řešili tak, že jsme provedli pomocnou konstrukci (viz obr. 4b). Nyní si ji rozřešíme bez pomocné konstrukce. Obrazec máme narýsován znovu (viz obr. 32). Vidíme dva trojúhelníky: ABD a CBE. Kterýkoli z nich nám poslouží. V trojúhelníku ABD máme při vrcholu A úhel α a úhel při vrcholu D se rovná γ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Protože β je vnější úhel, vyjde $\beta = \alpha + \gamma$, tedy $\beta = 73°$. V trojúhelníku CBE máme při vrcholu C úhel γ a úhel při vrcholu E se rovná α (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Protože β je vnější úhel, vyjde zase $\beta = \alpha + \gamma$.



Obr. 32.

Narýsujte si libovolný pětiúhelník $ABCDE$. Jeho vnitřní úhly (nebo krátce úhly) jsou α, β, γ, δ, ε (viz obr. 33). Budeme hledati, čemu se rovná součet všech pěti úhlů. Za tím účelem si zvolme uvnitř pětiúhelníka bod H. Spojíme-li jej se všemi vrcholy, rozdělí se pětiúhelník na pět trojúhelníků. Součet všech úhlů všech těch trojúhelníků je $5 \times (2R)$ neboli $10R$. Ale tento součet se skládá



Obr. 33.

ze dvou úhlů s vrcholem A, které dohromady dají úhel α,
ze dvou úhlů s vrcholem B, které dohromady dají úhel β,
ze dvou úhlů s vrcholem C, které dohromady dají úhel γ,
ze dvou úhlů s vrcholem D, které dohromady dají úhel δ,
ze dvou úhlů s vrcholem E, které dohromady dají úhel ε

a ještě z pěti úhlů s vrcholem H, které dohromady dají $4R$ neboli $2 \times (2R)$. Tedy

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + 2 \times (2R) = 5 \times (2R),$$

takže
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 3 \times (2R) = 540°.$$

Stejnou cestou určete součet úhlů

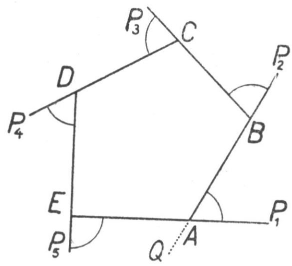
a) u čtyrúhelníka, b) u osmiúhelníka, c) u dvacetiúhelníka.

Při určování součtu úhlů jsme nemusili bod H voliti uvnitř, mohli jsme jej také voliti na obvodě, a to buďto v některém vrcholu nebo také v jiné poloze. Proveďte to

a) pro pětiúhelník, b) pro osmiúhelník, c) pro dvacetiúhelník.

Výsledek: **Součet všech úhlů mnohoúhelníka je $(n - 2) \times 2R$, kde n značí počet stran** (neboli počet úhlů).

Vnější úhel mnohoúhelníka vznikne stejně jako u trojúhelníka. Na př. u pětiúhelníka $ABCDE$ v obr. 34 vnější úhel při vrcholu A je $\sphericalangle BAP_1$ nebo také $\sphericalangle EAQ$. Tyto dva úhly jsou stejné (proč?), takže rýsujeme zpravidla jen jeden, jak je to v obr. 34 provedeno pro vrcholy B, C, D, E. Zejména, když určujeme součet všech vnějších úhlů, bereme u každého vrcholu jen jeden vnější úhel.



Obr. 34.

U každého vrcholu pětiúhelníka máme tedy jeden vnitřní úhel a jeden vnější úhel, a ty dva úhly dají dohromady $2R$ (proč?). Tedy, když sečteme dohromady všech pět úhlů vnitřních i všech pět úhlů vnějších, dostaneme $5 \times (2R)$. Ale my víme, že součet vnitřních úhlů je $3 \times (2R)$. Tedy vnější úhly dají dohromady $2 \times (2R)$ neboli $4R$.

Stejnou cestou určete součet vnějších úhlů

a) u trojúhelníka, b) u čtyrúhelníka, c) u patnáctiúhelníka.

Výsledek: **Součet všech vnějších úhlů mnohoúhelníka je 4*R* neboli 360°.**

O správnosti této poučky se můžeme přesvědčiti z názoru. Proveďme si to třeba pro pětiúhelník. Na podlaze se narýsuje velký pětiúhelník $ABCDE$. Nyní se postavme do vrcholu E tak, abychom hleděli k bodu A (viz obr. 34). Potom obejděme celý pětiúhelník kolem dokola (nejprve jdeme do A). Při tom se musíme v každém z vrcholů A, B, C, D pootočit, a to právě o vnější úhel při tomto vrcholu. Když se vrátíme do vrcholu E, hledíme směrem k bodu P_5. Proto se také ve vrcholu E ještě pootočíme o vnější úhel při tomto vrcholu a pak jsme obráceni právě týmž směrem jako na začátku. Celkem jsme se otočili pětkrát, a to dohromady právě o plný úhel, neboli o $4R$. Proto součet všech vnějších úhlů pětiúhelníka je $4R$.

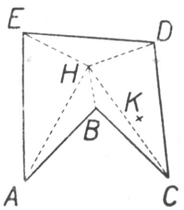
Pojem pravidelného mnohoúhelníka je vám již znám. Víte, že pravidelný mnohoúhelník je vepsán do kružnice k a že jeho vrcholy rozdělí kružnici k na stejné díly. Označme S střed kružnice k. Jsou-li P a Q kterékoli dva vrcholy pravidelného mnohoúhelníka, přejde vhodným otočením kolem středu S vrchol P ve vrchol Q. Tímto otočením přejde vnitřní úhel při vrcholu P ve vnitřní úhel při vrcholu Q a také vnější úhel při vrcholu P přejde ve vnější úhel při vrcholu Q. Proto všecky vnitřní úhly pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny a také všecky vnější úhly pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny. Ostatně se stejným způsobem přesvědčíme, že také délky všech stran pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny.

Velikost vnitřního úhlu pravidelného mnohoúhelníka se ovšem dostane, když se součet všech úhlů dělí jejich počtem. Stejně můžeme počítat velikost vnějšího úhlu; ta tedy je

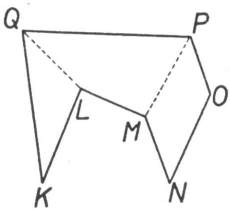
360° děleno počtem stran.

Nejlepší je vypočíst napřed velikost vnějšího úhlu. Potom určíme vnitřní úhel z toho, že je výplňkový k vnějšímu úhlu.

Mnohoúhelníky, které jsme dosud jedině měli na mysli, jsou t. zv. mnohoúhelníky vypuklé. Mají tu vlastnost, že když si kteroukoli stranou proložíme přímku, leží celý mnohoúhelník na jedné straně od této přímky. Všecky vnitřní úhly vypuklého mnohoúhelníka jsou duté. Ale jsou také mnohoúhelníky jiného tvaru, na př. pětiúhelník $ABCDE$ v obr. 35 nebo sedmiúhelník $KLMNOPQ$ v obr. 36. První z nich má jen čtyři úhly duté, druhý jen pět ze sedmi.



Obr. 35.



Obr. 36.

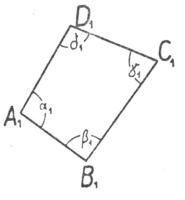
Součet vnitřních úhlů pětiúhelníka $ABCDE$ z obr. 35 můžeme nalézti právě tak jako u stejně označeného pětiúhelníka z obr. 33. Ale tam jsme si mohli bod H zvolit uvnitř pětiúhelníka libovolně, kdežto nyní si musíme bod H zvolit uvnitř pětiúhelníka vhodně; nešlo by na př. zvoliti si místo H bod, který je v obr. 35 označen K. U sedmiúhelníka z obr. 36 pak dokonce vůbec není možné, zvolit si uvnitř bod H tak, aby se součet úhlů dal počítat úvahou naznačenou v obr. 33 a 35. Přesto poučka o součtu vnitřních úhlů je správná i pro mnohoúhelníky, které nejsou vypuklé. Ale nebudeme si to obecně dokazovat; spokojíme se tím, že se o tom přesvědčíme na příkladě sedmiúhelníka z obr. 36. Úsečky LQ a MP rozdělí náš sedmiúhelník na trojúhelník KLQ a na vypuklé čtyrúhelníky $LMPQ$ a $MNOP$. Z obrazce je vidět, že součet úhlů našeho sedmiúhelníka dostaneme, když sečteme všecky úhly trojúhelníka i obou čtyrúhelníků. Dostaneme součet úhlů

$$2R + 2 \times (2R) + 2 \times (2R) = 5 \times (2R),$$

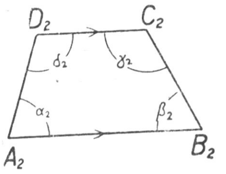
tedy stejný součet úhlů jako u vypuklých sedmiúhelníků.

Vypuklé mnohoúhelníky jsou mnohem důležitější než ostatní. V této učebnici budeme se jen jimi zabývati a budeme jim krátce říkat mnohoúhelníky.

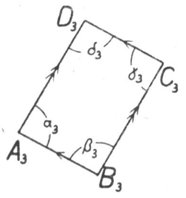
V každém z obrazců 37, 38, 39 máme čtyrúhelník.



Obr. 37.



Obr. 38.



Obr. 39.

Dva vrcholy čtyrúhelníka jsou buďto sousední nebo protější: spojnice sousedních vrcholů je strana, spojnice protějších vrcholů je úhlopříčka. Při dvou sousedních vrcholech máme dva sousední úhly; při dvou protějších vrcholech máme dva protější úhly. Dvě strany čtyrúhelníka jsou sousední, vycházejí-li obě z téhož vrcholu; jinak jsou protější.

U čtyrúhelníka $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 37) jsou protější strany A_1B_1 a C_1D_1 různoběžné a také protější strany A_1D_1 a B_1C_1 jsou různoběžné; takový čtyrúhelník se jmenuje **různoběžník.**

U čtyrúhelníka $A_2B_2C_2D_2$ (obr. 38) jsou protější strany A_2B_2 a C_2D_2 rovnoběžné, ale protější strany A_2D_2 a B_2C_2 jsou různoběžné; takový čtyrúhelník se jmenuje **lichoběžník.** Strany A_2B_2 a C_2D_2 jsou **základny** lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$ z obr. 38; strany A_2D_2 a B_2C_2 jsou jeho **ramena.**

U čtyrúhelníka $A_3B_3C_3D_3$ (obr. 39) jsou protější strany A_3B_3 a C_3D_3 rovnoběžné a také protější strany A_3D_3 a B_3C_3 jsou rovnoběžné; takový čtyrúhelník se jmenuje **rovnoběžník.**

Úhly α_2 a δ_2 v obr. 38 jsou dva úhly přilehlé: proťaté přímky jsou A_2B_2 a D_2C_2, příčka je A_2D_2. Protože $A_2B_2 \parallel C_2D_2$, jest $\alpha_2 + \delta_2 = 2R$, t. j. úhly α_2 a δ_2 jsou výplňkové. Také úhly β_2 a γ_2 v obr. 38 jsou výplňkové, neboť zase to jsou přilehlé úhly mezi rovnoběžkami. α_2 a δ_2 jsou úhly při ramenu A_2D_2 lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$; β_2 a γ_2 jsou úhly při ramenu B_2C_2.

Úhly při ramenu lichoběžníka jsou výplňkové.

Všimneme-li si u rovnoběžníka $A_3B_3C_3D_3$ (obr. 39) kteréhokoli páru sousedních úhlů, shledáme pokaždé, že to jsou přilehlé úhly mezi rovnoběžkami. Přesvědčte se o tom ve všech případech! Výsledek: **Dva sousední úhly rovnoběžníka jsou vždy výplňkové.**

Všimněme si jednoho páru protějších úhlů našeho rovnoběžníka, na př. páru α_3 a γ_3. Jest $\alpha_3 + \beta_3 = 2R$ a také jest $\gamma_3 + \beta_3 = 2R$, proto je $\alpha_3 = \gamma_3$. **Dva protější úhly rovnoběžníka jsou si rovny.**

Cvičení k § 2.

31. Úhly $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ mají takový význam jako v obr. 30. Mimoto znamená φ vnější úhel trojúhelníka ABC při vrcholu A, ψ vnější úhel při vrcholu C. (Vyznačte si všech šest úhlů ve vlastním obrazci!) Vypočtěte velikost všech úhlů podle těchto údajů:

a) $\alpha = 36° 51' 47''$, $\beta = 57° 48' 43''$;
b) $\varphi = 112° 21' 19''$, $\gamma = 53° 42' 26''$;
c) $\psi = 134° 26' 2''$, $\omega = 156° 58' 17''$.

Ve cvičeních 32 až 36 dojdete k cíli, budete-li hledat pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých znáte jeden ostrý úhel.

32. Sestrojte si trojúhelník FGH s pravým úhlem při vrcholu F. Spusťte s bodu F kolmici na přímku GH a její patu označte K. Je v obrazci nějaký úhel rovný úhlu $\sphericalangle HFK$? Udejte důvod!

33. Sestrojte si ostroúhlý trojúhelník RST. Spusťte s vrcholu R kolmici na přímku ST a patu označte P. Spusťte s vrcholu S kolmici na přímku RT a patu označte Q. Dokažte, že

$$\sphericalangle PRT = \sphericalangle QST.$$

(Můžete to provésti dvojím způsobem.)

34. V trojúhelníku HKL měří úhel při vrcholu K 110°, úhel při vrcholu L 50°. N je pata kolmice spuštěné s bodu H na přímku KL. Dokažte, že

$$\sphericalangle LHK = \sphericalangle KHN.$$

35. Uvnitř ostrého úhlu $\sphericalangle BAC$ leží polopřímka AD. S bodu B spusťte kolmice na přímky AC a AD; patu první označte E, patu druhé F. Dokažte, že

$$\sphericalangle EBF = \sphericalangle CAD.$$

36. Opakujte úlohu 35 s tím rozdílem, že úhel $\sphericalangle BAC$ bude tupý; úhly $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAC$ budou ostré.

Ve cvičeních 37 až 41 se opírejte o poučky o součtu úhlů a o vnějším úhlu.

37. Ve čtyrúhelníku $FGHK$ úhlopříčka FH půlí jak úhel při vrcholu F tak také úhel při vrcholu H. Dokažte, že

$$\sphericalangle FGH = \sphericalangle FKH.$$

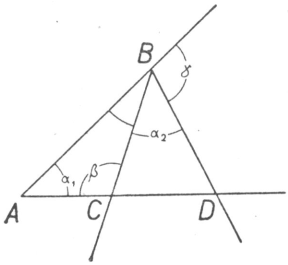
38. V obr. 40 jest $\alpha_1 = \alpha_2$. Dokažte, že $\beta = \gamma$. [Vyznačte si $\varepsilon = \sphericalangle ADB$.]

Cvičení 39 až 41 se vztahují k obr. 41, ve kterém YS je osa úhlu $\sphericalangle XYZ$ a ZR je osa úhlu $\sphericalangle XZY$. Vyčárkovaná přímka a body U, V přijdou jen ve cvič. 41.

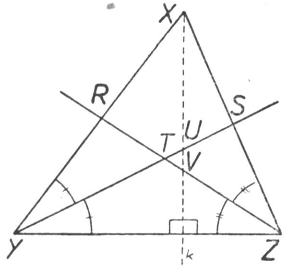
39. Jest $\sphericalangle YXZ = 81° 23' 18''$, $\sphericalangle XYZ = 32° 54' 58''$. Najděte $\sphericalangle YTZ$.

40. Jest $\sphericalangle XYZ = 43° 43' 34''$, $\sphericalangle YTZ = 125° 38' 26''$. Najděte $\sphericalangle YSZ$.

41. Jest $\sphericalangle YXZ = 65^\circ 12' 8''$, $\sphericalangle XZY = 73^\circ 8' 56''$. S bodu X spusťte kolmici k na přímku YZ. Určete úhly trojúhelníka TUV.



Obr. 40.



Obr. 41.

42. Řešte znovu, ale bez pomocné konstrukce
a) cvič. 19; b) cvič. 20; c) cvič. 21;
d) cvič. 22; e) cvič. 23; f) cvič. 24.

43. Vypočtěte čtvrtý vnitřní úhel čtyrúhelníka, když tři vnitřní úhly měří
a) $76^\circ 34'$, $96^\circ 42'$, $112^\circ 56'$.
b) $118^\circ 36'$, $72^\circ 51'$, $48^\circ 38'$.
c) $89^\circ 42' 32''$, $123^\circ 45' 20''$, $86^\circ 50' 28''$.

44. Jeden vnitřní úhel čtyrúhelníka měří $113^\circ 8' 54''$. Všecky tři ostatní jsou si rovny. Určete jejich velikost!

45. Ze šesti úhlů šestiúhelníka je pět sobě rovných. Zbývající úhel je o $71^\circ 13'$ menší. Určete velikost všech úhlů!

46. Tři úhly pětiúhelníka jsou si rovny a každý měří $156^\circ 52' 48''$. Zbývající dva úhly jsou si rovny. Určete jejich velikost!

47. Úhly pětiúhelníka měří (ve stupních)

$$2x,\ 3x,\ 4x,\ 5x,\ 6x.$$

Určete x.

48. Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka je 1080°. Kolik má stran?

49. Které mnohoúhelníky mají součet úhlů mezi sedmi a osmi tisíci stupňů?

50. Určete nejprve vnější úhel, potom vnitřní úhel pravidelného
a) 12úhelníka, b) 15úhelníka, c) 18úhelníka, d) 30úhelníka.

51. Může pravidelný mnohoúhelník míti vnější úhel

a) 15°? b) 7°? c) 11°? d) 6°? e) 5°? f) 4°?

Může-li, udejte počet stran.

52. Může pravidelný mnohoúhelník míti vnitřní úhel

a) 108°? b) 120°? c) 130°? d) 144°? e) 60°? f) 170°?

Může-li, udejte počet stran.

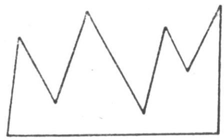
53. $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Přímky AB a CD se protnou v bodě X. Určete úhel $\sphericalangle AXD$.

54. Rozdělte devítiúhelník z obr. 42 na vypuklé mnohoúhelníky a přesvědčte se, že součet všech úhlů je $14R$.

55. U čtyrúhelníka z obr. 37 jmenujte všecky páry a) sousedních vrcholů, b) protějších vrcholů.

56. U čtyrúhelníka z obr. 38 jmenujte všecky páry a) sousedních úhlů, b) protějších úhlů.

57. U čtyrúhelníka z obr. 39 jmenujte všecky páry a) sousedních stran, b) protějších stran.



Obr. 42.

58. Vypočtěte ostatní úhly lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$ (viz obr. 38), víte-li, že

a) $\alpha_2 = 72° 13' 47''$, $\beta_2 = 43° 52' 36''$.

b) $\alpha_2 = 69° 24' 15''$, $\gamma_2 = 145° 23' 56''$.

c) $\beta_2 = 46° 12' 38''$, $\delta_2 = 110° 36' 28''$.

d) $\gamma_2 = 138° 57' 26''$, $\delta_2 = 112° 53' 7''$.

Dá se podobný výpočet provést, je-li známa velikost jiného páru úhlů?

59. Vypočtěte ostatní úhly rovnoběžníka $A_3B_3C_3D_3$ (viz obr. 39), víte-li, že

a) $\alpha_3 = 98° 12' 47''$. b) $\beta_3 = 82° 44' 55''$.

c) $\gamma_3 = 102° 28' 35''$. d) $\delta_3 = 78° 57' 3''$.

60. Dokažte, že čtyrúhelník, o kterém víme, že má dva sousední úhly výplňkové, je buďto lichoběžník nebo rovnoběžník.

61. $ABCD$ je lichoběžník ($AB \parallel CD$); osa úhlu $\sphericalangle BAD$ a osa úhlu $\sphericalangle CDA$ se protnou v bodě X. Dokažte, že

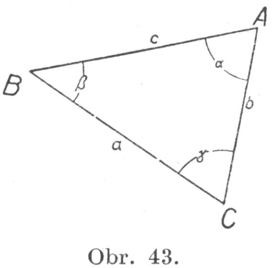
$$\sphericalangle AXD = R.$$

62. Které nové geometrické výrazy jste poznali v tomto paragrafu? Zapište si je!

63. Zapište si všecky poučky, které jste poznali v tomto paragrafu. Zopakujte si jejich důkazy.

§ 3. Shodné trojúhelníky.

U trojúhelníků se užívá velmi často takového označení jako v obr. 43. Vrcholy jsou označeny velkými písmeny A, B, C. Délky stran jsou označeny malými písmeny a, b, c a to tak, že strana je vždy označena písmenem stejného jména jako protější vrchol. Úhly jsou označeny řeckými písmeny α, β, γ a to tak, že úhel α leží při vrcholu A a proti straně a atd. Toto základní označení vám musí býti dobře známo, ale přesto musíte také umět řešit úlohy při jakémkoli označení.



Obr. 43.

Říkáme, že úhly α a β jsou přilehlé ke straně c. To je v souhlase s názvem přilehlých úhlů zavedeným na str. 5. (Považujeme AB za příčku, AC a BC za proťaté přímky.) Podobně jsou α a γ úhly přilehlé ke straně b, β a γ jsou úhly přilehlé ke straně a.

U trojúhelníka měříme celkem šest hodnot: tři délky a, b, c a tři úhly α, β, γ. Shodné trojúhelníky, t. j. takové, které lze položit jeden na druhý tak, že se navzájem kryjí, mají stejně dlouhé strany a stejně velké úhly.

Je vám již známo, že trojúhelník můžeme sestrojit, jakmile známe délky všech tří stran. Tedy stačí, když ze šesti hodnot $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ známe tři, totiž a, b, c. Pak je už možné trojúhelník sestrojit; zbývající tři hodnoty α, β, γ můžeme potom změřit úhloměrem. Říkáme, že

trojúhelník je určen, známe-li délky všech tří stran.

Slovo „určen" ovšem neznamená, že by existoval jen jediný takový trojúhelník, nýbrž že se dva takové trojúhelníky od sebe liší pouze umístěním, t. j. že jsou shodné. Tedy

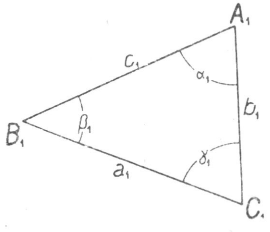
dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách (t. j. jsou-li strany prvého stejně dlouhé jako strany druhého).

Je vám také známo, že nesmíme libovolně zvolit všecky tři délky a, b, c. Můžeme si zvolit na př. a a b úplně libovolně, ale c musí býti menší než součet a větší než rozdíl prvých dvou stran.

Ale ze šesti hodnot $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ můžeme vybrati k určení trojúhelníka také jiné tři nežli právě a, b, c. Na př. platí:

trojúhelník je určen, známe-li délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného (t. j. úhlu, jehož ramena obsahují ty strany). I tuto poučku můžeme vysloviti ve druhém znění:

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.



Obr. 44.

O správnosti této poučky se snadno přesvědčíme. V obr. 44 máme trojúhelník se stejným označením jako u trojúhelníka z obr. 43 až na ten rozdíl, že v obr. 44 je všude ještě index 1. Dejme tomu, že víme, že $b_1 = b$, $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$. Máme se přesvědčit, že je možné trojúhelník $A_1B_1C_1$ přemístit tak, aby se kryl s trojúhelníkem ABC. To je velmi jednoduché. Protože úhel $\alpha_1 = \sphericalangle B_1A_1C_1$ se rovná úhlu $\alpha = \sphericalangle BAC$, můžeme trojúhelník $A_1B_1C_1$ přemístiti tak, že vrchol A_1 úhlu α_1 se bude krýti s vrcholem A úhlu α, rameno A_1B_1 úhlu α_1 s ramenem AB úhlu α, rameno A_1C_1 úhlu α_1 s ramenem AC úhlu α. Tedy v nové poloze bude B_1 ležet na polopřímce AB ve vzdálenosti $c_1 = \overline{A_1B_1}$ od bodu A. Ale vzdálenost c_1 je rovna vzdálenosti $c = \overline{AB}$, takže nová poloha bodu B_1 se kryje s bodem B. Podobně se nová poloha bodu C_1 musí krýt s bodem C. Tedy se budou krýt všecky tři vrcholy obou trojúhelníků a proto jsou ty trojúhelníky shodné.

Konstrukce trojúhelníka ABC ze stran b, c a úhlu α jimi sevřeného je velmi jednoduchá. Můžeme napřed úhloměrem sestrojit úhel α a vrchol označiti A. Potom naneseme na jedno rameno délku $\overline{AB} = c$, na druhé délku $\overline{AC} = b$, spojíme BC a jsme hotovi. Můžeme však při konstrukci místo daného úhlu začít také jednou z daných stran. Popište sami konstrukci, při které se začne stranou b!

Dále platí, že

trojúhelník je určen, známe-li délku jedné strany a velikost obou úhlů přilehlých. Druhé znění poučky:

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou úhlech přilehlých.

O správnosti poučky se zase snadno přesvědčíme. Dejme tomu, že víme (viz obr. 43 a 44), že $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$. Protože délka $c_1 = \overline{A_1B_1}$ se rovná délce $c = \overline{AB}$, můžeme přemístit trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, že v nové poloze se bod A_1 bude krýt s bodem A a bod B_1 s bodem B. To se dá ještě provésti dvojím způsobem. Volíme takový způsob, aby nová poloha bodu C_1 byla od přímky AB na tu stranu, na které je bod C. Po přemístění se kryje jedno rameno A_1B_1 úhlu α_1 s jedním ramenem AB úhlu α. Protože je $\alpha_1 = \alpha$ a protože jsou oba úhly α a α_1 na stejné straně od přímky AB, musí se krýti také druhá ramena, t. j. polopřímka A_1C_1 se po přemístění kryje s polopřímkou AC. Z toho vychází, že nová poloha bodu C_1 je někde na přímce AC. Všimneme-li si nyní úhlu β, vyjde nám podobně, že nová poloha bodu C_1 je někde na přímce BC. Tedy nová poloha bodu C_1 je v průsečíku přímky AC s přímkou BC, t. j. v bodě C. Tedy po přemístění se kryje nejen vrchol A_1 s vrcholem A a vrchol B_1 s vrcholem B, nýbrž také vrchol C_1 s vrcholem C a proto jsou trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ shodné.

Konstrukce trojúhelníka ABC ze strany c a z obou přilehlých úhlů α, β je zase snadná, ale aby byla možná, musí býti $\alpha + \beta < 180°$. (Proč?) Sestrojíme si napřed úsečku AB dané délky c. Potom si sestrojíme oba úhly α, β, při čemž úhel α má vrchol A a jedno rameno v polopřímce AB, úhel β má vrchol B a jedno rameno v polopřímce BA, a oba úhly leží na stejné straně od přímky AB. Protože je $\alpha + \beta < 180°$, musí se druhá ramena našich úhlů protnout. (Podle které poučky?) Jejich průsečík C je třetí vrchol trojúhelníka ABC.

Probrali jsme si tři základní poučky o určenosti (nebo o shodnosti) trojúhelníků. Tyto tři poučky jsou velmi důležité, protože většina ostatních pouček se dá odvoditi z nich (a z pouček o dvou přímkách proťatých příčkou). Proto je nutné, abyste ty poučky znali opravdu dokonale. Aby se vám to ulehčilo, zavedeme si pro ně velmi pohodlné značky.

I. Označíme sus (strana, úhel, strana) poučku

trojúhelník je určen, známe-li dvě strany a úhel jimi sevřený neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.

II. Označíme usu (úhel, strana, úhel) poučku

trojúhelník je určen, známe-li jednu stranu a oba úhly přilehlé neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou přilehlých úhlech.

III. Označíme sss (strana, strana, strana) poučku

trojúhelník je určen, známe-li délky všech tří stran neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách.

Co by znamenalo uuu? To by nebyla správná poučka. Ke trojúhelníku ABC si můžeme opatřit trojúhelník $A_1B_1C_1$ dvakrát (nebo třeba desetkrát) tak veliký; oba trojúhelníky budou míti všecky úhly stejné, ale shodné nebudou. Třemi úhly není trojúhelník určen. To nepřekvapuje, neboť znáti tři úhly trojúhelníka není o nic větší znalost nežli znáti dva úhly, protože ze dvou úhlů umíme vypočítati třetí podle vztahu

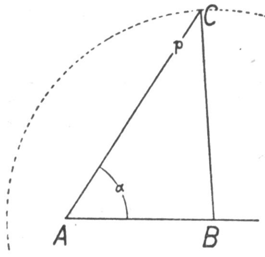
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

který dobře známe.

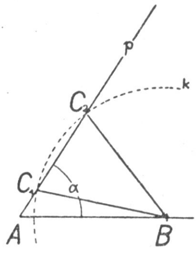
Za to vedle usu také suu nebo uus je správná poučka: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně, v úhlu proti ní a v ještě jednom úhlu. Na př. jsou trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ (viz obr. 43 a 44) shodné, je-li $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$, $\alpha_1 = \alpha$. Neboť podle poučky o součtu úhlů je potom také $\beta_1 = \beta$, takže je $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, t. j. trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ jsou shodné podle usu.

Máme-li sestrojiti trojúhelník ABC znajíce délku c a úhly α a γ, vypočteme si napřed $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$ a potom sestrojujeme podle usu. Aby byla konstrukce možná, musí býti $\alpha + \gamma < 180°$.

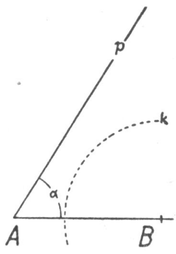
Důležité je, že ssu nebo uss není správná poučka! Trojúhelník nemusí býti určen, známe-li délky dvou stran a velikost úhlu proti jedné z nich. Nechť je na př. $\alpha = 57°$, $c = 25$ mm a mimoto nechť je známa délka a. Jest $a = 35$ mm v obr. 45, $a = 22$ mm v obr. 46, $a = 16$ mm v obr. 47. Sestrojíme si pokaždé napřed úhel $\alpha = 57°$



Obr. 45.



Obr. 46.



Obr. 47.

s vrcholem A, potom naneseme na jedno rameno délku $\overline{AB} = c = 25$ mm; druhé rameno si označíme p. Máme už dva vrcholy A, B žádaného trojúhelníka ABC a zbývá určiti polohu třetího vrcholu C. Protože známe délku $a = \overline{BC}$, musí bod C ležeti na kružnici k o středu B a poloměru a. Mimoto musí C ovšem ležeti na polopřímce p. V každém z našich tří případů dopadne věc jinak: v obr. 45 kružnice k protne polopřímku p v jediném bodě C, v obr. 46 ve dvou bodech C_1 a C_2, v obr. 47 se p a k vůbec neprotnou. Tedy pro $a = 35$ mm máme jediný trojúhelník ABC vyhovující podmínkám, pro $a = 16$ mm není žádný takový trojúhelník, ale pro $a = 22$ mm vyhovují podmínkám dva trojúhelníky ABC_1 a ABC_2, které nejsou shodné. Proto ssu neboli uss není správná poučka.

Značka shodnosti je $\cong$. Dá-li se trojúhelník $A_1B_1C_1$ položiti na trojúhelník ABC tak, že vrchol A_1 se kryje s vrcholem A, vrchol B_1 s vrcholem B, vrchol C_1 s vrcholem C, zapíšeme shodnost takto:

$$ABC \cong A_1B_1C_1.$$

Místo toho můžeme také napsati třeba

$$BAC \cong B_1A_1C_1 \quad \text{nebo} \quad CAB \cong C_1A_1B_1,$$

t. j. vrcholy jednoho z obou trojúhelníků můžeme napsati v libovolném pořádku. Ale jakmile se rozhodneme pro určitý pořádek vrcholů jednoho trojúhelníka, je tím už rozhodnuto o pořádku vrcholů druhého, protože zápis musí býti proveden tak, aby z něho bylo patrné, který vrchol s kterým se bude po přemístění krýt. Na př. u trojúhelníků z obr. 43 a 44 nemůžeme napsati $BCA \cong A_1C_1B_1$, ačkoli jsou ty trojúhelníky shodné; neboť to by znamenalo, že lze přemístiti trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, aby se vrchol A_1 kryl s vrcholem B, vrchol C_1 s vrcholem C, vrchol B_1 s vrcholem A; to jistě nelze, protože strana A_1C_1 je mnohem kratší nežli strana BC.

Ze správného zápisu shodnosti je patrné, které jsou páry stejných stran a při kterých vrcholech jsou páry stejných úhlů.

Když na shodnost trojúhelníků soudíme z některé základní poučky, můžeme si za zápis shodnosti poznamenati značku poučky. Když na př. u trojúhelníků z obr. 43 a 44 zjistíme měřením, že $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A_1C_1B_1$, můžeme zapsati

$$ABC \cong A_1B_1C_1 \quad (sus),$$

neboť shodnost je zaručena poučkou sus.

Cvičení k § 3.

64. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů. Pokaždé změřte α, β a γ.

a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.
b) $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $c = 54$ mm.
c) $a = 9$ cm, $b = 58$ mm, $c = 46$ mm.
d) $a = 37$ mm, $b = 7$ cm, $c = 54$ mm.

65. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů.

a) $b = 57$ mm, $c = 48$ mm, $\alpha = 42°$. Změřte a, β, γ.
b) $a = 85$ mm, $c = 52$ mm, $\beta = 113°$. Změřte b, α, γ.
c) $a = 36$ mm, $b = 66$ mm, $\gamma = 147°$. Změřte c, α, β.
d) $a = 73$ mm, $b = 43$ mm, $\gamma = 25°$. Změřte c, α, β.

66. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů.

a) $c = 72$ mm, $\alpha = 43°$, $\beta = 59°$. Změřte a, b, γ.
b) $a = 35$ mm, $\beta = 126°$, $\gamma = 34°$. Změřte b, c, α.
c) $b = 43$ mm, $\alpha = 27°$, $\gamma = 132°$. Změřte a, c, β.
d) $a = 69$ mm, $\beta = 83°$, $\gamma = 42°$. Změřte b, c, α.

67. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů. Pokaždé změřte c a všecky úhly.

a) $a = 58$ mm, $\alpha = 47°$, $\beta = 53°$.
b) $b = 92$ mm, $\alpha = 23°$, $\beta = 138°$.
c) $a = 42$ mm, $\alpha = 16°$, $\gamma = 154°$.

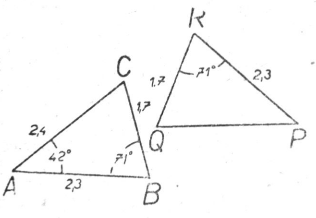
68. Sestrojte, je-li to možno, trojúhelník ABC podle daných údajů. Není-li řešení, napište „nemožné". Jsou-li dva takové trojúhelníky, sestrojte je oba. Pokaždé změřte všecky strany a úhly.

a) $a = 83$ mm, $b = 57$ mm, $\alpha = 153°$.
b) $b = 64$ mm, $c = 42$ mm, $\beta = 37°$.
c) $b = 7$ cm, $c = 55$ mm, $\gamma = 35°$.
d) $b = 8$ cm, $c = 7$ cm, $\beta = 35°$.

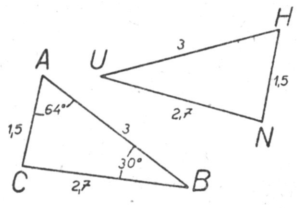
69. Jest $ABC \cong HKG$. Který úhel se rovná $\sphericalangle CAB$? Která strana se rovná straně GH?

V následujících cvičeních 70 až 73 máte pokaždé hledati v obrazci dva shodné trojúhelníky. Shodnost správně zapište a pokaždé udejte také značku poučky, podle které na shodnost usuzujete. Narýsujte si od ruky vlastní obrazce a do nich zapište velikost všech stran a úhlů. V tištěných obrazcích je jednotka 1 cm.

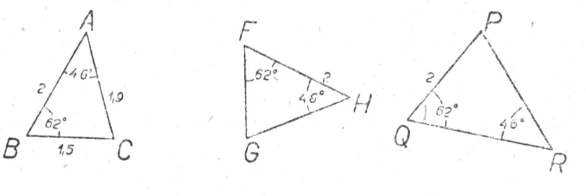
70. Viz obr. 48.
71. Viz obr. 49.
72. Viz obr. 50.
73. Viz obr. 51.



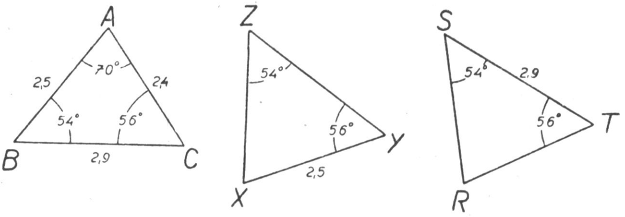
Obr. 48.



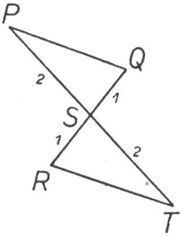
Obr. 49.



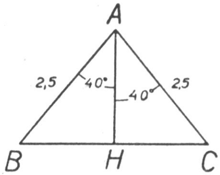
Obr. 50.



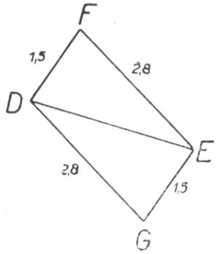
Obr. 51.



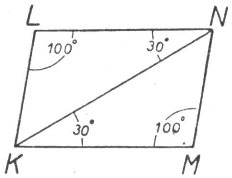
Obr. 52.



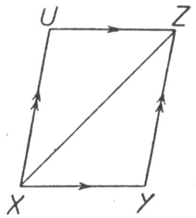
Obr. 53.



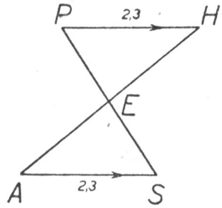
Obr. 54.



Obr. 55.



Obr. 56.



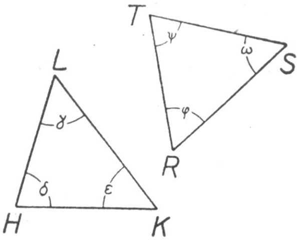
Obr. 57.

Ve cvičeních 74 až 79 máte najíti v obrazci dva shodné trojúhelníky, zapsati správně shodnost a zapsati také důvod. V tištěných obrazcích je jednotka 1 cm.

74. Viz obr. 52. **75.** Viz obr. 53.
76. Viz obr. 54. **77.** Viz obr. 55.
78. Viz obr. 56. **79.** Viz obr. 57.

Cvičení 80 až 88 se vztahují k obr. 58, který pouze vysvětluje označení. Pokaždé si narýsujte vlastní obrazec od ruky a v něm si vyznačte pomocí párů stejných značek, co je dáno. Je-li na př. dáno, že dvě úsečky jsou stejně dlouhé, přetrhněte si je obě touž barevnou tužkou. Potom rozhodněte, zdali oba trojúhelníky musí býti shodné. Když ano, zapište správně shodnost a zapište také její důvod.

80. $\overline{HK} = \overline{ST}$, $\overline{HL} = \overline{RT}$, $\delta = \psi$.
81. $\overline{HK} = \overline{RS}$, $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \psi$.
82. $\overline{HL} = \overline{RT}$, $\overline{HK} = \overline{RS}$, $\gamma = \psi$.
83. $\overline{HK} = \overline{ST}$, $\delta = \psi$, $\gamma = \varphi$.
84. $\overline{KL} = \overline{RT}$, $\overline{HL} = \overline{RS}$, $\overline{HK} = \overline{ST}$.
85. $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \omega$, $\gamma = \psi$.
86. $\overline{HL} = \overline{KL}$, $\overline{RT} = \overline{ST}$, $\gamma = \psi$.
87. $\overline{HL} = \overline{ST}$, $\overline{KL} = \overline{RS}$, $\gamma = \omega$.
88. $\overline{HK} = \overline{HL}$, $\overline{RS} = \overline{RT}$, $\delta = \omega$.



Obr. 58.

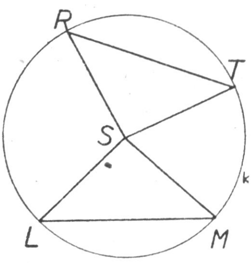
Cvičení 89 až 101 se řeší tak, že si pokaždé najdete v obrazci dva trojúhelníky, které podle některé základní poučky musí býti shodné. I k těm úlohám, ke kterým je obrazec v učebnici, rýsujte si obrazce vlastní.

89. Ve středu S úsečky AB vztyčte kolmici k ke přímce AB. Zvolte si bod T na přímce k. Dokažte, že $\overline{AT} = \overline{BT}$.

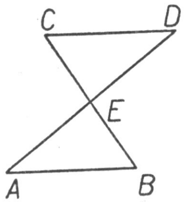
90. Na ose úhlu $\sphericalangle XYZ$ si zvolte bod K. Spusťte s bodu K kolmice na obě ramena úhlu a jejich paty označte P, Q. Dokažte, že $\overline{KP} = \overline{KQ}$.

91. V obr. 59 je S střed kružnice k. Dokažte:

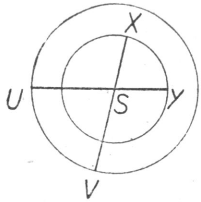
a) Je-li $\overline{LM} = \overline{RT}$, je $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$.
b) Je-li $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$, je $\overline{LM} = \overline{RT}$.



Obr. 59.



Obr. 60.



Obr. 61.

92. V trojúhelníku ABK je $\overline{AK} = \overline{BK}$. H je střed strany AB. Dokažte, že $HK \perp AB$. (Je-li úhel rovný úhlu vedlejšímu, je pravý.)

93. V trojúhelníku XYZ je $\overline{XY} = \overline{XZ}$. Označte S střed strany XY a T střed strany XZ. Dokažte, že $\overline{SZ} = \overline{TY}$.

94. V obr. 60 je E střed obou úseček AD a BC. Dokažte:

a) $\overline{AB} = \overline{CD}$. b) $AB \parallel CD$.

95. V obr. 60 je $\overline{AE} = \overline{ED}$ a $AB \parallel CD$. Dokažte, že $\overline{BE} = \overline{EC}$.

96. V obr. 60 je $\overline{AB} = \overline{CD}$, $AB \parallel CD$. Dokažte:

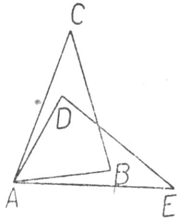
a) $\overline{AE} = \overline{ED}$. b) $\overline{AC} = \overline{BD}$. c) $AC \parallel BD$.

97. V obr. 61 je S střed obou kružnic. Dokažte, že $\overline{UX} = \overline{VY}$.

98. Všecky strany čtyrúhelníka $HKLM$ jsou si rovny. Dokažte, že úhel při vrcholu H je půlen úhlopříčkou HL.

Cvičení 99 až 101 jsou trochu těžší.

99. ABC je ostroúhlý trojúhelník. Vně trojúhelníka jsou čtverce $ABQR$ $ACST$. Dokažte, že $\overline{CR} = \overline{BT}$.



Obr. 62.

100. FGH je ostroúhlý trojúhelník. Vně trojúhelníka FGH jsou rovnostranné trojúhelníky FKG, FLH. Dokažte, že $\overline{GL} = \overline{HK}$.

101. V obr. 62 je $ABC \cong ADE$. Dokažte, že $\overline{CD} = \overline{BE}$.

102. Které geometrické výrazy se vyskytovaly v tomto paragrafu? Zapište si je!

103. Zapište si poučky, které jste poznali v tomto paragrafu. Zapište také jejich značky.

§ 4. Grafické určování vzdáleností a výšek.

V minulém paragrafu jsme poznali, že ke konstrukci trojúhelníka ABC stačí, když ze šesti hodnot a, b, c, α, β, γ známe vhodné tři hodnoty. Pak už můžeme trojúhelník ABC sestrojit a ostatní tři hodnoty změřit. To má velký praktický význam. Často se stává, že je třeba určit nějakou délku, která je přímému měření nepřístupná. Tu si pomáháme z nesnáze tím, že provedeme jiná měření, která se dají provádět snáze a z nichž se dá určit ta hodnota, o kterou se vlastně zajímáme. Dejme tomu na příklad, že bychom chtěli určit vzdálenost místa A, které leží u břehu řeky, od místa B, které leží u druhého břehu řeky. Přímému měření vadí řeka. Pomůžeme si takto. Zvolíme si vhodné třetí místo C na témž břehu, na kterém je A, změříme vzdálenost $\overline{AC}$ a změříme si ještě dva úhly, totiž $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle BCA$. Všecka tři měření se dají provést na té straně od řeky, na které je místo A. Trojúhelník ABC je provedenými měřeními úplně určen (podle poučky usu), takže také žádanou vzdálenost AB můžeme na základě provedených měření stanovit. To stanovení by se dalo provésti tím, že bychom si sestrojili na základě naměřených údajů trojúhelník shodný s trojúhelníkem ABC. Ale takový trojúhelník by byl příliš veliký; proto si jej sestrojíme ve zmenšeném měřítku. Obyčejně sestrojujeme obrazce dva; napřed malý obrazec od ruky, potom větší obrazec přesný. V našem případě naměříme třeba $\overline{AC} = 6$ m, $\sphericalangle BAC = 86°$, $\sphericalangle BCA = 68°$. Tyto údaje si poznamenáme do obrazce od ruky, který může býti skutečnému trojúhelníku ABC jen velmi zhruba podobný. Potom rozhodneme, v jakém měřítku budeme rýsovati přesný obrazec. To měřítko musí býti voleno tak, aby se nám celý obrazec vešel. Za druhé je volíme tak, abychom dostali pokud možno veliký obrazec, protože z malého obrazce bychom hledanou vzdálenost dostali velmi nepřesně. Konečně volíme měřítko tak, aby souvislost mezi skutečnými a zmenšenými vzdálenostmi byla co nejjednodušší. Obyčejně volíme měřítko tak, aby 1 cm znamenal 1 m, 10 m, 100 m, ... nebo 2 m, 20 m, 200 m, ... nebo 0,5 m, 5 m, 50 m atd. V našem případě volíme měřítko tak, že 1 cm znamená 2 m. Proto si sestrojíme (co nejpřesněji!) trojúhelník ABC, ve kterém $\overline{AC} = 3$ cm, $\sphericalangle BAC = 86°$, $\sphericalangle BCA = 68°$. Pak si změříme $\overline{AB}$ a najdeme $\overline{AB} = 6{,}3$ cm. Protože 1 cm nákresu znamená 2 m ve skutečnosti, skutečná vzdálenost $\overline{AB}$ měří asi 12,6 m. („Asi" proto, že ani měření v přírodě, ani rýsování na papíře nemohlo býti dokonale přesné.)

Trojúhelníky, kterých jsme užívali v úloze právě řešené, ležely ve vodorovné rovině. Ke stanovení výšek užíváme trojúhelníků ve svislé rovině. Při tom měříme úhly ve svislé rovině, které šikmý směr tvoří se směrem vodorovným. Pozorujeme-li se stanoviska S předmět P položený výše než S, pak svislý úhel polopřímky SP s vodorovnou polopřímkou se jmenuje výškový úhel předmětu P se stanoviska S; leží-li P níže nežli S, mluvíme o hloubkovém úhlu.

Cvičení k § 4.

104. Písmena U, V, W znamenají tři kostelní věže. U je na sever od V ve vzdálenosti 6 km. W je na severovýchod od V ve vzdálenosti 12 km.

a) Jak daleko je W od U?

b) V jakém směru od U je W?

105. Písmena A, B, C znamenají tři města. A leží 30 km severně od B a 50 km západně od C.

a) Určete vzdálenost od B k C.

b) V jakém směru od města B leží město C?

106. Tři cesty tvoří trojúhelník LMN. Jest $\overline{LM} = 600$ m, $\overline{MN} = 450$ m, $\overline{NL} = 350$ m. Jak daleko od cesty LM je křižovatka N?

107. Domek C leží nalevo od silnice mezi dvěma body A, B silnice. Směr AC je od silnice odchýlen o úhel 32°, směr BC o úhel 65°. Jest $\overline{AB} = 250$ m.

a) Určete vzdálenost $\overline{AC}$.

b) Určete nejkratší vzdálenost od domku k silnici.

108. Nalevo od rovné cesty HKX jsou dva kopce A, B. Jest $\overline{HK} = 1$ km, $\sphericalangle XHA = 25°$, $\sphericalangle XHB = 40°$, $\sphericalangle XKA = 63°$, $\sphericalangle XKB = 140°$. Určete,

a) jak daleko od sebe jsou ty kopce;

b) jak daleko od cesty je kopec A;

c) jak daleko od cesty je kopec B.

109. Železniční trať směřuje od západu k východu. A a B jsou dvě místa na trati vzdálená 300 m od sebe. Věž V leží od místa A ve směru 48° od severu k východu, od místa B ve směru 28° od severu k západu. Určete

a) vzdálenost věže od místa A;

b) vzdálenost věže od místa B;

c) vzdálenost věže od trati.

110. Loď pluje k severovýchodu rychlostí 10 uzlů. [To znamená, že urazí za hodinu 10 námořních mil; jedna námořní míle je asi 1850 m.] Maják je v jedné chvíli přesně na sever od lodi a za čtvrt hodiny je ve směru 76° od jihu k západu. Určete nejkratší vzdálenost od lodi k majáku.

111. Na krajích přístavu jsou dva majáky A, B. A je západně od B ve vzdálenosti 500 m. Loď pluje k přístavu směrem J 30° Z (t. j. směrem, který je mezi jihem a západem a tvoří úhel 30° se směrem jižním). Pozorovatel na lodi vidí maják B ve směru J 10° Z, maják A ve směru J 40° Z. Jak daleko bude loď od A a od B, až se dostane mezi oba majáky?

112. Výškový úhel vrcholu věže se stanoviska vzdáleného 40 m od paty věže je 35°. Najděte výšku věže.

113. Dětský drak je na provaze dlouhém 230 m, který tvoří úhel 65° s vodorovným směrem. V jaké výši je drak?

114. Určete výškový úhel slunce v době, kdy svislá tyč dlouhá 4 m vrhá stín délky 5 m!

115. Pod jakým hloubkovým úhlem je viděti s vrcholu věže vysoké 42 m předmět, ležící na zemi ve vzdálenosti 60 m od věže?

116. Žebřík dlouhý 5 m je opřen o svislou stěnu. Pata žebříku je 2,4 m od stěny.

a) O jaký úhel je žebřík odchýlen od vodorovné polohy?

b) Jak vysoko nad zemí je vrchol žebříku?

117. S vrcholu pahorku, který je 75 m nad hladinou vodní, je viděti přesně za sebou dvě loďky. Hloubkový úhel prvé je 64°, hloubkový úhel druhé je 48°. Určete vzdálenost loděk.

118. Výškový úhel vrcholu věže z místa vzdáleného 150 m od paty je 28°. Jaký je výškový úhel z místa vzdáleného 100 m?

119. Pozorovatel z balonu ve výšce 1 km vidí kostel pod hloubkovým úhlem 35°. Po dvaceti minutách stoupání jej vidí pod hloubkovým úhlem $55\frac{1}{2}°$. Určete rychlost stoupání v kilometrech za hodinu.

120. Muž na vrcholu kopce pozoruje rovnou cestu v údolí přímo od něho se vzdalující. Dva sousední kilometrové kameny vidí pod hloubkovými úhly 30° a 13°. Jak vysoko nad údolím je vrchol kopce?

121. Aeroplán letí k východu ve výši 800 m. Pozorovatel vidí plynojem směrem k jihu pod hloubkovým úhlem 29°; o 15 vteřin později vidí týž plynojem směrem k jihozápadu. Určete rychlost aeroplánu v metrech za vteřinu.

122. Trám AB dlouhý 3 m je upevněn dvěma provazy AC, BD. Oba body C, D jsou stejně vysoko nad zemí. Trám je nakloněn o 10° od vodorovné polohy, bod B je níže než A, oba provazy jsou nakloněny o 20° od svislé polohy. Jest $\overline{AC} = 4{,}8$ dm. Určete $\overline{BD}$.

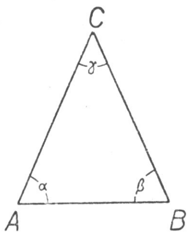
§ 5. Pokračování o trojúhelníku.

Je vám již známo, že u rovnoramenného trojúhelníka oba úhly při základně jsou si rovny. Týž poznatek se dá vysloviti také takto: **V trojúhelníku leží proti rovným stranám rovné úhly.**

Můžeme si tuto poučku velmi jednoduše odvoditi z jedné poučky o shodnosti trojúhelníků. Když v obr. 63 je $\overline{AC} = \overline{BC}$, máme dokázati, že $\alpha = \beta$. Avšak

$$ABC \cong BAC \quad (sss),$$

takže $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, t. j. $\alpha = \beta$.



Obr. 63.

Také obrácená poučka je správná. Můžeme ji vysloviti takto: **Trojúhelník, který má dva úhly sobě rovné, je rovnoramenný.** Nebo také takto: **V trojúhelníku leží proti rovným úhlům rovné strany.** Důkaz je zase velice jednoduchý. Když v trojúhelníku ABC (obr. 63) je $\alpha = \beta$, jest

$$ABC \cong BAC \quad (usu),$$

takže $\overline{BC} = \overline{AC}$.

V obr. 30 je ω vnější úhel trojúhelníka ABC; protější úhly vnitřní jsou α a γ. Víme, že jest $\omega = \alpha + \gamma$. Z toho následuje, že ω je větší než α a také větší než γ. **Vnější úhel trojúhelníka je větší než kterýkoli z protějších úhlů vnitřních.** Tento poznatek je přes svoji jednoduchost užitečný, jak nyní uvidíme.

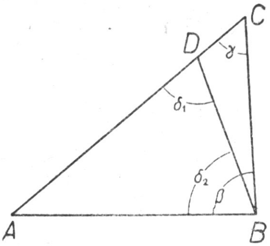
V trojúhelníku leží proti větší straně větší úhel. V trojúhelníku leží proti menší straně menší úhel. To jsou ovšem dvě znění téže poučky. Dokážeme si ji snadno. Nechť v trojúhelníku ABC je $\overline{AC} > \overline{BC}$; máme dokázati, že je $\beta > \gamma$. Protože strana AC je delší nežli strana BC, můžeme (viz obr. 64) určiti bod D na straně AC tak, že $\overline{AD} = \overline{AB}$. V trojúhelníku ABD leží proti stranám AB a AD úhly δ_1 a δ_2; protože $\overline{AB} = \overline{AD}$, je $\delta_1 = \delta_2$. V trojúhelníku BCD je δ_1

úhel vnější a γ je jeden z protějších úhlů vnitřních; tedy je γ menší než δ_1. Mimoto je patrné z obrazce, že β je větší než δ_2. Celkem tedy je $\gamma < \delta_1$, $\beta > \delta_2$, $\delta_1 = \delta_2$; z toho následuje, že $\gamma < \beta$ a to jsme měli dokázati.

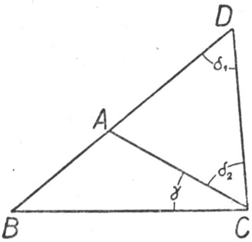
Poučka, kterou jsme si právě odvodili, dá se obrátit: **V trojúhelníku leží proti většímu úhlu větší strana. V trojúhelníku leží proti menšímu úhlu menší strana.** To je zase dvojí znění téže poučky. Dokážeme si ji takto. Dejme tomu, že v trojúhelníku ABC (viz obr. 43) je $\alpha < \gamma$. Máme dokázati, že je $a < c$. Rozhodně nastane jeden z těchto tří případů:

$$[1]\ a = c; \quad [2]\ a > c; \quad [3]\ a < c.$$

Ale podle pouček nám už známých je: v případě [1] $\alpha = \gamma$; v případě [2] $\alpha > \gamma$; v případě [3] $\alpha < \gamma$. Protože v našem trojúhelníku je $\alpha > \gamma$, musí u něho nastati případ [2] a to jsme měli dokázati.



Obr. 64.



Obr. 65.

Následující poučka je vám již známa. **Součet dvou stran trojúhelníka je větší nežli strana třetí.** Můžeme si ji dokázati takto. Dokazujme třeba, že $b + c > a$. Prodlužme stranu AB za vrchol A a na prodloužení si určeme bod D tak, že $\overline{AD} = b$ (viz obr. 65). Protože $\overline{BA} = c$, $\overline{AD} = b$, je $\overline{BD} = b + c$; mimoto je $\overline{BC} = a$. Tedy máme dokázati, že $\overline{BD} > \overline{BC}$. V trojúhelníku ACD je $\overline{AC} = \overline{AD}$ (proč?); v témž trojúhelníku leží úhel δ_1 proti straně AC a úhel δ_2 proti straně AD. Proto je $\delta_1 = \delta_2$. V trojúhelníku BCD leží proti straně BD úhel $\gamma + \delta_2$ a proti straně BC úhel δ_1. Protože $\delta_1 = \delta_2$, je $\gamma + \delta_2 > \delta_1$. Tedy v trojúhelníku BCD leží proti straně BD větší úhel nežli proti straně BC. Proto je $\overline{BD}$ větší než $\overline{BC}$ a to jsme právě chtěli dokázat.

Rozdíl dvou stran trojúhelníka je menší než strana třetí. Také tato poučka je vám již známa. Nepraví vlastně už nic nového. Dejme tomu, že je třeba $a > b$; máme dokázat, že $a - b < c$. Víme, že

$$a < b + c.$$

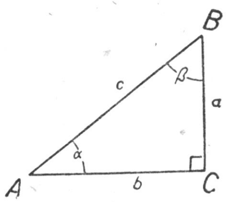
Proto, když od a ubereme b, zbude méně, nežli když od $b + c$ ubereme b; tedy

$$a - b < (b + c) - b.$$

Protože $(b + c) - b$ je totéž jako c, jsme hotovi.

Chceme-li se přesvědčit, zda tři délky a, b, c mohou býti délkami stran trojúhelníka, stačí se přesvědčit, že součet kterýchkoli dvou z nich je větší nežli třetí: neboť jsme právě nahlédli, že potom také rozdíl kterýchkoli dvou z nich bude menší než třetí a víme, že to už potom stačí. Dokonce stačí se přesvědčit, že největší z délek a, b, c je menší než součet ostatních dvou; neboť tím spíše bude kterákoli jiná menší než součet zbývajících dvou.

U pravoúhlého trojúhelníka základní označení je takové, jaké vidíte v obr. 66; a, b jsou odvěsny, c je přepona, C je vrchol pravého úhlu.



Obr. 66.

Nejdelší strana pravoúhlého trojúhelníka je přepona. Neboť přepona leží proti pravému úhlu a odvěsna proti ostrému úhlu, který je menší.

Nejdelší strana tupoúhlého trojúhelníka leží proti tupému úhlu. Neboť ostatní strany leží proti ostrým úhlům, které jsou menší.

Nejkratší vzdálenost od bodu A k přímce c je vzdálenost $\overline{AP}$, kde P znamená patu kolmice spuštěné s bodu A na přímku c. Neboť je-li X kterýkoli jiný bod přímky c, pak APX je pravoúhlý trojúhelník, AP je odvěsna, AX je přepona, tedy $\overline{AX} > \overline{AP}$.

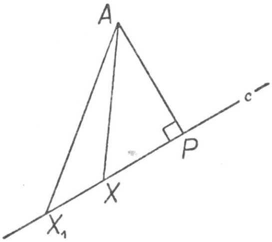
Můžeme si snadno dokázati ještě více! Bod P rozdělí přímku c na dvě polopřímky. Pohybuje-li se bod po jedné z těchto polopřímek, počínajíc polohou P, pak jeho vzdálenost od bodu A stále vzrůstá. Neboť v trojúhelníku AXX_1 (viz obr. 67) leží strana AX_1 proti tupému úhlu, takže je delší nežli strana AX.

V paragrafu 3 jsme si zjistili, že poučka ssu není vždycky správná (viz obr. 45 až 47). Správná je tato poučka:

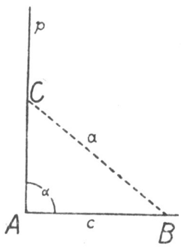
Trojúhelník je určen, známe-li dvě strany a úhel proti větší z nich.

Druhé znění: **Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich.**

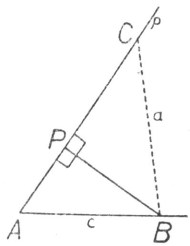
Dejme tomu, že jsou dány délky a, c, při čemž je a větší než c, a mimoto je dán úhel α. Sestrojíme si úhel α s vrcholem A a na jedno rameno naneseme délku $\overline{AB} = c$; druhé rameno si označíme p. [Stejně to bylo v obrazcích 45 až 47.] Běží o to, že na polopřímce p leží pouze jediný bod C takový, že vzdálenost $\overline{BC}$ je rovna dané délce a. Rozeznávejme tři případy podle toho, zda úhel α je pravý, ostrý či tupý.



Obr. 67.



Obr. 68.



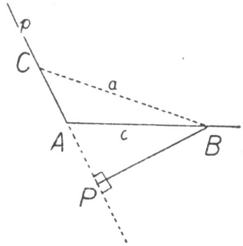
Obr. 69.

Případ prvý: $\alpha = R$ (viz obr. 68). Zde A je pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p. Pohybuje-li se bod X po polopřímce p, počínajíc polohou A, víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Počíná nejmenší hodnotou $\overline{BA} = c$; protože $a > c$, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro jedinou polohu C bodu X.

Případ druhý: $\alpha < R$ (viz obr. 69). Je-li P pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p, tu v našem případě padne bod P do polopřímky p. Vzdálenost $\overline{AB} = c$ je větší nežli $\overline{BP}$; protože $a > c$, je tím spíše a větší nežli BP. Z bodu P vychází polopřímka p_0 (v obrazci nevyznačená), která je částí polopřímky p. Pohybuje-li se bod X po polopřímce p_0, počínajíc polohou P, víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Počíná nejmenší hodnotou $\overline{BP}$; protože $a > \overline{BP}$, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro jedinou polohu C

bodu X na polopřímce p_0. Ovšem polopřímka p_0 je pouze částí polopřímky p, která se skládá jednak z polopřímky p_0, jednak ještě z úsečky $\overline{PA}$. Ale pohybuje-li se bod X po úsečce $\overline{PA}$, počínajíc polohou P, tu vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá a končí největší hodnotou $\overline{BA} = c$; protože i tato největší hodnota je menší nežli a, nenabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro žádnou polohu bodu X na úsečce PA.

Případ třetí: $\alpha > R$ (viz obr. 70). Je-li zase P pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p, tu v našem případě padne bod P mimo polopřímku p. Polopřímka p je nyní částí polopřímky PA. Pohybuje-li se bod X po polopřímce PA, počínajíc polohou P, víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Když bod X přijde do polohy A, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty c; potom přejde bod X na polopřímku p a vzdálenost $\overline{BX}$ vzrůstá dále; dané hodnoty $a > c$ nabude vzdálenost $\overline{BX}$ pro jedinou polohu C bodu X.



Obr. 70.

Cvičení k § 5.

123. Rovnoramenný trojúhelník má při základně úhel

a) $25° 48' 56''$. b) $36° 54' 12''$. c) $54° 27' 46''$.
d) $58° 58' 58''$. e) $64° \quad 57''$. f) $73° 33' 38''$.

Vypočtěte úhel proti základně.

124. Rovnoramenný trojúhelník má proti základně úhel

a) $12° 15' 42''$. b) $23° 45' \ 6''$. c) $34° 56' 54''$.
d) $82° 16' 36''$. e) $112° 52' 28''$. f) $148° 36' 48''$.

Vypočtěte úhel při základně.

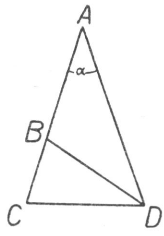
125. Jeden úhel rovnoramenného trojúhelníka měří 74°. Vypočtěte ostatní úhly. (Dvoje řešení!)

126. Úhel při základně rovnoramenného trojúhelníka je dvojnásobek úhlu proti základně. Vypočtěte všecky úhly.

127. Úhel proti základně rovnoramenného trojúhelníka je trojnásobek úhlu při základně. Vypočtěte všecky úhly.

128. V obr. 71 je $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\overline{BD} = \overline{CD}$, $\alpha = 34°$. Vypočtěte $\sphericalangle ADB$.

129. V obr. 72 je $\varphi = 42°$, $\psi = 66°$. S je střed kružnice. Vypočtěte úhly trojúhelníka HKL.

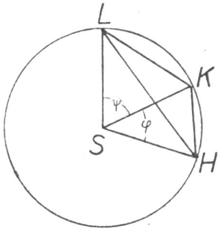


Obr. 71.

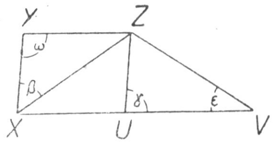
130. V obr. 73 je $\overline{XZ} = \overline{VZ}$, $\beta = 52^\circ$, $\gamma = 84^\circ$, $\varepsilon = 32^\circ$, $\omega = 96^\circ$. Dokažte:
a) $XV \parallel YZ$. (Bod U, úsečka UZ a úhel γ jsou v této části zbytečné.)
b) $XY \parallel UZ$.

131. V obr. 74 je $\overline{PQ} = \overline{PN}$, $\delta_1 = 32^\circ$, $\delta_2 = 80^\circ$. Najděte $\sphericalangle\, QPR$.

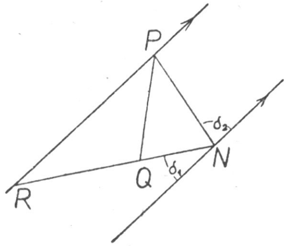
132. $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Přímky AD a BE se protnou v bodě F. Určete úhly trojúhelníka ABF.



Obr. 72.



Obr. 73.



Obr. 74.

133. V obr. 75 je $\overline{EF} = \overline{EH}$, $\varphi = 37^\circ$, $\psi = 148^\circ$. Dokažte, že $\overline{FG} = \overline{FH}$.

134. V obr. 76 je $\alpha = 67^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 104^\circ$. Dokažte, že $\overline{RP} = \overline{RS}$.

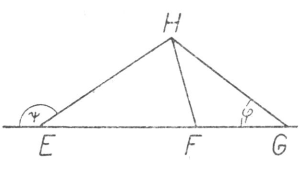
135. Uvnitř čtverce $ABCD$ je rovnostranný trojúhelník ABK. Určete $\sphericalangle\, CKB$.

136. V obr. 77 je $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$. Dokažte, že $\overline{ZX} = \overline{ZV}$.

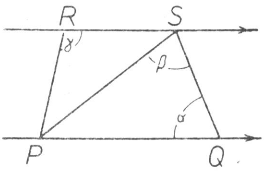
137. Na ose úhlu $\sphericalangle\, EFG$ leží bod H. Jest $EH \parallel FG$. Dokažte, že $\overline{EF} = \overline{EH}$.

138. V trojúhelníku ABC je $b = c$, $\beta = 62^\circ$. Co je větší, a nebo b?

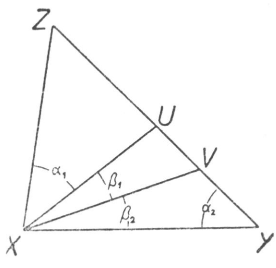
139. V trojúhelníku ABC měří vnější úhel při vrcholu A 126°, při vrcholu B 118°. Osa úhlu β a osa úhlu γ se protnou v bodě S. Co je větší, $\overline{BS}$ nebo $\overline{CS}$?



Obr. 75.



Obr. 76.



Obr. 77.

140. V trojúhelníku ABC je $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 56^\circ$. Osa úhlu α protne stranu BC v bodě X. Která ze tří délek $\overline{AX}$, $\overline{BX}$, $\overline{CX}$ je největší? Která je nejmenší?

141. Bod U leží uvnitř trojúhelníka ABC. Dokažte, že

$$\sphericalangle\, AUB > \sphericalangle\, ACB.$$

[Přímka AU protne stranu BC v bodě T. Porovnejte oba úhly s úhlem $\sphericalangle\, ATB$.]

142. Bod U leží uvnitř trojúhelníka ABC. Dokažte, že

$$\overline{AU} + \overline{UB} < \overline{AC} + \overline{CB}.$$

[Přímka AU protne stranu BC v bodě T. Dokažte napřed, že $\overline{AT} + \overline{TB} < \overline{AC} + \overline{CB}$ a potom, že $\overline{AU} + \overline{UB} < \overline{AT} + \overline{TB}$.]

143. Rozhodněte, existuje-li trojúhelník ABC, ve kterém by platilo toto:

a) $a = 37{,}4$ cm, $b = 25{,}3$ cm, obvod $= 123$ cm;

b) $a = 49{,}8$ cm, $b = 12{,}5$ cm, obvod $=$ 1 m;

c) $a = 37{,}3$ cm, $b = 24{,}9$ cm, obvod $= 125$ cm;

d) $a = 50{,}1$ cm, $b = 13{,}6$ cm, obvod $=$ 1 m.

144. Zapište si všecky poučky, kterými jsme se zabývali v tomto paragrafu.

§ 6. Rovnoběžník.

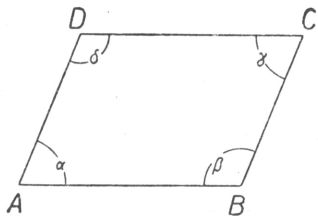
Čtyrúhelník $ABCD$ se nazývá rovnoběžník, když je

$$AB \parallel CD,\ AD \parallel BC.$$

To je nám již známo z paragrafu 2. Také již víme, že u rovnoběžníka v obr. 78 je $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ a že úhly α, β (nebo α, δ nebo β, γ nebo γ, δ) jsou výplňkové.

Obráceně, když o čtyrúhelníku $ABCD$ v obr. 78 víme, že $\alpha = \gamma$ a že $\beta = \delta$, můžeme souditi, že to je rovnoběžník: je-li u čtyrúhelníka každý úhel rovný úhlu protějšímu, je to rovnoběžník. Neboť víme, že $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$, neboli

$$(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) = 4R.$$



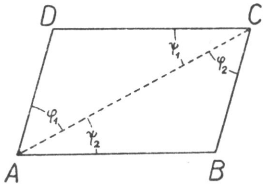
Obr. 78.

V našem případě je $\alpha = \gamma$, tedy α je polovina z $\alpha + \gamma$; dále je $\beta = \delta$, tedy β je polovina z $\beta + \delta$; tedy $\alpha + \beta$ je polovina ze $4R$, t. j. α a β jsou výplňkové úhly. Protože $\beta = \delta$, také α a δ jsou výplňkové úhly. Nyní α a β jsou přilehlé úhly (příčka AB, proťaté přímky AD, BC); protože $\alpha + \beta = 2R$, je $AD \parallel BC$. Také α a δ jsou přilehlé úhly (příčka AD, proťaté přímky AB, CD); protože $\alpha + \delta = 2R$, je $AB \parallel CD$. Tedy $ABCD$ je skutečně rovnoběžník.

Nyní si všimneme stran rovnoběžníka. **Dvě protější strany rovnoběžníka jsou si rovny.** V obr. 79 je $ABCD$ rovnoběžník. Chceme dokázati, že

$$\overline{AB} = \overline{CD},\ \overline{AD} = \overline{BC}.$$

Provedeme pomocnou konstrukci jako v obrazci. Vzniknou nám trojúhelníky ACD a ABC, které mají společnou stranu AC; mimoto je $\varphi_1 = \varphi_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\psi_1 = \psi_2$ (z téhož důvodu).



Obr. 79.

Proto je

$$ACD \cong CAB \text{ (usu)}$$

a z toho vychází $\overline{AD} = \overline{CB}$, $\overline{CD} = \overline{AB}$, což jsme měli dokázat.

Proveďte týž důkaz znovu s tou změnou, že za pomocnou čáru zvolíte úhlopříčku BD!

Jsou-li u čtyrúhelníka $ABCD$ protější strany AB a CD rovnoběžné a sobě rovné, je $ABCD$ rovnoběžník. Nyní víme o obr. 79, že

$$AB \parallel CD, \quad \overline{AB} = \overline{CD}$$

a máme dokázat, že je $AD \parallel BC$. Zase provedeme stejnou pomocnou konstrukci a opět si všimneme trojúhelníků ACD a ABC se společnou stranou AC. Nyní víme, že $\overline{CD} = \overline{AB}$; mimoto je $\psi_1 = \psi_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Proto je

$$ACD \cong CAB \quad \text{(sus)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$ neboli $\varphi_1 = \varphi_2$. Avšak φ_1 a φ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC, proťaté přímky AD, BC); protože $\varphi_1 = \varphi_2$, je $AD \parallel BC$ a to jsme měli dokázati.

Zase proveďte důkaz znovu s tou změnou, že za pomocnou čáru zvolíte úhlopříčku BD!

Je-li u čtyrúhelníka každá strana rovná straně protější, je to rovnoběžník. Nyní víme o obr. 79, že

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AD} = \overline{BC};$$

máme dokázat, že $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Provedeme-li obvyklou pomocnou konstrukci, vyjde ihned

$$ACD \cong CAB \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB$ neboli $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$. Avšak φ_1 a φ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC, proťaté přímky AD, BC); protože $\varphi_1 = \varphi_2$, je $AD \parallel BC$. Také ψ_1 a ψ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC, proťaté přímky AB, CD); protože $\psi_1 = \psi_2$, je $AB \parallel CD$.

Opakujte důkaz s obvyklou změnou!

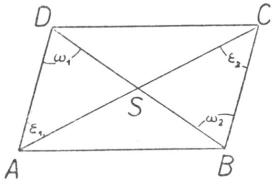
Nyní si všimneme úhlopříček rovnoběžníka. **Úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí.** V obr. 80 je S průsečík úhlopříček rovnoběžníka $ABCD$. Chceme dokázati, že

$$\overline{AS} = \overline{CS}, \qquad \overline{BS} = \overline{DS}.$$

Všimneme si trojúhelníků SAD, SBC. Víme, že $\overline{AD} = \overline{BC}$ (protější strany rovnoběžníka); mimoto je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\omega_1 = \omega_2$ (z téhož důvodu). Proto je

$$SAD \cong SCB \quad \text{(usu)}$$

a z toho vychází $\overline{SA} = \overline{SC}$, $\overline{SD} = \overline{SB}$, což jsme měli dokázati.



Obr. 80.

Proveďte důkaz znovu s tou změnou, že místo trojúhelníků SAD, SCB si všimnete trojúhelníků SAB, SCD!

Jestliže se u čtyrúhelníka úhlopříčky navzájem půlí, je to rovnoběžník. Nyní víme o obr. 80, že

$$\overline{AS} = \overline{CS}, \qquad \overline{BS} = \overline{DS}.$$

Zase si všimneme trojúhelníků SAD, SBC. Jest $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC$ (vrcholové úhly). Proto je

$$SAD \cong SCB \quad \text{(sus)}$$

a z toho soudíme, že $\overline{AD} = \overline{CB}$. Dále si všimněme trojúhelníků SAB, SCD. Jest $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$. Proto je

$$SAB \cong SCD \quad \text{(sus)}$$

a z toho soudíme, že $\overline{AB} = \overline{CD}$. Nyní už víme o čtyrúhelníku $ABCD$, že se každá strana rovná straně protější. Proto $ABCD$ je rovnoběžník.

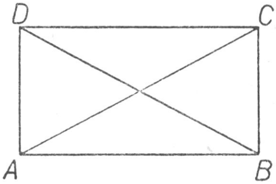
Obdélník je takový čtyrúhelník, jehož všecky úhly jsou pravé. Obdélník je rovnoběžník, neboť každý jeho úhel se rovná (každému jinému, tedy zejména) jeho úhlu protějšímu, a to, jak víme, platí jen pro rovnoběžníky.

O obdélníku platí zajisté všecko, co platí o rovnoběžnících. Zejména dvě protější strany obdélníka jsou stejně dlouhé a úhlopříčky obdélníka se navzájem půlí.

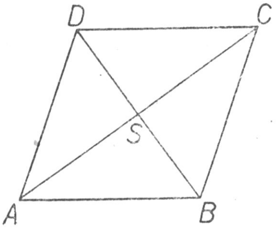
Obě úhlopříčky obdélníka jsou si rovny. V obr. 81 je $ABCD$ obdélník; chceme dokázati, že $\overline{AC} = \overline{BD}$. Všimneme si trojúhelníků ABC, BAD. Mají společnou stranu AB; dále je $\overline{BC} = \overline{AD}$ a mimoto $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$. Tedy

$$ABC \cong BAD \quad \text{(sus)}$$

a z toho následuje $\overline{AC} = \overline{BD}$.



Obr. 81.



Obr. 82.

Opakujte důkaz s tou změnou, že užijete trojúhelníků se společnou stranou AD!

Rovnoběžník, jehož obě úhlopříčky jsou si rovny, je obdélník. Nyní víme o obr. 81, že $ABCD$ je rovnoběžník a že $\overline{AC} = \overline{BD}$. Máme dokázati, že na př. úhel $\sphericalangle BAD$ je pravý. Protože $ABCD$ je rovnoběžník, musí býti $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$. Jelikož je také $\overline{AC} = \overline{BD}$, je

$$ABC \cong BAD \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$. Ale ty dva úhly jsou výplňkové (sousední úhly rovnoběžníka); protože jsou si rovné, musí býti pravé.

K o s o č t v e r e c je takový čtyrúhelník, jehož všecky strany jsou si rovny. Kosočtverec je rovnoběžník, neboť každá jeho strana se rovná (každé jiné, tedy zejména) protější straně, a to, jak víme, platí jen pro rovnoběžníky. Jako u každého rovnoběžníka, úhlopříčky kosočtverce se navzájem půlí.

Úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo. V obr. 82 je $ABCD$ kosočtverec. Chceme dokázati, že

$$BD \perp AC.$$

Trojúhelníky ABS, ADS mají společnou stranu AS; dále je $\overline{AB} = \overline{AD}$ (strany kosočtverce) a mimoto $\overline{BS} = \overline{SD}$ (úhlopříčky se půlí). Proto je

$$ABS \cong ADS \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASD$. Ale ty dva úhly jsou výplňkové (neboť jsou vedlejší); protože jsou si rovné, musí býti pravé.

Každý úhel kosočtverce je půlen úhlopříčkou vycházející z toho vrcholu. Jako při předešlém důkaze je

$$ABS \cong ADS$$

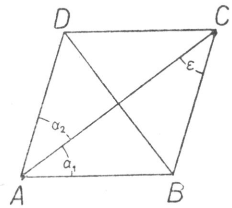
a proto $\sphericalangle BAS = \sphericalangle DAS$, t. j. úhlopříčka AC půlí úhel při vrcholu A.

Rovnoběžník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo, je kosočtverec. Nyní víme o obr. 82, že $ABCD$ je rovnoběžník a že úhly při vrcholu S jsou pravé. Chceme dokázati, že všecky délky $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ jsou stejné. Jako u každého rovnoběžníka víme i zde, že $\overline{AB} = \overline{CD}$ a že $\overline{BC} = \overline{AD}$. Proto potřebujeme pouze ukázati, že $\overline{AB} = \overline{AD}$. Všimneme si zase trojúhelníků ABS, ADS se společnou stranou AS. Jest $\overline{BS} = \overline{DS}$ (úhlopříčky se půlí) a mimoto $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASD$. Proto je

$$ABS \cong ADS \quad \text{(sus)}$$

a z toho následuje $\overline{AB} = \overline{AD}$, což jsme měli dokázati.

Je-li úhel při vrcholu *A* rovnoběžníka *ABCD* půlen úhlopříčkou *AC*, je *ABCD* kosočtverec. O obr. 83 víme, že $ABCD$ je rovnoběžník a že $\alpha_1 = \alpha_2$. Máme dokázati, že všecky strany jsou si rovny. Jako u každého rovnoběžníka víme i zde, že $\overline{AB} = \overline{CD}$ a že $\overline{AD} = \overline{BC}$. Proto potřebujeme pouze dokázati, že $\overline{AB} = \overline{BC}$. Jest $\alpha_2 = \varepsilon$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami); protože $\alpha_1 = \alpha_2$, jest $\alpha_1 = \varepsilon$. Avšak α_1 a ε jsou úhly trojúhelníka ABC proti stranám BC a AB. Protože ty úhly jsou si rovny, jsou si rovny také protější strany, t. j. $\overline{AB} = \overline{BC}$.



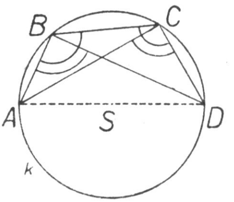
Obr. 83.

Čtverec je takový čtyrúhelník, který má i všecky strany stejné i všecky úhly pravé neboli čtverec je současně obdélníkem i kosočtvercem. Všecky vlastnosti obdélníka a všecky vlastnosti kosočtverce musí platit pro čtverec. Vyslovte pro čtverec ty vlastnosti, které zde byly dokázány pro obdélník nebo pro kosočtverec!

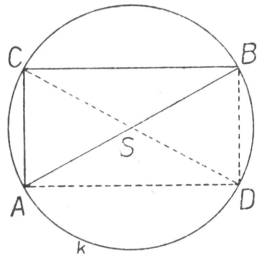
Leží-li body A, B, C na kružnici k, pak úhel $\sphericalangle ABC$ se nazývá obvodový úhel, určitěji: obvodový úhel nad tětivou AC. Viz obr. 84, ve kterém je vyznačen m. j. obvodový úhel $\sphericalangle ABC$ nad tětivou AC a obvodový úhel $\sphericalangle BCD$ nad tětivou BD. Důležitý případ nastane, když tětiva prochází středem kružnice neboli je průměrem kružnice. Pak máme obvodový úhel nad průměrem; v obr. 84 jsou vyznačeny dva takové úhly: $\sphericalangle ABD$ a $\sphericalangle ACD$.

Obvodový úhel nad průměrem je pravý. To je proslulá Thaletova věta. (Řecký filosof Thales milétský žil v 6. století př. Kr.) V obr. 85 je AB průměr kružnice k a bod C leží na kružnici k; máme dokázati, že

$$\sphericalangle ACB = R.$$



Obr. 84.



Obr. 85.

Veďme průměr CSD kružnice k a všimněme si čtyrúhelníka $ACBD$. Úsečky AB, CD jsou úhlopříčky čtyrúhelníka. Jsou to průměry kružnice k a protínají se ve středu S kružnice k. Z toho vychází především, že obě úhlopříčky čtyrúhelníka $ACBD$ se navzájem půlí, takže $ACBD$ je rovnoběžník. Dále však vychází, že obě úhlopříčky rovnoběžníka $ACBD$ jsou si rovny. Proto $ACBD$ je obdélník a $\sphericalangle ACB$ je pravý, jak jsme měli dokázati.

Mysleme si nyní místo úhlu $\sphericalangle ACB$ úhel $\sphericalangle ACX$, kde X je nějaký jiný bod kružnice k. Protože přímka CB má s kružnicí společné pouze body C a B a protože bod X naší kružnice není ani v poloze C ani v poloze B, nemůže přímka CX se krýt s přímkou CB. A protože CB stojí kolmo na CA (podle Thaletovy věty), nemůže CX státi kolmo na CA. **Obvodový úhel nad tětivou, která není průměrem, není úhel pravý.**

Cvičení k § 6.

145. V obr. 86 je $EFGH$ rovnoběžník. H je střed kružnice m. Dokažte, že

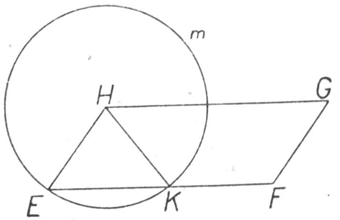
$$\sphericalangle GHK = \sphericalangle FGH.$$

[U každého z obou úhlů si najděte v obrazci jiný úhel, o kterém víte, že mu je rovný.]

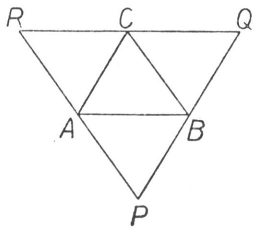
146. Obr. 87 vznikl tak, že každým vrcholem trojúhelníka ABC byla vedena rovnoběžka s protější stranou. Dokažte, že body A, B, C jsou středy stran trojúhelníka PQR.

147. STX je přímka. $STUV$ je rovnoběžník. Osa úhlu $\sphericalangle XTU$ protne přímku VS v bodě Y a přímku VU v bodě Z. Dokažte, že

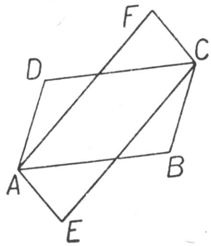
$$\overline{VY} = \overline{VZ} = \overline{ST} + \overline{TU}.$$



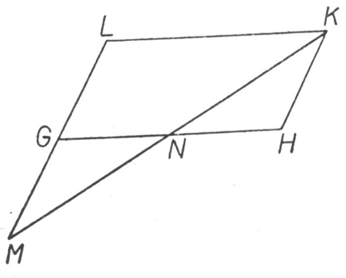
Obr. 86.



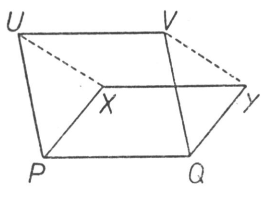
Obr. 87.



Obr. 88.



Obr. 89.



Obr. 90.

148. V obr. 88 jsou $ABCD$ a $AECF$ rovnoběžníky. Dokažte, že všecky tři přímky AC, BD, EF se protnou v jediném bodě. Potom dokažte, že $BE \parallel FD$.

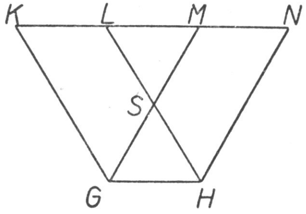
149. V obr. 89 je $GHKL$ rovnoběžník a $\overline{GN} = \overline{NH}$. Dokažte, že $\overline{LG} = \overline{GM}$.

150. $ABCD$ je rovnoběžník. S je střed strany AB, T je střed protější strany. Dokažte, že $BSDT$ je rovnoběžník.

151. V obr. 90 jsou $PQYX$, $PQVU$ dva rovnoběžníky. Dokažte, že také $XYVU$ je rovnoběžník. Je to pravda také tehdy, když rovnoběžníky $PQYX$, $PQVU$ leží každý v jiné rovině?

152. *ABCD* je rovnoběžník. *S* je střed strany *AB*, *T* střed strany *CD*, *E* střed strany *BC*, *F* střed strany *DA*. Sestrojte přímky *AE*, *BT*, *CF*, *DS* a dokažte, že těmi přímkami je určen nový rovnoběžník.

153. V obr. 91 jsou *GHLK* a *GHNM* dva rovnoběžníky. *S* je střed úsečky *HL*. Dokažte, že body *L* a *M* dělí úsečku *KN* na tři stejné díly.



Obr. 91.

154. Zvolte si libovolný čtyrúhelník *ABCD*. Určete body *E* a *F* tak, aby *ADCE*, *BADF* byly rovnoběžníky. Dokažte, že přímka *EF* prochází středem úsečky *BC*.

155. Veďte bodem *O* tři přímky. Na první zvolte bod *H*, na druhé bod *K*, na třetí bod *L*. Určete body *X*, *Y* a *Z* tak, aby *OKXL*, *OLYH*, *OHZK* byly rovnoběžníky. Dokažte, že úsečky *HX*, *KY*, *LZ* se navzájem půlí.

156. Zvolte si trojúhelník *ABC*. Zvolte si bod *D* na straně *AB* a bod *E* na straně *AC*. Dokažte, že úsečky *CD* a *BE* se nemohou navzájem půlit.

157. Víme-li o jednom úhlu rovnoběžníka, že je pravý, je to jistě obdélník. (Dokažte!)

158. Má-li čtyrúhelník všecky úhly stejné, je to obdélník. (Dokažte!)

159. *ABCD* je rovnoběžník. *S* je střed strany *AB*, *T* střed strany *CD*, *E* střed strany *BC*, *F* střed strany *DA*. Dokažte:

a) *ESFT* je rovnoběžník.
b) Když *ABCD* je obdélník, *ESFT* je kosočtverec.
c) Když *ABCD* je kosočtverec, *ESFT* je obdélník.
d) Když *ABCD* je čtverec, *ESFT* je čtverec.
e) Když *ESFT* je kosočtverec, *ABCD* je obdélník.
f) Když *ESFT* je obdélník, *ABCD* je kosočtverec.
g) Když *ESFT* je čtverec, *ABCD* je čtverec.

160. Které nové geometrické výrazy se vyskytly v tomto paragrafu? Zapište si je!

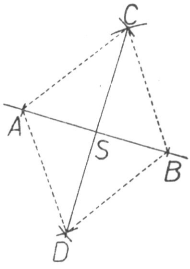
161. Zapište si poučky, které jsme dokázali v tomto paragrafu.

§ 7. Konstrukce.

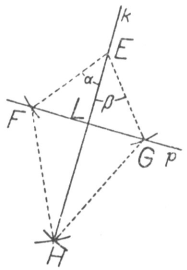
Víte, že říkáme *euklidovská konstrukce* takové konstrukci, při které se užívá pouze dvou základních výkonů: [1] narýsovati přímku, která spojuje dva dané body; [2] narýsovati kružnici, která má daný střed a daný poloměr.

Řada základních euklidovských konstrukcí je vám známa. Správnost každé z nich si můžeme potvrditi pomocí pouček, které jsme letos probírali.

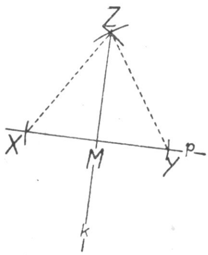
V obr. 92 je znázorněno, jak se euklidovsky sestrojí střed S úsečky AB a osa CD úsečky AB. Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili o její správnosti, máme dokázati, že $\overline{AS} = \overline{BS}$ a že $CD \perp AB$. Podle konstrukce je $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD}$, takže $ACBD$ je kosočtverec. Víme, že úhlopříčky kosočtverce (jako každého jiného rovnoběžníka) se navzájem půlí: proto je $\overline{AS} = \overline{BS}$. Víme, že úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo: proto je $CD \perp AB$.



Obr. 92.



Obr. 93.



Obr. 94.

V obr. 93 je znázorněno, jak se euklidovsky spustí kolmice k s bodu E na přímku p. Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že opravdu je $EH \perp p$, že tedy $\sphericalangle ELF$ je pravý úhel, všimneme si napřed trojúhelníků EFH a EGH. Podle konstrukce je

$$EFH \cong EGH \quad \text{(sss)}$$

a z toho plyne $\sphericalangle FEH = \sphericalangle GEH$ neboli $\alpha = \beta$. Teď si všimneme trojúhelníků FEL a GEL. Jest $\overline{FE} = \overline{GE}$, $\alpha = \beta$ a strana EL je oběma trojúhelníkům společná. Proto je

$$FEL \cong GEL \quad \text{(sus)}$$

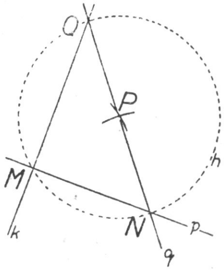
a z toho následuje $\sphericalangle ELF = \sphericalangle ELG$. Tedy úhel $\sphericalangle ELF$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle ELF = R$.

V obr. 94 je znázorněno, jak se euklidovsky vztyčí kolmice k k přímce p v jejím bodě M. Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že opravdu $\sphericalangle XMZ = R$, všimneme si trojúhelníků XMZ a YMZ. Podle konstrukce je

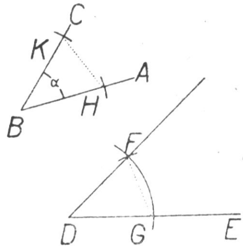
$$XMZ \cong YMZ \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle XMZ = \sphericalangle YMZ$. Tedy úhel $\sphericalangle XMZ$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle XMZ = R$.

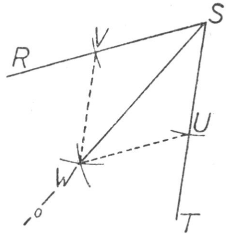
V obr. 95 je znázorněn jiný zajímavý způsob euklidovské konstrukce, vztyčiti kolmici k k přímce p v jejím bodě M. Popis: Na přímce p si zvolíme ještě jeden bod N. Kružítkem si stanovíme bod P tak, aby bylo $\overline{MP} = \overline{NP}$, dále sestrojíme spojnici $q = NP$ a na ní si stanovíme kružítkem bod Q tak, aby bylo $\overline{QP} = \overline{NP}$. Spojnice QM je žádaná kolmice k. Odůvodnění: Jest $\overline{MP} = \overline{NP} = \overline{QP}$, takže body M, N a Q leží na kružnici h se středem P. Tedy $\sphericalangle QMN$ je



Obr. 95.



Obr. 96.



Obr. 97.

obvodový úhel a protože QN je průměr kružnice h, je $\sphericalangle QMN = R$ podle Thaletovy věty.

Také úloha, spustit na přímku p kolmici s bodu Q, dá se euklidovsky řešit pomocí Thaletovy věty, ale je to konstrukce složitější než ta, která je znázorněna v obr. 93. Bodem Q si vedeme libovolnou přímku q (viz zase obr. 95). Je-li N průsečík přímek p a q, najdeme si střed P úsečky QN, což umíme provésti euklidovsky. Potom si opíšeme se středu P kružnici h tak, aby procházela bodem Q. Kružnice h má s přímkou p vedle bodu N společný ještě jeden bod M. Přímka QM je žádaná kolmice k. Proč?

V obr. 96 je znázorněno, jak se euklidovsky sestrojí úhel, který se rovná danému úhlu α a má jedno rameno v dané polopřímce DE (tedy vrchol v bodě D). Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že je správná, máme dokázati, že $\sphericalangle GDF = \alpha$. Podle konstrukce je

$$BHK \cong DGF \quad \text{(sss)},$$

takže $\alpha = \sphericalangle HBK = \sphericalangle GDF$.

V obr. 97 je znázorněno, jak se euklidovsky najde osa o úhlu $\sphericalangle RST$. Vyložte ústně průběh konstrukce! Podle ní je $\overline{SU} = \overline{SV} =$

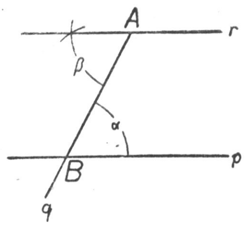
$= \overline{UW} = \overline{VW}$, takže $SUWV$ je kosočtverec. Víme, že úhlopříčka SW půlí úhel $\sphericalangle VSU = \sphericalangle RST$. Proto $o = SW$ je osa úhlu $\sphericalangle RST$.

Euklidovská konstrukce úhlu $60°$ je založena na poučce, že každý úhel rovnostranného trojúhelníka se rovná $60°$. Tato poučka nebyla v této části učebnice ještě výslovně uvedena, ale znáte poučku, že proti stejným stranám leží stejné úhly, a poučku o součtu úhlů. Z těchto dvou plyne snadno.

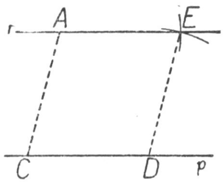
Protože umíme euklidovsky sestrojit úhly $60°$ a $90°$ a protože umíme euklidovsky rozpůlit daný úhel, dovedeme euklidovsky sestrojit rozmanité úhly (viz cvič. 162).

Když velikost úhlu je vyjádřena celým počtem stupňů, dá se úhel euklidovsky sestrojit, kdykoli počet stupňů je násobek tří (ale nebudeme se to učit); dá se také dokázat, že když počet stupňů není násobek tří, je euklidovská konstrukce nemožná. Na př. úhel $10°$ nelze euklidovsky sestrojit.

V obrazcích 98 a 99 jsou znázorněny euklidovské konstrukce úlohy, vésti bodem A rovnoběžku r k přímce p.



Obr. 98.

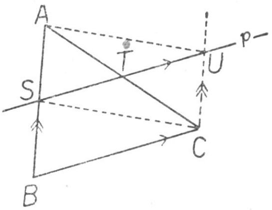


Obr. 99.

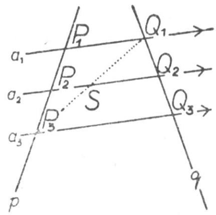
Popis konstrukce z obr. 98: Bodem A si vedeme libovolnou přímku q a označíme B její průsečík s přímkou p. Přímky p a q určí úhel α. Sestrojíme si euklidovsky úhel β rovný úhlu α s jedním ramenem v polopřímce AB, ale na druhé straně od přímky q než je úhel α. Druhé rameno úhlu β je v žádané rovnoběžce r. Odůvodnění: Úhly α a β jsou střídavé (příčka q, proťaté přímky p a r); protože $\alpha = \beta$, jest $r \parallel p$.

Popis konstrukce z obr. 99: Na přímce p si zvolíme dva body C a D. Kružítkem si opatříme takový bod E, aby bylo $\overline{AE} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{AC}$. Přímka AE je žádaná rovnoběžka r. Odůvodnění: Protože $\overline{AE} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{AC}$, je $ACDE$ rovnoběžník, takže $AE \parallel CD$.

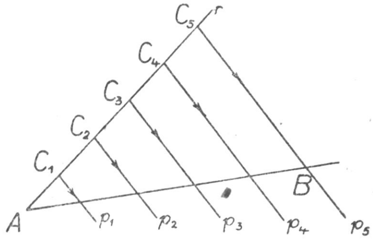
V tomto paragrafu se naučíme, jak se může daná úsečka euklidovsky rozdělit na předepsaný počet stejných dílů. Ale napřed si uvedeme dvě poučky. **Jestliže přímka p rovnoběžná se stranou BC trojúhelníka ABC prochází středem strany AB, pak prochází také středem strany AC.** V obr. 100 je tedy $p \parallel BC$ a S je střed strany AB. Máme dokázati, že T je střed strany AC. Za tím účelem si vedeme bodem C rovnoběžku se stranou AB a označíme si U její průsečík s přímkou p. Protože $SU \parallel BC$, $SB \parallel UC$, je $BSUC$ rovnoběžník a z toho následuje $\overline{CU} = \overline{BS}$. Protože také $\overline{SA} = \overline{BS}$, je $\overline{CU} = \overline{SA}$. Tedy $CU \parallel SA$, $\overline{CU} = \overline{SA}$ a proto $CUAS$ je rovnoběžník.



Obr. 100.



Obr. 101.



Obr. 102.

Úhlopříčky AC a SU rovnoběžníka $CUAS$ se protnou v bodě T. Protože úhlopříčky rovnoběžníka se půlí, je T střed úsečky AC, což jsme měli dokázati.

Nyní druhou poučku (viz obr. 101)! **Nechť rovnoběžky a_1, a_2, a_3 protnou přímku p v bodech P_1, P_2, P_3, a přímku q v bodech Q_1, Q_2, Q_3; jestliže $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$, pak také $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3}$.** Tu poučku dokážeme, když vedeme pomocnou čáru P_3Q_1 a užijeme dvakrát za sebou předešlé poučky. Poprvé jí užijeme na trojúhelník $P_3P_1Q_1$; přímka a_2 je rovnoběžná se stranou P_1Q_1 a prochází středem P_2 strany P_3P_1; proto přímka a_2 prochází středem S strany P_3Q_1. Podruhé užijeme téže poučky na trojúhelník $Q_1P_3Q_3$; přímka a_2 je rovnoběžná se stranou P_3Q_3 a prochází středem S strany Q_1P_3; proto přímka a_2 prochází středem strany Q_1Q_3. Ale to právě znamená, že $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3}$, což jsme měli dokázati.

V obr. 102 je znázorněno euklidovské řešení úlohy, rozděliti úsečku AB na pět stejných dílů. P o p i s: Bodem A si vedeme libovolnou přímku r a zvolíme si na ní libovolný bod C_1. Kružítkem si určíme postupně další body C_2, C_3, C_4, C_5 na přímce r tak, aby bylo $\overline{AC_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_2C_3} = \overline{C_3C_4} = \overline{C_4C_5}$. Spojíme C_5B a vedeme rovnoběžky p_4, p_3, p_2, p_1 s přímkou C_5B tak, že p_1 prochází bodem C_1, p_2 bodem C_2 atd. Přímky p_1, p_2, p_3, p_4 protnou přímku AB v bodech, které rozdělí úsečku AB na pět stejných dílů.

Základní konstrukce trojúhelníka jsme již probírali. Pro opakování zde máte ještě cvič. 165.

Známe-li jeden ostrý úhel pravoúhlého trojúhelníka, známe všecky tři úhly. Proto z poučky usu následuje, že **pravoúhlý trojúhelník je určen, známe-li**

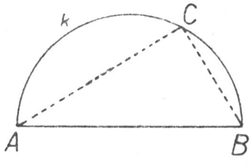
a) délku jedné odvěsny a jeden ostrý úhel;

b) délku přepony a jeden ostrý úhel.

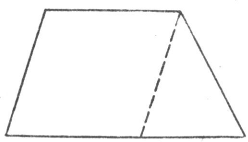
Ale pravoúhlý trojúhelník je také určen, známe-li

c) délku přepony a délku jedné odvěsny.

Neboť přepona je delší než odvěsna a proti přeponě je pravý úhel; tedy známe dvě strany a úhel proti větší z nich. Při sestrojování v případě c) začneme obyčejně tak, že si zvolíme určitou polohu dané odvěsny; vyložte sami, jaký je potom průběh konstrukce! Ale je zajímavé, že si při této úloze můžeme také zvoliti určitou polohu přepony AB (viz obr. 103): Opíšeme nad průměrem AB polokruž-



Obr. 103.

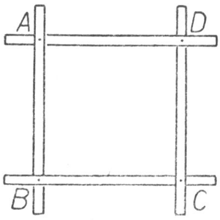


Obr. 104.

nici k; je-li dána na př. délka $\overline{AC} = b$, najdeme si kružítkem na polokružnici k ten bod C, jehož vzdálenost od bodu A se rovná dané délce b. Že trojúhelník ABC je pravoúhlý, to plyne z Thaletovy věty.

Při konstrukcích lichoběžníka často pomůže pomocná čára (vyčárkovaná v obr. 104), která lichoběžník rozdělí na rovnoběžník a na trojúhelník.

Kdežto trojúhelník je určen, známe-li délky všech stran, u čtyrúhelníka už tomu tak není. V obr. 105 jsou znázorněny čtyři dřevěné laťky, spojené v bodech A, B, C a D tak, že se každá laťka může otáčeti. V dané poloze je $ABCD$ čtverec, můžeme však body A, C přiblížit k sobě nebo oddálit od sebe, takže nám vzniknou kosočtverce rozmanitých tvarů, které všecky mají strany tak dlouhé jako původní čtverec. K určení čtyrúhelníka nestačí čtyři číselné údaje; je jich potřeba pět (viz cvič. 174).



Obr. 105.

Cvičení k § 7.

162. Jak byste sestrojili euklidovsky úhly

$15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 105°, 120°, 135°, 150°, 165°$?

Jak úhly $22\frac{1}{2}°$, $52\frac{1}{2}°$, $67\frac{1}{2}°$?

163. Jak byste sestrojili euklidovsky k dané přímce p rovnoběžku, jejíž vzdálenost od přímky p je rovná délce dané úsečky?

164. Narýsujte si úsečku AB dlouhou přesně 7 cm a rozdělte ji euklidovsky na sedm stejných dílů. Změřte ty díly!

Ve cvič. 165 neužívejte při konstrukci úhloměru, nýbrž sestrojujte úhly euklidovsky. Ale při kontrolních měřeních užijete úhloměru.

165. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů:

a) $a = 53$ mm, $b = 81$ mm, $c = 42$ mm. Změřte úhly.
b) $a = 8{,}5$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10{,}7$ cm. Změřte úhly.
c) $a = 7{,}5$ cm, $\beta = 75°$, $\gamma = 45°$. Změřte b, c.
d) $b = 75$ mm, $\beta = 60°$, $\gamma = 97\frac{1}{2}°$. Změřte a, c.
e) $c = 3{,}2$ cm, $\alpha = 82\frac{1}{2}°$, $\gamma = 30°$. Změřte a, b.
f) $b = 39$ mm, $c = 55$ mm, $\alpha = 112\frac{1}{2}°$. Změřte a, β, γ.
g) $a = 12{,}5$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 75°$. Změřte b, α, γ.

166. Pomocí základních pouček o určení trojúhelníka dokažte, že rovnoramenný trojúhelník je určen, známe-li

a) délku základny a délku ramene;
b) délku základny a úhel při základně;
c) délku základny a úhel proti základně;
d) délku ramene a úhel při základně;
e) délku ramene a úhel proti základně.

Také ve cvič. 167 sestrojujte dané úhly euklidovsky.

167. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC podle daných údajů. Základna je AB.

a) $c = 4{,}7$ cm, $\beta = 67\frac{1}{2}°$; změřte a.
b) $c = 72$ mm, $\gamma = 97\frac{1}{2}°$; změřte a.
c) $b = 5$ cm, $\beta = 75°$; změřte c.

168. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC podle daných údajů. (Jest $\sphericalangle ACB = R$.)

a) $a = 67$ mm, $\beta = 30°$; změřte b, c.
b) $a = 5\frac{1}{2}$ cm, $\alpha = 52\frac{1}{2}°$; změřte b, c.
c) $b = 5$ cm, $\alpha = 75°$; změřte a, c.
d) $b = 6$ cm, $\beta = 67\frac{1}{2}°$; změřte a, c.
e) $c = 7$ cm, $\alpha = 22\frac{1}{2}°$; změřte a, b.
f) $a = 37$ mm, $b = 51$ mm; změřte c, α.
g) $a = 4$ cm, $c = 8{,}5$ cm; změřte b, α.

V následujících cvičeních 169 až 174 si pokaždé napřed udělejte malý obrazec od ruky, který vám pomůže při přemýšlení o postupu práce.

169. Sestrojte euklidovsky čtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{AB} = 7$ cm; změřte $\overline{AC}$.
b) $\overline{AC} = 9$ cm; změřte $\overline{AB}$.

170. Sestrojte euklidovsky obdélník $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\overline{AD}$.
b) $\overline{BD} = 8$ cm, úhlopříčky tvoří úhel $\sphericalangle ASB = 37\frac{1}{2}°$; změřte strany.

171. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno:

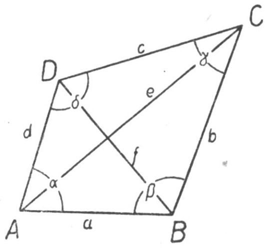
a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AD} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
b) $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BD} = 8$ cm; změřte $\overline{BC}$.
c) $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BD} = 12$ cm, úhlopříčky tvoří úhel $\sphericalangle ASB = 60°$; změřte strany.

172. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{BD} = 7$ cm, $\sphericalangle ABC = 40°$; změřte $\overline{AC}$.
b) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
c) $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BD} = 9$ cm; změřte $\overline{AB}$.

173. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ podle daných údajů. AB a CD jsou základny.

a) $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CD} = 3$ cm, $\overline{DA} = 3\frac{1}{2}$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
b) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 2$ cm, $\overline{DA} = 4$ cm; změřte $\sphericalangle BAD$.
c) $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 5$ cm, $\sphericalangle BAD = 72°$, $\sphericalangle ABC = 40°$; změřte $\overline{BC}$.
d) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{CD} = 7$ cm, $\sphericalangle BAD = 130°$, $\sphericalangle ABC = 70°$; změřte $\overline{AD}$.



Obr. 106.

174. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$ podle daných údajů. Označení stran, úhlů a úhlopříček jako v obr. 106.

a) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm, $d = 10$ cm, $\beta = 105°$; změřte e a f;

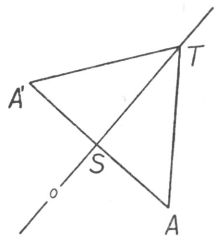
b) $a = 82$ mm, $b = 56$ mm, $c = 42$ mm, $f = 93$ mm, $\alpha = 70°$; změřte d a e.

c) $c = 9$ cm, $d = 3{,}2$ cm, $f = 10{,}6$ cm, $\gamma = 85°$, $\delta = 124°$; změřte a a b.

§ 8. Souměrnost osová a souměrnost středová.

O **souměrnosti osové** jsme již mluvili v první třídě. Tato souměrnost je určena přímkou o, která se jmenuje **osa souměrnosti.** K danému geometrickému útvaru dostaneme útvar s ním **souměrně sdružený,** překlopíme-li původní útvar kolem osy o. Z tohoto názorného vytvoření útvaru souměrně sdruženého plyne, že každý geometrický útvar je shodný s útvarem souměrně sdruženým, neboli že každá úsečka je stejně dlouhá s úsečkou souměrně sdruženou a že každý úhel se rovná úhlu souměrně sdruženému.

Je-li A libovolný bod, nazveme pro krátkost **obrazem** bodu A a označíme A' (což čteme A s čárkou) bod souměrně sdružený s bodem A. Leží-li bod A na ose o, splyne s bodem A'; proto říkáme, že každý bod na ose o je **bod samodružný.** Je-li A libovolný bod, pak obraz A'' jeho obrazu A' splyne s původním bodem A.



Obr. 107.

Je-li A libovolný bod a je-li A' jeho obraz, tu je nám známo, že střed S úsečky AA' leží na ose o a že je $o \perp AA'$. Víme-li, že při osové souměrnosti se nemění ani délky úseček ani velikosti úhlů, můžeme si tuto základní vlastnost osové souměrnosti odvoditi takto (viz obr. 107): Zvolme si na ose o libovolný bod T. Vznikne nám trojúhelník $AA'T$. Protože přímka o je souměrně sdružena sama s sebou, protože mimoto se stranou AT našeho trojúhelníka je sdružena strana $A'T$ a protože při souměrnosti se velikosti úhlů nemění, je úhel osy o se stranou AT rovný úhlu osy o se stranou $A'T$ neboli o půlí $\sphericalangle ATA'$. Z toho následuje, že přímka o vedená vrcholem trojúhelníka $AA'T$ vnikne dovnitř tohoto trojúhelníka a proto musí protnouti protější stranu, t. j. úsečku AA'. Označme si S průsečík úsečky AA' s osou o. S trojúhelníkem AST je souměrně sdružený trojúhelník $A'ST$, takže

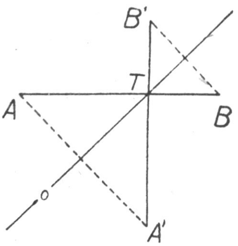
$$AST \cong A'ST;$$

z této shodnosti plyne předně, že $\overline{AS} = \overline{A'S}$, což je prvá z věcí, které jsme měli dokázati; za druhé plyne z téže shodnosti, že úhly $\sphericalangle AST$ a $\sphericalangle A'ST$ jsou si rovny; protože to jsou úhly vedlejší, jsou tedy pravé a to je druhá z věcí, které jsme měli dokázati.

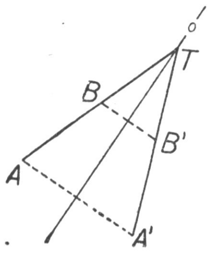
Vycházejíce z výše vyslovené základní vlastnosti osové souměrnosti, můžeme snadno dokázati, že při osové souměrnosti se délky úseček nemění. Všimněme si nejprve takové úsečky AT, jejíž jeden krajní bod T leží na ose o. Máme zase obr. 107, ve kterém nyní víme, že úhly při vrcholu S jsou pravé a že $\overline{AS} = \overline{A'S}$; dokázati máme, že $\overline{AT} = \overline{A'T}$. Protože $\overline{ST} = \overline{ST}$, $\overline{AS} = \overline{A'S}$, $\sphericalangle AST = \sphericalangle A'ST$, jest

$$AST \cong A'ST$$

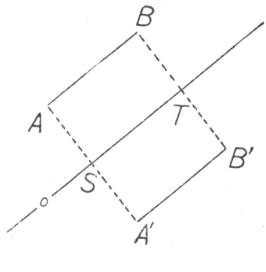
a z toho plyne $\overline{AT} = \overline{A'T}$. Všimneme-li si nyní libovolné úsečky AB, rozeznáváme tři případy. Předně může úsečka AB protnouti osu o v bodě, který si označíme T (viz obr. 108); za druhé může prodloužení úsečky AB — třeba za bod B — protnouti osu o v bodě, který zase si označíme T (viz obr. 109); za třetí může býti $AB \parallel o$ (viz obr. 110). V případě obr. 108 víme, že



Obr. 108.



Obr. 109.



Obr. 110.

$$\overline{AT} = \overline{A'T}$$

a podobně také

$$\overline{TB} = \overline{TB'};$$

mimoto je

$$\overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB},$$

$$\overline{A'B'} = \overline{A'T} + \overline{TB'},$$

takže musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

V případě obr. 109 zase je

$$\overline{AT} = \overline{A'T}, \quad \overline{BT} = \overline{B'T};$$

mimoto je v tomto případě

$$\overline{AB} = \overline{AT} - \overline{BT}; \quad \overline{A'B'} = \overline{A'T} - \overline{B'T},$$

takže zase musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Konečně v případě obr. 110 si označme S střed úsečky AA' a T střed úsečky BB'. Víme, že obě přímky ASA', BTB' jsou kolmé na o, takže jsou mezi sebou rovnoběžné. Tedy je $AS \parallel BT$; mimoto však víme, že je také $AB \parallel ST$. Tedy čtyrúhelník $ABTS$ je rovnoběžník. (Je to dokonce obdélník, ale na tom nám už nezáleží.) Víme, že u rovnoběžníka protější strany jsou si rovny. Tedy je $\overline{AS} = \overline{BT}$. Avšak $\overline{A'S} = \overline{AS}$, $\overline{B'T} = \overline{BT}$, takže musí býti také $\overline{A'S} = \overline{B'T}$. Tedy čtyrúhelník $A'B'TS$ má dvě protější strany $A'S$ a $B'T$ sobě rovné; protože také víme, že ty strany jsou rovnoběžné, je $A'B'TS$ rovnoběžník stejně jako $ABTS$. Z rovnoběžníka $ABTS$ soudíme, že $\overline{AB} = \overline{TS}$; z rovnoběžníka $A'B'TS$ soudíme, že $\overline{TS} = \overline{A'B'}$; proto je $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Jako jsme dokázali pomocí shodných trojúhelníků, že při souměrnosti osové se nemění délky úseček, podobně také bychom mohli dokázati, že při souměrnosti osové se nemění ani velikosti úhlů. Zase bychom musili rozeznávati různé případy. Ale je jednodušší usuzovati takto. Budiž dán libovolný úhel $\sphericalangle ABC$. (Zvolili jsme si libovolně bod A na jednom rameni a bod C na druhém.) Sestrojíme si trojúhelník ABC i trojúhelník souměrně sdružený $A'B'C'$. Víme, že

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

Proto je

$$ABC \cong A'B'C' \quad \text{(sss)}$$

a z toho plyne $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, což jsme měli dokázati.

Od osové souměrnosti se liší **souměrnost středová.**. Tato souměrnost je určena bodem S, který se jmenuje **střed souměrnosti.** K danému geometrickému útvaru dostaneme útvar s ním **souměrně sdru-**

žený, otočíme-li původní útvar kolem bodu S o 180°. Z tohoto názorného vytvoření útvaru souměrně sdruženého plyne zase, že každý geometrický útvar je shodný s útvarem souměrně sdruženým, neboli že každá úsečka je stejně dlouhá s úsečkou souměrně sdruženou a že každý úhel se rovná úhlu souměrně sdruženému. Při středové souměrnosti máme zřejmě jen jediný **samodružný bod**, který?

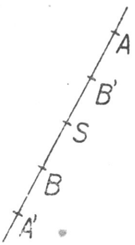
Je-li A libovolný bod a je-li A' jeho **obraz** (t. j. zase bod souměrně sdružený), jest $\sphericalangle ASA' = 180°$ a z toho následuje, že bod S leží na úsečce AA'. Protože $\overline{AS} = \overline{A'S}$, máme základní vlastnost středové souměrnosti: Obraz A' libovolného bodu A dostaneme, prodloužíme-li úsečku AS za bod S a naneseme-li $\overline{SA'} = \overline{AS}$.

Vycházejíce zase ze základní vlastnosti středové souměrnosti, dokážeme si pomocí pouček nám známých, že dvě úsečky souměrně sdružené jsou stejně dlouhé. Pro úsečku AS, jejíž jeden krajní bod je S, je zřejmé, že $\overline{AS} = \overline{A'S}$. Všimněme si za druhé takové úsečky AB, uvnitř které je bod S (viz obr. 111). Víme, že

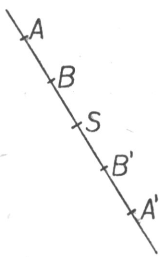
$$\overline{AS} = \overline{A'S}, \quad \overline{BS} = \overline{B'S}.$$

Protože však je

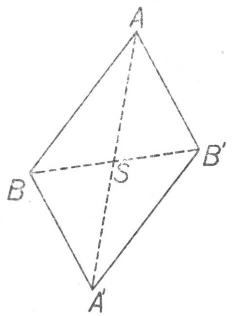
$$\overline{AB} = \overline{AS} + \overline{BS},$$
$$\overline{A'B'} = \overline{A'S} + \overline{B'S},$$



Obr. 111.



Obr. 112.



Obr. 113.

musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Podobně usuzujeme v tom případě, když bod S leží na prodloužení úsečky AB (viz obr. 112). Proveďte úsudek sami! Zbývá případ, kdy bod S neleží na přímce AB (viz obr. 113). V tomto případě si všimněme čtyrúhelníka $ABA'B'$. Bod S je průsečík jeho úhlopříček. Protože

$$\overline{AS} = \overline{A'S}, \quad \overline{BS} = \overline{B'S},$$

úhlopříčky se navzájem půlí, takže $ABA'B'$ je rovnoběžník. Protože protější strany rovnoběžníka jsou si rovny, jest $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, jak jsme měli dokázati.

Jakmile máme dokázáno, že při středové souměrnosti se nemění délky úseček, soudíme stejně jako při souměrnosti osové, že se nemění ani velikosti úhlů.

Z obr. 111 až 113 plyne také jiná důležitá vlastnost středové souměrnosti: Je-li AB libovolná přímka, pak přímka $A'B'$ souměrně sdružená buďto s ní splyne **(samodružná přímka)** nebo je s ní rovnoběžná.

Cvičení k § 8.

175. Zvolte si (nepravidelný) pětiúhelník $ABCDE$ a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvolené osy. Proveďte to třikrát. Osu souměrnosti volte poprvé tak, aby ležela celá vně pětiúhelníka, podruhé tak, aby obsahovala jednu stranu, potřetí tak, aby protínala strany AB a CD.

176. Zvolte si zase (nepravidelný) pětiúhelník a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvoleného středu. Proveďte to zase třikrát. Střed souměrnosti volte poprvé vně pětiúhelníka, podruhé na obvodě (asi ve třetině jedné strany), potřetí uvnitř.

177. Jaký tvar musí míti trojúhelník, aby byl osově souměrný? Kolik os souměrnosti má rovnostranný trojúhelník? Může býti trojúhelník středově souměrný?

178. Jaký tvar musí míti čtyrúhelník, aby byl osově souměrný? Středově souměrný? (Jsou dva druhy osově souměrných čtyrúhelníků!)

179. Má-li nějaký geometrický útvar dvě k sobě kolmé osy souměrnosti, musí míti také střed souměrnosti. Dokažte!

180. Dokažte, že pravidelný n-úhelník má n os souměrnosti. Kudy procházejí? Zkoumejte napřed případy $n = 3, 4, 5, 6$, potom se pokuste usuzovati obecně. Musíte rozeznávati dva případy podle toho, zda číslo n je liché či sudé.

§ 9. Geometrická místa.

Pozorujeme-li hrot vteřinové ručičky u hodinek, vidíme, že jeho poloha se stále mění; všecky tyto polohy dohromady tvoří kružnici, kterou hrot proběhne celou za každou minutu. Říkáme, že ta kružnice je geometrické místo hrotu vteřinové ručičky. Když řekneme, že nějaká čára je geometrickým místem bodu, jehož poloha je podrobena předepsaným podmínkám, rozumíme tím, že dvě věci jsou splněny zároveň:

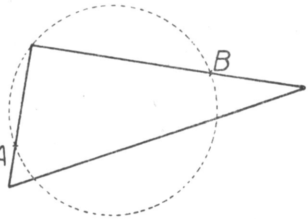
[1] Každý bod na té čáře vyhovuje daným podmínkám.

[2] Každý bod, který daným podmínkám vyhovuje, musí ležeti na té čáře.

V předcházejícím příkladě geometrickým místem byla celá kružnice, v následujícím příkladě geometrickým místem je jen část kružnice. Dejme tomu, že okno se dá otevřít do úhlu 110°, ale ne více. Jaké je geometrické místo určitého bodu na okně? Je to zřejmě oblouk kružnice a poloměry v krajních bodech toho oblouku svírají úhel 110°.

Tvar geometrického místa se někdy nejsnáze určí, když si napřed vyznačíme několik možných poloh proměnného bodu a potom se snažíme uhodnouti tvar celého geometrického místa. Na konec se musí dokázat, že jsme uhodli správně; ale někdy je těžší objevit, jak geometrické místo vypadá, než dokázat správnost výsledku, který jsme uhodli z názoru.

Příklad na pokusné určení geometrického místa (viz obr. 114). A a B jsou dva dané body. Jaké je geometrické místo vrcholu pravého úhlu, jehož jedno rameno prochází bodem A a druhé bodem B? Umístěte různými způsoby trojúhelníkové pravítko tak, aby jedno rameno pravého úhlu na pravítku procházelo bodem A a druhé bodem B a pokaždé píchněte špendlíkem do papíru na místě, kde je vrchol pravého úhlu. Dostanete řadu bodů, z nichž je jasně vidět, že geometrické místo je kružnice nad průměrem AB. To platí ovšem jen tehdy, když všecky polohy pravého úhlu leží v pevné rovině. Geometrickým místem bez tohoto omezení je kulová plocha.



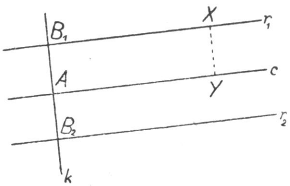
Obr. 114.

Některá geometrická místa jsou velmi důležitá. Omezíme se na geometrická místa v rovině. Geometrické místo bodu X, jehož vzdálenost od daného bodu A se rovná dané délce r, je kružnice o středu A a poloměru r. To je ovšem samozřejmé.

Geometrické místo bodu X, jehož vzdálenost od dané přímky c se rovná dané délce v, se skládá ze dvou rovnoběžek r_1 a r_2 k přímce c. (Viz obr. 115.) Zvolme si určitý bod A na přímce c

a vztyčme v bodě A kolmici k k přímce c. Na přímce k si určeme body B_1, B_2 (každý na jedné straně od přímky c), pro které platí

$$\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = v.$$

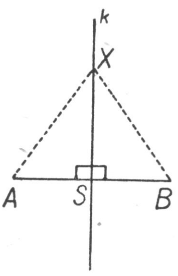


Obr. 115.

Veďme bodem B_1 rovnoběžku r_1 a bodem B_2 rovnoběžku r_2 k přímce c. Máme dokázati, že hledané geometrické místo se skládá z obou přímek r_1 a r_2. Takový důkaz se musí skládati ze dvou částí: předně se musí ukázati, že když bod X leží na některé z přímek r_1 a r_2, jeho vzdálenost od přímky c je rovná v; za druhé se musí dokázati, že když obráceně bod X má od přímky c vzdálenost rovnou v, musí X ležeti buďto na přímce r_1 nebo na přímce r_2.

Prvá část důkazu: Budiž X bod, který leží třeba na přímce r_1. Spusťme s bodu X kolmici na přímku c a označme Y patu této kolmice; máme dokázati, že $\overline{XY} = v$. Všimneme si čtyrúhelníka AB_1XY. Protože přímky AB_1 a YX jsou obě kolmé na přímku c, jsou mezi sebou rovnoběžné; také přímky AY a B_1X jsou mezi sebou rovnoběžné. Tedy AB_1XY je rovnoběžník a AB_1, XY jsou jeho protější strany. Proto je $\overline{XY} = \overline{AB_1}$ neboli $\overline{XY} = v$.

Druhá část důkazu. Budiž X bod takový, že $\overline{XY} = v$, kde Y znamená patu kolmice spuštěné s bodu X na přímku c. Máme dokázati, že X leží buďto na přímce r_1 nebo na přímce r_2. Na té straně od přímky c, na které leží bod X, leží jeden z bodů B_1 a B_2; budiž to na př. bod B_1. Dokážeme, že $B_1X \parallel c$; to právě znamená, že X leží na přímce r_1. Všimneme si zase čtyrúhelníka AB_1XY. Protože $AB_1 \perp c$, $YX \perp c$, jest $AB_1 \parallel YX$; protože $\overline{AB_1} = v$, $\overline{YX} = v$, jest $\overline{AB_1} = \overline{YX}$. Proto AB_1XY je rovnoběžník a z toho následuje $B_1X \parallel AY$ neboli $B_1X \parallel c$.



Obr. 116.

Geometrické místo bodu X stejně vzdáleného od daného bodu A jako od daného bodu B je kolmice k vztyčená k přímce AB ve středu S úsečky AB (neboli osa úsečky AB). (Viz obr. 116.) Důkaz se skládá zase ze dvou částí.

Prvá část. Budiž X bod na přímce k. Máme dokázati, že $\overline{AX} = \overline{BX}$. Všimneme si trojúhelníků ASX

a BSX se společnou stranou SX. Protože S je střed úsečky AB, je $\overline{AS} = \overline{BS}$; mimoto je $\sphericalangle ASX = \sphericalangle BSX$ (úhly pravé). Proto je

$$ASX \cong BSX \quad \text{(sus)}$$

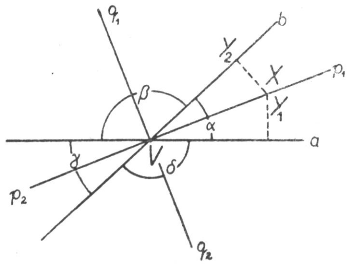
a z toho následuje $\overline{AX} = \overline{BX}$.

D r u h á č á s t. Budiž X bod takový, že $\overline{AX} = \overline{BX}$. Máme dokázati, že bod X leží na přímce k neboli, že $\sphericalangle ASX = R$. Zase si všimneme trojúhelníků ASX a BSX. Nyní víme, že

$$ASX \cong BSX \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle ASX = \sphericalangle BSX$. Tedy úhel $\sphericalangle ASX$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle ASX = R$.

V obr. 117 máme dvě různoběžky a, b, které se protínají v bodě V. Každá z těchto dvou přímek je bodem V rozdělena na dvě polopřímky



Obr. 117.

a proto vznikají čtyři úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ s vrcholem V. V obr. 117 máme ještě čtyři polopřímky p_1, q_1, p_2, q_2, z nichž každá je osou jednoho z úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Úhly α a β jsou vedlejší, takže $\alpha + \beta = 2R$. Proto je

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = R;$$

ale $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$ je právě úhel s rameny p_1 a q_1; proto je tento úhel pravý. Ježto také $\beta + \gamma = 2R$, dojdeme stejně k výsledku, že úhel s rameny q_1 a p_2 je pravý. Proto úhel s rameny p_1 a p_2 je přímý, takže polopřímky p_1 a p_2 dohromady vyplní přímku p. Podobně se dokáže, že polopřímky q_1 a q_2 dohromady vyplní přímku q. Jest

$$p \perp q,$$

neboť už jsme si všimli, že úhel s rameny p_1 a q_1 je pravý. Obě přímky p a q nazveme osami různoběžek a a b; tyto dvě osy tedy stojí na sobě kolmo a půlí úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Geometrické místo bodu X, stejně vzdáleného ode dvou různoběžek a, b, se skládá ze dvou přímek, totiž z obou os různoběžek a, b. Důkaz má zase dvě části.

Prvá část. Budiž X bod na jedné z přímek p, q, třeba na polopřímce p_1. Máme dokázati, že $\overline{XY_1} = \overline{XY_2}$, kde Y_1 je pata kolmice spuštěné s bodu X na přímku a a Y_2 je pata kolmice spuštěné s bodu X na polopřímku b. Všimneme si trojúhelníků VXY_1 a VXY_2 se společnou stranou VX. Protože polopřímka VX je osou úhlu α, je $\sphericalangle Y_1VX = \sphericalangle Y_2VX$; mimoto je $\sphericalangle VY_1X = \sphericalangle VY_2X$. Proto je

$$VXY_1 \cong VXY_2 \quad \text{(suu)}$$

a z toho následuje $\overline{XY_1} = \overline{XY_2}$.

Druhá část. Budiž X bod stejně vzdálený od přímky a jako od přímky b; máme dokázati, že X leží buďto na přímce p nebo na přímce q. Bod X leží uvnitř některého ze čtyř úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; třeba uvnitř úhlu α. S bodu X spustíme kolmice na přímky a, b a označíme Y_1, Y_2 jejich paty. Všimneme si trojúhelníků VXY_1 a VXY_2 se společnou stranou VX. Protože X je stejně vzdálen od přímky a jako od přímky b, je $\overline{XY_1} = \overline{XY_2}$. Mimoto $\sphericalangle VY_1X = R$, $\sphericalangle VY_2X = R$. Tedy VXY_1 a VXY_2 jsou pravoúhlé trojúhelníky, které se shodují v přeponě a v jedné odvěsně, tedy ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich. Proto je

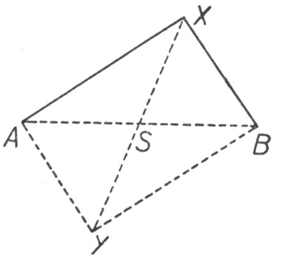
$$VXY_1 \cong VXY_2$$

a z toho následuje $\sphericalangle Y_1VX = \sphericalangle Y_2VX$, takže X leží na ose p_1 úhlu α.

Buďtež A, B dva dané body. Geometrické místo bodu X, pro který $\sphericalangle AXB$ je úhel pravý, je kružnice k nad průměrem AB.

Prvá část. Leží-li X na kružnici k, je $\sphericalangle AXB = R$ podle Thaletovy věty.

Druhá část. Budiž $\sphericalangle AXB = R$. Máme dokázati (viz obr. 118), že $\overline{SX} = \overline{SA}$, kde S je střed úsečky AB. V bodě A vztyčme kolmici k přímce AX a v bodě B vztyčme kolmici k přímce BX; ty dvě kolmice se protnou v bodě Y. Čtyřúhelník $AXBY$ má při vrcholu A, při vrcholu X a při vrcholu B pravý úhel; protože součet úhlů čtyrúhelníka je $4R$, je také zbývající úhel čtyrúhelníka $AXBY$ pravý; tedy je to obdélník. Protože úhlopříčky obdélníka jsou si rovny, je $\overline{XY} = \overline{AB}$.



Obr. 118.

Protože úhlopříčky obdélníka (jako každého rovnoběžníka) se půlí, prochází přímka XY středem S úhlopříčky AB. Mimoto $\overline{SX}$ je polovina z $\overline{XY}$, $\overline{SA}$ je polovina z $\overline{AB}$; protože $\overline{XY} = \overline{AB}$, je $\overline{SX} = \overline{SA}$.

Cvičení k § 9.

Ve cvič. 181 až 186 máte popsati ústně geometrické místo, jehož tvar je patrný z názoru.

181. Malý předmět, který pustíte z ruky na zem.

182. Špička nosu dítěte na houpačce.

183. Střed kola vozu, který jede po rovné silnici.

184. Vrchol pravého úhlu trojúhelníkového pravítka, které otáčíte kolem přepony.

185. Nejnižší bod kyvadla u hodin.

186. Člověk, který kráčí od určitého místa k severozápadu.

187. Proměnný bod P je stále ve stejné vzdálenosti od daného bodu A. Jaké je geometrické místo bodu P

a) v rovině? b) v prostoru?

188. Proměnný bod P je stále ve stejné vzdálenosti od dané přímky a. Jaké je geometrické místo bodu P

a) v rovině? b) v prostoru?

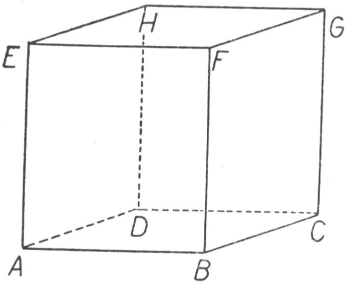
189. Kružnice s pevným poloměrem r a s proměnným středem S se pohybuje tak, že stále prochází daným bodem A. Jaké je geometrické místo bodu S

a) v rovině? b) v prostoru?

190. Kus drátu ABC je ohnut do pravého úhlu v bodě B. Poloha bodu A je pevná. Jaké je geometrické místo bodu C?

191. Čtyři spojené tyčky mají tvar rovnoběžníka $HKLM$. Poloha tyčky HK je pevná; tyčka HM se může otáčeti kolem bodu H; tyčka KL se může otáčeti kolem bodu K. Na tyčce LM je vyznačen určitý bod X. Jaké je geometrické místo bodu X? [Všimněte si toho bodu P na straně HK, pro který je $PX \parallel HM$.]

192. ABC je daný trojúhelník; k je daná kružnice se středem A. $BAFG$, $CBGH$ jsou proměnné rovnoběžníky. Bod F leží stále na kružnici k. Jaké je geometrické místo bodu H?



Obr. 119.

193. Obr. 119 znázorňuje dřevěnou bednu spočívající na vodorovné půdě. Z původní polohy znázorněné obrazcem, ve které dolní podstavou je $ABCD$, se bedna překlopí podél hrany BC do druhé polohy, ve které dolní podstavou je $BCGF$. Potom se bedna překlopí znovu, tentokráte podél hrany FG, do třetí polohy, ve které je dolní podstavou $FGHE$. Potom se bedna překlopí ještě jednou podél hrany EH do konečné polohy, ve které dolní podstavou je $EHDA$. Narýsujte geometrické místo bodu A.

194. KL je pevná úsečka délky 3 cm. Určete geometrické místo bodu X, jehož nejkratší vzdálenost od úsečky KL je 1 cm:

a) v rovině, b) v prostoru.

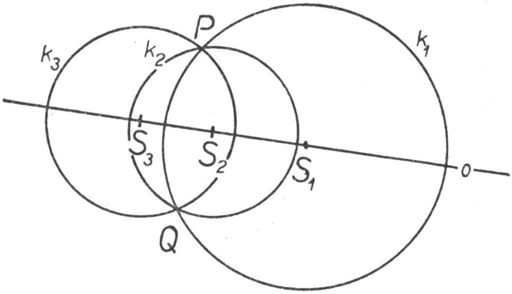
§ 10. Tětivy kružnice.

Narýsujte si kružnici k (střed S) a zvolte si na ní dva body A, B. Víte, že osa o úsečky AB je geometrické místo toho bodu X, pro který platí $\overline{AX} = \overline{BX}$. Protože je jistě $\overline{AS} = \overline{BS}$, leží tedy bod S na přímce o. **Osa každé tětivy kružnice *k* prochází středem kružnice *k*.** Protože osa úsečky AB je kolmice vztyčená v jejím středu na přímku AB, můžeme dáti právě vyslovené poučce také jiné tvary:

Je-li T střed tětivy AB a je-li S střed kružnice, pak buďto oba body S a T splynou (tětiva je průměrem) **nebo spojnice ST je kolmá na přímku AB.**

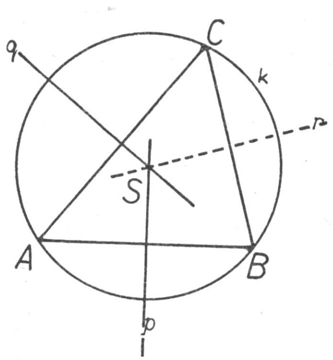
Je-li AB tětiva kružnice, která neprochází středem S kružnice, pak kolmice spuštěná s bodu S na přímku AB půlí úsečku AB.

Buďtež dány dva body P, Q (viz obr. 120). Víme, že každá kružnice k, která prochází i bodem P i bodem Q, musí míti střed na ose o úsečky PQ. Obráceně, zvolíme-li si na ose o libovolný bod S, je $\overline{PS} = \overline{QS}$ a proto kružnice se středem S a poloměrem $\overline{PS}$ prochází (nejen bodem P, nýbrž také) bodem Q. **Geometrické místo středu kružnice, která prochází dvěma danými body P, Q, je osa úsečky PQ.**



Obr. 120.

Při mnoha geometrických úlohách se hledá bod, který má vyhovovati zároveň dvěma podmínkám. Takové úlohy můžeme řešiti pomocí geometrických míst. Body, které vyhovují první podmínce, vyplní jedno geometrické místo (můžeme si je narýsovati třeba červeně), body, které vyhovují druhé podmínce, vyplní druhé geometrické místo (můžeme si je narýsovati třeba modře). Žádaný bod musí vyhovovati oběma podmínkám a proto bude ležeti tam, kde se protne červená čára s modrou. Narýsujte si na př. rovnostranný trojúhelník HKL s délkou strany 4 cm; budiž naší úlohou určiti bod M vzdálený 2 cm od přímky HL a stejně vzdálený od přímky HK jako od přímky KL. Geometrické místo bodu X vzdáleného 2 cm od přímky HL se skládá ze dvou rovnoběžek s přímkou HL; narýsujte si je obě červeně. Geometrické místo bodu X vzdáleného od přímky HK stejně jako od přímky KL se skládá ze dvou k sobě kolmých přímek procházejících bodem K a půlících úhly tvořené přímkami HK a KL; narýsujte si toto nové geometrické místo modře. Žádaný bod M musí ležeti i na červeném i na modrém geometrickém místě; vidíte, že jsou dva takové body M; označte si je M_1, M_2.



Obr. 121.

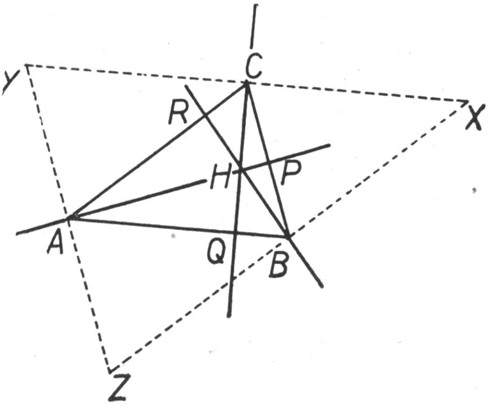
Narýsujte si kružnici k (viz obr. 121) a na ní si zvolte tři body A, B, C. Tyto tři body jsou vrcholy trojúhelníka ABC vepsaného do kružnice k; tato kružnice je opsána trojúhelníku ABC. Protože kružnice k prochází body A, B, leží její střed S na ose p úsečky AB. Z podobného důvodu leží střed S také na ose q úsečky AC a na ose r úsečky BC. **Je-li kružnice k opsána trojúhelníku ABC, protínají se osy všech tří stran trojúhelníka ABC v jediném bodě, totiž ve středu S kružnice k.**

Nyní si obráceně zvolme libovolný trojúhelník ABC. Máme už dokázáno, že se osy všech tří stran našeho trojúhelníka protnou v jediném bodě? Bylo by to dokázáno, kdybychom měli zaručeno, že lze našemu trojúhelníku opsati kružnici; neboť pak víme, že osa každé strany prochází středem té kružnice. Ale snadno provedeme důkaz i bez předpokladu, že možnost opsati trojúhelníku kružnici je vám už známa. Za tím účelem si sestrojíme napřed pouze osy dvou stran, třeba osu p strany AB a osu q strany AC. Jest $AB \perp p$, $AC \perp q$, tedy ke každé z obou přímek máme z bodu A jinou kolmici. Proto přímky p a q nejsou rovnoběžné. Tedy jsou různoběžné a mají průsečík, který si označíme S. Přímka p je geometrické místo toho bodu X, pro který je $\overline{AX} = \overline{BX}$; přímka q je geometrické místo toho bodu X, pro který je $\overline{AX} = \overline{CX}$. Protože bod S leží na přímce p, je délka $\overline{BS}$ rovná délce $\overline{AS}$; protože bod S leží na přímce q, je také délka $\overline{CS}$ rovná délce $\overline{AS}$. Proto je $\overline{BS} = \overline{CS}$ a z toho plyne, že bod S leží také na ose r úsečky BC, neboť r je geometrické místo toho bodu X, pro který je $\overline{BX} = \overline{CX}$. Tím je dokázáno, že osy všech tří stran trojúhelníka ABC mají společný bod S. Mimoto je dokázáno, že všecky tři délky $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ jsou si rovny, takže kružnice k se středem S a poloměrem $\overline{AS}$ prochází (nejen bodem A, nýbrž také) bodem B a bodem C, t. j. k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC. Tedy jsme dokázali, že lze každému trojúhelníku opsati kružnici a také jsme se naučili, jak se tato kružnice sestrojí.

U pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou AB leží střed opsané kružnice na obvodě trojúhelníka, a to uprostřed přepony. Abychom si to odůvodnili, označme si písmenem k kružnici nad průměrem AB a písmenem S její střed, tedy střed přepony. Víme, že k je geometrické místo toho bodu X, pro který $\sphericalangle AXB = 90°$. Protože $\sphericalangle ACB = 90°$, leží (vedle bodů A, B také) bod C na kružnici k, t. j. k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC.

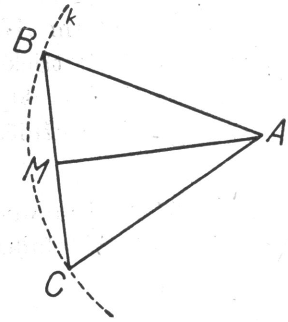
Dá se dokázati, že u ostroúhlého trojúhelníka leží střed opsané kružnice vždy uvnitř trojúhelníka, a u tupoúhlého trojúhelníka vždy vně.

V obr. 122 máme trojúhelník ABC. S každého vrcholu je spuštěna kolmice na protější stranu a paty těchto kolmic jsou označeny písmeny P, R, Q. Tyto tři kolmice AP, BR, CQ se jmenují **výšky trojúhelníka** ABC; určitěji pravíme, že na př. AP je výška příslušná straně BC; bod P je pata té výšky.



Obr. 122.

V obr. 122 všecky tři výšky trojúhelníka ABC se protínají v jediném bodě H. Dokážeme si, že tomu tak je u každého trojúhelníka; bod H se proto jmenuje **průsečík výšek** trojúhelníka ABC. Abychom dospěli k důkazu, veďme si každým vrcholem trojúhelníka rovnoběžku s protější stranou. Tyto tři rovnoběžky omezí nový trojúhelník, který je v obr. 122 označen XYZ. Protože $AB \parallel YC$, $BC \parallel AY$, je $ABCY$ rovnoběžník a proto je $\overline{AY} = \overline{BC}$. Protože $AC \parallel ZB$, $BC \parallel ZA$, je $ACBZ$ rovnoběžník a proto je $\overline{AZ} = \overline{BC}$. Tedy $\overline{AY} = \overline{AZ}$, t. j. bod A je střed strany YZ trojúhelníka XYZ. Protože $AP \perp BC$, $ZY \parallel BC$, je $AP \perp ZY$. Tedy přímka AP je osou strany YZ trojúhelníka XYZ. Stejně se dokáže, že přímky BR a CQ jsou osami ostatních stran trojúhelníka XYZ. Protože však osy tří stran trojúhelníka mají společný bod, musí všecky tři přímky AP, BR, CQ procházeti jedním bodem, což jsme měli dokázati.



Obr. 123.

U rovnoramenného trojúhelníka výška příslušná základně půlí tuto základnu. Budiž ABC rovnoramenný trojúhelník se základnou BC (viz obr. 123). Protože $\overline{AB} = \overline{AC}$, můžeme si sestrojiti kružnici k se středem A, která prochází oběma body B, C. Úsečka BC je tětivou kružnice k. Je-li M její střed, je $AM \perp BC$ podle poučky ze začátku tohoto paragrafu. To jsme však měli dokázati.

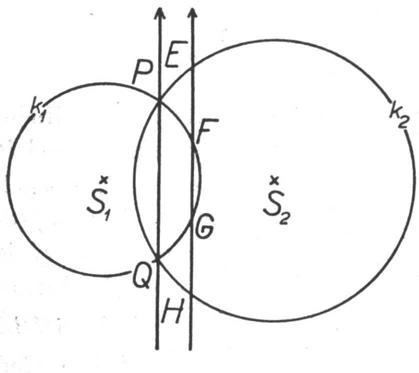
Cvičení k § 10.

I. Osa tětivy kružnice.

195. Narýsujte si oblouk kružnice třeba pomocí korunové mince. Jak můžete určiti střed kružnice?

196. Uvnitř kružnice k si zvolte bod U. Sestrojte tětivu kružnice k půlenou bodem U.

197. Kružnice k_1 se středem S_1 a kružnice k_2 se středem S_2 protínají se v bodech P, Q. (Viz obr. 124.) a) Dokažte, že $PQ \perp S_1S_2$. b) Dokažte, že v obr. 124 je $\overline{EF} = \overline{GH}$.



Obr. 124.

198. Kružnice k_1 a k_2 jsou soustředné. $C_1C_2D_2D_1$ je přímka; body C_1, D_1 leží na kružnici k_1; body C_2, D_2 leží na kružnici k_2. Dokažte, že $\overline{C_1C_2} = \overline{D_2D_1}$.

199. AB, CD jsou dvě tětivy kružnice o středu S. Dokažte:

a) Je-li $\overline{AB} = \overline{CD}$, jsou obě přímky AB, CD stejně vzdáleny od bodu S. [Je-li L střed úsečky AB a je-li M střed úsečky CD, dokažte, že $SLA \cong SMC$.]

b) Jsou-li obě přímky AB, CD stejně vzdáleny od bodu S, je $\overline{AB} = \overline{CD}$. [Zase dokažte, že $SLA \cong SMC$.]

II. Geometrická místa.

200. Je dána kružnice k. Určete geometrické místo středu tětivy XY, jejíž délka je pevně dána. [Užijte výsledku cvič. **199** a).]

201. Na dané kružnici k se středem S je dán bod A. Proměnná tětiva AX

prochází stále bodem A. Dokažte, že geometrické místo středu proměnné tětivy je kružnice nad průměrem AS.

202. Proměnná tětiva dané kružnice k stáke prochází daným bodem M. Sestrojte geometrické místo středu proměnné tětivy. (Proveďte dvakrát: bod M budiž napřed uvnitř kružnice k, potom vně.)

203. Jsou dány dvě přímky $EF \perp EG$. Úsečka dané délky se pohybuje tak, že stále leží jeden krajní bod na přímce EF, druhý na přímce EG. Dokažte, že geometrické místo středu proměnné úsečky je kružnice se středem E.

III. Metoda dvou geometrických míst. (Viz též úlohy **211** až **213**.)

204. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 6 cm. Určete bod P vzdálený 4 cm od vrcholu A a 2 cm od strany BC. (Dvě řešení.)

205. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 4 cm. Určete bod K na přímce AB vzdálený 2 cm od přímky AC. (Dvě řešení.)

206. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 4 cm. Určete bod L vzdálený 2 cm od přímky AB a 3 cm od přímky AC. (Čtyři řešení.)

207. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 45$ mm, $\overline{BC} = 5$ cm. Sestrojte bod M ve vzdálenosti 6 cm od vrcholu B tak, aby M byl stejně vzdálen od přímky AC jako od přímky BC. (Čtyři řešení.)

IV. Kružnice procházející dvěma body.

208. Zvolte si čtyrúhelník $EFGH$. Sestrojte kružnici, která má střed někde na obvodě čtyrúhelníka a která prochází

a) vrcholy E, F; b) vrcholy E, G.

209. Narýsujte si kružnici k a na ní si zvolte dva body C, D. Sestrojte kružnici m, která má střed na kružnici k a která protíná kružnici k v bodech C, D.

210. Zvolte si dva body A, B a přímku p. Sestrojte kružnici, která prochází oběma danými body a má střed na přímce p. Je konstrukce vždy možná?

211. Je dána úsečka UV; $\overline{UV} = 5$ cm. Máte sestrojiti kružnici s poloměrem 32 mm, která prochází bodem U i bodem V. [První podmínka pro střed S: kružnice prochází oběma body U, V. Druhá podmínka pro střed S: kružnice s poloměrem 32 mm prochází bodem U. Každá podmínka určí jedno geometrické místo. Kolik řešení má úloha? Bylo možné postupovati jinak?]

212. Narýsujte si rovnoramenný trojúhelník PQR; $\overline{PQ} = \overline{PR} = 3$ cm; $\overline{QR} = 5$ cm. Sestrojte kružnici, která prochází bodem P i bodem Q a jejíž střed je tak daleko od přímky PQ jako od přímky QR. (Dvě řešení.)

213. Narýsujte si znovu trojúhelník PQR takový jako ve cvič. **212.** Sestrojte kružnici, která prochází bodem P i bodem R a jejíž střed vyhovuje podmínce $\sphericalangle QSR = 90°$. (Dvě řešení.)

V. Kružnice opsaná trojúhelníku a pod.

214. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo

a) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CA} = 7$ cm;

b) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{CA} = 8$ cm.

Sestrojte opsanou kružnici a změřte její poloměr.

215. Narýsujte si čtyrúhelník $PQRS$ tak, aby nebylo $PQ \parallel RS$. Sestrojte bod H tak, aby bylo

a) $\overline{HP} = \overline{HQ}$, $\overline{HR} = \overline{RS}$;

b) $HP = \overline{HQ}$, $\sphericalangle RHS = 90°$.

216. Na kružnici si zvolte čtyři body E, F, G, H. Dokažte, že osy úseček EF, EG, EH, FG, FH, GH všecky se protínají v jednom bodě.

217. Zvolte si čtyři různoběžky tak, aby žádné tři z nich nešly týmž bodem. Vynecháte-li jednu z nich, omezí ostatní tři trojúhelník. Takové trojúhelníky máte celkem čtyři. Opište každému z nich kružnici shledáte, že všecky ty čtyři kružnice mají společný bod. (Nemáte nic dokazovat, pouze máte provésti konstrukci. Velký obrazec!)

VI. Výšky trojúhelníka.

218. Kde leží průsečík výšek pravoúhlého trojúhelníka?

219. U ostroúhlého trojúhelníka leží průsečík výšek uvnitř trojúhelníka, u tupoúhlého vně. Proč?

220. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 45°$, H je průsečík výšek, D je pata výšky příslušné straně AB. Dokažte, že $\overline{BD} = \overline{DH}$. (Narýsujte si trojí obrazec: poprvé ať oba úhly β, γ jsou ostré, podruhé ať je β tupý, potřetí ať je γ tupý.)

221. Uvnitř rovnoběžníka $PQRS$ je bod T v takové poloze, že $QT \perp QR$, $ST \perp RS$. Dokažte, že $PT \perp QS$.

222. Je-li D průsečík výšek trojúhelníka ABC, dokažte, že C je průsečík výšek trojúhelníka ABD.

§ 11. Tečny ke kružnici.

Zvolte si přímku p a mimo ni bod S (viz obr. 125). Spusťte s bodu S kolmici na přímku p a patu označte P, takže $\overline{SP}$ je vzdálenost bodu S od přímky p. Bod P rozdělí přímku p na dvě polopřímky. Probíhá-li bod X kteroukoli z těch polopřímek, počínajíc polohou P, tu je vám známo, že se vzdálenost $\overline{SX}$ stále zvětšuje. Zvolíme-li si nyní libovolnou délku r větší než $\overline{SP}$, budou na přímce p dva body X takové, že

$$\overline{SX} = r \tag{*}$$

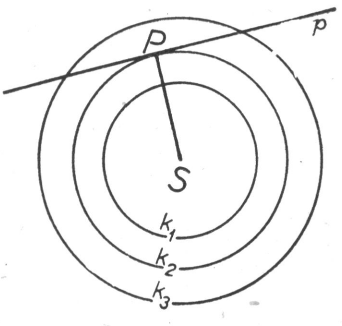
(po jednom na každé z obou polopřímek); zvolíme-li si $r = \overline{SP}$, bude platit (*) pro jediný bod X na přímce p, totiž pro bod P; zvolíme-li si konečně $r < \overline{SP}$, nebude (*) platit pro žádný bod X na přímce p. Zvolíme-li si tři délky r_1, r_2, r_3 tak, že je

$$r_1 < \overline{SP},\ r_2 = \overline{SP},\ r_3 > \overline{SP}$$

a opíšeme-li kolem středu S tři kružnice k_1, k_2, k_3 s poloměry r_1,

r_2, r_3, tu přímka p nemá s kružnicí k_1 žádný společný bod, s kružnicí k_2 má jediný společný bod P a s kružnicí k_3 má společné dva body. Říkáme, že přímka p **leží mimo kružnici** k_1, je **tečnou** kružnice k_2 (a to tečnou v bodě P) a je **sečnou** kružnice k_3.

Přímka je sečnou kružnice, je-li její vzdálenost od středu menší než poloměr. Přímka je tečnou kružnice, je-li její vzdálenost od středu rovna poloměru. Přímka leží mimo kružnici, je-li její vzdálenost od středu větší než poloměr.



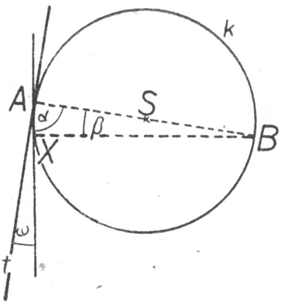
Obr. 125.

Na kružnici k se středem S a poloměrem r si zvolme bod A. Mysleme si bodem A vedeny rozmanité přímky. Nejprve veďme bodem A přímku t kolmou na přímku SA; patou kolmice spuštěné s bodu S na přímku t je patrně bod A, takže vzdálenost přímky t od bodu S je rovna poloměru r; proto t je tečna kružnice k v bodě A. Vedeme-li si však bodem A kteroukoli jinou přímku s, tu vzdálenost bodu S od přímky s je menší než délka $\overline{SA}$, t. j. menší než r, takže s je sečnou kružnice k. Kružnice se středem S má v každém svém bodě určitou **tečnu; je to kolmice vztyčená v bodě *A* ke přímce *SA*;** každá jiná přímka vedená bodem A je sečnou kružnice.

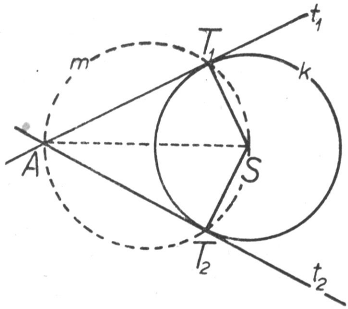
V obr. 126 je narýsována tečna t ke kružnici k v bodě A této kružnice. Ačkoli přímka t a kružnice k mají společný pouze jediný bod A, přece se zdá, jako by ty dvě čáry měly společnou celou krátkou úsečku. Můžeme si to vysvětliti takto. Zvolme si na kružnici k bod X blízko bodu A. Veďme si průměr AB kružnice k. Podle Thaletovy věty je $\sphericalangle AXB = 90°$ a z toho následuje, že v obr. 125 je $\alpha + \beta = 90°$. Podle obrazce je však také $\alpha + \omega = 90°$, takže musí býti $\omega = \beta$. Je-li bod X velmi blízko bodu A, je zřejmě úhel β velmi malý, takže také úhel ω je velmi malý. Ačkoli tedy přímka AX nesplyne přesně s tečnou t, tvoří s ní velmi malý úhel, takže přibližně splyne přímka AX s tečnou t.

Na rozdíl od tečny rozeznáme sečnu od kružnice velmi jasně už v malé blízkosti společného bodu. Proto říkáme, že **kružnice a sečna se protínají**, kdežto **kružnice a tečna se dotýkají**.

Tečnu t k narýsované kružnici rovnoběžnou s danou přímkou p (kolik je takových tečen?) můžeme sestrojiti docela přesně (ale ne euklidovsky) posouváním trojúhelníkového pravítka. Ale abychom přesně určili **bod dotyku** (t. j. ten bod, ve kterém je t tečnou) je nezbytné spustiti se středu kružnice kolmici na přímku p.



Obr. 126.



Obr. 127.

Narýsujte si kružnici k se středem S a vně kružnice si zvolte bod A. Bodem A procházejí dvě tečny t_1, t_2 ke kružnici k. Můžeme je sestrojiti docela přesně (ale ne euklidovsky) pouhým přiložením pravítka. K určení bodů dotyku je však třeba spustiti se středu S kolmice na obě tečny. Ale také euklidovská konstrukce tečen vedených z bodu A je snadná (viz obr. 127). Tu si sestrojíme napřed body dotyku T_1, T_2. Postupujeme tak, že si nejprve narýsujeme pomocnou kružnici m nad průměrem AS. (To dovedeme provésti euklidovsky.) Víme, že m je geometrické místo toho bodu X, pro který platí $\sphericalangle AXS = 90°$. Protože $\sphericalangle AT_1S = 90°$, $\sphericalangle AT_2S = 90°$, leží oba body T_1, T_2 na kružnici m. **Tedy body dotyku tečen vedených ke kružnici k z bodu A jsou průsečíky kružnice k s pomocnou kružnicí m nad průměrem AS, kde S je střed kružnice k.** Tečny samy dostaneme, spojíme-li bod A se sestrojenými body dotyku.

Všimněme si znovu obr. 127! Máme v něm dva pravoúhlé trojúhelníky AST_1, AST_2, které mají společnou přeponu; mimoto je $\overline{ST_1} = \overline{ST_2}$ (proč?). Tedy oba pravoúhlé trojúhelníky se shodují v přeponě a v jedné odvěsně, takže je

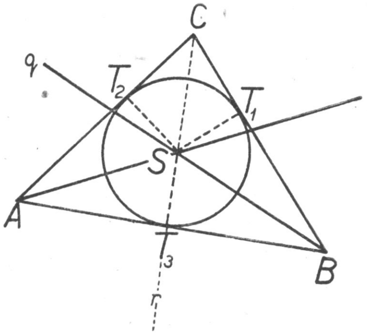
$$AST_1 \cong AST_2. \qquad (*)$$

Ze vztahu (*) následuje $\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$. **Bod vně kružnice je stejně vzdálen od bodů dotyku obou tečen vedených z něho ke kružnici.** Mimoto ze vztahu (*) následuje

$$\sphericalangle SAT_1 = \sphericalangle SAT_2,$$

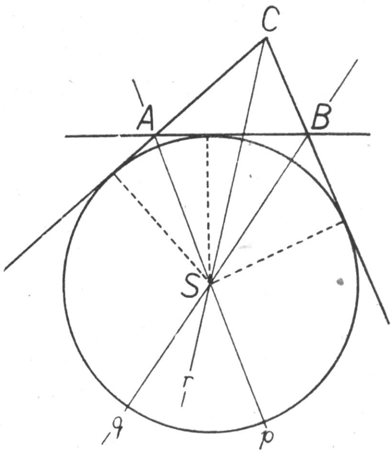
t. j. polopřímka AS je osou úhlu $\sphericalangle T_1AT_2$.

Zvolte si trojúhelník ABC (viz obr. 128). Chceme si odůvodnit, že mu lze vždy vepsat kružnici a také se chceme naučit, jak se vepsaná kružnice k sestrojí. Střed S kružnice k musí býti někde uvnitř trojúhelníka. Vzdálenosti bodu S od všech tří stran trojúhelníka musí býti stejné; neboť přímky AB, AC, BC mají býti tečnami kružnice k. Obráceně, najdeme-li uvnitř trojúhelníka ABC takový bod S, že jeho vzdálenosti od stran trojúhelníka se všecky tři rovnají téže délce r, tu kružnice se středem S a poloměrem r bude patrně vepsána do trojúhelníka ABC. Tedy hledáme bod S podrobený dvojí podmínce: předně jeho vzdálenost od přímky AB má býti taková jako jeho vzdálenost od přímky AC, za druhé jeho vzdálenost od přímky AB má býti taková jako jeho vzdálenost od přímky BC. Proto bod S dostaneme jako průsečík dvou geometrických míst. Sestrojíme si napřed polopřímku p, která je osou úhlu α. Víte, že každý bod polopřímky p je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky AC; polopřímka p je částí geometrického místa bodu stejně vzdáleného od přímky AB jako od přímky AC. Víte, že toto geometrické místo se skládá ze dvou přímek (ze kterých?). Ale je zbytečné rýsovati to geometrické místo celé, neboť hledaný bod S má ležeti uvnitř trojúhelníka ABC, kdežto ta část geometrického místa, která v obr. 128 není narýsována, jistě je vně trojúhelníka. Dále si narýsujeme polopřímku q, která je osou úhlu β. Zase každý bod polopřímky q je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky BC, a každý bod



Obr. 128.

uvnitř trojúhelníka ABC stejně vzdálený od AB jako od BC leží na polopřímce q. Je patrné, že se polopřímky p a q protnou v určitém bodě S uvnitř trojúhelníka ABC. Protože bod S leží na polopřímce p, je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky AC; protože S leží na polopřímce q, je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky BC. Tedy bod S je stejně vzdálen od přímky AC jako od přímky BC; a protože leží uvnitř trojúhelníka ABC, leží také na ose r úhlu γ. Bod S je stejně vzdálen od všech tří stran trojúhelníka; v obr. 128 jsou spuštěny s bodu S kolmice na všecky tři strany a jejich paty jsou označeny T_1, T_2, T_3. Všecky tři úsečky ST_1, ST_2, ST_3 mají stejnou délku r. Sestrojíme-li si kružnici k se středem S a poloměrem r, je k kružnice vepsaná do trojúhelníka ABC. Tedy jsme poznali, že do každého trojúhelníka lze vepsati kružnici, a umíme tuto kružnici narýsovat. Mimoto jsme shledali: **Osy všech tří úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, totiž ve středu kružnice vepsané.**



Obr. 129.

Kružnice vepsaná do trojúhelníka ABC není jediná kružnice, která se dotýká všech tří přímek AB, AC, BC. Jsou ještě tři další takové kružnice, kterým se říká **kružnice připsané** trojúhelníku ABC. Každá z nich je připsána k jedné ze tří stran trojúhelníka. V obr. 129 vidíte kružnici připsanou ke straně AB. Její střed S dostaneme, sestrojíme-li si kterékoli dvě ze tří polopřímek, jež jsou v obr. 129 označeny p, q, r. Při tom je r osa vnitřního úhlu při vrcholu C, kdežto p, q jsou osy vnějších úhlů při vrcholech A, B. Odůvodněte sami, proč je bod S stejně vzdálen od všech tří přímek AB, AC, BC.

Cvičení k § 11.

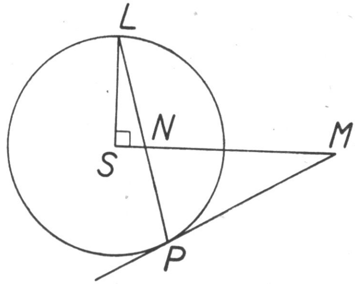
I. Tečna kružnice v daném bodě.

223. AB je průměr kružnice k. Dokažte, že tečny kružnice k v bodech A, B jsou mezi sebou rovnoběžné.

224. Na kružnici k s průměrem AB si zvolte bod C. Sestrojte kružnici m, která má střed v bodě A a prochází bodem C. Dokažte, že přímka BC je tečnou kružnice m v bodě C.

225. Narýsujte si dvě soustředné kružnice, menší si označte k_1 a větší k_2. Na kružnici k_1 si zvolte bod E a sestrojte tečnu t kružnice k_1 v bodě E. Označte F, G průsečíky přímky t s kružnicí k_2. Dokažte, že $\overline{EF} = \overline{EG}$.

226. Na kružnici k se středem S si zvolte dva body H, K. Sestrojte tečnu t kružnice k v bodě H. Označte P patu kolmice spuštěné s bodu K na přímku t. Dokažte, že polopřímka KH je osou úhlu $\sphericalangle SKP$. [Oba úhly $\sphericalangle SKH$, $\sphericalangle HKP$ porovnejte s úhlem $\sphericalangle KHS$.]



Obr. 130.

227. V obr. 130 S je střed kružnice a $\sphericalangle LSM = 90°$. Dokažte, že $\overline{MN} = \overline{MP}$. [Spojte SP.]

II. Tečny rovnoběžné s danou přímkou.

228. Narýsujte si kružnici k s poloměrem 37 mm a zvolte si přímku p třeba mimo kružnici k. Sestrojte euklidovsky ten bod kružnice k, ve kterém je tečna rovnoběžná s přímkou p a sestrojte tu tečnu. (Dvě řešení.)

III. Tečny vedené z bodu ke kružnici.

229. Narýsujte si kružnici k (střed S, poloměr 34 mm). Zvolte si bod H ve vzdálenosti 56 mm od bodu S. Sestrojte euklidovsky obě tečny vedené ke kružnici k z bodu H. Změřte vzdálenosti bodu H od bodů dotyku.

230. Rovnoběžník je opsán kružnici. Dokažte, že je to kosočtverec, jehož úhlopříčky se protnou ve středu kružnice.

231. Ke kružnici se středem S jsou vedeny dvě mezi sebou rovnoběžné tečny a ještě jedna tečna, která protne prvé dvě v bodech G, H. Dokažte, že $\sphericalangle GSH = 90°$.

IV. Kružnice vepsaná do trojúhelníka a pod.

232. a) Sestrojte znovu trojúhelník ABC podle údajů ze cvič. **214** a). Sestrojte kružnici vepsanou a všecky tři kružnice připsané.

b) Opakujte s trojúhelníkem ze cvič. **214** b).

233. Narýsujte si dvě rovnoběžky p, q a třetí přímku r s nimi různoběžnou. Sestrojte kružnici, která se dotýká všech tří přímek p, q, r. (Dvě řešení.)

OBSAH:

		Strana
§ 1.	Dvě přímky proťaté příčkou	3
	Cvičení k § 1 (1—30)	8
§ 2.	Úhly mnohoúhelníka	11
	Cvičení k § 2 (31—63)	17
§ 3.	Shodné trojúhelníky	19
	Cvičení k § 3 (64—103)	24
§ 4.	Grafické určování vzdáleností a výšek	28
	Cvičení k § 4 (104—122)	29
§ 5.	Pokračování o trojúhelníku	31
	Cvičení k § 5 (123—144)	35
§ 6.	Rovnoběžník	37
	Cvičení k § 6 (145—161)	43
§ 7.	Konstrukce	44
	Cvičení k § 7 (162—174)	50
§ 8.	Souměrnost osová a souměrnost středová	52
	Cvičení k § 8 (175—180)	56
§ 9.	Geometrická místa	56
	Cvičení k § 9 (181—194)	61
§ 10.	Tětivy kružnice	62
	Cvičení k § 10 (195—222)	66
§ 11.	Tečny ke kružnici	68
	Cvičení k § 11 (223—233)	72