Eduard Čech
Geometrie pro II. třídu středních škol

Státní nakladatelství, Praha, 1949, 92 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501345

EDUARD ČECH

GEOMETRIE

PRO II. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ V PRAZE

GEOMETRIE

PRO II. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

NAPSAL

EDUARD ČECH

SE 127 OBRAZCI

Schváleno výnosem ministerstva školství ze dne 5 února 1943, čís. 11 172/43-II/2
stečně změněný dotisk pro školní rok 1949—50 povolen výnosem ministerstva školství, věd a umění ze dne 13. ledna 1949, čís. 11 007/49-I/1

Cena Kčs 9,—

1949

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ V PRAZE

Nová učebnice geometrie pro II. třídu střední školy se připravuje až na školní rok 1950—51. Ve školním roce 1949—50 se proto pracuje podle této upravené učebnice. Ale i podle ní je třeba plnit vzdělávací a výchovný úkol matematiky, jak jej stanoví učební osnovy: „Vychovávat k správnému hodnocení produktivní práce a probouzet zájem a pochopení pro účelnou a plánovitou hospodářskou výstavbu naší republiky a pro její brannost. Vychovávat k přesnosti, k hospodárnosti a k správnému hodnocení hospodářských statků. Učit logicky myslit a své myšlenky přesně vyjadřovat.

Učit řešit praktické úkoly zejména z oborů hospodářských a společenských a dát takové vědomosti, znalosti a dovednosti, jakých je třeba k jejich řešení.

Vést k poznání a k pochopení významu funkčních vztahů a jejich vyjadřování; seznámit se základy algebry.

Rozvíjet prostorovou představivost přesným pozorováním a vnímáním rovinných i prostorových útvarů a systematickým studiem jejich vlastností.

Seznámit s důležitými úseky z vývoje matematiky."

Úkolem vyučování geometrie ve II. třídě střední školy je podle učebních osnov: „Pojmy a vlastnosti jednoduchých útvarů, vztahy jejich prvků, uspořádání v soustavu. Osová souměrnost a geometrické konstrukce z ní odvozené. Další vlastnosti a shodnost trojúhelníků, vlastnosti rovnoběžníků. Jednoduché strojné úlohy. Další výcvik v počítání povrchů a objemů krychle a kvádru, obsahů čtverce a obdélníka. (Po celý rok se příležitostně, hlavně na vycházkách, vyměřují vzdálenosti na speciální mapě a srovnávají se se skutečností. Odhadují se výšky předmětů v přírodě.)"

Při úpravě učebnice byly provedeny tyto změny: Z I. dílu byla převzata stať „Osová souměrnost a euklidovské konstrukce". Přidány jsou stati „Početní úlohy o obsahu, povrchu a objemu" a „Úlohy k opakování".

V § 2 se omezí mnohoúhelník na čtyrúhelník, z § 8 a 9 se proberou aspoň cvičení a § 9 se probere tenkrát, ovládají-li žáci učivo dobře.

Příklady v učebnici je ovšem třeba doplnit časovými příklady z výstavby a přestavby našeho hospodářství v duchu socialismu, hlavně příklady z pětiletého plánu.

Pokyny, jak učebnice používat, jsou v „Poznámkách k učebnicím geometrie" (Jednota čs. matematiků a fysiků) a v časopise „Matematika a fysika ve škole".

Vytiskla tiskárna Státního nakladatelství v Praze

A. Osová souměrnost a euklidovské konstrukce.

Geometrie je velmi stará věda. Všecko, čemu se budete v geometrii učit až do IV. třídy, bylo známo už ve starověku. Byli to staří Řekové, kteří vybudovali geometrii v soustavnou vědu. Již kolem roku 300 př. Kr. vydal **Euklid** (vlastně **Eukleides**) soustavnou učebnici geometrie pod názvem **Základy** (řecky **Stoicheia**). Tato kniha vyšla pak v nesčetných vydáních. I nejmodernější geometrické bádání navazuje přímo na Euklida.

Staří Řekové nerýsovali tužkou na papír, nýbrž buďto kreslili své obrazce do jemného písku nebo je ryli do vosku. S tím souvisí, že při konstrukcích, které jsou popsány u Euklida, se neužívá dvou pravítek. Budeme říkat **euklidovská konstrukce** takové konstrukci, při které se užívá pouze dvou základních úkonů:

(1) spojit dva body přímkou,

(2) narýsovat kružnici, je-li dán střed a poloměr.

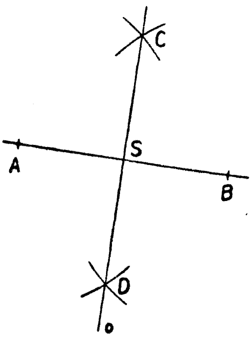
V tomto odstavci se naučíme řešit některé jednoduché úlohy euklidovsky.

K takovým euklidovským konstrukcím pohodlně dospějeme studiem **osové souměrnosti.**

Vezměte list papíru a přeložte jej podél přímky, kterou označte o. Budeme jí říkat osa souměrnosti. Rozevřete papír a položte jej třeba tak, aby osa o byla svislá. Napravo od o si narýsujte výjimečně inkoustem několik bodů a čar a chcete-li, třeba také několik menších kaněk. Nyní papír znovu přeložte, aby se vám inkoust přetiskl i nalevo od o. Po opětném rozevření papíru máte dva obrazce souměrné vzhledem k ose o.

Vezměte nový list papíru a opět jej přeložte podél přímky o. V přeložené poloze papír na jednom místě propíchněte a pak rozevřete. Vzniknou vám dva body A a B (položené souměrně vzhledem k o).

Veďte úsečku *AB*. Vidíte, že přímka *o* je kolmá k *AB* a že prochází středem *S* úsečky *AB*. Říkáme, že *o* je **osa úsečky** *AB*. Nejenom bod *S*, nýbrž každý bod osy *o* je stejně vzdálen od *A* jako od *B*. Ty body papíru, které nejsou na ose *o*, nejsou stejně vzdáleny od *A* jako od *B*. Ty body, které jsou na stejnou stranu od *o* jako je bod *A*, jsou blíže k *A* než k *B*; ty body, které jsou na stejnou stranu od *o* jako je bod *B*, jsou dále od *A* než od *B*.

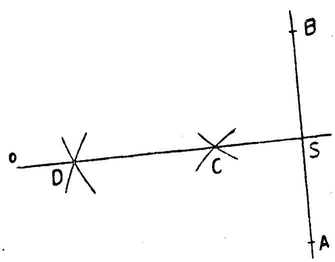


Obr. I.

Zvolte si nyní úsečku *AB* v sešitě. Chceme sestrojit její osu *o*. Jak to provedeme? Protože *o* je přímka, stačí najít dva její body. Odměříme kružítkem libovolnou, jen ne příliš malou délku *r*. Opíšeme s poloměrem *r* kružnici nejprve ze středu *A*, potom ze středu *B*. Tyto dvě kružnice se protnou (viz obr. I.) v bodech *C* a *D*. Vzdálenost $\overline{AC}$ je rovná *r*; také $\overline{BC} = r$. Tedy bod *C* je stejně daleko od *A* jako od *B* a proto leží na *o*. Podobně také *D* je stejně daleko od *A* jako od *B* a také leží na *o*. Tedy spojnice *CD* je hledaná osa úsečky *AB*. Tím jsme se naučili euklidovské konstrukci osy úsečky. Přemýšlejte, jak velká musí býti délka *r*, aby se obě pomocné kružnice opravdu proťaly.

Chceme-li, aby naše konstrukce byla opravdu přesná, musíme volit *r* o dost větší než $\frac{1}{2}\,\overline{AB}$. Proč?

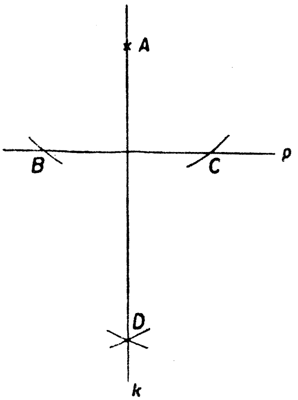
Může se stát, že úsečka *AB* je blízko kraje papíru. Potom by hořejší postup nedal osu *o* dosti přesně. Pak postupujeme trochu jinak, ale podle stejných zásad. Viz obr. II. Popište sami konstrukci a proveďte ji v sešitě.



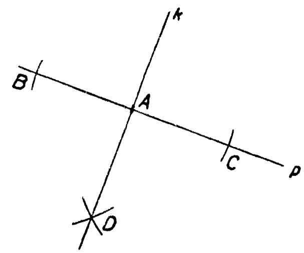
Obr. II.

Protože střed *S* úsečky *AB* je v průsečíku přímky *AB* s osou *o*, umíme už také **euklidovskou konstrukci středu úsečky.** Jak byste rozdělili euklidovsky úsečku na čtyři stejné díly? Jak na osm? Rozdělit euklidovsky úsečku na jiný počet stejných dílů, třeba na tři nebo na pět, budeme se učit až ve vyšších třídách.

Zvolte si přímku p a mimo ni bod A. **Sestrojíme euklidovsky kolmici spuštěnou s bodu A na přímku p.** Opišme ze středu A kružnici s poloměrem libovolným, ale dosti velkým. Tato kružnice protne



Obr. III.



Obr. IV.

(viz obr. III.) přímku p ve dvou bodech B a C. Bod A je stejně vzdálen od B jako od C (proč?), tedy A leží na ose úsečky BC. Ale osa k úsečky BC stojí kolmo na přímce BC, t. j. na přímce p. Tedy žádaná kolmice k je osa úsečky BC. Protože už jeden bod A přímky k známe, stačí si opatřiti ještě jeden bod D (viz obr. III.) přímky k. Jak to uděláme?

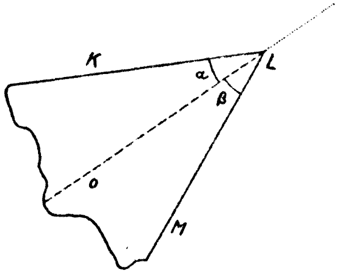
Konstrukce, kterou jsme právě prováděli, dá se beze změny provésti i když bod A leží na přímce p. Tedy dovedeme také **sestrojiti euklidovsky kolmici vztyčenou v bodě A k přímce p** (viz obr. IV.).

V I. třídě jsme se naučili **sestrojit úhel, který má jedno rameno dáno a který je roven danému úhlu.** To byla také euklidovská konstrukce.

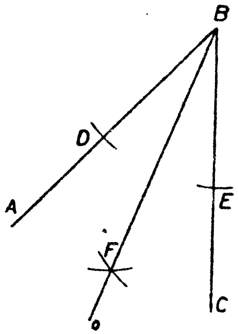
Narýsujte si na listu papíru úhel KLM a vystřihněte si jej (viz obr. V.). Nyní přeložte papír tak, aby se obě ramena kryla. Polopřímka o, podél které jsme přeložili papír, jmenuje se **osa úhlu KLM.** Polopřímka o rozdělí $\sphericalangle KLM$ na dva úhly α a β. Protože můžeme papír přeložit tak, že úhly α a β se kryjí, jest $\alpha = \beta$, tedy **sestrojit osu úhlu znamená ten úhel rozpůlit.**

Prodloužíme-li polopřímku o za bod L, dostaneme polopřímku p (tečkovanou v obr. V.). Je to osa vypuklého úhlu KLM.

Sestrojte si v sešitě úhel ABC. Provedeme **euklidovskou konstrukci osy úhlu** ABC (viz obr. VI.). Opišme s libovolným poloměrem kružnici ze středu B, která protne ramena daného úhlu v bodech D a E (viz obr. VI.). Kdybychom přeložili papír podél hledané osy o, kryla by se polopřímka BA s polopřímkou BC. Protože je $\overline{BD} = \overline{BE}$, kryl by se



Obr. V.



Obr. VI.

bod D s bodem E. Tedy přímka, na které leží hledaná polopřímka o, je osa úsečky DE. Protože jeden bod osy už známe (který?), stačí nalézti ještě jeden její bod F. Jak se to provede? (Viz obr. VI.)

Je zajímavé si všimnout, že konstrukce, které jsme se právě naučili, dá se provést i když daný úhel je přímý. Tím dostaneme znovu jednu konstrukci, kterou jsme už dříve provedli. Kterou?

Máme-li **sestrojit euklidovsky k přímce** p **rovnoběžku bodem** A, můžeme to provésti tak, že spustíme euklidovsky kolmici q s bodu A na přímku p a potom vztyčíme euklidovsky kolmici r v bodě A k přímce q. Přímka r je žádaná rovnoběžka. Jsou jednodušší euklidovské konstrukce rovnoběžky, ale ty nejsou založeny na osové souměrnosti a budeme je probírat až později (viz str. 53, obr. 98 a 99).

Jak byste sestrojili euklidovsky úhel $90°$? Jak úhel $45°$? Jak úhel $135°$? Jak úhel $22\frac{1}{2}°$?

Víme, už, že dva trojúhelníky ABC a DEF, které mají stejně dlouhé strany, jsou **shodné**, t. j. že se dají položit na sebe tak, že se kryjí. Ovšem ale jen ty strany se mohou krýt, které jsou stejně dlouhé.

Narýsujte si do sešitu nejdříve **různostranný trojúhelník** *DEF*, třeba tak, aby bylo

$$\overline{DE} = 5 \text{ cm}, \quad \overline{DF} = 4 \text{ cm}, \quad \overline{EF} = 33 \text{ mm}.$$

Pak si narýsujte na list papíru trojúhelník *ABC* se stranami

$$\overline{BC} = 5 \text{ cm}, \quad \overline{AC} = 4 \text{ cm}, \quad \overline{AB} = 33 \text{ mm}.$$

Trojúhelníky *ABC* a *DEF* jsou shodné. Vystřihněte trojúhelník *ABC* a položte jej na trojúhelník *DEF*. Jde to jen jediným způsobem. Říkejte, který vrchol se s kterým kryje.

Nyní si narýsujte do sešitu **rovnoramenný trojúhelník** *DEF* třeba tak, aby bylo

$$\overline{DE} = \overline{DF} = 45 \text{ mm}, \quad \overline{EF} = 3 \text{ cm}.$$

Co je základna? Co jsou ramena? Na list papíru narýsujte shodný trojúhelník *ABC* se stranami

$$\overline{BC} = \overline{AC} = 45 \text{ mm}, \quad \overline{AB} = 3 \text{ cm}.$$

Vystřihněte trojúhelník *ABC*. Kolikerým způsobem můžete položit *ABC* na *DEF*? Jmenujte oba způsoby. S úhlem *DEF* se jednou kryje úhel při vrcholu *A*, po druhé úhel při vrcholu B trojúhelníka *ABC*. Tedy tyto dva úhly jsou stejné.

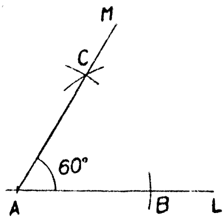
Pamatujte: **Oba úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou stejné.**

Konečně si narýsujte do sešitu rovnostranný trojúhelník *DEF* třeba se stranou 4 cm, a na list papíru shodný rovnostranný trojúhelník *ABC*. Vystřihněte trojúhelník *ABC*. Nyní můžete položit *ABC* na *DEF* **šesterým** způsobem. Můžeme položit trojúhelník *ABC* na *DEF* tak, že se s $\sphericalangle$ *DEF* kryje **libovolný** úhel trojúhelníka *ABC*. Tedy všecky tři úhly trojúhelníka *ABC* jsou stejné. Umíte vypočítat, jak veliké musí být?

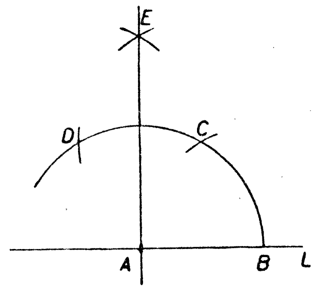
Pamatujte: **Každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníka má velikost 60°.**

Zvolte si v sešitě libovolnou polopřímku *AL*. **Sestrojíme euklidovsky $\sphericalangle LAM = 60^\circ$ s jedním ramenem daným.** Stačí zvolit bod *B* na polopřímce *AL* a sestrojit rovnostranný trojúhelník nad stranou *AB*. V obr. VII. je jen **jedno** řešení dané úlohy. Je ještě jedno řešení?

Úhel 120° můžeme sestrojit buďto jako vedlejší úhel k úhlu 60° nebo jako dvojnásobek úhlu 60°. Jak sestrojíte úhel 30°? Jak úhel 150°? Jak úhel 15°?



Obr. VII.



Obr. VIII.

V obr. VIII. je naznačena **euklidovská konstrukce kolmice vztyčené v bodě *A* k přímce** *AL*, založená na vztahu

$$90^\circ = 60^\circ + 30^\circ.$$

Vyložte sami. Která konstrukce kolmice vztyčené v bodě k přímce se vám líbí lépe? (Viz obr. IV. a obr. VIII.) Ve vyšších třídách poznáte ještě jiné euklidovské konstrukce kolmic.

Cvičení k A.

A1. Popište euklidovskou konstrukci osy úsečky.

A2. Popište euklidovskou konstrukci kolmice vztyčené k přímce *p* v jejím bodě *A*.

A3. Popište euklidovskou konstrukci kolmice spuštěné na přímku *p* s bodu *B*.

A4. Popište euklidovskou konstrukci rozpůlení úhlu.

A5. Popište euklidovskou konstrukci úhlu 60°.

A6. Popište euklidovskou konstrukci úhlu 30°.

A7. Zvolte úsečku *AB* dlouhou 4 cm a sestrojte euklidovsky čtverec nad stranou *AB*.

A8. Zvolte úsečku *AB* dlouhou 5 cm a sestrojte euklidovsky obdélník *ABCD* takový, aby bylo $\overline{BC} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$.

A9. Zvolte úsečku *AB* dlouhou 5 cm a sestrojte euklidovsky čtverec *ABCD*. (Čím je úsečka *AB*?)

A10. Zvolte si trojúhelník*EFG* a sestrojte osy všech tří stran. Protínají se vám v jednom bodě?

A11. Zvolte si trojúhelník HKL a sestrojte osy všech tří úhlů. Protínají se vám v jednom bodě?

A12. Zvolte si kružnici a na ní tři body A, B a C. Sestrojte osy úseček AB a AC. Protínají se vám ve středu dané kružnice?

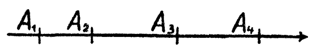
A13. Kolik os souměrnosti má obdélník? Jakou mají polohu?

A14. Kolik os souměrnosti má čtverec? Jakou mají polohu?

A15. Písmeno **A** má svislou osu souměrnosti, písmeno **B** má vodorovnou osu souměrnosti. Hledejte všecka písmena souměrná: (1) podle svislé osy, (2) podle vodorovné osy, (3) i podle svislé i podle vodorovné osy.

§ 1. Dvě přímky proťaté příčkou.

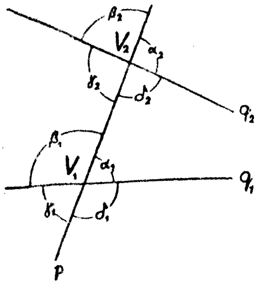
Víte, že body značíme velkými písmeny. Když jsme si v nějakém obrazci chtěli vyznačiti body písmeny, dělali jsme to dosud tak, že jsme užili pro každý bod jiného písmene. Ale můžeme také užíti jednoho písmene k vyznačení několika bodů. K rozlišení těch bodů pak užijeme indexů. Indexy jsou číslice, které píšeme dole vpravo. Na př. A_1, A_2, A_3, A_4 v obr. 1. (Čteme A jedna, A dvě atd.) Indexy píšeme maličké, ale zřetelné!



Obr. 1.

Víte, že body na dané přímce můžeme sledovati ve dvojím pořádku. Rozhodneme-li se pro určitý pořádek, můžeme si to znázorniti šipkou jako v obr. 1. Záleží na tom, na kterém místě přímky je šipka vyznačena? Na čem záleží?

Zvolme si v obr. 1 třeba bod A_2. Přímka se jím rozdělí na dvě polopřímky. Jedna z nich, totiž polopřímka A_2A_3, odpovídá pořádku vyznačenému šipkou; druhá z nich, totiž polopřímka A_2A_1, odpovídá druhému možnému pořádku bodů na naší přímce. O dvou polopřímkách na dané přímce říkáme, že mají (mezi sebou) stejný smysl, když odpovídají obě stejnému pořádku bodů na přímce; říkáme, že mají (mezi sebou) opačný smysl, když každá odpovídá jinému pořádku. Tak na př. mají v obr. 1 polopřímka A_1A_3 *a* A_2A_3 stejný smysl, odpovídající vyznačenému pořádku. Také polopřímky A_3A_1 *a* A_4A_1 mají stejný smysl, tentokrát neopovídají zvolenému pořádku. Naproti tomu mají polopřímky A_1A_4 a A_4A_1 opačný smysl (první odpovídá vyznačenému pořádku, druhá mu neodpovídá).



Obr. 2.

V obr. 2 vidíme tři přímky. Jedna z nich je označena p, ostatní dvě jsou označeny q_1 a q_2. Přímky p a q_1 se protnou v bodě, který je označen V_1. Přímky p a q_2 se protnou v bodě, který je označen V_2. (Přímky q_1 a q_2 by se v našem případě také proťaly, kdybychom si obrazec prodloužili. Ale na tom nezáleží; přímky q_1 a q_2 v takovém obrazci by také mohly býti rovnoběžné.) Máme-li takový obrazec, říkáme přímce p příčka; q_1 a q_2 nazveme proťaté přímky. Celý obrazec se tedy jmenuje: dvě přímky proťaté příčkou.

Při vrcholu V_1 máme čtyři úhly, které jsou v obrazci označeny α_1, β_1, γ_1, δ_1. Také při vrcholu V_2 máme čtyři úhly, v obrazci označené α_2, β_2, γ_2, δ_2. Celkem máme v obrazci osm úhlů; každý z nich má jedno rameno v příčce a druhé rameno v jedné z obou proťatých přímek.

Z těchto osmi úhlů si můžeme mnoha způsoby vybrati dva. Tak dostaneme rozmanité dvojice úhlů. Některé z těch dvojic mají určitá jména, která si musíte zapamatovat. Jestliže oba úhly v dvojici mají stejný vrchol (ať už je to vrchol V_1 či vrchol V_2), je to buďto dvojice vedlejších úhlů nebo dvojice vrcholových úhlů. Oba ty názvy už znáte.

S novými jmény se tedy setkáme pouze u těch dvojic, kde jeden úhel má vrchol V_1 a druhý vrchol V_2. Důležité jsou především tyto čtyři dvojice:

$$\alpha_1, \alpha_2; \quad \beta_1\ \beta_2; \quad \gamma_1, \gamma_2; \quad \delta_1, \delta_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **souhlasných úhlů.** U souhlasných úhlů mají ramena ležící v příčce stejný smysl; ramena ležící v proťatých přímkách leží obě na stejné straně od příčky.

Dále jsou důležité tyto čtyři dvojice:

$$\alpha_1, \gamma_2; \quad \beta_1, \delta_2; \quad \gamma_1, \alpha_2; \quad \delta_1, \beta_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **střídavých úhlů.** U střídavých úhlů mají ramena ležící v příčce opačný smysl; ramena ležící v proťatých přímkách leží každé na jiné straně od příčky.

Z ostatních dvojic si pojmenujeme ještě pouze dvojice:

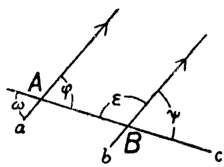
$$\alpha_1, \delta_2; \quad \beta_1, \gamma_2.$$

Říkáme, že to jsou dvojice **přilehlých úhlů.** U přilehlých úhlů ramena ležící v příčce obsahují úsečku V_1V_2; ramena ležící v proťatých přímkách leží obě na stejné straně od příčky.

Často se vyskytují obrazce, ve kterých jsou dvě přímky, o kterých je nám známo, že jsou rovnoběžné. Abychom měli tu rovnoběžnost dobře na paměti, děláme si na obou rovnoběžkách šipky (viz obr. 3 a jiné). Na jedné z nich si zvolíme šipku libovolně, ale na druhé přímce uděláme šipku tak, aby obě šipky vyznačovaly souhlasný pořádek. Takový souhlasný pořádek dostaneme, představíme-li si, že se dva body pohybují současně, každý po jedné z obou rovnoběžek, a to tak, že jsou stále stejně od sebe vzdáleny.

V obrazcích, které sami rýsujete, můžete si rovnoběžnost vyznačit výrazněji, užijete-li barevné tužky. (Obě šipky stejnou barvou!) Někdy se vyskytují v témž obrazci dva páry rovnoběžek. Tak je tomu na př. v obr. 16; jeden pár rovnoběžek je vyznačen jednoduchými šipkami, druhý pár dvojitými. Ve vlastním obrazci můžete užíti dvou různých barev.

V obr. 3 vidíte, stejně jako v obr. 2, dvě přímky proťaté příčkou; ale tentokrát jsou proťaté přímky mezi sebou rovnoběžné. Budeme nyní obr. 3 zkoumat a to tak, že si pokaždé všimneme jedné dvojice úhlů. Výsledkem toho zkoumání budou poznatky, které si musíte dobře vštípiti v paměť, protože, jak uvidíte na příkladech, dá se jich užít k řešení rozmanitých úloh. Takovým důležitým poznatkům říkáme poučky. Některé poučky již znáte. Uveďme si dvě takové známé poučky.



Obr. 3.

Vrcholové úhly jsou si rovny. (Na př. $\omega = \varphi$ v obr. 3.)

Vedlejší úhly jsou výplňkové. (Na př. $\varepsilon + \varphi = 2R$ v obr. 3.)

Všimněme si nyní v obr. 3 dvojice souhlasných úhlů φ, ψ. Posouváme-li úhel φ podél příčky c tak daleko, až vrchol přejde z polohy A do polohy B, přejde úhel φ nakonec v úhel ψ. Protože při posouvání zůstává velikost úhlu nezměněna, je $\varphi = \psi$.

Souhlasné úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny.

Nyní si všimněme v obr. 3 dvojice střídavých úhlů ω, ψ. Jest $\omega = \varphi$ (vrcholové úhly), ale také $\psi = \varphi$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami); proto je $\omega = \psi$.

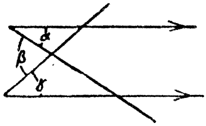
Střídavé úhly mezi rovnoběžkami jsou si rovny.

Dále si všimněme v obr. 3 dvojice přilehlých úhlů φ, ε. Jest $\psi + \varepsilon = 2R$ (vedlejší úhly); ale $\varphi = \psi$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami); proto je $\varphi + \varepsilon = 2R$.

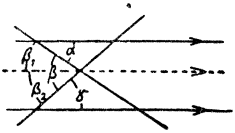
Přilehlé úhly mezi rovnoběžkami jsou výplňkové.

Příklad. V obr. 4a je $\alpha = 32^\circ$, $\gamma = 41^\circ$. Určete β.

Jako mnohé jiné geometrické úlohy, rozřeší se i tato úloha snadno, provedeme-li napřed p o m o c n o u k o n s t r u k c i. To znamená, že do daného obrazce přirýsujeme jednu novou čáru nebo několik nových čar, volených tak, aby se řešení úlohy ulehčilo. V našem případě je vhodné vésti k oběma daným rovnoběžkám třetí rovnoběžku vrcholem



Obr. 4a.



Obr. 4b.

úhlu β (viz obr. 4b). Úhel β se nám rozdělí na dva úhly β_1 a β_2. Jest $\beta_1 = \alpha$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami), dále $\beta_2 = \gamma$ (z téhož důvodu); tedy $\beta_1 = 32^\circ$, $\beta_2 = 41^\circ$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 73^\circ$. Pomocná čára byla v obr. 4b čárkována, aby bylo patrné, že nepatří k původnímu obrazci.

Všimněme si znovu obrazce 3! V tomto obrazci jsou φ a ψ souhlasné úhly mezi rovnoběžkami a proto je $\varphi = \psi$. Nyní si mysleme náš obrazec poněkud změněn. Přímky a a c ať zůstanou stále v původní poloze, ale přímku b si mysleme z původní polohy pootočenu (kolem středu B). Co se stane se souhlasnými úhly φ a ψ? Úhel φ zůstane b e z e z m ě n y, ale velikost úhlu ψ se j i s t ě z m ě n í. Proto už nebude $\varphi = \psi$. Kdežto souhlasné úhly mezi rovnoběžkami jsou stejné, vidíte, že souhlasné úhly mezi různoběžkami stejné býti nemohou. Proto když o dvou souhlasných úhlech víme, že jsou stejné, můžeme z toho soudit, že jsou mezi rovnoběžkami. Říkáme, že poučka o rovnosti souhlasných úhlů mezi rovnoběžkami se dá o b r á t i t. Původní poučka říká, že když víme, že proťaté přímky jsou rovnoběžné, můžeme usoudit, že souhlasné úhly jsou si rovny. Obrácená poučka říká, že když víme, že dva souhlasné úhly jsou si rovny, můžeme usoudit, že proťaté přímky jsou rovnoběžné.

Každá poučka se obrátit nedá. Na př. „Když dva úhly jsou vrcholové, jsou si rovné“ je správná poučka. Obrácení by znělo „Když dva úhly jsou si rovny, jsou to úhly vrcholové“, ale to není správné.

Vyslovme si ještě jednou obrácenou poučku o souhlasných úhlech:

Jsou-li dva souhlasné úhly sobě rovny, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

Nyní se snadno přesvědčíme, že také poučka o střídavých úhlech se dá obrátit:

Jsou-li dva střídavé úhly sobě rovny, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

Abychom se o správnosti této poučky přesvědčili, podívejme se znovu na obr. 3. V něm jsou ω a ψ dva střídavé úhly. Víme, že $\omega = \psi$ a máme se přesvědčit, že $a \parallel b$. Vezmeme si na pomoc úhel φ. Jest $\omega = \varphi$ (vrcholové úhly). Proto je také $\varphi = \psi$, ale φ a ψ jsou souhlasné úhly, takže $a \parallel b$.

Také obrácená poučka o přilehlých úhlech je správná:

Jsou-li dva přilehlé úhly výplňkové, jsou proťaté přímky rovnoběžné.

O správnosti se přesvědčíme zase podle obr. 3. Víme, že

$$\varphi + \varepsilon = 2R$$

a máme se přesvědčit, že $a \parallel b$. Vezmeme na pomoc úhel ψ. Jest

$$\psi + \varepsilon = 2R$$

(vedlejší úhly). Proto je $\varphi = \psi$, ale φ a ψ jsou souhlasné úhly, takže $a \parallel b$.

Vraťme se ještě jednou k obr. 3! Proťaté přímky a, b jsou rovnoběžné a jest $\varphi + \varepsilon = 2R$. Zase si mysleme, že přímky a a c zůstanou každá ve své poloze, ale že se přímka b pootočí kolem středu B. Pootočená přímka b bude s přímkou a různoběžná a proto ji protne. Pootočení přímky b můžeme provésti dvojím způsobem. Předně můžeme přímku b otočit tak, že se úhel ε zmenší, takže bude $\varphi + \varepsilon < 2R$. V tomto případě se protnou ramena úhlů φ a ε ležící v proťatých přímkách. Za druhé můžeme přímku b otočit tak, že se úhel ε zvětší, takže bude $\varphi + \varepsilon > 2R$. Teď se ramena úhlů φ a ε (ležící v přímkách a a b) neprotnou, protože průsečík přímek a a b bude teď na druhé straně od příčky.

Mají-li dva přilehlé úhly součet menší než $2R$, pak se ramena ležící v proťatých přímkách protnou.

Cvičení k § 1.

1. Co můžete říci o smyslu dvou polopřímek, víte-li, že jedna je částí druhé?

2. Na druhé přímce si zvolíme dvě polopřímky opačného smyslu. Které body jsou oběma polopřímkám společné? (Jsou tři možné případy.)

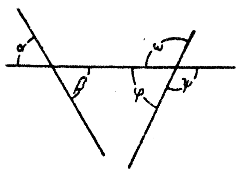
3. M o h o u dvě polopřímky stejného smyslu dohromady vyplniti celou přímku?

4. M u s í dvě polopřímky opačného smyslu dohromady vyplniti celou přímku?

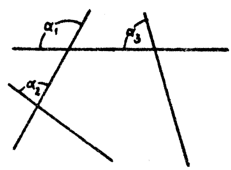
5. Jmenujte všecky dvojice vedlejších úhlů v obr. (str. 10)!

6. Jmenujte všecky dvojice vrcholových úhlů v obr. 2!

7. V obr. 5 udejte název dvojice úhlů:



Obr. 5.



Obr. 6.

a) α, β. b) α, ω. c) ω, φ.
d) β, ψ. e) β, ω. f) β, φ.

8. Narýsujte si od ruky obrazec podobný obr. 6.

α_1, α_2 a α_1, α_3, jsou dvě dvojice souhlasných úhlů.

a) Ve svém obrazci si označte β_1, γ_1, δ_1 ostatní tři úhly, které mají týž vrchol jako úhel α_1. Podobně pro úhly α_2 a α_3.

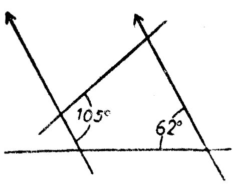
b) Vypište podle svého obrazce všecky dvojice souhlasných úhlů!

c) Vypište všecky dvojice střídavých úhlů!

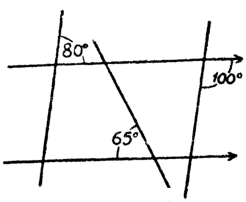
d) Vypište všecky dvojice přilehlých úhlů!

9. Sestrojte si od ruky obrazec podobný obr. 7. Vpište do svého obrazce velikosti všech úhlů! (Celkem máte 16 úhlů.)

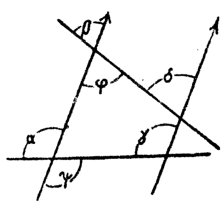
10. Opakujte s obr. 8! (Celkem máte 24 úhly.)



Obr. 7.



Obr. 8.



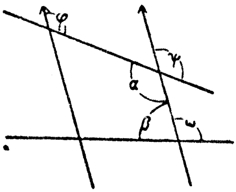
Obr. 9.

Také ve cvičeních 11 až 18 pokaždé si narysujte vlastní obrazec od ruky.

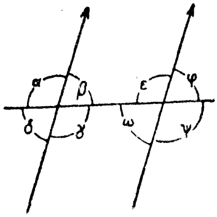
11. V obr. 9 jest $\varphi = 73^0$, $\psi = 114^0$. Určete α, β, γ, δ. Udávejte důvody!

12. V obr. 10 jest $\alpha = 127^0$, $\beta = 87^0$. Určete φ, ψ, ω. Udávejte důvody!

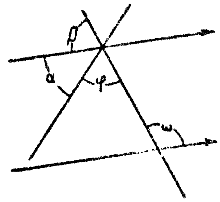
Také ve cvičeních 13 až 18 udávejte důvody!



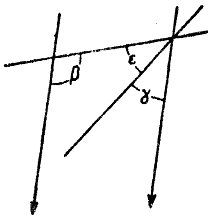
Obr. 10.



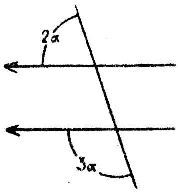
Obr. 11.



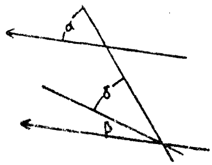
Obr. 12.



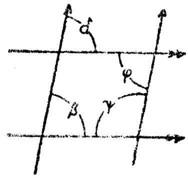
Obr. 13.



Obr. 14.



Obr. 15.



Obr. 16.

13. Následující úlohy se týkají obr. 11, který není přesně rýsován.

a) Jest $\beta = 72^0$; určete ω.

b) Jest $\psi = 106^0$; určete α.

c) Jest $\delta = 63^0$; určete ε.

d) Jest $\varphi = 82^0$; určete γ.

e) Jest $\alpha = 2\varphi$; určete φ.

f) Jest $\gamma - \omega = 72^0$; určete φ.

14. V obr. 12 jest $\varphi = 65^0$, $\omega = 114^0$. Určete α a β.

15. V obr. 13 jest $\beta = 107^0$, $\gamma = 35\frac{1}{2}{}^0$. Určete ε.

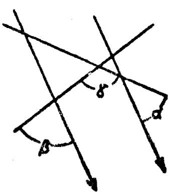
16. V obr. 14 určete α.

17. V obr. 15 je $\alpha = 51^0$, $\gamma = 2\beta$. Určete β a γ.

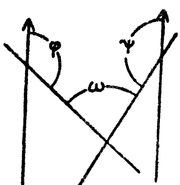
18. V obr. 16 je $\beta = 79\frac{1}{2}{}^0$. Určete δ, φ, a ψ.

Ve cvičeních 19 až 24 rýsujte vlastní obrazce od ruky! Pomocné čáry čárkujte! Udávejte důvody!

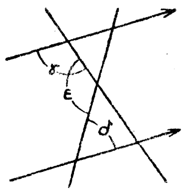
19. V obr. 17 jest $\alpha = 42^0$, $\beta = 76^0$. Určete γ.



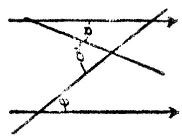
Obr. 17.



Obr. 18.

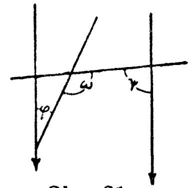


Obr. 19.

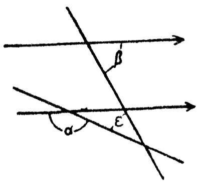


Obr. 20.

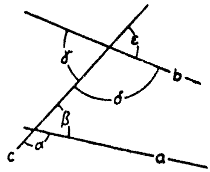
20. V obr. 18 jest $\varphi = 132^0$, $\psi = 154^0$. Určete ω.
21. V obr. 19 jest $\gamma = 112^0$, $\delta = 58^0$. Určete ε.
22. V obr. 20 jest $\alpha = 21^0$, $\delta = 57^0$. Určete φ.
23. V obr. 21 jest $\varphi = 25^0$, $\omega = 121^0$. Určete ψ.
24. V obr. 22 jest $\beta = 63^0$, $\varepsilon = 36^0$. Určete α.



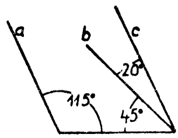
Obr. 21.



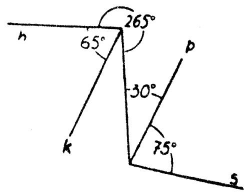
Obr. 22.



Obr. 23.



Obr. 24.



Obr. 25.

25. Dá se následující poučka obrátit?

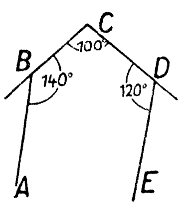
a) Když úhel φ je ostrý, je menší než jeho vedlejší úhel.

b) Když trojúhelník má jeden úhel pravý, má dva úhly ostré.

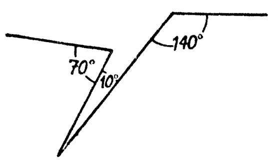
Ke cvič. 26 až 28 rýsujte vlastní obrazce od ruky! Udávejte důvody!

26. V obr. 23, který není přesně rýsován, zkoumejte podle daných číselných údajů, je-li $a \parallel b$. Není-li řekněte, zda se přímky a a b protnou nalevo či napravo od přímky c.

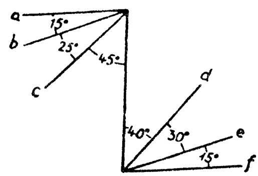
a) $\beta = 60^0$, $\varepsilon = 70^0$.
b) $\beta = 55^0$, $\delta = 125^0$.
c) $\alpha = 115^0$, $\varepsilon = 65^0$.
d) $\beta = 65^0$, $\gamma = 60^0$.



Obr. 26.



Obr. 27.



Obr. 28.

27. a) Zkoumejte, je-li v obr. 24 nějaký pár rovnoběžek!

b) Opakujte s obr. 25!

c) Opakujte s obr. 26! (Pomocná konstrukce: Bodem C veďte rovnoběžku s přímkou AB.)

d) Opakujte s obr. 27! (Zase pomocná konstrukce.)

28. Hledejte páry rovnoběžek v obr. 28!

29. Které nové geometrické výrazy jste poznali v tomto paragrafu? Zapište si je!

30. Zapište si všecky poučky, které jste poznali v tomto paragrafu.

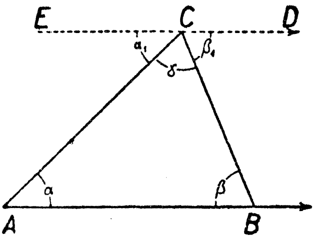
§ 2. Úhly mnohoúhelníka.

Součet úhlů trojúhelníka je $2R$. Tuto důležitou poučku už znáte. Můžeme si ji d o k á z a t i takto (viz obr. 29). Vrcholem C si vedeme přímku ECD rovnoběžnou s přímkou AB. Podle obrazce jest

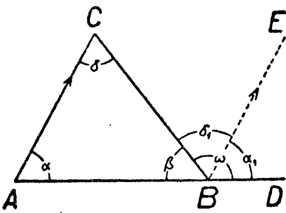
$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 2R.$$

Avšak $\alpha_1 = \alpha$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\beta_1 = \beta$ (z téhož důvodu). Tedy

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$



Obr. 29.



Obr. 30.

Při důkaze právě provedeném jsme vedli pomocnou čáru vrcholem C. Místo toho jsme mohli vésti pomocnou čáru vrcholem A nebo vrcholem B. Proveďte to!

Vnější úhel trojúhelníka se rovná součtu obou protějších úhlů vnitřních. Také tato poučka je vám už známa. Můžeme si ji d o k á z a t i takto (viz obr. 30). Máme dokázati, že $\omega = \alpha + \gamma$. Vrcholem B si vedeme přímku BE rovnoběžnou s přímkou AC. Podle obrazce jest $\omega = \alpha_1 + \gamma_1$. Avšak $\alpha_1 = \alpha$ (proč?), $\gamma_1 = \gamma$ (proč?), takže je opravdu $\omega = \alpha + \gamma$.

Vnější úhel při vrcholu B jsme si mohli také opatřiti prodloužením strany BC za vrchol B (místo prodloužení strany AB). Proveďte důkaz s touto změnou.

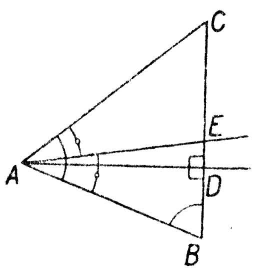
Proveďte důkaz také pro vnější úhel při vrcholu C!

Poučku o vnějším úhlu odvoďte z poučky o součtu úhlů!

Poučku o součtu úhlů odvoďte z poučky o vnějším úhlu!

U pravoúhlého trojúhelníka je jeden úhel roven R, tedy **součet obou ostrých úhlů pravoúhlého trojúhelníka je** R.

Příklad (viz obr. 31). V trojúhelníku ABC úhel při vrcholu A měří 60°, úhel při vrcholu B 70°. AE je osa úhlu $\sphericalangle BAC$. D je pata kolmice spuštěné s bodu A na přímku BC. Vypočtěte $\sphericalangle DAE$.



Obr. 31.

[Polopřímka AE rozdělí $\sphericalangle BAC$ na dva stejné úhly. Abychom to měli na mysli, jsou oba úhly v obrazci vyznačeny malými obloučky, které jsou přerušeny malým kroužkem. Ve svém obrazci můžete užít barevných obloučků (oba stejné barvy). Všimněte si také obou malých čtverečků u bodu D. Ty nám připomínají, že oba úhly s vrcholem D jsou pravé. Zase můžete ve svém obrazci docíliti výraznosti barvou.]

Protože AE je osa úhlu $\sphericalangle BAC$, rovného 60°, je

$$\sphericalangle BAE = 30^\circ, \quad \sphericalangle EAC = 30^\circ.$$

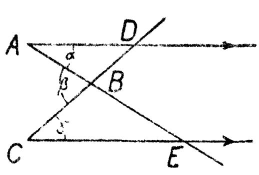
Všimněme si pravoúhlého trojúhelníka ABD. Víme, že jeho úhel při vrcholu B měří 70°. Proto si můžeme vypočítat jeho úhel při vrcholu A. Najdeme

$$\sphericalangle BAD = 20^\circ.$$

Nám běží o úhel $\sphericalangle DAE$. Ten dostaneme, když od úhlu $\sphericalangle BAE$ ubereme úhel $\sphericalangle BAD$. Protože $30 - 20 = 10$, jest $\sphericalangle DAE = 10^\circ$.

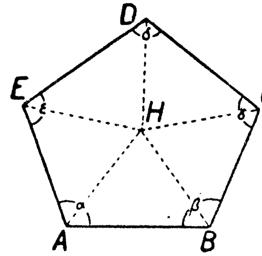
Příklad. V obr. 4a (str. 12) je $\alpha = 32^\circ$, $\gamma = 41^\circ$. Určete β.

Tuto úlohu jsme už řešili tak, že jsme provedli pomocnou konstrukci (viz obr. 4b). Nyní si ji rozřešíme bez pomocné konstrukce. Obrazec máme narýsován znovu (viz obr. 32). Vidíme dva trojúhelníky: ABD a CBE. Kterýkoli z nich nám poslouží. V trojúhelníku ABD máme při vrcholu A úhel α a úhel při vrcholu D se rovná γ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Protože β je vnější úhel, vyjde $\beta = \alpha + \gamma$, tedy $\beta = 73^\circ$. V trojúhelníku CBE máme při vrcholu C úhel γ a úhel při vrcholu E se rovná α (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Protože β je vnější úhel, vyjde zase $\beta = \alpha + \gamma$.



Obr. 32.

Narýsujte si libovolný pětiúhelník $ABCDE$. Jeho **vnitřní úhly** (nebo krátce **úhly**) jsou α, β, γ, δ, ε (viz obr. 33). Budeme hledati, čemu se rovná součet všech pěti úhlů. Za tím účelem si zvolme uvnitř pětiúhelníka bod H. Spojíme-li jej se všemi vrcholy, rozdělí se pětiúhelník na pět trojúhelníků. Součet všech úhlů všech těch trojúhelníků je $5 \times (2R)$ neboli $10\,R$. Ale tento součet se skládá



Obr. 33.

ze dvou úhlů s vrcholem A, které dohromady dají úhel α,
ze dvou úhlů s vrcholem B, které dohromady dají úhel β,
ze dvou úhlů s vrcholem C, které dohromady dají úhel γ,
ze dvou úhlů s vrcholem D, které dohromady dají úhel δ,
ze dvou úhlů s vrcholem E, které dohromady dají úhel ε

a ještě z pěti úhlů s vrcholem H, které dohromady dají $4R$ *neboli* $2 \times (2R)$. Tedy

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + 2 \times (2R) = 5 \times (2R),$$

takže
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 3 \times (2R) = 540^\circ.$$

Stejnou cestou určete součet úhlů

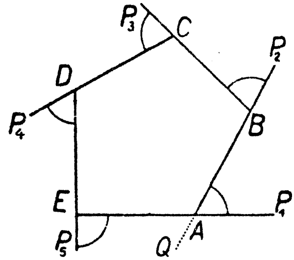
a) u čtyrúhelníka, b) u osmiúhelníka, c) u dvacetiúhelníka.

Při určování součtu úhlů jsme nemusili bod H voliti uvnitř, mohli jsme jej také voliti na obvodě, a to buďto v některém vrcholu nebo také v jiné poloze. Proveďte to

a) pro pětiúhelník, b) pro osmiúhelník, c) pro dvacetiúhelník.

Výsledek: **Součet všech úhlů mnohoúhelníka je $(n - 2) \times 2R$, kde n značí počet stran** (neboli počet úhlů).

Vnější úhel mnohoúhelníka vznikne stejně jako u trojúhelníka. Na př. u pětiúhelníka $ABCDE$ v obr. 34 vnější úhel při vrcholu A je $\sphericalangle BAP_1$ nebo také $\sphericalangle EAQ$. Tyto dva úhly jsou stejné (proč?), takže rýsujeme zpravidla jen jeden, jak je to v obr. 34 provedeno pro vrcholy B, C, D, E. Zejména, když určujeme součet všech vnějších úhlů, bereme u každého vrcholu jen jeden vnější úhel.



Obr. 34.

U každého vrcholu pětiúhelníka máme tedy jeden vnitřní úhel a jeden vnější úhel, a ty dva úhly dají dohromady $2R$ (proč?). Tedy, když sečteme dohromady všech pět úhlů vnitřních i všech pět úhlů vnějších, dostaneme $5 \times (2R)$. Ale my víme, že součet vnitřních úhlů je $3 \times (2R)$. Tedy vnější úhly dají dohromady $2 \times (2R)$ neboli $4R$.

Stejnou cestou určete součet vnějších úhlů.

a) u trojúhelníka, b) u čtyrúhelníka, c) u patnáctiúhelníka.

Výsledek: **Součet všech vnějších úhlů mnohoúhelníka je $4R$ neboli $360°$.**

O správnosti této poučky se můžeme přesvědčiti z názoru. Proveďme si to třeba pro pětiúhelník. Na podlaze se narýsuje velký pětiúhelník $ABCDE$. Nyní se postavme do vrcholu E tak, abychom hleděli k bodu A (viz obr. 34). Potom obejděme celý pětiúhelník kolem dokola (nejprve jdeme do A). Při tom se musíme v každém z vrcholů A, B, C, D pootočit, a to právě o vnější úhel při tomto vrcholu. Když se vrátíme do vrcholu E, hledíme směrem k bodu P_5. Proto se také ve vrcholu E ještě pootočíme o vnější úhel při tomto vrcholu a pak jsme obráceni právě týmž směrem jako na začátku. Celkem jsme se otočili pětkrát, a to dohromady právě o plný úhel, neboli o $4R$. Proto součet všech vnějších úhlů pětiúhelníka je $4R$.

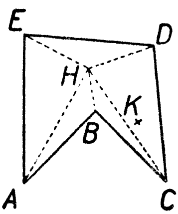
Pojem pravidelného mnohoúhelníka je vám již znám. Víte, že pravidelný mnohoúhelník je vepsán do kružnice k a že jeho vrcholy rozdělí kružnici k na stejné díly. Označme S střed kružnice k. Jsou-li P a Q kterékoli dva vrcholy pravidelného mnohoúhelníka, přejde vhodným otočením kolem středu S vrchol P ve vrchol Q. Tímto otočením přejde vnitřní úhel při vrcholu P ve vnitřní úhel při vrcholu Q a také vnější úhel při vrcholu P přejde ve vnější úhel při vrcholu Q. Proto všecky vnitřní úhly pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny a také všecky vnější úhly pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny. Ostatně se stejným způsobem přesvědčímu, že také délky všech stran pravidelného mnohoúhelníka jsou si rovny.

Velikost vnitřního úhlu pravidelného mnohoúhelníka se ovšem dostane, když se součet všech úhlů dělí jejich počtem. Stejně můžeme počítat velikost vnějšího úhlu; ta tedy je

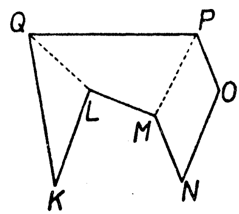
$360°$ děleno počtem stran.

Nejlepší je vypočíst napřed velikost v n ě j š í h o úhlu. Potom určíme vnitřní úhel z toho, že je výplňkový k vnějšímu úhlu.

Mnohoúhelníky, které jsme dosud jedině měli na mysli, jsou t. zv. m n o h o ú h e l n í k y v y p u k l é. Mají tu vlastnost, že když si kteroukoli stranou proložíme přímku, leží celý mnohoúhelník na jedné straně od této přímky. Všecky vnitřní úhly vypuklého mnohoúhelníka jsou d u t é. Ale jsou také mnohoúhelníky jiného tvaru, na př. pětiúhelník *ABCDE* v obr. 35 nebo sedmiúhelník *KLMNOPQ* v obr. 36. První z nich má jen čtyři úhly duté, druhý jen pět ze sedmi.



Obr. 35.



Obr. 36.

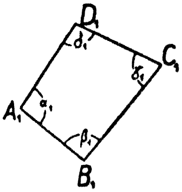
Součet vnitřních úhlů pětiúhelníka *ABCDE* z obr. 35 můžeme nalézti právě tak jako u stejně označeného pětiúhelníka z obr. 33. Ale tam jsme si mohli bod *H* zvolit uvnitř pětiúhelníka l i b o v o l n ě, kdežto nyní si musíme bod *H* zvolit uvnitř pětiúhelníka v h o d n ě; nešlo by na př. zvoliti si místo *H* bod, který je v obr. 35 označen *K*. U sedmiúhelníka z obr. 36 pak dokonce vůbec n e n í m o ž n é, zvolit si uvnitř bod *H* tak, aby se součet úhlů dal počítat úvahou naznačenou v obr. 33 a 35. Přesto poučka o součtu vnitřních úhlů je správná i pro mnohoúhelníky, které nejsou vypuklé. Ale nebudeme si to obecně dokazovat; spokojíme se tím, že se o tom přesvědčíme na příkladě sedmiúhelníka z obr. 36. Úsečky *LQ* a *MP* rozdělí náš sedmiúhelník na trojúhelník *KLQ* a na vypuklé čtyrúhelníky *LMPQ* a *MNOP*. Z obrazce je vidět, že součet úhlů našeho sedmiúhelníka dostaneme, když sečteme všecky úhly trojúhelníka i obou čtyrúhelníků. Dostaneme součet úhlů

$$2R + 2 \times (2R) + 2 \times (2R) = 5 \times (2R),$$

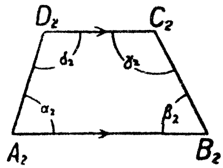
tedy stejný součet úhlů jako u vypuklých sedmiúhelníků.

Vypuklé mnohoúhelníky jsou mnohem důležitější než ostatní. V této učebnici budeme se jen jimi zabývati a budeme jim krátce říkat mnohoúhelníky.

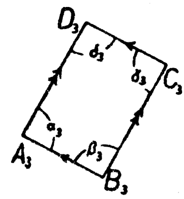
V každém z obrazců 37, 38, 39 máme čtyrúhelník.



Obr. 37.



Obr. 38.



Obr. 39.

Dva vrcholy čtyrúhelníka jsou buďto sousední nebo protější, spojnice sousedních vrcholů je strana, spojnice protějších vrcholů je úhlopříčka. Při dvou sousedních vrcholech máme dva sousední úhly; při dvou protějších vrcholech máme dva protější úhly. Dvě strany čtyrúhelníka jsou sousední, vycházejí-li obě z téhož vrcholu; jinak jsou protější.

U čtyrúhelníka $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 37) jsou protější strany A_1B_1 a C_1D_1 různoběžné a také protější strany A_1D_1 a B_1C_1 jsou různoběžné; takový čtyrúhelník se jmenuje **různoběžník.**

U čtyrúhelníka $A_2B_2C_2D_2$ (obr. 38) jsou protější strany A_2B_2 a C_2D_2 rovnoběžné, ale protější strany A_2D_2 *a* B_2C_2 jsou různoběžné; takový čtyrúhelník se jmenuje **lichoběžník.** Strany A_2B_2 a C_2D_2 jsou **základny** lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$ z obr. 38; strany A_2D_2 a B_2C_2 jsou jeho **ramena.**

U čtyrúhelníka $A_3B_3C_3D_3$ (obr. 39) jsou protější strany A_3B_3 a C_3D_3 rovnoběžné a také protější strany A_3D_3 a B_3C_3 jsou rovnoběžné; takový čtyrúhelník se jmenuje **rovnoběžník.**

Úhly α_2 a δ_2 v obr. 38 jsou dva úhly přilehlé: proťaté přímky jsou A_2B_2 a D_2C_2, příčka je A_2D_2. Protože $A_2B_2 \parallel C_2D_2$, jest $\alpha_2 + \delta_2 = 2R$, t. j. úhly α_2 a δ_2 jsou výplňkové. Také úhly β_2 a γ_2 v obr. 38 jsou výplňkové, neboť zase to jsou přilehlé úhly mezi rovnoběžkami, α_2 a δ_2 jsou úhly při ramenu A_2D_2 lichoběžníka $A_2B_2C_2D_2$; β_2 a γ_2 jsou úhly při ramenu B_2C_2.

Úhly při ramenu lichoběžníka jsou výplňkové.

Všimneme-li si u rovnoběžníka $A_3B_3C_3D_3$ (obr. 39) kteréhokoli páru sousedních úhlů, shledáme pokaždé, že to jsou přilehlé úhly mezi rovnoběžkami. Přesvědčte se o tom ve všech případech! Výsledek: **Dva sousední úhly rovnoběžníka jsou vždy výplňkové.**

Všimněme si jednoho páru protějších úhlů našeho rovnoběžníka, na př. páru α_3 a γ_3. Jest $\alpha_3 + \beta_3 = 2R$ a také jest $\gamma_3 + \beta_3 = 2R$, proto je $\alpha_3 = \gamma_3$. **Dva protější úhly rovnoběžníka jsou si rovny.**

Cvičení k § 2.

31. Úhly α, β, γ, ω mají takový význam jako v obr. 30. Mimo to znamená φ vnější úhel trojúhelníka ABC při vrcholu A, ψ vnější úhel při vrcholu C. (Vyznačte si všech šest úhlů ve vlastním obrazci!) Vypočtěte velikost všech úhlů podle těchto údajů:

a) $\alpha = 36^0\,51'\,47''$, $\beta = 57^0\,48'\,43''$;
b) $\varphi = 112^0\,21'\,19''$, $\gamma = 53^0\,42'\,26''$;
c) $\psi = 134^0\,26'\,2''$, $\omega = 156^0\,58'\,17''$;

Ve cvičeních 32 až 36 dojdete k cíli, budete-li hledat pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých znáte jeden ostrý úhel.

32. Sestrojte si trojúhelník FGH s pravým úhlem při vrcholu F. Spusťte s bodu F kolmici na přímku GH a její patu označte K. Je v obrazci nějaký úhel rovný úhlu $\sphericalangle HFK$? Udejte důvod!

33. Sestrojte si ostroúhlý trojúhelník RST. Spusťte s vrcholu R kolmici na přímku ST a patu označte P. Spusťte s vrcholu S kolmici na přímku RT a patu označte Q. Dokažte, že

$$\sphericalangle PRT = \sphericalangle QST.$$

(Můžete to provésti dvojím způsobem.)

34. V trojúhelníku HKL měří úhel při vrcholu K 110^0, úhel při vrcholu L 50^0. N je pata kolmice spuštěné s bodu H na přímku KL. Dokažte že,

$$\sphericalangle LHK = \sphericalangle KHN.$$

35. Uvnitř ostrého úhlu $\sphericalangle BAC$ leží polopřímka AD. S bodu B spusťte kolmice na přímky AC a AD; patu první označte E, patu druhé F. Dokažte, že

$$\sphericalangle EBF = \sphericalangle CAD.$$

36. Opakujte úlohu 35 s tím rozdílem, že úhel $\sphericalangle BAC$ bude tupý; úhly $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAC$ budou ostré.

Ve cvičeních 37 až 41 se opírejte o poučky o součtu úhlů a o vnějším úhlu.

37. Ve čtyrúhelníku $FGHK$ úhlopříčka FH půlí jak úhel při vrcholu F tak také úhel při vrcholu H. Dokažte, že

$$\sphericalangle FGH = \sphericalangle FKH.$$

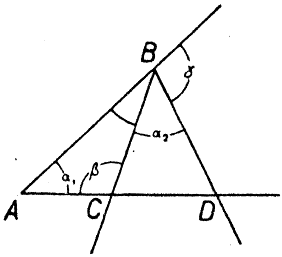
38. V obr. 40 jest $\alpha_1 = \alpha_2$. Dokažte, že $\beta = \gamma$. [Vyznačte si $\varepsilon = \sphericalangle ADB$.]

Cvičení 39 až 41 se vztahují k obr. 41, ve kterém YS je osa úhlu $\sphericalangle XYZ$ a ZR je osa úhlu $\sphericalangle XZY$. Vyčárkovaná přímka a body U, V přijdou jen ve cvičení 41.

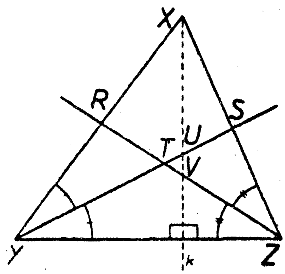
39. Jest $\sphericalangle YXZ = 81^0\,23'\,18''$, $\sphericalangle XYZ = 32^0\,54'\,58''$. Najděte $\sphericalangle YTZ$.

40. Jest $\sphericalangle XYZ = 43^0\,43'\,34''$, $\sphericalangle YTZ = 125^0\,38'\,26''$. Najděte $\sphericalangle YSZ$.

41. Jest $\sphericalangle YXZ = 65^0\ 12'\ 8''$, $\sphericalangle XZY = 73^0\ 8'\ 56''$. S bodu X spusťte kolmici k na přímku YZ. Určete úhly trojúhelníka TUV.



Obr. 40.



Obr. 41.

42. Řešte znovu, ale bez pomocné konstrukce
a) cvič. 19; b) cvič. 20; c) cvič. 21;
d) cvič. 22; e) cvič. 23; f) cvič. 24.

43. Vypočtěte čtvrtý vnitřní úhel čtyrúhelníka, když tři vnitřní úhly měří

a) $76^0\,34'$, $96^0\,42'$, $112^0\,56'$.
b) $118^0\,36'$, $72^0\,51'$, $48^0\,38'$.
c) $89^0\,42'\,32''$, $123^0\,45'\,20''$, $86^0\,50'\,28''$.

44. Jeden vnitřní úhel čtyrúhelníka měří $113^0\ 8'\ 54''$. Všecky tři ostatní jsou si rovny. Určete jejich velikost!

45. Ze šesti úhlů šestiúhelníka je pět sobě rovných. Zbývající úhel je o $71^0\,13'$ menší. Určete velikost všech úhlů!

46. Tři úhly pětiúhelníka jsou si rovny a každý měří $156^0\ 52'\ 48''$. Zbývající dva úhly jsou si rovny. Určete jejich velikost!

47. Úhly pětiúhelníka měří (ve stupních)

$$2x,\ 3x,\ 4x,\ 5x,\ 6x.$$

Určete x.

48. Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníka je 1080^0. Kolik má stran?

49. Které mnohoúhelníky mají součet úhlů mezi sedmi a osmi tisíci stupňů?

50. Určete nejprve vnější úhel, potom vnitřní úhel pravidelného

a) 12úhelníka, b) 15úhelníka, c) 18úhelníka, d) 30úhelníka.

51. Může pravidelný mnohoúhelník míti vnější úhel

a) 15^0? b) 7^0? c) 11^0? d) 6^0? e) 5^0? f) 4^0?

Může-li, udejte počet stran.

52. Může pravidelný mnohoúhelník míti vnitřní úhel

a) 108^0? b) 120^0? c) 130^0? d) 144^0? e) 60^0? f) 170^0?

Může-li, udejte počet stran.

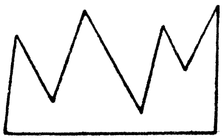
53. $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Přímky AB a CD se protnou v bodě X. Určete úhel $\sphericalangle AXD$.

54. Rozdělte devítiúhelník z obr. 42 na vypuklé mnohoúhelníky a přesvědčte se, že součet všech úhlů je $14R$.

55. U čtyrúhelníka z obr. 37 jmenujte všecky páry a) sousedních vrcholů, b) protějších vrcholů.

56. U čtyrúhelníka z obr. 38 jmenujte všecky páry a) sousedních úhlů, b) protějších úhlů.

57. U čtyrúhelníka z obr. 39 jmenujte všecky páry a) sousedních stran, b) protějších stran.



Obr. 42.

58. Vypočtěte ostatní úhly lichoběžníka $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$ (viz obr. 38), víte-li, že

a) $\alpha_2 = 72^\circ 13' 47''$, $\beta_2 = 43^\circ 52' 36''$.
b) $\alpha_2 = 69^\circ 24' 15''$, $\gamma_2 = 145^\circ 23' 56''$.
c) $\beta_2 = 46^\circ 12' 38''$, $\delta_2 = 110^\circ 36' 28''$.
d) $\gamma_2 = 138^\circ 57' 26''$, $\delta_2 = 112^\circ 53' 7''$.

Dá se podrobný výpočet provést, je-li známa velikost jiného páru úhlů?

59. Vypočtěte ostatní úhly rovnoběžníka $A_3\ B_3\ C_3\ D_3$ (viz obr. 39), víte-li, že

a) $\alpha_3 = 98^\circ 12' 47''$. b) $\beta_3 = 82^\circ 44' 55''$.
c) $\gamma_3 = 102^\circ 28' 35''$. d) $\delta_3 = 78^\circ 57' 3''$.

60. Dokažte, že čtyrúhelník, o kterém víme, že má dva sousední úhly výplňkové, je buďto lichoběžník nebo rovnoběžník.

61. $ABCD$ je lichoběžník ($AB \parallel CD$); osa úhlu $\sphericalangle BAD$ a osa úhlu $\sphericalangle CDA$ se protnou v bodě X. Dokažte, že

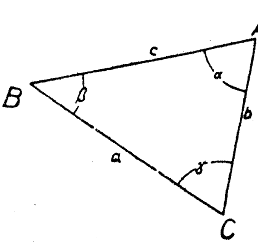
$$\sphericalangle AXD = R.$$

62. Které nové geometrické výrazy jste poznali v tomto paragrafu? Zapište si je!

63. Zapište si všecky poučky, které jste poznali v tomto paragrafu? Zopakujte si jejich důkazy.

§ 3. Shodné trojúhelníky.

U trojúhelníků se užívá velmi často takového označení jako v obr. 43. Vrcholy jsou označeny velkými písmeny A, B, C. Délky stran jsou označeny malými písmeny a, b, c a to tak, že strana je vždy označena písmenem stejného jména jako protější vrchol. Úhly jsou označeny řeckými písmeny α, β, γ a to tak, že úhel α leží při vrcholu A a proti straně a atd. Toto základní označení vám musí býti dobře známo, ale přesto musíte také umět řešit úlohy při jakémkoli označení.



Obr. 43.

Říkáme, že úhly α a β jsou přilehlé ke straně c. To je v souhlase s názvem přilehlých úhlů zavedeným na str. 5. (Považujeme

AB za příčku, *AC* a *BC* za proťaté přímky.) Podobně jsou α a γ úhly přilehlé ke straně b, β a γ jsou úhly přilehlé ke straně a.

U trojúhelníka měříme celkem šest hodnot: tři délky a, b, c a tři úhly α, β, γ. Shodné trojúhelníky, t. j. takové, které lze položit jeden na druhý tak, že se navzájem kryjí, mají stejně dlouhé strany a stejně velké úhly.

Je vám již známo, že trojúhelník můžeme sestrojit, jakmile známe délky všech tří stran. Tedy stačí, když ze šesti hodnot a, b, c, α, β, γ známe tři, totiž a, b, c. Pak je už možné trojúhelník sestrojit; zbývající tři hodnoty α, β, γ můžeme potom změřit úhloměrem. Říkáme, že

trojúhelník je určen, známe-li délky všech tří stran.

Slovo „určen" ovšem neznamená, že by existoval jen jediný takový trojúhelník, nýbrž že se dva takové trojúhelníky od sebe liší pouze umístěním, t. j. že jsou shodné. Tedy

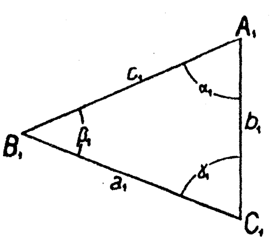
dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách (t. j. jsou-li strany prvého stejně dlouhé jako strany druhého).

Je vám také známo, že nesmíme libovolně zvolit všecky tři délky a, b, c. Můžeme si zvolit na př. a a b úplně libovolně, ale c musí býti menší než součet a větší než rozdíl prvých dvou stran.

Ale ze šesti hodnot a, b, c, α, β, γ můžeme vybrati k určení trojúhelníka také jiné tři nežli právě a, b, c. Na př. platí:

trojúhelník je určen, známe-li délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného (t. j. úhlu, jehož ramena obsahují ty strany). I tuto poučku můžeme vysloviti ve druhém znění:

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.



Obr. 44.

O správnosti této poučky se snadno přesvědčíme. V obr. 44 máme trojúhelník se stejným označením jako u trojúhelníka z obr. 43 až na ten rozdíl, že v obr. 44 je všude ještě index 1. Dejme tomu, že víme, že $b_1 = b$, $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$. Máme se přesvědčit, že je možné trojúhelník $A_1B_1C_1$ přemístit tak, aby se kryl s trojúhelníkem *ABC*. To je velmi jednoduché.

Protože úhel $\alpha_1 = \sphericalangle B_1A_1C_1$ se rovná úhlu $\alpha = \sphericalangle BAC$, můžeme trojúhelník $A_1B_1C_1$ přemístiti tak, že vrchol A_1 úhlu α_1 se bude krýti s vrcholem A úhlu α, rameno A_1B_1 úhlu α_1 s ramenem AB úhlu α, rameno A_1C_1 úhlu α_1 s ramenem AC úhlu α. Tedy v nové poloze bude B_1 ležet na polopřímce AB ve vzdálenosti $c_1 = \overline{A_1B_1}$ od bodu A. Ale vzdálenost c_1 je rovna vzdálenosti $c = \overline{AB}$, takže nová poloha bodu B_1 se kryje s bodem B. Podobně se nová poloha bodu C_1 musí krýt s bodem C. Tedy se budou krýt všecky tři vrcholy obou trojúhelníků a proto jsou ty trojúhelníky shodné.

Konstrukce trojúhelníka ABC ze stran b, c a úhlu α jimi sevřeného je velmi jednoduchá. Můžeme napřed úhloměrem sestrojit úhel α a vrchol označiti A. Potom naneseme na jedno rameno délku $\overline{AB} = c$, na druhé délku $\overline{AC} = b$, spojíme BC a jsme hotovi. Můžeme však při konstrukci místo daného úhlu začít také jednou z daných stran. Popište sami konstrukci, při které se začne stranou b!

Dále platí, že

trojúhelník je určen, známe-li délku jedné strany a velikost obou úhlů přilehlých. Druhé znění poučky:

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou úhlech přilehlých.

O správnosti poučky se zase snadno přesvědčíme. Dejme tomu, že víme (viz obr. 43 a 44), že $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$. Protože délka $c_1 = \overline{A_1B_1}$ se rovná délce $c = \overline{AB}$, můžeme přemístit trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, že v nové poloze se bod A_1 bude krýt s bodem A a bod B_1 s bodem B. To se dá ještě provésti dvojím způsobem. Volíme takový způsob, aby nová poloha bodu C_1 byla od přímky AB na tu stranu, na které je bod C. Po přemístění se kryje jedno rameno A_1B_1 úhlu α_1 s jedním ramenem AB úhlu α. Protože $\alpha_1 = \alpha$ a protože jsou oba úhly α a α_1 na stejné straně od přímky AB, musí se krýti také druhá ramena, t. j. polopřímka A_1C_1 se po přemístění kryje s polopřímkou AC. Z toho vychází, že nová poloha bodu C_1 je někde na přímce AC. Všimneme-li si nyní úhlu β, vyjde nám podobně, že nová poloha bodu C_1 je někde na přímce BC. Tedy nová poloha bodu C_1 je v průsečíku přímky AC s přímkou BC, t. j. v bodě C. Tedy po přemístění se kryje nejen vrchol A_1 s vrcholem A a vrchol B_1 s vrcholem B, nýbrž také vrchol C_1 s vrcholem C a proto jsou trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ shodné.

Konstrukce trojúhelníka ABC ze strany c a z obou přilehlých úhlů α, β je zase snadná, ale aby byla možná, musí býti $\alpha + \beta < 180^\circ$. (Proč?) Sestrojíme si napřed úsečku AB dané délky c. Potom si sestrojíme oba úhly α, β, při čemž úhel α má vrchol A a jedno rameno v polopřímce AB, úhel β má vrchol B a jedno rameno v polopřímce BA, a oba úhly leží na stejné straně od přímky AB. Protože je $\alpha + \beta < 180^\circ$, musí se druhá ramena našich úhlů protnout. (Podle které poučky?) Jejich průsečík C je třetí vrchol trojúhelníka ABC.

Probrali jsme si tři základní poučky o určenosti (nebo o shodnosti) trojúhelníků. Tyto tři poučky jsou velmi důležité, protože většina ostatních pouček se dá odvoditi z nich (a z pouček o dvou přímkách proťatých příčkou). Proto je nutné, abyste ty poučky znali opravdu dokonale. Aby se vám to ulehčilo, zavedeme si pro ně velmi pohodlné značky.

I. Označíme sus (strana, úhel, strana) poučku

trojúhelník je určen, známe-li dvě strany a úhel jimi sevřený neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném.

II. Označíme usu (úhel, strana, úhel) poučku

trojúhelník je určen, známe-li jednu stranu a oba úhly přilehlé neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou přilehlých úhlech.

III. Označíme sss (strana, strana, strana) poučku

trojúhelník je určen, známe-li délky všech tři stran neboli

dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách.

Co by znamenalo uuu? To by nebyla správná poučka. K trojúhelníku ABC si můžeme opatřit trojúhelník $A_1B_1C_1$ dvakrát (nebo třeba desetkrát) tak veliký; oba trojúhelníky budou míti všecky úhly stejné, ale shodné nebudou. Třemi úhly není trojúhelník určen. To nepřekvapuje, neboť znáti tři úhly trojúhelníka není o nic větší znalost nežli znáti dva úhly, protože ze dvou úhlů umíme vypočítati třetí podle vztahu

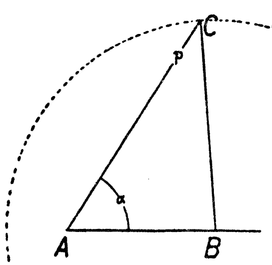
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

který dobře známe.

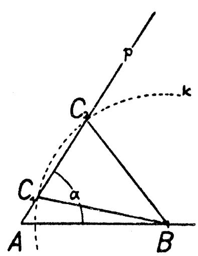
Zato vedle usu také suu nebo uus je správná poučka: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně, v úhlu proti ní a v ještě jednom úhlu. Na př. jsou trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ (viz obr. 43 a 44) shodné, je-li $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$, $\alpha_1 = \alpha$. Neboť podle poučky o součtu úhlů je potom také $\beta_1 = \beta$, takže je $c_1 = c$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, t. j. trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ jsou shodné podle usu.

Máme-li sestrojiti trojúhelník ABC znajíce délku c a úhly α a γ, vypočteme si napřed $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ a potom sestrojujeme podle usu. Aby byla konstrukce možná, musí býti $\alpha + \gamma < 180^\circ$.

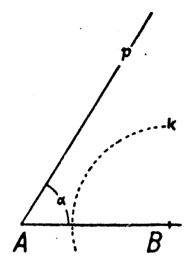
Důležité je, že suu nebo uss není správná poučka. Trojúhelník nemusí býti určen, známe-li délky dvou stran a velikost úhlu proti jedné z nich. Nechť je na př. $\alpha = 57^\circ$, $c = 25$ mm a mimo to nechť je známa délka a. Jest $a = 35$ mm v obr. 45, $a = 22$ mm v obr. 46, $a = 16$ mm v obr. 47. Sestrojíme si pokaždé napřed úhel $\alpha = 57^\circ$



Obr. 45.



Obr. 46.



Obr. 47.

s vrcholem A, potom naneseme na jedno rameno délku $\overline{AB} = c = 25$ mm; druhé rameno si označíme p. Máme už dva vrcholy A, B žádaného trojúhelníka ABC a zbývá určiti polohu třetího vrcholu C. Protože známe délku $a = \overline{BC}$, musí bod C ležeti na kružnici k o středu B a poloměru a. Mimo to musí C ovšem ležeti na polopřímce p. V každém z našich tří případů dopadne věc jinak: v obr. 45 kružnice k protne polopřímku p v jediném bodě C, v obr. 46 ve dvou bodech C_1 a C_2, v obr. 47 se p a k vůbec neprotnou. Tedy pro $a = 35$ mm máme jediný trojúhelník ABC vyhovující podmínkám, pro $a = 16$ mm není žádný takový trojúhelník, ale pro $a = 22$ mm vyhovují podmínkám dva trojúhelníky ABC_1 a ABC_2, které nejsou shodné. Proto ssu neboli uss není správná poučka.

Značka shodnosti je $\cong$. Dá-li se trojúhelník $A_1B_1C_1$ položiti na trojúhelník ABC tak, že vrchol A_1 se kryje s vrcholem A, vrchol B_1 s vrcholem B, vrchol C_1 s vrcholem C, zapíšeme shodnost takto:

$$ABC \cong A_1B_1C_1.$$

Místo toho můžeme také napsati třeba

$$BAC \cong B_1A_1C_1 \quad \text{nebo} \quad CAB \cong C_1A_1B_1,$$

t. j. vrcholy jednoho z obou trojúhelníků můžeme napsati v libovolném pořádku. Ale jakmile se rozhodneme pro určitý pořádek vrcholů jednoho trojúhelníka, je tím už rozhodnuto o pořádku vrcholů druhého, protože zápis musí býti proveden tak, aby z něho bylo patrné, který vrchol s kterým se bude po přemístění krýt. Na př. u trojúhelníků z obr. 43 a 44 nemůžeme napsati $BCA \cong A_1C_1B_1$, ačkoli jsou ty trojúhelníky shodné; neboť to by znamenalo, že lze přemístiti trojúhelník $A_1B_1C_1$ tak, aby se vrchol A_1 kryl s vrcholem B, vrchol C_1 s vrcholem C, vrchol B_1 s vrcholem A; to jistě nelze, protože strana A_1C_1 je mnohem kratší nežli strana BC.

Ze správného zápisu shodnosti je patrné, které jsou páry stejných stran a při kterých vrcholech jsou páry stejných úhlů.

Když na shodnost trojúhelníků soudíme z některé základní poučky, můžeme si za zápis shodnosti poznamenati značku poučky. Když na př. u trojúhelníků z obr. 43 a 44 zjistíme měřením, že $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A_1C_1B_1$, můžeme zapsati

$$ABC \cong A_1B_1C_1 \text{ (sus)},$$

neboť shodnost je zaručena poučkou sus.

Cvičení k § 3.

64. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů. Pokaždé změřte α, β a γ.

a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.
b) $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $c = 54$ mm.
c) $a = 9$ cm, $b = 58$ mm, $c = 46$ mm.
d) $a = 37$ mm, $b = 7$ cm, $c = 44$ mm.

65. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů.

a) $b = 57$ mm, $c = 48$ mm, $\alpha = 42^0$. Změřte a, β, γ.
b) $a = 85$ mm, $c = 52$ mm, $\beta = 113^0$. Změřte b, α, γ.
c) $a = 36$ mm, $b = 66$ mm, $\gamma = 147^0$. Změřte c, α, β.
d) $a = 73$ mm, $b = 43$ mm, $\gamma = 25^0$ Změřte c, α β.

66. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů.

a) $c = 72$ mm, $\alpha = 43^0$, $\beta = 59^0$. Změřte a, b, γ.

b) $a = 35$ mm, $\beta = 126^0$, $\gamma = 34^0$. Změřte b, c, α.

c) $b = 43$ mm, $\alpha = 27^0$, $\gamma = 132^0$. Změřte a, c, β.

d) $a = 69$ mm, $\beta = 83^0$, $\gamma = 42^0$. Změřte b, c, α.

67. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů. Pokaždé změřte c a všecky úhly.

a) $a = 58$ mm, $\alpha = 47^0$, $\beta = 53^0$.

b) $b = 92$ mm, $\alpha = 23^0$, $\beta = 138^0$.

c) $a = 42$ mm, $\alpha = 16^0$, $\gamma = 154^0$.

68. Sestrojte, je-li to možno, trojúhelník ABC podle daných údajů. Není-li řešení, napište „nemožné“. Jsou-li dva takové trojúhelníky, sestrojte je oba. Pokaždé změřte všecky strany a úhly.

a) $a = 83$ mm, $b = 57$ mm, $\alpha = 153^0$.

b) $b = 64$ mm, $c = 42$ mm, $\beta = 37^0$.

c) $b = 7$ cm, $c = 55$ mm, $\gamma = 35^0$.

d) $b = 8$ cm, $c = 7$ cm, $\beta = 35^0$.

69. Jest $ABC \cong HKG$. Který úhel se rovná $\sphericalangle\ CAB$? Která strana se rovná straně GH?

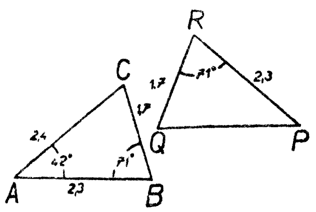
V následujících cvičeních 70 až 73 máte po každé hledati v obrazci dva shodné trojúhelníky. Shodnost správně zapište a po každé udejte také značku poučky, podle které na shodnost usuzujete. Narýsujte si od ruky vlastní obrazce a do nich zapište velikost všech stran úhlů. V tištěných obrazcích je jednotka 1 cm.

70. Viz obr. 48.

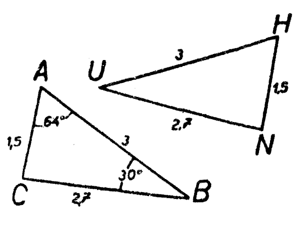
71. Viz obr. 49.

72. Viz obr. 50.

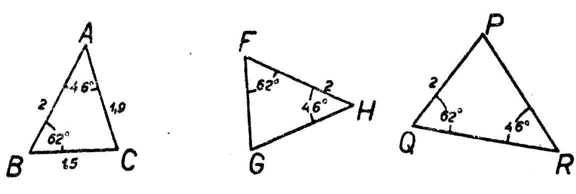
73. Viz obr. 51.



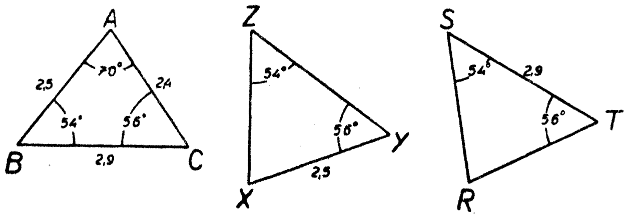
Obr. 48.



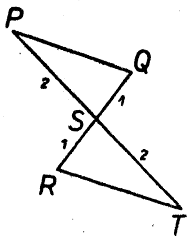
Obr. 49.



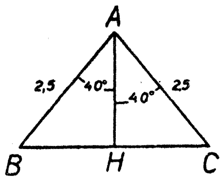
Obr. 50.



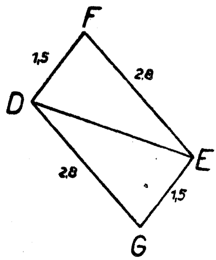
Obr. 51.



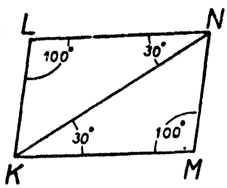
Obr. 52.



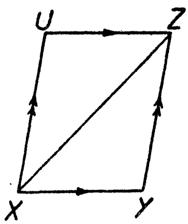
Obr. 53.



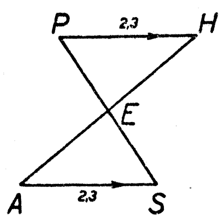
Obr. 54.



Obr. 55.



Obr. 56.



Obr. 57.

Ve cvičeních 74 až 79 máte najíti v obrazci dva shodné trojúhelníky, zapsati správně shodnost a zapsati také důvod. V tištěných obrazcích je jednotka 1 cm.

74. Viz obr. 52.
75. Viz obr. 53.
76. Viz obr. 54.
77. Viz obr. 55.
78. Viz obr. 56.
79. Viz obr. 57.

Cvičení 80 až 88 se vztahují k obr. 58, který pouze vysvětluje označení. Po každé si narýsujte vlastní obrázek od ruky a v něm si vyznačte pomocí párů stejných značek, co je dáno. Je-li na př. dáno, že dvě úsečky jsou stejně dlouhé, přetrhněte si je obě touž barevnou tužkou. Potom rozhodněte, zdali oba trojúhelníky m u s í býti shodné. Když ano, zapište správně shodnost a zapište také její důvod.

80. $\overline{HK} = \overline{ST}$, $\overline{HL} = \overline{RT}$, $\delta = \psi$.

81. $\overline{HK} = \overline{RS}$, $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \psi$.

82. $\overline{HL} = \overline{RT}$, $\overline{HK} = \overline{RS}$, $\gamma = \psi$.

83. $\overline{HK} = \overline{ST}$, $\delta = \psi$, $\gamma = \varphi$.

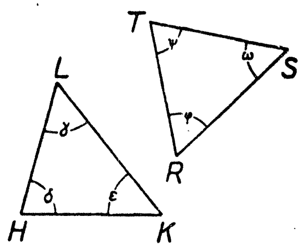
84. $\overline{KL} = \overline{RT}$, $\overline{HL} = \overline{RS}$, $\overline{HK} = \overline{ST}$.

85. $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \omega$, $\gamma = \psi$.

86. $\overline{HL} = \overline{KL}$, $\overline{RT} = \overline{ST}$, $\gamma = \psi$.

87. $\overline{HL} = \overline{ST}$, $\overline{KL} = \overline{RS}$, $\gamma = \omega$.

88. $\overline{HK} = \overline{HL}$, $\overline{RS} = \overline{RT}$, $\delta = \omega$.



Obr. 58.

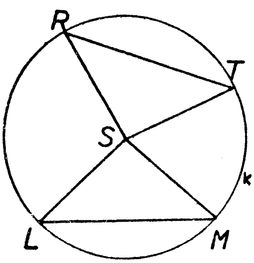
Cvičení 89 až 101 se řeší tak, že si po každé najdete v obrazci dva trojúhelníky, které podle některé základní poučky musí býti shodné. I k těm úlohám, ke kterým je obrazec v učebnici, rýsujte si obrazce vlastní.

89. Ve středu S úsečky AB vztyčte kolmici k ke přímce AB. Zvolte si bod T na přímce k. Dokažte, že $\overline{AT} = \overline{BT}$.

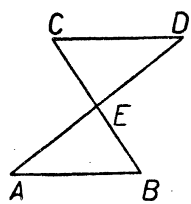
90. Na ose úhlu $\sphericalangle XYZ$ si zvolte bod K. Spusťte s bodu K kolmice na obě ramena úhlu a jejich paty označte P, Q. Dokažte, že $\overline{KP} = \overline{KQ}$.

91. V obr. 59 je S střed kružnice k. Dokažte:

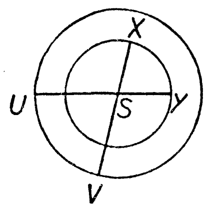
a) Je-li $\overline{LM} = \overline{RT}$, je $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$.
b) Je-li $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$, je $\overline{LM} = \overline{RT}$.



Obr. 59.



Obr. 60.



Obr. 61.

92. V trojúhelníku ABK je $\overline{AK} = \overline{BK}$. H je střed strany AB. Dokažte, že $HK \perp AB$. (Je-li úhel rovný úhlu vedlejšímu, je pravý.)

93. V trojúhelníku XYZ je $\overline{XY} = \overline{XZ}$. Označte S střed strany XY a T střed strany XZ. Dokažte, že $\overline{SZ} = \overline{TY}$.

94. V obr. 60 je E střed obou úseček AD a BC. Dokažte:

a) $\overline{AB} = \overline{CD}$. b) $AB \parallel CD$.

95. V obr. 60 je $\overline{AE} = \overline{ED}$ a $AB \parallel CD$. Dokažte, že $\overline{BE} = \overline{EC}$.

96. V obr. 60 je $\overline{AB} = \overline{CD}$, $AB \parallel CD$. Dokažte:

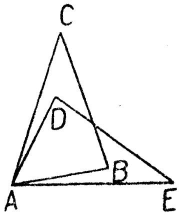
a) $\overline{AE} = \overline{ED}$. b) $\overline{AC} = \overline{BD}$. c) $AC \parallel BD$.

97. V obr. 61 je S střed obou kružnic. Dokažte, že $\overline{UX} = \overline{VY}$.

98. Všecky strany čtyrúhelníka *HKLM* jsou si rovny. Dokažte, že úhel při vrcholu *H* je půlen úhlopříčkou *HL*.

Cvičení 99 až 101 jsou trochu těžší.

99. *ABC* je ostroúhlý trojúhelník. Vně trojúhelníka jsou čtverce *ABQR*, *ACST*. Dokažte, že $\overline{CR} = \overline{BT}$.



Obr. 62.

100. *FGH* je ostroúhlý trojúhelník. Vně trojúhelníka *FGH* jsou rovnostranné trojúhelníky *FKG*, *FLH*. Dokažte, že $\overline{GL} = \overline{HK}$.

101. V obr. 62 je $ABC \cong ADE$. Dokažte, že $\overline{CD} = \overline{BE}$.

102. Které geometrické výrazy se vyskytovaly v tomto paragrafu? Zapište si je!

103. Zapište si poučky, které jste poznali v tomto paragrafu. Zapište si také jejich značky.

§ 4. Grafické určování vzdáleností a výšek.

V minulém paragrafu jsme poznali, že ke konstrukci trojúhelníka *ABC* stačí, když ze šesti hodnot $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ známe vhodné tři hodnoty. Pak už můžeme trojúhelník *ABC* sestrojit a ostatní tři hodnoty změřit. To má velký praktický význam. Často se stává, že je třeba určit nějakou délku, která je přímému měření nepřístupná. Tu si pomáháme z nesnáze tím, že provedeme jiná měření, která se dají provádět snáze a z nichž se dá určit ta hodnota, o kterou se vlastně zajímáme. Dejme tomu na příklad, že bychom chtěli určit vzdálenost místa *A*, které leží u břehu řeky, od místa *B*, které leží u druhého břehu řeky. Přímému měření vadí řeka. Pomůžeme si takto. Zvolíme si vhodné třetí místo *C* na témž břehu, na kterém je *A*, změříme vzdálenost $\overline{AC}$ a změříme si ještě dva úhly, totiž $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle BCA$. Všecka tři měření se dají provést na té straně od řeky, na které je místo *A*. Trojúhelník *ABC* je provedenými měřeními úplně určen (podle poučky usu), takže také žádanou vzdálenost *AB* můžeme na základě provedených měření stanovit. To stanovení by se dalo provésti tím, že bychom si sestrojili na základě naměřených údajů trojúhelník shodný s trojúhelníkem *ABC*. Ale takový trojúhelník by byl příliš velký; proto se jej sestrojíme v e z m e n š e n é m m ě ř í t k u. Obyčejně sestrojujeme obrazce dva; napřed malý obrazec od ruky, potom větší obrazec přesný. V našem případě naměříme třeba $\overline{AC} = 6$ m, $\sphericalangle BAC = 86^\circ$, $\sphericalangle BCA = 68^\circ$. Tyto údaje si poznamenáme do obrazce od ruky, který může býti skutečnému trojúhelníku ABC jen velmi zhruba podobný. Potom rozhodneme, v jakém měřítku budeme rýsovati přesný obrazec. To měřítko musí býti voleno tak, aby se nám celý obrazec vešel. Za druhé je volíme tak, abychom dostali pokud možno veliký obrazec, protože z malého obrazce bychom hledanou vzdálenost dostali velmi nepřesně. Konečně volíme měřítko tak, aby souvislost mezi skutečnými a zmenšenými vzdálenostmi byla co nejjednodušší. Obyčejně volíme měřítko tak, aby 1 cm znamenal 1 m, 10 m, 100 m, ... nebo 2 m, 20 m, 200 m, ... nebo 0,5 m, 5 m, 50 m atd. V našem případě volíme měřítko tak, že 1 cm znamená 2 m. Proto si sestrojíme (co nejpřesněji!) trojúhelník ABC, ve kterém $\overline{AC} = 3$ cm, $\sphericalangle BAC = 86^\circ$, $\sphericalangle BCA = 68^\circ$. Pak si změříme $\overline{AB}$ a najdeme $\overline{AB} = 6{,}3$ cm. Protože 1 cm nákresu znamená 2 m ve skutečnosti, skutečná vzdálenost $\overline{AB}$ měří asi 12,6 m. („Asi" proto, že ani měření v přírodě, ani rýsování na papíře nemohlo býti dokonale přesné.)

Trojúhelníky, kterých jsme užívali v úloze právě řešené, ležely ve **vodorovné** rovině. Ke stanovení **výšek** užíváme trojúhelníků ve **svislé** rovině. Přitom měříme úhly ve svislé rovině, které šikmý směr tvoří se směrem vodorovným. Pozorujeme-li se stanoviska S předmět P položený výše než S, pak svislý úhel polopřímky SP s vodorovnou polopřímkou se jmenuje **výškový úhel** předmětu P se stanoviska S; leží-li P níže nežli S, mluvíme o **hloubkovém úhlu**.

Cvičení k § 4.

104. Písmena U, V, W znamenají tři kostelní věže. U je na sever od V ve vzdálenosti 6 km. W je na severovýchod od V ve vzdálenosti 12 km.

a) Jak daleko je W od U?

b) V jakém směru od U je W?

105. Písmena A, B, C znamenají tři města. A leží 30 km severně od B a 50 km západně od C.

a) Určete vzdálenost od B k C.

b) V jakém směru od města B leží město C?

106 Tři cesty tvoří trojúhelník LMN. Jest $\overline{LM} = 600$ m, $\overline{MN} = 450$ m, $\overline{NL} = 350$ m. Jak daleko od cesty LM je křižovatka N?

107. Domek C leží nalevo od silnice mezi dvěma body A, B silnice. Směr AC je od silnice odchýlen o úhel 32°, směr BC o úhel 65°. Jest $\overline{AB} = 250$ m.

a) Určete vzdálenost $\overline{AC}$.

b) Určete nejkratší vzdálenost od domku k silnici.

108. Nalevo od rovné cesty HKX jsou dva kopce A, B. Jest $\overline{HK} = 1$ km, $\sphericalangle XHA = 25^0$, $\sphericalangle XHB = 40^0$, $\sphericalangle XKA = 63^0$, $\sphericalangle XKB = 140^0$. Určete,

a) jak daleko od sebe jsou ty kopce;
b) jak daleko od cesty je kopec A;
c) jak daleko od cesty je kopec B.

109. Železniční trať směřuje od západu k východu. A a B jsou dvě místa na trati vzdálená 300 m od sebe. Věž V leží od místa A ve směru 48^0 od severu k východu, od místa B ve směru 28^0 od severu k západu. Určete

a) vzdálenost věže od místa A;
b) vzdálenost věže od místa B;
c) vzdálenost věže od trati.

110. Loď pluje k severovýchodu rychlostí 10 uzlů. [To znamená, že urazí za hodinu 10 námořních mil; jedna námořní míle je asi 1850 m.] Maják je v jedné chvíli přesně na sever od lodi a za čtvrt hodiny je ve směru 76^0 od jihu k západu. Určete nejkratší vzdálenost od lodi k majáku.

111. Na krajích přístavu jsou dva majáky A, B. A je západně od B ve vzdálenosti 500 m. Loď pluje k přístavu směrem J 30^0 Z (t. j. směrem, který je mezi jihem a západem a tvoří úhel 30^0 se směrem jižním). Pozorovatel na lodi vidí maják B ve směru J 10^0 Z, maják A ve směru J 40^0 Z. Jak daleko bude loď od A a od B, až se dostane mezi oba majáky?

112. Výškový úhel vrcholu věže se stanoviska vzdáleného 40 m od paty věže je 35^0. Najděte výšku věže.

113. Dětský drak je na provaze dlouhém 230 m, který tvoří úhel 65^0 s vodorovným směrem. V jaké výši je drak?

114. Určete výškový úhel slunce v době, kdy svislá tyč dlouhá 4 m vrhá stín délky 5 m!

115. Pod jakým hloubkovým úhlem je viděti s vrcholu věže vysoké 42 m předmět ležící na zemi ve vzdálenosti 60 m od věže?

116. Žebřík dlouhý 5 m je opřen o svislou stěnu. Pata žebříku je 2,4 m od stěny.

a) O jaký úhel je žebřík odchýlen od vodorovné polohy?
b) Jak vysoko nad zemí je vrchol žebříku?

117. S vrcholu pahorku, který je 75 m nad hladinou vodní, je viděti přesně za sebou dvě loďky. Hloubkový úhel prvé je 64^0, hloubkový úhel druhé je 48^0. Určete vzdálenost loděk.

118. Výškový úhel vrcholu věže z místa vzdáleného 150 m od paty je 28^0. Jaký je výškový úhel z místa vzdáleného 100 m?

119. Pozorovatel z balonu ve výšce 1 km vidí kostel pod hloubkovým úhlem 35^0. Po dvaceti minutách stoupání jej vidí pod hloubkovým úhlem $55\frac{1}{2}^0$. Určete rychlost stoupání v kilometrech za hodinu.

120. Muž na vrcholu kopce pozoruje rovnou cestu v údolí přímo od něho se vzdalující. Dva sousední kilometrové kameny vidí pod hloubkovými úhly 30^0 a 13^0. Jak vysoko nad údolím je vrchol kopce?

121. Aeroplán letí k východu ve výši 800 m. Pozorovatel vidí plynojem směrem k jihu pod hloubkovým úhlem 29°; o 15 vteřin později vidí týž plynojem směrem k jihozápadu. Určete rychlost aeroplánu v metrech za vteřinu.

122. Trám AB dlouhý 3 m je upevněn dvěma provazy AC, BD. Oba body C, D jsou stejně vysoko nad zemí. Trám je nakloněn o 10° od vodorovné polohy, bod B je níže než A, oba provazy jsou nakloněny o 20° od svislé polohy. Jest $\overline{AC} = 4{,}8$ dm. Určete $\overline{BD}$.

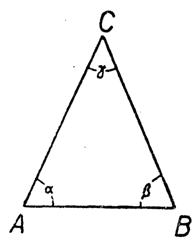
§ 5. Pokračování o trojúhelníku.

Je vám již známo, že u rovnoramenného trojúhelníka oba úhly při základně jsou si rovny. Týž poznatek se dá vysloviti také takto: **V trojúhelníku leží proti rovným stranám rovné úhly.**

Můžeme si tuto poučku velmi jednoduše odvoditi z jedné poučky o shodnosti trojúhelníků. Když v obr. 63 je $\overline{AC} = \overline{BC}$, máme dokázati, že $\alpha = \beta$. Avšak

$$ABC \cong BAC \quad (s\,s\,s),$$

takže $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, t. j. $\alpha = \beta$.



Obr. 63.

Také obrácená poučka je správná. Můžeme ji vysloviti takto: **Trojúhelník, který má dva úhly sobě rovné, je rovnoramenný.** Nebo také takto: **V trojúhelníku leží proti rovným úhlům rovné strany.** Důkaz je zase velice jednoduchý. Když v trojúhelníku ABC (obr. 63) je $\alpha = \beta$, jest

$$ABC \cong BAC \quad (u\,s\,u),$$

takže $\overline{BC} = \overline{AC}$.

V obr. 30 je ω vnější úhel trojúhelníka ABC; protější úhly vnitřní jsou α a γ. Víme, že jest $\omega = \alpha + \gamma$. Z toho následuje, že ω je větší než α a také větší než γ. **Vnější úhel trojúhelníka je větší než kterýkoli z protějších úhlů vnitřních.** Tento poznatek je přes svoji jednoduchost užitečný, jak nyní uvidíme.

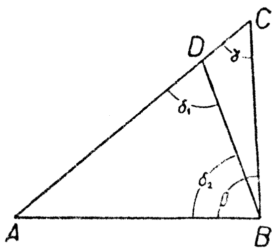
V trojúhelníku leží proti větší straně větší úhel. V trojúhelníku leží proti menší straně menší úhel. To jsou ovšem dvě znění téže poučky. Dokážeme si ji snadno. Nechť v trojúhelníku ABC je $\overline{AC} > \overline{BC}$; máme dokázati, že je $\beta > \gamma$. Protože strana AC je delší nežli strana BC, můžeme (viz obr. 64) určiti bod D na straně AC tak, že $\overline{AD} = \overline{AB}$. V trojúhelníku ABD leží proti stranám AB a AD úhly δ_1 a δ_2; protože $\overline{AB} = \overline{AD}$, je $\delta_1 = \delta_2$. V trojúhelníku BCD je δ_1

úhel vnější a γ je jeden z protějších úhlů vnitřních; tedy je γ menší než δ_1. Mimo to je patrné z obrazce, že β je větší než δ_2. Celkem tedy je $\gamma < \delta_1$, $\beta > \delta_2$; $\delta_1 = \delta_2$; z toho následuje, že $\gamma < \beta$, a to jsme měli dokázati.

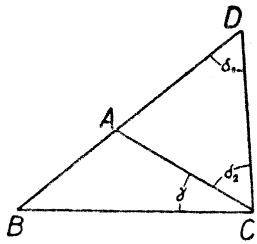
Poučka, kterou jsme si právě odvodili, dá se obrátit: **V trojúhelníku leží proti většímu úhlu větší strana. V trojúhelníku leží proti menšímu úhlu menší strana.** To je zase dvojí znění téže poučky. Dokážeme si ji takto: Dejme tomu, že v trojúhelníku ABC (viz obr. 43) je $\alpha < \gamma$. Máme dokázati, že je $a < c$. Rozhodně nastane jeden z těchto tří případů:

$$[1]\ a = c; \quad [2]\ a > c; \quad [3]\ a < c.$$

Ale podle pouček nám už známých je: v případě [1] $\alpha = \gamma$; v případě [2] $\alpha > \gamma$; v případě [3] $\alpha < \gamma$. Protože v našem trojúhelníku je $\alpha > \gamma$, musí u něho nastati případ [2] a to jsme měli dokázati.



Obr. 64.



Obr. 65.

Následující poučka je vám již známa. **Součet dvou stran trojúhelníka je větší nežli strana třetí.** Můžeme si ji dokázati takto: Dokazujme třeba, že $b + c > a$. Prodlužme stranu AB za vrchol A a na prodloužení si určeme bod D tak, že $\overline{AD} = b$ (viz obr. 65). Protože $\overline{BA} = c$, $\overline{AD} = b$, je $\overline{BD} = b + c$; mimo to je $\overline{BC} = a$. Tedy máme dokázati, že $\overline{BD} > \overline{BC}$. V trojúhelníku ACD je $\overline{AC} = \overline{AD}$ (proč?) v témž trojúhelníku leží úhel δ_1 proti straně AC a úhel δ_2 proti straně AD. Proto je $\delta_1 = \delta_2$. V trojúhelníku BCD leží proti straně BD úhel $\gamma + \delta_2$ a proti straně BC úhel δ_1. Protože $\delta_1 = \delta_2$, je $\gamma + \delta_2 > \delta_1$. Tedy v trojúhelníku BCD leží proti straně BD větší úhel nežli proti straně BC. Proto je $\overline{BD}$ větší než $\overline{BC}$ a to jsme právě chtěli dokázat.

Rozdíl dvou stran trojúhelníka je menší než strana třetí. Také tato poučka je vám již známa. Nepraví vlastně už nic nového. Dejme tomu, že je třeba $a > b$; máme dokázat, že $a - b < c$. Víme, že

$$a < b + c.$$

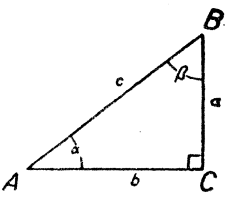
Proto, když od a ubereme b, zbude méně, nežli když od $b + c$ ubereme b; tedy

$$a - b < (b + c) - b.$$

Protože $(b + c) - b$ je totéž jako c, jsme hotovi.

Chceme-li se přesvědčit, zda tři délky a, b, c mohou býti délkami stran trojúhelníka, stačí se přesvědčit, že součet kterýchkoli dvou z nich je větší nežli třetí: neboť jsme právě nahlédli, že potom také rozdíl kterýchkoli dvou z nich bude menší než třetí a víme, že to už potom stačí. Dokonce stačí se přesvědčit, že největší z délek a, b, c je menší než součet ostatních dvou; neboť tím spíše bude kterákoli jiná menší než součet zbývajících dvou.

U pravoúhlého trojúhelníka zakladní označení je takové, jaké vidíte v obr. 66; a, b jsou odvěsny, c je přepona, C je vrchol pravého úhlu.



Obr. 66.

Největší strana pravoúhlého trojúhelníka je přepona. Neboť přepona leží proti pravému úhlu a odvěsna proti ostrému úhlu, který je menší.

Nejdelší strana tupoúhlého trojúhelníka leží proti tupému úhlu. Neboť ostatní strany leží proti ostrým úhlům, které jsou menší.

Nejkratší vzdálenost od bodu A k přímce c je vzdálenost $\overline{AP}$, kde P znamená patu kolmice spuštěné s bodu A na přímku c. Neboť je-li X kterýkoli jiný bod přímky c, pak APX je pravoúhlý trojúhelník, AP je odvěsna, AX je přepona, tedy $\overline{AX} > \overline{AP}$.

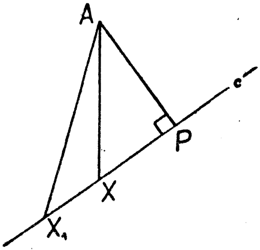
Můžeme si snadno dokázati ještě více! Bod P rozdělí přímku c na dvě polopřímky. Pohybuje-li se bod po jedné z těchto polopřímek, počínaje polohou P, pak jeho vzdálenost od bodu A stále vzrůstá. Neboť v trojúhelníku AXX_1 (viz obr. 67) leží strana AX_1 proti tupému úhlu, takže je delší nežli strana AX.

V paragrafu 3 jsme si zjistili, že poučka s s u není vždycky správná (viz obr. 45 až 47). Správná je tato poučka:

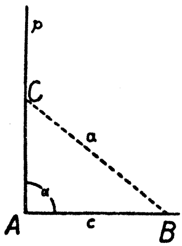
Trojúhelník je určen, známe-li dvě strany a úhel proti větší z nich.

Druhé znění: **Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich.**

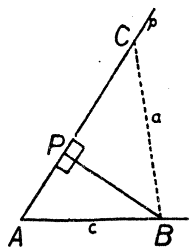
Dejme tomu, že jsou dány délky a, c, při čemž je a větší než c, a mimo to je dán úhel α. Setrojíme si úhel α s vrcholem A a na jedno rameno naneseme délku $\overline{AB} = c$; druhé rameno si označíme p. [Stejně to bylo v obrazcích 45 až 47.] Běží o to, že na polopřímce p leží pouze jediný bod C takový, že vzdálenost $\overline{BC}$ je rovna dané délce a. Rozeznávejme tři případy podle toho, zda úhel α je pravý, ostrý či tupý.



Obr. 67.



Obr. 68.

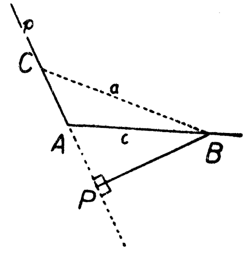


Obr. 69.

Případ prvý: $\alpha = R$ (viz obr. 68). Zde A je pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p. Pohybuje-li se bod X po polopřímce p, počínajíc polohou A, víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Počíná nejmenší hodnotou $\overline{AB} = c$; protože $a > c$, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro jedinou polohu C bodu X.

Případ druhý: $\alpha < R$ (viz obr. 69). Je-li P pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p, tu v našem případě padne bod P do polopříčky p. Vzdálenost $\overline{AB} = c$ je větší nežli $\overline{BP}$; protože $a > c$, je tím spíše a větší nežli BP. Z bodu P vychází polopřímka p_0 (v obrazci nevyznačená), která je částí polopřímky p. Pohybuje-li se bod X po polopřímce p_0, počínajíc polohou P, víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Počíná nejmenší hodnotou $\overline{BP}$; protože $a < \overline{BP}$, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro jedinou polohu C bodu X na polopřímce p_0. Ovšem polopřímka p_0 je pouze částí polopřímky p, která se skládá jednak z polopřímky p_0, jednak ještě z úsečky $\overline{PA}$. Ale pohybuje-li se bod X po úsečce $\overline{PA}$, počínajíc polohou P, tu vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá a končí největší hodnotou $\overline{BA} = c$; protože i tato největší hodnota je menší nežli a, nenabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty a pro žádnou polohu bodu X na úsečce PA.

Případ třetí: $a > R$ (viz obr. 70). Je-li zase P pata kolmice spuštěné s bodu B na přímku, jejíž částí je polopřímka p, tu v našem případě padne bod P mimo polopřímku p. Polopřímka p je nyní částí polopřímky PA. Pohybuje-li se bod X po polopřímce PA, počínajíc polohou P, víme, že vzdálenost $\overline{BX}$ stále vzrůstá. Když bod X přijde do polohy A, nabude vzdálenost $\overline{BX}$ hodnoty c; potom přejde bod X na polopřímku p a vzdálenost $\overline{BX}$ vzrůstá dále; dané hodnoty $a > c$ nabude vzdálenost $\overline{BX}$ pro jedinou polohu C bodu X.



Obr. 70.

Cvičení k § 5.

123. Rovnoramenný trojúhelník má při základně úhel

a) $25^0\,48'\,56''$. b) $36^0\,54'\,12''$. c) $54^0\,27'\,46''$.
d) $58^0\,58'\,58''$. e) $64^0\quad 57''$. f) $73^0\,33'\,38''$.

Vypočtěte úhel proti základně.

124. Rovnoramenný trojúhelník má proti základně úhel

a) $12^0\,15'\,42''$. b) $23^0\,45'\,6''$. c) $34^0\,56'\,54''$.
d) $82^0\,16'\,36''$. e) $112^0\,52'\,28''$. f) $148^0\,36'\,48''$.

Vypočtěte úhel při základně.

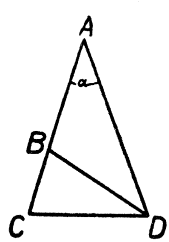
125. Jeden úhel rovnoramenného trojúhelníka měří 74^0. Vypočtěte ostatní úhly. (Dvoje řešení!)

126. Úhel při základně rovnoramenného trojúhelníka je dvojnásobek úhlu proti základně. Vypočtěte všecky úhly.

127. Úhel proti základně rovnoramenného trojúhelníka je trojnásobek úhlu při základně. Vypočtěte všecky úhly.

128. V obr. 71 je $\overline{AC} = \overline{AD}$, $\overline{BD} = \overline{CD}$, $\alpha = 34^0$. Vypočtěte $\sphericalangle ADB$.

129. V obr. 72 je $\varphi = 42^0$, $\psi = 66^0$. S je střed kružnice. Vypočtěte úhly trojúhelníka HKL.



Obr. 71.

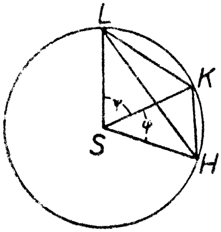
130. V obr. 73 je $\overline{XZ} = \overline{VZ}$, $\beta = 52^0$, $\gamma = 84^0$, $\varepsilon = 32^0$, $\omega = 96^0$. Dokažte:

a) $XV \parallel YZ$. (Bod U, úsečka UZ a úhel γ jsou v této části zbytečné.)

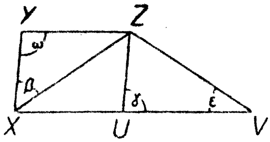
b) $XY \parallel UZ$.

131. V obr. 74 je $\overline{PQ} = \overline{PN}$, $\delta_1 = 32^0$, $\delta_2 = 80^0$. Najděte $\sphericalangle\, QPR$.

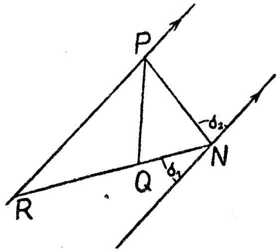
132. *ABCDE* je pravidelný pětiúhelník. Přímky *AD* a *BE* se protnou v bodě *F*. Určete úhly trojúhelníka *ABF*.



Obr. 72.



Obr. 73.



Obr. 74.

133. V obr. 75 je $\overline{EF} = \overline{EH}$, $\varphi = 37^0$, $\psi = 148^0$. Dokažte, že $\overline{FG} = \overline{FH}$.

134. V obr. 76 je $\alpha = 67^0$, $\beta = 75^0$, $\gamma = 104^0$. Dokažte, že $\overline{RP} = \overline{RS}$.

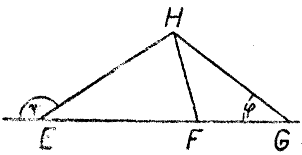
135. Uvnitř čtverce *ABCD* je rovnostranný trojúhelník *ABK*. Určete $\sphericalangle\, CKB$.

136. V obr. 77 je $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$. Dokažte, že $\overline{ZX} = \overline{ZV}$.

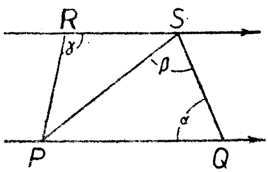
137. Na ose úhlu $\sphericalangle\, EFG$ leží bod H. Jest $EH \parallel FG$. Dokažte, že $\overline{EF} = \overline{EH}$.

138. V trojúhelníku *ABC* je $b = c$, $\beta = 62^0$. Co je větší, a nebo b?

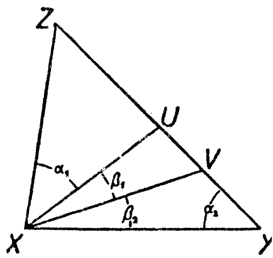
139. V trojúhelníku *ABC* měří vnější úhel při vrcholu *A* 126^0, při vrcholu *B* 118^0. Osa úhlu β a osa úhlu γ se protnou v bodě *S*. Co je větší, $\overline{BS}$ nebo $\overline{CS}$?



Obr. 75.



Obr. 76.



Obr. 77.

140. V trojúhelníku *ABC* je $\beta = 30^0$, $\gamma = 56^0$. Osa úhlu α protne stranu *BC* v bodě *X*. Která ze tří délek $\overline{AX}$, $\overline{BX}$, $\overline{CX}$ je největší? Která je nejmenší?

141. Bod *U* leží uvnitř trojúhelníka *ABC*. Dokažte, že

$$\sphericalangle\, AUB < \sphericalangle\, ACB.$$

[Přímka *AU* protne stranu *BC* v bodě *T*. Porovnejte oba úhly s úhlem $\sphericalangle\, ATB$.]

142. Bod U leží uvnitř trojúhelníka ABC. Dokažte, že

$$\overline{AU} + \overline{UB} < \overline{AC} + \overline{CB}.$$

[Přímka AU protne stranu BC v bodě T. Dokažte napřed, že $\overline{AT} + \overline{TB} < \overline{AC} + \overline{CB}$ a potom, že $\overline{AU} + \overline{UB} < \overline{AT} + \overline{TB}$.]

143. Rozhodněte, existuje-li trojúhelník ABC, ve kterém by platilo toto:

a) $a = 37{,}4$ cm, $b = 25{,}3$ cm, obvod $= 123$ cm;

b) $a = 49{,}8$ cm, $b = 12{,}5$ cm, obvod $=$ 1 m;

c) $a = 37{,}3$ cm, $b = 24{,}9$ cm, obvod $= 125$ cm;

d) $a = 50{,}1$ cm, $b = 13{,}6$ cm, obvod $=$ 1 m.

144. Zapište si všecky poučky, kterými jsme se zabývali v tomto paragrafu.

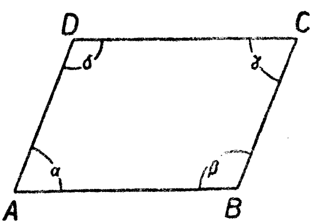
§ 6. Rovnoběžník.

Čtyrúhelník $ABCD$ se nazývá rovnoběžník, když je $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

To je nám již známo z paragrafu 2. Také již víme, že u rovnoběžníka v obr. 78 je $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ a že úhly α, β (nebo α, δ nebo β, γ nebo γ, δ) jsou výplňkové.

Obráceně, když o čtyrúhelníku $ABCD$ v obr. 78 víme, že $\alpha = \gamma$ a že $\beta = \delta$, můžeme souditi, že to je rovnoběžník: je-li u čtyrúhelníka každý úhel rovný úhlu protějšímu, je to rovnoběžník. Neboť víme, že $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$, neboli

$$(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) = 4R.$$



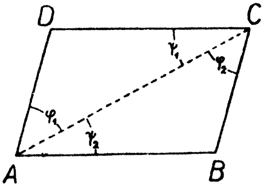
Obr. 78.

V našem případě je $\alpha = \gamma$, tedy α je polovina z $\alpha + \gamma$; dále je $\beta = \delta$, tedy β je polovina z $\beta + \delta$; tedy $\alpha + \beta$ je polovina ze $4R$, t. j. α a β jsou výplňkové úhly. Protože $\beta = \delta$, také α a δ jsou výplňkové úhly. Nyní α a β jsou přilehlé úhly (příčka AB, proťaté přímky AD, BC); protože $\alpha + \beta = 2R$, je $AD \parallel BC$. Také α a δ jsou přilehlé úhly (příčka AD, proťaté přímky AB, CD); protože $\alpha + \delta = 2R$, je $AB \parallel CD$. Tedy $ABCD$ je skutečně rovnoběžník.

Nyní si všimneme stran rovnoběžníka. **Dvě protější strany rovnoběžníka jsou si rovny.** V obr. 79 je $ABCD$ rovnoběžník. Chceme dokázati, že

$$\overline{AB} = \overline{CD},\ \overline{AD} = \overline{BC}.$$

Provedeme pomocnou konstrukci jako v obrazci. Vzniknou nám trojúhelníky ACD a ABC, které mají společnou stranu AC; mimo to je $\varphi_1 = \varphi_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\psi_1 = \psi_2$ (z téhož důvodu).



Obr. 79.

Proto je

$$ACD \cong CAB \quad \text{(usu)}$$

a z toho vychází $\overline{AD} = \overline{CB}$, $\overline{CD} = \overline{AB}$, což jsme měli dokázat.

Proveďte týž důkaz znovu s tou změnou, že za pomocnou čáru zvolíte úhlopříčku BD!

Jsou-li u čtyrúhelníka $ABCD$ protější strany AB a CD rovnoběžné a sobě rovné, je $ABCD$ rovnoběžník. Nyní víme o obr. 79, že

$$AB \parallel CD, \quad \overline{AB} = \overline{CD}$$

a máme dokázat, že je $AD \parallel BC$. Zase provedeme stejnou pomocnou konstrukci a opět si všimneme trojúhelníků ACD a ABC se společnou stranou AC. Nyní víme, že $\overline{CD} = \overline{AB}$; mimo to je $\psi_1 = \psi_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami). Proto je

$$ACD \cong CAB \quad \text{(sus)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle\ CAD = \sphericalangle\ ACB$ neboli $\varphi_1 = \varphi_2$. Avšak φ_1 a φ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC, proťaté přímky AD, BC); protože $\varphi_1 = \varphi_2$, je $AD \parallel BC$ a to jsme měli dokázati.

Zase proveďte důkaz znovu s tou změnou, že za pomocnou čáru zvolíte úhlopříčku BD!

Je-li u čtyrúhelníka každá strana rovná straně protější, je to rovnoběžník. Nyní víme o obr. 79, že

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AD} = \overline{BC};$$

máme dokázat, že $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Provedeme-li obvyklou pomocnou konstrukci, vyjde ihned

$$ACD \cong CAB \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle\ CAD = \sphericalangle\ ACB$, $\sphericalangle\ ACD = \sphericalangle\ CAB$ neboli $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$. Avšak φ_1 a φ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC, proťaté přímky AD, BC); protože $\varphi_1 = \varphi_2$, je $AD \parallel BC$. Také ψ_1 a ψ_2 jsou střídavé úhly (příčka AC, proťaté přímky AB, CD); protože $\psi_1 = \psi_2$, je $AB \parallel CD$.

Opakujte důkaz s obvyklou změnou!

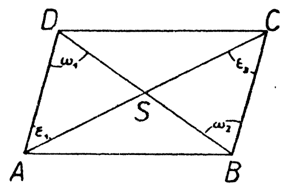
Nyní si všimneme u h l o p ř í č e k rovnoběžníka. **Úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí.** V obr. 80 je S průsečík úhlopříček rovnoběžníka $ABCD$. Chceme dokázati, že

$$\overline{AS} = \overline{CS}, \quad \overline{BS} = \overline{DS}.$$

Všimneme si trojúhelníků SAD, SBC. Víme, že $\overline{AD} = \overline{BC}$ (protější strany rovnoběžníka); mimo to je $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami) a $\omega_1 = \omega_2$ (z téhož důvodu). Proto je

$$SAD \cong SCB \quad \text{(usu)}$$

a z toho vychází $\overline{SA} = \overline{SC}$, $\overline{SD} = \overline{SB}$, což jsme měli dokázati.



Obr. 80.

Proveďte důkaz znovu s tou změnou, že místo trojúhelníků SAD, SCB si všimnete trojúhelníků SAB, SCD!

Jestliže se u čtyrúhelníka úhlopříčky navzájem půlí, je to rovnoběžník. Nyní víme o obr. 80, že

$$\overline{AS} = \overline{CS}, \quad \overline{BS} = \overline{DS}.$$

Zase si všimneme trojúhelníků SAD, SBC. Jest $\sphericalangle\, ASD = \sphericalangle\, BSC$ (vrcholové úhly). Proto je

$$SAD \cong SCB \quad \text{(sus)}$$

a z toho soudíme, že $\overline{AD} = \overline{CB}$. Dále si všimněme trojúhelníků SAB, SCD. Jest $\sphericalangle\, ASD = \sphericalangle\, CSD$. Proto je

$$SAB \cong SCD \quad \text{(sus)}$$

a z toho soudíme, že $\overline{AB} = \overline{CD}$. Nyní už víme o čtyrúhelníku $ABCD$, že se každá strana rovná straně protější. Proto $ABCD$ je rovnoběžník.

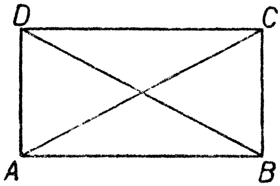
O b d é l n í k j e t a k o v ý č t y r ú h e l n í k, j e h o ž v š e c k y ú h l y j s o u p r a v é. Obdélník je rovnoběžník, neboť každý jeho úhel se rovná (každému jinému, tedy zejména) jeho úhlu protějšímu, a to, jak víme, platí jen pro rovnoběžníky.

O obdélníku platí zajisté všecko, co platí o rovnoběžnících. Zejména dvě protější strany obdélníka jsou stejně dlouhé a úhlopříčky obdélníka se navzájem půlí.

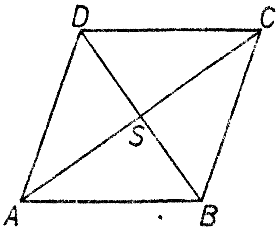
Obě úhlopříčky obdélníka jsou si rovny. V obr. 81 je $ACBD$ obdélník; chceme dokázati, že $\overline{AC} = \overline{BD}$. Všimneme si trojúhelníků ABC, BAD. Mají společnou stranu AB; dále je $\overline{BC} = \overline{AD}$ a mimo to $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$. Tedy

$$ABC \cong BAD \quad \text{(sus)}$$

a z toho následuje $\overline{AC} = \overline{BD}$.



Obr. 81.



Obr. 82.

Opakujte důkaz z tou změnou, že užijete trojúhelníků se společnou stranou AD!

Rovnoběžník, jehož obě úhlopříčky jsou si rovny, je obdélník. Nyní víme o obr. 81, že $ABCD$ je rovnoběžník a že $\overline{AC} = \overline{BD}$. Máme dokázati, že na př. úhel $\sphericalangle BAD$ je pravý. Protože $ABCD$ je rovnoběžník, musí býti $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$. Jelikož je také $\overline{AC} = \overline{BD}$, je

$$ABC \cong BAD \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$. Ale ty dva úhly jsou výplňkové (sousední úhly rovnoběžníka); protože jsou si rovné, musí býti pravé.

Kosočtverec je takový čtyrúhelník, jehož všecky strany jsou si rovny. Kosočtverec je rovnoběžník, neboť každá jeho strana se rovná (každé jiné, tedy zejména) protější straně, a to, jak víme, platí jen pro rovnoběžníky. Jako u každého rovnoběžníka, úhlopříčky kosočtverce se navzájem půlí.

Úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo. V obr. 82 je $ABCD$ kosočtverec. Chceme dokázati, že

$$BD \perp AC.$$

Trojúhelníky ABS, ADS mají společnou stranu AS; dále je $\overline{AB} = \overline{AD}$ (strany kosočtverce) a mimo to $\overline{BS} = \overline{SD}$ (úhlopříčky se půlí). Proto je

$$ABS \cong ADS \text{ (sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASD$. Ale ty dva úhly jsou výplňkové (neboť jsou vedlejší); protože jsou si rovné, musí býti pravé.

Každý úhel kosočtverce je půlen úhlopříčkou vycházející z toho vrcholu. Jako při předešlém důkaze je

$$ABS \cong ADS$$

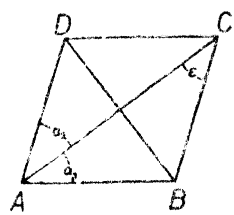
a proto $\sphericalangle BAS = \sphericalangle DAS$, t. j. úhlopříčka AC půlí úhel při vrcholu A.

Rovnoběžník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo, je kosočtverec. Nyní víme o obr. 82, že $ABCD$ je rovnoběžník a že úhly při vrcholu S jsou pravé. Chceme dokázati, že všecky délky $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ jsou stejné. Jako u každého rovnoběžníka víme i zde, že $\overline{AB} = \overline{CD}$ a že $\overline{BC} = \overline{AD}$. Proto potřebujeme pouze ukázati, že $\overline{AB} = \overline{AD}$. Všimneme si zase trojúhelníků ABS, ADS se společnou stranou AS. Jest $\overline{BS} = \overline{DS}$ (úhlopříčky se půlí) a mimo to $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASD$. Proto je

$$ABS \cong ADS \text{ (sus)}$$

a z toho následuje $\overline{AB} = \overline{AD}$, což jsme měli dokázati.

Je-li úhel při vrcholu A rovnoběžníka $ABCD$ půlen úhlopříčkou AC, je $ABCD$ kosočtverec. O obr. 83 víme, že $ABCD$ je rovnoběžník a že $\alpha_1 = \alpha_2$. Máme dokázati, že všecky strany jsou si rovny. Jako u každého rovnoběžníka víme i zde, že $\overline{AB} = \overline{CD}$ a že $\overline{AD} = \overline{BC}$. Proto potřebujeme pouze dokázati, že $\overline{AB} = \overline{BC}$. Jest $\alpha_2 = \varepsilon$ (střídavé úhly mezi rovnoběžkami); protože $\alpha_1 = \alpha_2$, jest $\alpha_1 = \varepsilon$. Avšak α_1 a ε jsou úhly trojúhelníka ABC proti stranám BC a AB. Protože ty úhly jsou si rovny, jsou si rovny také protější strany, t. j. $\overline{AB} = \overline{BC}$.



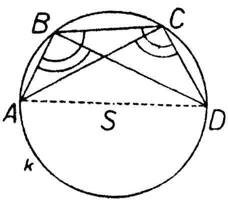
Obr. 83.

Čtverec je takový čtyrúhelník, který má i všecky strany stejné i všecky úhly pravé neboli čtverec je současně obdélníkem i kosočtvercem. Všecky vlastnosti obdélníka a všecky vlastnosti kosočtverce musí platit pro čtverec. Vyslovte pro čtverec ty vlastnosti, které zde byly dokázány pro obdélník nebo pro kosočtverec!

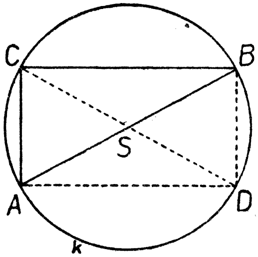
Leží-li body A, B, C na kružnici k, pak úhel $\sphericalangle ABC$ se nazývá obvodový úhel, určitěji: obvodový úhel nad tětivou AC. Viz obr. 84, ve kterém je vyznačen m. j. obvodový úhel $\sphericalangle ABC$ nad tětivou AC a obvodový úhel $\sphericalangle BCD$ nad tětivou BD. Důležitý případ nastane, když tětiva prochází středem kružnice neboli je průměrem kružnice. Pak máme obvodový úhel nad průměrem; v obr. 84 jsou vyznačeny dva takové úhly: $\sphericalangle ABD$ a $\sphericalangle ACD$.

Obvodový úhel nad průměrem je pravý. To je proslulá Thaletova věta. (Řecký filosof Thales milétský žil v 6. století př. Kr.) V obr. 85 je AB průměr kružnice k a bod C leží na kružnici k; máme dokázati, že

$$\sphericalangle ACB = R.$$



Obr. 84.



Obr. 85.

Veďme průměr CSD kružnice k a všimněme si čtyrúhelníka $ACBD$. Úsečky AB, CD jsou úhlopříčky čtyrúhelníka. Jsou to průměry kružnice k a protínají se ve středu S kružnice k. Z toho vychází především, že obě úhlopříčky čtyrúhelníka $ACBD$ se navzájem půlí, takže $ACBD$ je rovnoběžník. Dále však vychází, že obě úhlopříčky rovnoběžníka $ACBD$ jsou si rovny. Proto $ACBD$ je obdélník a $\sphericalangle ACB$ je pravý, jak jsme měli dokázati.

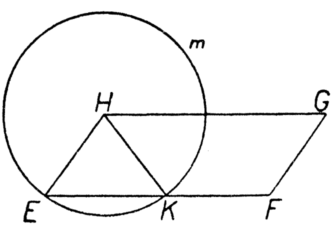
Mysleme si nyní místo úhlu $\sphericalangle ABC$ úhel $\sphericalangle ACX$, kde X je nějaký jiný bod kružnice k. Protože přímka CB má s kružnicí společné pouze body C a B a protože bod X naší kružnice není ani v poloze C ani v poloze B, nemůže přímka CX se krýt s přímkou CB. A protože CB stojí kolmo na CA (podle Thaletovy věty), nemůže CX státi kolmo na CA. **Obvodový úhel nad tětivou, která není průměrem, není úhel pravý.**

Cvičení k § 6.

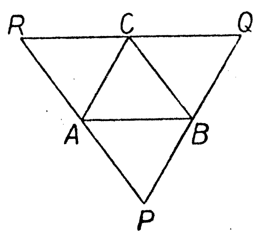
145. V obr. 86 je $EFGH$ rovnoběžník. H je střed kružnice m. Dokažte, že
$$\sphericalangle GHK = \sphericalangle FGH.$$
[U každého z obou úhlů si najděte v obrazci jiný úhel, o kterém víte, že mu je rovný.]

146. Obr. 87 vznikl tak, že každým vrcholem trojúhelníka ABC byla vedena rovnoběžka s protější stranou. Dokažte, že body A, B, C jsou středy stran trojúhelníka PQR.

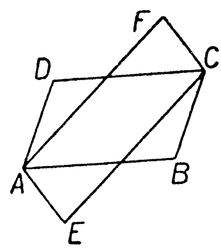
147. STX je přímka. $STUV$ je rovnoběžník. Osa úhlu $\sphericalangle XTU$ protne přímku VS v bodě Y a přímku VU v bodě Z. Dokažte, že
$$\overline{VY} = \overline{VZ} = \overline{ST} + \overline{TU}.$$



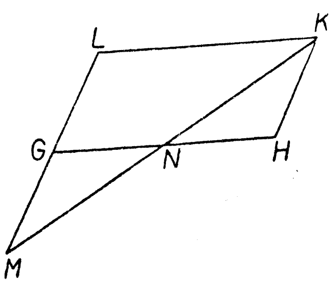
Obr. 86.



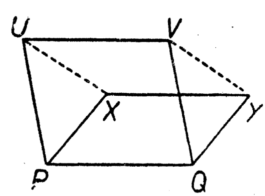
Obr. 87.



Obr. 88.



Obr. 89.



Obr. 90.

148. V obr. 88 jsou $ABCD$ a $AECF$ rovnoběžníky. Dokažte, že všecky tři přímky AC, BD, EF se protnou v jediném bodě. Potom dokažte, že $BE \parallel FD$.

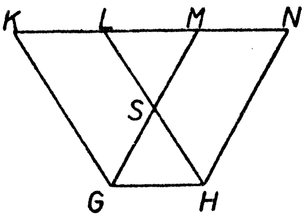
149. V obr. 89 je $GHKL$ rovnoběžník a $\overline{GN} = \overline{NH}$. Dokažte, že $\overline{LG} = \overline{GM}$.

150. $ABCD$ je rovnoběžník. S je střed strany AB, T je střed protější strany. Dokažte, že $BSDT$ je rovnoběžník.

151. V obr. 90 jsou $PQYX$, $PQVU$ dva rovnoběžníky. Dokažte, že také $XYVU$ je rovnoběžník. Je to pravda také tehdy, když rovnoběžníky $PQYX$, $PQVU$ leží každý v jiné rovině?

152. *ABCD* je rovnoběžník. *S* je střed strany *AB, T* střed strany *CD, E* střed strany *BC, F* střed strany *DA*. Sestrojte přímky *AE, BT, CF, DS* a dokažte, že těmi přímkami je určen nový rovnoběžník.

153. V obr. 91 jsou *GHLK* a *GHNM* dva rovnoběžníky. *S* je střed úsečky *HL*. Dokažte, že body *L* a *M* dělí úsečku *KN* na tři stejné díly.



Obr. 91.

154. Zvolte si libovolný čtyrúhelník *ABCD*. Určete body *E* a *F* tak, aby *ADCE, BADF* byly rovnoběžníky. Dokažte, že přímka *EF* prochází středem úsečky *BC*.

155. Veďte bodem *O* tři přímky. Na první zvolte bod *H*, na druhé bod *K*, na třetí bod *L*. Určete body *X, Y* a *Z* tak, aby *OKXL, OLYH, OHZK* byly rovnoběžníky. Dokažte, že úsečky *HX, KY, LZ* se navzájem půlí.

156. Zvolte si trojúhelník *ABC*. Zvolte si bod *D* na straně *AB* a bod *E* na straně *AC*. Dokažte, že úsečky *CD* a *BE* se nemohou navzájem půlit.

157. Víme-li o j e d n o m úhlu rovnoběžníka, že je pravý, je to jistě obdélník. (Dokažte!)

158. Má-li čtyrúhelník všecky úhly stejné, je to obdélník. (Dokažte!)

159. *ABCD* je rovnoběžník. *S* je střed strany *AB, T* střed strany *CD, E* střed strany *BC, F* střed strany *DA*. Dokažte:

a) *ESFT* je rovnoběžník.
b) Když *ABCD* je obdélník, *ESFT* je kosočtverec.
c) Když *ABCD* je kosočtverec, *ESFT* je obdélník.
d) Když *ABCD* je čtverec, *ESFT* je čtverec.
e) Když *ESFT* je kosočtverec, *ABCD* je obdélník.
f) Když *ESFT* je obdélník, *ABCD* je kosočtverec.
g) Když *ESFT* je čtverec, *ABCD* je čtverec.

160. Které nové geometrické výrazy se vyskytly v tomto paragrafu? Zapište si je!

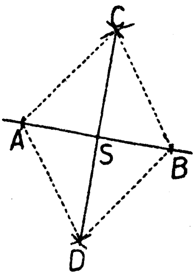
161. Zapište si poučky, které jsme dokázali v tomto paragrafu.

§ 7. Konstrukce.

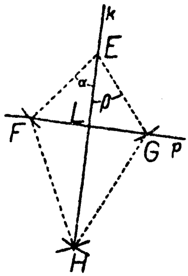
Víte, že říkáme *euklidovská konstrukce* takové konstrukci, při které se užívá pouze dvou základních výkonů: [1] narýsovati přímku, která spojuje dva dané body; [2] narýsovati kružnici, která má daný střed a daný poloměr.

Řada základních euklidovských honstrukcí je vám známa. Správnost každé z nich si můžeme potvrditi pomocí pouček, které jsme letos probírali.

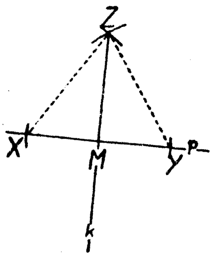
V obr. 92 je znázorněno, jak se euklidovsky sestrojí střed S úsečky AB a osa CD úsečky AB. Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili o její správnosti, máme dokázati, že $\overline{AS} = \overline{BS}$ a že $CD \perp AB$. Podle konstrukce je $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD}$, takže $ACBD$ je kosočtverec. Víme, že úhlopříčky kosočtverce (jako každého jiného rovnoběžníka) se navzájem půlí: proto je $\overline{AS} = \overline{BS}$. Víme, že úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo: proto je $\overline{CD} \perp AB$.



Obr. 92.



Obr. 93.



Obr. 94.

V obr. 93 je znázorněno, jak se euklidovsky spustí kolmice k s bodu E na přímku p. Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že opravdu je $EH \perp p$, že tedy $\sphericalangle\, ELF$ je pravý úhel, všimneme si napřed trojúhelníků EFH a EGH. Podle konstrukce je

$$EFH \cong EGH \quad \text{(sss)}$$

a z toho plyne $\sphericalangle\, FEH = \sphericalangle\, GEH$ neboli $\alpha = \beta$. Teď si všimneme trojúhelníků FEL a GEL. Jest $\overline{FE} = \overline{GE}$, $\alpha = \beta$ a strana EL je oběma trojúhelníkům společná. Proto je

$$FEL \cong GEL \quad \text{(sus)}$$

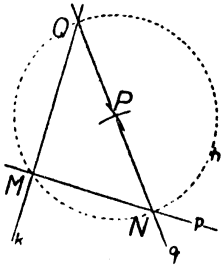
a z toho následuje $\sphericalangle\, ELF = \sphericalangle\, ELG$. Tedy úhel $\sphericalangle\, ELF$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle\, ELF = R$.

V obr. 94 je znázorněno, jak se euklidovsky vztyčí kolmice k k přímce p v jejím bodě M. Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že opravdu $\sphericalangle\, XMZ = R$, všimneme si trojúhelníků XMZ a YMZ. Podle konstrukce je

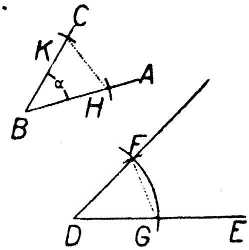
$$XMZ \cong YMZ \quad \text{(sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle\, XMZ = \sphericalangle\, YMZ$. Tedy úhel $\sphericalangle\, XMZ$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle\, XMZ = R$.

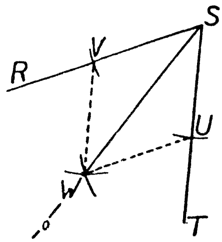
V obr. 95 je znázorněn jiný zajímavý způsob euklidovské konstrukce, vztyčiti kolmice k přímce p v jejím bodě M. P o p i s: Na přímce p si zvolíme ještě jeden bod N. Kružítkem si stanovíme bod P tak, aby bylo $\overline{MP} = \overline{NP}$, dále sestrojíme spojnici $q = NP$ a na ní si stanovíme kružítkem bod Q tak, aby bylo $\overline{QP} = \overline{NP}$. Spojnice QM je žádaná kolmice k. O d ů v o d n ě n í: Jest $\overline{MP} = \overline{NP} = \overline{QP}$, takže body M, N a Q leží na kružnici h se středem P. Tedy $\sphericalangle\ QMN$ je



Obr. 95.



Obr. 96.



Obr. 97.

obvodový úhel a protože QN je průměr kružnice h, je $\sphericalangle\ QMN = R$ podle Thaletovy věty.

Také úloha, spustit na přímku p kolmici s bodu Q, dá se euklidovsky řešit pomocí Thaletovy věty, ale je to konstrukce složitější než ta, která je znázorněna v obr. 93. Bodem Q si vedeme libovolnou přímku q (viz zase obr. 95). Je-li N průsečík přímek p a q, najdeme si střed P úsečky QN, což umíme provésti euklidovsky. Potom si opíšeme se středu P kružnici h tak, aby procházela bodem Q. Kružnice h má s přímkou p vedle bodu N společný ještě jeden bod M. Přímka QM je žádaná kolmice k. Proč?

V obr. 96 je znázorněno, jak se euklidovsky sestrojí úhel, který se rovná danému úhlu α a má jedno rameno v dané polopřímce DE (tedy vrchol v bodě D). Vyložte ústně průběh konstrukce! Abychom se přesvědčili, že je správná, máme dokázati, že $\sphericalangle\ GDF = \alpha$. Podle konstrukce je

$$BHK \cong DGF \quad \text{(sss)},$$

takže $\alpha = \sphericalangle\ HBK = \sphericalangle\ GDF$.

V obr. 97 je znázorněno, jak se euklidovsky najde osa o úhlu $\sphericalangle\ RST$. Vyložte ústně průběh konstrukce! Podle ní je $\overline{SU} = \overline{SV} =$

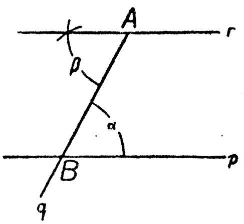
$= \overline{UW} = \overline{VW}$, takže $SUWV$ je kosočtverec. Víme, že úhlopříčka SW půlí úhel $\sphericalangle VSU = \sphericalangle RST$. Proto $o = SW$ je osa úhlu $\sphericalangle RST$.

Euklidovská konstrukce úhlu 60° je založena na poučce, že **každý úhel rovnostranného trojúhelníka se rovná 60°**. Tato poučka nebyla v této části učebnice ještě výslovně uvedena, ale znáte poučku, že proti stejným stranám leží stejné úhly, a poučku o součtu úhlů. Z těchto dvou plyne snadno.

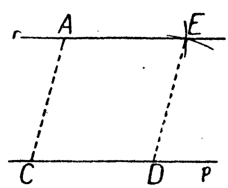
Protože umíme euklidovsky sestrojit úhly 60° a 90° a protože umíme euklidovsky rozpůlit daný úhel, dovedeme euklidovsky sestrojit rozmanité úhly (viz cvič. 162).

Když velikost úhlu je vyjádřena **celým** počtem stupňů, dá se úhel euklidovsky sestrojit, kdykoli počet stupňů je násobek tří (ale nebudeme se to učit); dá se také dokázat, že když počet stupňů není násobek tří, je euklidovská konstrukce nemožná. Na př. úhel 10° nelze euklidovsky sestrojit.

V obrazcích 98 a 99 jsou znázorněny euklidovské konstrukce úlohy, vésti bodem A rovnoběžku r k přímce p.



Obr. 98.

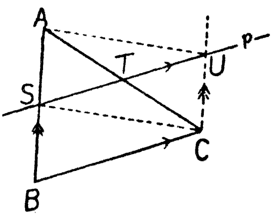


Obr. 99.

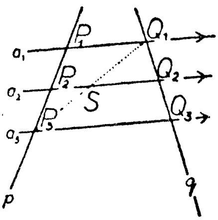
Popis konstrukce z obr. 98: Bodem A si vedeme libovolnou přímku q a označíme B její průsečík s přímkou p. Přímky p a q určí úhel α. Sestrojíme si euklidovsky úhel β rovný úhlu α s jedním ramenem v polopřímce AB, ale na druhé straně od přímky q než je úhel α. Druhé rameno úhlu β je v žádané rovnoběžce r. **Odůvodnění**: Úhly α a β jsou střídavé (příčka q, protťaté přímky p a r); protože $\alpha = \beta$, jest $r \parallel p$.

Popis konstrukce z obr. 99: Na přímce p si zvolíme dva body C a D. Kružítkem si opatříme takový bod E, aby bylo $\overline{AE} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{AC}$. Přímka AE je žádaná rovnoběžka r. **Odůvodnění**: Protože $\overline{AE} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = \overline{AC}$, je $ACDE$ rovnoběžník, takže $AE \parallel CD$.

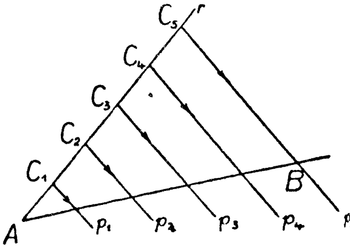
V tomto paragrafu se naučíme, jak se může daná úsečka euklidovsky rozdělit na předepsaný počet stejných dílů. Ale napřed si uvedeme dvě poučky. **Jestliže přímka p rovnoběžná se stranou BC trojúhelníka ABC prochází středem strany AB, pak prochází také středem strany AC.** V obr. 100 je tedy $p \parallel BC$ a S je střed strany AB. Máme dokázati, že T je střed strany AC. Za tím účelem si vedeme bodem C rovnoběžku se stranou AB a označíme si U její průsečík s přímkou p. Protože $SU \parallel BC$, $SB \parallel UC$, je $BSUC$ rovnoběžník a z toho následuje $\overline{CU} = \overline{BS}$. Protože také $\overline{SA} = \overline{BS}$, je $\overline{CU} = \overline{SA}$. Tedy $CU \parallel SA$, $\overline{CU} = \overline{SA}$ a proto $CUAS$ je rovnoběžník.



Obr. 100.



Obr. 101.



Obr. 102.

Úhlopříčky AC a SU rovnoběžníka $CUAS$ se protnou v bodě T. Protože úhlopříčky rovnoběžníka se půlí, je T střed úsečky AC, což jsme měli dokázati.

Nyní druhou poučku (viz obr. 101)! **Nechť rovnoběžky a_1, a_2, a_3 protnou přímku p v bodech P_1, P_2, P_3, a přímku q v bodech Q_1, Q_2, Q_3; jestliže $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$, pak také $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3}$.** Tu poučku dokážeme, když vedeme pomocnou čáru P_3Q_1 a užijeme dvakrát za sebou předešlé poučky. Po prvé ji užijeme na trojúhelníku $P_3P_1Q_1$; přímka a_2 je rovnoběžná se stranou P_1Q_1 a prochází středem P_2 strany P_3P_1; proto přímka a_2 prochází středem S strany P_3Q_1. Po druhé užijeme téže poučky na trojúhelník $Q_1P_3Q_3$; přímka a_2 je rovnoběžná se stranou P_3Q_3 a prochází středem S strany Q_1P_3; proto přímka a_2 prochází středem strany Q_1Q_3. Ale to právě znamená, že $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3}$, což jsme měli dokázati.

V obr. 102 je znázorněno euklidovské řešení úlohy, rozděliti úsečku AB na pět stejných dílů. P o p i s: Bodem A si vedeme libovolnou přímku r a zvolíme si na ní libovolný bod C_1. Kružítkem si určíme postupně další body C_2, C_3, C_4, C_5 na přímce r tak, aby bylo $\overline{AC_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_2C_3} = \overline{C_3C_4} = \overline{C_4C_5}$. Spojíme C_5B a vedeme rovnoběžky p_4, p_3, p_2, p_1 s přímkou C_5B tak, že p_1 prochází bodem C_1, p_2 bodem C_2 atd. Přímky p_1, p_2, p_3, p_4 protnou přímku AB v bodech, které rozdělí úsečku AB na pět stejných dílů.

Základní konstrukce trojúhelníka jsme již probírali. Pro opakování zde máte ještě cvič. 165.

Známe-li jeden ostrý úhel pravoúhlého trojúhelníka, známe všecky tři úhly. Proto z poučky usu následuje, že **pravoúhlý trojúhelník je určen, známe-li**

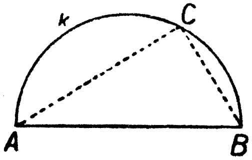
a) délku jedné odvěsny a jeden ostrý úhel;

b) délku přepony a jeden ostrý úhel.

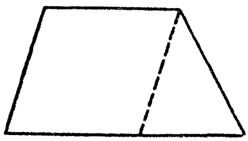
Ale pravoúhlý trojúhelník je také určen, známe-li

c) délku přepony a délku jedné odvěsny.

Neboť přepona je delší než odvěsna a proti přeponě je pravý úhel; tedy známe dvě strany a úhel proti větší z nich. Při sestrojování v případě c) začneme obyčejně tak, že si zvolíme určitou polohu dané odvěsny; vyložte sami, jaký je potom průběh konstrukce! Ale je zajímavé, že si při této úloze můžeme také zvoliti určitou polohu přepony AB (viz obr. 103): Opíšeme nad průměrem AB polokruž-



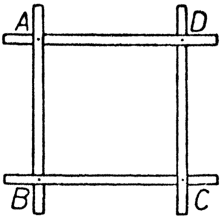
Obr. 103.


Obr. 104.

nici k; je-li dána na př. délka $\overline{AC} = b$, najdeme si kružítkem na polokružnici k ten bod C, jehož vzdálenost od bodu A se rovná dané délce b. Že trojúhelník ABC je pravoúhlý, to plyne z Thaletovy věty.

Při konstrukcích lichoběžníka často pomůže pomocná čára (vyčárkovaná v obr. 104), která lichoběžník rozdělí na rovnoběžník a na trojúhelník.

Kdežto trojúhelník je určen, známe-li délky všech stran, u čtyrúhelníka už tomu tak není. V obr. 105 jsou znázorněny čtyři dřevěné laťky, spojené v bodech A, B, C a D tak, že se každá laťka může otáčeti. V dané poloze je $ABCD$ čtverec, můžeme však body A, C přiblížit k sobě nebo oddálit od sebe, takže nám vzniknou kosočtverce rozmanitých tvarů, které všecky mají strany tak dlouhé jako původní čtverec. K určení čtyrúhelníka nestačí čtyři číselné údaje; jejich potřeba pět (viz cvič. 174).



Obr. 105.

Cvičení k § 7.

162. Jak byste sestrojili euklidovsky úhly
15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 90^0, 105^0, 120^0, 135^0, 150^0, 165^0?
Jak úhly $22\frac{1}{2}^0$, $52\frac{1}{2}^0$, $67\frac{1}{2}^0$?

163. Jak byste sestrojili euklidovsky k dané přímce p rovnoběžku, jejíž vzdálenost od přímky p je rovná délce dané úsečky?

164. Narýsujte si úsečku AB dlouhou přesně 7 cm a rozdělte ji euklidovsky na sedm stejných dílů. Změřte ty díly!

Ve cvič. 165 neužívejte při konstrukci úhloměru, nýbrž sestrojujte úhly euklidovsky. Ale při kontrolních měřeních užijete úhloměru.

165. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů:

a) $a = 53$ mm, $b = 81$ mm, $c = 42$ mm. Změřte úhly.
b) $a = 8{,}5$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10{,}7$ cm. Změřte úhly.
c) $a = 7{,}5$ cm, $\beta = 75^0$, $\gamma = 45^0$. Změřte b, c.
d) $b = 75$ mm, $\beta = 60^0$, $\gamma = 97\frac{1}{2}^0$. Změřte a, c.
e) $c = 3{,}2$ cm, $\alpha = 82\frac{1}{2}^0$, $\gamma = 30^0$. Změřte a, b.
f) $b = 39$ mm, $c = 55$ mm, $\alpha = 112\frac{1}{2}^0$. Změřte a, β, γ.
g) $a = 12{,}5$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 75^0$. Změřte b, α, γ.

166. Pomocí základních pouček o určení trojúhelníka dokažte, že rovnoramenný trojúhelník je určen, známe-li

a) délku základny a délku ramene;
b) délku základny a úhel při základně;
c) délku základny a úhel proti základně;
d) délku ramene a úhel při základně;
e) délku ramene a úhel proti základně.

Také ve cvič. 167 sestrojujte dané úhly euklidovsky.

167. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC podle daných údajů. Základna je AB.

a) $c = 4{,}7$ cm, $\beta = 67\,^\circ$, změřte a.
b) $c = 72$ mm, $\gamma = 97\frac{1}{2}{}^\circ$; změřte a.
c) $b = 5$ cm, $\beta = 75^\circ$; změřte c.

168. Sestrojte provoúhlý trojúhelník ABC podle daných údajů. (Jest $\measuredangle\, ACB = R$.)

a) $a = 67$ mm, $\beta = 30^\circ$; změřte b, c.
b) $a = 5\frac{1}{2}$ cm, $\alpha = 52\frac{1}{2}{}^\circ$; změřte b, c.
c) $b = 5$ cm, $\alpha = 75^\circ$; změřte a, c.
d) $b = 6$ cm, $\beta = 67\frac{1}{2}{}^\circ$; změřte a, c.
e) $c = 7$ cm, $\alpha = 22\frac{1}{2}{}^\circ$; změřte a, b.
f) $a = 37$ mm, $b = 51$ mm; změřte c, α.
g) $a = 4$ cm, $c = 8{,}5$ cm; změřte b, α.

V následujících cvičeních 169 až 174 si pokaždé napřed udělejte malý obrazec od ruky, který vám pomůže při přemýšlení o postupu práce.

169. Sestrojte euklidovsky čtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{AB} = 7$ cm; změřte $\overline{AC}$.
b) $\overline{AC} = 9$ cm; změřte $\overline{AB}$.

170. Sestrojte euklidovsky obdélník $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\overline{AD}$.
b) $\overline{BD} = 8$ cm, úhlopříčky tvoří úhel $\measuredangle\, ASB = 37\frac{1}{2}{}^\circ$; změřte strany.

171. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno:

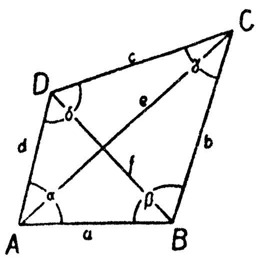
a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AD} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\measuredangle\, BAD$.
b) $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BD} = 8$ cm; změřte $\overline{BC}$.
c) $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BD} = 12$ cm, úhlopříčky tvoří úhel $\measuredangle\, ASB = 60^\circ$; změřte strany.

172. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{BD} = 7$ cm, $\measuredangle\, ABC = 40^\circ$; změřte $\overline{AC}$.
b) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm; změřte $\measuredangle\, BAD$.
c) $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BD} = 9$ cm; změřte $\overline{AB}$.

173. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ podle daných údajů. AB a CD jsou základny.

a) $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CD} = 3$ cm, $\overline{DA} = 3\frac{1}{2}$ cm; změřte $\measuredangle\, BAD$.
b) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 2$ cm, $\overline{DA} = 4$ cm; změřte $\measuredangle\, BAD$.
c) $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 5$ cm, $\measuredangle\, BAD = 72^\circ$, $\measuredangle\, ABC = 40^\circ$; změřte $\overline{BC}$.
d) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{CD} = 7$ cm, $\measuredangle\, BAD = 130^\circ$, $\measuredangle\, ABC = 70^\circ$; změřte $\overline{AD}$.



Obr. 106.

174. Sestrojte čtyrúhelník $ABCD$ podle daných údajů. Označení stran, úhlů a úhlopříček jako v obr. 106.

a) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm, $d = 10$ cm, $\beta = 105^0$; změřte e a f;

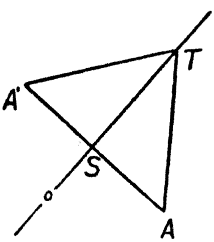
b) $a = 82$ mm, $b = 56$ mm, $c = 42$ mm, $f = 93$ mm, $\alpha = 70^0$; změřte d a e;

c) $c = 9$ cm, $d = 3{,}2$ cm, $f = 10{,}6$ cm, $\gamma = 85^0$, $\delta = 124^0$; změřte a a b.

§ 8. Souměrnost osová a souměrnost středová.

O **souměrnosti osové** jsme již mluvili v druhé třídě. Tato souměrnost je určena přímkou o, která se jmenuje **osa souměrnosti**. K danému geometrickému útvaru dostaneme útvar s ním **souměrně sdružený**, překlopíme-li původní útvar kolem osy o. Z tohoto názorného vytvoření útvaru souměrně sdruženého plyne, že každý geometrický útvar je shodný s útvarem souměrně sdruženým, neboli že každá úsečka je stejně dlouhá s úsečkou souměrně sdruženou a že každý úhel se rovná úhlu souměrně sdruženému.

Je-li A libovolný bod, nazveme pro krátkost **obrazem** bodu A a označíme A' (což čteme A s čárkou) bod souměrně sdružený s bodem A. Leží-li bod A na ose o, splyne s bodem A'; proto říkáme, že každý bod na ose o je **bod samodružný**. Je-li A libovolný bod, pak obraz A'' jeho obrazu A' splyne s původním bodem A.



Obr. 107.

Je-li A libovolný bod a je-li A' jeho obraz, tu je nám známo, že střed S úsečky AA' leží na ose o a že je $o \perp AA'$. Víme-li, že při osové souměrnosti se nemění ani délky úseček ani velikosti úhlů, můžeme si tuto základní vlastnost osové souměrnosti odvoditi takto (viz obr. 107): Zvolme si na ose o libovolný bod T. Vznikne nám trojúhelník $AA'T$. Protože přímka o je souměrně sdružena sama s sebou, protože mimo to se stranou AT našeho trojúhelníka je sdružena strana $A'T$ a protože při souměrnosti se velikosti úhlů nemění, je úhel osy o se stranou AT rovný úhlu osy o se stranou $A'T$ neboli o půlí $\sphericalangle ATA'$. Z toho následuje, že přímka o vedená vrcholem trojúhelníka $AA'T$ vnikne dovnitř tohoto trojúhelníka a proto musí protnouti protější stranu, t. j. úsečku AA'. Označme si S průsečík úsečky AA' s osou o. S trojúhelníkem AST je souměrně sdružený trojúhelník $A'ST$, takže

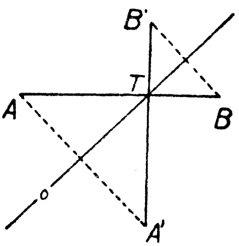
$$AST \cong A'ST;$$

z této shodnosti plyne předně, ze $\overline{AS} = \overline{A'S}$, což je prvá z věcí, které jsme měli dokázati; za druhé plyne z téže shodnosti, že úhly $\sphericalangle AST$ a $\sphericalangle A'ST$ jsou si rovny; protože to jsou úhly vedlejší, jsou tedy pravé a to je druhá z věcí, které jsme měli dokázati.

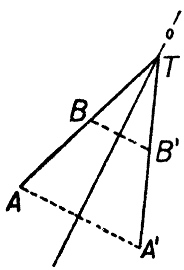
Vycházejíce z výše vyslovené základní vlastnosti osové souměrnosti, můžeme snadno dokázati, že při osové souměrnosti se délky úseček nemění. Všimněme si nejprve takové úsečky AT, jejíž jeden krajní bod T leží na ose o. Máme zase obr. 107, ve kterém nyní víme, že úhly při vrcholu S jsou pravé a že $\overline{AS} = \overline{A'S}$; dokázati máme, že $\overline{AT} = \overline{A'T}$. Protože $\overline{ST} = \overline{ST}$, $\overline{AS} = \overline{A'S}$, $\sphericalangle AST = \sphericalangle A'ST$, jest

$$AST \cong A'ST$$

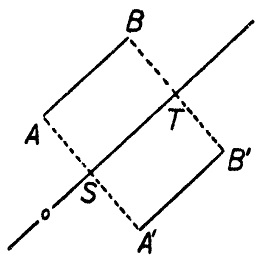
a z toho plyne $\overline{AT} = \overline{A'T}$. Všimneme-li si nyní libovolné úsečky AB, rozeznáváme tři případy. P ř e d n ě může úsečka AB protnouti osu o v bodě, který si označíme T (viz obr. 108); za d r u h é může prodloužení úsečky AB — třeba za bod B — protnouti osu o v bodě, který zase si označíme T (viz obr. 109); za třetí může býti $AB \parallel o$ (viz obr. 110). V případě obr. 108 víme, že



Obr. 108.



Obr. 109.



Obr. 110.

a podobně také
$$\overline{AT} = \overline{A'T}$$
$$\overline{TB} = \overline{TB'};$$

mimo to je $$\overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB},$$
$$\overline{A'B'} = \overline{A'T} + \overline{TB'},$$

takže musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

V případě obr. 109 zase je

$$\overline{AT} = \overline{A'T}, \quad \overline{BT} = \overline{B'T};$$

mimo to je v tomto případě

$$\overline{AB} = \overline{AT} - \overline{BT}; \quad \overline{A'B'} = \overline{A'T} - \overline{B'T};$$

takže zase musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Konečně v případě obr. 110 si označme S střed úsečky AA' a T střed úsečky BB'. Víme, že obě přímky ASA', BTB' jsou kolmé na o, takže jsou mezi sebou rovnoběžné. Tedy je $AS \parallel BT$; mimo to však víme, že je také $AB \parallel ST$. Tedy čtyrúhelník $ABTS$ je rovnoběžník. (Je to dokonce obdélník, ale na tom už nezáleží.) Víme, že u rovnoběžníka protější strany jsou si rovny. Tedy je $\overline{AS} = \overline{BT}$. Avšak $\overline{A'S} = \overline{AS}$, $\overline{B'T} = \overline{BT}$, takže musí býti také $\overline{A'S'} = \overline{B'T'}$. Tedy čtyrúhelník $A'B'TS$ má dvě protější strany $A'S$ a $B'T$ sobě rovné; protože také víme, že ty strany jsou rovnoběžné, je $A'B'TS$ rovnoběžník stejně jako $ABTS$. Z rovnoběžníka $ABTS$ soudíme, že $\overline{AB} = \overline{TS}$; z rovnoběžníka $A'B'TS$ soudíme, že $\overline{TS} = \overline{A'B'}$; proto je $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Jako jsme dokázali pomocí shodných trojúhelníků, že při souměrnosti osové se nemění délky úseček, podobně také bychom mohli dokázati, že při souměrnosti osové se nemění ani velikosti úhlů. Zase bychom musili rozeznávati různé případy. Ale je jednodušší usuzovati takto. Budiž dán libovolný úhel $\sphericalangle\, ABC$. (Zvolili jsme si libovolně bod A na jednom rameni a bod C na druhém.) Sestrojíme si trojúhelník ABC i trojúhelník souměrně sdružený $A'B'C'$. Víme, že

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

Proto je

$$ABC \cong A'B'C' \quad \text{(sss)}$$

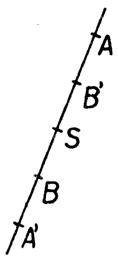
a z toho plyne $\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, A'B'C'$, což jsme měli dokázati.

Od osové souměrnosti se liší **souměrnost středová.** Tato souměrnost je určena bodem S, který se jmenuje **střed souměrnosti.** K danému geometrickému útvaru dostaneme útvar s ním **souměrně sdru-**

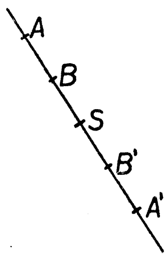
žený, otočíme-li původní útvar kolem bodu S o 180°. Z tohoto názorného vytvoření útvaru souměrně sdruženého plyne zase, že každý geometrický útvar je shodný s útvarem souměrně sdruženým, neboli že každá úsečka je stejně dlouhá s úsečkou souměrně sdruženou a že každý úhel se rovná úhlu souměrně sdruženému. Při středové souměrnosti máme zřejmě jen jediný **samodružný bod**, který?

Je-li A libovolný bod a je-li A' jeho **obraz** (t. j. zase bod souměrně sdružený), jest $\sphericalangle ASA' = 180^\circ$ a z toho následuje, že bod S leží na úsečce AA'. Protože $\overline{AS} = \overline{A'S}$, máme základní vlastnost středové souměrnosti: Obraz A' libovolného bodu A dostaneme, prodloužíme-li úsečku AS za bod S a naneseme-li $\overline{SA'} = \overline{AS}$.

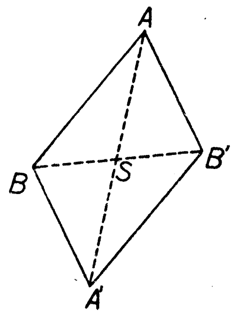
Vycházejíce zase ze základní vlastnosti středové souměrnosti, dokážeme si pomocí pouček nám známých, že dvě úsečky souměrně sdružené jsou stejně dlouhé. Pro úsečku AS, jejíž jeden krajní bod



Obr. 111.



Obr. 112.



Obr. 113.

je S, je zřejmé, že $\overline{AS} = \overline{A'S}$. Všimněme si za druhé takové úsečky AB, uvnitř které je bod S (viz obr. 111). Víme, že

$$\overline{AS} = \overline{A'S},\ \overline{BS} = \overline{A'S},$$

Protože však je

$$\overline{AB} = \overline{AS} + \overline{BS},$$
$$\overline{A'B} = \overline{A'S} + \overline{B'S},$$

musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Podobně usuzujeme v tom případě, když bod S leží na prodloužení úsečky AB (viz obr. 112). Proveďte úsudek sami!

Zbývá případ, kdy bod S neleží na přímce AB (viz obr. 113). V tomto případě si všimněme čtyrúhelníka $ABA'B'$. Bod S je průsečík jeho úhlopříček. Protože

$$\overline{AS} = \overline{A'S}, \quad \overline{BS} = \overline{B'S},$$

úhlopříčky se navzájem půlí, takže $ABA'B'$ je rovnoběžník. Protože protější strany rovnoběžníka jsou si rovny, jest $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, jak jsme měli dokázati.

Jakmile máme dokázáno, že při středové souměrnosti se nemění délky úseček, soudíme stejně jako při souměrnosti osové, že se nemění ani velikosti úhlů.

Z obr. 111 až 113 plyne také jiná důležitá vlastnost středové souměrnosti: Je-li AB libovolná přímka, pak přímka $\overline{A'B'}$ souměrně sdružená buďto s ní splyne (**samodružná přímka**) nebo je s ní rovnoběžná.

Cvičení k § 8.

175. Zvolte si (nepravidelný) pětiúhelník $ABCDE$ a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvolené osy. Proveďte to třikrát. Osu souměrnosti volte po prvé tak, aby ležela celá vně pětiúhelníka, po druhé tak, aby obsahovala jednu stranu, po třetí tak, aby proťala strany AB a CD.

176. Zvolte si zase (nepravidelný) pětiúhelník a sestrojte pětiúhelník souměrně sdružený podle zvoleného středu. Proveďte to zase třikrát. Střed souměrnosti volte po prvé vně pětiúhelníka, po druhé na obvodě (asi ve třetině jedné strany), po třetí uvnitř.

177. Jaký tvar musí míti trojúhelník, aby byl osově souměrný? Kolik os souměrnosti má rovnostranný trojúhelník? Může býti trojúhelník středově souměrný?

178. Jaký tvar musí míti čtyrúhelník, aby byl osově souměrný? Středově souměrný? (Jsou dva druhy osově souměrných čtyrúhelníků!)

179. Má-li nějaký geometrický útvar dvě k sobě kolmé osy souměrnosti, musí míti také střed souměrnosti. Dokažte!

180. Dokažte, že pravidelný n-úhelník má n os souměrnosti. Kudy procházejí? Zkoumejte napřed případy $n = 3, 4, 5, 6$, potom se pokuste usuzovati obecně. Musíte rozeznávati dva případy podle toho, zda číslo n je liché či sudé.

§ 9. Geometrická místa.

Pozorujeme-li hrot vteřinové ručičky u hodinek, vidíme, že jeho poloha se stále mění; všecky tyto polohy dohromady tvoří kružnici, kterou hrot proběhne celou za každou minutu. Říkáme, že ta kružnice je **geometrické místo** hrotu vteřinové ručičky. Když řekneme, že nějaká čára je geometrickým místem bodu, jehož poloha je podrobena předepsaným podmínkám, rozumíme tím, že dvě věci jsou splněny zároveň:

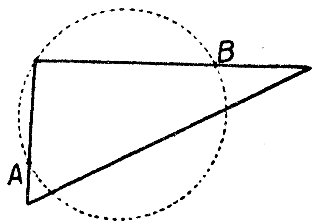
[1] Každý bod na té čáře vyhovuje daným podmínkám.

[2] Každý bod, který daným podmínkám vyhovuje, musí ležeti na té čáře.

V předcházejícím příkladě geometrickým místem byla celá kružnice, v následujícím příkladě geometrickým místem je jen část kružnice. Dejme tomu, že okno se dá otevřít do úhlu 110°, ale ne více. Jaké je geometrické místo určitého bodu na okně? Je to zřejmě oblouk kružnice a poloměry v krajních bodech toho oblouku svírají úhel 110°.

Tvar geometrického místa se někdy nejsnáze určí, když si napřed vyznačíme několik možných poloh proměnného bodu a potom se snažíme uhodnouti tvar celého geometrického místa. Nakonec se musí dokázat, že jsme uhodli správně; ale někdy je težší objevit, jak geometrické místo vypadá, než dokázat správnost výsledku, který jsme uhodli z názoru.

Příklad na pokusné určení geometrického místa (viz obr. 114). A a B jsou dva dané body. Jaké je geometrické místo vrcholu pravého úhlu, jehož jedno rameno prochází bodem A a druhé bodem B? Umístěte různými způsoby trojúhelníkové pravítko tak, aby jedno rameno pravého úhlu na pravítku procházelo bodem A a druhé bodem B a po každé píchněte špendlíkem do papíru na místě, kde je vrchol pravého úhlu. Dostanete řadu bodů, z nichž je jasně vidět, že geometrické místo je kružnice nad průměrem AB. To platí ovšem jen tehdy, když všecky polohy pravého úhlu leží v pevné rovině. Geometrickým místem bez tohoto omezení je kulová plocha.

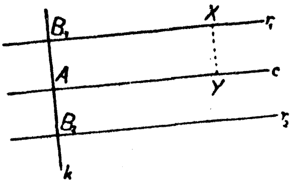


Obr. 114.

Některá geometrická místa jsou velmi důležitá. Omezíme se na geometrická místa v rovině. Geometrické místo bodu X, jehož vzdálenost od daného bodu A se rovná dané délce r, je kružnice o středu A a poloměru r. To je ovšem samozřejmé.

Geometrické místo bodu X, jehož vzdálenost od dané přímky c se rovná dané délce v, se skládá ze dvou rovnoběžek r_1 a r_2 k přímce c. (Viz obr. 115.) Zvolme si určitý bod A na přímce c a vztyčme v bodě A kolmici k k přímce c. Na přímce k si určeme body B_1, B_2 (každý na jedné straně od přímky c), pro které platí

$$\overline{AB}_1 = \overline{AB}_2 = v.$$

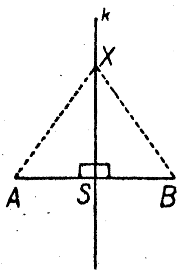


Obr. 115.

Veďme bodem B_1 rovnoběžku r_1 a bodem B_2 rovnoběžku r_2 k přímce c. Máme dokázati, že hledané geometrické místo se skládá z obou přímek r_1 a r_2. Takový důkaz se musí skládati ze dvou částí: předně se musí ukázati, že když bod X leží na některé z přímek r_1 a r_2, jeho vzdálenost od přímky c je rovná v; za druhé se musí dokázati, že když obráceně bod X má od přímky c vzdálenost rovnou v, musí X ležeti buďto na přímce r_1 nebo na přímce r_2.

První část důkazu: Budiž X bod, který leží třeba na přímce r_1. Spusťme s bodu X kolmici na přímku c a označme Y patu této kolmice; máme dokázati, že $\overline{XY} = v$. Všimneme si čtyrúhelníka AB_1XY. Protože přímky AB_1 a YX jsou obě kolmé na přímku c, jsou mezi sebou rovnoběžné; také přímky AY a B_1X jsou mezi sebou rovnoběžné. Tedy AB_1XY je rovnoběžník a AB_1, XY jsou jeho protější strany. Proto je $\overline{XY} = \overline{AB}_1$ neboli $\overline{XY} = v$.

Druhá část důkazu. Budiž X bod takový, že $\overline{XY} = v$, kde Y znamená patu kolmice spuštěné s bodu X na přímku c. Máme dokázati, že X leží buďto na přímce r_1 nebo na přímce r_2. Na té straně od přímky c, na které leží bod X, leží jeden z bodů B_1 a B_2; budiž to na př. bod B_1. Dokážeme, že $B_1X \parallel c$; to právě znamená, že X leží na přímce r_1. Všimneme si zase čtyrúhelníka AB_1XY. Protože $AB_1 \perp c$, $YX \perp c$, jest $AB_1 \parallel YX$; protože $\overline{AB}_1 = v$, $\overline{YX} = v$, jest $\overline{AB}_1 = \overline{YX}$. Proto AB_1XY je rovnoběžník a z toho následuje $B_1X \parallel AY$ neboli $B_1X \parallel c$.



Obr. 116.

Geometrické místo bodu X stejně vzdáleného od daného bodu A jako od daného bodu B je kolmice k vztyčená k přímce AB ve středu S úsečky AB (neboli osa úsečky AB). (Viz obr. 116.) Důkaz se skládá zase ze dvou částí.

První část. Budiž X bod na přímce k. Máme dokázati, že $\overline{AX} = \overline{BX}$. Všimněme si trojúhelníků ASX

a BSX se společnou stranou SX. Protože S je střed úsečky AB, je $\overline{AS} = \overline{BS}$; mimo to je $\sphericalangle ASX = \sphericalangle BSX$ (úhly pravé). Proto je

$$ASX \cong BSX \text{ (sus)}$$

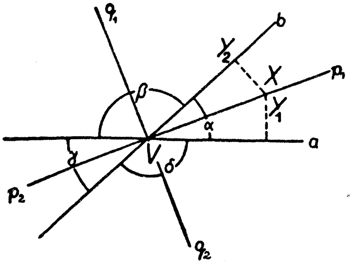
a z toho následuje $\overline{AX} = \overline{BX}$.

Druhá část. Budiž X bod takový, že $\overline{AX} = \overline{BX}$. Máme dokázati, že bod X leží na přímce k neboli, že $\sphericalangle ASX = R$. Zase si všimneme trojúhelníků ASX a BSX. Nyní vidíme, že

$$ASX \cong BSX \text{ (sss)}$$

a z toho následuje $\sphericalangle ASX = \sphericalangle BSX$. Tedy úhel $\sphericalangle ASX$ se rovná svému vedlejšímu úhlu, takže $\sphericalangle ASX = R$.

V obr. 117 máme dvě různoběžky a, b, které se protínají v bodě V. Každá z těchto dvou přímek je bodem V rozdělena na dvě polopřímky



Obr. 117.

a proto vznikají čtyři úhly α, β, γ, δ s vrcholem V. V obr. 117 máme ještě čtyři polopřímky p_1, q_1, p_2, q_2, z nichž každá je osou jednoho z úhlů α, β, γ, δ. Úhly α a β jsou vedlejší, takže $\alpha + \beta = 2R$. Proto je

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = R;$$

ale $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ je právě úhel s rameny p_1 a q_1; proto je tento úhel pravý. Ježto tak $\beta + \gamma = 2R$, dojdeme stejně k výsledku, že úhel s rameny q_1 a p_2 je pravý. Proto úhel s rameny p_1 a p_2 je přímý, takže polopřímky p_1 a p_2 dohromady vyplní přímku p. Podobně se dokáže, že polopřímky q_1 a q_2 dohromady vyplní přímku q. Jest

$$p \perp q,$$

neboť už jsme si všimli, že úhel s rameny p_1 a q_1 je pravý. Obě přímky p a q nazveme osami různoběžek a a b; tyto dvě osy tedy stojí na sobě kolmo a půlí úhly α, β, γ, δ.

Geometrické místo bodu X stejně vzdáleného ode dvou různoběžek a, b, se skládá ze dvou přímek, totiž z obou os různoběžek a, b. Důkaz má zase dvě části.

Prvá část. Budiž X bod na jedné z přímek p, q třeba na polopřímce p_1. Máme dokázati, že $\overline{XY}_1 = \overline{XY}_2$, kde Y_1 je pata kolmice spuštěné s bodu X na přímku a a Y_2 je pata kolmice spuštěné s bodu X na polopřímku b. Všimneme si trojúhelníků VXY_1 a VXY_2 se společnou stranou VX. Protože polopřímka VX je osou úhlu α, je $\sphericalangle\, Y_1VX =$ $= \sphericalangle\, Y_2VX$; mimo to je $\sphericalangle\, VY_1X = \sphericalangle\, VY_2X$. Proto je

$$VXY_1 \cong VXY_2 \text{ (suu)}$$

a z toho následuje $\overline{YX}_1 = \overline{XY}_2$.

Druhá část. Budiž X bod stejně vzdálený od přímky a jako od přímky b; máme dokázati, že X leží buďto na přímce p nebo na přímce q. Bod X leží uvnitř některého ze čtyř úhlů α, β, γ, δ; třeba uvnitř úhlu α. S bodu X spustíme kolmice na přímky a, b a označíme Y_1, Y_2 jejich paty. Všimneme si trojúhelníků VXY_1 a VXY_2 se společnou stranou VX. Protože X je stejně vzdálen od přímky a jako od přímky b, je $\overline{XY}_1 = \overline{XY}_2$. Mimo to $\sphericalangle\, VY_1X = R$, $\sphericalangle\, VY_2X = R$. Tedy VXY_1 a VXY_2 jsou pravoúhlé trojúhelníky, které se shodují v přeponě a v jedné odvěsně, tedy ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich. Proto je

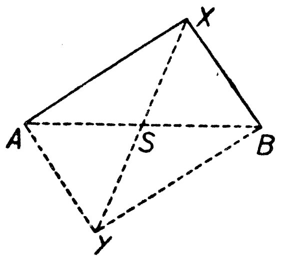
$$VXY_1 \cong VXY_2$$

a z toho následuje $\sphericalangle\, Y_1VX = \sphericalangle\, Y_2VX$, takže X leží na ose p_1 úhlu α.

Buďtež A, B dva dané body. Geometrické místo bodu X, pro který $\sphericalangle\, AXB$ je úhel pravý, je kružnice k nad průměrem AB.

Prvá část. Leží-li X na kružnici k, je $\sphericalangle\, AXB = R$ podle Thaletovy věty.

Druhá část. Budiž $\sphericalangle\, AXB = R$. Máme dokázati (viz obr. 118), že $\overline{SX} = \overline{SA}$, kde S je střed úsečky AB. V bodě A vztyčme kolmici k přímce AX a v bodě B vztyčme kolmici k přímce BX; ty dvě kolmice se protnou v bodě Y. Čtyrúhelník $AXBY$ má při vrcholu A, při vrcholu X a při vrcholu B pravý úhel; protože součet úhlů čtyrúhelníka je $4R$, je také zbývající úhel čtyrúhelníka $AXBY$ pravý; tedy je to obdélník. Protože úhlopříčky obdélníka jsou si rovny, je $\overline{XY} = \overline{AB}$.



Obr. 118.

Protože úhlopříčky obdélníka (jako každého rovnoběžníka) se půlí, prochází přímka XY středem S úhlopříčky AB. Mimo to $\overline{SX}$ je polovina z $\overline{XY}$, $\overline{SA}$ je polovina z AB; protože $\overline{XY} = AB$, je $\overline{SX} = \overline{SA}$.

Cvičení k § 9.

Ve cvič. 181 až 186 máte popsati ústně geometrické místo, jehož tvar je patrný z názoru.

181. Malý předmět, který pustíte z ruky na zem.

182. Špička nosu dítěte na houpačce.

183. Střed kola vozu, který jede po rovné silnici.

184. Vrchol pravého úhlu trojúhelníkového pravítka, které otáčíte kolem přepony.

185. Nejnižší bod kyvadla u hodin.

186. Člověk, který kráčí od určitého místa k severozápadu.

187. Proměnný bod P je stále ve stejné vzdálenosti od daného bodu A. Jaké je geometrické místo bodu P

a) v rovině? b) v prostoru?

188. Proměnný bod P je stále ve stejné vzdálenosti od dané přímky a. Jaké je geometrické místo bodu P

a) v rovině? b) v prostoru?

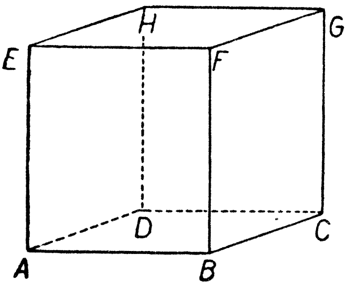
189. Kružnice s pevným poloměrem r a s proměnným středem S se pohybuje tak, že stále prochází daným bodem A. Jaké je geometrické místo bodu S

a) v rovině? b) v prostoru?

190. Kus drátu ABC je ohnut do pravého úhlu v bodě B. Poloha bodu A je pevná. Jaké je geometrické místo bodu C?

191. Čtyři spojené tyčky mají tvar rovnoběžníka *HKLM*. Poloha tyčky *HK* je pevná; tyčka *HM* se může otáčeti kolem bodu *H;* tyčka *KL* se může otáčeti kolem bodu *K*. Na tyčce *LM* je vyznačen určitý bod *X*. Jaké je geometrické místo bodu *X*? [Všimněte si toho bodu *P* na straně *HK,* pro který je $PX \parallel HM$.]

192. *ABC* je daný trojúhelník; *k* je daná kružnice se středem *A*. *BAFG, CBGH* jsou proměnné rovnoběžníky. Bod *F* leží stále na kružnici *k*. Jaké je geometrické místo bodu *H*?



Obr. 119.

193. Obr. 119 znázorňuje dřevěnou bednu spočívající na vodorovné půdě. Z původní polohy znázorněné obrazcem, ve které dolní podstavou je *ABCD,* se bedna překlopí podél hrany *BC* do druhé polohy, ve které dolní podstavou je *BCGF*. Potom se bedna překlopí znovu, tentokráte podél hrany *FG,* do třetí polohy, ve které je dolní podstavou *FGHE*. Potom se bedna překlopí ještě jednou podél hrany *EH* do konečné polohy, ve které dolní podstavou je *EHDA*. Narýsujte geometrické místo bodu *A*.

194. *KL* je pevná úsečka délky 3 cm. Určete geometrické místo bodu *X,* jehož nejkratší vzdálenost od úsečky *KL* je 1 cm:

a) v rovině, b) v prostoru.

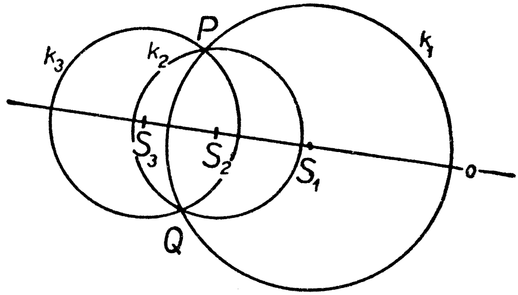
§ 10. Tětivy kružnice.

Narýsujte si kružnici *k* (střed *S*) a zvolte si na ní dva body *A, B*. Víte že osa *o* úsečky *AB* je geometrické místo toho bodu *X,* pro který platí $\overline{AX} = \overline{BX}$. Protože je jistě $\overline{AS} = \overline{BS}$, leží tedy bod *S* na přímce *o*. **Osa každé tětivy kružnice *k* prochází středem kružnice *k*.** Protože osa úsečky *AB* je kolmice vztyčená v jejím středu na přímku *AB,* můžeme dáti právě vyslovené poučce také jiné tvary:

Je-li T **střed tětivy** AB **a je-li** S **střed kružnice, pak buďto oba body** S **a** T **splynou** (tětiva je průměrem) **nebo spojnice** ST **je kolmá na přímku** AB.

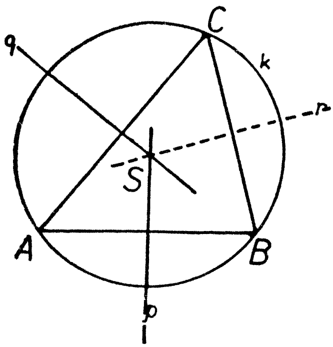
Je-li AB **tětiva kružnice, která neprochází středem** S **kružnice, pak kolmice spuštěná s bodu** S **na přímku** AB **půlí úsečku** AB.

Buďtež dány dva body P, Q (viz obr. 120). Víme, že každá kružnice k, která prochází i bodem P i bodem Q, musí míti střed na ose o úsečky PQ. Obráceně, zvolíme-li si na ose o libovolný bod S, je $\overline{PS} = \overline{QS}$ a proto kružnice se středem S a poloměrem $\overline{PS}$ prochází (nejen bodem P, nýbrž také) bodem Q. **Geometrické místo středu kružnice, která prochází dvěma danými body** P, Q, **je osa úsečky** PQ.



Obr. 120.

Při mnoha geometrických úlohách se hledá bod, který má vyhovovati zároveň d v ě m a p o d m í n k á m. Takové úlohy můžeme řešiti pomocí g e o m e t r i c k ý c h m í s t. Body, které vyhovují první podmínce, vyplní jedno geometrické místo (můžeme si je narýsovati třeba červeně), body, které vyhovují druhé podmínce, vyplní druhé geometrické místo (můžeme si je narýsovati třeba modře). Žádaný bod musí vyhovovati oběma podmínkám a proto bude ležeti tam, kde se protne červená čára s modrou. Narýsujte si na př. rovnostranný trojúhelník HKL s délkou strany 4 cm; budiž naší úlohou určiti bod M vzdálený 2 cm od přímky HL a stejně vzdálený od přímky HK jako od přímky KL. Geometrické místo bodu X vzdáleného 2 cm od přímky HL se skládá ze dvou rovnoběžek s přímkou HL; narýsujte si je obě červeně. Geometrické místo bodu X vzdáleného od přímky HK stejně jako od přímky KL se skládá ze dvou k sobě kolmých přímek procházejících bodem K a půlících úhly tvořené přímkami HK a KL; narýsujte si toto nové geometrické místo modře. Žádaný bod M musí ležeti i na červeném i na modrém geometrickém místě; vidíte, že jsou dva takové body M; označte si je M_1, M_2.



Obr. 121.

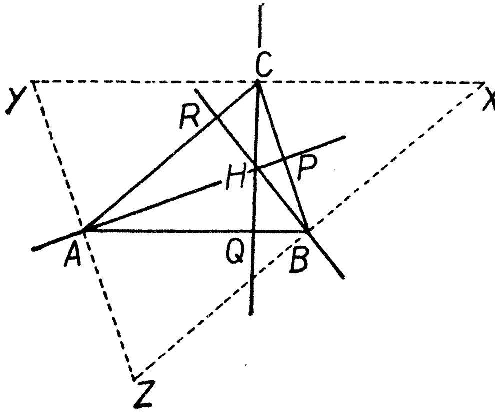
Narýsujte si kružnici k (viz obr. 121) a na ní si zvolte tři body A, B, C. Tyto tři body jsou vrcholy trojúhelníka ABC vepsaného do kružnice k; tato kružnice je opsána trojúhelníku ABC. Protože kružnice k prochází body A, B, leží její střed S na ose p úsečky AB. Z podobného důvodu leží střed S také na ose q úsečky AC a na ose r úsečky BC. **Je-li kružnice k opsána trojúhelníku ABC, protínají se osy všech tří stran trojúhelníka ABC v jediném bodě, totiž ve středu S kružnice k.**

Nyní si obráceně zvolme libovolný trojúhelník ABC. Máme už dokázáno, že se osy všech tří stran našeho trojúhelníka protnou v jediném bodě? Bylo by to dokázáno, kdybychom měli zaručeno, že lze našemu trojúhelníku opsati kružnici; neboť pak víme, še osa každé strany prochází středem té kružnice. Ale snadno provedeme důkaz i bez předpokladu, že možnost opsati trojúhelníku kružnici je vám už známa. Za tím účelem si sestrojíme napřed pouze osy dvou stran, třeba osu p strany AB a osu q strany AC. Jest $AB \perp p$, $AC \perp q$, tedy ke každé z obou přímek máme z bodu A jinou kolmici. Proto přímky p a q nejsou rovnoběžné. Tedy jsou různoběžné a mají průsečík, který si označíme S. Přímka p je geometrické místo toho bodu X, pro který je $\overline{AX} = \overline{BX}$; přímka q je geometrické místo toho bodu X, pro který je $\overline{AX} = \overline{CX}$. Protože bod S leží na přímce p, je délka $\overline{BS}$ rovná délce $\overline{AS}$; protože bod S leží na přímce q, je také délka $\overline{CS}$ rovná délce $\overline{AS}$. Proto je $\overline{BS} = \overline{CS}$ a z toho plyne, že bod S leží také na ose r úsečky BC, neboť r je geometrické místo toho bodu X, pro který je $\overline{BX} = \overline{CX}$. Tím je dokázáno, že osy všech tří stran trojúhelníka ABC mají společný bod S. Mimo to je dokázáno, že všecky tři délky $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ jsou si rovny, takže kružnice k se středem S a poloměrem $\overline{AS}$ prochází (nejen bodem A, nýbrž také) bodem B a bodem C, t. j. k je kružnice opsaná trojúhelníhu ABC. Tedy jsme dokázali, že lze každému trojúhelníku opsati kružnici a také jsme se naučili, jak se tato kružnice sestrojí.

U pravoúhlého trojúhelníka *ABC* **s přeponou** *AB* **leží střed opsané kružnice na obvodě trojúhelníka, a to uprostřed přepony.** Abychom si to odůvodnili, označme si písmenem k kružnici nad průměrem AB a písmenem S její střed, tedy střed přepony. Víme, že k je geometrické místo toho bodu X, pro který $\sphericalangle\ AXB = 90^\circ$. Protože $\sphericalangle\ ACB = 90^\circ$, leží (vedle bodů A, B také) bod C na kružnici k, t. j. k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC.

Dá se dokázati, že u ostroúhlého trojúhelníka leží střed opsané kružnice vždy uvnitř trojúhelníka, a u tupoúhlého trojúhelníka vždy vně.

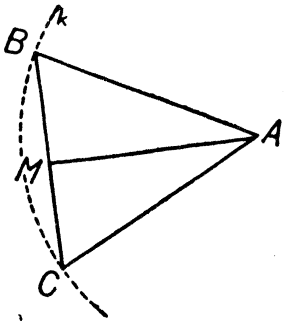
V obr. 122 máme trojúhelník ABC. S každého vrcholu je spuštěna kolmice na protější stranu a paty těchto kolmic jsou označeny písmeny P, R, Q. Tyto tři kolmice AP, BR, CQ se jmenují **výšky trojúhelníka** ABC; určitěji pravíme, že na př. AP je výška příslušná straně BC; bod P je pata té výšky.



Obr. 122.

V obr. 122 všecky tři výšky trojúhelníka ABC se protínají v jediném bodě H. Dokážeme si, že tomu tak je u každého trojúhelníka; bod H se proto jmenuje **průsečík výšek** trojúhelníka ABC. Abychom dospěli k důkazu, veďme si každým vrcholem trojúhelníka rovnoběžku s protější stranou. Tyto tři rovnoběžky omezí nový trojúhelník, který je v obr. 122 označen XYZ. Protože $AB \parallel YC$, $BC \parallel AY$, je $ABCY$ rovnoběžník a proto je $\overline{AY} = \overline{BC}$. Protože $AC \parallel ZB$, $BC \parallel ZA$, je $ACBZ$ rovnoběžník a proto je $\overline{AZ} = \overline{BC}$.*) Tedy $\overline{AY} = \overline{AZ}$, t. j. bod A je střed strany YZ trojúhelníka XYZ. Protože $AP \perp BC$, $ZY \parallel BC$, je $AP \perp ZY$. Tedy přímka AP je osou strany YZ trojúhelníka XYZ. Stejně se dokáže, že přímky BR a CQ jsou osami ostatních stran trojúhelníka XYZ. Protože však osy tří stran trojúhelníka mají společný bod, musí všecky tři přímky AP, BR, CQ procházeti jedním bodem, což jsme měli dokázati.

*) Protože $AC \parallel ZB$, $BC \parallel ZA$, je $ACBZ$ rovnoběžník a proto $\overline{AZ} = \overline{BC}$.



Obr. 123.

U rovnoramenného trojúhelníka výška příslušná základně půlí tuto základnu. Budiž ABC rovnoramenný trojúhelník se základnou BC (viz obr. 123). Protože $\overline{AB} = \overline{AC}$, můžeme si sestrojiti kružnici k se středem A, která prochází oběma body B, C. Úsečka BC je tětivou kružnice k. Je-li M její střed, je $AM \perp BC$ podle poučky ze začátku tohoto paragrafu. To jsme však měli dokázati.

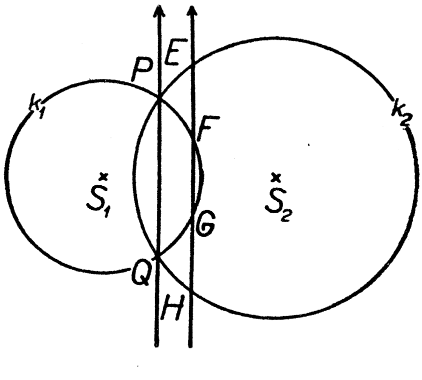
Cvičení k § 10.

I. **Osa tětivy kružnice.**

195. Narýsujte si oblouk kružnice třeba pomocí korunové mince. Jak můžete určiti střed kružnice?

196. Uvnitř kružnice k si zvolte bod U. Sestrojte tětivu kružnice k půlenou bodem U.

197. Kružnice k_1 se středem S_1 a kružnice k_2 se středem S_2 protínají se v bodech P, Q. (Viz obr. 124.) a) Dokažte, že $PQ \perp S_1S_2$. b) Dokažte, že v obr. 124 je $\overline{EF} = \overline{GH}$.



Obr. 124.

198. Kružnice k_1 a k_2 jsou soustředné. $C_1C_2D_2D_1$ je přímka; body C_1, D_1 leží na kružnici k_1; body C_2 D_2 leží na kružnici k_2. Dokažte, že $\overline{C_1C_2} = \overline{D_2D_1}$.

199. AB, CD jsou dvě tětivy kružnice o středu S. Dokažte:

a) Je-li $\overline{AB} = \overline{CD}$, jsou obě přímky AB, CD stejně vzdáleny od bodu S. [Je-li L střed úsečky AB a je-li M střed úsečky CD, dokažte, že $SLA \cong SMC$.]

b) Jsou-li obě přímky AB, CD stejně vzdáleny od bodu S, je $\overline{AB} = \overline{CD}$. [Zase dokažte, že $SLA \cong SMC$.]

II. **Geometrická místa.**

200. Je dána kružnice k. Určete geometrické místo středu tětivy XY, jejíž délka je pevně dána. [Užijte výsledku cvič. 199 a).]

201. Na dané kružnici k se středem S je dán bod A. Proměnná tětiva AX prochází stále bodem A. Dokažte, že geometrické místo středu proměnné tětivy je kružnice nad průměrem AS.

202. Proměnná tětiva dané kružnice k stále prochází daným bodem M. Sestrojte geometrické místo středu proměnné tětivy. (Proveďte dvakrát: bod M budiž napřed uvnitř kružnice k, potom vně.)

203. Jsou dány dvě přímky $EF \perp EG$. Úsečka dané délky se pohybuje tak, že stále leží jeden krajní bod na přímce EF, druhý na přímce EG. Dokažte, že geometrické místo středu proměnné úsečky je kružnice se středem E.

III Metoda dvou geometrických míst. (Viz též úlohy 211 až 213.)

204. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 6 cm. Určete bod P vzdálený 4 cm od vrcholu A a 2 cm od strany BC. (Dvě řešení.)

205. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 4 cm. Určete bod K na přímce AB vzdálený 2 cm od přímky AC. (Dvě řešení.)

206. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu 4 cm. Určete bod L vzdálený 2 cm od přímky AB a 3 cm od přímky AC. (Čtyři řešení.)

207. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 45$ mm, $\overline{BC} = 5$ cm. Sestrojte bod M ve vzdálenosti 6 cm od vrcholu B tak, aby M byl stejně vzdálen od přímky AC jako od přímky BC. (Čtyři řešení.)

IV. Kružnice procházející dvěma body,

208. Zvolte si čtyrúhelník $EFGH$. Sestrojte kružnici, která má střed někde na obvodě čtyrúhelníka a která prochází

a) vrcholy E, F; b) vrcholy E, G.

209. Narýsujte si kružnici k a na ní si zvolte dva body C, D. Sestrojte kružnici m, která má střed na kružnici k a která protíná kružnici k v bodech C, D.

210. Zvolte si dva body A, B a přímku p. Sestrojte kružnici, která prochází oběma danými body a má střed na přímce p. Je konstrukce v ž d y možná?

211. Je dána úsečka UV; $\overline{UV} = 5$ cm. Máte sestrojiti kružnici s poloměrem 32 mm, která prochází bodem U i bodem V. [První podmínka pro střed S: kružnice prochází oběma body U, V. Druhá podmínka pro střed S: kružnice s poloměrem 32 mm prochází bodem U. Každá podmínka určí jedno geometrické místo. Kolik řešení má úloha? Bylo možné postupovat jinak?]

212. Narýsujte si rovnoramenný trojúhelík PQR; $\overline{PQ} = \overline{PR} = 3$ cm; $\overline{QR} = 5$ cm. Sestrojte kružnici, která prochází bodem P i bodem Q a jejíž střed je tak daleko od přímky PQ jako od přímky QR. (Dvě řešení.)

213. Narýsujte si znovu trojúhelník PQR takový jako ve cvič. **212.** Sestrojte kružnici, která prochází bodem P i bodem R a jejíž střed vyhovuje podmínce $\sphericalangle\, QSR = 90^0$. (Dvě řešení.)

V. Kružnice opsaná trojúhelníku a pod.

214. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bylo

a) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CA} = 7$ cm;
b) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{CA} = 8$ cm.

Sestrojte opsanou kružnici a změřte její poloměr.

215. Narýsujte si čtyrúhelník $PQRS$ tak, aby nebylo $PQ \parallel RS$. Sestrojte bod H tak, aby bylo

a) $\overline{HP} = \overline{HQ}$, $\overline{HR} = \overline{RS}$;

b) $\overline{HP} = \overline{HQ}$, $\sphericalangle RHS = 90^0$.

216. Na kružnici si zvolte čtyři body E, F, G, H. Dokažte, že osy úseček EF, EG, EH, FG, FH, GH všecky se protínají v jednom bodě.

217. Zvolte si čtyři různoběžky tak, aby žádné tři z nich nešly týmž bodem. Vynecháte-li jednu z nich, omezí ostatní tři trojúhelník. Takové trojúhelníky máte celkem čtyři. Opište každému z nich kružnici, shledáte, že všecky ty čtyři kružnice mají společný bod. (Nemáte nic dokazovat, pouze máte provésti konstrukci. Velký obrazec!)

VI. **Výšky trojúhelníka.**

218. Kde leží průsečík výšek pravoúhlého trojúhelníka?

219. U ostroúhlého trojúhelníka leží průsečík výšek uvnitř trojúhelníka, u tupoúhlého vně. Proč?

220. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 45^0$, D je průsečík výšek, $\dot{D}$ je pata výšky příslušné straně AB. Dokažte, že $\overline{BD} = \overline{DH}$. (Narýsujte si trojí obrazec: po prvé ať oba úhly β, γ jsou ostré, po druhé ať je β tupý, po třetí ať je γ tupý.)

221. Uvnitř rovnoběžníka $PQRS$ je bod T v takové poloze, že $QT \perp QR$, $ST \perp RS$. Dokažte, že $PT \perp QS$.

222. Je-li D průsečík výšek trojúhelníka ABC, dokažte, že C je průsečík výšek trojúhelníka ABD.

§ 11. Tečny ke kružnici.

Zvolte si přímku p a mimo ni bod S (viz obr. 125). Spusťte s bodu S kolmici na přímku p a patu označte P, takže $\overline{SP}$ je vzdálenost bodu S od přímky p. Bod P rozdělí přímku p na dvě polopřímky. Probíhá-li bod X kteroukoli z těch polopřímek, počínajíc polohou P, tu je vám známo, že se vzdálenost $\overline{SX}$ stále zvětšuje. Zvolíme-li si nyní libovolnou délku r větší než $\overline{SP}$, budou na přímce p dva body X takové, že

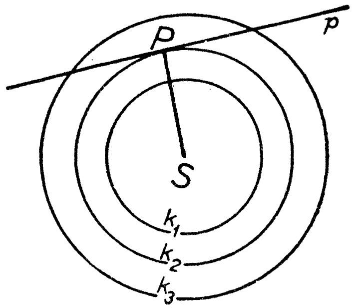
$$\overline{SX} = r \qquad (*)$$

(po jednom na každé z obou polopřímek); zvolíme-li si $r = \overline{SP}$, bude platit (*) pro jediný bod X na přímce p, totiž pro bod P; zvolíme-li si konečně $r < \overline{SP}$, nebude (*) platit pro žádný bod X na přímce p. Zvolíme-li si tři délky r_1 r_2, r_3 tak, že je

$$r_1 < \overline{SP},\ r_2 = \overline{SP},\ r_3 > \overline{SP}$$

a opíšeme-li kolem středu S tři kružnice k_1, k_2, k_3 s poloměry r_1, r_2, r_3, tu přímka p nemá s kružnicí k_1 žádný společný bod, s kružnicí k_2 má jediný společný bod P a s kružnicí k_3 má společné dva body. Říkáme, že přímka p **leží mimo kružnici** k_1, je **tečnou** kružnice k_2 (a to tečnou v bodě P) a je **sečnou** kružnice k_3.

Přímka je sečnou kružnice, je-li její vzdálenost od středu menší než poloměr. Přímka je tečnou kružnice, je-li její vzdálenost od středu rovna poloměru. Přímka leží mimo kružnici, je-li její vzdálenost od středu větší než poloměr.



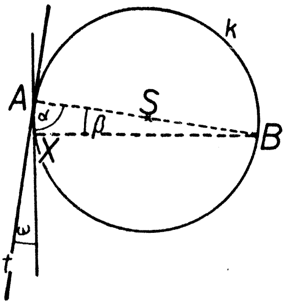
Obr. 125.

Na kružnici k se středem S a poloměrem r si zvolme bod A. Mysleme si bodem A vedeny rozmanité přímky. Nejprve veďme bodem A přímku t kolmou na přímku SA; patou kolmice spuštěné s bodu S na přímku t je patrně bod A, takže vzdálenost přímky t od bodu S je rovna poloměru r; proto t je tečna kružnice k v bodě A. Vedeme-li si však bodem A kteroukoli jinou přímku s, tu vzdálenost bodu S od přímky s je menší než délka $\overline{SA}$, t. j. menší než r, takže s je sečnou kružnice k. Kružnice se středem S má v každém svém bodě určitou **tečnu; je to kolmice vztyčená v bodě A k přímce SA**; každá jiná přímka vedená bodem A je sečnou kružnice.

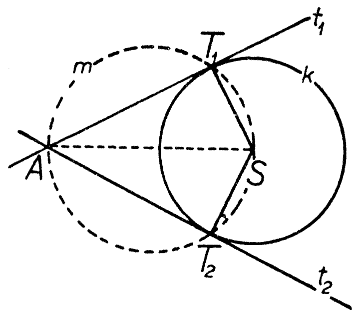
V obr. 126 je narýsována tečna t ke kružnici k v bodě A této kružnice. Ačkoli přímka t a kružnice k mají společný pouze jediný bod A, přece se zdá, jako by ty dvě čáry měly společnou celou krátkou úsečku. Můžeme si to vysvětliti takto. Zvolme si na kružnici k bod X blízko bodu A. Veďme si průměr AB kružnice k. Podle Thaletovy věty je $\sphericalangle AXB = 90^\circ$ a z toho následuje, že v obr. 125 je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Podle obrazce je však také $\alpha + \omega = 90^\circ$, takže musí býti $\omega = \beta$. Je-li bod X velmi blízko bodu A, je zřejmě úhel β velmi malý, takže také úhel ω je velmi malý. Ačkoli tedy přímka AX nesplyne přesně s tečnou t, tvoří s ní velmi malý úhel, takže přibližně splyne přímka AX s tečnou t.

Na rozdíl od tečny rozeznáváme sečnu od kružnice velmi jasně už v malé blízkosti společného bodu. Proto říkáme, že kružnice a sečna se protínají, kdežto kružnice a tečna se dotýkají.

Tečnu t k narýsované kružnici rovnoběžnou s danou přímkou p (kolik je takových tečen?) můžeme sestrojiti docela přesně (ale ne euklidovsky) posouváním trojúhelníkového pravítka. Ale abychom přesně určili **bod dotyku** (t. j. ten bod, ve kterém je t tečnou) je nezbytné spustiti se středu kružnice kolmici na přímku p.



Obr. 126.



Obr. 127.

Narýsujte si kružnici k se středem S a vně kružnice si zvolte bod A. Bodem A procházejí dvě tečny t_1, t_2 ke kružnici k. Můžeme je sestrojiti docela přesně (ale ne euklidovsky) pouhým přiložením pravítka. K určení bodů dotyku je však třeba spustiti se středu S kolmice na obě tečny. Ale také euklidovská konstrukce tečen vedených z bodu A je snadná (viz obr. 127). Tu si sestrojíme napřed body dotyku T_1, T_2. Postupujeme tak, že si nejprve narýsujeme pomocnou kružnici m nad průměrem AS. (To dovedeme provésti euklidovsky.) Víme, že m je geometrické místo toho bodu X, pro který platí $\sphericalangle\ AXS = 90^\circ$. Protože $\sphericalangle\ AT_1S = 90^\circ$, $\sphericalangle\ AT_2S = 90^\circ$, leží oba body T_1, T_2 na kružnici m. Tedy body dotyku tečen vedených ke kružnici k z bodu A jsou průsečíky kružnice k s pomocnou kružnici m nad průměrem AS, kde S je střed kružnice k. Tečny samy dostaneme, spojíme-li bod A se sestrojenými body dotyku.

Všimněme si znovu obr. 127! Máme v něm dva pravoúhlé trojúhelníky AST_1, AST_2, které mají společnou přeponu; mimo to je $\overline{ST_1} = \overline{ST_2}$ (proč?). Tedy oba pravoúhlé trojúhelníky se shodují v přeponě a v jedné odvěsně, takže je

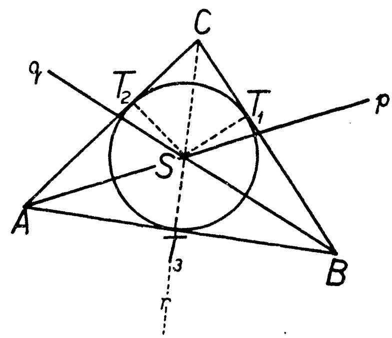
$$AST_1 \cong AST_2. \qquad (*)$$

Ze vztahu (*) následuje $\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$. **Bod vně kružnice je stejně vzdálen od bodů dotyku obou tečen vedených z něho ke kružnici.** Mimo to ze vztahu (*) následuje

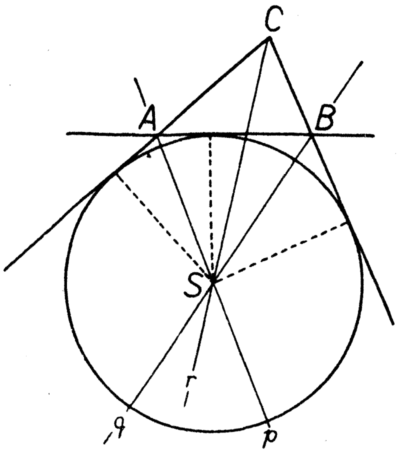
$$\sphericalangle SAT_1 = \sphericalangle SAT_2,$$

t. j. polopřímka AS je osou úhlu $\sphericalangle T_1AT_2$.

Zvolte si trojúhelník ABC (viz obr. 128). Chceme si odůvodnit, že mu lze vždy vepsat kružnici a také se chceme naučit, jak se vepsaná kružnice k sestrojí. Střed S kružnice k musí býti někde uvnitř trojúhelníka. Vzdálenosti bodu S od všech tří stran trojúhelníka musí býti stejné; neboť přímky AB, AC, BC mají býti tečnami kružnice k. Obráceně, najdeme-li uvnitř trojúhelníka ABC takový bod S, že jeho vzdálenosti od stran trojúhelníka se všecky tři rovnají téže délce r, tu kružnice se středem S a poloměrem r bude patrně vepsána do trojúhelníka ABC. Tedy hledáme bod S podrobený dvojí podmínce: předně jeho vzdálenost od přímky AB má býti taková jako jeho vzdálenost od přímky AC, za druhé jeho vzdálenost od přímky AB má býti taková jako jeho vzdálenost od přímky BC. Proto bod S dostaneme jako průsečík dvou geometrických míst. Sestrojíme si napřed polopřímku p, která je osou úhlu α. Víte, že každý bod polopřímky p je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky AC; polopřímka p je částí geometrického místa bodu stejně vzdáleného od přímky AB jako od přímky AC. Víte, že toto geometrické místo se skládá ze dvou přímek (z kterých?). Ale je zbytečné rýsovati to geometrické místo celé, neboť hledaný bod S má ležeti uvnitř trojúhelníka ABC, kdežto ta část geometrického místa, která v obr. 128 není narýsována, jistě je vně trojúhelníka. Dále si narýsujeme polopřímku q, která je osou úhlu β. Zase každý bod polopřímky q je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky BC, a každý bod uvnitř trojúhelníka ABC stejně vzdálený od AB jako od BC leží na polopřímce q. Je patrné, že se polopřímky p a q protnou v určitém bodě S uvnitř trojúhelníka ABC. Protože bod S leží



Obr. 128.



Obr. 129.

na polopřímce p, je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky AC; protože S leží na polopřímce q, je stejně vzdálen od přímky AB jako od přímky BC. Tedy bod S je stejně vzdálen od přímky AC jako od přímky BC; a protože leží uvnitř trojúhelníka ABC, leží také na ose r úhlu γ. Bod S je stejně vzdálen od všech tří stran trojúhelníka; v obr. 128 jsou spuštěny s bodu S kolmice na všecky tři strany a jejich paty jsou označeny T_1, T_2, T_3. Všecky tři úsečky ST_1, ST_2, ST_3 mají stejnou délku r. Sestrojíme-li si kružnici k se středem S a poloměrem r, je k kružnice vepsaná do trojúhelníka ABC. Tedy jsme poznali, že do každého trojúhelníka lze vepsati kružnici, a umíme tuto kružnici narýsovat. Mimo to jsme shledali: **Osy všech tří úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, totiž ve středu kružnice vepsané.**

Kružnice vepsaná do trojúhelníka ABC není jediná kružnice, která se dotýká všech tří přímek AB, AC, BC. Jsou ještě tři další takové kružnice, kterým se říká **kružnice připsané** trojúhelníku ABC. Každá z nich je připsána k jedné ze tří stran trojúhelníka. V obr. 129 vidíte kružnici připsanou ke straně AB. Její střed S dostaneme, sestrojíme-li si kterékoli dvě ze tří polopřímek, jež jsou v obr. 129 označeny p, q, r. Při tom je r osa vnitřního úhlu při vrcholu C, kdežto p, q jsou osy vnějších úhlů při vrcholech A, B. Odůvodněte sami, proč je bod S stejně vzdálen od všech tří přímek AB, AC, BC.

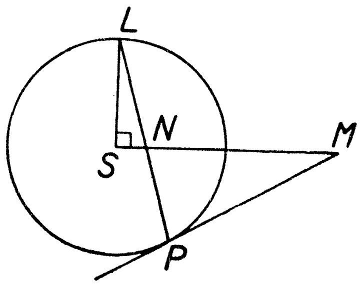
Cvičení k § 11.

I. **Tečna kružnice v daném bodě.**

223. AB je průměr kružnice k. Dokažte, že tečny kružnice k v bodech A, B jsou mezi sebou rovnoběžné.

224. Na kružnici k s průměrem AB si zvolte bod C. Sestrojte kružnici m, která má střed v bodě A a prochází bodem C. Dokažte, že přímka BC je tečnou kružnice m v bodě C.

225. Narýsujte si dvě soustředné kružnice, menší si označte k_1 a větší k_2. Na kružnici k_1 si zvolte bod E a sestrojte tečnu t kružnice k_1 v bodě E. Označte F, G průsečíky přímky t s kružnicí k_2. Dokažte, že $\overline{EF} = \overline{EG}$.



Obr. 130.

226. Na kružnici k se středem S si zvolte dva body H, K. Sestrojte tečnu t kružnice k v bodě H. Označte P patu kolmice spuštěné s bodu K na přímku t. Dokažte, že polopřímka KH je osou $\sphericalangle SKP$. [Oba úhly $\sphericalangle SKH$, $\sphericalangle HKP$ porovnejte s úhlem $\sphericalangle KHS$].

227. V obr. 130 S je střed kružnice a $\sphericalangle LSM = 90^0$. Dokažte, že $\overline{MN} = \overline{MP}$. [Spojte SP.]

II. **Tečny rovnoběžné s danou přímkou.**

228. Narýsujte si kružnici k s poloměrem 37 mm a zvolte si přímku p třeba mimo kružnici k. Sestrojte euklidovsky ten bod kružnice k, ve kterém je tečna rovnoběžná s přímkou p a sestrojte tu tečnu. (Dvě řešení.)

III. **Tečny vedené z bodu na kružnici.**

229. Narýsujte si kružnici k (střed S, poloměr 34 mm). Zvolte si bod H ve vzdálenosti 56 mm od bodu S. Sestrojte euklidovsky obě tečny vedené ke kružnici k z bodu H. Změřte vzdálenosti bodu H od bodů dotyku.

230. Rovnoběžník je opsán kružnicí. Dokažte, že je to kosočtverec, jehož úhlopříčky se protnou ve středu kružnice.

231. Ke kružnici se středem S jsou vedeny dvě mezi sebou rovnoběžné tečny a ještě jedna tečna, která protne prvé dvě v bodech G, H. Dokažte, že $\sphericalangle GSH = 90^0$.

IV. **Kružnice vepsaná do trojúhelníka a pod.**

232. a) Sestrojte znovu trojúhelník ABC podle údajů ze cvič. **214** a). Sestrojte kružnici vepsanou a všecky tři kružnice připsané.

b) Opakujte s trojúhelníkem ze cvič. **214** b).

233. Narýsujte si dvě rovnoběžky p, q a třetí přímku r s nimi různoběžnou. Sestrojte kružnici, která se dotýká všech tří přímek p, q, r. (Dvě řešení.)

§ 12. Početní úlohy o obsahu, povrchu a objemu.

234. Strana čtverce je rovna

a) 27,15 m; b) 13,78; c) $3\frac{3}{4}$ m; d) $2\frac{5}{6}$ m; e) $\frac{7}{12}$ m.
Určete jeho obvod!

235. Strana čtverce je rovna

a) 7,85 m; b) 12,09 m; c) 0,025 m; d) $5\frac{1}{2}$ m; e) $1\frac{1}{4}$ m.

Určete jeho obsah!

236. Kolikrát se zvětší obsah čtverce, jestliže stranu

a) zdvojnásobíme, b) ztrojnásobíme?

Vysvětlete obrazcem od ruky! Proveďte číselný příklad!

237. Určete obsah obdélníkové zahrady, jestliže její šířka je 13,4 m a délka je

a) o 12,6 m větší než šířka;
b) třikrát větší než šířka;
c) $2\frac{1}{2}$ krát větší než šířka!

238. Kolik arů měří obdélníkový pozemek, jestliže

a) délka je 1,72 km, šířka 0,34 km;
b) délka je 516 m, šířka 720 m?

239. Jak se změní obsah obdélníka, jestliže

a) ztrojnásobíme délku,
b) zdvojnásobíme šířku,
c) ztrojnásobíme délku a zdvojnásobíme šířku,
d) ztrojnásobíme délku a šířku zmenšíme na polovinu,
e) ztrojnásobíme délku i šířku,
f) ztrojnásobíme délku a šířku zmenšíme na třetinu,
g) délku i šířku zmenšíme na třetinu,
h) délku zvětšíme o polovinu a šířku zmenšíme na polovinu,
i) délku zvětšíme o polovinu a šířku zmenšíme o třetinu?

Vysvětlujte obrazci od ruky! Přesvědčujte se o správnosti odpovědí jednoduchými číselnými příklady!

240. Jak široké je pole obsahu 4 ha, je-li jeho délka 625 m?

241. Kolik osob je možno umístiti do sálu rozměrů 59 m a 26 m, počítáme-li, že na 1 m² mohou pohodlně státi 4 osoby?

242. Zahrada tvaru obdélníka rozměrů 169 m × 95 m byla obezděna zdí 30 cm silnou; oč se zmenšila plocha zahrady?

243. Co je větší, čtverec o straně 7 29 m nebo obdélník o stranách 8,83 m; 6,02 m? Oč?

244. Obdélník délky $1\frac{1}{21}$ m má stejný obsah jako čtverec o straně $1\frac{1}{7}$ m. Určete šířku obdélníka!

245. Na dvoře $25\frac{3}{4}$ m dlouhém a $16\frac{1}{4}$ m širokém vykopal hospodář čtvercovou jámu o straně $6\frac{3}{4}$ m. Kolik čtverečních metrů volné plochy mu zůstalo?

246. O kolik procent se zvětší obsah obdélníka, zvětšíme-li oba rozměry, každý o 10%. Přesvědčte se o správnosti odpovědi na obdélníku délky 60 m a šířky 50 m!

247. O kolik procent se zmenší obsah obdélníka, zmenšíme-li oba rozměry, každý o 20 %? Zase se přesvědčte o správnosti na obdélníku s rozměry, 60 × 50 m!

248. Jak se změní obsah obdélníka, jestliže jeden rozměr zvětšíme o 10% a druhý zmenšíme o 10%? O kolik procent? Opět se přesvědčte o správnosti na obdélníku s rozměry 60 m $\times$ 50 m!

249. Délku obdélníka zvětšíme o 20%. O kolik procent musíme zmenšit šířku, aby obsah zůstal nezměněn? Znovu se přesvědčte o správnosti na obdélníku s rozměry 60 m $\times$ 50 m!

250. O kolik procent se zmenšila plocha zahrady v úloze 203? (Na setiny procenta.)

251. Hrana krychle je rovna

a) 17,3 m; b) 0,85 m; c) $\frac{2}{3}$ m; d) $1\frac{1}{6}$ m; e) $2\frac{5}{12}$ m.

Určete její povrch!

252. Hrana krychle je rovna

a) 3,7 m; b) 0,7 m; c) $1\frac{1}{2}$ m; d) $3\frac{1}{2}$ m; e) $2\frac{3}{4}$ m.

Určete její objem!

253. Kolikrát se zvětší

a) povrch,

b) objem krychle, jestliže hranu zdvojnásobíme?

Přesvědčte se o správnosti na krychli s hranou 1,5 m!

254. Co je větší, 3 krychle s hranou po 5 cm nebo 5 krychlí s hranou po 3 cm?

255. Vypočtěte povrch a objem kvádru rozměrů

a) 14 cm, 16 cm, 50 cm; b) 112 cm, 176 cm, 362 cm;

c) $\frac{3}{4}$ m, $1\frac{1}{2}$ m, $\frac{5}{6}$ m; d) $2\frac{6}{25}$ m, $2\frac{7}{9}$ m, $\frac{9}{14}$ m!

256. Kolik hektolitrů vody naplní nádrž 24 m dlouhou, 15 m širokou a 2 m hlubokou? Kolik hektolitrů je třeba vypustiti, aby hloubka činila pouze $1\frac{1}{2}$ m?

257. Kolik kusů mýdla rozměrů 12,5 cm $\times$ 5,5 cm $\times$ 4 cm se dá umístiti do bedny s rozměry 56 cm $\times$ 50 cm $\times$ 22 cm?

258. Kolika cihel je třeba na stavbu zdi 15 m dlouhé, 44 cm silné, 4 m vysoké? Rozměry cihly: 29 cm $\times$ 14 cm $\times$ $6\frac{1}{2}$ cm; na spáru mezi cihlami se počítá 1 cm.

259. Kolik plátna je třeba na zabalení bedničky s rozměry 40 cm $\times$ 30 cm $\times$ 25 cm, je-li na švy třeba 1,8% povrchu bedničky?

260. Na vodovodní roury je třeba vykopat v zemi v délce 35,6 m, šířce $\frac{3}{4}$ m, hloubce 0,6 m. Kolik země je třeba vykopat?

261. Kolik sena se vejde do kůlny délky 3 m 20 cm a šířky o 70 cm menší, může-li seno dosahovat do výše $2\frac{1}{4}$ m? 1 m³ čerstvě sklizeného sena váží 82 kg.

262. Z železného plátu rozměrů 14 dm $\times$ 8 dm byly v rozích odříznuty čtverce o straně 2 dm a ze zbytku byla zhotovena otevřená krabice. Určete objem krabice?

263. Měděný čtvercový plát o straně $\frac{1}{4}$ m váží 2,848 kg. Určete tloušťku plátu, jestliže 1 cm^3 mědi váží 8,9 g!

264. Do bedny s obdélníkovým dnem rozměrů $4\frac{1}{2}$ m $\times$ $3\frac{1}{2}$ m se nasype žita do výšky 0,8 m. Kolik bude vážit žito za 6 měsíců, jestliže 1 l v době nasypání váží 685 g a jestliže za 6 měsíců se váha zmenší o 0,3%?

265. Dřevěná čtvercová deska o straně 2 dm má tloušťku 3 cm. Od desky se odřízne čtverec o straně 5 cm

a) v rohu, b) podél jedné strany, c) uprostřed.

Určete povrch tělesa, které zbude po odříznutí!

266. Kvádr délky 12 cm a šířky 8 cm má týž objem jako krychle o hraně 1 dm.

a) Určete výšku a povrch kvádru!

b) O kolik procent (povrchu krychle) má kvádr větší povrch než krychle?

c) O kolik procent (povrchu kvádru) má krychle menší povrch než kvádr?

[Počítejte b) a c) na desetiny procenta!]

267. Kvádr má délku 6 cm a šířku 5 cm.

a) Čemu se rovná povrch kvádru, je-li jeho výška 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm?

b) Čemu se rovná výška kvádru, je-li jeho povrch 214 cm?

268. Rozměry kvádru jsou 2 dm, 2 dm, 1 dm.

a) Oč se zmenší objem kvádru, zmenšíme-li každou hranu o 1 cm, o 2 cm, o 3 cm?

b) Oč se zvětší objem kvádru, zvětšíme-li každou hranu o 1 cm, o 2 cm, o 3 cm?

269. Kvádr má délku 3 dm, šířku 2 dm, výšku 1 dm. Vypočtěte, oč se zvětší povrch kvádru, zvětšíme-li

a) délku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

b) šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

c) výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

d) délku i šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

e) délku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

f) šířku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

g) každý rozměr o 1 cm, 2 cm, 3 cm?

270. Kvádr má délku 3 dm, šířku 2 dm, výšku 1 dm. Vypočítejte oč se zmenší povrch kvádru, zmenšíme-li

a) délku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
b) šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
c) výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
d) délku i šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
e) délku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
f) šířku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;
g) každý rozměr o 1 cm, 2 cm, 3 cm!

271. Kvádr má délku 11 cm, šířku 6 cm, výšku 2 cm. Vypočtěte, kolikrát se zvětší povrch kvádru, zdvojnásobíme-li

a) délku, c) výšku, e) délku i výšku, g) každý rozměr!
b) šířku, d) délku i šířku, f) šířku i výšku,

§ 13. Úlohy k opakování.

A. *Osová souměrnost.*

272. Zvolte přímku p za osu souměrnosti.

a) Může bod splynout s bodem souměrně sdruženým? Kde leží takové body?

b) Jakou polohu musí míti úsečka, aby úsečka souměrně sdružená byla jejím prodloužením?

c) Jaká úsečka splyne s úsečkou souměrně sdruženou? (Dvoje řešení.)

d) Jaká přímka splyne s přímkou souměrně sdruženou? (Dvoje řešení.)

e) Jaká přímka je rovnoběžná s přímkou souměrně sdruženou?

f) Může přímka státi kolmo na přímce souměrně sdružené? Kolik takových přímek prochází daným bodem?

273. Zvolte přímku p za osu souměrnosti. Popište a proveďte euklidovskou konstrukci

a) bodu A' souměrně sdruženého s daným bodem A;
b) přímky r' souměrně sdružené s danou přímkou r!

274. Narýsujte pětiúhelník $ABCDE$ a pětiúhelník k němu souměrně sdružený vzhledem k ose AB!

275. Narýsujte čtyrúhelník $ABCD$ a čtyrúhelníky k němu souměrně sdružené vzhledem k osám AB, CD!

276. Narýsujte kružnici k a do ní vpište trojúhelník ABC! Zvolte bod D na obvodě kružnice k a narýsujte body k němu souměrně sdružené vzhledem k osám AB, AC, BC! Přesvědčte se, že ty tři body leží na jedné přímce!

277. Narýsujte dvě sobě rovné úsečky AB a CD! Určete dvě přímky p, q tak, aby úsečka souměrně sdružená s AB vzhledem k ose p splynula s úsečkou souměrně sdruženou s CD vzhledem k ose q! (Za přímku p se může zvolit osa úsečky AC; je však mnoho jiných způsobů.)

278. Čtyrúhelník, který vznikne spojením dvou trojúhelníků navzájem souměrných vzhledem ke společné straně je jmenuje *deltoid.*

a) Přesvědčte se, že deltoid vznikne také spojením dvou rovnoramenných trojúhelníků se společnou základnou!
b) Vyslovte dvě vlastnosti úhlopříček deltoidu!
c) Který rovnoběžník je zvláštním případem deltoidu?

B. *Dvojice úhlů.*

279. Narýsujte si od ruky obrazec podle obr. 23 z učebnice (str. 16) a pojmenujte správně tyto dvojice úhlů:

a) α, β; b) α, δ; c) β, δ; d) γ, δ; e) γ, ε; f) β, γ; g) β, ε!

280. Jestliže v obr. 9 (str. 14) je $\alpha = 120^0$, $\delta = 70^0$, čemu se rovnají úhly β, γ, φ, ψ?

281. Jestliže v obr. 12 (str. 15) je $\alpha = 40^0\ 36'$, $\omega = 125^0\ 26'$, čemu se rovnají úhly β a φ?

282. Jestliže v obr. 16 (str. 15) je $\beta = 3\omega$, $\psi = 5\omega$, čemu se rovnají úhly v obrazci vyznačené?

283. Vyložte slovy správně, které úhly nazýváme

a) vrcholové, b) vedlejší, c) souhlasné, d) střídavé,
e) přilehlé?

284. a) Vyslovte správně poučku o tom, kdy dva úhly souhlasné jsou si rovny i poučku obrácenou!

b) Vyslovte obě poučky o úhlech střídavých!

c) Vyslovte, co je vám známo o úhlech přilehlých!

285. Názvy uvedené ve cvičení 244 se týkají polohy úhlů. Čeho se týkají názvy úhlů doplňkové, úhly výplňkové?

286. Jak je nutné ozměnit úhel 265^0 v obr. 25 (str. 16), aby (při ponechání velikosti ostatních úhlů) přímky *h, s* byly rovnoběžné?

287. V jakém smyslu je třeba v obr. 28 (str. 16) prodloužit narýsované části přímek *c, d,* abychom dostali průsečík těchto přímek?

288. Narýsujte si obrazec podle obr. 3 (str. 11) a v něm osy úhlů φ a ψ! Jsou ty dvě osy mezi sebou rovnoběžné? Proč?

289. Daným bodem veďte přímku tak, aby proťala dvě dané různoběžky *p, q* obě pod týmž úhlem! (Sestrojte obě přímky, které půlí úhly tvořené přímkami *p, q* a dokažte, že hledaná přímka je s jednou z nich rovnoběžná! Daná úloha je dvojznačná.)

C. *Úhly trojúhelníka.*

290. Dva úhly trojúhelníka jsou:

a) 53^0, 79^0; b) 109^0, 36^0; c) $74\frac{1}{2}^0$, $62\frac{1}{3}^0$; d) $83\frac{3}{4}^0$, $41\frac{1}{2}^0$;
e) $1\frac{1}{6}R$, $\frac{3}{8}R$; f) $\frac{5}{6}R$, $\frac{2}{3}R$; g) $29^0\ 35'\ 46''$, $83^0\ 52'\ 54''$.

Určete velikost třetího úhlu!

291. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 46^0$, $\beta = 64^0$. Uvnitř strany BC leží bod D tak, že $\sphericalangle\ BAD = 26^0$. Určete velikost úhlů trojúhelníků ABD, ACD!

292. Opakujte úlohu 252 s tím rozdílem , že bod D neleží uvnitř strany BC, nýbrž na jejím prodloužení za bod B!

293. Uvnitř strany BC trojúhelníka ABC leží bod D. Určete úhly trojúhelníků ABD, ACD, jestliže $\sphericalangle\ ADC = 70^0$, $\sphericalangle\ ABC = 60^0$, $\sphericalangle\ ACB = 50^0$!

294. Opakujte úlohu 254 s tím rozdílem, že $\sphericalangle\ ADC = 82^0\ 36'\ 36''$, $ABC = 58^0\ 45'\ 38''$, $\sphericalangle\ ACB = 43^0\ 13'\ 29''$!

295. Jestliže v obr. 40 (str. 24) je $\alpha_1 = 45^0$, $\alpha_2 = 42^0$, $\gamma = 133^0$, čemu se rovná úhel β?

296. Opakujte úlohu 256 s tím rozdílem, že $\alpha_1 = 49^0\ 27'\ 56''$, $\alpha_2 = 39^0\ 56'\ 62''$, $\gamma = 142^0\ 44'\ 55''$!

297. Jestliže v trojúhelníku ABC je a) $\alpha = 2\beta$, b) $\alpha = 3\beta$, c) $\alpha - \beta = 50^0$ a jestliže mimo to $\gamma = 48^0$, určete úhly α a β!

298. Jestliže v trojúhelníku ABC je $\alpha > \beta > \gamma$, $\beta = 70^0$, co můžete říci o velikosti úhlu α? Co o velikosti úhlu γ?

299. V trojúhelníku ABC budiž AU osa úhlu α, BU osa úhlu β. Dokažte, že $\sphericalangle\ AUB$ je vždy tupý! b) Vyjádřete velikost $\sphericalangle\ AUB$ pomocí velikosti úhlu γ? (Proveďte napřed pro $\gamma = 60^0$, $\gamma = 40^0$, $\gamma = 80^0$, potom obecně!)

300. Dá se dokázati, že všecky tři výšky troúhelníka ABC se protnou v jediném bodě H; je-li trojúhelník ostroúhlý, leží H uvnitř trojúhelníka. Výšky v tomto případě vymezí šest úhlů s vrcholem H, z nichž dva a dva jsou vrcholové. Dokažte, že dva z těchto šesti úhlů jsou rovny α, dva rovny β a dva rovny γ! (Proveďte napřed pro $\alpha = 70^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 50^0$, potom obecně!)

D. *Úhly rovnoramenného trojúhelníka.*

301. Úhel proti základně rovnoramenného trojúhelníka je roven a) $1\frac{2}{7}\ R$, b) $105^0\ 27'\ 38''$. Určete velikost úhlu při základně!

302. Úhel při základně rovnoramenného trojúhelníka je roven a) $\frac{5}{9}\ R$, b) $70^0\ 43'\ 27''$. Určete velikost úhlu proti základně!

303. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$. Uvnitř strany BC leží bod D tak, že $\overline{CD} = \overline{CA}$. Určete velikost úhlů trojúhelníků ABD a ACD!

304. Opakujte úlohu 264 s tím rozdílem, že bod D leží na prodloužení strany BC za bod C!

305. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 85^0$, $\beta = 44^0$. Na prodloužení strany AC

a) za bod A,

b) za bod C leží bod D tak, že $\overline{CD} = \overline{CB}$.

Určete velikost úhlů trojúhelníků ABD a BCD!

306. V trojúhelníku ABC je $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\beta = 36^0$. Dokažte, že osa úhlu α dělí ABC na dva rovnoramenné trojúhelníky!

307. Stranu BC trojúhelníka ABC prodlužte jednak za bod B o délku $\overline{BD} = \overline{AB}$, jednak za bod C o délku $\overline{CE} = \overline{AC}$; vyjádřete úhly trojúhelníka ADE pomocí úhlů trojúhelníka ABC!

308. V trojúhelníku ABC je $\alpha = 100^0$, $\beta = 50^0$. Uvnitř strany BC leží body D, E tak, že $\overline{BD} = \overline{AB}$, $\overline{CD} = \overline{AC}$. Vypočtěte úhly trojúhelníků ABE. AED, ADC!

E. *Shodné trojúhelníky.*

309. Jestliže $DHF \cong KAS$, zapište správně, které strany jsou si rovny a které úhly jsou si rovny!

310. Vyslovte čtyři základní poučky o určenosti trojúhelníků! Vyslovte je ve tvaru pouček o shodnosti trojúhelníků!

311. Vyslovte tři základní poučky o určenosti pravoúhlého trojúhelníka! Vyslovte je ve tvaru pouček o shodnosti prravoúhlých trojúhelníků!

312. Uvnitř ramen AB, AC rovnoramenného trojúhelníka ABC zvolte body D, E tak, že $\overline{AD} = \overline{AE}$! Dokažte, že trojúhelníky BCD a BCE jsou shodné; zapište správně shodnost! Potom dokažte, že trojúhelníky ABE a ADC jsou shodné; zase zapište správně shodnost!

313. Nad stranami AB a AC libovolného trojúhelníka ABC sestrojte rovnostranné trojúhelníky ABK a ACL tak, aby zasahovaly dovnitř trojúhelníka ABC! Spojte CK, BL! Který trojúhelník v obrazci je shodný s trojúhelníkem ABL? Která úsečka v obrazci je rovna úsečce BL? Který úhel v obrazci je roven $\sphericalangle ABL$?

314. Budiž BC základna rovnoramenného trojúhelníka ABC. Na přímce AB určete body D, E, F tak, že $\overline{AD} = \overline{BD}$, že CE je osa úhlu γ a že $CF \perp AB$! Na přímce AC určete body G, H, K tak, že $\overline{AG} = \overline{GC}$, že BH je osa úhlu β a že $BK \perp AC$! Na základě shodnosti trojúhelníků dokažte:

a) $\overline{BG} = \overline{CD}$, b) $\overline{BH} = \overline{CE}$, c) $\overline{BK} = \overline{CF}$!

Ke každé úloze zvláštní obrazec! K úloze c) si narýsujte dva obrazce, jeden pro případ ostrého úhlu α, druhý pro případ tupého úhlu α! V případě pravého úhlu α je výsledek úlohy c) samozřejmý; proč?

F. *Rovnoběžník.*

315. Určete úhly rovnoběžníka, jestliže

a) jeden z nich je roven $1\frac{1}{5}R$;
b) jeden je trojnásobek druhého;
c) jeden je o 30^0 větší než druhý;
d) jeden je o 30^0 větší než dvojnásobek druhého;
e) jeden je o 40^0 menší než trojnásobek druhého!

316 Určete délky stran rovnoběžníka, jestliže jedna z nich, dlouhá 9 cm, je čtvrtinou obvodu!

317. Poměr dvou stran rovnoběžníka je 3 : 5 a obvod měří 24 cm. Určete délky stran!

318. U rovnoběžníka $ABCD$ jest $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AC} = 3$ cm; na straně CD leží body E, F tak, že AE je osa úhlu α, BF je osa úhlu β. Určete délky $\overline{CE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$!

319. Osy úhlů α a β rovnoběžníka $ABCD$ se protnou na straně CD. Dokažte, že $\overline{AB} = 2 . \overline{AC}$!

320. Bod E uvnitř strany AB rovnoběžníka $ABCD$ spojte s průsečíkem S úhlopříček rovnoběžníka a prodlužte až k průsečíku F se stranou CD! Dokažte, že S půlí úsečku EF! (Napřed dokažte, že $SBE \cong SDF$, potom $BEDF$ je rovnoběžník!)

321. Jedna úhlopříčka kosočtverce je rovna jedné jeho straně. Určete úhly kosočtverce!

322. Strana kosočtverce tvoří s úhlopříčkami úhly φ ψ. Určete úhly kosočtverce, jestliže

a) $\varphi - \psi = 10^0$, b) $\varphi : \psi = 2 : 3$!

323. Výška spuštěná s vrcholu tupého úhlu kosočtverce půlí protější stranu. Určete úhly kosočtverce!

324. Výška kosočtverce se rovná 2 cm, obvod 16 cm. Určete úhly kosočtverce!

325. Strana obdélníka svírá úhlopříčkou úhel 36^0. Určete ostrý úhel obou úhlopříček!

326. Určete úhel mezi menší stranou obdélníka a úhlopříčkou, je-li tento úhel o 30^0 menší než ostrý úhel obou úhlopříček!

327. Úhlopříčky obdélníka svírají úhel 60^0. Součet obou úhlopříček a obou menších stran je roven 3,6 cm. Určete délku úhlopříček!

328. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka je vepsán obdélník tak, že dva jeho vrcholy leží na přeponě a druhé dva na odvěsnách. Přepona trojúhelníka měří 45 cm; poměr stran obdélníka je 2 : 5. Určete délky stran obdélníka!

329. Osa pravého úhlu pravoúhlého trojúhelníka protne přeponu v bodě, jímž vedeme rovnoběžky s oběma odvěsnami. Dokažte, že vznikne čtverec!

330. Narýsujte osy všech čtyř úhlů obdélníka a dokažte, že vznikne čtverec!

G. *Konstrukce.*

331. Sestrojte součet tří narýsovaných úhlů!

232. Sestrojte rozdíl dvou narýsovaných úhlů!

333. Zvolte si dvě úsečky a a b! Sestrojte dvě úsečky tak, aby jejich součet byl roven a a rozdíl byl roven b!

334. Zvolte si dva úhly α a β tak, že $\alpha > \beta$! Sestrojte dva úhly tak, aby jejich součet byl roven α a rozdíl byl roven β!

335. Zvolte si úhel α a sestrojte úhel rovný $\frac{1}{4}\alpha$!

336. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 75^0$;

b) $a = 5$ cm, $\beta = 60^0$, $\gamma = 45^0$;

c) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 75^0$;

d) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm;

e) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\beta = 30^0$.

Kolik řešení má úloha e)?

337. Bodem zvoleným uvnitř úhlu veďte přímku tak, aby vytínala na obou ramenech úhlu úsečky sobě rovné! (Čím bude kolmice spuštěná na hledanou přímku s vrcholu úhlu?)

338. Na přímce protínající obě ramena daného úhlu sestrojte bod stejně vzdálený od obou ramen! (Čím bude spojnice hledaného bodu s vrcholem úhlu?)

339. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby odvěsna BC se rovnala 4 cm a aby součet přepony a druhé odvěsny AC byl roven 7 cm! (Je-li D na prodloužení AC za bod A tak, že $\overline{AD} = \overline{AB}$, sestrojte nejprve trojúhelník BCD!)

340. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby odvěsna BC se rovnala 4 cm a aby rozdíl přepony a druhé odvěsny AC byl roven 2 cm! (Řeší se podobně jako úloha 339.)

341. Daným bodem A veďte přímku tak, aby proťala danou přímku p pod úhlem 75^0! (Dvě řešení.)

342. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 5$ cm, $\alpha = 60^0$, $\beta = 75^0$!

343. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$ a je-li obvod roven 1 dm! (Je-li D na prodloužení strany AB za bod A, dále E na prodloužení AB za bod B tak, že $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$, můžeme napřed sestrojit trojúhelník CDE, protože umíme určit jeho úhly při vrcholech D a E.)

344. Sestrojte rovnoběžník se stranami 4 cm a 7 cm tak, aby výška spuštěná s vrcholu tupého úhlu půlila protější stranu!

345. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby součet strany a úhlopříčky byl roven 8 cm! (Je-li E na prodloužení strany AB za bod A tak, že $\overline{AE} = \overline{AC}$, můžeme napřed sestrojit trojúhelník BCE, protože umíme určit jeho úhel při vrcholu E.)

ABECEDNÍ SEZNAM GEOMETRICKÝCH POJMŮ Z LÁTKY I. A II. TŘÍDY.

(I 3_{12} znamená učebnici pro I. třídu, stranu 3, řádek 12 zdola, II 76^4 znamená učebnici pro II. třídu, stranu 76, řádek 4 shora a podobně v jiných případech.)

Bod I 3_{12}, b. dotyku II 76^4, b. krajní (úsečky) I 4_9
centimetr I 7^5, I 44_5, čtvereční cm I 44_1, krychlový cm I 49_3, I 51_8
čára I 3^2, č. křivá I 3^5, č. lomená I 5^1, č. přímá I 3^5
čtverec I 35_1, II 47_5
čtyrboký pravidelný jehlan I 38_2
čtyrstěn pravidelný I 39^1
čtyrúhelník I 8^5, I 22
decilitr I 52^4
decimetr I 44_5, čtvereční dm I 44_1, krychlový dm I 51_8
délka kvádru I 33^8, d. obvodu I 8_8, d. obdélníka I 32_6, I 33^4, d. poloměru I 10^{17}, d. průměru I 11_{12}, d. úsečky I 7^2
délková jednotka I 7^9, I 44_5
diametros I 11_{10}
doplňkové úhly I 67^{13}
dotyk přímky s kružnicí I 25_6, II 74 a násl.
dotýkati se II 75_1
dotyku bod II 76^4
duté míry I 52^5
dutý úhel I 59^2
Eukleides (Euklid) II 3^5
euklidovská konstrukce II 3^{12}, II 50 a násl., e. k. kolmice II 5; II 8, II 52, e. k. osy úsečky II 4, e. k. osy úhlu (rozpůlení úhlu) II 6, e. k. přenesení úhlu II 5_{10} (viz I 61 a násl.), e. k. rovnoběžky II 6, II 53, e. k. středu úsečky II 4, e. k. úhlu 60^0 II 7, e. k. úhlů 45^0, 135^0, $22\frac{1}{2}^0$ II 6, e. k. úhlů 120^0, 30^0, 150^0, 15^0 II 8
geometrické místo II 62 a násl., II 69_{16}
geometrie I 3^3, I 27^7, I 43^2, II 3^2
grafické odčítání úseček I 9^3, úhlů I 63^4
grafické násobení úsečky číslem I 9^4, úhlu číslem I 63^4
grafické sčítání úseček I 8_6, úhlů I 63^3
hektar I 45^4
hektolitr I 52^3
hloubkový úhel II 35_{16}
hrana kvádru I 27_3
hranol pravidelný pětiboký I 39^8
jednotka délková I 7^9, I 44_5, j. plošná I 44_1, j. prostorová I 49_3, I 51_8
jehlan pravidelný čtyrboký I 38_2, j. p. pětiboký I 39^3
kilometr I 44_4, čtvereční km I 45^1
kolmost přímek I 19^6, k. přímky k rovině I 54^9, k. (značka $\perp$) I 19^8
konstrukce I 14_{12}, k. euklidovská II 3^{12}, II 50 a násl., k. pomocná II 12^8
kosočtverec II 46_{10}
kosý úhel I 58_7
krajní bod úsečky I 4_9
kruh I 10^7
kruhová úseč I 11^9, k. výseč I 11^{12}
kružítko I 10_{14}
kružnice I 10^6, k. soustředné I 11^1
krychle I 27^{14}
křivá čára I 3^5
kvádr I 27^{15}
lichoběžník II 22^{13}
litr I 51_1
lomená čára I 5^1
měnitel I 44_4, I 45^7, I 51_8
menší (značka $<$) I 16_{12}
měřictví I 43^5
měřítko I 7^2
metr I 44_5, čtvereční m I 45^1, krychlový m I 51_8
mezikruží I 11^2
milimetr I 7^5, I 44_5, čtvereční mm I 44_1, krychlový mm I 51_8
mimoběžné přímky n. mimoběžky I 53^{13}
minuta (úhlová) I 64^2
místo geometrické II 62 a násl., II 69_{16}
mnohoúhelník (pravidelný) I 70^6, II 20_{16}, m. vypuklý II 21^4
násobení grafické úsečky číslem I 9^4, úhlu číslem I 63^4
obdélník I 24^2, I 31 a násl., I 45, II 46^1, II 46^9, o. obecný I 36_{11}
objem I 49_5, o. kvádru I 51^3, o. krychle I 51^{10}
oblouk I 11^6
obrácená poučka II 12_5
obraz II 58_{18}, II 61^7
obsah (plošný) I 44^8, o. čtverce I 45_{13}, I 45_3, o. obdélníka I 45^{11}

obvod I 8^2, I 8_3
odčítání grafické úseček I 9^3, úhlů I 63^4
odvěsna I 19_7
opsati kružnici čtverci I 36_{12}, o. k. obdélníku I 34_2, o. k. trojúhelníku II 70
osa souměrnosti II 3_9, II 58^{12}, o. úhlu II 5_6, II 5_1, o. úsečky II 4^2, II 64_4
osová souměrnost II 3_{11}, II 58^{11}
osy dvou různoběžek II 66^2, II 66^6 o. stran trojúhelníka II 70, o. úhlů trojúhelníka II 78
pás přímý I 23_6
pata kolmice na přímku I 19_{13}, p. k. na rovinu I 54^{10}
pětiboký pravidelný hranol I 39^8, p. p. jehlan I 39^3
pětiúhelník I 9^5, I 39^4
plný úhel I 56_3
plocha I 8^1, I 10^8, I 27_{12}, p. rovná n. rovinná I 28_3, p. zakřivená I 28_2
plošná jednotka I 44_1
plošný obsah I 44^8
pobočná hrana I 27_2, p. stěna I 27_6
podstava kvádru I 27_8
polokruh I 11_6
polokružnice I 11_5
poloměr I 10^{16}, I 10^{18}
polopřímka I 58^3
pomocná konstrukce II 12^8
poučka II 11_{12}, p. obrácená II 12_5
povrch I 27_{16}, I 48^6
pravidelný čtyrboký jehlan I 38_2, p. čtyrstěn I 39^1, p. mnohoúhelník I 70^6, II 20_{16}, p. pětiboký hranol I 39^8, p. pětiboký jehlan I 39^3, p. pětiúhelník I 39^5, p. šestiúhelník I 70^9
pravítko I 3^6, p. pomocné I 20_2, p. trojúhelníkové I 3^6
pravoúhlý trojúhelník I 19_{10}, I 67^7, II 55
pravý úhel I 19^{15}, I 56_7
prostor I 27^7
prostorová jednotka I 49_3, I 51_8
protější vrcholy, strany a úhly čtyrúhelníka II 22^2, p. strany rovnoběžníka II 43_4, II 44^{11}, II 44_{11}
průčelná poloha kvádru I 30_3
průměr I 11_{13}, I 11_{11}, I 11_4
průmět tělesa I 40^8
průsečnice I 53_3
průsečík přímek I 4^4, p. přímky s rovinou I 53_8, p. výšek trojúhelníka II 71_{13}
přenášení úsečky I 12, p. úhlu I 61
přepona I 19_9
příčka střední I 36^6 (u čtverce), I 34^4 (u obdélníka), dvě přímky proťaté příčkou II 10_{12}
přilehlé úhly II 11^1, II 12^5, II 13^{17}, II 14^1, II 25_2
přímá čára I 3^5
přímka I 3^8
přímý pás I 23_6, p. úhel I 56_4
připsané kružnice II 78_{14}
radius I 10_{18}
rameno lichoběžníka II 22^{15}, r. trojúhelníka rovnoramenného I 17_{16}, r. úhlu I 58^6
rovina I 28^9
rovinná n. rovná plocha I 28_3
rovnoběžka I 23^7
rovnoběžník II 22_{12}, II 43 a násl.
rovnoběžnost (značka ||) I 23^{10}, r. dvou přímek I 23^7, r. dvou rovin I 53, r. přímky s rovinou I 53_{15}
rovnoramenný trojúhelník I 17_{17}, II 37
rovnostranný trojúhelník I 17_{14}, II 53^4
rozměry kvádru I 33^7, r. obdélníka I 33^2
rozpůlit úsečku I 11_2 (zkusmo), I 12 (proužkem papíru), II 4 (euklidovsky), r. úhel II 6
různoběžka I 53^7
různoběžník II 22^{10}
různoběžnost dvou přímek I 53^7, r. dvou rovin I 53_5, r. přímky s rovinou I 53_9
různostranný trojúhelník I 17_{19}
rýsování kolmic I 21, r. kružnice I 10, r. přímky I 5, r. rovnoběžek I 24, I 25
samodružný bod II 58_{15}, II 61^6
sčítání grafické úseček I 8_6, s. g. úhlů I 63^3
sečna kružnice I 75^2
sevřený úhel II 26_{12}
shodnost I 33_{17}, II 6_2, s. trojúhelníků II 26, II 27, II 28, II 40, značka shodnosti $\cong$ II 30^1
síť tělesa I 37_1
smysl plopřímky II 9_8
souhlasné úhly II 10_{10}, II 11_4, II 13^5
souměrně sdružený útvar II 58^{13}, II 60_1
souměrnost osová II 3_{11}, II 58^{11}, s. středová II 60_3
sousední vrcholy, strany a úhly čtyrúhelníka II 22^2
soustředné kružnice I 11^1

spojnice I 4_4

spustiti kolmici na přímku I 19_{14}, s. k. na rovinu I 54^9

sss II 28_{14}

státi kolmo I 19^6, I 54^8

stěna kvádru I 27_{11}

Stoicheia II 3^6

strana čtyrúhelníka I 8^6, s. trojúhelníka I 8^6

střed kružnice I 10^{11}, s. kvádru I 54_2, s. obdélníka I 34_{11}, s. souměrnosti II 60_2, s. úsečky I 11_3, střední příčka čtverce I 36^6, s. p. obdélníka I 34^4

stupeň I 63_6

svislá přímka I 30_{16}, s. rovina I 30_{15}

šestiúhelník I 9^7, š. pravidelný I 70^9

šikmá přímka I 30_{11}, š. rovina I 30_{11}

šipka I 58_2, II 9_{14}, II 11^6

šířka kvádru I 33^9, š. mezikruží I 11^3, š. obdélníka I 32_4, I 33^4, š. přímého pásu I 23_6

tečna kružnice II 75

těleso I 27^{11}

tětiva I 11^7, II 68 a násl.

Thaletova věta II 48^8, II 66_6

trojúhelník I 7_5, t. (označení $A, B, C, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$) II 25, t. kosoúhlý I 67^9, t. ostroúhlý I 67^6, t. pravoúhlý I 19_{10}, I 67^7, II 55, t. rovnoramenný I 17_{17}, II 37, t. rovnostranný I 17_{14}, II 53^4, t. různostranný I 17_{19}, t. tupoúhlý I 67^8

tupý úhel I 58_9

úhel I 56_{13}, ú. (značka $\sphericalangle$) I 58_{10}, ú. dutý I 59^2, ú. hloubkový II 35_{16}, ú. kosý I 58_7, ú. obvodový II 48^2, II 48^6, II 48^8, II 48_2, ú. ostrý I 58_{10}, ú. plný I 56_3, ú. pravý I 19^{15}, I 56_7, ú. přímý I 56_4, ú. sevřený II 26_{12}, ú. tupý I 58_9, ú. trojúhelníka I 60_9, II 17^2, II 17_4, ú. vnější (mnohoúhelníka) II 19_9, II 20^8, ú. vnější (trojúhelníka) I 68^6, II 17_{14}, ú. vnitřní (mnohoúhelníka) II 19^2, II 19_{11}, ú. vnitřní (trojúhelníka) I 60_{10}, II 17^2, II 17_{14}, ú. vypuklý I 59^3, ú. výškový II 85_{17}

úhloměr I 64_4

úhlopříčka I 8^7, ú. čtverce I 36_3, ú. kvádru I 54_{14} (stěnová), I 54_{15} (tělesná), ú. kosočtverce II 46_5, II 47^4, II 47_{17}, ú. obdélníka I 34_{10}, II 46^1, ú. rovnoběžníka II 45^2, II 45^{15}

úhly doplňkové I 67^{13}, ú. přilehlé II 11^1, II 12^5, II 13^{17}, II 14^1, II 25_2, ú. souhlasné II 10_{10}, II 11_1, II 13^5, ú. střídavé II 10_5, II 12^1, II 13^9, ú. vedlejší I 64^7, II 11_9, ú. vrcholové I 64^8, II 11_{10}, ú. výplňkové I 63_2

umocnit číslo na druhou I 45_{14}, u. č. na třetí I 51^8

určenost trojúhelníka II 26, II 27, II 28, II 40, u. t. pravoúhlého II 55, u. t. rovnoramenného II 56_{10}

úseč kruhová I 11^9

úsečka I 3^9

usu II 28_{19}

uus II 29^1

vedlejší úhly I 64^7, II 11_9

vepsati kružnici do čtverce I 36_{14}, v. k. do trojúhelníka II 77

větší (značka $>$) I 16_{12}

vnější úhel mnohoúhelníka II 19_9, II 20^8, v. ú. trojúhelníka I 68^6, II 17_{14}

vnitřní úhel mnohoúhelníka II 19^2, II 19_{11}, v. ú. trojúhelníka I 60_{10}, II 17^2, II 17_{14}

vodorovná přímka I 30_{13}, v. rovina I 30_{14}

vrchol čtyrúhelníka I 8^6, v. kvádru I 28^1, v. obdélníka I 31_{12}, v. pravého úhlu I 19^{15}, v. trojúhelníka I 7_4,

v. úhlu I 58^6

vrcholové úhly I 64^8, II 11_{10}

vteřina (úhlová) I 64^2

výplňkové úhly I 63_2

vypuklý mnohoúhelník II 21^4, v. úhel I 59^3

výseč kruhová I 11^{12}

výška kvádru I 33^9, v. obdélníka I 32_7, I 32_6, I 33^4, v. trojúhelníka II 71

výškový úhel II 35_{17}

vzdálenost bodu od přímky I 21_6, II 39_{10}, v. dvou bodů I 7^{10}, v. dvou rovnoběžek I 23_5

vztyčiti kolmici na přímku I 19_{15}, v. k. na rovinu I 54^{11}

základna lichoběžníka II 22^{14}, z. obdélníka I 32_9, z. trojúhelníka rovnoramenného I 17_{16}

Základy (Euklidovy) II 3^6

zakřivená plocha I 29^2

OBSAH:

	Strana
A. Osová souměrnost a euklidovské konstrukce	3
Cvičení k A (A 1—A 15)	8
§ 1. Dvě přímky proťaté příčkou	9
Cvičení k § 1 (1—30)	14
§ 2. Úhly mnohoúhelníka	17
Cvičení k § 2 (31—63)	23
§ 3. Shodné trojúhelníky	25
Cvičení k § 3 (64—103	30
§ 4. Grafické určování vzdáleností a výšek	34
Cvičení k § 4 (104—122)	35
§ 5. Pokračování o trojúhelníku	37
Cvičení § 5 (123—144)	41
§ 6. Rovnoběžník	43
Cvičení k § 6 (145—161)	49
§ 7. Konstrukce	50
Cvičení k § 7 (162—174)	56
§ 8. Souměrnost osová a souměrnost středová	58
Cvičení § 8 (175—180)	62
§ 9. Geometrická místa	62
Cvičení k § 9 (181—194)	67
§ 10. Tětivy kružnice	68
Cvičení k § 10 (195—222)	72
§ 11. Tečny ke kružnici	74
Cvičení k § 11 (223—233)	78
§ 12. Početní úlohy o obsahu, povrchu a objemu	79
§ 13. Úkoly k opakování	83
Abecední seznam geom. pojmů z látky I. a II. třídy	88

Čkm. 238-II

Cena Kčs 9,—