Jan Bílek; Eduard Čech; Karel Hruša; Vítězslav Jozífek; Karel Prášil; Karel Rakušan

Aritmetika pro čtvrtou třídu středních škol

Státní nakladatelství učebnic, Praha, 3. vyd., 1951, 142 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501336

ARITMETIKA

PRO ČTVRTOU TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC

A R I T M E T I K A

PRO ČTVRTOU TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

1951

Státní nakladatelství učebnic

Praha

Úvodní poznámky.

Učivo IV. třídy jednak opakuje a shrnuje, jednak prohlubuje a sjednocuje dosavadní poznatky žáků v harmonický celek.

Dbáme zejména toho, aby žáci získali správný názor na význam čísla v životě společnosti a aby dovedli samostatně provádět jednoduché logické úsudky a jednoznačně je vyjadřovat. Proto je v této učebnici zdůrazňováno usuzování jak na abstraktních příkladech, tak i na konkretních numerických výpočtech. Občasnými otázkami a výzvami chceme žáka přimět k samostatnému přemýšlení a usuzování při studiu textu. Žáci si z učebnice opakují a doplňují učitelův výklad a mohou si z ní samostatně studovati některé části učiva. Je třeba, abychom žáky k samostatnému studiu aritmetiky soustavně vedli a upozorňovali je na nebezpečí bezduchého memorování a odříkávání.

Text, jehož plné osvojení není nezbytně nutné, je tištěn petitem. Praktické aplikace vyložené látky jsou uvedeny v úlohách a příkladech většinou úplně vypočtených a uspořádaných podle obtížnosti. Také cvičení, jež jsou rovněž tištěna petitem, jsou uspořádána podle obtížnosti. Je jich tolik, že je většina žáků všecka nepropočítá, a proto je může učitel ukládat jednotlivcům individuálně podle jejich schopnosti. Obtížnější cvičení jsou označena hvězdičkou.

Z první kapitoly (opakování) je nutno na začátku roku probrat všecky oddíly. V jednotlivých oddílech však není třeba procvičit všechna cvičení. K vynechaným cvičením se během roku stále a soustavně vracíme.

Výklad o dělitelnosti spočívá na pojmu násobku, z něhož vše ostatní stále vyvozujeme. Některé další poučky o dělitelnosti jsou probírány jako aplikace rozkladů mnohočlenů v jednoduché činitele.

Učivo o početních výkonech se zlomky prohlubuje dřívější znalosti o zlomcích a znalosti o počítání s čísly zapsanými pomocí písmen. Proto je nezbytně třeba, aby žáci dobře ovládali látku z předcházejících tříd. Má-li být počítání se zlomky logicky správné, nelze za písmena dosazovati taková čísla, pro něž je jmenovatel roven nule.

Kapitola o desetinných zlomcích vyhovuje praktickým potřebám. Je v ní přihlédnuto k počítání s čísly zaokrouhlenými, potřebnými pro praxi a dosud na škole opomíjenými.

Rovnice I. stupně se zobecňují tím, že za součinitele jsou volena také písmena. U takových rovnic nesmíme zapomínat na rozbor řešení, to jest na stanovení podmínek řešitelnosti rovnice. Tyto úvahy jsou důležitým prostředkem správné výchovy ke kritickému myšlení. Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice jsou ukázkou, jak matematika pomáhá řešit některé problémy z denního života, především z výstavby lidově demokratického státu.

Vyvrcholením funkčního myšlení, které bylo soustavně pěstováno již od první třídy, je zkoumání vzájemného vztahu mezi proměnlivými veličinami. V dnešním hospodářském životě, jehož rozvoj spočívá v plánování, jest zvlášť důležité, aby každý občan dovedl číst statistiky vyjádřené tabelárně nebo graficky a vyvodit z nich správné závěry. Tu lze upozornit na funkci čísla a na mnohostranný úkol matematiky v životě.

Rozvrh učiva:

Září:	Opakování a doplnění probraného učiva.
Říjen:	Násobek a dělitel. Prvočísla. Rozklad na prvočinitele. Stanovení všech dělitelů daného čísla.
Listopad:	Společný dělitel. Společný násobek. Rozklad mnohočlenů. Nejvyšší společný dělitel a nejnižší společný násobek mnohočlenů. (Jednoznačnost rozkladu na prvočinitele.)
Prosinec:	Rozšiřování a krácení zlomků. Sčítání a odčítání zlomků. Násobení zlomků. Dělení zlomků.
Leden:	Převádění zlomků obyčejných na zlomky desetinné. Čísla periodická. Čísla zaokrouhlená a počítání s nimi.
Únor:	Pravidla pro řešení rovnic. Rovnice, které obsahují vedle neznámé další písmena. Soustava rovnic o dvou neznámých.
Březen:	Slovní úlohy.
Duben:	Vyjádření závislosti tabulkou. Závislost vyjádřená rovnicí. Závislost vyjádřená graficky.
Květen:	Přímá úměrnost a její znázornění. Nepřímá úměrnost a její znázornění. Lineární funkce.
Červen:	Opakování.

Čemu se budete učiti.

Loni jste se seznámili s počítáním s písmeny, naučili jste se vyjadřovat vztahy pomocí písmen. Záznam s písmeny má obecnější platnost než záznam s určitými čísly. Proto dáváme zápisu s písmeny vždy přednost před zápisem s určitými čísly.

Chceme-li správně pochopit nové věci, musíme znát nejprve učivo, které bylo probíráno dříve, a nové poznatky vyvozovat z poznatků dřívějších. Proto na začátku opakujeme.

O tom, kdy je podílem dvou celých čísel opět celé číslo, vás poučuje dělitelnost. Leccos z toho je vám již známé z druhé třídy; letos si tyto poznatky prohloubíte.

Ve druhé třídě jste počítali se zlomky. Tehdy jste ještě neuměli počítat s písmeny. Letos budou v čitatelích i jmenovatelích zlomků také písmena. Budete mít vhodnou příležitost svoje znalosti o zlomcích si zopakovat a prohloubit.

Mezi zlomky mají největší důležitost desetinné zlomky. Jimi jsou zpravidla vyjadřovány různé údaje z denního života i z technické praxe. Praktický život však vede vždy k číslům zaokrouhleným, a proto výsledky výpočtů s takovými čísly nemohou být přesné. O přesnosti výsledků se poučíme v článku o zaokrouhlených číslech.

Loni jste řešili některé slovní úlohy užitím rovnic. Letos budete řešit i rovnice složitější a vedle rovnic o jedné neznámé budete probírat také rovnice o dvou neznámých.

Každá změna jedné veličiny je zpravidla doprovázena změnou veličiny jiné. Na příklad mění-li se směr dopadu slunečních paprsků, mění se i teplota vzduchu. Říkáme, že teplota vzduchu závisí na směru dopadu slunečních paprsků. V kapitole o funkcích si povíme, jak se taková závislost vyjadřuje číselně a jakých pomůcek se k tomu užívá.

V každém úseku matematiky začínáme jednoduchými úvahami, které se vám budou zdát samozřejmými. Nepřehlížejte je a hleďte do těchto jednoduchých začátků proniknout co nejhlouběji. Jsou to základní kameny, na nichž matematika buduje. Jakmile zjistíte, že něčemu přestáváte rozumět, vraťte se ihned k počátku probíraného oddílu. Tak získáte trvalé znalosti, které budete moci uplatnit v praktickém životě při výstavbě naší lidově demokratické vlasti.

I. Opakování a doplňky.

1. Písmena ve významu čísel. Jednočleny.

1. Slučte:

a) $5{,}7 - 4{,}2 + 3{,}8 - 1{,}6 - 2{,}3$; b) $4x^2 - 3x^2 + 2x^2 - x^2$;
c) $9z - 9 - z$; d) $12uv - 12u - v + 12v + u - 12vu$;
e) $5p^2q + 4pq^2 - 8p^2q - 3pq^2$.

2. Kdy se dá výsledek slučování dvou (nebo několika) jednočlenů psát opět ve tvaru jednočlenu? Jaký tvar má pak výsledný jednočlen? Ukažte to na příkladech:

a) $12x^2y + 5x^2y$; b) $tu^3v^2 - \frac{7}{8}tu^3v^2$.

3. Vypočtěte:

a) $2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m$; b) $p^2qr^3 \cdot p^2qr^3$; c) $(3u^3v^2z)^3$.

4. Vypočtěte:

a) $2h^2 \cdot 3h^3 + h \cdot 4h^4$; b) $5e^2f \cdot 2fg^2 - 3e^2g \cdot 3f^2g + 4efg^2$;
c) $3m^2(3m^2n \cdot 4mn - 6m^2 \cdot 2mn^2)$.

5. Dělte:

a) $6a^2b^3 : 2ab^2$; b) $9u^5v^6 : 12u^3v^3$;
c) $28r^3s^3t^3 : (5r^2s \cdot 7st^3)$; d) $(6x^2y^3 \cdot 15xyz^2) : (9xy^2 \cdot 20xy^2z)$.

6. Vypočtěte:

a) $(5xyz)^2 : 5xyz^2$; b) $(6cd^2)^2 - 5c^2d \cdot 4d^3$;
c) $(5a^3b^3)^2 - (2a^2b^2)^3$.

2. Závorky.

V následujících cvičeních zapisujte početní výkony a používejte závorek všude tam, kde je toho třeba. (Nebudete-li si vědět rady, zvolte místo písmen vhodná určitá čísla a sledujte bedlivě, jak z nich výpočet vzniká.)

7. a) Číslo a násobiti součtem čísel b a c. b) Součin čísel a a b zvětšiti o c.

8. a) Od čísla a odečísti součet čísel b a c. b) Rozdíl čísel a a b zvětšiti o c.

9. a) Součet čísel p a q násobiti rozdílem čísel r a s.
b) Součet čísel p a q násobený číslem r zmenšiti o s.
c) Součet čísla p a q-násobného rozdílu čísel r a s.
d) Součet čísla p a součinu čísel q a r zmenšiti o s.

10. a) Součin čísel x a y zvětšiti o součin čísel z a u.
b) Součin čísel x a y zvětšený o z násobiti číslem u.
c) Součin čísla x a součtu čísel y a z násobiti číslem u.

11. a) Pětinásobek čísla k umocniti dvěma.
b) Pětinásobek čísla k umocněného dvěma.

12. Od druhé mocniny součtu čísel p a q odečísti součet druhých mocnin čísel p a q.

13. Číslo má na místě jednotek číslici a, na místě desítek číslici b, na místě set číslici c a na místě tisíců číslici d. Napište to číslo!

14. 1 kg mýdla stojí c Kčs. Bednička s mýdlem vážila b kg, bednička sama t kg. Dovozné a obal stály f Kčs. Kolik účtovala továrna?

15. Dělník potřeboval dříve ke zhotovení součástky do stroje s minut. Kolik minut potřebuje k výrobě 8 takových součástek nyní, ušetří-li t minut při výrobě: a) 8 součastek; b) jedné součástky.

16. Průvodčí na elektrické dráze prodal x lístků po 2,50 Kčs, y lístků po 1,50 Kčs a z lítstků po 3,50 Kčs. Kolik utržil?

17. Z 1 kg mouky se upeče 1,25 kg chleba. 1 kg mouky stojí a Kčs, 1 kg chleba stojí b Kčs. O kolik Kčs méně stojí a) 1 kg, b) 20 kg mouky než chléb z ní upečený? Jaká je podmínka pro a, aby úloha měla smysl?

18. Státní statek měl zásobu sena pro a krav na b dní, při čemž se počítalo po 4 kg se na na krávu denně. Část sena a 6 krav prodali. Zbylým senem krmili ostatní krávy celkem c dní, při čemž dávali každé krávě 5 kg sena denně. Kolik kg sena prodali?

19. Vlak délky d m jede rychlostí c m/min po mostě délky s m. Kolik minut uplyne mezi okamžikem, kdy vjede lokomotiva na most, a okamžikem, kdy most opustí poslední vagon?

20. Z látky v ceně b Kčs za 1 m byly vyrobeny pracovní pláště, které se prodávají po c Kčs za kus. Mimo cenu látky připadá na 1 plášť dalších d Kčs výloh (mzda zaměstnanců, cena přípravy atd.). Kolika látky m je třeba na 1 plášť? Kolik plášťů se vyrobí z a m látky?

21. x horníků nakope denně p vozíků uhlí. Onemocní-li jeden z nich, kolik vozíků dobrovolně nakope každý ze zbývajících horníků, aby se těžba nesnížila? Kolik vozíků uhlí by nakopalo při tomto zvýšeném výkonu všech x horníků?

3. Čísla relativní.

22. Vypočtěte:

a) $(2 - 3) \cdot (5 - 7)$; b) $(2 - 3) \cdot 5 - 7$;
c) $2 - 3 \cdot (5 - 7)$; d) $2 - 3 \cdot 5 - 7$.

23. Vypočtěte:

a) $2 \cdot 3 - 4 \cdot 5$; b) $2 \cdot (3 - 4 \cdot 5)$;
c) $(2 \cdot 3 - 4) \cdot 5$; d) $2 \cdot (3 - 4) \cdot 5$.

24. Vypočtěte:

a) $2 \cdot (3 - 4) \cdot 5 - 4 \cdot 7$; b) $[2 \cdot (3 - 4) \cdot 5 - 4] \cdot 7$;
c) $2 \cdot [(3 - 4) \cdot 5 - 4 \cdot 7]$; d) $2 \cdot [(3 - 4) \cdot 5 - 4] \cdot 7$.

25. Vypočtěte:

a) $4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2^3$; b) $(4 \cdot 3)^2 - 5 \cdot 2^3$;
c) $(4 \cdot 3^2 - 5) \cdot 2^3$; d) $(4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2)^3$;
e) $4 \cdot (3^2 - 5 \cdot 2)^3$.

4. Počítání s mnohočleny.

Ve cvičeních 26—32 proveďte naznačené výkony:

26. a) $a(b - c) - b(c + d) + c(a + b) + b(d - a)$;
b) $x(y + z - u) + y(x + z - u) - z(x + y - u) + u(x + y - z)$.

27. a) $(a + 2) . (2a - 3) - (3a - 2)(a + 1)$;
b) $(2t + 5) . (3t - 4) - (3t - 5)(t + 4)$.

28. a) $(u - v)(u^5 - v^5) + uv(u + v)$;
b) $(p^2 - q^2)(p^3 - q^3) - (p + q)(p^4 - p^2q^2 + q^4)$.

29. a) $(a - 1)(a - 2)(a + 3) - a^3$;
b) $zu(z - u) - zv(z - v) - (z - u)(z - v)(u - v)$.

30. a) $(3v - 5)[(3v - 5) . 3v - 5]$; b) $(3v - 5)[3v - 5(3v - 5)]$;
c) $3v - 5[3v - 5(3v - 5)]$; d) $3v - 5[(3v - 5) . 3v - 5]$.

31. $(48a^3p^2x^5 - 64a^4p^2x^4 + 16a^3p^2x^4) : 16a^3p^2x^4$.

32. a) $\dfrac{15a^4 + 12a^3b}{3a^2} + \dfrac{16a^3b - 32a^2b^2}{4ab} - \dfrac{15a^2b^2 - 20ab^3}{5b^2}$;

b) $\dfrac{9(x + 1)^2 - 15(x + 1)}{3(x + 1)} - \dfrac{5(x + 1)^3 - 10(x + 1)^2}{5(x + 1)^2} - \dfrac{14(x + 1) - 7}{7}$.

33. Číslo má na místě jednotek číslici a a na místě desítek číslici b, při čemž je b větší než a. Oč se změní toto číslo, napíšeme-li jeho číslice v opačném pořádku?

34. Je mi r let. Před pěti lety jsem byl šestkrát mladší než otec. Kolik let je otci?

35. V navíjárně pracuje a dělnic, z nichž každá navine b cívek denně. Jednoho dne byly přeřazeny dvě dělnice do jiného oddělení a ostatní se zavázaly, že navinou každá denně o c cívek více. Oč stoupne denní výkon navíjárny? Pro jaké hodnoty c výkon a) stoupne, b) nezmění se, c) klesne?

36. Myslím si číslo (x). Násobím je čtyřmi, od výsledku odečtu 3 a rozdíl násobím třemi. K výsledku přidám 5, součet dělím čtyřmi a k podílu přičtu 1. Kolik mi vyjde?

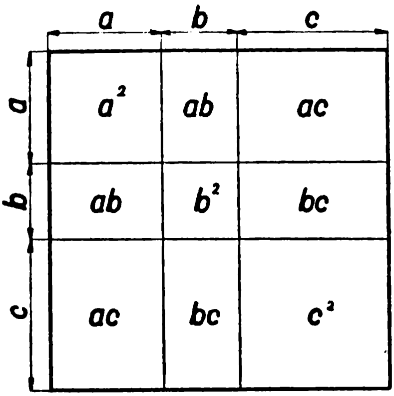
37. Žák si koupil 20 archů papíru. Z toho bylo x archů linkovaného po 40 hal. za arch a zbytek byl papír nelinkovaný po 30 hal. za arch. Kolik zaplatil?

5. Umocňování mnohočlenů.

38. a) $(2x^2 - 5y^3)^2$; b) $(12a^2b^3 - 4ab^3)^2$;
c) $(6u^2v^3 + 3uv^2)^2$; d) $(4a^2 - 3b^3)^2$.

39. Vzorce pro $(A + B)^2$ používáme i pro umocňování trojčlenu. Proveďte podle toho $(a + b + c)^2$.

(Návod: a)
$$\begin{aligned}
(A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2\\
[(a + b) + c]^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b) . c + c^2 =\\
&= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2;
\end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned}
(A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2\\
[a + (b + c)]^2 &= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 =\\
&= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2.)
\end{aligned}$$



Obr. 1.

40. Vyložte geometrický význam výrazu $(a + b + c)^2$ podle obr. 1.

41. a) $(3h + 2k + 1)^2$;
b) $(x^2 - x + 1)^2$;
c) $(\frac{1}{2} - a - 2a^2)^2$;
d) $(a + b + c + d)^2$.

42. a) $(6a + 2b)^3$;
b) $(3a^2 + 4b^2)^3$;
c) $(3a^2 - 5b^3)^3$;
d) $(4xy^2 - 3yz^2)^3$.

Ve cvičeních 43, 44 a 46 užijte při výpočtu vzorce $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

43. a) $4x^2 - 9y^2$;
b) $25a^4b^6 - 64a^2b^4$;
c) $36u^4v^6 - 144u^2v^4$;
d) $169x^4y^8 - 256x^8y^4$.

44. a) $(a + 1)^2 + (a - 1)^2 - (a - 1)(a + 1)$;
b) $(x + y)^2 - (x - y)^2$;
c) $(u^2 + v^2)^2 - 4u^2v^2$;
d) $16(d - 1)^2 - (4d + 3)^2$.

45. a) $(u + v)^3 + (u - v)^3$;
b) $(u + v)^3 - (u - v)^3$;
c) $(3m + 2n)^2 + (3m - 2n)^2 - 8(m^2 + n^2)$;
d) $(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ad + bc)^2$.

46. a) $(p + q + r)(p + q - r)$; b) $(p - q + r)(p - q - r)$;
c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; d) $(p + q + r - s)(p + q - r + s)$.
Návod k a): $A = p + q$, $B = r$, k b): $A = p - q$, $B = r$, podobně c), d).

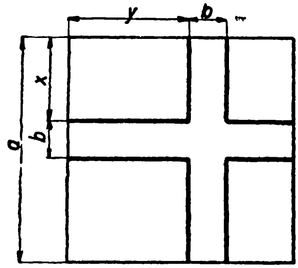
47. Oč se liší druhá mocnina součtu čísel p a q od součtu druhých mocnin čísel p a q?

48. Myslím si číslo (x). Přidám k němu 4 a výsledek násobím číslem, jež je o 4 menší než myšlené číslo. K tomuto součinu přidám 15 a výsledek dělím myšleným číslem zvětšeným o 1. Kolik dostanu?

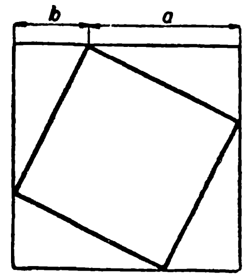
49. Brigáda ČSM upravovala čtvercový sad o straně a m dlouhé. Rozdělila jej ve čtyři části cestami b m širokými, jež procházejí rovnoběžně se stranami původního sadu (nikoliv jeho středem) (viz obr. 2). Vypočtěte, kolik m^2 zaujímá a) zbytek sadu, b) obsah cest.

50. Oč vzroste povrch S i objem V krychle o hraně a cm dlouhé, zvětší-li se hrana krychle o 1 cm?

***51.** Přirovnejte co do velikosti výrazy: $U = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$ a $V = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$.



Obr. 2.



Obr. 3.

***52.** Do čtverce o straně $(a + b)$ cm je vepsán druhý čtverec tak, že jeho vrcholy dělí každou stranu původního čtverce na úseky, jejichž délky jsou a cm, b cm (obr. 3). Vypočtěte obsah vepsaného čtverce!

6. Řešení úloh rovnicemi.

Řešte sestavené rovnice a proveďte po každé zkoušku správnosti:

53. a) $5x - 1 = 7x - 5$; b) $13u + 7 = 7u - 13$;
c) $1{,}52 - 2{,}48m = 0{,}32m + 3{,}2$; d) $3t - (2t - 8) = 19 - t$.

54. a) $1 - (2d - 3) = 4 - (5d - 6)$;
b) $5(b + 3) = 3(b - 5)$;
c) $4(5c - 6) + 3(3c - 8) - 7(2c - 9) = 0$;
d) $(v + 0{,}1)(v + 0{,}2) = (v + 0{,}3)(v + 0{,}4)$.

55. a) $0{,}5 - 0{,}2(3h - 1) = 0{,}4 - 0{,}3(3h - 5)$;
b) $(2k + 3)(3k - 2) = 3k + 2)(2k - 3)$;
c) $(2p + 3)^2 = (2p - 1)^2$;
d) $(2f - 1)(f - 2) + (f - 1)(2f - 3) - 4(f - 1)(f - 2) = 0$.

56. Myslím si číslo, přičtu k němu 3, výsledek násobím dvěma a vyjde mi pětinásobek původního čísla. Které je to číslo?

57. Žák měl násobit nějaké číslo třemi a k výsledku přičíst 4. Místo toho však násobil čtyřmi a odečetl 3; přesto dostal správný výsledek. Které číslo to bylo?

58. Mám bratra, který je o 4 roky starší než já. Před 10 roky byl dvakrát starší než já. Kolik je mi let?

59. Otec je třikrát starší než syn. Před pěti lety byl otec čtyřikrát starší než syn. Jak je stár syn a jak je stár otec?

60. Mám za 20 Kčs dvoukorun a korun, drohromady 16 kusů. Kolik mám mincí každého druhu?

61. Poseče-li každý stroj jen jedno pole, zbude jedno pole neposečené. Poseče-li však 2 pole, zůstane jeden stroj volný. Kolik bylo polí a kolik strojů?

62. V jedné skupině bylo dvakrát víc brigádníků než ve druhé. Když 5 brigádníků přešlo z první skupiny do druhé, bylo jich ve druhé skupině třikrát víc než v prvé. Kolik brigádníků bylo v každé skupině na začátku?

63. Na očíslování stran v knize je třeba 852 číslic. Kolik stran je v knize?

64. Místní skupina ČSM se zavázala, že pomůže při práci na stavbě kulturního domu. Odpracuje-li každý člen 8 hodin, bude jim chybět ještě 40 hodin do splnění závazku. Odpracuje-li každý člen 9 hodin, překročí skupina závazek o 5 hodin. Kolik členů má skupina a jaký závazek si stanovila?

65. Rychlík ujede za 5 hodin o 60 km více než letadlo za 1 hod., ale o 180 km méně než letadlo za 2 hodiny. Stanovte rychlost rychlíku a rychlost letadla!

66. Povoz vyjel v 8 hod. ráno a jel rychlostí 7 km/hod. O hodinu později vyjel za ním cyklista rychlostí 13 km/hod. V kolik hodin jej dohoní?

67. Vozy elektrické dráhy jedou rychlostí 20 km/hod v intervalech šestiminutových. Chodec kráčí podél trati rychlostí 5 km/hod a) proti směru jízdy, b) ve směru jízdy. V jakých časových intervalech se setkává s vozy?

68. Dvě skupiny dělníků měly vyměnit pražce na železniční trati tak, že měly začít práci v týž den s obou konců trati proti sobě a každá skupina měla denně projíti 120 m. Jedna skupina nastoupila o den později, protože musila dokončit svou původní práci; zvýšila proto svůj výkon na 150 m denně, takže se obě skupiny přesto sešly v původně stanovený den na původně stanoveném místě. Na kolik dní byla práce rozvržena a jak dlouhá je trať?

II. Dělitelnost.

1. Násobek a dělitel.

V následujících čtyřech odstavcích budeme mluviti jen o číslech **celých a kladných.** Řekneme-li slovo „číslo", budeme míti na mysli číslo celé a kladné.

1. úloha.

Zopakujme si něco o násobcích čísel:

24 je dvojnásobek čísla 12, neboť $24 = \mathbf{12} \cdot 2$;
56 je sedminásobek čísla 8, neboť $56 = \mathbf{8} \cdot 7$;
39 je trojnásobek čísla 13, neboť $39 = \mathbf{13} \cdot 3$;
$8x$ je x-násobek čísla 8, neboť $8x = \mathbf{8} \cdot x$;
bx je x-násobek čísla b, neboť $bx = \mathbf{b} \cdot x$.

Podobně trojnásobek čísla 9 je $9 \,.\, 3 = 27$; d-násobek čísla c je $c \,.\, d = cd$.

Obecně: **Číslo *a* se nazývá násobkem čísla *b*, jestliže *a* se dá psát jako součin, jehož jeden činitel je číslo *b*.** Krátce: **Číslo *a* je násobek čísla *b*, jestliže**

$$a = bx,$$

kde x je vhodné číslo celé. Na př. násobky čísla 2 neboli čísla sudá jsou čísla tvaru $2x$, násobky čísla 3 jsou čísla tvaru $3x$, násobky čísla 12 jsou čísla tvaru $12x$ atd.

Všimněme si blíže vlastností násobku čísla na několika příkladech:

a) 42 je násobek čísla 21, neboť $42 = 21 \,.\, 2$. Avšak 21 je násobek čísla 3, neboť $21 = 3 \,.\, 7$, a proto $42 = 21 \,.\, 2 = 3 \,.\, 7 \,.\, 2 = 3 \,.\, 14$.

Z toho usoudíme:

Když 42 je násobkem dvaceti jedné a 21 je násobkem tří, je 42 také násobkem tří.

Podobně: Když 56 je násobkem osmi a 8 je násobkem čtyř, je 56 také násobkem čtyř.

Poučka 1. Když číslo a je násobkem čísla b ($a = bx$) a číslo b je násobkem čísla c ($b = cy$), pak číslo a je také násobkem čísla c ($a = cxy$).

Odůvodnění:

$$a = bx;\ b = cy;\ \text{z toho plyne } a = cy \,.\, x = c \,.\, xy.$$

b) 6 je násobkem čísla 2:

$$6 = 2 \,.\, 3.$$

Znásobme 6 libovolným číslem (na př. deseti, čtyřmi, číslem c). Když 6 je násobkem 2, potom:

$6 \,.\, 10 = 2 \,.\, 3 \,.\, 10 = (2 \,.\, 10) \,.\, 3$;
$60 = 20 \,.\, 3$ .... 60 je násbkem čísla 20;
$6 \,.\, 4 = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = (2 \,.\, 4) \,.\, 3$;
$24 = 8 \,.\, 3$ .... 24 je násobkem čísla 8;
$6c = (2 \,.\, 3) \,.\, c = (2c) \,.\, 3$ .... $6c$ je násobkem čísla $2c$.

Obecně: Když $a = bx$, potom

$$ac = bc \,.\, x,$$

což vyjádříme slovy:

Poučka 2. Když číslo a je násobkem čísla b, pak číslo ac je násobkem čísla bc.

Odůvodnění: $$a = bx;$$

znásobíme-li obě čísla číslem c, dostaneme

$$ac = bcx.$$

c) 6 je násobek čísla 2; 35 je násobek čísla 5. Číslo 6 . 35 je násobkem čísla 2 . 5 = 10, neboť

$$6 . 35 = (2 . 3) . (5 . 7) = (2 . 5) . 3 . 7.$$

Podobně: 8 je násobek čísla 4; 18 je násobek čísla 6. Číslo 8 . 18 je násobkem čísla 4 . 6 = 24, neboť

$$8 . 18 = (4 . 2) . (6 . 3) = (4 . 6) . 2 . 3.$$

Číslo a je násobek čísla b; číslo c je násobek čísla d. Číslo ac je násobek čísla bd, neboť

$$a = bx;\ c = dy;\ \text{proto}\ a . c = (bx) . (dy) = (bd) . x . y.$$

To dokážeme jinak také takto:

Platí-li $a = bx$, platí podle poučky 2

$$ac = bcx,\ \text{t. j. } ac \text{ je násobkem čísla } bc.$$

Platí-li $c = dy$, platí podle poučky 2

$$bc = bdy,\ \text{t. j. } bc \text{ je násobkem čísla } bd.$$

Z toho usoudíme podle poučky 1:

Poučka 3. Když číslo a je násobkem čísla b a mimo to číslo c je násobkem čísla d, je číslo ac násobkem čísla bd.

2. úloha.

Jak se přesvědčíme o tom, že číslo 72 je násobkem čísla 6? Je-li číslo 72 x-násobkem čísla 6, musí platit

$$72 = 6 . x.$$

Z této rovnice plyne $x = \frac{72}{6} = 72 : 6$.

Číslo x je podíl čísel 72 a 6; musí to být číslo celé. To znamená, že dělení 72 : 6 musí vyjít beze zbytku. Přesvědčíme se o tom dělením:

$$72 : 6 = 12;$$

skutečně 72 je násobkem čísla 6, neboť 72 = 6 . 12.

Abychom se přesvědčili, je-li číslo a násobkem čísla b, provedeme dělení $a : b$ v oboru celých čísel, t. j. bez počítání na desetinná místa. Jestliže dělení $a : b$ vyjde beze zbytku, je číslo a násobek čísla b; vyjde-li při dělení $a : b$ zbytek, není číslo a násobkem čísla b.

Místo

„číslo 72 je násobkem čísla 6“

říkáme také

„číslo 72 je dělitelné číslem 6“

nebo také

„číslo 6 je dělitelem čísla 72“.

Obecně: Místo

„číslo a je násobek čísla b“

říkáme často také

„číslo a je dělitelné číslem b“

nebo také

„číslo b je dělitelem čísla a“.

Všecky tři výroky říkají totéž.

Tak na př. výrok, že 15 je násobkem čísla 3, znamená, že číslo 15 se dá napsat jako součin $3x$. Potom $x = 15 : 3 = 5$; 5 je číslo celé.

Totéž můžeme říci také:

číslo 15 je dělitelné číslem 3,

nebo také:

číslo 3 je dělitelem čísla 15.

Poučky 1—3 bychom mohli vyslovit také takto:

1. Je-li číslo a dělitelné číslem b a číslo b dělitelné číslem c, je číslo a dělitelné číslem c;

nebo:

Je-li číslo c dělitelem čísla b a je-li číslo b dělitelem čísla a, je číslo c dělitelem čísla a.

2. Je-li číslo a dělitelné číslem b, je číslo ac dělitelné číslem bc;

nebo také:

Je-li číslo b dělitelem čísla a, je číslo bc dělitelem čísla ac.

3. Je-li číslo a dělitelné číslem b a číslo c dělitelné číslem d, je číslo ac dělitelné číslem bd;

nebo také:

Je-li číslo b dělitelem čísla a a mimo to číslo d dělitelem čísla c, je součin bd dělitelem čísla ac.

Na základě 3. poučky zjistíme, že součin 36 . 49 je dělitelný číslem 42. Postupujeme takto:

$$42 = 6 \,.\, 7.$$

Poučka 3 praví: Je-li číslo 36 dělitelné číslem 6 a mimo to číslo 49 dělitelné číslem 7, je součin 36 . 49 dělitelný číslem 6 . 7.

3. úloha.

Je číslo 74 násobkem čísla 6? Dělme:

$$74 : 6 \doteq 12$$
$$2 \text{ zb.}$$

Zbytek dělení jsou 2. Potom číslo 74 není rovno součinu 6 . 12, neboť 6 . 12 = 72, nýbrž

$$74 = 6 \,.\, 12 + 2.$$

Obecně: Jestliže při dělení $a : b$ vyjde podíl x a zbytek z, je

$$a = b \,.\, x + z, \text{ kde } z \text{ je zbytek.}$$

Je-li zbytek $z = 0$, vyjde dělení beze zbytku a číslo a je násobkem čísla b.

Je-li zbytek z rozdílný od nuly (píšeme to $z \neq 0$), není číslo a násobkem čísla b. Zbytek z je vždy kladné číslo celé a menší než b (menší než dělitel); proč?

Z toho vyplývá: Čísla dělitelná číslem 3 mají tvar $3x$; čísla, která nejsou dělitelná číslem 3, mohou mít zbytky 1 nebo 2 a mají tvar $3x + 1$; $3x + 2$.

Číslo dělitelné číslem 4 má tvar $4x$. Čísla nedělitelná číslem 4 mají tvar $4x + 1$; $4x + 2$; $4x + 3$.

Můžeme také říci: Každé kladné a celé číslo se dá psát v jednom z těchto tří tvarů: $3x$; $3x + 1$; $3x + 2$ nebo v jednom z těchto čtyř tvarů: $4x$; $4x + 1$; $4x + 2$; $4x + 3$; případně v jednom z těchto pěti tvarů: $5x$, $5x + 1$, $5x + 2$, $5x + 3$, $5x + 4$; atd.

Číslo $5x$ je dělitelné číslem 5.

Čísla $5x + 1$ dají při dělení číslem 5 zbytek 1.

Čísla $5x + 2$ dají při dělení číslem 5 zbytek 2 atd.

Sudé číslo je vždy násobkem čísla 2. Má proto tvar $2x$. Číslo liché má tvar $2x + 1$ nebo $2x - 1$. Proč?

Vraťme se k 3. úloze.

Viděli jsme, že číslo 74 není násobkem čísla 6, neboť

$$\begin{array}{l} 74 : 6 \doteq 12 \\ \;\;2 \text{ zb.} \end{array}$$

Dělení dává zbytek 2. To znamená, že $74 = 6 \cdot 12 + 2$.

Když od 74 odečteme zbytek 2, dostaneme 72, které je dělitelné číslem 6 a je menší než 74; 72 je nejblíže nižší násobek čísla 6 k číslu 74. Přičteme-li k číslu 74 číslo 4 ($6 - 2 = 6 -$ zbytek) dostaneme číslo 78, které je dělitelné šesti a je větší než 72; 78 je nejblíže vyšší násobek čísla 6 k číslu 74.

Hledejme nejblíže nižší a nejblíže vyšší násobek čísla 59 k číslu 2 000.

$$\begin{array}{l} 2\,000 : 59 \doteq 33 \\ \;\;\;230 \\ \;\;\;\;\;53 \text{ zb.} \end{array}$$

Tedy $2\,000 = 59 \cdot 33 + 53$. K číslu 2 000 nejblíže nižší násobek čísla 59 je $2\,000 - 53 = 1\,947$. K číslu 2 000 nejblíže vyšší násobek čísla 59 je $59 + 1\,947 = 2\,006$.

Poučka 4. Jestliže číslo a není násobkem čísla b a jestliže při dělení $a : b$ vyjde zbytek z, je číslo $(a - z)$ nejblíže nižší násobek čísla b k číslu a; číslo $b + (a - z)$ je nejblíže vyšší násobek čísla b k číslu a.

Cvičení.

69. Dokažte, že všecky násobky čísla 56 jsou také násobky a) sedmi, b) osmi. Přesvědčte se o tom přímo na čísle $56 \cdot 13 = 728$.

70. Číslo 468 je dělitelné číslem 39; 39 je násobkem čísla 13. Usuďte z toho, že 468 je násobkem čísla 13 a přesvědčte se o tom přímo!

71. Číslo 105 je dělitelné číslem 7. Který nejmenší násobek čísla 105 je dělitelný číslem a) 28, b) 77, c) 91? Které jiné násobky čísla 105 jsou dělitelné těmito čísly?

72. Číslo 343 je násobkem čísla 7; číslo 144 je násobkem čísla 12. Dokažte, že číslo $343 \cdot 144$ je násobkem čísla 84.

73. Číslo 722 má dělitele 19, číslo 663 má dělitele 17. Dokažte, že číslo $722 \cdot 663$ má dělitele 323.

74. Doplňte † v číslech 437†, 32†6 tak, aby tato čísla byla dělitelná a) sedmi, b) jedenácti, c) třinácti.

75. Aniž provádíte násobení, dokažte, že součin a) 236 . 378 je dělitelný třiceti šesti; b) 75 . 32 . 27 je dělitelný těmito čísly: 5; 8; 9; 10; 18; 30; 45; 90.

76. Dokažte správnost vět: a) Součin dvou čísel sudých je vždy dělitelný čtyřmi. b) Je-li aspoň jeden činitel sudý, je součin také sudý.

77. Jaké jsou obecné tvary čísla, které není dělitelné šesti? Které z těchto tvarů vyjadřují číslo liché, nedělitelné třemi?

78. Napište a) dva násobky patnácti nejbližší k číslu 2 000; b) největší trojciferné a nejmenší čtyřciferné číslo dělitelné třinácti.

79. Najděte nejblíže a) nižší, b) vyšší násobky sedmi k číslům 1 000; 2 000; 3 843.

*80. Dokažte správnost vět: a) Součin dvou po sobě jdoucích sudých čísel je vždy dělitelný osmi. b) Součin čtyř po sobě jdoucích sudých čísel je vždy dělitelný číslem 128.

*81. Dokažte větu: Je-li číslo a dělitelné číslem b a současně také číslo b dělitelné číslem a, je $a = b$.

*82. Dokažte správnost vět: a) Součet dvou lichých po sobě jdoucích čísel je vždy dělitelný čtyřmi. b) Součet dvou čísel, z nichž žádné není dělitelné třemi a jejichž rozdíl je 2, je vždy dělitelný šesti.

2. Prvočísla. Rozklad na prvočinitele.

Dělitele některých čísel dovedeme určit zpaměti. Tak na př. dělitelé čísla 8 jsou 1; 2; 4; 8. Dělitelé čísla 12 jsou 1; 2; 3; 4; 6; 12. Dělitelé čísla 18 jsou 1; 2; 3; 6; 9; 18.

Každé číslo je násobkem čísla 1, neboť platí:

$$8 = 1 . 8; 15 = 1 . 15; a = 1 . a.$$

Každé číslo je také násobkem sama sebe, neboť platí:

$$8 = 8 . 1; 15 = 15 . 1; a = a . 1.$$

Obě věty můžeme říci také takto:

Každé číslo je dělitelné jednotkou a samo sebou.

Jednotku a číslo samo nazýváme **samozřejmými děliteli** daného čísla. (Jednotka má jen jednoho samozřejmého dělitele, neboť 1 a číslo samo v tom případě splývají.)

Každé číslo (kromě čísla 1) má dva samozřejmé dělitele. Některá čísla mají ještě jiné dělitele. Na př. 15 má samozřejmě dělitele 1; 15. Mimo ně má ještě dělitele 3; 5.

Čísla, která mají jen samozřejmé dělitele, nazýváme **prvočísla.** Číslo 1 zpravidla nepovažujeme za prvočíslo. Čísla, která nejsou prvočísly, nazýváme **čísla složená.**

Prvočíslo je dělitelné pouze číslem 1 a samo sebou.

Víme, že každé číslo lze rozložit v činitele, t. j. napsati ve tvaru součinu:

$$13 = 13 \,.\, 1;\ 24 = 6 \,.\, 4;\ 36 = 4 \,.\, 9;\ ab = a \,.\, b.$$

1. úloha.

Rozložme číslo 24; 24 = 6 . 4. Činitele 6 lze rozložit na 3 . 2; činitele 4 na 2 . 2. Je tedy

$$24 = 3 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 3 \,.\, 2^3.$$

Tím jsme dospěli k součinu prvočísel. Rozklad čísla v součin prvočísel nazýváme rozklad na **prvočinitele.**

Podobně rozložíme na prvočinitele a) 210; b) 432.

a) 210 je dělitelno číslem 10:

$$210 = 10 \,.\, 21;\ 10 = 2 \,.\, 5;\ 21 = 3 \,.\, 7;$$
$$210 = 10 \,.\, 21 = 2 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 7.$$

b) 432 je dělitelno číslem 4:

$$432 = 4 \,.\, 108 = 4 \,.\, 4 \,.\, 27 = 4 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 9 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 2^4 \,.\, 3^3.$$

Mohli jsme postupovat i jinak, třeba takto: 432 je dělitelno číslem 9:

$$432 = 9 \,.\, 48 = 9 \,.\, 6 \,.\, 8 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 3^3 \,.\, 2^4.$$

Je patrné, že tak můžeme rozložiti každé číslo na prvočinitele. Dá se dokázat, že dojdeme vždy k témuž výsledku, i když rozklad provádíme různými způsoby (viz o tom čl. 7).

K usnadnění rozkladu čísla je vhodné znát pravidla, podle nichž se pozná, je-li dané číslo dělitelné jiným číslem. Znáte je již pod názvem **znaky dělitelnosti.**

2. úloha.

Určeme nejmenšího dělitele čísla 323, který není samozřejmý, t. j., který je rozdílný od jedné.

Je-li tento dělitel b, musí platit $323 = bx$, kde x je vhodné celé číslo. Jsou dvě možnosti: buď je $b < x$, nebo je $b = x$. Proč není $b > x$? (b je nejmenší dělitel čísla 323.)

a) Je-li $b < x$, je také $b \, . \, b < . \, x$ čili $b^2 < 323$. (Na př. $5 < 7$; proto také $5 \, . \, 5 < 5 \, . \, 7$.)

b) Je-li $b = x$, je také $b \, . \, b = b \, . \, x$ čili $b^2 = 323$.

Místo čísla 323 jsme mohli vzít kterékoli jiné. Proto platí obecně: **Druhá mocnina nejmenšího dělitele nějakého čísla je buď menší než dané číslo nebo je mu nejvýše rovna.** Jinými slovy: Nejmenší dělitel nějakého čísla je buď menší než druhá odmocnina tohoto čísla, nebo je jí nejvýše roven.

Je tedy nejmenší dělitel čísla 323 jistě menší než 18, neboť $18^2 = 324$. Musíme jej hledati mezi čísly menšími než 18. K tomu však stačí vzít jen prvočísla, neboť víme, že číslo nemůže být dělitelné číslem složeným, není-li dělitelné všemi jeho prvočiniteli. Sestavme si proto tabulku několika nejmenších prvočísel a zároveň s nimi také jejich druhých mocnin:

Prvočíslo	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
Druhá mocnina ..	4	9	25	49	121	169	289	361	529	841	961

Podle naší tabulky stačí zkoušet, není-li 323 dělitelné některým z prvočísel 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17. Proveďte to! [Že není dělitelné čísly 2; 3; 5, poznáte podle znaků dělitelnosti; dále provedete dělení $323 : 7 \doteq 46$ (zbytek 1), $323 : 11 \doteq 29$ (zbytek 4), $323 : 13 \doteq 24$ (zbytek 11) a konečně $323 : 17 = 19$ (zbytek 0).] Nejmenší dělitel 323 je číslo 17. Zároveň vidíme, že $323 = 17 \, . \, 19$.

3. úloha.

Podobně stanovme nejmenšího dělitele čísla 461!

Mezi kterými prvočísly jej budeme hledat? (Mezi prvočísly, jejichž druhá mocnina je menší než 461.) Číslo 461 však není dělitelné žádným z těchto prvočísel. Přesvědčte se! Z toho usoudíme, že číslo 461 nemá jiných dělitelů kromě dělitelů samozřejmých. Je to tedy prvočíslo.

Abychom zjistili, je-li dané číslo složené, stačí je dělit všemi prvočísly, jejichž druhá mocnina je menší než dané číslo nebo je mu nejvýše rovna. Nevyjde-li žádné z těchto dělení beze zbytku, je dané číslo prvočíslem.

Tabulka uvedených prvočísel a jejich druhých mocnin stačí k provedení rozkladu kteréhokoli trojciferného čísla. Další prvočíslo, které následuje, je 37 a $37^2 = 1\,369$, tedy číslo čtyrciferné.

Cvičení.

83. Rozložte na prvočinitele: a) 125; b) 336; c) 404; d) 1 156; e) 2 431.

84. Rozložte na prvočinitele: a) největší dvojciferné číslo; b) největší trojciferné číslo; c) nejmenší čtyrciferné číslo.

85. Hledáme-li všecka prvočísla, třeba menší než 100, napíšeme všecka celá čísla od 2 do 100 a vyškrtáme z nich postupně všecka čísla složená, tedy nejprve násobky 2, pak násobky 3 atd. Co zbude, jsou prvočísla.

Proveďte to! (Síto Eratosthenovo.) Všimněte si, který prvý násobek čísel 2, 3, 5, 7 jste vyškrtli. Po vyškrtnutí násobků sedmi je úloha skončena. Proč?

86. Rozkladem na prvočinitele stanovte, kolikrát je 10 584 větší než 168. O správnosti se přesvědčte dělením!

87. Dokažte: Každé prvočíslo s výjimkou prvočísla 2 je liché číslo.

***88.** Užitím rozkladu na prvočinitele stanovte $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $a = 13$, $b = 20$, $c = 21$ a $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

89. Jsou dána čísla $a = 55\,000$, $b = 105\,400$. Kolika nulami je ukončeno číslo $a^3 \cdot b^4$?

***90.** Napište všecka trojciferná čísla složená pouze z prvočinitelů 2 nebo 3 (nebo obou).

***91.** Jak daleko třeba prováděti dělení, abychom dokázali, že čísla a) 331; b) 593; c) 997 jsou prvočísla? Proveďte úplný důkaz, že to jsou prvočísla!

***92.** Střihač v továrně na ženské oděvy měl stříhat látku na stejný počet dámských šatů a halenek. Na 1 dámské šaty je třeba 5 m látky, na 1 halenku 3 m. Měl 5 balíků stejné látky, v prvním bylo 85 m, v druhém 51 m, v třetím 92 m, ve čtvrtém 136 m a v pátém 44 m. Šaty a halenky mohl nastříhat buď ze dvou balíků, nebo z jednoho, při čemž mu neměl zůstat zbytek. Kterých balíků mohl užít?

3. Stanovení všech dělitelů daného čísla.

1. úloha.

Pokusme se zjistit bez dělení, zda je číslo 168 dělitelné číslem 28.

Rozložme obě čísla:

$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.

Protože $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = (2 \cdot 2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 3) = 28 \cdot 6$, je číslo 168 dělitelné číslem 28.

Z rozkladu čísla 168 poznáváme, že je také dělitelno šesti. Součin dělitelů 28 a 6 rovná se číslu 168 ($168 = 28 \cdot 6$).

Takové dva dělitele, jejichž součin se rovná danému číslu, nazýváme **sdruženými děliteli.** Čísla 28 a 6 tvoří jeden pár sdružených dělitelů čísla 168. Další pár sdružených dělitelů jsou na př. samozřejmí dělitelé 1 a 168. Jiný takový pár je třeba dvojice 2 a 84 a je jich ještě více.

Rozřešíme nyní úlohu: určiti všecky dělitele čísla 168. Dané číslo rozložíme nejprve na prvočinitele:

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Hledanými děliteli budou všecka čísla složená z prvočinitelů: 2, 2, 2, 3, 7.

Vedle samozřejmých dělitelů 1 a 168 jsou to čísla složená:

a) z jednoho prvočinitele: 2, 3, 7;

b) ze dvou prvočinitelů: $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 7 = 14$; $3 \cdot 7 = 21$;

c) ze tří prvočitelů: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$; $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$; $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$;

d) ze čtyř prvočinitelů: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$; $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56$; $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Uspořádáme je podle velikosti a napíšeme je tak, aby dva sdružení dělitelé stáli vždy pod sebou:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 7, & 8, & 12, \\ 168, & 84, & 56, & 42, & 28, & 24, & 21, & 14. \end{array}$$

Druhé mocniny všech dělitelů v prvém řádku jsou menší než dané číslo 168. Přesvědčte se o tom!

Abychom rychleji nalezli všechny dělitele daného čísla, určíme pouze čísla v prvém řádku. Čísla ve druhém řádku dostaneme, dělíme-li dané číslo čísly v prvém řádku. Čísla prvého řádku stanovíme tak, že zjišťujeme postupně všecky ty dělitele čísla 168, jejichž druhá mocnina je menší než 168. To jsou čísla menší než 13, neboť $\sqrt{168} < 13$. Tato čísla určíme snadno zpaměti.

2. úloha.

Druhá mocnina jednoho dělitele může být někdy rovna danému číslu. Je tomu tak na př. u čísla 576.

Jeden jeho dělitel je 24, neboť $24 \cdot 24 = 24^2 = 576$. Dělitelem k němu sdruženým je opět číslo 24 (576 : 24). V prvém řádku budou dělitelé menší než 24, ve druhém řádku dělitelé větší než 24; číslo 24 patří do obou řádků. Dělitelé menší než 24 se určí z rozkladu čísla $576 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 8, & 9, & 12, & 16, & 18, \\ 576, & 288, & 192, & 144, & 96, & 72, & 64, & 48, & 36, & 32, \end{array} 24.$$

Z postupu, jímž hledáme všechny dělitele čísel 168 a 576, plyne:

Každé číslo, které není druhou mocninou jiného čísla, má sudý počet dělitelů. Každé číslo, které je druhou mocninou jiného čísla, má lichý počet dělitelů.

3. úloha.

Je dán rozdíl dvou čísel (17) a jejich součin (60). Určete je! Číslo 60 (součin) rozložíme v prvočinitele: $60 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5$ a určíme všechny dělitele tohoto čísla:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \\ 60, & 30, & 20, & 15, & 12, & 10. \end{matrix}$$

Hledaná čísla tvoří pár sdružených dělitelů, jejichž rozdíl je 17. Proč? Jsou to čísla 3 a 20.

4. úloha.

Určete všechny dělitele jednočlenu p^3q^2, kde p, q jsou dvě prvočísla navzájem různá.

$$p^3q^2 = p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot q.$$

Dělitelé jednočlenu jsou:

$$1, p, p^2, p^3, q, pq, p^2q, p^3q, q^2, pq^2, p^2q^2, p^3q^2.$$

Jsou to všechny možné součiny prvočinitelů jednočlenu p^3q^2.

Cvičení.

93. Nalezněte všechny dvojice čísel, jejichž součin je a) 36; b) 24; c) 48.

94. Napište číslo 1 000 všemi možnými způsoby jako součin dvou menších čísel.

95. Ukažte, že každé z čísel 6; 28; 496 je rovno součtu všech svých dělitelů, kteří jsou menší než dané číslo.

96. Ze všech dvojciferných čísel mají nejvíce dělitelů čísla: 60; 72; 84; 90; 96. Stanovte všechny jejich dělitele!

97. Mezi všemi dvojicemi čísel, jejichž součin je 96, nalezněte taková čísla, aby jejich součet byl 28.

98. Jedno ze dvou čísel je o 28 větší než druhé. Jejich součin je 60. Určete ta čísla!

99. Obsah obdélníka je 36 cm², obvod jeho je 26 cm. Určtete jeho rozměry!

100. Určete všechny dělitele čísel: a) p^2; b) p^3; c) p^4, kde p je prvočíslo.

101. Kolik dělitelů má číslo p^k, kde p je prvočíslo a k číslo celé kladné? Ověřte to na čísle 1 024.

***102.** Které dělitele má číslo a) pq; b) p^2q; c) p^3q, kde p a q jsou prvočísla navzájem různá?

***103.** Číslo tvaru p^kq^l, kde p, q jsou prvočísla navzájem různá a k, l čísla celá kladná, má $(k + 1)(l + 1)$ dělitelů. Dokažte to a ověřte to na čísle 144.

*104. Číslo tvaru $p^k q^l r^m$, kde p, q, r jsou prvočísla navzájem různá a k, l, m čísla celá kladná, má $(k + 1)(l + 1)(m + 1)$ dělitelů. Dokažte to a ověřte to na čísle 360.

4. Společný dělitel. Společný násobek.

A) Pojem společného dělitele.

Určeme všechny dělitele čísel 36 a 48 a vyberme z nich ty, jimiž jsou obě daná čísla současně dělitelná.

Čísla 36 a 48 mají tyto dělitele:

36: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 36, 18, **12**, 9.

48: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 48, 24, 16, **12**, 8.

Tučně vytištěná čísla: 1, 2, 3, 4, 6, 12 jsou oběma skupinám společná. Nazývají se **společní dělitelé** čísel 36 a 48.

Největší z nich je 12. Proto říkáme, že 12 je **největší společný dělitel** čísel 36 a 48. Zapisujeme to: $D(36; 48) = 12$.

Každá dvě celá kladná čísla mají jednoho společného dělitele, a to číslo 1. Toto číslo nazýváme **samozřejmý společný dělitel.**

Taková dvě čísla, která mají kromě čísla 1 ještě aspoň jednoho dalšího společného dělitele, se nazývají **navzájem soudělná.**

Na př. dvojice čísel: 4; 6 má vedle čísla 1 ještě společného dělitele číslo 2. Jsou to čísla navzájem soudělná.

Taková dvě čísla, která nemají společného dělitele rozdílného od jedné se nazývají čísla **navzájem nesoudělná.**

Čísla 15 a 16 jsou navzájem nesoudělná, neboť číslo 15 má dělitele 1; 3; 5; 15 a číslo 16 má dělitele 1; 2; 4; 8; 16. Jejich společným dělitelem je toliko číslo 1.

Zejména každá dvě různá prvočísla jsou navzájem nesoudělná. Každé prvočíslo má jen dva dělitele, a to samozřejmé. Každá dvě různá prvočísla mají tedy jen jednoho společného dělitele, a to samozřejmého (1).

B) Pojem společného násobku.

Určeme všechny násobky čísel 36 a 48 a vyberme z nich ty, jež jsou současně násobky obou daných čísel. Násobky čísel 36 a 48 jsou:

36, 72, 108, **144**, 180, 216, 252, 288, 324, 360, 396, **432**, ...
48, 96, **144**, 192, 240, 288, 336, 384, **432**, 480, 528, **576**, ...

Tučně vytištěná čísla: **144**; **288**; **432**; **576** jsou čísla společná oběma skupinám. Tato čísla se nazývají **společné násobky** čísel 36 a 48.

Číslo 144 je z nich nejmenší. Proto říkáme, že 144 je **nejmenším společným násobkem** čísel 36 a 48. Zapisujeme: $n(36; 48) = 144$.

C) Výpočet největšího společného dělitele.

Kterými čísly lze dělit současně čísla 180 a 336?

Rozložme obě daná čísla v prvočinitele a označme ty prvočinitele, kteří se vyskytují současně v obou rozkladech.

Dostaneme:

$180 = \mathbf{2} . \mathbf{2} . \mathbf{3} . 3 . 5 = 2^2 . 3^2 . 5$; $336 = \mathbf{2} . \mathbf{2} . 2 . 2 . \mathbf{3} . 7 = 2^4 . 3 . 7$.

a) Dělitel čísla 180 se může skládat jen z těch prvočinitelů, z nichž je složeno číslo 180.

b Dělitel čísla 336 se může skládat jen z těch prvočinitelů, z nichž je složeno číslo 336.

c) Společný dělitel čísel 180 a 336 se může skládat jen z těch prvočinitelů, kteří jsou společní oběma číslům, t. j. z prvočinitelů 2; 2; 3. Utvořme všechny společné dělitele daných čísel! Jsou to: 2; 3; $2 . 2 = 4$; $2 . 3 = 6$; $2 . 2 . 3 = 12$ vedle samozřejmého společného dělitele 1.

Největší společný dělitel je 12. Je to součin všech společných dělitelů obou daných čísel: $D(180; 336) = 2 . 2 . 3 = 2^2 . 3 = 12$.

Vyvoďme nyní další vztah mezi danými čísly a jejich největším společným dělitelem:

Dělme číslo 180 největším společným dělitelem 12. Podíl je $3 . 5 = 15$. Podíl druhého daného čísla 336 a největšího společného dělitele 12 je $2 . 2 . 7 = 28$. Oba podíly: $3 . 5$; $2 . 2 . 7$ nemohou obsahovat již žádného společného činitele; jsou to čísla navzájem nesoudělná. Kdybychom však daná čísla 180 a 336 dělili jiným společným dělitelem, který není největší, zbyl by v podílu vždy ještě alespoň jeden ze společných prvočinitelů. Dostali bychom tedy čísla soudělná.

Každý společný dělitel daných čísel je dělitelem jejich největšího společného dělitele. Dělíme-li daná čísla jejich největším společným dělitelem, dostaneme dvě čísla navzájem nesoudělná.

Dělíme-li je však některým jiným jejich společným dělitelem, vyjdou dvě čísla navzájem soudělná.

Největší společný dělitel více než dvou daných čísel je zase největší číslo, jímž jsou daná čísla dělitelná. Určuje se stejně jako největší společný dělitel dvou daných čísel.

Tak na př.:

$$D\ (90;\ 135;\ 225).$$

Rozklad:

$$90 = 2 \,.\, 3^2 \,.\, 5;\ 135 = 3^3 \,.\, 5;\ 225 = 3^2 \,.\, 5^2.$$

Jejich největší společný dělitel bude součin všech společných prvočinitelů, t. j. součin prvočinitele 3, a to v druhé mocnině (proč?), a prvočinitele 5.

Tedy: $D\ (90;\ 135;\ 225) = 3^2 \,.\, 5 = 9 \,.\, 5 = 45.$

Dělíme-li daná čísla jejich největším společným dělitelem, dostaneme podíly, které opět nemají společného dělitele mimo jednotku:

$$90 : (3^2 \,.\, 5) = 2;\ 135 : (3^2 \,.\, 5) = 3;\ 225 : (3^2 \,.\, 5) = 5.$$

Abychom si usnadnili práci při rozkladu složitějších čísel, stačí rozložiti v prvočinitele jen jedno z nich a u dalších zkoumati, jsou-li dělitelná těmi prvočísly, jimiž je dělitelné rozložené číslo. Ukážeme si to na dvou příkladech:

a) Hledáme $D(1\,000;\ 1\,183)$. Rozklad $1\,000 = 10^3 = 2^3 \,.\, 5^3$ provedeme velmi snadno. Každý dělitel čísla 1 000 může obsahovat pouze prvočinitele 2 a 5. Číslo 1 183 není dělitelné ani číslem 2 ani číslem 5, proto jsou obě daná čísla nesoudělná.

b) Hledejme $D(841;\ 899;\ 986)$. K rozkladu si vybereme číslo 986, neboť vidíme, že $986 = 2 \,.\, 493$. Zkoušíme, zda 493 je dělitelno některým prvočíslem, ne větším než 19 ($19^2 = 361$, ale $23^2 = 529$). Zjistíme, že $493 = 17 \,.\, 29$, takže $986 = 2 \,.\, 17 \,.\, 29$. Hledaný společný dělitel může obsahovat jen prvočinitele 2, 17, 29. Proto stačí zkoumat, zda ostatní dvě daná čísla jsou dělitelná některým z těchto prvočísel. Shledáme, že $841 = 29 \,.\, 29$; $899 = 29 \,.\, 31$. Proto

$$D(841;\ 899;\ 986) = 29.$$

D) Výpočet nejmenšího společného násobku.

Vypočteme nejmenší společný násobek čísel: 180; 336.

Rozklad:

$$180 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5;\ 336 = 2^4 \,.\, 3 \,.\, 7.$$

Každý násobek čísla 180 musí obsahovat ty prvočinitele, z nichž se skládá číslo 180, bude tedy tvaru $2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, x$. Každý násobek čísla 336 musí obsahovat ty prvočinitele, z nichž se skládá číslo 336, bude tedy tvaru $2^4 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, y$.

V obou případech je x i y libovolný činitel.

Každý společný násobek čísel 180 a 336, jakožto násobek čísla 180, bude obsahovat činitele

$$2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5.$$

Zároveň jako násobek čísla 336 musí obsahovat:

1. 2^4; poněvadž násobek čísla 180 obsahuje již 2^2, stačí, abychom násobek čísla 180 násobili jen číslem 2^2;

2. činitele 3; poněvadž násobek čísla 180 obsahuje již dokonce 3^2, nebudeme násobit činitelem 3;

3. prvočinitele 7, kterého násobek čísla 180 neobsahuje a jímž tedy násobit musíme;

4. libovolného činitele z.

Bude tedy každý společný násobek daných čísel 180 a 336 mít tvar

$$2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 2^2 \,.\, 7 \,,\, z = 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, z.$$

Nejmenší společný násobek obou čísel dostaneme, dosadíme-li $z = 1$. Tedy

$$n(180; 336) = 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 7 = 5\,040.$$

Vlastnosti společného násobku:

Dělíme-li nejmenší společný násobek 5 040 číslem 180, vyjde podíl $2^2 \,,\, 7 = 28$; dělíme-li jej číslem 336, vyjde podíl $3 \,.\, 5 = 15$. (Proč?)

Podíly $2^2 \,.\, 7$ a $3 \,.\, 5$ neobsahují žádného společného činitele a proto jsou to čísla navzájem nesoudělná.

Dělíme-li však některý jiný násobek tvaru $2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, z$ číslem 180 nebo 336, obsahují oba podíly ještě činitele z, kterého má náš násobek navíc.

Každý společný násobek daných čísel je násobkem jejich nejmenšího společného násobku. Dělíme-li nejmenší společný násobek danými čísly, dostaneme dvě čísla navzájem nesoudělná. Dělíme-li však některý jiný společný násobek danými čísly, vyjdou dvě čísla navzájem soudělná.

Nejmenší společný násobek více než dvou čísel je zase nejmenší číslo, jež je danými čísly dělitelno. Určuje se stejně jako nejmenší společný násobek dvou čísel. Tak na př.

$$n(90; 135; 225).$$

Rozklad:

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 135 = 3^3 \cdot 5;\ 225 = 3^2 \cdot 5^2.$$

Hledaný nejmenší společný násobek daných čísel musí obsahovat všechny prvočinitele z rozkladu čísla 90 v příslušných mocninách ($2 \cdot 3^2 \cdot 5$); z rozkladu čísla 135 další prvočinitele, kteří nejsou obsaženi v rozkladu čísla 90, t. j. 3, a z rozkladu čísla 225 ze stejného důvodu jako u čísla 135 ještě prvočinitele 5.

Je tedy:

$$n(90;\ 135;\ 225) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 1\,350.$$

Podíly nejmenšího společného násobku 1 350 a čísel 90; 135; 225 jsou 15; 10; 6. Tato tři čísla nemají žádného společného dělitele mimo jednotku.

Cvičení.

A) Dělitel:

105. Určete: a) $D(5;\ 1)$, $n(5;\ 1)$; b) $D(a;\ 1)$, $n(a;\ 1)$; c) $D(a;\ a)$, $n(a;\ a)$.

106. Určete: a) $D(36;\ 144)$; b) $n(36;\ 144)$.

107. Je-li číslo a dělitelné číslem b, určete: $D(a;\ b)$, $n(a;\ b)$.

108. Napište všechna čísla nesoudělná s číslem a) 16; b) 24; c) 36, ale menší než je dané číslo.

109. Určete všecky společné dělitele čísel 360 a 504.

110. Nalezněte: a) $D(54;\ 126)$; b) $D(392;\ 504)$; c) $D(273;\ 455)$; d) $D(945;\ 729)$; e) $D(903;\ 221)$.

111. Nalezněte: a) $D(360;\ 408;\ 480)$; b) $D(294;\ 490;\ 735)$; c) $D(315;\ 525;\ 735;\ 455)$.

112. Turista projel na kole prvý den 98 km, druhý den 70 km, třetí den 84 km. Jel stále stejně rychle, ujel vždy celistvý počet km za hodinu. Kolik hodin byl celkem na cestě, byla-li jeho rychlost největší ze všech možných?

113. Mám 320 ořechů, 240 bonbonů a 200 perníků. Kolik dětí mohu jimi podělit, má-li jich být co nejvíce a má-li každé dítě dostat stejný počet ořechů, stejný počet bonbonů a stejný počet perníků?

114. Určete co největší číslo celé tak, aby, dělíte-li jím čísla 90; 146 a 230, po každé vyšel zbytek 6. (Která čísla budou dělitelná číslem D?)

***115.** Dokažte, že ze dvou čísel navzájem nesoudělných musí být aspoň jedno liché. (Co by se stalo, kdyby byla obě sudá?)

***116.** Napište nejmenší a největší trojciferné číslo, jejichž největší společný dělitel je 72.

***117.** Obdélník o rozměrech 56 cm a 98 cm se má rozdělit na čtverce, jejichž strany mají délky vyjádřené celistvým počtem centimetrů. Jak velké mohou být tyto strany a kolik čtverců bude?

B) Násobek:

118. Určete všechny společné násobky čísel 120 a 72, které jsou větší než 1 000 a menší než 2 000.

119. Nalezněte: a) $n(64; 112)$; b) $n(135; 144)$; c) $n(238; 357)$; d) $n(315; 49)$.

120. Nalezněte: a) $n(39; 65; 91$; b) $n(36; 64; 96; 100)$; c) $n(12; 32; 60; 80; 120)$.

121. Státní statek odvedl vajíčka do sběrny. Jejich počet lze udati celistvým počtem tuctů i mandelů. Kolik bylo vajec, víte-li, že jich bylo více než 300 a méně než 400?

122. Dvě měřítka, z nichž jedno má dílky 10 mm dlouhé a druhé má dílky 25 mm dlouhé, byla přiložena k sobě tak, že jejich krajní dělicí čárky splývají. Které další dělicí čárky obou měřítek se kryjí?

123. Žák koupil pera po 65 hal. Ani on, ani prodavač nemají drobnější mince než koruny. Kolik aspoň jich musí koupit za celistvý počet korun?

124. Krabičky o rozměrech 6 cm, 15 cm a 20 cm se mají srovnat do bedničky tvaru krychle. Jaké jsou nejmenší rozměry bedničky a kolik se tam vejde krabiček?

125. Dvě ozubená kola zapadají do sebe. Jedno z nich má 48 zubů a druhé 80 zubů. Po kolika obrátkách mají opět touž vzájemnou polohu?

126. Napište všechna čísla větší než 500 a menší než 1 000, která jsou současně dělitelná čísly 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10.

*127. Napište obecný tvar čísla, které děleno šesti, deseti i patnácti dá po každé zbytek 1.

*128. a) Dokažte, že číslo, které je dělitelno dvěma čísly navzájem nesoudělnými, je dělitelné také jejich součinem. b) Stanovte podle toho pravidlo, jak se pozná, je-li číslo dělitelné 1. šesti, 2. dvanácti, 3. osmnácti.

5. Rozklad mnohočlenů.

Často se setkáváme s výrazy, které nazýváme **mnohočleny.** Mezi ně počítáme nejen dvojčleny (na př. $2u + v$), trojčleny ($3x^2 - 2x + 5$), ale i jednočleny (na př. $4ab$).

Některé mnohočleny lze rozkládat v součin dvou nebo více činitelů. Při tom postupujeme obdobně jako při rozkladu určitých čísel.

Mnohočleny, které nelze již dále rozkládat, nazýváme **jednoduché algebraické výrazy.** Každý jednoduchý algebraický výraz, který je činitelem v nějakém rozkladu, budeme nazývati **jednoduchý činitel.**

A) Rozklad jednočlenu.

Jednotlivá písmena ve významu čísel, na př. a, b, x, y, považujeme za jednoduché algebraické výrazy.

Jednočlen xyz se skládá ze tří jednoduchých činitelů x, y, z. Podobně jednočlen r^2s^3 se skládá z pěti jednoduchých činitelů; z nich dva jsou stejné a rovny r, další tři jsou opět stejné a rovny s, takže $r^2s^3 = r \cdot r \cdot s \cdot s \cdot s$.

Je-li některý činitel jednočlenu určité číslo, považujeme každého prvočinitele tohoto čísla za jednoduchého činitele. Výraz $6a^2bx^3$ můžeme rozložit v součin jednoduchých činitelů $2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot x \cdot x \cdot x$, jichž je celkem 8.

Dělitelem jednočlenu je opět jednočlen. Každý dělitel jednočlenu smí obsahovat pouze ty jednoduché činitele, které má daný jednočlen. Na příklad dělitel jednočlenu $6a^3b^4$ smí obsahovat pouze činitele 2; 3; a; b; ale nesmí obsahovat činitele 5; 7; x; y. Číslo a v našem děliteli smí být nejvýš v třetí mocnině, číslo b nejvýš ve čtvrté mocnině. Každý takový činitel může být **nejvýše** v té mocnině, ve které je v daném jednočlenu.

Dělitelé výrazu $6a^2bx^3$ mohou obsahovat tyto jednoduché činitele: 2, 3, a (nejvýše na druhou), b (nejvýše na prvou), x (nejvýše na třetí). Na příklad $2ab$, $3bx^2$, a^2x jsou dělitelé jednočlenu $6a^2bx^3$; ale jednočleny ab^2, a^2b^2y jeho děliteli nejsou.

Každý násobek jednočlenu musí obsahovat všecky jednoduché činitele, které obsahuje daný jednočlen. Na příklad násobek jednočlenu $3a^2bx^3$ musí obsahovat aspoň činitele 2; 3, dále činitele a aspoň na druhou, b aspoň na prvou a x aspoň na třetí. Každý takový jednoduchý činitel musí být **aspoň** v té mocnině, v níž je v daném jednočlenu. Vedle toho může obsahovati libovolné činitele další. Násobkem jednočlenu $6a^2bx^3$ je na příklad jednočlen $12a^3b^3x^3$ nebo $24a^4b^5x^7y$.

V algebře dosazujeme (aspoň do jisté míry) za písmena zcela libovolná čísla. Neomezujeme se jen na čísla kladná, ale dosazujeme i čísla záporná. Platí:

$$a = (-1)(-a).$$

Proto musíme připustit, že číslo a má vedle samozřejmých dělitelů: 1, a i dva další: -1, $-a$.

Výraz $-a$ považujeme za jednoduchého činitele, ačkoliv je možný „rozklad“ $-a = (-1) \cdot a$.

Podle toho je dělitelem jednočlenu $6u^2v$ také výraz $-2uv$ a násobkem jednočlenu $6u^2v$ také $-24u^3v^2$; $-6u^2v$ je současně dělitelem i násobkem jednočlenu $6u^2v$.

B) Rozklad mnohočlenu.

Pro násobení mnohočlenu jednočlenem platí zákon o roznásobení (distributivní):

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Napišme tuto rovnost v opačném směru:

$$ab + ac = a(b + c)$$

nebo podle zákona o záměně (komutativního) také:

$$ab + ac = (b + c)\,a.$$

Dvojčlen $ab + ac$ jsme rozložili v součin dvou činitelů: a, $(b + c)$. Tomuto rozkladu říkáme **vytýkání společného činitele mimo závorky,** t. j. **buď před závorky,** nebo **za závorky.**

1. úloha.

a) Z dvojčlenu $xy + yz$ máme vytknouti společného činitele.

(1) Společný činitel obou členů je y. První člen dvojčlenu obsahuje ještě činitele x, druhý obsahuje činitele z. Společného činitele y napíšeme mimo závorky (t. j. buď před nebo za závorky) a do závorek pak klademe dvojčlen $x + z$, jehož každý člen obsahuje pouze zbývající činitele. Je tedy $xy + yz = y(x + z)$ nebo $xy + yz = (x + z)\,y$.

(2) Po vytčení společného činitele se přesvědčíme o správnosti tak, že provedeme naznačené násobení:

$$y(x + z) = xy + xz.$$

Vytýkáme-li společného činitele z mnohočlenu, musí v závorkách vyjít mnohočlen o témž počtu členů.

b) Vytkněte společného činitele:

$$6u^2v - 9uv^2.$$

(1) Společný činitel je $3uv$ [neboť $6u^2v = 3uv \,.\, 2u$; $-9uv^2 = 3uv(-3v)$], zbývající činitelé jsou $2u$, $-3v$. Je tedy

$$6u^2v - 9uv^2 = 3uv(2u - 3v).$$

(2) $3uv(2u - 3v) = 6u^2v - 9uv^2$.

V tomto příkladě můžeme vytknout také společného činitele $-3uv$: dostaneme

$$6u^2v - 9uv^2 = -3uv(-2u + 3v),$$

neboť

$$6u^2v = (-3uv) \cdot (-2u); \quad -9uv^2 = (-3uv) \cdot 3v.$$

Zkouška:

$$-3uv \cdot (-2u + 3v) = 6u^2v - 9uv^2.$$

c) Vytkněte společného činitele:

$$4abx + 2bx.$$

Společný činitel je $2bx$; $4abx + 2bx = 2bx(2a + 1)$, neboť $4abx = 2bx \cdot 2a$; $2bx = 2bx \cdot 1$;

$$2bx \cdot (2a + 1) = 4abx + 2bx.$$

V podobných případech se často zapomíná na činitele 1, který tvoří druhý člen v závorkách.

Stejně postupujeme, máme-li vytknout společného činitele z mnohočlenu o více než 2 členech:

a) $ab - ac + ad$; společný činitel je a;
$ab - ac + ad = a \cdot (b - c + d) = (b - c + d) \cdot a$.
b) $-a^2 - ab + 1 = -(a^2 + ab - 1)$.

Zde jsme vytkli -1; měli bychom psát: $-1 \cdot (a^2 + ab - 1)$, ale jedničku jako činitele zpravidla vynecháváme.

Proveďme zkoušku!

Obecně platí:

$$a - b = -(b - a).$$

Přesvědčte se!

c) $15c(c - 1) + 12(1 - c)$; ježto $1 - c = -(c - 1)$, jest

$$15c(c - 1) + 12(1 - c) = 15c(c - 1) - 12(c - 1) =$$
$$= (15c - 12)(c - 1) = 3(5c - 4)(c - 1).$$

Můžeme postupovat také takto:

$$15(c - 1) + 12(1 - c) = -15c(1 - c) + 12(1 - c) =$$
$$= (-15c + 12)(1 - c) = 3(-5c + 4)(1 - c).$$

d) $-72m^3n^2p - 108m^2n^2p^2 + 144mn^2p^3$.

Na začátku je nesnadné postřehnout všechny společné činitele, proto vytýkáme společné činitele postupně, třeba takto:

$$-72m^3n^2p - 108m^2n^2p^2 + 144mn^2p^3 = 4n^2(-18m^3p - 27m^2p^2 + 36mp^3) = 4n^2 \,.\, 9mp(-2m^2 - 3mp + 4p^2) = 36mn^2p(-2m^2 - 3mp + 4p^2).$$

Proveďte zkoušku!

C) Rozklad užitím vzorců.

K rozkladu některých mnohočlenů použijeme vzorců. Víme, že

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2.$$

Tím je rozložen trojčlen $A^2 + 2AB + B^2$ v součin dvou (stejných) činitelů.

Podle toho na příklad

$$t^2 + 4t + 4$$

rozložíme podle uvedeného vzorce tak, že dosadíme $A = t$, $B = 2$.

Potom

$$t^2 + 4t + 4 = t^2 + 2 \,.\, 2t + 2^2 = (t + 2)^2.$$

Jiný příklad:

$$3bc^3 - 6b^2c^2 + 3b^3c = 3bc(c^2 - 2bc + b^2) = 3bc(c - b)^2.$$

Vytkli jsme nejdříve společného činitele $3bc$; výraz v závorkách jsme rozložili podle vzorce.

Platí ovšem stejně:

$$3bc^3 - 6b^2c^2 + 3b^3c = 3bc(b - c)^2.$$

Přesvědčte se o správnosti a odůvodněte, proč je

$$(c - b)^2 = (b - c)^2.$$

Podobně můžeme použít i vzorce

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

Na příklad:

$$4m^2 - 9n^2 = (2m)^2 - (3n)^2 = (2m + 3n)(2m - 3n).$$

Dosadili jsme $A = 2m$; $B = n$.

Někdy použijeme postupně obou vzorců. Příklad:

$$x^2 - 2xy + y^2 - z^2.$$

První tři členy: $x^2 - 2xy - y^2$ dávají $(x - y)^2$; $(x - y)^2 - z^2$ rozložíme podle vzorce $A^2 - B^2$ tak, že $A = x - y$, $B = z$; je tedy:

$$x - 2xy + y^2 - z^2 = (x - y)^2 - z^2 = (x - y + z)(x - y - z).$$

Poznámka. Jednoduché algebraické výrazy jsou jakousi obdobou prvočísel. Podobají se jim v tom, že je dále rozložit nedovedeme, pokud písmena v nich obsažená nenabudou určité hodnoty. Jakmile však písmenům v jednoduchém algebraickém výrazu dáme určitou číselnou hodnotu, může se stát, že výraz rozložiti lze. Na příklad čísla a považujeme za jednoduchý výraz. Dosadíme-li za a kterékoli prvočíslo, nelze je rozložit; dosadíme-li však za a číslo složené, pak je možno výraz a rozložiti v prvočinitele. Podobně číslo $p + q$ je pro $p = 1$, $q = 2$ prvočíslem, kdežto pro $p = 1$, $q = 3$ prvočíslem není.

Cvičení.

V následujících cvičeních můžete vedle rozkladů uvedených na konci knihy dostati ještě další správné výsledky, které se liší znaménky u sudého počtu činitelů. Abyste se přesvědčili o správnosti, provádějte u každého příkladu zkoušku!

129. Rozložte v jednoduché činitele:

a) $48a^2c^2$; b) $36ax^3$; c) $91p^4q^3$;
d) $143u^5v^4$; e) $108(r + s)\,r^2s$.

130. Určete všechny dělitele výrazů:

a) $6abx$; b) $9r^2s^2$; c) p^2qr^3.

131. Rozložte v jednoduché činitele:

a) $xy + 2xz$; b) $ax - xz$; c) $r^3 + r^5$;
d) $120a + 180b$; e) $h^2k - hk^2$.

132. Rozložte v jednoduché činitele:

a) $15a^5b^4 - 30a^3b^9$; b) $24m^3n^2 + 28mn^4$; c) $12a^2 - 24a^4$;
d) $15x^2 - 12x^4$.

133. Vytkněte mimo závorky, co lze:

a) $8abx - 6acy + 10az$; b) $t^3u^2v + t^2u^3v - t^2u^2v$;
c) $24p^5 - 18p^4 - 12p^3$.

134. Vytkněte mimo závorky, co lze:

a) $32ab^2x - 48a^2bx^3 + 64ab^2x^2$; b) $33m^2v - 27mv^3 + 24m^2v^2$;
c) $12z^2u^3 + 18zu^2 - 30z^3u$; d) $50a^2c^3 + 25ac^2 - 75a^4c^4$.

135. Rozložte v součin dvou činitelů:

a) $x(y + 2) + 2(y + 2)$; b) $a(t - 2) - 3(t - 2)$;
c) $c(p - q) + p - q$.

136. Rozložte v součin dvou činitelů:

a) $2x(3x + 1) - 3x - 1$; b) $ac + ad + bc + bd$;
c) $rs - rx + s - x$.

137. Rozložte v součin jednoduchých činitelů:

a) $2x^2(a + b) - 4x^3(a + b)$; b) $m(x - y) - x + y$;
c) $3n^2(z + u) - z - u$; d) $4a(a^2 - b) - a^2 + b$.

138. Rozložte v jednoduché činitele:

a) $4x^2 + 4x + 1$; b) $9b^2 - 12bc + 4c^2$;
c) $6u^3 - 36u^2 + 54u$.

139. Rozložte v součin jednoduchých činitelů:

a) $4a^2 - b^2$; b) $36u^2v^2 - 1$; c) $p^4q^2 - 16$.

140. Rozložte v součin jednoduchých činitelů:

a) $a^4r^4 - r^6$; b) $x^3y - 4xy^3$; c) $h^4 - 1$; d) $z^2 - z^6$.

141. Rozložte v jednoduché činitele:

a) $p^2 - (q - r)^2$; b) $(2x - 3y + 5)^2 - (4x - 2y + 3)^2$;
c) $z^2 + 2z + 1 - 4u^2$; d) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$.

***142.** Dokažte správnost těchto vět:

a) Součet dvou čísel sudých je číslo sudé.
b) Součet dvou čísel lichých je číslo sudé.
c) Součet dvou čísel, z nichž jedno je sudé a druhé liché, je číslo liché.

***143.** Dokažte správnost věty: Součin dvou čísel lichých je číslo liché.

***144.** Dokažte větu: Druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná osmi.

***145.** Dokažte větu: Dělíme-li číslo čtyřmi, dostaneme týž zbytek, jako dělíme-li čtyřmi jeho poslední dvojčíslí.

6. Nejvyšší společný dělitel a nejnižší společný násobek mnohočlenů.

Také algebraické výrazy mají společné dělitele, na př. společní dělitelé výrazů $8u^2v^3$, $12u^3v^2$ jsou $4u$, uv, u^2v, $4u^2v$, $4u^2v^2$ atd. Který z nich je největší? Dosadíme-li $u = v = 1$, potom $4u = 4$, $uv = 1$, $u^2v = 1$, $4u^2v^2 = 4$; dosadíme-li však $u = 0{,}1$; $v = 0{,}2$, potom $4u = 0{,}4$; $uv = 0{,}02$; $u^2v = 0{,}002$; $4u^2v^2 = 0{,}001\,6$. Nelze tedy mluvit o tom, který z dělitelů je největší. Proto u algebraických výrazů zavádíme pojem **nejvyššího společného dělitele.**

Rozumíme jím součin všech jednoduchých činitelů společných daným výrazům. Vyhledáme jej stejně, jako jsme vyhledávali největšího společného dělitele čísel celých.

Nejvyššího společného dělitele výrazů $8u^2v^3$, $12u^3v^2$ označujeme $D(8u^2v^3; 12u^3v^2)$. Počítejme jej!

1. Rozložíme oba výrazy: $8u^2v^3 = 2^3 . u^2 . v^3$, $12u^3v^2 = 3 . 2^2 . u^3 . v^2$.

2. Nejvyšší společný dělitel se může skládat jen z činitelů, kteří jsou oběma výrazům společní, a to 2^2, u^2, v^2. Je tedy

$$D(8u^2v^3; 12u^3v^2) = 2^2u^2v^2 = 4u^2v^2.$$

Podobně mluvíme o **nejnižším společném násobku** algebraických výrazů. Rozumíme jím součin všech činitelů, jež se vyskytují aspoň v jednom z daných výrazů. Vyhledáme jej stejně, jako jsme vyhledávali nejmenší společné násobky čísel celých.

Nejnižší společný násobek výrazů $8u^2v^3$, $12u^3v^2$ označujeme opět $n(8u^2v^3; 12u^3v^2)$ a počítáme jej takto:

1. Dané výrazy rozložíme v jednoduché činitele: $8u^2v^3 = 2^3.u^2.v^3$; $12u^3v^2 = 3 . 2^2 . u^3 . v^2$.

2. Do nejnižšího společného násobku napíšeme všecky činitele z výrazu $8u^2v^3$, t. j. činitele 2^3, u^2, v^3. Z výrazu $12u^3v^2$ připojíme ty činitele, kteří tam dosud nejsou, t. j. činitele 3, u. Ostatní činitele již máme.

Je tedy nejnižší společný násobek

$$n(8u^2v^3; 12u^3v^2) = 8u^2v^3 . 3u = 24u^3v^3.$$

1. úloha.

Najděte nejvyššího společného dělitele i nejnižší společný násobek výrazů $a - b$, $b - a$.

Ježto $b - a = -(a - b)$, je každý z obou daných výrazů dělitelem i násobkem druhého. Lze tedy kterýkoli z nich považovat za jejich nejvyššího společného dělitele i za jejich nejnižší společný násobek.

2. úloha.

Stanovte nejvyššího společného dělitele i nejnižší společný násobek mnohočlenů

$$x^2 - y^2, x^2 - 2xy + y^2.$$

Provedeme rozklad v jednoduché činitele: $x^2 - y^2 = (x+y).(x-y)$, $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$. Pak je

$$D(x^2 - y^2; x^2 - 2xy + y^2) = x - y,$$
$$n(x^2 - y^2; x^2 - 2xy + y^2) = (x + y)(x - y)^2 = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3.$$

Vzhledem k tomu, co bylo řečeno o znaménku, lze za nejvyššího společného dělitele považovat také výraz $y - x$ a za nejnižší společný násobek výraz $-(x + y)(x - y)^2 = -x^3 + x^2y + xy^2 - y^3$.

Cvičení.

V následujících cvičeních můžete vedle výsledků uvedených na konci knihy dostati také správné výsledky, které se liší znaménkem.

146. Určete:
a) $D(4r; 6s)$; b) $D(4p^2q^3; -8p^3q^2$; c) $D(-5t^3uv; 10tuv^3)$;
d) $D(3xz; z^2)$; e) $D(-16a^2b^3c; -20ab^2c^3)$.

147. Určete:
a) $n(4r; 6s)$; b) $n(4p^2q^3; -8p^3q^2)$; c) $n(-5t^3uv; 10tuv^3$;
d) $n(3xz; z^2)$; e) $n(-16a^2b^3c; -20ab^2c^3)$.

148. Stanovte D a n výrazů:
a) $4p^3, 6pq, 8pr$; b) $12r^3st^2, 15r^2s^2t, -18r^2st^3$;
c) $8abc, 12a^2b^2, -16a^3c, -24$.

149. Stanovte D a n výrazů:
a) $24(a + b)^2, 32(a^2 - b^2)$; b) $2x^2 + x, 2x^2 - x$;
c) $9g - 6h, 4h - 6g$.

150. Stanovte D a n výrazů:
a) $1 - s^2, (1 - s)^2$; b) $a^3 - a^2b, a^3b - ab^3, 2ab^2 - 2a^2b$;
c) $3k^2 - 3k, 4k^2 - 4k^3, 6k^2 - 6$.

7. Jednoznačnost rozkladu na prvočinitele.*)

Při probírání dělitelnosti jsme uvedli některé důležité věci bez odůvodnění. Zejména jsme neodůvodnili, že každé číslo (celé a větší než 1) se dá pouze jediným způsobem rozložit na prvočinitele. Počneme tím, že jednoduché poučky 1 až 4, uvedené v odst. 1, 11.—15, doplníme několika dalšími jednoduchými poučkami.

Poučka 5. Jestliže obě čísla a, b, při čemž je a větší než b, jsou násobky téhož čísla r, potom také číslo $a - b$ je násobek čísla r.

Neboť, jestliže čísla a, b jsou násobky čísla r, máme taková (celá) čísla x, y, že
$$a = rx, b = ry,$$
z čehož
$$a - b = rx - ry$$
neboli
$$a - b = r(x - y),$$
t. j. číslo $a - b$ dá se napsati jako součin dvou (celých) čísel, z nichž jedno je r; tedy $a - b$ je násobek čísla r. [Dosaďte: $a = 18$; $b = 10$; $r = 2$.]

*) V tomto článku dokážeme jednoznačnost rozkladu na prvočinitele. Je určen pro ty žáky, které zajímá přesné matematické usuzování, a může být při vyučování vynechán.

Poznámka. Jestliže číslo c je společný násobek obou čísel r, s, potom z poučky 1 (str. 11) následuje, že každý násobek čísla c je společným násobkem obou čísel r, s.

Poučka 6. Jestliže číslo c je společný násobek obou čísel r, s a jestliže známe jiný společný násobek k obou čísel r, s, který není dělitelný číslem c, potom můžeme udati takový společný násobek obou čísel r, s, který je menší než c.

Dejme tomu, že na př. číslo $c = 28$ je společný násobek čísel r, s a že také číslo $k = 154$ je společný násobek týchž čísel r, s. Při dělení

$$\begin{array}{l} 154 : 28 \doteq 5 \\ \quad 14 \end{array}$$

vyjde zbytek 14, tedy číslo 154 není dělitelné číslem 28 a jest

$$154 = 28 \,.\, 5 + 14$$

neboli

$$154 - 28 \,.\, 5 = 14. \tag{1}$$

Nyní 154 je společný násobek čísel r, s a podle předchozí poznámky také 28.5 je společný násobek čísel r, s, takže z (1) plyne podle poučky 5, že také číslo 14, které je menší než 28, t. j. než c, je společný násobek čísel r, s.

Obecný důkaz poučky 6 probíhá takto: Jelikož číslo k není dělitelné číslem c, při dělení $k : c$ vyjde zbytek z. Číslo z je (kladné celé) číslo menší než c. Podle poučky 4 (str. 15) je

$$n = k - z$$

násobek čísla c, takže podle předchozí poznámky je n společný násobek čísel r, s. Také k je společný násobek čísel r, s, takže podle poučky 5 také číslo

$$k - n = k - (k - z) = k - k + z = z$$

je společný násobek čísel r, s. Jelikož kladné celé číslo z je menší než c, je důkaz hotov.

Poučka 7. Jestliže c je nejmenší společný násobek čísel r, s a jestliže k je libovolný společný násobek týchž čísel r, s, potom číslo k je dělitelné číslem c.

Důkaz poučky 7 provedeme způsobem, který od starověku tvoří jeden z nejcennějších způsobů matematického usuzování a který se nazývá **nepřímý důkaz.** Ten spočívá v tom, že naopak připustíme jako správné to, že číslo k není dělitelné číslem c, a jednoduchým usuzováním dojdeme k tomu, že to má takové důsledky, které jsou docela zřejmě nesprávné. Tím se připuštění, že by číslo k nebylo dělitelné číslem c, ukáže neudržitelné a jsme vedeni k závěru, že naopak číslo k **musí býti dělitelné** číslem c. V našem případě probíhá „nepřímý důkaz" takto: Připusťme, že číslo k není dělitelné číslem c. Jelikož obě čísla c, k jsou společné násobky čísel r, s a jelikož číslo k není dělitelné číslem c, můžeme podle poučky 6 udat takový společný násobek čísel r, s, který je menší než c, t. j. **menší než nejmenší** společný násobek čísel r, s, což je opravdu důsledek zřejmě nesprávný. Tím je „nepřímý důkaz" poučky 7 dokončen.

Poučka 8. Nejmenším společným násobkem dvou nesoudělných čísel r, s je jejich součin.

I kdyby čísla r, s nebyla nesoudělná, je číslo $k = rs$ rozhodně **nějakým** společným násobkem čísel r, s. Označíme-li si c **nejmenší** společný násobek čísel r, s, potom podle poučky 7 číslo $k = rs$ je dělitelné číslem c takže musí býti

$$rs = ct \tag{2}$$

při vhodném celém čísle t. Mimo to, jelikož c je násobkem čísla r a také násobkem čísla s, bude

$$c = rx, \tag{3}$$

$$c = sy \tag{4}$$

při vhodných celých číslech x, y. Dosaďme nyní do (2) za c jednou hodnotu (3) a po druhé hodnotu (4). Dostaneme jednak

$$rs = rxt, \tag{5}$$

jednak

$$rs = syt. \tag{6}$$

Nyní v (5) můžeme krátit číslem r, v (6) můžeme krátit číslem s. Dostaneme

$$s = xt, r = yt,$$

t. j. obě čísla r, s se dají psát jako součiny s jedním činitelem t, a to znamená, že **číslo t je společným dělitelem čísel** r, s. Jestliže nyní čísla r, s jsou nesoudělná, potom jejich **jediným** společným dělitelem je číslo 1, takže musí býti $t = 1$. Dosadíme-li do (2) hodnotu $t = 1$, dostaneme

$$rs = c.$$

Jelikož písmeno c znamenalo nejmenší společný násobek čísel r, s, je tím poučka 8 dokázána.

Poučka 9. Jestliže ani číslo a, ani číslo b není násobkem prvočísla p, potom také součin ab není násobkem prvočísla p.

Provedeme „nepřímý důkaz“, t. j. připustíme, že ani číslo a, ani číslo b není násobkem prvočísla p, ale součin ab je násobkem prvočísla p, a jednoduchým usuzováním dojdeme k nemožnému důsledku. Prvočíslo p má dělitele 1 a dělitele p a žádného jiného dělitele. Číslo p není dělitelem čísla a (neboť a není násobkem čísla p); proto jediným společným dělitelem čísel a, p je číslo 1, t. j. čísla a, p jsou nesoudělná, takže podle poučky 8

nejmenší společný násobek čísel a, p je součin ap. (7)

Nyní číslo ab je násobkem čísla a; jestliže připustíme, že číslo ab je násobkem čísla p, je číslo ab jedním společným násobkem čísel a, p; tedy podle (7) číslo ab je dělitelné číslem ap, t. j. máme

$$ab = apt \tag{8}$$

při vhodné volbě čísla t. Nyní v (8) krátíme číslem a a dojdeme k závěru

$$b = pt,$$

t. j. k závěru, že číslo b je dělitelné číslem p, což je závěr nesprávný. Tím je nepřímý důkaz poučky 9 dokončen.

Poučka 10. Jestliže žádné z čísel

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{9}$$

není násobkem prvočísla p, potom také součin všech čísel (9) není násobkem prvočísla p.

Správnost poučky 10 vyplývá z poučky 9. Neboť, jelikož ani a_1, ani a_2 není násobek p, podle poučky 9 součin a_1a_2 prvních dvou čísel (9) není násobek p., Protože a_2 také není násobek p, podle poučky 9 součin

$$(a_1a_2) \,.\, a_3 = a_1a_2a_3$$

prvních tří čísel (9) není násobek p. Dále soudíme z poučky 9, že součin

$$(a_1a_2a_3) \,.\, a_4 = a_1a_2a_3a_4$$

prvních čtyř čísel (9) není násobek p. Stejně soudíme dále o součinu prvních pěti, šesti atd. čísel (9), až dojdeme k součinu **všech** čísel (9).

Hlavní poučka: Žádné číslo se nedá dvěma různými způsoby rozložit na prvočinitele, jestliže ovšem rozklady, které se liší pouze pořádkem činitelů, na př.

$$60 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5,\ 60 = 3 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 2,$$

považujeme za dva stejné rozklady.

Abychom hlavní poučku dokázali, vyjdeme od dvou rozkladů téhož čísla N na prvočinitele:

$$N = a_1a_2a_3 \ldots, \tag{10}$$

$$N = b_1b_2b_3 \ldots. \tag{11}$$

Dejme tomu, že nějaké prvočíslo p se nevyskytne v rozkladu (10), t. j. že všecka prvočísla $a_1, a_2, a_3 \ldots$ jsou rozdílná od prvočísla p; musíme dokázat, že p se nevyskytne ani v rozkladu (11). Jelikož ze dvou různých prvočísel nemůže jedno být násobkem druhého, není žádné z čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ násobkem prvočísla p. Ježto podle (10) číslo N je součinem čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$, soudíme z poučky 10, že číslo N není násobkem prvočísla p, t. j. že N se nedá psáti jako součin, jehož jedním činitelem by bylo prvočíslo p, t. j. že v rozkladu (11) se nevyskytne p. Tím je dokázáno, že prvočíslo, které se nevyskytne v rozkladu (10), nemůže se vyskytnout v rozkladu (11). Stejně se ovšem dokáže, že prvočíslo, které se nevyskytne v rozkladu (11), nemůže se vyskytnout v rozkladu (10). Tím je dokázáno, že každý prvočinitel jednoho z obou rozkladů (10) a (11) je zároveň prvočinitelem rozkladu druhého. Tím však není ještě důkaz hlavní poučky proveden, neboť v rozkladu čísla na prvočinitele může se některé prvočíslo objevit jako prvočinitel **několikrát**, a musíme proto ještě dokázat, že každé prvočíslo p, které se vyskytne v rozkladech (10) a (11), objeví se v obou rozkladech **stejněkrát**, t. j. že není možné, aby některé prvočíslo p se objevilo v jednom z obou rozkladů vícekrát než ve druhém. Abychom to dokázali, dejme tomu, že nějaké prvočíslo p se objeví v obou rozkladech (10) a(11) **aspoň** r-krát a že víme, že v jednom rozkladu, třeba v rozkladu (10), p se objeví **jenom** r-krát; máme dokázat, že také v rozkladu (11) se p objeví jenom r-krát. Protože na pořádku činitelů součinu nezáleží, můžeme si rozklady (10) a (11) přepsat ve tvaru

$$N = \overbrace{p \dots p}^{r \text{ činitelů}} . c_1 c_2 \dots,$$
$$N = \underbrace{p \dots p}_{r \text{ činitelů}} . d_1 d_2 \dots$$

neboli

$$N = p^r c_1 c_2 \dots, \qquad (12)$$
$$N = p^r d_1 d_2 \dots \qquad (13)$$

Při tom $c_1, c_2, \dots, d_1, d_2, \dots$ jsou prvočísla; o prvočíslech $c_1, c_2, \dots$ víme, že jsou rozdílná od p, o prvočíslech $d_1, d_2, \dots$ máme se přesvědčiti, že jsou rozdílná od p. Nyní podle (12) a (13) jest

$$N = p^r M,$$

kde M je kladné celé číslo, pro které ze (12) a (13) vycházejí rozklady na prvočinitele

$$M = c_1 c_2 \dots, \qquad (14)$$
$$M = d_1 d_2 \dots \qquad (15)$$

Víme, že v rozkladu (14) se nevyskytuje prvočíslo p; podle již provedené části důkazu (které nyní užijeme na číslo M) víme, že p se nevyskytuje ani v rozkladu (15), t. j. že prvočísla $d_1, d_2, \dots$ jsou rozdílná od p, což jsme právě chtěli dokázat.

III. Lomené algebraické výrazy.

1. Rozšiřování a krácení zlomků.

Se zlomky, které mají písmena v čitateli nebo jmenovateli (nebo v obou), počítáme podle týchž pravidel jako se zlomky, které mají v čitateli a jmenovateli určitá čísla.

Dělit 36 číslem 9 (36 : 9) znamená hledat takové číslo x, aby platilo:

$$36 = 9x.$$

Místo 36 : 9 píšeme $\frac{36}{9}$.

Dělit 5 číslem 3 (t. j. 5 : 3) znamená hledat takovou hodnotu x, pro kterou platí $5 = 3x$. Tu je $x = 5 : 3$, což píšeme také $x = \frac{5}{3}$.

Obecně zlomek $\frac{a}{b}$ má tutéž hodnotu jako podíl $a : b$, t. j. hodnotu x, pro kterou platí $a = bx$.

Číslu a ve zlomku $\frac{a}{b}$ říkáme **čitatel,** číslu b **jmenovatel.** Za a, b můžeme volit nejen čísla celá kladná, ale také jiná čísla. V každém případě bude zlomek $\frac{a}{b}$ znamenat takové číslo x, pro které platí $a = bx$.

Přitom nesmíme zapomenout, že dělení $a : b$ má smysl jen tehdy, když dělitel b je rozdílný od nuly ($b \neq 0$); proto také zlomek $\frac{a}{b}$ má smysl pouze, když $b \neq 0$.

Proto ke každému zlomku, který obsahuje ve jmenovateli nějaká písmena, budeme vždy připisovat, že jmenovatel je rozdílný od nuly, abychom měli stále na očích, která čísla se nesmí do jmenovatele dosadit.

Číslo $\frac{a}{b}$ tedy udává, jakým zlomkem čísla b je číslo a. Proto někdy zlomek $\frac{a}{b} = a : b$, kde $b \neq 0$, označujeme názvem **poměr** a čteme *a* ku *b*. Oba názvy, poměr i zlomek, značí ovšem totéž.

1. úloha.

Každý z a rolníků odvedl po c litrech mléka nad svou povinnost; každý z dalších b rolníků odvedl po d litrech více. Kolik odvedl průměrně jeden rolník navíc?

Celkem bylo $a + b$ rolníků, kteří dodali nad svou povinnost o $(a \cdot c + b \cdot d)$ litrů více. Na jednoho rolníka připadá tedy $\frac{ac + bd}{a + b}$ litrů. Přitom musí $a + b \neq 0$, ale to je jistě, neboť obě čísla a, b jsou kladná, jak vyžaduje povaha úlohy.

2. úloha.

Víme, že $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9}$. Základní vlastnost každého zlomku je vyjádřena rovností:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc};\ b \neq 0;\ c \neq 0.$$

Vyslovuje se pravidlem:

Hodnota zlomku se nemění, když násobíme čitatele i jmenovatele týmž číslem rozdílným od nuly (rozšiřování zlomku).

Čteme-li rovnost v opačném směru:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b};\ b \neq 0;\ c \neq 0,$$

docházíme k pravidlu:

Hodnota zlomku se nemění, když dělíme čitatele i jmenovatele zlomku týmž číslem rozdílným od nuly (krácení zlomku).

Obecný důkaz:

Zlomek $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ značí takové číslo x, pro které platí $a = bx$. Násobíme-li obě strany napsané rovnice číslem c, dostaneme správnou rovnici $ac = bxc$, z níž plyne $x = \frac{ac}{bc}$, takže $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Musí být $c \neq 0$, nemá-li zlomek ztratit smysl.

O zlomku, který se nedá krátit, říkáme, že je v **základním tvaru.** Na takový tvar uvedeme zlomek nejrychleji, když ho krátíme nejvyšším společným dělitelem čitatele a jmenovatele.

Příklad:

$$\frac{36a^4x^3}{72a^2x} = \frac{a^2x^2}{2};\ a \neq 0,\ x \neq 0$$

(krátili jsme číslem $36a^2x$). Neurčíme-li však nejvyššího společného dělitele ihned, krátíme kterýmkoli společným dělitelem čitatele a jmenovatele a krácení provádíme postupně.

$$\frac{36a^4x^3}{72a^2x} = \frac{a^4x^3}{2a^2x} = \frac{a^2x^3}{2x} = \frac{a^2x^2}{2};\ a \neq 0,\ x \neq 0.$$

Není-li čitatel a jmenovatel vyjádřen ve tvaru součinu, je třeba jej nejprve rozložiti v součin a krátit jednotlivé činitele.

Krácení a rozšiřování zlomku si ukážeme na několika příkladech.

1. $$\frac{16r^2s^3t^4}{12r^4s^3t^2} = \frac{4t^2}{3r^2};\ r \neq 0;\ s \neq 0;\ t \neq 0.$$

Při krácení zlomku nebudeme nic přeškrtávat, ale ve složitějších případech můžeme podtrhnout činitele, které jsme krátili.

2. Zlomky

$$\frac{2ab^2}{3c};\ \frac{3c}{2a^2b};\ a \neq 0;\ b \neq 0;\ c \neq 0$$

napište s jmenovatelem $12a^2b^2c^2$!

První zlomek rozšíříme výrazem $12a^2b^2c^2 : 3c = 4a^2b^2c$, který je rozdílný od nuly; druhý zlomek rozšíříme výrazem $12a^2b^2c^2 : 2a^2b = 6bc^2$, který je rovněž rozdílný od nuly. Vyjde

$$\frac{2ab^2}{3c} = \frac{8a^3b^4c}{12a^2b^2c^2}; \quad \frac{3c}{2a^2b} = \frac{18bc^3}{12a^2b^2c^2}; \quad a \neq 0;\ b \neq 0;\ c \neq 0.$$

3. Zkraťte zlomek

$$\frac{8u^3v^4 - 12u^4v^3}{4u^4v^4}; \quad u \neq 0;\ v \neq 0.$$

Čitatele nejprve rozložíme v součin a pak teprve krátíme:

$$\frac{8u^3v^4 - 12u^4v^3}{4u^4v^4} = \frac{4u^3v^3(2v - 3u)}{4u^4v^4} = \frac{2v - 3u}{uv}; \quad u \neq 0;\ v \neq 0.$$

Hrubá chyba by byla, kdybychom chtěli krátit třeba 8 proti 4, nebo prvý člen čitatele proti jmenovateli. Proč?

4. Zlomky

$$\frac{x + y}{x - y}, \quad \frac{y - x}{y + x}; \quad x - y \neq 0;\ y + x \neq 0,$$

uveďte na společného jmenovatele $x^2 - y^2$.

Prvý zlomek rozšíříme výrazem $x + y$ a druhý výrazem $x - y$. Vyjde:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x + y}{x - y} &= \frac{(x + y)^2}{(x - y)(x + y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} \\ \frac{y - x}{y + x} &= \frac{(y - x)(x - y)}{(y + x)(x - y)} = \frac{-x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} \end{aligned}\right\} \quad x \neq y,\ x \neq -y.$$

Místo $x - y \neq 0$ jsme napsali $x \neq y$ a místo $y + x \neq 0$ jsme napsali $x \neq -y$. Je to totéž?

Cvičení.

U každé úlohy připište podmínky, které musí býti splněny, aby úloha měla smysl. Ve slovních úlohách dosaďte za písmena vhodná určitá čísla.

151. Žáci jeli na výlet. Kolik stála jedna jízdenka, víte-li, že žáků bylo n, že 4 z nich jeli zdarma a že bylo zaplaceno u pokladny celkem a Kčs?

152. Na řece leží dvě místa A, B, jejichž vzdálenost je s km. Řeka teče směrem od A k B. Mezi oběma místy jezdí parníky. Rychlost parníku v klidné vodě je c km/hod, rychlost proudu je v km/hod. Jakou dobu potřebuje parník k cestě a) z A do B, b) z B do A?

153. Je mi x roků. Před r roky byl otec pětkrát starší než já. a) Kolikrát starší je dnes? b) Kolikrát starší bude za s roků?

154. a) Z 1 kg nepražené kávy je 800 g kávy pražené. Stojí-li 1 kg nepražené kávy a Kčs, kolik by měl podle toho státi 1 kg kávy pražené? b) Potravinářský závod koupil x kg nepražené kávy, kávu upražil a prodal, při čemž vydělal celkem b Kčs. Zač se prodával 1 kg pražené kávy?

155. Závodní kuchyně koupila od pěstitele x kg brambor po a Kčs za 1 kg. Brambory byly naplněny do pytlů. Dovozné za každý pytel činilo b Kčs, takže závodní kuchyně zaplatila za každý pytel c Kčs. Kolik kg brambor bylo v každém pytli a kolik bylo pytlů?

156. Ze dvou míst, vzdálených od sebe s km, vyjedou proti sobě současně dva vlaky, první rychlostí c_1 m/min, druhý rychlostí c_2 m/min. Za kolik minut se potkají?

157. Zkraťte zlomky:

a) $\dfrac{5x}{5y}$; b) $\dfrac{2a}{3a}$; c) $\dfrac{5z}{z}$; d) $\dfrac{u^5}{u^3}$.

158. Zkraťte zlomky:

a) $\dfrac{ae^2}{a^2e}$; b) $\dfrac{8r^2s^3}{8r^3s^4}$; c) $\dfrac{4pqr}{8pq^2r^3}$; d) $\dfrac{24a^2xy}{36ax^2y}$; e) $\dfrac{12tu^2v^3}{16t^3u^2v}$.

159. Zjednodušte:

a) $\dfrac{x^3y}{(2xy)^2}$; b) $\dfrac{4rs^3}{(rs^2)^2}$; c) $\dfrac{(2ab)^2}{2ab^2}$; d) $\dfrac{3p^2q^3}{(3p^2q^3)}$; e) $\dfrac{10k(l^2m)^3}{(10kl)^2m^3}$.

160. Napište

a) číslo 3 jako zlomek se jmenovatelem α) x, β) ab;

b) číslo b jako zlomek se jmenovatelem α) x, β) b, γ) ab;

c) číslo u^2v jako zlomek se jmenovatelem α) x, β) u, γ) v^3, δ) uv^2.

161. Napište zlomky $\frac{3}{4}$, $\dfrac{2a}{b}$, $\dfrac{1}{6abc}$, $\dfrac{5a^2}{2bc}$, $\dfrac{5a^2b}{3c^2}$ se jmenovatelem $12a^2b^2c^2$!

162. Zkraťte zlomky:

a) $\dfrac{6hk}{4h^2 + 8hk}$; b) $\dfrac{x^4y^3 + x^3y^4}{x^3y^3}$; c) $\dfrac{12ab^3z^2 - 20a^3bz^2}{8a^2b^2z^2}$;

d) $\dfrac{5u^2v}{10u^3v^2 + 15u^2v^3 - 5u^2v^2}$.

163. Uveďte na základní tvar zlomky:

a) $\dfrac{x(1 + r)}{y(1 + r)}$; b) $\dfrac{4x + 4y}{6x + 6y}$; c) $\dfrac{p - 1}{p - p^2}$; d) $\dfrac{1 - s^2}{(1 - s)^2}$; e) $\dfrac{b^2 - 4}{2 - b}$.

164. Uveďte na základní tvar zlomky:

a) $\dfrac{a^2 - ab}{b^2 - ab}$; b) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{2a + 2b}$; c) $\dfrac{2x^2y + 2xy^2 - 2xyz}{3yz^2 - 3y^2z - 3yxz}$;

d) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{x^2 + 2xz + z^2 - y^2}$.

2. Sčítání a odčítání zlomků.

Zlomky se stejnými jmenovateli

sečítáme: $$\frac{10}{7} + \frac{2}{7} = \frac{10 + 2}{7} = \frac{12}{7} = 1\,\frac{5}{7};$$

odčítáme: $$\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Sčítání a odčítání zlomků, které mají stejné jmenovatele rozdílné od nuly, vyjádří se rovnicemi:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c};\ c \neq 0;$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c};\ c \neq 0.$$

Tyto rovnice platí, ať jsou čísla a, b, c jakákoliv. Je jenom třeba, aby $c \neq 0$. Dokážeme si to. Zavedeme tato označení: $\frac{a}{c} = x$ čili $a = cx$, $\frac{b}{c} = y$ čili $b = cy$. Hledáme, jaký význam má číslo $x + y$. Sečteme čísla a, b. Dostaneme $a + b = cx + cy$. To lze psát $a + b = c\,(x + y)$. Odtud vychází $x + y = \frac{a + b}{c}$. Podobně odečtením vyjde: $a - b = cx - cy$ čili $a - b = c(x - y)$. To značí, že $x - y = \frac{a - b}{c}$.

Součet dvou zlomků se stejnými jmenovateli rozdílnými od nuly rovná se zlomku o témž jmenovateli, jehož čitatelem je součet čitatelů daných zlomků.

Vyslovte podobné pravidlo pro odčítání zlomků se stejnými jmenovateli rozdílnými od nuly!

Nemají-li zlomky stejné jmenovatele, rozšíříme je vhodnými výrazy tak, aby stejné jmenovatele měly, t. j. uvedeme je na **společného jmenovatele.** Ve společném jmenovateli musí být obsaženi jmenovatelé všech daných zlomků; je to tedy jejich společný násobek. Za společného jmenovatele volíme zpravidla nejnižší společný násobek daných jmenovatelů.

Postup si ukážeme na příkladech:

1. $$\frac{3z}{10} + \frac{5z}{6} = \frac{9z + 25z}{30} = \frac{34z}{30} = \frac{17z}{15}$$

Nejmenší společný násobek čísel 10 a 6 je 30; prvý zlomek rozšíříme třemi, druhý pěti, takže $\frac{3z}{10} + \frac{5z}{6} = \frac{9z}{30} + \frac{25z}{30}$ (přitom se zpravidla společný jmenovatel psává jen jednou, jak to bylo provedeno výše). Po sečtení vyjde $\frac{34z}{30}$, což lze krátit dvěma. Oba dané zlomky mají smysl pro každé z, takže není potřeba připojovat poznámku o podmínce pro z.

2. $$\frac{a+2}{3b} - \frac{a-2}{2b} = \frac{2(a+2)-3(a-2)}{3b \cdot 2} = \frac{2a+4-3a+6}{6b} = \\ = \frac{10-a}{6b};\ b \neq 0.$$

Nejnižší společný násobek čísel $2b$, $3b$ je $3b \cdot 2 = 6b$; prvý zlomek rozšíříme dvěma, druhý třemi. (Dvojčleny $a + 2$, $a - 2$ je nutné dát do závorek; ty byly zbytečné, pokud jsme měli dva zlomky.)

3. $$e - \frac{e^2}{f} = \frac{ef - e^2}{f} = \frac{e(f-e)}{f};\ f \neq 0.$$

4. $$\frac{1}{r-1} - \frac{2}{r^2-1} = \frac{1}{r-1} - \frac{2}{(r+1)(r-1)} = \frac{r+1-2}{(r+1)(r-1)} = \\ = \frac{r-1}{(r+1)(r-1)} = \frac{1}{r+1};\ r \neq 1;\ r \neq -1.$$

Abychom určili nejnižší společný násobek obou jmenovatelů, rozložíme je nejprve na jednoduché činitele. Poněvadž $r^2 - 1 = (r+1)(r-1)$, je společným jmenovatelem výraz $(r+1)(r-1)$. Společný jmenovatel necháváme až do konečného výsledku v rozloženém tvaru $(r+1)(r-1)$, abychom snáze poznali, dá-li se krátit. Kdybychom jmenovatele roznásobili, musili bychom jej před krácením znovu rozkládat. Dané zlomky mají smysl, když $r + 1 \neq 0$, t. j. když $r \neq -1$, a když $r - 1 \neq 0$, t. j. když $r \neq 1$. Pak lze také zlomky rozšiřovat a krátit.

5. $$\frac{a-1}{a^2+a} - \frac{a+1}{a^2-a} = \frac{a-1}{a(a+1)} - \frac{a+1}{a(a-1)} = \\ = \frac{(a-1)^2-(a+1)^2}{a(a+1)(a-1)} = \frac{a^2-2a+1-a^2-2a-1}{a(a+1)(a-1)} = \\ = \frac{-4a}{a(a+1)(a-1)} = \frac{-4}{a^2-1};\ a \neq 0;\ a \neq -1;\ a \neq 1.$$

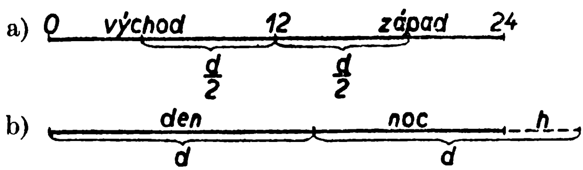
Poněvadž $a^2 + a = a(a + 1)$, $a^2 - a = a(a - 1)$, je společným jmenovatelem výraz $a(a + 1)(a - 1)$. Dané zlomky mají smysl, když $a \neq 0, a + 1 \neq 0, a - 1 \neq 0$, čili když $a \neq 0, a \neq -1, a \neq 1$. To jsou také podmínky, které musí být splněny, aby mělo smysl krácení a rozšiřování.

6. Postaví-li se žáci do trojstupů, je trojstupů o 6 více, než kdyby se postavili do čtyrstupů. Kolik je žáků?

Počet žáků označme z; pak počet trojstupů je $\frac{x}{3}$ a počet čtyrstupů $\frac{x}{4}$. Rozdíl mezi těmito dvěma čísly je

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{4x - 3x}{12} = \frac{x}{12}$$

a to musí být rovno 6. Musí tedy x se rovnat číslu 72.



Obr. 4.

7. Délka noci je o h hodin kratší než délka dne. Určete okamžik východu a západu Slunce za předpokladu, že poledne je právě uprostřed mezi východem a západem Slunce.

Jestliže den trvá d hodin, je okamžik východu dán časovým údajem $\left(12 - \frac{d}{2}\right)$ hod. a okamžik západu $\left(12 + \frac{d}{2}\right)$ hod. (viz obr. 4a). Je třeba vyjádřit d pomocí h. Z obr. 4b vidíme, že $2d = 24 + h$, takže $\frac{d}{2} = \frac{24 + h}{4}$. Pak je okamžik východu $12 - \frac{d}{2} = 12 - \frac{24 + h}{4} = 6 - \frac{h}{4}$ a okamžik západu $12 + \frac{d}{2} = 12 + \frac{24 + h}{4} = 18 + \frac{h}{4}$.

Cvičení.

U každé úlohy připište podmínky, které musí být splněny, aby úloha měla smysl. Ve slovních úlohách dosaďte za písmena vhodná určitá čísla.

165. Slučte zlomky:

a) $s - \frac{s}{2} + \frac{2s}{3}$; b) $-\frac{t}{3} + \frac{t}{6}$; c) $\frac{3a}{4} + a - \frac{2a}{3} + \frac{a}{6}$;

d) $\frac{3b}{10} + \frac{2b}{15} - b - \frac{5b}{6}$.

166. Slučte:

a) $1 + \frac{x}{y}$; b) $\frac{2y}{z} - u$; c) $a - \frac{1}{a}$.

167. Slučte:

a) $\frac{1}{4p} + \frac{1}{12p}$; b) $\frac{5}{6g} - \frac{1}{10g}$; c) $\frac{r}{3s} + \frac{3r}{4s} + \frac{r}{6s}$; d) $\frac{5a}{6b} - \frac{2a}{3b} - \frac{a}{2b}$.

168. Slučte:

a) $\frac{x-1}{3} + \frac{x+2}{2}$; b) $\frac{y-2}{3} - \frac{y+1}{4}$; c) $\frac{p+3q}{10} - \frac{2q-p}{15}$;

d) $\frac{5e-9f}{12} - \frac{7e-3f}{20}$.

169. Slučte:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; b) $\frac{y}{z} - \frac{z}{2y}$; c) $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2$; d) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} - \frac{c}{ab}$.

170. Slučte:

a) $\frac{u-2v}{2u} - \frac{2u-v}{2v}$; b) $\frac{3x+y}{9x} - \frac{x-4y}{6y} - 1$;

c) $\frac{3x-y}{3x^2y} - \frac{x+y}{2x^2y} + \frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}$; d) $\frac{2p+q}{p^3q} - \frac{p-3q}{p^2q^2} - \frac{q^2-p^2}{p^3q^2}$.

171. Slučte:

a) $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}$; b) $t - \frac{st}{s-t}$; c) $\frac{r^2}{(r-1)^2} - \frac{r}{r-1}$;

d) $\frac{3}{4+c} + \frac{1}{4-c}$.

172. Slučte:

a) $\frac{3u}{u+1} + \frac{u+2}{u-1} - \frac{6}{u^2-1}$; b) $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \frac{3}{(z+1)(z+2)}$;

c) $\frac{4}{p-1} + \frac{1}{1-p}$; d) $\frac{r}{s-1} - \frac{r}{2-2s}$.

173. Slučte:

a) $\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{t+1}{t^2-t}$; b) $\dfrac{4}{x^2-4x}+\dfrac{1}{4-x}$; c) $\dfrac{4m}{(2d-h)^2}-\dfrac{4m}{(2d+h)^2}$;

d) $\dfrac{2+u}{1-u^2}-\dfrac{2-u}{(u-1)^2}$.

174. n občanů se rozhodlo, že každý odpracuje dobrovolně a hodin na vybudování dětského hřiště. Když jeden z nich onemocněl, vzali ostatní jeho závazek na sebe. O kolik hodin zvýšil každý svůj závazek?

175. Do I. patra, které je ve výši a m, vede n schodů. Oč by se musela snížit výška každého schodu, kdyby jich mělo býti o k více?

176. Dán je obdélník délky a m a šířky b m. a) Oč třeba zmenšiti jeho šířku, prodlouží-li se délka o 1 m a má-li jeho obsah zůstati nezměněný? b) Oč třeba zvětšiti jeho délku, zmenší-li se šířka o 1 m a má-li jeho obsah zůstati nezměněný?

177. Trať kanoistického závodu měří s km a závodníci ji musí projeti jednou po proudu a po druhé proti proudu. Rychlost kanoe je c km/hod v klidné vodě a rychlost proudu je v km/hod. a) Za jak dlouho projede kanoe tratí oběma směry? b) Byl by závodník u cíle dříve či později, kdyby jel stejně dlouhý závod s touž námahou v klidné vodě? Jaký by byl časový rozdíl?

3. Násobení zlomků.

Úloha.

Lepší organisací práce se podařilo v dolu zvýšiti výkon na $\frac{7}{5}$ výkonu loňského roku. Jaká část loňského výkonu byla provedena za tři čtvrtletí letošního roku?

Bylo provedeno $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}$ loňského výkonu; to značí, že zlomek $\frac{7}{5}$ musíme zmenšit čtyřikrát, což dá $\dfrac{7}{5 \cdot 4}$, a výsledek zvětšit třikrát, což dá $\dfrac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \dfrac{20}{21}$. Zlomek $\dfrac{7}{5}$ jsme násobili třemi čtvrtinami.

Násobení zlomků se provádí podle pravidla vyjádřeného rovnicí:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},\ b \neq 0,\ d \neq 0.$$

Napsané pravidlo dokážeme takto: Označme $\dfrac{a}{b} = x$, $\dfrac{c}{d} = y$, takže $a = bx$, $c = dy$. Znásobíme-li mezi sebou čísla a, c, dostaneme totéž, jako když znásobíme spolu čísla bx, dy, t. j. $ac = bx \cdot dy$, čili $ac = bd \cdot xy$. Proto $xy = \dfrac{ac}{bd}$. Ale $xy = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}$, takže $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ pro libovolné hodnoty čísel a, b, c, d, pokud ovšem $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Součin dvou zlomků se jmenovateli rozdílnými od nuly je roven zlomku, jehož čitatelem je součin čitatelů a jmenovatelem součin jmenovatelů daných zlomků.

Při násobení zlomků rozkládáme čitatele i jmenovatele v součiny jednoduchých činitelů a násobení ponecháváme v naznačeném tvaru tak dlouho, dokud neprovedeme krácení výsledku. Teprve po provedeném krácení vynásobíme zbylé činitele.

Chceme-li zlomek umocnit, stačí si uvědomit, že

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}, \quad b \neq 0$$

atd. Vyslovte pravidlo, podle něhož lze zlomek umocnit!

Násobení si procvičíme na několika příkladech:

1. $$\frac{5a^2b^3c}{6tu^2v^3} \cdot \frac{3t^3uv^2}{10a^2b^4c^2} = \frac{5a^2b^3c \,.\, 3t^3uv^2}{6tu^2\,v^3 \,.\, 10a^2b^2c^2} = \frac{bt^2}{4cuv},$$

pokud $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, t \neq 0, u \neq 0, v \neq 0$. Naznačený součin není třeba vypisovat a krácení se provede hned tak, že krátíme jednoho činitele v některém čitateli proti vhodnému činiteli v některém jmenovateli.

2. $$\frac{x^2 + xy}{y^2 - xy} \cdot \frac{x^2 - xy}{y^2 + xy} = \frac{x(x + y)}{y(y - x)} \cdot \frac{x(x - y)}{y(y + x)} = -\frac{x^2}{y^2}$$

za předpokladu, že $y \neq 0, y \neq x, y \neq -x$. Čísla $x - y$, $y - x$ lze navzájem krátit, neboť $y - x = -(x - y)$.

3. $$\left(\frac{4}{x - 3} - \frac{3}{x - 1}\right)\left(\frac{2}{x + 5} - \frac{1}{x + 1}\right) =$$
$$= \frac{4(x - 1) - 3(x - 3)}{(x - 3)(x - 1)} \cdot \frac{2(x + 1) - (x + 5)}{(x + 5)(x + 1)} =$$
$$= \frac{4x - 4 - 3x + 9}{(x - 3)(x - 1)} \cdot \frac{2x + 2 - x - 5}{(x + 5)(x + 1)} =$$
$$= \frac{x + 5}{(x - 3)(x - 1)} \cdot \frac{x - 3}{(x + 5)(x + 1)} = \frac{1}{x^2 - 1},$$

pokud $x \neq 3, x \neq 1, x \neq -5, x \neq -1$. Nevynásobujte jmenovatele před krácením!

4. Lepší organisace práce zvýšila výkon v dolu o $p\%$ a tento zvýšený výkon byl na základě dalšího zlepšovacího návrhu zvýšen o $s\%$.

Bylo původně těženo x q uhlí za týden, kolik q uhlí bylo vytěženo týdně na základě lepší organisace práce a zlepšovacího návrhu?

Lepší organisací práce se docílilo $y = x\left(1 + \dfrac{p}{100}\right) = \dfrac{x(100 + p)}{100}$ q uhlí za týden; zlepšovacím návrhem $y\left(1 + \dfrac{s}{100}\right) = y \cdot \dfrac{100 + s}{100} = \dfrac{x(100 + p)(100 + s)}{10\,000}$ q uhlí za týden.

5. Stanice A, B jsou od sebe vzdáleny d km. Ze stanice A vyjede rychlík, který dojede do B za r min., a současně s ním vyjede ze stanice B osobní vlak, který dojede do A za s min. Jaká je vzdálenost obou vlaků po uplynutí x min.? Kdy se oba vlaky potkají?

Rychlost rychlíku je $\dfrac{d}{r}$ km/min; za x min. ujede $\dfrac{d}{r} \cdot x$ km. Rychlost osobního vlaku je $\dfrac{d}{s}$ km/min; za x min. ujede $\dfrac{d}{s} \cdot x$ km. Po uplynutí x min. je jejich vzdálenost $d - \dfrac{d}{r} \cdot x - \dfrac{d}{s} \cdot x = d - dx \cdot \dfrac{s + r}{sr}$ km. Potkají se, když $x = \dfrac{sr}{s + r}$ min., neboť pak jejich vzdálenost je $d - d \cdot \dfrac{sr}{s + r} \cdot \dfrac{s + r}{sr} = d - d = 0$. Úloha i výpočet mají smysl, když s, r jsou čísla kladná.

Cvičení.

U každé úlohy připište podmínky, které musí býti splněny, aby úloha měla smysl. Ve slovních úlohách dosaďte ze písmena vhodná určitá čísla.

178. Proveďte násobení:

a) $\dfrac{x^2}{y} \cdot \dfrac{y^2}{x}$; b) $2p \cdot \dfrac{q^2}{pr}$; c) $\dfrac{4rs}{15t^2} \cdot \left(-\dfrac{5st}{6r^2}\right)$; d) $\dfrac{ab^2}{c^3} \cdot \dfrac{bc^2}{a^3} \cdot \dfrac{ca^2}{b^3}$.

179. Vynásobte:

a) $\dfrac{x^3}{y^4} \cdot \dfrac{y^3}{z^5} \cdot \dfrac{z^3}{x^6}$; b) $\dfrac{3ab}{5c^3} \cdot \dfrac{10a^2c}{21b^2} \cdot \left(-\dfrac{35abc^2}{18}\right)$;

c) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{y}{z}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{z}{x}\right)^4$; d) $\left(-\dfrac{2a^3x^5}{3b^2y^4}\right) \cdot \left(-\dfrac{6ay^3}{5bx^3}\right) \cdot \left(-\dfrac{15b^4y}{4a^3x^2}\right)$.

180. Vypočtěte:

a) $\dfrac{(r - s)^2}{(r + s)^2} \cdot \dfrac{r + s}{r - s}$; b) $\dfrac{5x - 10y}{2y} \cdot \dfrac{y^2}{4x - 8y}$

c) $\dfrac{p - p^2}{pq + q} \cdot \dfrac{q}{2p}$ d) $\dfrac{a - ab}{b - ab} \cdot \dfrac{ac - c}{bd - d}$.

181. Vypočtěte:

a) $\dfrac{t^2 - 4t}{t^2 - 4} \cdot \dfrac{4}{t - 4}$; b) $\dfrac{ab + ac}{bd - cd} \cdot \dfrac{ab - ac}{bd + cd}$;

c) $\dfrac{u - v}{u - z} \cdot \dfrac{v - z}{v - u} \cdot \dfrac{z - u}{z - v}$; d) $\dfrac{u^2 - 2uv + v^2}{u^2 + uv} \cdot \dfrac{v^2 + 2uv + u^2}{v^2 - uv}$.

182. Zjednodušte:

a) $(x - y)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$; b) $\dfrac{ab}{a - b} \cdot \left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$;

c) $\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}\right) \cdot \dfrac{u^2}{u - v}$ d) $\left(1 - \dfrac{2}{p + 1}\right)\left(1 - \dfrac{2}{1 - p}\right)$.

183. Vynásobte:

a) $\left(\dfrac{r + s}{r - s} - \dfrac{r - s}{r + s}\right)\left(\dfrac{r}{s} - \dfrac{s}{r}\right)$;

b) $\left(\dfrac{1}{z - 1} + 1\right)\left(\dfrac{1}{z + 1} - 1\right)$;

c) $\left(\dfrac{3}{x - 2} - \dfrac{2}{x - 1}\right)\left(\dfrac{3}{x + 2} - \dfrac{2}{x - 1}\right)$;

d) $\left[1 - \dfrac{(a - b)\,c}{(a - c)\,b}\right]\left[1 - \dfrac{(b - c)\,a}{(b - a)\,c}\right]\left[1 - \dfrac{(c - a)\,b}{(c - b)\,a}\right]$.

184. Oč se liší součet čísel $1 + \dfrac{a}{b}$, $1 + \dfrac{b}{a}$ od jejich součinu?

185. a) Oč se liší součet čísel $\dfrac{k^2 + k}{k^2 + 1}$, $\dfrac{k^2 - k}{k^2 + 1}$ od součtu jejich druhých mocnin?

b) Oč se liší součet druhých mocnin čísel $\dfrac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2}$, $\dfrac{p^2 + q^2}{2pq}$ od součinu jejich druhých mocnin?

186. Kterým číslem třeba násobiti číslo a, aby vyšlo a) 1; b) b?

187. Kterým číslem třeba násobiti číslo $\dfrac{a}{b}$, aby vyšlo a) 1; b) c?

188. Zásobu oleje, celkem a litrů, lze stočiti buď do p plechovek jednoho druhu, nebo do q plechovek druhého druhu. Kolik litrů oleje se vejde do x plechovek prvého druhu a do y plechovek druhého druhu?

189. Jeden stroj utkal v metrů látky za h hodin, druhý totéž množství látky za k hodin. a) Kolik metrů látky utká první stroj za hodinu, kolik druhý stroj, kolik oba dohromady? b) Kolik utká první stroj za t hodin, kolik druhý, kolik oba? c) Za jak dlouho utkají v metrů oba stroje dohromady?

190. Na státním statku je zásoba sena, která vystačí buď pro koně na a dní nebo pro krávy na b dní. a) Z této zásoby byli krmeni koně i krávy po x dní. Jak velká část zásoby zbyla? b) Jak dlouho vystačí seno pro koně i krávy současně?

191. Pružný míč vyskočí po odrazu do $\frac{3}{5}$ té výše, ze které spadl. Byl spuštěn s výšky v. Do jaké výše vyskočí a) po prvém odrazu; b) po druhém odrazu; c) po třetím odrazu?

192. Ve spořitelně se úrokují vklady tak, že se koncem roku připisuje p% úroku. Na počátku roku jsem si uložil a Kčs. a) Jak vzroste tento vklad na konci téhož roku po připsání úroků? b) Nevyzvednu-li vklad, bude jej spořitelna úrokovati dále a v příštím roce bude počítat úroky ze vkladu zvětšeného o úroky připsané koncem minulého roku (složené úrokování). Jak velký obnos budu mít uložen koncem druhého roku? c) Jak se zvýší vklad na konci třetího roku?

4. Dělení zlomků.

Je-li dán zlomek $\frac{a}{b}$, kde $a \neq 0$, $b \neq 0$, nazýváme zlomek $\frac{b}{a}$ **převrácenou hodnotou** daného zlomku. Jaká je převrácená hodnota čísla a? ($\frac{1}{a}$, při čemž musí $a \neq 0$; lze totiž psát $a = \frac{a}{1}$.)

O dělení zlomků platí pravidlo

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},\ b \neq 0,\ d \neq 0,\ c \neq 0.$$

Proč musíme předpokládat, že je také $c \neq 0$?

O správnosti napsaného pravidla se přesvědčíme, uvědomíme-li si, co znamená dělení. Hledáme takové číslo x, aby bylo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot x$. Tomu vyhovuje $x = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, neboť $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a}{b}$.

Zlomkem, jehož čitatel i jmenovatel je rozdílný od nuly, dělíme, násobíme-li jeho převrácenou hodnotu.

Procvičíme si dělení na několika příkladech:

1. $$\frac{28k^2h^3}{27m^3n^2} : \frac{14k^3h^2}{15m^4n^2} = \frac{28k^2h^3}{27m^3n^2} \cdot \frac{15m^4n^2}{14k^3h^2} = \frac{10hm}{9k},$$

při čemž musí $k \neq 0$, $h \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$.

2. $$\frac{x^2+xy}{x^2-xy}:\frac{y^2-xy}{y^2+xy}=\frac{x(x+y)}{y(y-x)}:\frac{x(x-y)}{y(y+x)}=$$
$$=\frac{x(x+y)}{y(y-x)}\cdot\frac{y(y+x)}{x(x-y)}=-\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}.$$

$y \neq 0, y \neq x, y \neq -x \; x \neq 0.$

3. $$(u+v):\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)=(u+v):\frac{v+u}{uv}=(u+v)\cdot\frac{uv}{v+u}=uv,$$

$u \neq 0, v \neq 0, v+u \neq 0.$

4. Smísíme-li a litrů p-procentního lihu s b litry q-procentního lihu, kolikaprocentní líh dostaneme?

V 1 l p-procentního lihu je $\frac{p}{100}$ l čistého lihu; v a l je tedy $a\cdot\frac{p}{100}$ l čistého lihu. V 1 l q-procentního lihu je $\frac{q}{100}$ l čistého lihu; v b l je tedy $b\cdot\frac{q}{100}$ l čistého lihu. Celkem je ve směsi $\left(a\cdot\frac{p}{100}+b\cdot\frac{q}{100}\right)$ l čistého lihu. Objem směsi je $(a+b)$ l; procento z tohoto množství je $\frac{a+b}{100}$ l. Množství čistého lihu představuje tedy $\left(a\cdot\frac{p}{100}+b\cdot\frac{q}{100}\right):\frac{a+b}{100}=\frac{ap+bq}{a+b}\%$. Povaha úlohy ovšem vyžaduje, aby čísla a, b, q byla kladná.

Již dříve jsme řekli, že zlomek je pouze jiný tvar dělení. Proto lze každé dělení zapsati ve tvaru zlomku. Také dělení dvou zlomků lze zapsati ve tvaru zlomku

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},\; b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0.$$

Takový zlomek se nazývá **zlomek složený.** Je třeba dát pozor, která čára odděluje čitatele od jmenovatele. Tuto čáru píšeme výrazněji; nazývá se **hlavní zlomková čára.** Rovnítko píšeme vždy proti hlavní zlomkové čáře, aby nenastalo nedorozumění. Nejistota by mohla vzniknout, kdyby lomený výraz byl jen v čitateli nebo jen ve jmenovateli. Přirovnejte tyto dva zlomky:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}, \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}, \quad b \neq 0, c \neq 0.$$

Pro úpravu složených zlomků platí všecky pravidla, která platí pro jednoduché zlomky.

Rozšíříme-li složený zlomek vhodným výrazem rozdílným od nuly, lze jej vždy převést na zlomek jednoduchý. Proto při převádění zlomků složených užíváme zejména pravidla o rozšiřování zlomků.

Ukážeme si to na několika jednoduchých příkladech:

1. $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0, a \neq 0.$$

Chceme-li zjednodušit složený zlomek, odstraníme v čitateli i ve jmenovateli zlomky; ovšem tak, aby se hodnota zlomku nezměnila. To provedeme rozšiřováním.

Protože chceme odstranit oba jmenovatele b, b^2 v čitateli i jmenovateli složeného zlomku, rozšíříme jej nejnižším společným násobkem obou jmenovatelů b, b^2, t. j. číslem b^2. To můžeme, neboť $b \neq 0$.

Potom: $$\frac{\frac{a}{b} \cdot b^2}{\frac{a}{b^2} \cdot b^2} = \frac{ab}{a} = b$$

Rozšiřování provádíme zpravidla zpaměti, a to tak, že příklad píšeme takto:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b^2}} = \frac{ab}{a} = b, \quad b \neq 0, a \neq 0.$$

2. $$\frac{\frac{3a}{2b^2}}{\frac{5a}{4b^3}}, \quad b \neq 0, a \neq 0.$$

Nejnižší společný násobek jmenovatelů $2b^2$, $4b^3$ je $4b^3$. Složený zlomek rozšíříme číslem $4b^3$, které není rovno nule. Píšeme

$$\frac{\frac{3a}{2b^2}}{\frac{5a}{4b^3}} = \frac{3a \,.\, 2b}{5a} = \frac{6b}{5}, \quad b \neq 0, a \neq 0.$$

3. $$\frac{\frac{c}{b} - \frac{d}{a}}{\frac{c}{b} + \frac{d}{a}} = \frac{\frac{ac - bd}{ab}}{\frac{ac + bd}{ab}} = \frac{ac - bd}{ac + bd},$$

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $ac + bd \neq 0$. Aby měly smysl oba jednoduché zlomky $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{a}$, z nichž se složený zlomek skládá, musí $a \neq 0$, $b \neq 0$. Aby měl smysl i zlomek složený, musí jmenovatel $\frac{c}{b} + \frac{d}{a} = \frac{ac + bd}{ab} \neq 0$. To nastane, když $ac + bd \neq 0$. Nejprve provedeme naznačené výkony a pak složený zlomek rozšíříme číslem ab. To smíme, neboť ab není rovno nule. Poněvadž je $ac + bd \neq 0$, má smysl i výsledek.

Cvičení.

U každé úlohy připište podmínky, které musí být splněny, aby úloha měla smysl. Ve slovních úlohách dosaďte za písmena vhodná určitá čísla.

193. Proveďte dělení:

a) $1 : \frac{4ab}{9xy}$; b) $\frac{p}{r^3} : \frac{p^3}{r}$; c) $\frac{1}{m^2n^3} : \frac{1}{m^3n^2}$;

d) $\frac{u^2}{v^2} : u^2v^2$; e) $30a^2b^2x^2 : \frac{5a^3}{4bx^4}$.

194. Zjednodušte:

a) $\frac{p-q}{p+q} : \frac{q-p}{q+p}$; b) $\frac{3r}{2r-1} : \frac{2r}{r-2}$; c) $\frac{1}{c^2-c} : \frac{1}{c^2-c^3}$;

d) $\frac{x^2+2xy}{y} : (x^2 - 4y^2)$; e) $\frac{s^2-t^2}{u^2-v^2} : \frac{t-s}{u+v}$.

195. Upravte:

a) $\frac{2}{\frac{2a^3}{3b^2}}$; b) $\frac{\frac{1}{2a^3}}{3b^2}$; c) $\frac{\frac{2p}{3q^2}}{\frac{8p^4}{15q^6}}$; d) $\frac{\frac{3ax^4}{8by^5}}{\frac{9a^4y}{20b^3x^3}}$; e) $\frac{\frac{8r^3s^2}{t}}{\frac{4rt^3}{15s^2}}$.

***196.** Zjednodušte:

a) $\dfrac{\dfrac{2+a^2}{8-2a^4}}{3ab}$; b) $\dfrac{\dfrac{t^2+2t+1}{t^2+2t}}{t^2+t}$; c) $\dfrac{\dfrac{z^2-4z}{z^2-4}}{\dfrac{z^2-2z}{z+2}}$; d) $\dfrac{\dfrac{x+ax}{y-by}}{\dfrac{x+bx}{y-ay}}$.

***197.** Proveďte:

a) $(x-y):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$; b) $\left(\dfrac{u}{v}-\dfrac{v}{u}\right):\left(\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v}\right)$;

c) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}\right):\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}\right)$; d) $\left(\dfrac{a+b}{b}-\dfrac{a-b}{a}\right):\left(\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{b}\right)$.

198. Vyjádřete jako zlomky jednoduché:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{z-1}+1}{\dfrac{1}{z+1}-1}$; b) $\dfrac{\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}}{\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{q^2}}$; c) $\dfrac{r+s+\dfrac{s^2}{r}+\dfrac{s^3}{r^2}}{\dfrac{r^2}{s^2}-\dfrac{s^2}{r^2}}$;

d) $\dfrac{\dfrac{p-q}{p+q}+\dfrac{p+q}{p-q}}{\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}}$.

199. Za a kg zboží zaplatíme b Kčs. a) Kolik Kčs zaplatíme za 1 kg? b) Kolik kg zboží dostaneme za c Kčs?

200. Kolikrát větší je součet čísel $\dfrac{1+u}{k}$, $\dfrac{1+u}{ku}$ než jejich součin?

201. Na železniční trati je a km stoupání a b km klesání. Vlak jede do kopce rychlostí c_1 km/hod a s kopce rychlostí c_2 km/hod. Za jak dlouho projede celou trať a jak velká je jeho průměrná rychlost?

202. a dělníků zvýšilo svůj výkon každý o $p\%$, b dělníků každý o $q\%$. O kolik procent byl průměrně zvýšen pracovní výkon jednoho dělníka?

203. Jeden traktor zorá pole o rozloze P ha za a hodin, druhý traktor zorá totéž pole za b hodin. a) Kolik ha se zorá oběma traktory současně za 1 hodinu? b) Za jak dlouho se zorá oběma traktory současně celé pole?

204. Za jak dlouho vyloží společně 3 dělníci vagon cihel, jestliže prvý by jej sám vyložil za a hodin, druhý za b hodin, třetí za c hodin?

205. Do a litrů p-procentního roztoku bylo přidáno b litrů vody. Kolikaprocentní roztok vznikl?

206. Do a gramů p-procentního roztoku bylo přidáno b gramů rozpuštěné látky. Kolikaprocentní roztok vznikl?

207. Dokažte věty: a) Je-li a větší než 1, je jeho převrácená hodnota menší než 1. b) Je-li a kladné a menší než 1, je jeho převrácená hodnota větší než 1.

IV. Zlomky desetinné.

1. Převádění zlomků obyčejných na zlomky desetinné.

Zlomky, které jsme dosud probírali, na př. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{25}{100}$, nazýváme někdy určitěji **zlomky obyčejné.** Činíme tak proto, abychom je odlišili od zlomků 0,7; 0,25, kterým říkáme **zlomky desetinné.**

Víme, že $0{,}1 = \frac{1}{10}$, $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; $0{,}456 = \frac{456}{1000} = \frac{57}{125}$. Tak lze převést každý desetinný zlomek na zlomek obyčejný. Jmenovatelé vzniklých zlomků jsou součiny prvočinitelů 2 a 5 ve vhodných mocninách ($10 = 2 \,.\, 5$; $100 = 2^2 \,.\, 5^2$; $1\,000 = 2^3 \,.\, 5^3$); proto také i po zkrácení zůstanou ve jmenovateli pouze mocniny prvočinitelů 2 a 5.

Také naopak každý zlomek, který má jmenovatele složeného pouze z prvočinitelů 2 a 5 (v libovolných mocninách) můžeme napsati ve tvaru zlomku desetinného. Na př.:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5;\ \frac{1}{4} = \frac{1 \,.\, 5^2}{4 \,.\, 5^2} = \frac{25}{100} = = 0{,}25;\ \frac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 5^2}{4 \,.\, 5^2} = 0{,}75;$$

$$\frac{27}{32} = \frac{27}{2^5} = \frac{27 \,.\, 5^5}{2^5 \,.\, 5^5} = \frac{84\,375}{100\,000} = 0{,}843\,75.$$

K témuž výsledku dospějeme dělením:

$$\tfrac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5,\ \tfrac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25 \text{ atd.}$$

Máme-li vyjádřit v desetinném tvaru zlomek $\frac{13}{17}$, dělíme:

```
13 : 17 ≐ 0,764
 110
   80
   12 zb.
```

Nalezené číslo se nerovná přesně zlomku $\frac{13}{17}$ (neboť $0{,}764 < \frac{13}{17}$, ale $0{,}765 > \frac{13}{17}$, což píšeme $0{,}764 < \frac{13}{17} < 0{,}765$).

Kdybychom dělili 13 : 17 o jedno místo přesněji, dostali bychom podíl 0,764 7. Ten je bližší k číslu 0,765 než k číslu 0,764; proto je hodnota 0,765 přesnější. Říkáme, že 0,765 představuje hodnotu zlomku $\frac{13}{17}$ **zaokrouhlenou na tři desetinná místa.**

Proveďme zlomek $\frac{200}{339}$ na zlomek desetinný.

Dělíme-li 200 : 339 na pět desetinných míst, dostaneme 0,589 97, což zaokrouhlíme na čtyři desetinná místa číslem 0,590 0. V tomto čísle nemůžeme vynechat na konci nuly. Znamenalo by to, že jsme číslo zaokrouhlili na 2 desetinná místa.

Chceme-li vyjádřit hodnotu obyčejného zlomku desetinným zlomkem zaokrouhleným na *určitý počet desetinných míst*, počítáme tuto hodnotu o *jedno místo přesněji;* výsledek pak zaokrouhlíme na žádaný počet desetinných míst tak, aby se zaokrouhlené číslo lišilo od přesné hodnoty co nejméně.

Poučení o tom, jak se čísla zaokrouhlují, je uvedeno v Matematických, fysikálních a chemických tabulkách, které vyšly jako doplněk učebnice.

Z počátku jsme měli obyčejné zlomky, které jsme vyjádřili desetinným zlomkem přesně. Naproti tomu obyčejné zlomky $\frac{13}{17}$ a $\frac{200}{339}$ byly vyjádřeny desetinným zlomkem jen přibližně. Víme, že každý zlomek, který má ve jmenovateli pouze prvočinitele 2 a 5 (v libovolných mocninách), lze vyjádřit desetinným zlomkem přesně. Položme si nyní otázku obrácenou, zda také každý zlomek, který se dá vyjádřit ve tvaru desetinného zlomku přesně, **musí** mít ve jmenovateli pouze prvočinitele 2 a 5. K odpovědi dojdeme takto:

Je-li dán zlomek $\frac{a}{b}$, který se dá vyjádřiti desetinným zlomkem přesně, znamená to, že dělení $a : b$ vyjde (po připsání určitého počtu nul) beze zbytku. Omezíme se jen na zlomky v **základním tvaru,** t. j. na zlomky, které již dále krátiti nelze. Kdyby zlomek nebyl v základním tvaru, nejprve jej krácením na základní tvar uvedeme. Je-li $\frac{a}{b}$ takový zlomek v základním tvaru, jsou čísla a, b navzájem nesoudělná. Pak musí čitatel, násobený vhodnou mocninou čísla 10, t. j. $a \,.\, 10^n$, být dělitelný číslem b. Aby to bylo možno, musí $a \,.\, 10^n$ být dělitelno všemi prvočiniteli čísla b. Čísla a, b jsou navzájem nesoudělná, proto číslo a není dělitelné žádným prvočinitelem čísla b. Proto všichni prvočinitelé čísla b musí býti obsaženi v čísle 10^n. Ale $10^n = 2^n \,.\, 5^n$, takže číslo b se nemůže skládati z jiných prvočinitelů než 2 a 5; každý z nich může býti ovšem v libovolné mocnině.

Máme výsledek: Každý obyčejný zlomek v základním tvaru, který lze přesně vyjádřiti desetinným zlomkem, má jmenovatele složeného pouze z prvočinitelů 2 a 5 (v libovolných mocninách).

Zlomek $\frac{81}{80}$ má jmenovatele $80 = 2^4 \,.\, 5$; lze jej tedy převést na desetinný tvar přesně. Skutečně je beze zbytku $81 : 80 = 1{,}0125$.

Cvičení.

208. Vyjádřete desetinným tvarem zlomky: a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{7}{8}$; c) $\frac{37}{80}$; d) $\frac{13}{16}$.

209. Stanovte hodnotu zlomků zaokrouhlenou na čtyři desetinná místa: a) $\frac{4}{7}$; b) $\frac{7}{11}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{4}{13}$; e) $\frac{17}{27}$; f) $\frac{31}{32}$.

210. Vyjádřete jako zlomky obyčejné: a) 0,5; b) 0,4; c) 0,32; d) 0,08; e) 0,625; f) 0,675; g) 0,437 5.

211. Převedením na zlomky desetinné uspořádejte dané zlomky podle velikosti: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{10}, \frac{8}{11}, \frac{9}{13}, \frac{12}{17}$.

212. Vyjádřete na pět desetinných míst, kterou částí dne je a) 1 hodina; b) 1 minuta; c) 1 vteřina.

***213.** Určete všecka čísla menší než 100, která mohou býti jmenovateli zlomků v základním tvaru, jež lze vyjádřiti desetinnými zlomky přesně.

2. Čísla periodická.

Úloha.

a) Stanovme hodnotu zlomku $\frac{1}{3}$ na dvě, tři, čtyři desetinná místa! (0,33, 0,333, 0, 333 3.) Další desetinná místa tohoto čísla jsou stále samé trojky, neboť při dělení vychází stále týž zbytek.

b) Stanovme hodnotu zlomku $\frac{7}{11}$ na dvě, tři, šest desetinných míst! (0,64; 0,636 4; 0,636 364.) Jaká jsou další desetinná místa tohoto čísla? Skupina číslic 63 se stále opakuje, neboť vycházejí střídavě zbytky 4, 7; číslice 4 na posledním místě vznikla zaokrouhlením.

c) Stanovme hodnotu zlomku $\frac{5}{12}$ na tři, čtyři, pět desetinných míst! (0,417, 0,417 7, 0,416 67.) Číslice 6 na dalších desetinných místech se stále opakuje, neboť vychází stále týž zbytek 8; číslice 7 na posledním místě vzniká zaokrouhlením.

d) Stanovme hodnotu zlomku $\frac{35}{54}$ na čtyři, sedm, deset desetinných míst! (0684 1, 0,648 148 1, 0,648 148 148 1.) Jaká jsou další desetinná místa? Skupina číslic 481 se stále opakuje, neboť se stále opakují zbytky 26, 44, 8.

Z toho vyplývá: **Jakmile při dělení, při němž připisujeme ke zbytkům nuly, dostaneme zbytek, který již jednou vyšel, dostaneme také ve výsledku číslici, která tam již byla,** a po ní dostaneme opět zbytek, který již vyšel, atd. Proto v podílu vyjde skupina číslic, které se neustále v témže pořádku opakují; stručně říkáme, že výsledkem takového dělení je **číslo periodické.** Skupina číslic, která se stále opakuje, se nazývá **perioda.** Abychom nezapomněli, který zbytek jsme již dostali, je vhodné při dělení zbytky zapisovat.

Periodická čísla zapisujeme tak, že periodu píšeme jen jednou a nade všemi číslicemi periody napíšeme vodorovný pruh. Místo 0,333 ... píšeme $0,\overline{3}$ (tečky značí, že se trojky stále opakují), místo 0,375 375 ... píšeme $0,\overline{375}$, místo 0,416 66 ... píšeme $0,41\overline{6}$ atd.

Každý desetinný zlomek má jenom konečný počet desetinných míst. To, co jsme nazvali periodickým číslem, **vlastně není číslo.** Je to pouhá značka, ze které můžeme vyčísti, jak lze daný zlomek zaokrouhlit na libovolně volený počet desetinných míst. Na př. zápis

$$\tfrac{35}{54} = 0,6\overline{481}$$

znamená pouze to, že hodnoty zlomku $\frac{35}{54}$ zaokrouhlené na 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... desetinných míst jsou

0,6; 0,65; 0,648; 0,648 1; 0,648 15; 0,648 148; 0,648 148 1; ...

Proto se nebudeme také učit žádným početním pravidlům pro periodická čísla.

Cvičení.

214. Vyjádřete jako čísla periodická tyto zlomky: a) $\frac{7}{9}$; b) $\frac{4}{11}$; c) $\frac{17}{27}$; d) $\frac{25}{37}$; e) $\frac{5}{6}$; f) $\frac{11}{12}$; g) $\frac{49}{108}$.

***215.** Zlomek $\frac{1}{7}$ vyjádřete jako číslo periodické. Dovedli byste odtud bez dalšího dělení převést na čísla periodická zlomky $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$? (Návod: Všimněte si, které zbytky dostaneme, když počítáme $\frac{1}{7}$.)

3. Čísla zaokrouhlená a počítání s nimi.

Hodnotu zlomku lze vyjádřiti desetinným tvarem většinou jen přibližně. Užíváme k tomu čísel zaokrouhlených na určitý počet desetinných míst. Tím rozumíme takové číslo o daném počtu desetinných míst, které se liší od hodnoty daného zlomku co možná nejméně.

Ale i jinde se setkáváme se zaokrouhlenými čísly. Ukážeme si to na příkladě. Měříme-li na př. délku nějaké úsečky, přiložíme k měřené úsečce měřítko tak, aby jeden krajní bod úsečky splynul pokud možno přesně s počátkem měřítka, a pozorujeme, kolikátá dělicí čárka měřítka splyne s druhým krajním bodem měřené úsečky. Zpravidla se však stane, že žádná dělicí čárka měřítka se nekryje s druhým krajním bodem úsečky. Proto si všimneme, která dělicí čárka měřítka je k němu nejblíže, a tuto délku pak prohlásíme za přibližnou délku úsečky. Přitom vzdálenost nejbližší dělicí čárky měřítka od krajního bodu úsečky nemůže být větší než polovina jednotky, na něž je měřítko děleno. Provádíme tedy zaokrouhlování měřené délky na nejmenší jednotky nanesené na použitém měřítku. Použijeme-li jemnějšího měřítka, na němž jsou naneseny menší jednotky, zaokrouhlujeme měřenou délku opět, a to na tyto menší jednotky. Přesnost měření lze poněkud zvýšiti, rozdělíme-li jednotky nanesené na měřítku od oka na menší části (třeba na desetiny) a jejich počet odhadneme. Nikdy však takto nedospějeme k číslům přesným, nýbrž vždy jen k číslům zaokrouhleným.

Může se ovšem stát, že krajní bod měřené úsečky je tak blízko u některé dělicí čárky měřítka, že se nám zdá, jako by oba body splývaly, ale většinou to je klam našeho oka, způsobený jeho nedostatečnou rozlišovací schopností. Je vždy velmi těžko rozhodnout, zda krajní bod měřené úsečky splyne s některou dělicí čárkou měřítka, neboť to, co označujeme slovem „bod", žádným bodem ve skutečnosti není, nýbrž je to vždy určitá ploška konečných rozměrů, byť i malých, a také dělicí čárky měřítka mají vždy určitou tloušťku, třeba nepatrnou. Stejné potíže se vyskytují i při každém jiném měření, vážení a pod.

Při posuzování přesnosti zaokrouhleného čísla nezáleží na počtu desetinných míst. Na čem záleží, je něco zcela jiného. Jestliže na př. o určité délce víme, že se rovná

36,2 cm (přesně na desetiny)

nebo

3,62 dm (přesně na setiny)

nebo

0,362 m (přesně na tisíciny)

nebo

0,000 362 km (přesně na miliontiny),

jsou všecky čtyři údaje zřejmě rovnocenné, ačkoli první údaj je zaokrouhlen na jedno desetinné místo, druhý na dvě, třetí na tři a čtvrtý dokonce na šest. Počet desetinných míst nemá tu nic společného s přesností měření, nýbrž záleží prostě na volbě délkové jednotky. Přesnost měření záleží na **počtu platných číslic**, kterými jsou v našem případě **tři číslice** 3, 6, 2. (Nuly na začátku čísel 0,362; 0,000 362 nepočítáme mezi platné číslice.)

Pouhým odhadem bez měření lze při určitém cviku odhadnouti správně pouze první platnou číslici měřené veličiny. Hrubým měřením stanovíme snadno první dvě platné číslice měřené veličiny. Chceme-li stanovit první tři platné číslice, musíme měřit pečlivěji. Přesněji než na první tři platné číslice lze obyčejnými prostředky změřiti danou veličinu velice těžko. Zase si to ukážeme na příkladě.

Jste-li jen trochu zvyklí odhadovat vzdálenosti, odhadnete správně bez měření, že šířka učebny je asi 6 m. Hrubým měřením, při němž kladete metrové měřítko na podlahu a prstem si označíte, kam až sahal jeho konec v předcházející poloze, naměříte třeba 6,4 m. Zvýšíte-li přesnost měření tak, že krajní body měřítka budete označovati značkami ostře ořezanou křídou a budete pečlivě dbát toho, abyste postupovali v přímém směru kolmo ke stěnám místnosti, naměříte při velké pečlivosti třeba 6,38 m, ale s větší přesností, t. j. na milimetry, se vám šířku učebny tímto způsobem naměřiti nepodaří. Vezmete-li si plátěné pásmo, shledáte, že se i poměrně malým tahem protáhne třeba o několik milimetrů, takže počet milimetrů naměřený pásmem je zcela nespolehlivý. A také taková přesnost měření nemá vůbec smysl, neboť není nikterak zaručeno, že místnost není na některém jiném místě o několik milimetrů širší nebo užší. Podobně je tomu, kdybyste chtěli zjistit svou váhu.

Většina čísel, s nimiž se v životě setkáváme, jsou čísla zaokrouhlená, z nichž známe prvé dvě nebo nejvýše prvé tři platné číslice a jejichž přesná hodnota nám zpravidla není známa. Známe tedy taková čísla jen nepřesně, a proto také všecky výsledky, které dostaneme při počítání s nimi, jsou nepřesné.

Všimneme si zaokrouhlených čísel blíže:

1. Zaokrouhlené číslo 38,7 značí, že jeho přesná hodnota není menší než 38,65 a není větší než 38,75. Zaokrouhlené číslo 62,4 značí, že jeho přesná hodnota není menší než 62,35 a není větší než 62,45. Součet přesných hodnot obou čísel není menší než $38{,}65 + 62{,}35 = 101{,}00$ a není větší než $38{,}75 + 62{,}45 = 101{,}20$.

Čísla 101,00 a 101,20 se nazývají **meze** součtu; mezi nimi je hledaný výsledek. Číslo 101,00 je **dolní mez** a číslo 101,20 je **horní mez**. Že nějaké číslo není menší než 101,00 a že není větší než 101,20, zapisujeme stručně ve tvaru $101{,}1 \pm 0{,}1$. Číslo 101,1 se nazývá **střední hodnota** a číslo 0,1 se nazývá **chyba** nalezeného součtu. Střední hodnota je aritmetický průměr obou mezí, t. j. $101{,}1 = \frac{1}{2}(101{,}20 + 101{,}00)$. Chyba je poloviční rozdíl obou mezí, t. j. $0{,}1 = \frac{1}{2}(101{,}20 - 101{,}00)$.

2. Součin přesných hodnot dvou zaokrouhlených čísel 38,7; 62,4 není menší než $38{,}65 \,.\, 62{,}35 = 2\,409{,}827\,5$ a není větší než $38{,}75 \,.\, 62{,}45 = 2\,419{,}937\,5$. Střední hodnota hledaného součinu se rovná aritme-

tickému průměru obou mezí, t. j. $\frac{1}{2}(2\,409{,}827\,5 + 2\,419{,}937\,5) = \frac{1}{2} \cdot 4\,829{,}765 = 2\,414{,}882\,5$. Jeho chyba se rovná polovičnímu rozdílu obou mezí, t. j. $\frac{1}{2}(2\,419{,}937\,5 - 2\,409{,}827\,5) = \frac{1}{2} \cdot 10{,}11 = 5{,}055$.

Abychom nemuseli psát zbytečně mnoho bezvýznamných číslic, zaokrouhlujeme obě meze tak, aby chyba byla dána nějakým jednoduchým číslem, zpravidla jednociferným. Přitom dolní mez **vždycky** zmenšujeme a horní mez zvětšujeme. (Proč?) Dále je zaokrouhlujeme tak, aby obě měly na posledním místě současně buď sudou nebo lichou číslici, aby chyba vyšla skutečně jednociferně V našem případě tedy zaokrouhlíme obě meze buď na 2 409 a 2 421 nebo na 2 408 a 2 420. Hledaný součin pak je buď $2\,415 \pm 6$ nebo $2\,414 \pm 6$.

3. Jsou daná dvě zaokrouhlená čísla 73,48 a 45,6. Horní mez rozdílu přesných hodnot obou čísel je $73{,}485 - 45{,}55 = 27{,}935$, neboť rozdíl roste s rostoucím menšencem a s klesajícím menšitelem. Dolní mez jejich rozdílu je $73{,}475 - 45{,}65 = 27{,}825$. Chyba výsledku je $\frac{1}{2}(27{,}935 - 27{,}825) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}11 = 0{,}055$. Budeme tedy zaokrouhlovat na setiny, takže horní mez rozdílu je 27, 94 a dolní mez 27,82. Výsledek je pak $27{,}88 \pm 0{,}06$.

Horní mez podílu přesných hodnot čísel 73,48 a 45,6 se rovná podílu $73{,}485 : 45{,}55 \doteq 1{,}613\,3$, neboť podíl roste s rostoucím dělencem a s klesajícím dělitelem. Dolní mez podílu je $73{,}475 : 45{,}65 \doteq 1{,}609\,5$. Chyba výsledku je $\frac{1}{2}(1{,}613\,3 - 1{,}609\,5) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}003\,8 = 0{,}001\,9$. Proto zaokrouhlíme na tisíciny. Meze výsledku jsou buď 1,614 a 1,608 nebo 1,615 a 1,609, takže výsledek je buď $1{,}611 \pm 0{,}003$ nebo $1{,}612 \pm \pm 0{,}003$.

Stejně můžeme stanoviti výsledek každého výpočtu z několika daných zaokrouhlených čísel.

Poznámka. Máme-li provádět násobení nebo dělení několika čísel a nezáleží-li příliš na přesnosti výsledku, lze počítati tak, že daná čísla zaokrouhlíme na určitý počet platných číslic (na příklad na 4), částečné výsledky vždy zaokrouhlíme na týž počet platných číslic a s takto zaokrouhlenými čísly počítáme dále. Výsledek pak zaokrouhlíme tak, aby měl o jednu platnou číslici méně (tedy v našem případě 3). Pokud není daných čísel příliš mnoho a pokud neprovádíme příliš mnoho částečných výpočtů, dostaneme tak výsledek dosti spolehlivý. Nikdy však nemá smysl ponechati ve výsledku násobení nebo dělení více platných číslic, než kolik jich mělo nejméně přesné číslo, s nímž jsme počítali.

Příklady:

1. Určiti $\sqrt{6} \,.\, \sqrt{10} \,.\, \sqrt{15}$. Tento příklad byl volen proto, abychom snadno dovedli stanoviti správný výsledek, který je $\sqrt{6 \,.\, 10 \,.\, 15} = \sqrt{900} = 30$. Tak bychom také vždy v praxi počítali. Dosadíme-li však podle tabulek čísla zaokrouhlená na 4 platné číslice: $\sqrt{6} \doteq 2,449$, $\sqrt{10} \doteq 3,162$, $\sqrt{15} \doteq 3,873$ a počítáme-li podle výše uvedeného předpisu, máme:

$$\begin{array}{r}
2,449 \\
\times\ 3,162 \\
\hline
4898 \\
14694 \\
2449 \\
7347 \\
\hline
7,743738 \doteq 7,744
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
7,744 \\
\times\ 3,873 \\
\hline
23232 \\
54208 \\
61952 \\
23232 \\
\hline
29,992512 \doteq 30,0,
\end{array}$$

to se shoduje s přesně nalezeným výsledkem.

2. Vypočísti $1,022\,49^2 \,.\, 10,324\,8 \,.\, 9,214\,49$. Příklad byl sestaven tak, aby rozdíl mezi výsledkem správným a výsledkem vypočteným podle našeho pravidla byl co největší. Zaokrouhlíme-li daná čísla na čtyři platné číslice, jde o výraz $1,022^2 \,.\, 10,32 \,.\, 9,214$. Popsaným způsobem dostaneme:

$$\begin{array}{r}
1,022 \\
\times\ 1,022 \\
\hline
2044 \\
2044 \\
1022 \\
\hline
1,044484 \doteq 1,044
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1,044 \\
\times\ 10,32 \\
\hline
2088 \\
3132 \\
1044 \\
\hline
10,77408 \doteq 10,77
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
10,77 \\
\times\ 9,214 \\
\hline
4308 \\
1077 \\
2154 \\
9693 \\
\hline
99,23478 \doteq 99,2
\end{array}$$

Počítáme-li nezaokrouhleně, dostaneme přesný výsledek 99,465 18..., kde tečky znamenají další číslice. Zaokrouhlíme-li jej na tři platné číslice, vyjde 99,5, což se liší od vypočteného přibližného výsledku o 3 jednotky třetího místa (t. j. o 3 desetiny).

Cvičení.

216. Vypočtěte součet $\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11}$ tak, že každý zlomek vyjádříte zaokrouhleně na tři desetinná místa. V kterých mezích je vypočtený součet?

217. Nalezněte meze, v nichž je hodnota součinu $3\frac{2}{7} \,.\, 2\frac{5}{13}$, jestliže každý zlomek vyjádříte zaokrouhleně na 3 desetinná místa.

218. Strany trojúhelníkového pozemku byly změřeny s přesností na dm takto: 85,4 m, 67,2 m, 38,9 m. Která je horní a která dolní mez pro obvod?

219. Strana čtverce je 6,2 cm dlouhá (zaokrouhleno na desetiny). Co lze říci o jeho obsahu?

220. V jakých mezích jest $1 : \pi$, je-li $\pi \doteq 3,14$ (zaokrouhleno na setiny)?

221. Střední vzdálenost Měsíce od Země je 384 400 km (zaokrouhleno na stovky); poloměr Země je 6 378 km (zaokrouhleno na jednotky). Vyjádřete vzdálenost Měsíce od Země v zemských poloměrech!

222. Obsah obdélníka je 26,3 cm^2 (zaokrouhleno na desetiny), jeden jeho rozměr je 5,6 cm (zaokrouhleno na desetiny). Která je horní a která je dolní mez pro druhý rozměr?

223. Obsah čtverce je 365 cm^2 (zaokrouhleno na jednotky). V jakých mezích je jeho strana?

224. Rychlost zvuku ve vzduchu je 340 m/vteř. (zaokrouhleno na desítky). Jak daleko by mohla býti bouře, uplyne-li mezi zablesknutím a úderem hromu 5 vteř. (zaokrouhleno na jednotky)?

225. Pokrytí 1 m^2 střechy stojí 250 Kčs (toto číslo považujte při výpočtu za přesné). Střecha se skládá ze dvou obdélníků, jejichž rozměry zaokrouhlené na dm jsou 12,6 m a 4,8 m. a) Jaký vliv na výpočet obsahu může míti zaokrouhlování při měření rozměrů? b) Jaký to může míti vliv na výpočet ceny pokrytí?

226. Železný klíč váží 31 g (zaokrouhleno na jednotky); ponořením do odměrné nádobky jsme shledali, že má objem 4 cm^3 (opět zaokrouhleno na jednotky). Lze z těchto údajů stanoviti jeho měrnou váhu?

***227.** Podle patníků podél trati jsem naměřil, že vlak ujede 100 m za 5,8 vteř. stopkami, které měří čas s přesností na $\frac{1}{5}$ vteř. Jakou rychlostí jede vlak? (Vzdálenost 100 m považujte za přesnou.)

228. a) Rozměry místnosti jsou 4,6 m, 3,8 m, 3,2 m (měřeno s přesností na dm). V jakých mezích jest její objem? b) Jak by se změnil výsledek, kdybychom měřili s přesností na cm, třeba 4,62 m, 3,79 m, 3,20 m?

***229.** Jak velký musí být poloměr kruhu, nemá-li se jeho obsah lišiti od 100 cm^2 o více než o 1%? ($\pi \doteq 3,14$ zaokrouhleno na setiny.)

***230.** Měrná váha mědi je 8,9 g/cm^3, zinku 7,1 g/cm^3 (zaokrouhleno na desetiny). Jaká je měrná váha mosazi obsahující 62% mědi a 38% zinku podle objemu (čísla přesná)?

V následujících cvičeních počítejte podle návodu v poznámce na str. 63.

231. Základní arch normalisovaného formátu (značka A_0) má rozměry 841 mm, 1 189 mm. Vypočtěte jeho obsah!

232. Jakou částí hektaru je 1 akr, víte-li, že je to 4 046,848 m^2? Kolik akrů má 1 ha?

233. Kolikrát se otočí kolo o průměru 0,876 m na dráze 2,56 km dlouhé?

234. Řečištěm proteče za 1 vteř. 234 m^3 vody. Kolik za den; kolik za rok?

235. Kolik zrn je v 1 hl žita, jestliže 1 hl váží 69 kg a 20 g obsahuje 660 zrn?

236. Váží-li 1 cm^3 mořské vody 1,027 g, jaký je tlak na 1 cm^2 v hloubce 10 800 m (největší známá mořská hlubina)?

237. 1 sáh měří 1,896 m. a) Kolik m^2 má 1 čtvereční sáh? b) Kolik a má 1 korec (800 čtverečních sáhů)?

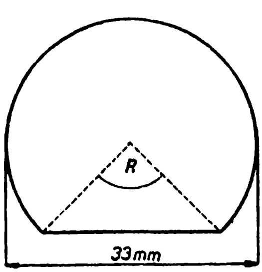
238. Kolik váží vzduch v místnosti o rozměrech 4,00 m, 3,70 m, 3,50 m, jestliže 1 l vzduchu váží 1,293 g?

239. a) Jak velká je strana čtverce, který má týž obsah jako kruh o poloměru 1 m? b) Jak velký je poloměr kruhu, který má týž obsah jako čtverec o straně 1 m?

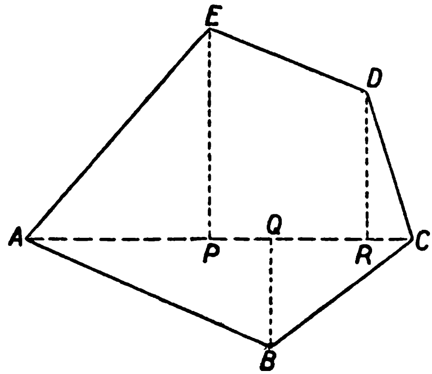
240. a) Jak velký je obsah kruhu, jehož obvod měří 1 m? b) Jak velký je obvod kruhu, jehož obsah je 1 m^2?

241. Vypočtěte povrch rotačního válce, jehož poloměr je 23,08 cm, výška 46,07 cm.

242. Kolik kg váží tyč z litiny 2,75 m dlouhá, jejíž průřez je znázorněn na obr. 5, je-li měrná váha litiny 7,5 g/cm^3?



Obr. 5



Obr. 6

243. Měření obsahu nepravidelných mnohoúhelníků se provádí tak, že se vede některá úhlopříčka, na niž se spustí z ostatních vrcholů kolmice. Při měření pozemku znázorněného na obr. 6 byla naměřena tato čísla: $\overline{AP} \doteq 24{,}6$ m, $\overline{AQ} \doteq 32{,}5$ m, $\overline{AR} \doteq 45{,}3$ m, $\overline{AC} \doteq 51{,}3$ m, $\overline{PE} \doteq 28{,}7$ m, $\overline{QB} \doteq 14{,}3$ m, $\overline{RD} \doteq 19{,}2$ m. Stanovte velikost pozemku!

*244. a) Kolik procent obsahu kruhu zaujímá pravidelný šestiúhelník, který je do něho vepsaný? b) Kolik procent obsahu pravidelného šestiúhelníka zaujímá kruh do něho vepsaný?

*245. a) Lokomotiva jedoucí rychlostí 70 km/hod zapískne ve vzdálenosti 1,2 km před stanicí, kterou projede bez zastávky. Za jak dlouho po tom okamžiku, kdy bylo ve stanici slyšet zapísknutí, projede lokomotiva stanicí? (Rychlost zvuku 340 m/sec.) b) Lokomotiva zapískne po druhé ve vzdálenosti 1,2 km za stanicí. Za jak dlouho po průjezdu je ve stanici slyšeti tento druhý signál?

***246.** Cyklista jede rychlostí 12,4 km/hod a dojede z města A do města B o 3 hod. 45 min. dříve, než touž vzdálenost urazí chodec, který kráčí rychlostí 4,6 km/hod. Určete vzdálenost obou měst!

V. Rovnice prvního stupně.

1. Pravidla pro řešení rovnic.

Dříve jsme se seznámili s rovnicemi a užili jsme jich k řešení různých úloh. I letos jsme se s nimi již setkali a nyní se jimi budeme zabývat soustavněji. Nejprve si vyložíme, co znamenají slova „řešiti rovnici".

Máme dva výrazy. Jeden z nich budiž $L = 4n - 3$ a druhý $P = 7n + 5$. Dosadíme-li za n libovolné číslo zcela náhodně zvolené, třeba $n = -2$, budou mít tyto dva výrazy hodnoty

$$L = 4\,.\,(-2) - 3 = -8 - 3 = -1{,}1$$
$$P = 7\,.\,(-2) + 5 = -14 + 5 = -9.$$

Tyto dvě hodnoty jsou různé. Dosadíme-li za n jiné libovolné číslo, budou obě hodnoty zpravidla rovněž různé. Dosadíme-li však $n = -\frac{8}{3}$, vyjde

$$L = 4\,.\,(-\tfrac{8}{3}) - 3 = -\tfrac{32}{3} - 3 = -\tfrac{41}{3},$$
$$P = 7\,.\,(-\tfrac{8}{3}) + 5 = -\tfrac{56}{3} + 5 = -\tfrac{41}{3}.$$

Pro $n = -\frac{8}{3}$ je $L = P$. Tím jsme vedeni k úloze určiti všecka taková čísla n, aby se oba výrazy L, P po dosazení těchto čísel na místo n sobě rovnaly. Tuto úlohu zapisujeme stručně ve tvaru, kterému říkáme **rovnice.** V našem případě to je

$$4n - 3 = 7n + 5.$$

Číslo n se nazývá **neznámá,** výrazy L, P se jmenují **levá a pravá strana** rovnice. Není nutno, aby neznámou obsahovaly obě strany rovnice.

Řešiti rovnici znamená nalézti všecka čísla, která je možno dosadit za neznámou, aby se po tomto dosazení obě strany rovnice navzájem rovnaly. (Říkáme, že tato čísla vyhovují dané rovnici.)

Číslo, které vyhovuje nějaké rovnici, nazývá se **řešením** nebo **kořenem** této rovnice. Podle toho rovnice $4n - 3 = 7n + 5$ má řešení (kořen) $n = -\frac{8}{3}$. Chceme-li se přesvědčit, je-li nějaké číslo řešením dané rovnice, provádíme zkoušku. Ta záleží v tom, že toto číslo dosadíme nejprve do levé strany dané rovnice; tím dostaneme nějaké číslo, které označíme a. Potom dosadíme totéž číslo do pravé strany rovnice; tím dostaneme jiné číslo, které označíme b. Je-li $a = b$, je dosazované číslo řešením rovnice.

Hledáme-li řešení dané rovnice, provádíme to tak, že místo dané rovnice píšeme postupně rovnice jiné, jednodušší, které mají totéž řešení jako daná rovnice. Užíváme přitom pravidel:

(1) **Řešení rovnice se nezmění, přičteme-li k oběma jejím stranám totéž číslo.**

(2) **Řešení rovnice se nezmění, násobíme-li obě její strany týmž číslem rozdílným od nuly.**

Místo abychom říkali: obě strany rovnice násobíme číslem p, říkáme často stručněji: r o v n i c i n á s o b í m e č í s l e m p.

Správnost pravidla (1) záleží na větách: Je-li $a = b$, je také $a + c = b + c$, kde c je zcela libovolné číslo. (Výrazy $a + c$, $b + c$ jsou totiž stejné, neboť oba jsou součty týchž čísel.) Také ovšem obráceně: je-li $a + c = b + c$, je také $a = b$, neboť výrazy $(a + c) - c = a$, $(b + c) - c = b$ jsou také stejné. Obě rovnosti $a = b$, $a + c = b + c$ značí tedy totéž. Kdykoliv je splněna jedna z nich, je splněna i druhá.

Podobně správnost pravidla (2) záleží na větách: Je-li $a = b$, je také $ac = bc$, kde c je zcela libovolné číslo. Výrazy ac, bc jsou stejné, neboť oba jsou součiny týchž dvou čísel. Platí to i pro $c = 0$?

Obráceně však je-li $ac = bc$, je $a = b$ jen tehdy, když $c \neq 0$, neboť výrazy $ac \cdot \frac{1}{c} = a$, $bc \cdot \frac{1}{c} = b$ lze utvořiti jen tehdy, když $c \neq 0$. Obě rovnosti $a = b$, $ac = bc$ značí totéž, jen když $c \neq 0$.

Jak se těchto pravidel užívá, ukážeme na příkladech:

1. Pro které n je splněna rovnice

$$4n - 3 = 7n + 5?$$

K oběma stranám přičteme číslo 3. Dostaneme rovnici:

$$4n = 7n + 8,$$

která má totéž řešení jako rovnice daná. Nyní přičteme k oběma stranám číslo $-7n$. Vyjde rovnice

$$-3n = 8,$$

která má opět totéž řešení. Obě strany násobíme číslem $-\frac{1}{3}$, které je rozdílné od nuly. Výsledek je

$$n = -\frac{8}{3},$$

což je řešení dané rovnice. O správnosti se přesvědčíme tím, že provedeme zkoušku. Vypočtenou hodnotu $n = -\frac{8}{3}$ dosadíme nejprve do levé strany a pak do pravé strany dané rovnice:

$$L = 4 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) - 3 = -\frac{32}{3} - 3 = -\frac{41}{3};$$
$$P = 7 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 5 = -\frac{56}{3} + 5 = -\frac{41}{3}.$$

Na levé straně vyšlo totéž číslo jako na pravé. Počítali jsme tedy správně.

Z vyslovených pravidel o dovolených úpravách rovnic vyplývají další pravidla, kterých užíváte často docela mechanicky:

(3) Kterýkoli člen rovnice lze převésti na druhou její stranu s touž absolutní hodnotou a s opačným znaménkem. Na př.: $2x - 3 = 5$; $2x = 5 + 3$.

(4) Činitel jedné strany rovnice, který je **rozdílný od nuly,** se převádí na druhou stranu rovnice jako dělitel (jmenovatel) a naopak dělitel (jmenovatel) jedné strany rovnice, který je **rozdílný od nuly,** se převádí na druhou stranu rovnice jako činitel.

Příklady:

$$-2x = 5;\ x = \frac{5}{-2};\ \text{nebo}\ \frac{x}{-3} = 4;\ x = 4 \cdot (-3).$$

(5) Dva stejné členy na obou stranách rovnice se **ruší.**

$$3x - x = 5 - x,$$
$$3x = 5.$$

(6) Dva stejní činitelé obou stran rovnice, kteří jsou **rozdílní od nuly,** se **krátí.**

$$3(x + 7) = 3(2x - 2),$$
$$x + 7 = 2x - 2.$$

Jestliže se na některé straně rovnice **ruší** všechny členy, dostaneme po jejich zrušení **nulu.** Jestliže se na některé straně rovnice **krátí** všichni činitelé, dostaneme po jejich zkrácení jednotku. Neplečte oba názvy!

2. $$(a - 2)(a - 7) = (a + 3)(a + 4).$$

Provedeme-li na obou stranách naznačené součiny, vyjde

$$a^2 - 2a - 7a + 14 = a^2 + 3a + 4a + 12.$$

Členy a^2 se ruší. Převedeme-li zbývající členy s neznámou na levou stranu a ostatní členy na pravou, dostaneme

$$-2a - 7a - 3a - 4a = 12 - 14$$

a po sloučení

$$-16a = -2.$$

Činitele -16 převedeme na pravou stranu jako jmenovatele

$$a = \frac{-2}{-16}$$

a po krácení zlomku číslem -2 dostaneme

$$a = \tfrac{1}{8}.$$

Zkouška:

$$L = (\tfrac{1}{8} - 2)(\tfrac{1}{8} - 7) = -\tfrac{15}{8} \cdot (-\tfrac{55}{8}) = \tfrac{825}{64};$$
$$P = (\tfrac{1}{8} + 3)(\tfrac{1}{8} + 4) = \tfrac{25}{8} \cdot \tfrac{33}{8} = \tfrac{825}{64}.$$

Jsou-li v rovnici zlomky, použijeme pravidla (2) a násobíme ji takovým číslem rozdílným od nuly, abychom tím jmenovatele odstranili.

Jestliže zlomky obsahují neznámou, třeba předem z řešení vyloučit ty hodnoty neznámé, pro něž se některý jmenovatel stává rovným nule.

3. $$\frac{5z + 7}{2} - \frac{2z - 7}{3} = 3z + 9.$$

Rovnici násobíme šesti. Tím se odstraní zlomky. Vyjde

$$15z + 21 - 4z + 14 = 18z + 54$$
$$-7z = 19$$
$$z = -\tfrac{19}{7}.$$

Proveďte podrobně! Zkouška:

$$L = \frac{-\frac{95}{7} + 7}{2} - \frac{-\frac{38}{7} - 7}{3} = -\tfrac{23}{7} + \tfrac{29}{7} = \tfrac{6}{7};$$
$$P = -\tfrac{57}{7} + 9 = \tfrac{6}{7}.$$

4. $$\frac{1}{4g} - \frac{1}{3g} = 1,\ g \neq 0,$$

Proč připisujeme $g \neq 0$? Rovnici násobíme číslem $12g$. To smíme, neboť $12g \neq 0$. Vyjde rovnice

$$3 - 4 = 12g$$
$$-\tfrac{1}{12} = g.$$

Zkouška:

$$L = \tfrac{1}{4} \cdot (-12) - \tfrac{1}{3} \cdot (-12) = -3 + 4 = 1,$$
$$P = 1.$$

5. $$\frac{2c - 1}{c - 1} + \frac{2c - 3}{c - 3} = 4,\ c \neq 1,\ c \neq 3.$$

Rovnici násobíme součinem $(c - 1)(c - 3)$, který je rozdílný od nuly. Nezapomeňte násobit také pravou stranu rovnice! Dostaneme

$$(2c - 1)(c - 3) + (2c - 3)(c - 1) = 4(c - 1)(c - 3).$$

Po další úpravě vyjde řešení $c = \frac{3}{2}$. Zkouškou se přesvědčíme, že $c = \frac{3}{2}$ je skutečně řešením dané rovnice.

Nyní si ukážeme dva příklady, kdy daná rovnice nemá řešení.

1. $$\frac{2}{(r + 3)(r + 4)} + \frac{3}{(r + 4)(r + 5)} = \frac{4}{(r + 3)(r + 5)}.$$

Aby rovnice měla smysl, musí být $r \neq -3$, $r \neq -4$, $r \neq -5$. Zlomky odstraníme tím, že rovnici násobíme součinem

$$(r + 3)(r + 4)(r + 5),$$

který je rozdílný od nuly. Dostaneme

$$2(r + 5) + 3(r + 3) = 4(r + 4)$$
$$2r + 10 + 3r + 9 = 4r + 16$$
$$r = -3.$$

Vypočetli jsme $r = -3$, což však nemůže být řešením dané rovnice, neboť je to právě jedna z hodnot, které byly předem vyloučeny. Daná rovnice tedy nemá řešení.

2. $$\frac{1}{d - 2} = \frac{2}{d - 3} - \frac{1}{d - 4},\ d \neq 2,\ d \neq 3,\ d \neq 4.$$

Zlomky odstraníme tak, že rovnici násobíme součinem

$$(d - 2)(d - 3)(d - 4).$$

Vyjde rovnice

$$(d - 3)(d - 4) = 2(d - 2)(d - 4) - (d - 2)(d - 3)$$

$$d^2 - 3d - 4d + 12 = 2d^2 - 4d - 8d + 16 - d^2 + 2d + 3d - 6$$

$$0 = -2.$$

To je zřejmě nesprávné. Nelze nalézti žádné d, pro které by bylo $0 = -2$; proto daná rovnice nemá řešení.

3. $\dfrac{1}{u(u-1)} + \dfrac{1}{u(u+1)} = \dfrac{2}{u^2 - 1}$, $u \neq 0$, $u \neq 1$, $u \neq -1$.

K odstranění zlomků třeba násobiti součinem $u(u - 1)(u + 1)$. Dostaneme

$$u + 1 + u - 1 = 2u$$

$$0 = 0.$$

To je správné a není závislé na volbě čísla u. Lze tedy za u voliti zcela libovolné číslo kromě $u = 0$, $u = 1$, $u = -1$, které byly výše vyloučeny. Rovnice má tedy nekonečně mnoho řešení. O správnosti se přesvědčíme, dosadíme-li za u po každé jiné číslo.

Cvičení.

Řešte následující rovnice; v každém příkladě provádějte zkoušku:

247. $5u - 8 = 8u - 5$.

248. $4t - 2 = 9t + 16$.

249. $5(3x - 7) - 3(4x + 9) - 4(2x - 3) = 0$.

250. $2(m - 1) - 3(m - 2) + 4(m - 3) - 5(m - 4) = 6(m - 5)$.

251. $(z - 2)(z - 3) = (z - 4)(z - 5)$.

252. $(3v - 2)^2 + (4v - 3)^2 = (5v - 4)^2$.

253. $(2a + 3)(a - 1) + (2a - 3)(a + 2) = (2a + 3)(2a - 3)$.

254. $(p - 1)(p - 2) - (p - 2)(p - 3) + (p - 3)(p - 4) - (p - 4)(p - 5) = 0$.

255. $(r - 1)(r - 4)^2 = (r - 3)^3$.

256. $\dfrac{b-2}{2} + \dfrac{b-3}{3} + \dfrac{b-4}{4} + \dfrac{b-6}{6} = 0$.

257. $\dfrac{3k-4}{5} - \dfrac{3-4k}{7} = \dfrac{5k-6}{10} - \dfrac{9-10k}{14}$

258. $\dfrac{4y-9}{10} - \dfrac{y-5}{5} = \dfrac{7y+1}{25} - \dfrac{y-3}{20}$.

259. $\frac{2d-1}{4}-\frac{3d-5}{6}=d-\frac{13}{12}$.

260. $h-2-\frac{3(h+2)}{2}=\frac{3(2h+1)}{4}-\frac{5(2h-1)}{8}$.

261. $\frac{v(2v-1)}{2}-\frac{v(3v-1)}{3}=\frac{3-2v}{12}$.

262. $\frac{1}{t}-\frac{2}{3t}=\frac{1}{2}$.

263. $\frac{1}{4c}+\frac{1}{6c}-\frac{3}{8c}=2$.

264. $\frac{7}{u}+\frac{1}{3}=\frac{23-u}{3u}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4u}$.

265. $q+1+\frac{1}{3q}=\frac{(q+1)^2}{q}+\frac{1}{3}$.

266. $\frac{3v+1}{5v-2}=3$.

267. $\frac{3m-4}{3-4m}+\frac{5}{2}=0$.

268. $\frac{2f-3}{3f+1}-\frac{3f-1}{3f+1}=\frac{1}{4}$.

269. $h+\frac{1}{h-2}=\frac{(h-1)^2}{h-2}$.

270. $\frac{1}{2}-\frac{3}{s+3}=\frac{5}{2(s+3)}-1$.

271. $\frac{a+1}{a}+\frac{(a+1)^2}{a^2}-\frac{(a+1)^3}{a^3}=1$.

272. $\frac{k+2}{2k+2}-\frac{k+4}{4k+4}=1$.

273. $\frac{5r+3}{4r-5}+\frac{2r-1}{5-4r}=\frac{1}{2}$.

274. $\frac{2z-3}{3z-2}=\frac{2z+3}{3z+2}$.

275. $\frac{b+2}{b+4}-\frac{3b+4}{3b+2}=0$.

276. $\frac{h+2}{h+3}+\frac{h+3}{h+4}=2$.

*277. $\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-3}=\frac{3z-10}{(z-3)(z-2)}$.

*278. $\frac{3}{3x-1}-\frac{5}{3x+1}=\frac{3x+2}{9x^2-1}$.

*279. $\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}=\frac{2}{1-s^2}$.

*280. $\frac{p+2}{p-2}+\frac{p-2}{p+2}=\frac{p^2+2p+8}{p^2-4}+1$.

*281. $\frac{1}{y^2+y}+\frac{1}{y^2-y}=\frac{1}{y^2-1}$.

*282. $\frac{n+1}{n^3-n^2}-\frac{1}{n^2-n}+\frac{3}{n-n^3}=0$.

2. Rovnice, které obsahují vedle neznámé další písmena.

Stejným způsobem se řeší i rovnice, v nichž se vedle neznámé vyskytují další písmena. Abychom takovou rovnici mohli řešit, musí být ovšem řečeno, které písmeno máme považovati za neznámou. Ostatní písmena pak považujeme za čísla daná.

1. *úloha.*

Řešte rovnici

$$4x+3y=10,$$

v níž je neznámá označena písmenem x. Člen s neznámou ponecháme na levé straně a ostatní členy převedeme na pravou. Dostaneme

$$4x = 10 - 3y.$$

Rovnici dělíme číslem 4, takže řešení jest

$$x = \frac{10 - 3y}{4}.$$

Zkouška:

$$L = 4 \, . \, \frac{10 - 3y}{4} + 3y = 10 - 3y + 3y = 10; \; P = 10.$$

Říkáme, že jsme rovnici řešili podle x. Lze ji však také řešit podle y, t. j. lze v dané rovnici považovati y za neznámou a x za dané číslo. Pak ji řešíme takto:

$$3y = 10 - 4x,$$

$$y = \frac{10 - 4x}{3}.$$

Proveďte zkoušku!

2. *úloha.*

$$(a - z)(1 - z) = z^2 - a.$$

Neznámá je a. Proveďme naznačené násobení

$$a - z - az + z^2 = z^2 - a.$$

Členy s neznámou převedeme na levou stranu a ostatní členy na pravou, při čemž ihned slučujeme, co lze:

$$2a - az = z.$$

Nyní je třeba **upraviti levou stranu v součin,** jehož jedním činitelem je neznámá a, abychom pak mohli tuto neznámou vypočísti. Toho dosáhneme, když na levé straně vytkneme společného činitele a před závorky. Dostaneme rovnici

$$a(2 - z) = z.$$

Musíme rozeznávati dva případy:

a) Je-li $2 - z \neq 0$, lze rovnici dělit číslem $2 - z$, takže

$$a = \frac{z}{2 - z}.$$

Zkouška:

$$L = \left(\frac{z}{2-z} - z\right)(1-z) = \frac{z - 2z + z^2}{2-z}(1-z) = \frac{(z^2-z)(1-z)}{2-z} =$$

$$= -\frac{z(1-z)^2}{2-z};$$

$$P = z^2 - \frac{z}{2-z} = \frac{2z^2 - z^3 - z}{2-z} = \frac{-z(z^2-2z+1)}{2-z} = -\frac{z(z-1)^2}{2-z}.$$

b) Je-li $2 - z = 0$, čili $z = 2$, máme rovnici

$$a \,.\, 0 = 2,$$

jíž nelze vyhověti pro žádné a. Dosadíme-li za a kterékoli číslo, je levá strana $a \,.\, 0 = 0$ a nikoli $a \,.\, 0 = 2$, jak žádá naše rovnice.

Máme tedy výsledek: Daná rovnice má řešení toliko pro $z \neq 2$, a to

$$a = \frac{z}{2-z}.$$

3. *úloha.* (Rozbor rovnice 1. stupně o jedné neznámé.)

Rovnici

$$aM = N,$$

kde a je neznámá, M, N jsou výrazy utvořené buď z určitých čísel nebo z písmen, nazýváme **rovnice 1. stupně o jedné neznámé.** Při jejím řešení mohou nastati celkem tři různé případy:

a) $M \neq 0$. Pak má rovnice **jediné řešení**

$$a = \frac{N}{M}.$$

b) $M = 0$, $N \neq 0$. Pak má rovnice tvar

$$a \,.\, 0 = N.$$

Taková rovnice **řešení nemá,** neboť nelze udat číslo a tak, aby $a \,.\, 0$ bylo rozdílné od nuly.

c) $M = 0$, $N = 0$. Pak má rovnice tvar

$$a \,.\, 0 = 0.$$

Tato rovnice má **nekonečně mnoho řešení,** neboť jí vyhovuje kterékoli číslo; dosadíme-li za a cokoliv, je vždy $a \,.\, 0 = 0$.

Při řešení rovnic nesmíme zapomenout vyšetřit všecky možnosti, které mohou nastati, neboť teprve potom je řešení rovnice úplné. Říkáme, že provádíme **rozbor** dané rovnice.

Cvičení.

U každé úlohy proveďte úplný rozbor řešení.

283. $a - b = c$, neznámá a) a; b) b.

284. $5(u + v - 1) = 3(u - v + 1)$, neznámá a) u; b) v.

285. $az + bz = 1$, neznámá z.

286. $x(y - 6) + y(x + 4) = 12$, neznámá a) x; b) y.

287. $(r - 1)(s - 1) = 1$, neznámá a) r; b) s.

288. $(m + 1)(n + 1) = 2mn$, neznámá a) m; b) n.

289. $(rs + 1)(r - s) - (rs - 1)(r + s) + 2(r + 1)(s^2 - 1) = 0$, neznámá r.

290. $(b + c)(a - b - c) = (a + b - c) . b + (a + b) . c - b^2 - (b + c)^2$, neznámá a.

291. $(p + 1)(q - p) + (p - 1)(q + 1) + (p - 1)^2 = 0$, neznámá q.

292. $(a - 2)[x - (a + 5)] = 3(3 - a) - x$, neznámá x.

3. Soustava rovnic o dvou neznámých.

A) Rovnice o dvou neznámých.

Všimněme si blíže rovnice

$$4x + 3y = 10,$$

kterou jsme již probírali v úloze 1. z předchozího odstavce. Tam jsme ji řešili podle x a zjistili jsme, že

$$x = \frac{10 - 3y}{4}.$$

To znamená, že číslu y můžeme udělit zcela libovolnou hodnotu a podle toho dostaneme příslušné x. Na příklad pro $y = 2$ dostaneme $x = 1$, pro $y = 1$ dostaneme $x = \frac{7}{4}$ a tak lze pokračovat dále.

Považujeme-li obě čísla x a y za neznámé, rozumíme řešením dané rovnice každou dvojici čísel x, y, která rovnici vyhovují. Takovým řešením je na př. $x = 1$, $y = 2$. Jiným řešením dané rovnice je dvojice $x = \frac{7}{4}$, $y = 1$. Daná rovnice má **nekonečný počet řešení**. Tato řešení dostaneme tak, když za jednu neznámou (v našem případě to bylo y) zvolíme všecky možné hodnoty a ke každé zvolené hodnotě určíme příslušnou hodnotu druhé neznámé.

Poznámka. Danou rovnici lze však také řešiti podle y. Dostaneme

$$y = \frac{10 - 4x}{3}.$$

Dosadíme-li $x = 1$, dostaneme $y = 2$; dosadíme-li $x = \frac{1}{4}$, dostaneme $y = 1$ atd. Je tedy lhostejné, kterou neznámou volíme libovolně; po každé dostáváme táž řešení.

Rovnicím tvaru $4x + 3y = 10$; $5x - 2y = 7$; $x - 3y = 0$; obecně: $ax + by = c$, kde písmena a, b, c znamenají daná čísla, říkáme rovnice **1. stupně o dvou neznámých.** Řešením takových rovnic je vhodná dvojice čísel x, y. Každá rovnice o dvou neznámých má nekonečný počet řešení. Všechna řešení dostaneme tak, když za jednu neznámou dosadíme všecka určitá čísla a druhou neznámou pak z rovnice vypočteme.

Pravidla odvozená pro řešení rovnice o jedné neznámé platí i pro rovnice o dvou neznámých se všemi svými důsledky.

B) Řešení soustavy rovnic o dvou neznámých dosazovacím způsobem.

Vedle rovnice

$$4x + 3y = 10 \qquad \text{(a)}$$

vezměme v úvahu ještě druhou rovnici prvého stupně o týchž dvou neznámých, třeba

$$3x - 5y = -7. \qquad \text{(b)}$$

Pak mluvíme o **soustavě dvou rovnic 1. stupně o dvou neznámých.** Jak jsme právě viděli, má každá taková rovnice sama o sobě nekonečně mnoho řešení. Lze najíti taková dvě určitá čísla, aby bylo současně vyhověno oběma rovnicím, když tato čísla dosadíme na místo neznámých? Každou dvojici čísel, která vyhovuje oběma rovnicím současně, budeme nazývati **řešením dané soustavy.** Máme tedy úlohu zkoumati, zda má daná soustava řešení, a v případě, že řešení má, určiti všecka její řešení.

Podle dřívějšího výkladu je každá dvojice čísel x, y, kde

$$x = \frac{10 - 3y}{4},$$

řešením rovnice (a). Aby dvojice

$$x = \frac{10 - 3y}{4}, \; y$$

byla řešením rovnice (b)

$$3x - 5y = -7,$$

musí platit $$3 \cdot \frac{10 - 3y}{4} - 5y = -7. \tag{c}$$

Musíme tedy určit y tak, aby byla splněna podmínka vyjádřená rovnicí (c). To však není nic jiného než rovnice o jedné neznámé y; z ní plyne

$$\begin{aligned} 30 - 9y - 20y &= -28, \\ -29y &= -58, \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Tomu odpovídá $x = \frac{10 - 3 \cdot 2}{4} = 1$. Dvojice čísel $x = 1$, $y = 2$ jest řešením dané soustavy. Zkouška:

rovnice (a)

$$L = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10, P = 10;$$

rovnice (b)

$$L = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = 3 - 10 = -7, P = -7.$$

Popsaný postup nazýváme **dosazovacím způsobem** při řešení soustavy dvou rovnic 1. stupně o dvou neznámých, neboť spočívá v tom, že z některé rovnice soustavy vypočteme jednu neznámou pomocí druhé neznámé a tuto hodnotu **dosadíme** do rovnice druhé. Vypočetli jsme zde neznámou x z rovnice (a) a dosadili jsme ji do rovnice (b). Tím vyjde rovnice o jedné neznámé (v našem případě to byla rovnice (c) s neznámou y), kterou řešíme obvyklým způsobem. Říkáme, že jsme jednu neznámou ze soustavy **vyloučili (eliminovali)** dosazením. Hodnotu druhé neznámé pak vypočteme tak, že nalezenou hodnotu dosadíme do některé z daných rovnic (nebo do některé rovnice, která z nich vznikla).

Poznámka. Ježto máme celkem dvě rovnice a v každé dvě neznámé, lze při dosazovacím způsobu řešení vypočísti kteroukoli neznámou z kterékoli rovnice. Lze tedy danou soustavu řešiti způsobem dosazovacím celkem čtyřmi různými cestami. Proveďte je všechny a porovnejte je!

1. *úloha.*

Řešte soustavu rovnic:

$$\frac{2a + 5b}{3} = \frac{4a - 3b}{2} + 3, \qquad \frac{5a - 2b}{5} = \frac{2a - b}{3} + 1.$$

Než budeme soustavu řešit, upravíme ji na nejjednodušší tvar. Odstraníme zlomky tím, že prvou rovnici násobíme šesti a druhou patnácti. Vyjde soustava

$$4a + 10b = 12a - 9b + 18,$$
$$15a - 6b = 10a - 5b + 15.$$

Nyní převedeme členy s neznámými na jednu stranu a sloučíme

$$-8a + 19b = 18, \tag{1}$$
$$5a - b = 15. \tag{2}$$

Teprve tuto soustavu budeme řešiti způsobem dosazovacím. Nejjednodušší je vypočísti b z rovnice (2). Proč je to nejjednodušší? Z rovnice (2) plyne

$$b = 5a - 15,$$

což dosazeno do rovnice (1) dá

$$-8a + 95a - 285 = 18,$$
$$87a = 303,$$
$$a = \tfrac{303}{87} = \tfrac{101}{29} = 3\tfrac{14}{29}.$$

Pak $b = 5a - 15 = \dfrac{505}{29} - 15 = \dfrac{505 - 435}{29} = \dfrac{70}{29} = 2\dfrac{12}{29}$. Proveďte zkoušku!

I u soustavy dvou rovnic o dvou neznámých se může stát, že soustava má nekonečně mnoho řešení nebo nemá žádné.

2. *úloha.*

$$ax + y = 1, \tag{1}$$
$$x + ay = 1, \tag{2}$$

kde a znamená dané číslo, x, y jsou neznámé. Z rovnice (1) vypočteme

$$y = 1 - ax, \tag{3}$$

což dosadíme do rovnice (2); vyjde

$$x + a(1 - ax) = 1$$

a po úpravě

$$(1 - a^2)\,x = 1 - a. \tag{4}$$

Jestliže předně je $a \neq 1$, $a \neq -1$, jest $a^2 \neq 1$, tedy $1 - a^2 \neq 0$ a ze (4) dostaneme

$$x = \frac{1-a}{1-a^2} = \frac{1-a}{(1+a)(1-a)} = \frac{1}{1+a},$$

načež z (3) máme

$$y = 1 - \frac{a}{1 + a} = \frac{1}{1 + a},$$

a soustava (1), (2) má **jediné řešení**

$$x = \frac{1}{1 + a}, \quad y = \frac{1}{1 + a}. \tag{5}$$

Přesvědčte se o správnosti tohoto řešení dosazením hodnot (5) do rovnic (1), (2).

Jestliže za druhé je $a = 1$, rovnice (4) zní

$$0 \,.\, x = 0,$$

což je správné pro **každé** x. Ze (3) dostaneme $y = 1 - x$; soustava (1), (2) má řešení

$$x = x, \quad y = 1 - x,$$

kde 1 je **zcela libovolné číslo.**

Jestliže za třetí je $a = -1$, rovnice (4) zní

$$0 \,.\, x = 2,$$

což není správné pro **žádné** x. Soustava (1), (2) nemá v tomto případě vůbec řešení.

C) Řešení soustavy rovnic o dvou neznámých sčítacím způsobem.

Vezměme opět soustavu dvou rovnic 1. stupně, třeba soustavu

$$4x + 3y = 10, \tag{1}$$

$$3x - 5y = -7, \tag{2}$$

kterou jsme již řešili dříve. Připomeňme si, že řešením soustavy (1), (2) rozumíme dvojici čísel x; y, která vyhovuje rovnici (1) i rovnici (2).

Můžeme si sestavit další rovnice, kterým vyhovuje táž dvojice x, y. Takovou rovnicí je na př. rovnice

$$(4x + 3y) + (3x - 5y) = 10 - 7$$

neboli

$$7x - 2y = 3. \tag{3}$$

Levá strana rovnice (3) je součet levých stran rovnic (1) a (2); pravá strana rovnice (3) je součet pravých stran týchž rovnic. Říkáme, že rovnice (3) vznikne sečtením obou rovnic (1) a (2).

Jinou takovou rovnicí je třeba rovnice $7(4x + 3y) = 7 \,.\, 10$ neboli

$$28x + 21y = 70. \tag{4}$$

Levá strana rovnice (4) je sedminásobek levé strany rovnice (1) a pravá strana rovnice (4) je sedminásobek pravé strany téže rovnice (1). Říkáme, že rovnice (4) vznikne, jestliže rovnici (1) **znásobíme číslem** 7.

Sčítací způsob řešení soustavy dvou rovnic záleží v tom, že každou z obou rovnic znásobíme nějakým číslem, při čemž ta čísla volíme tak, abychom z obou nových (znásobením vzniklých) rovnic sečtením dostali rovnici, ze které jedna neznámá vypadne.

Říkáme potom, že jsme jednu neznámou ze soustavy (1), (2) vyloučili sčítáním.

Znásobme tedy rovnici (1) číslem 5 a rovnici (2) číslem 3. Násobení si vyznačíme tak, že tato čísla napíšeme vpravo od napsaných rovnic a oddělíme je od soustavy svislou čarou:

$$\begin{array}{rl|l} 4x + 3y = & 10 & 5, \\ 3x - 5y = & -7 & 3. \end{array}$$

Vyjde soustava rovnic:

$$20x + 15y = 50, \tag{5}$$

$$9x - 15y = -21. \tag{6}$$

Tato soustava rovnic (5) a (6) má totéž řešení jako soustava (1) a (2), neboť každé řešení rovnice (1) je také řešením rovnice (5) a každé řešení rovnice (2) je také řešením rovnice (6).

Sečteme-li obě rovnice (5) a (6), dostaneme novou rovnici. Tato rovnice má totéž řešení jako soustava rovnic (5) a (6), jak jsme si řekli hned na začátku tohoto odstavce.

Sečteme:

$$(20x + 15y) + (9x - 15y) = 50 - 21,$$

čili

$$29x = 29, \tag{7}$$

z níž vychází, že $x = 1$. To znamená, že řešení soustavy (5) a (6), a tedy také soustavy dané (1) a (2), má tu vlastnost, že pro ně $x = 1$.

Není tomu naopak; libovolně zvolená dvojice $x = 1$, y, která vyhovuje rovnici (7), nemusí být řešením dané soustavy (zvolte $y = 3$ a přesvědčte se).

Čísla 5 a 3, kterými jsme násobili rovnice (1) a (2), zvolili jsme tak proto, aby se po sečtení znásobených rovnic členy obsahující neznámou y zrušily. (Součinitel v rovnici (1) při y byl 3, součinitel při y v rovnici (2) byl —5.)

Týmž způsobem lze také vyloučit neznámou x. Stačí násobit rovnici (1) číslem 3, rovnici (2) číslem — 4, neboť součinitel při x v rovnici (1) je 4, v rovnici (2) je 3. Vyznačíme to nalevo od napsaných rovnic:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4x + 3y = 10, \\ -4 & 3x - 5y = -7. \end{array}$$

Násobením vznikne soustava rovnic:

$$12x + 9y = 30, \tag{8}$$

$$-12x + 20y = 28 \tag{9}$$

a jejich sečtením dostaneme rovnici

$$29y = 58, \tag{10}$$

z níž plyne $y = 2$. Každé řešení soustavy (1), (2), a tedy také soustavy (8) a (9), je současně řešením rovnice (10), t. j. má tu vlastnost, že pro ně $y = 2$.

Spojíme-li oba výsledky, shledáme, že soustava (1), (2) má řešení $x = 1$, $y = 2$ v souhlase s tím, co jsme již dříve nalezli.

Při praktickém provádění nebudeme psát pomocné soustavy (5), (6) a (8), (9), nýbrž součinitele rovnic (1) a (2) budeme násobit čísly stranou vyznačenými zpravidla zpaměti a vzniklé součiny hned sečteme.

Kdyby šlo o tak složité výpočty, že bychom je zpaměti nemohli provésti, provedeme je stranou. Bude tedy zápis řešení soustavy (1),(2) vypadat takto:

$$\begin{array}{r|rcr|l} 3 & 4x + 3y & = & 10 & 5 \\ -4 & 3x - 5y & = & -7 & 3 \\ \hline & 29x & = & 29 & \\ & 29y & = & 58 & \\ \hline & x & = & 1 & \\ & y & = & 2 & \end{array}$$

Je úsporné voliti čísla, jimiž dané rovnice násobíme, tak, aby společný součinitel u vyloučené neznámé v obou rovnicích byl co nejmenší. Jaký bude tedy tento součinitel? (Bude roven nejmenšímu společnému násobku součinitelů u příslušné neznámé v obou rovnicích. Vyložte podrobně proč.)

Poznámka. Protože každé řešení rovnice (7) nemusí být řešením rovnic (1) a (2), je třeba přesvědčit se zkouškou o tom, zda nalezené hodnoty daným rovnicím skutečně vyhovují. Proveďte to!

Cvičení.

Řešte následující soustavy rovnic a vždy provádějte zkoušku! Uvažujte, který způsob řešení je nejvhodnější.

293. $p + q = 13,$
$p - q = 17.$

294. $a + 2b = 5,$
$2a + b = 7.$

295. $5z - 3t = 1,$
$7z + 3t = 5.$

296. $v + 15x = -5,$
$3v - 5x = 7.$

297. $2m - 3n = 8,$
$6m + 9n = 10.$

298. $6r - 10s = -12,$
$-9r + 25s = -8.$

299. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}c = 11,$
$\frac{1}{3}a + \frac{1}{5}c = 7.$

300. $2u + \frac{1}{2}z = -7,$
$\frac{1}{3}u - 3z = 5.$

301. $0{,}4r - 0{,}7s = 5{,}3,$
$1{,}2r - 3{,}5s = 3{,}3.$

302. $1{,}36k + 0{,}12m = 1,$
$0{,}28k + 0{,}76m = 1.$

303. $5(f + g) - 3(f - g) = 2,$
$5(2f - g) - 3(f - 3g) = 3.$

304. $(v + 3)(t - 1) = (v - 3)(t + 1),$
$(v - 2)(t + 1) = (v + 1)(t - 3).$

305. $(y + z + 1)(y + z + 2) = (y + z + 3)(y + z + 4),$
$(y - z - 1)(y - z - 2) = (y - z - 3)(y - z - 4).$

306. $p^2 + r^2 = (p + 1)^2 + (r + 1)^2,$
$p^2 + r^2 = (p - 1)^2 + (r - 1)^2.$

307. $(h - 1)^2 - (k - 2)^2 = (h - 3)^2 - (k - 4)^2,$
$(h - 4)^2 + (k - 3)^2 = (h - 2)^2 + (k - 1)^2.$

308. $\dfrac{u + 1}{4} + \dfrac{v + 2}{3} = 1, \quad \dfrac{u - 2}{3} - \dfrac{v - 1}{4} = 1.$

309. $b = \dfrac{2d + 3}{4}, \quad d = \dfrac{3b - 4}{5}.$

310. $\dfrac{3e + 4f}{2} - \dfrac{4e - 7f}{4} = 1, \quad \dfrac{4e - 3f}{6} - \dfrac{14e - 9f}{4} = 2.$

311. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 7, \quad \dfrac{7(x + y - 21)}{2} = \dfrac{3y - 2x + 42}{2}.$

312. $\dfrac{2m - 3n + 1}{6} = \dfrac{3m - 8n}{4} + \dfrac{1}{9}, \quad \dfrac{2m + 3n + 2}{6} = \dfrac{5m - n}{10} - \dfrac{1}{15}.$

4. Slovní úlohy.

Již dříve jste řešívali některé slovní úlohy pomocí rovnic. Také rovnic o dvou neznámých lze užíti k řešení slovních úloh.

Chceme-li použíti rovnic o dvou neznámých, musíme mít na paměti, že k určení dvou neznámých potřebujeme dvou rovnic. Musíme tedy z údajů úlohy sestaviti dvě rovnice. Nezáleží však na tom, řešíme-li úlohu s pomocí jedné nebo dvou neznámých; hlavní věc je, abychom ji správně rozřešili. Některé úlohy se řeší snáze, použijeme-li dvou neznámých, jiné opět jen s jednou neznámou.

1. úloha.

Nalezněte dvojciferné číslo, o němž víte, že součet obou jeho číslic je 8 a že toto číslo je o 36 větší než číslo, které vznikne, zaměníme-li pořádek obou číslic.

a) Řešení rovnicí o jedné neznámé.

Dané číslo má na místě desítek číslici d, na místě jednotek pak musí mít číslici $8 - d$, neboť součet obou číslic je 8. Je tedy hledané číslo

$$10d + (8 - d).$$

Číslo, které vznikne záměnou pořádku číslic, má na místě desítek číslici $8 - d$ a na místě jednotek číslici d. Je to tedy číslo

$$10(8 - d) + d$$

a je o 36 menší než číslo hledané. Proto hledané číslo je

$$10(8 - d) + d + 36.$$

To vede k rovnici

$$10d + (8 - d) = 10(8 - d) + d + 36.$$

Rozřešíme-li tuto rovnici, dostaneme $d = 6$. Na místě jednotek pak bude číslice $8 - 6 = 2$. Dostali jsme dvě čísla kladná celá a menší než 10, lze je tedy považovati za číslice; hledané číslo je 62.

Zkouška: Součet číslic je $6 + 2 = 8$; číslo se zaměněným pořádkem číslic je 26 a $62 - 26 = 36$. Nalezené číslo je vskutku o 36 větší než číslo se zaměněným pořádkem číslic.

Bylo by ovšem také možno za neznámou zvoliti číslici stojící na místě jednotek. Výpočet by byl zcela obdobný. Proveďte jej!

b) Řešení soustavou dvou rovnic o dvou neznámých.

Hledané číslo nechť má na místě jednotek číslici j a na místě desítek číslici d. Jejich součet je podle znění úlohy 8, t. j.

$$j + d = 8.$$

Hledané číslo je $10d + j$; číslo vzniklé záměnou pořádku číslic je $10j + d$. Prvé číslo je o 36 větší, je tedy rovno $10j + d + 36$, takže druhá rovnice je

$$10d + j = 10j + d + 36.$$

Upravíme-li druhou rovnici, dostaneme soustavu

$$j + d = 8,$$
$$d - j = 4.$$

Ta má řešení $d = 6$, $j = 2$; hledané číslo je 62, totéž jako dříve.

2. *úloha.*

Mezi místy A a B je kopec. Cyklista jede do kopce rychlostí 10 km/hod, s kopce rychlostí 30 km/hod. K tomu, aby dojel z A do B, potřebuje 4 hod. 20 min.; k tomu, aby dojel z B do A, potřebuje 5 hod. Kolik km stoupání a kolik km klesání je ve směru z A do B?

a) Řešení soustavou dvou rovnic o dvou neznámých.

Z místa A do B je s km stoupání a k km klesání.

Z místa B do A je k km stoupání a s km klesání.

Doba potřebná k projetí trati z A do B je $\left(\frac{s}{10} + \frac{k}{30}\right)$ hod.

Doba potřebná k projetí trati z B do A je $\left(\frac{k}{10} + \frac{s}{30}\right)$ hod.

Proč?

Odtud plyne soustava rovnic

$$\frac{s}{10} + \frac{k}{30} = 4\frac{20}{60},$$

$$\frac{k}{10} + \frac{s}{30} = 5.$$

Po úpravě (obě rovnice násobíme číslem 30) dostaneme soustavu

$$3s + k = 130,$$
$$s + 3k = 150,$$

která má řešení $s = 30$, $k = 40$. Nalezená čísla jsou kladná, mají tedy pro řešení úlohy smysl. Na trati z A do B je 30 km stoupání a 40 km klesání. Proveďte zkoušku!

b) Řešení rovnicí o jedné neznámé je méně jednoduché.

Označme x počet hodin, které cyklista potřebuje, aby překonal stoupání trati ve směru od A do B. K projetí klesající části cesty potřebuje $(4\frac{2}{6}\frac{0}{0} - x)$ hod. Proč? Stoupající část trati měří $10x$ km; klesající část měří $(4\frac{2}{6}\frac{0}{0} - x) \cdot 30$ km. Ve směru z B do A je $(4\frac{2}{6}\frac{0}{0} - x) \cdot 30$ km stoupající část a $10x$ km část klesající. K projetí první části je třeba doby $\frac{(4\frac{20}{60} - x) \cdot 30}{10}$ hod., k projetí druhé části je třeba $\frac{10x}{30}$ hod.; tedy celkem $\frac{(4\frac{20}{60} - x) \cdot 30}{10} + \frac{10x}{30} = 5.$

Řešte tuto rovnici! Vyšlo vám $x = 3$? Na trati ve směru z A do B je $3 \cdot 10 = 30$ km stoupání a $(4\frac{20}{60} - 3) \cdot 30 = 40$ km klesání.

Také ve slovních úlohách mohou být některé údaje dány nikoli určitými čísly, nýbrž písmeny. Pak musíme hledané veličiny vyjádřit pomocí těchto písmen. Nalezené výsledky však musí odpovídati skutečnosti; proto nelze za písmena v úloze dosazovati zcela libovolná čísla, nýbrž jen čísla vyhovující určitým podmínkám. Tyto podmínky však často nesouvisí s rovnicemi, k nimž úloha vede. Vyšetření podmínek, které musí býti splněny, aby úloha měla smysl, je podstatnou částí řešení a nazývá se **rozborem úlohy.**

3. úloha.

Prodejna prodávala zboží, jehož výrobní cena je a Kčs za 1 kg, o $p\%$ dráže. Kolik % by činil rozdíl při stejné ceně prodejní, kdyby výrobní cena byla b Kčs?

Je-li výrobní cena a Kčs, rozdíl $p\%$, je prodejní cena $\left(a + \frac{ap}{100}\right)$ Kčs; je-li výrobní cena b Kčs, rozdíl $q\%$, je prodejní cena $\left(b + \frac{bq}{100}\right)$ Kčs.

Má-li být táž prodejní cena, musí platit rovnice

$$a + \frac{ap}{100} = b + \frac{bq}{100},$$

z níž plyne $\qquad bq = a(100 + p) - 100b.$

Je-li $b \neq 0$ (a to je, neboť výrobní cena zboží je kladné číslo), je

$$q = \frac{a(100 + p) - 100b}{b}.$$

Výsledkem může býti číslo kladné nebo záporné nebo nula. Je-li q kladné, prodává prodejna se ziskem; je-li q záporné, prodává prodejna se ztrátou;*) je-li $q = 0$, prodává prodejna za cenu výrobní.

4. úloha.

Délka obdélníkové zahrady je o x m větší než její šířka. Uvnitř je podél plotu vedena cesta $\frac{1}{2}$ m široká. Tím se zmenší obsah zahrady o 50 m². Jaké jsou rozměry zahrady?

Délka zahrady nechť je a m, šířka b m; její obsah je pak ab m^2. Vedeme-li cestu kolem plotu, zmenší se délka na $(a - 1)$ m, šířka na $(b - 1)$ m, obsah na $(a - 1)(b - 1)$ m². Podle znění úlohy je

$$a - b = x,$$
$$ab - (a - 1)(b - 1) = 50.$$

To je soustava dvou rovnic o dvou neznámých a, b, kterou upravíme na tvar

$$a - b = x,$$
$$a + b = 51.$$

Odtud dostáváme $a = 25{,}5 + \frac{1}{2}x$, $b = 25{,}5 - \frac{1}{2}x$. Soustava rovnic má vždy řešení, ať je x jakékoli, ale úloha má smysl jen tehdy, když vyjde b větší než 1. Jen tehdy je možno vésti okolo plotu zahrady dvě cesty, z nichž každá je $\frac{1}{2}$ m široká. Toho dosáhneme, je-li x kladné, ale menší než 49.

Cvičení.

313. Součet dvou čísel je 319; dělíme-li větší z nich menším, vyjde podíl 23 a zbytek 7. Která jsou to čísla?

314. Podíl dvou čísel je 8, zbytek 24. Součet dělence, dělitele, podílu a zbytku je 380. Která jsou to čísla?

315. Při úpravě dětského hřiště bylo rozpočteno: Zvětší-li se větší jeho rozměr o 1 m a zmenší-li se menší rozměr také o 1 m, zmenší se jeho plocha o 22 m². Zmenší-li se však větší rozměr o 2 m a zvětší-li se menší rozměr o 1 m, zvětší se plocha o 5 m². Jaké jsou rozměry hřiště?

316. V internátě byly ložnice pro chlapce a dívky, každá o stejném počtu lůžek. Pro chlapce bylo určeno 15 ložnic, pro dívky 3 ložnice. Chovanců bylo celkem 180. Kolik bylo chlapců a kolik dívek?

*) Případná ztráta jde na účet podniku, ne na účet prodejny.

817. Oddíl vojínů, který čítal 75 vojínů, byl rozdělen v takové dvě skupiny, že větší skupina byla třikrát větší než rozdíl počtu vojínů ve větší a menší skupině. Kolik vojínů bylo v každé z obou skupin?

818. Nalezněte dvě čísla těchto vlastností: Přidáte-li k prvému 72, vzniklý součet bude roven druhému číslu, a přidáte-li 184 ke druhému číslu, vzniklý součet bude třikrát větší než prvé číslo.

819. Součet dvou čísel je 2 607 a jedno z nich končí nulou. Vynechám-li tuto nulu, dostanu druhé číslo. Která jsou to čísla?

820. Jedno ze dvou neznámých čísel je o 5 větší než druhé. Čtvrtina většího čísla je o 4 menší než třetina menšího. Která jsou to čísla?

821. Součet číslic určitého dvojciferného čísla je 12. Odečtu-li od něho 18, dostanu jiné číslo psané týmiž číslicemi, ale v opačném pořádku. Které je to číslo?

822. Dvě dvojciferná čísla jsou psána týmiž číslicemi, ale v opačném pořádku. Dělíme-li větší z nich menším, dostaneme podíl 3 a zbytek 5. Součet číslic v každém z obou čísel je 11. Která jsou to čísla?

823. V jedné třídě bylo o 8 pionýrů víc než ve druhé. Když pak přibyli v každé třídě 2 noví pionýři, bylo jich v prvé třídě dvakrát víc než ve druhé. Kolik pionýrů bylo v každé třídě?

824. Na jedné hromadě je dvakrát víc cihel než na druhé. Všechny se mohou naložit na 2 kolečka. Aby bylo na každém stejně, je třeba přibrat z větší hromady 8 cihel. Kolik cihel je na každé hromadě?

825. Milan a Zdeněk pracují na brigádě společně. Než nastoupili společnou práci, měl Milan odpracováno třikrát tolik brigádních hodin jako Zdeněk. Až bude mít Zdeněk tolik hodin, jako měl na začátku společné práce Milan, budou mít dohromady 40 hodin. Kolik hodin odpracoval každý?

826. Marie a Anna mají dohromady 25 let. Marie je starší. Až bude Anně tolik let, kolik je dnes Marii, bude Marie dvakrát starší, než je dnes Anna. Určete jejich stáří!

827. Do dvou kádí byla nalita voda. Přelijeme-li z prvé do druhé 6 hl, bude v každé stejně; přelijeme-li z druhé do prvé 4 hl, bude v prvé dvakrát tolik jako ve druhé. Kolik hl vody je v každé kádi?

828. V jedné bedničce je 12 kg, ve druhé 36 kg ovoce. Kolik je třeba přesypat z jedné do druhé, aby v obou bedničkách bylo stejně ovoce?

829. Starší bratr pravil mladšímu: „Dej mi 8 ořechů a budu mít dvakrát tolik, jako máš ty." Mladší pravil staršímu: „Dej mi 8 ořechů a budeme mít oba stejně." Kolik ořechů měl každý?

830. Kdyby měla každá z žen vyjednotit 9 řad řepy, zbylo by na poslední z nich jen 6 řad. Kdyby měla však každá 8 řad, zůstaly by ještě 4 řady. Kolik žen bylo a kolik řad měly jednotit?

831. Metr látky zlevnil o 6 Kčs a proto 19 m látky za novou cenu stálo o 40 Kčs méně než 18 m téže látky za starou cenu. Kolik stál 1 m původně?

332. Na jednom poli je o 40 panáků víc než na druhém. Přidá-li rolník při odvážení 12 panáků z menšího pole k většímu, odveze je z menšího na jedné fůře a ostatní na 3 stejných fůrách. Kolik panáků je na každém poli?

333. Vstupné na sportovní den činí 6 Kčs za osobu. Když bylo vstupné sníženo, zvětšil se počet návštěvníků o polovinu a výnos vstupného se tím zvýšil o čtvrtinu. O kolik bylo sníženo vstupné?

334. Kolo lokomotivy, jehož obvod je 5,6 m, učiní na trati z Moskvy do Tuly o 21 000 obrátek méně než kolo vagonu, jehož obvod je 3,5 m. Kolik obrátek učiní každé kolo mezi Moskvou a Tulou a jak velká je vzdálenost mezi oběma městy?

335. Byly koupeny lístky do kina po 12,50 Kčs a lístky do divadla po 20 Kčs. Všecky lístky do kina stály o 25 Kčs méně, ačkoliv jich bylo koupeno o 10 více. Kolik lístků do kina a kolik lístků do divadla bylo koupeno?

336. Havíř-úderník nakope za směnu o 10,5 t uhlí více než druhý horník a nakope 108 t v téže době, ve které druhý horník nakope 66 t. Jak dlouho musí pracovat každý z nich, než nakope 1 485 t uhlí?

337. Dvě oděvní družstva vyřídila společně dodávku pracovních obleků. První dodalo $\frac{5}{9}$ obleků, jež mělo na skladě, druhé, které mělo na skladě o 1 200 obleků více, dalo $\frac{2}{3}$ svého skladu. Po vyřízení objednávky zbyl oběma družstvům stejný počet obleků. Kolik obleků mělo každé družstvo na skladě?

338. V dílně bylo zhotoveno 38 q výrobků dvojího druhu. Na výrobu 1 q prvního druhu bylo třeba 90 pracovních hodin, u druhého druhu 48. Přitom na všecky výrobky prvního druhu bylo třeba o 660 pracovních hodin více času než na druhý druh. Kolik q obojích výrobků bylo zhotoveno?

339. Závod má zhotoviti do stanovené lhůty určitou zakázku pluhů. Vyrobí-li 120 pluhů denně, bude ve stanovené lhůtě zhotoveno o 200 pluhů méně; vyrobí-li však 140 pluhů denně, bude ve stanovené lhůtě hotovo o 100 pluhů více. Jak velká byla zakázka a jaká lhůta byla pro ni stanovena?

340. Jeden rozměr obdélníkového hřiště je o 12 m větší než druhý rozměr. Zvětší-li se každá jeho strana o 10 m, zvětší se jeho plocha o 600 m^2. Jak dlouhé jsou jeho strany?

341. Zvětšíme-li délku obdélníka o 2 m a zmenšíme-li šířku o 1 m, zůstane jeho obsah nezměněn. Jestliže však délku o 1 m zmenšíme a šířku o 2 m zvětšíme, zvětší se obsah o 9 m^2. Jaké jsou jeho rozměry?

342. Jaké úhly má trojúhelník rovnoramenný, jehož úhel při temeni je o 27° větší než úhel při základně?

343. Který pravidelný mnohoúhelník má vnitřní úhel 9krát tak velký jako vnější úhel? Jak velké jsou ty úhly?

344. Dvouletý plán měl býti splněn do konce roku 1948. Osazenstvo podniku odhlasovalo počátkem března 1948, že jej splní do konce října. O kolik % se zavázalo zvýšit svůj výkon?

345. Sud s vodou vážil 63 kg; když jsme z něho odlili 75% vody, vážil 21 kg. Kolik vážil prázdný sud a kolik vody v něm bylo?

346. Za dopravu určitého množství zboží se zaplatilo 400 Kčs. Po druhé bylo dopraveno o 25% více zboží do téže vzdálenosti a zaplaceno bylo pouze 450 Kčs, protože dopravní tarify byly sníženy. Kolik % činilo toto snížení?

347. Ze dvou druhů zboží v ceně 15 Kčs a 21 Kčs za 1 kg třeba sestavit 32 kg směsi po 16,50 Kčs za 1 kg. Kolik je třeba vzíti každého zboží?

348. Ze dvou kovů s měrnou vahou 7,2 g/cm^3 a 8,4 g/cm^3 bylo ulito 19 kg slitiny s měrnou vahou 7,6 g/cm^3. Kolik bylo třeba vzíti kterého kovu?

349. Je třeba 25procentního roztoku (podle váhy). Kolik g rozpuštěné látky musíme vzíti na 100 g vody?

350. Kolik vody je třeba přilíti do 100 g 80procentního lihu, aby vznikl líh 64procentní?

351. Kolik g roztoku 80procentního a kolik g roztoku 54procentního třeba smísiti, aby vzniklo 100 g roztoku 60procentního?

*352. Jeden dělník je schopen vykonati určitou práci za 40 dní, druhý za 30 dní. Několik dní pracovali společně, načež druhý byl odvolán a prvý sám tu práci dokončil za dalších 5 dní. Kolik dní pracovali společně a jakou část práce každý vykonal?

*353. Dva dělníci pracují se stejnou výkonností a mohou splnit určitý úkol společně za 5 hod. Jeden z nich, přijav stachanovskou pracovní methodu, zvýšil svůj výkon o 40%. Za jak dlouho splní úkol, budou-li pracovati opět společně?

*354. Vlak přejede před stojícím pozorovatelem za 8 vteřin a podle nástupiště 400 m dlouhého za 33 vteřin. Určete délku vlaku a jeho rychlost.

VI. Funkce a jejich grafické znázornění.

1. Vyjádření závislosti tabulkou.

a) Ze zkušenosti víme, že v různou denní dobu naměříme na tomtéž místě různou teplotu. Označme si dobu měření *d* (hodin), teplotu *t* (stupňů Celsia) a všimněme si, jak jsou v tabulce sestaveny hodnoty *d* a *t*, které si odpovídají.

Tabulka je sestavena na základě záznamů Státního ústavu meteorologického v Praze o měřeních teploty od 21 hodin dne 21. března do 20 hodin dne 22. března 1948 v Praze.

d	21	22	23	24	1	2	3	4
t	+2,7	+2,1	+1,5	+0,5	0	—0,3	—1,2	—1,6

d	5	6	7	8	9	10	11	12
t	—1,9	—2,1	—2,0	—1,6	—1,0	0	+2,7	+5,0

d	13	14	15	16	17	18	19	20
t	+7,0	+10,	+11,0	+11,1	+10,0	+9,5	+8,0	+6,0

Hodnoty, které si odpovídají, jsou uvedeny ve sloupcích vždy pod sebou. Na př. ve 4 hodiny bylo — 1,6° C.

Každé době odpovídá určitá těplota. Říkáme, že **teplota závisí na době.**

Mění-li se doba, mění se také v našem případě teplota. Proto nazýváme dobu a teplotu **proměnnými.** Dobu měření jsme volili po celých hodinách, ale mohli jsme ji volit i jinak (na př. ve 4 hod. 15 min. 30 vt.), teplota závisela na době: proto nazýváme dobu **nezávisle proměnnou** a teplotu **závisle proměnnou.** Vztah, který je popsán tabulkou, nazýváme **závislostí** mezi dobou a teplotou. Závisle proměnnou veličinu nazýváme také **funkce;** říkáme, že teplota je funkcí času.

b) Váha 1 litru kapaliny vyjádřená v kg se jmenuje hustota; váží-li každý litr kapaliny právě 1 kg, říkáme, že její hustota je 1 kg/l (čti 1 kg na litr). Destilovaná voda má při různé teplotě různou hustotu. Každé teplotě odpovídá určitá hustota destilované vody. Je tedy mezi teplotou *t* (ve stupních C) a hustotou *s* (v kg/l) destilované vody závislost, kterou popisuje tabulka:

t	s	t	s
0	0,999 87	12	0,999 52
1	0,999 93	14	0,999 27
2	0,999 97	16	0,998 97
3	0,999 99	18	0,998 62
4	1,000 00	20	0,998 23
5	0,999 99	25	0,997 07
6	0,999 97	30	0,995 67
7	0,999 93	35	0,994 06
8	0,999 88	40	0,992 24
9	0,999 81	45	0,990 24
10	0,999 73	50	0,988 07

Hodnoty, které si odpovídají, jsou uvedeny vedle sebe. Na př. při 4° C má destilovaná voda hustotu 1 kg/l.

Volíme-li teplotu libovolně a měříme, jakou hustotu má voda při této teplotě, považujeme teplotu za nezávisle proměnnou, hustotu za závisle proměnnou. Říkáme, že hustota je funkcí teploty.

Jak se mění hustota vody s rostoucí teplotou? Roste-li teplota vody od 0° do 4° C, hustota roste; při 4° C je hustota největší; roste-li teplota vody nad 4° C, hustota vody opět klesá.

Zvolme si určitou hustotu a ptejme se, při které teplotě má voda zvolenou hustotu. Jestliže si zvolíme hustotu mezi 0,999 87 kg/l a 1 kg/l, odpovídají každé hustotě dvě teploty; každé hustotě menší než 0,999 87 kg/l odpovídá vždy jediná teplota. S výjimkou hustot mezi 0,999 87 kg/l a 1 kg/l můžeme tedy z hustoty vody usoudit na její teplotu. Také podle hustoty jiných kapalin můžeme posoudit jejich teplotu. Toho užíváme v teploměrech, lihových nebo rtuťových.

c) Množství nakoupeného zboží a částka, kterou za zboží zaplatíme, jsou veličiny na sobě závislé. Každému množství zboží odpovídá určitá částka peněz. Lze říci: „Prodejte mi 10 dkg salámu", a prodavač podle toho určí částku, kterou máme zaplatit. Tu je váha nezávisle proměnná (její hodnotu jsme volili), částka pak je závisle proměnná, je funkcí váhy. Lze však také říci: „Prodejte mi za 30 Kčs salámu", a prodavač nám podle toho naváží určité množství. V tomto případě je naopak částka nezávisle proměnná a váha závisle proměnná. Můžeme tedy říci, že také naopak váha je funkcí zaplacené částky a že tedy mezi nezávisle proměnnou a závisle proměnnou není podstatný rozdíl.

Neumí-li prodavač dosti hbitě počítat, sestaví si tabulku této závislosti:

Váha	5	10	15	20	25	30	35	40	dkg
Částka	3,40	6,80	10,20	13,60	17,—	20,40	23,80	27,20	Kčs

d) Naučili jste se již vyhledávat z tabulek druhé mocniny čísel i druhé odmocniny čísel. Vyhledejte tyto tabulky a zopakujte si, jak se v nich hledá.

e) Také jízdní řád není nic jiného než tabulka závislosti mezi vzdáleností vlaku od výchozí stanice a okamžiky odjezdů (u větších stanic i příjezdů) vlaků.

Vzdálenosti od výchozí stanice jsou uvedeny v km a také označeny jmény stanic. Okamžiky příjezdů a odjezdů jsou udávány v hodinách

22 a Místní doprava Praha – Lysá nad Labem – Kolín

km	ČSD Praha, Hradec Králové	Číslo vlaku / Třída	1262		802		1230	833	1206	804	1232	132	1250		806	1236	1226	1252	452	1510				
			2. 3.		2. 3.		⊞ 3.	2. 3.	2. 3.	2. 3.	⊞ 3.	⊞ 3.	2. 3. ‡		2. 3.	⊞ 3.	2. 3.	2. 3.	♜ 2. 3.	2. 3.				
0,0	**Praha Wils. n.** ✕	odj.	...	...	...	...	...	...	...	...	...	z 6.55	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,0	**Praha Den. n.** ✕	odj.	f0.20	...	...	...	...	...	4.50	6.00	...		8.40	...	10.00	...	...	n12.28	n12.52	13.00	...	...	...	...
1,4	Praha-Karlín přístav z		|	...	...	...	...	...	|	|	...		|	...	|	...	...	12.32	|	13.04	...	...	...	...
3,0	Praha-Libeň dol. n.		0.27	...	...	...	...	...	4.57	6.08	...		8.47	...	10.07	...	...	12.36	12.59	13.08	...	...	...	...
5,3	**Praha-Vysočany** ✕ 6 a	příj.	0.33	...	...	...	...	...	do Havlíčkova Brodu 5.03	6.14	...		8.53	...	10.13	...	...	12.42	13.05	13.14	...	...	...	...
		odj.	0.35	...	...	...	...	...	5.05	6.16	...		8.55	...	10.15	...	ze Všetat	12.46	do Svobody n. Ú.–J. Lázní 13.07	13.17	...	...	...	...
14,0	Horní Počernice		0.53	...	...	...	...	...	5.25	6.36	...		9.13	...	10.34	...		13.06	13.27	13.36	...	...	...	...
18,1	Zeleneč z		1.00	...	...	...	...	...	5.32	6.43	...		9.20	...	10.41	...		13.13	|	13.43	...	...	...	...
20,2	Mstětice		1.05	...	...	...	...	...	5.37	6.48	...		9.25	...	10.45	...		13.18	|	13.48	...	...	...	...
26,1	**Čelákovice** ✕ 22 a	příj.	1.12	...	...	...	...	...	5.44	6.55	...		9.32	...	do Hořušovic 10.52	...		13.25	13.43	13.55	...	...	...	...
	Brandýs n. Lab. 6 d	příj.	...	...	...	...	...	...	*7.28*	*7.28*	...		*10.17*	...	*11.18*	...	...	*14.32*	*14.32*	*14.32*	...	...	...	...
26,1	**Čelákovice** ✕ 22 a	odj.	1.13	...	...	...	...	...	5.46	6.58	...		9.34	...	10.54	...	...	13.28	13.46	13.57	...			
34,4	**Lysá** n. Lab. ✕ 6 a 22 b	příj.	f1.23	...	...	...	...	...	5.56	7.08	...	7.44	9.44	...	11.04	...	12.35	13.38	13.56	14.07	...			
		odj.	...	...	do Kyšperka	...	...	z Hradce Králové	6.00	7.15	...	7.48	9.48	...	11.13	...	12.45	13.40	14.03	do Brna přes Jihlavu 14.11	...			
39,8	Stratov z		...	...		...	...		6.08	7.23	...		9.54	...	11.21	...	12.53	13.48	|	14.19	...			
43,1	Kostomlaty u Nymburka		...	...		...	...		6.15	7.29	...		9.59	...	11.27	...	12.59	13.54	|	14.26	...			
46,0	Kamenné Zboží z		...	...		...	...		6.21	do Hořušovic 7.35	...		|	...	11.33	...	13.05	14.00	|	14.32	...			
49,3	**Nymburk** ✕ 4 a 7	příj.	...	...		...	...		6.26	7.40	...	8.03	10.07	...	11.38	...	13.10	14.05	14.20	14.37	...			
		odj.	...	...	4.26	...	4.58		6.33	7.47	...	8.09	10.13	...	11.53	...	13.22	14.11	14.28	14.43	...			
54,4	Velké Zboží z		...	...	4.34	...	5.06		6.41	7.55	...		|	...	12.01	...	13.30	14.19	|	|	...			
56,8	Poděbrady lázně ✕		...	....	4.39	...	5.10		6.46	8.00	...	8.18	10.24	...	12.07	...	13.35	14.25	14.40	14.55	...			
61,8	Libice n. Cidlinou		...	...	4.47	...	5.17		6.54	8.08	...		10.32	...	12.15	...	13.43	14.33	|	15.03	...			
64,8	**Velký Osek** ✕	příj.	...	...	4.52	...	5.20	6.29	6.59	8.13	↴	z	10.37	...	12.20	↴	13.48	n14.38	14.51	15.08	...			
	Hradec Král. 2	příj.	...	...	*6.37*	...	...	...	...	*10.10*	...	*z 9.20*	...	...	*13.58*	...	...	...	...	*16.44*	...			
64,8	**Velký Osek** ✕	odj.	...	...	4.57	...	5.21	6.32	7.06	8.37	8.31		n10.56	...	12.26	12.32	13.57	...	n15.00	15.22	...			
68,0	Veltruby z		...	...	...	...	5.26	6.37	|	...	8.36		|	...	...	12.37	14.02	...	...	15.27	...			
72,1	Kolín-Zálabí z		...	...	...	...	5.32	6.44	7.16	...	8.43		11.06	...	...	12.44	14.09	...	...	15.34	...			
73,6	**Kolín** ✕ 1 a, 22 d	příj.	...	...	...	...	5.34	6.48	7.20	...	8.46	...	n11.10	...	...	12.47	14.12	...	...	15.38	...			
	Havlíčkův Brod 22	příj.	...	...	...	...	*7.50*	*9.39*	*9.40*	...	...	...	...	...	...	*15.23*	...	...	*n17.32*	*18.19*	...	...	...	...

♜ do Trutnova přes Starou Paku
f jezdí jen v pondělí a 29. X., 2. XI., 27. XII., 2., 7. I., 8. IV., 2., 10. V., nejede 28. X., 6. I., 7. IV.
k jezdí jen ve dny školního vyučování.
n jezdí jen v sobotu a 31. X., 24., 31. XII., 30. IV., 8. V.
z nejezdí v neděli
‡ v trati V. Osek–Kolín jako motor vlak s vozy 3. tř.

a minutách příslušného času (u nás je to středoevropský, případně letní středoevropský čas).

Na ukázce jízdního řádu si vyberte některé vlaky a na nich vysvětlete funkční závislost mezi vzdáleností vlaku od výchozí stanice a dobou odjezdů vlaků. (Ukázka jízdního řádu na str. 93.)

Zjišťujeme-li, kdy budeme v určité stanici, je vzdálenost nezávisle proměnná, doba závisle proměnná; můžeme však také zjišťovat, kde budeme v určitou dobu: pak je doba nezávisle proměnná a vzdálenost (t. j. příslušná stanice) závisle proměnná.

Jak jsme viděli, není (ve většině případů) rozdíl mezi nezávisle proměnnou a závisle proměnnou nijak podstatný.

f) Měříme-li výšku již vystavěného domu v různých okamžicích, dostaneme po každé totéž číslo. Můžeme tedy také říci, že mezi výškou domu a časem je určitá závislost. To je však závislost zvláštního druhu, neboť víme, že výška domu je ve všech okamžicích táž. Takové závislosti říkáme **závislost konstantní**. Výška domu je **konstanta** (veličina stálá). Konstant je v praxi velké množství. V tomto příkladu však nemůžeme obě veličiny zaměnit; je sice pravda, že každému časovému údaji (okamžiku měření) odpovídá určitá výška domu, ale není pravda, že by také obráceně každé výšce téhož domu odpovídal určitý čas, neboť všecky časové údaje odpovídají téže výšce, t. j. ať měříme kdykoliv, bude dům stejně vysoký.

Některé veličiny se mění velmi nepatrně, a proto je často považujeme za veličiny stálé (za konstanty), ačkoliv víme, že to konstanty nejsou. Činíme tak proto, abychom si zjednodušili výpočet, ačkoliv tím jeho přesnost omezujeme. Na příklad často považujeme tlak vzduchu za konstantu, ačkoliv se mění s nadmořskou výškou, teplotou, vlhkostí atd., ale během krátké doby jsou tyto změny tak nepatrné, že si jich nemusíme všímat.

Z uvedených případů můžeme obecně usoudit: *Máme-li dvě řady čísel, které mají tu vlastnost, že každému číslu první řady odpovídá určité číslo druhé řady, říkáme, že čísla druhé řady jsou závislá na číslech první řady.* Takovéto závislosti říkáme **funkční závislost**. Přitom se nestaráme o to, zda změna čísel jedné řady je v příčinné souvislosti se změnou čísel druhé řady.

Cvičení.

355. V tabulce uvádíme závislost doby kyvu T (ve vteřinách) a délky l (v cm) matematického kyvadla. a) Zjistěte, kolikrát se zvětší doba kyvu, zvětší-li se délka 10 cm dlouhého kyvadla čtyřikrát, devětkrát, šestnáctkrát. b) Vypočtěte přibližnou dobu kyvu 250 cm dlouhého kyvadla.

l cm	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
T vteř..	0,317	0,449	0,549	0,634	0,709	0,777	0,839	0,897	0,952	1,003

l cm	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
T vteř.	1,052	1,099	1,144	1,187	1,229	1,269	1,308	1,346	1,383	1,418

356. Z tabulky na str. 90 a 91 vyčtěte, v kterých hodinách teplota stoupala, kdy byla nejvyšší a nejnižší.

357. Z ukázky jízdního řádu, uvedené na str. 93, zjistěte, jak dlouho jede rychlík z Prahy do Nymburka. Zjistěte také, který osobní vlak má nejdelší a nejkratší dobu jízdy. Vypočtěte průměrnou rychlost těchto vlaků v km/hod.

2. Závislost vyjádřená rovnicí.

Z tabulky vyčteme jen tu hodnotu funkce, pro kterou je uvedena příslušná nezávisle proměnná. V matematice však potřebujeme takové vyjádření funkční závislosti, z kterého můžeme stanovit závisle proměnnou pro kteroukoli hodnotu nezávisle proměnné.

Takovým vyjádřením je **rovnice.** Některé již znáte z geometrie a fysiky pod názvem **vzorce.** Na př.:

1. Závislost obsahu P čtverce v čtverečních jednotkách na délce strany s v příslušných jednotkách délkových vyjadřuje vzorec

$$P = s^2,$$

kde nezávisle proměnná je s, závisle proměnná je P.

Za s lze dosadit libovolné kladné číslo a podle toho vyjde příslušný obsah P čtverce o straně s. Považujeme-li P za nezávisle proměnnou a s za závisle proměnnou, lze tutéž závislost vyjádřit rovnicí

$$s = \sqrt{P}.$$

Dosadíme-li za P jakékoli kladné číslo, dostaneme stranu čtverce o obsahu P.

2. Závislost obsahu kruhu P na délce jeho poloměru r vyjadřuje rovnice $P = \pi r^2$, kde r je nezávisle proměnná, P závisle proměnná, π je konstanta ($\pi \doteq 3{,}1416$).

Pomocí vzorců dovedeme stanovit hodnotu funkce pro jakoukoliv hodnotu nezávisle proměnné, t. j. v našem případě obsah libovolného čtverce nebo kruhu.

V předcházejících příkladech jsme měli geometrické vzorce, o jejichž správnosti se přesvědčíme usuzováním.

Někdy lze i z tabulky vyčíst rovnici, která vyjadřuje příslušnou funkční závislost. Na př.:

Při hodině fysiky bylo měřeno, jak závisí elektrický proud na napětí.

Měli jsme zdroj elektrického proudu, jehož napětí bylo lze měnit. Na svorky zdroje jsme připjali vodič a zjistili, že se při zvyšování napětí zvyšoval i proud, při snižování napětí se proud snižoval. Proud tedy závisí na napětí. Napětí E bylo měřeno ve voltech, proud I v ampérech. Výsledky měření jsme sestavili v tabulku.

E	5,5	7,8	10,4	12,9	15,1
I	1,0	1,4	1,9	2,3	2,7

Utvořte podíly $\frac{I}{E}$ z hodnot sobě odpovídajících. Dostanete 0,182; 0,179; 0,183; 0,178; 0,179. Tato čísla zaokrouhlete na 2 platné cifry. (Zdánlivé nesrovnalosti lze vysvětlit nepřesností přístrojů i měření; vyrovnali jsme je zaokrouhlením na 0,18.) Platí tedy přibližně $\frac{I}{E} = 0{,}18$. Dalšími pokusy bychom se přesvědčili, že i pro jiná měření hodnot E a I bychom nalezli týž vztah, takže $\frac{I}{E} = 0{,}18$, čili $I = 0{,}18E$, což je rovnice, která vyjadřuje funkční vztah, kterým pro náš vodič je vázán proud na napětí.

Cvičení.

358. Napište rovnici, jak závisí
a) obvod čtverce (o) na jeho straně (a);
b) obvod rovnostranného trojúhelníka (o) na jeho straně (a);

c) obvod kruhu (o) na jeho poloměru (r);
d) objem krychle (V) na její hraně (a).
Určete v těchto rovnicích konstantu, nezávisle i závisle proměnnou.

359. a) Vyjádřete obsah kruhu P jako funkci průměru d. b) Vyjádřete odtud průměr d kruhu jako funkci jeho obsahu P.

360. Funkční závislost rychlosti zvuku c (m/sec) na teplotě vzduchu t (stupňů C) je dána rovnicí (přibližnou) $c = 331{,}7 + 0{,}60t$. Tato rovnice platí při obyčejných teplotách.
a) Vypočtěte rychlost zvuku při teplotě $+ 18°$ C.
b) Při které teplotě je rychlost zvuku rovna 330 m/sec?

361. Víme, že barometrický tlak klesá se stoupající výškou pozorovatele. Výškový rozdíl h m dvou míst, ve kterých jsou barometrické tlaky b_1, b_2 mm Hg ($b_1 > b_2$), určíme jako funkci těchto tlaků podle přibližného vzorce $h = 4\,000 \cdot \dfrac{b_1^2 - b_2^2}{b_1 b_2}$ (pokud je v obou výškách táž teplota).
Na úpatí hory byl tlak 746 mm, na vrcholu hory 723 mm; jak vysoká je hora? (Je to její nadmořská výška?)

***362.** Z vrcholů čtverce o straně a jsou naneseny v témž smyslu na prodloužené strany čtverce úsečky délky x. Krajní body úseček jsou vrcholy druhého čtverce. Vyjádřete obsah P tohoto čtverce jako funkci proměnné x!

***363.** Hrany kvádru o rozměrech a, b, c byly zvětšeny o touž délku x. Vyjádřete přírůstek a) objemu, b) povrchu jako funkci x.

***364.** Z plechu tvaru obdélníka o daných rozměrech a, b, se v rozích vystřihnou čtverečky o straně x. Ze zbytku se složí krabice. Vyjádřete objem této krabice jako funkci proměnné x.

***365.** Vyjádřete úhly $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, jež spolu svírají osy vnitřních úhlů trojúhelníka jako funkci jeho vnitřních úhlů α, β, γ.

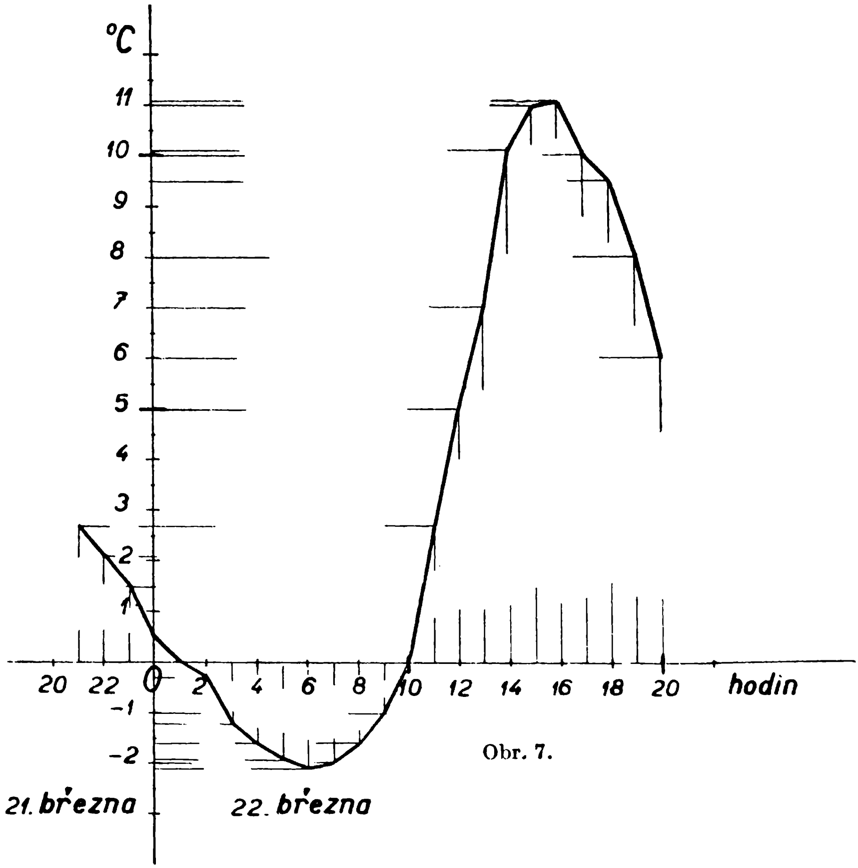
3. Závislost vyjádřená graficky.

V praxi se průběh závislostí zachycuje velmi přehledně grafickým znázorněním, diagramem. Některé způsoby grafického znázornění znáte již z dřívějších tříd.

Prohlédněte si diagram závislosti mezi teplotou a dobou měření (obr. 7), jenž zachycuje závislost, která byla vyjádřena tabulkou na str. 90; 91.

Na vodorovné přímce znázorňují jednotlivé dílky dobu (nezávisle proměnná); na svislé přímce znázorňují dílky příslušnou teplotu ve stupních C (závisle proměnná).

Diagram zhotovujeme zpravidla pomocí tabulky. Říkáme, že hodnoty vynášíme z tabulky do diagramu.



Obr. 7.

Diagram teploty sestrojíme z uvedené tabulky takto:

1. Zvolíme si dvě přímky k sobě kolmé. Budeme je nazývat **osy.** Jejich průsečík se nazývá **počátek** a označíme jej *O* (z lat. origo — počátek, ale také proto, že tam píšeme nulu). Na jednu osu budeme nanášet dobu v hodinách, na druhou stupně teploty.

Je zvykem nanášet hodnoty nezávisle proměnné na vodorovnou osu zpravidla zleva doprava a hodnoty závisle proměnné na svislou osu zpravidla zdola nahoru.

Vodorovnou osu nazýváme **osou úseček**, svislou osu nazýváme **osou pořadnic.**

2. Osa úseček se často označuje x, osa pořadnic y. Na každou osu naneseme řadu stejně dlouhých dílků. Tím stanovíme tak zvané měřítko.*)

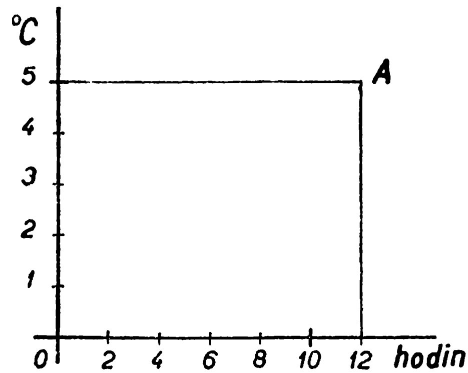
Aby se obrázek vešel na stránku, zvolíme na ose úseček měřítko tak, aby 1 hodina byla znázorněna úsečkou 5 mm, a na ose pořadnic měřítko takové, aby 1° byl znázorněn úsečkou 1 cm dlouhou. Ke zvýšení přehlednosti označíme každý pátý stupeň a každou druhou hodinu delší dělící čárkou a označíme je čísly.

3. Z tabulky zjistíme na př., že ve 12 hod. bylo 5° C.

a) Na ose úseček, kde jednotlivé dílky označují dobu v hodinách, vyhledáme bod 12. Tímto bodem vedeme rovnoběžku s osou pořadnic.

b) Na ose pořadnic vyhledáme bod 5. Jím vedeme rovnoběžku s osou úseček.

c) Průsečík obou rovnoběžek určuje polohu bodu A, který odpovídá teplotě naměřené ve 12 hodin (viz obr. 8).



Obr. 8.

4. Podobně stanovíme ostatní body a spojíme je lomenou čarou.

Jak by vypadala tato čára, kdyby byly údaje v tabulce zapsány ne po 1 hodině, ale třeba po 5 minutách?

K určení polohy bodu A v rovině je třeba dvou údajů:

První údaj: Vzdálenost od osy pořadnic. V našem případě se rovná délce $\overline{0\ 12}$ měřené na ose úseček.

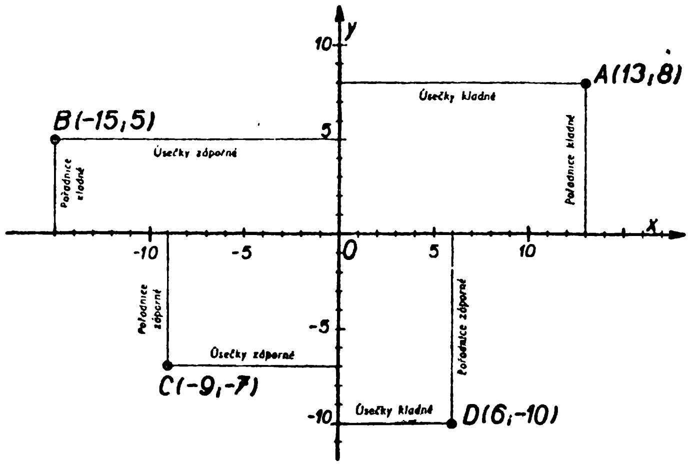
*) S výhodou lze užít t. zv. milimetrového papíru, na kterém je již vytištěna síť čtverečků o straně 1 mm.

Dokažte, že $\overline{5A} = \overline{012}$. Číslo udávající počet dílků, nazývá se **úsečka.**

Druhý údaj: Vzdálenost od osy úseček. V našem případě se rovná vzdálenosti $\overline{05}$ na ose pořadnic. Číslo udávající počet dílků. nazývá se **pořadnice.**

Úsečku a pořadnici bodu nazýváme souhrnným názvem **souřadnice** bodu. Osu úseček a osu pořadnic nazýváme **osy souřadnic.**

Že bod A má úsečku 12 jednotek a pořadnici 5 jednotek, píšeme krátce $A(12; 5)$. První číslo znamená úsečku, druhé číslo pořadnici. (Nezaměňujte pořádek obou souřadnic!)



Obr. 9.

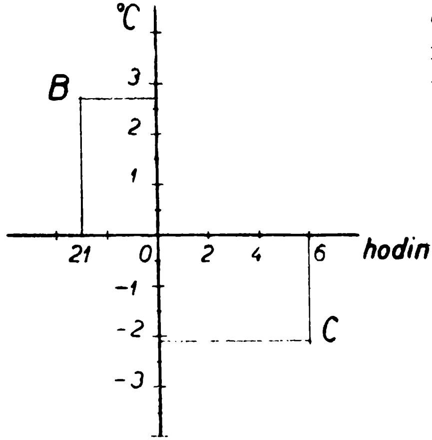
Přisoudíme-li úsečkám měřeným vpravo od počátku smysl kladný, má úsečka měřená vlevo od počátku smysl záporný.

Podobně pořadnice nad osou x má smysl kladný, pod osou x smysl záporný.

Všimněte si znamének souřadnic bodů A, B, C, D na obr. 9.

Jak bychom zaznamenali teplotu z předešlého dne, případně teplotu pod nulou?

Protože jsme doby měření z 22. března nanášeli na ose úseček vpravo od počátku, budeme doby měření z 21. března nanášet vlevo



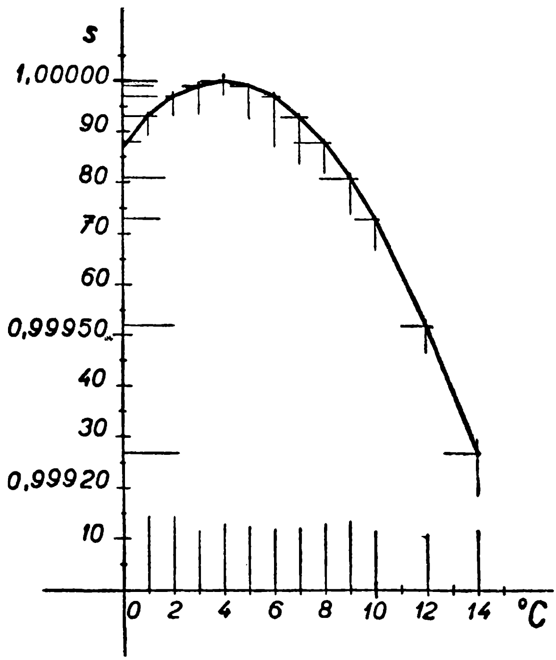
Obr. 10.

od počátku. Podobně teploty pod nulou budeme nanášet na osu y pod počátek.

Podle toho zaznamenáme na př. teplotu + 2,7° C, naměřenou v 21 hodin dne 21. března tak, že na ose x vyhledáme bod vzdálený 3 jednotky vlevo od osy y; Jím vedeme rovnoběžku s osou y. Na ose y vyhledáme bod vzdálený o 2,7 jednotek nad osou x. Jím vedeme rovnoběžku s osou x. Průsečík obou rovnoběžek určuje bod $B(-3;\ 2{,}7)$, který zaznamenává teplotu naměřenou v 21 hodin.

Teplotu —2,1° C, naměřenou v 6 hodin dne 22. března, zaznamenáme takto: Na ose úseček vyhledáme bod 6 vpravo od osy y; na ose pořadnic bod —2,1 pod osou x. Oběma body vedeme rovnoběžky s příslušnými osami. Průsečík rovnoběžek určuje bod $C(6;\ -2{,}1)$, který zaznamenává teplotu v 6 hodin ráno (viz obr. 10).

Na obr. 11 je zobrazena závislost hustoty vody s na teplotě t, a to podle tabulky na str. 91. Všimněte si, že na svislé ose je nanesena pouze ta část stupnice, která pro studium příslušné funkce je zajímavá.



Obr. 11.

Přesnost grafického znázornění je omezena nedokonalostí měřítek a rýsovacích pomůcek, ale diagram je mnohem názornější než tabulka nebo rovnice, neboť průběh závislosti na diagramu přehlédneme jedním pohledem, kdežto čísla v tabulce musíme podrobně zkoumat, abychom z nich vyčtli průběh závislosti.

Cvičení.

866. Znázorněte graficky! (Číselné údaje zaokrouhlete na desítky; 10 traktorů znázorněte délkou 1 mm, 1 měsíc délkou ½ cm.)

Počet vyrobených traktorů v měsících lednu až prosinci 1948.

Měsíc	Kusů	Měsíc	Kusů
I.	648	VII.	721
II.	714	VIII.	527
III.	802	IX.	875
IV.	829	X.	875
V.	812	XI.	596
VI.	884	XII.	815

(R. 1937 bylo vyrobeno měsíčně 17 traktorů.)

867. Znázorněte graficky! (1 žák se znázorní délkou 2 mm, 1 rok délkou ½ cm).

Přehled o průměrném počtu žáků připadajících na 1 třídu (bývalých) českých měšťanských škol v letech 1930—48.

Rok	Počet	Rok	Počet	Rok	Počet
1920/1	48,25	1928/9	30,33	1936/7	39,21
1922/3	41,45	1930/1	30,05	1945/6	31,04
1924/5	43,88	1932/3	37,86	1946/7	30,24
1926/7	38,61	1934/5	40,25	1947/8	30,18

868. a) Znázorněte tuto závislost graficky. (Číselné údaje zaokrouhlete na tisíce; 1 000 přístrojů znázorněte délkou 2 mm, 1 měsíc délkou ½ cm.)

Přehled o počtu vyrobených rozhlasových přijimačů v jednotlivých měsících 1948 v ČSR.

Měšíc	Kusů	Měsíc	Kusů
1.	15 697	7.	12 819
2.	16 529	8.	21 442
3.	20 939	9.	29 068
4.	26 489	10.	30 176
5.	23 165	11.	23 764
6.	25 443	12.	22 193

b) Vyjádřete v % počet výrobků uvedených v tomto příkladě na 1 deset. místo tak, že za základ zvolíte počet z ledna (15 697 = 100%). Znázorněte graficky a přirovnejte k diagramu z cvič. a).

369. Výtěžek másla ze 100 kg mléka vypočteme podle vzorce

$$L = 1{,}19t - 0{,}25,$$

kde L je výtěžek másla v kg, t je tučnost mléka v %. Sestavte tabulku a diagram výtěžku másla pro mléko o tučnosti od 2,6% do 5% (po 0,2%).

370. 1 ha smrkového lesa v 1. jakostní (bonitní) třídě poskytuje 70—625 m³ hroubí. (Hroubí jsou větve a kmen stromu o větším průměru než 7 cm.) Množství dřeva poskytované lesem závisí na stáří lesa.
Vyjádřete tuto závislost graficky!

Stáří lesa......	let	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Hroubí	m^3 na 1 ha	70	175	295	405	490	545	585	605	620	625

371. Počet rostlin potřebných k osazení plochy v t. zv. trojúhelníkovém sponu*) vypočteme podle vzorce

$$n = \frac{1{,}155P}{v^2},$$

kde n je počet rostlin, P je plocha (v m²), kterou máme osázet, v je vzdálenost jednotlivých rostlin v m. Sestavte tabulku pro počet stromků potřebných na osázení 1 ha půdy pro stromy vzdálené od sebe 3; 4; 5;...; 9; 10 m. Proveďte také graficky! Dovedli byste odvodit uvedený vzorec?

***372.** Doba východu a západu Slunce v našich krajinách (zeměpisná šířka 50°, zeměpisná délka 15°) je dána touto tabulkou (čísla značí hodiny a minuty středoevropského času):

Datum	1/1	16/1	31/1	15/2	2/3	17/3	1/4	16/4	1/5
Východ	7.59	7.53	7.36	7.12	6.43	6.11	5.38	5.06	4.38
Západ	16.09	16.28	16.52	17.18	17.43	18.07	18.31	18.54	19.18
Datum	16/5	31/5	15/6	30/6	15/7	30/7	14/8	29/9	13/9
Východ	4.13	3.57	3.50	3.54	4.26	4.25	4.47	5.09	5.32
Západ	19.40	19.58	20.10	20.13	20.04	19.46	19.21	18.52	18.20
Datum	28/9	13/10	28/10	12/11	27/11	12/12	27/12	31/12	
Východ	5.54	6.18	6.42	7.07	7.30	7.49	7.58	7.59	
Západ	17.46	17.14	16.45	16.21	16.04	15.58	16.04	16.07	

*) Rostliny se sázejí ve vrcholech rovnostranných trojúhelníků.

Vypočtěte pro jednotlivé dny dobu kulminace Slunce, t. j. okamžik přesně uprostřed mezi východem a západem, a znázorněte graficky, jak se mění během roku! Dovedete vysvětlit překvapující výsledek, k němuž jste dospěli? (Volte pro 15 dní délku 5 mm, pro 1 min. délku 4 mm.)

4. Přímá úměrnost a její znázornění.

A) Přímá úměrnost.

V životě se nejčastěji setkáváme se závislostí, kterou nazýváme **přímá úměrnost.**

Příklad:

7 kg zboží je za	139,— Kčs
14 kg zboží je za	278,— Kčs
3,5 kg zboží je za	69,50 Kčs
$1\frac{3}{4}$ kg zboží je za	34,75 Kčs
x kg zboží je za	y Kčs

V jakém poměru se změní množství zboží, v témž poměru se změní částka, kterou za ně zaplatíme:

$$7 : 14 = 139 : 278,$$
$$7 : 3{,}5 = 139 : 69{,}50 \text{ atd.}$$

Takové závislosti říkáme **přímá úměrnost.**

Všimneme-li si podrobněji jednotlivých částek a jim odpovídajícího množství zboží, zjistíme, že jsou vždy v stejném poměru.

Na př.: $$\frac{139}{7} = \frac{278}{14} = \frac{69{,}50}{3{,}5} = \frac{34{,}75}{1{,}75} = \frac{y}{x}.$$

Tento poměr je stálý a nazýváme jej **konstanta úměrnosti.** V našem případě konstanta znamená cenu 1 kg zboží a rovná se $19\frac{6}{7}$.

Jestliže nezávisle proměnnou veličinu označíme x, závisle proměnnou y, konstantu k, pak je

$$k = \frac{y}{x}, \text{ z čehož } y = kx, \text{ což je rovnice přímé úměrnosti.}$$

Označíme-li dvě zcela libovolné hodnoty nezávislé proměnné x_1, a x_2 (na př. 7 a $1\frac{3}{4}$ kg zboží) a jim odpovídající hodnoty závislé proměnné y_1 a y_2 (na př. 139 a 34,75 zaplacených Kčs) platí rovnost poměrů

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Z rovnosti poměrů plyne, že $x_1 y_2 = x_2 y_1$, z čehož

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2},$$

což platí pro každý pár sobě odpovídajících hodnot závisle a nezávisle proměnné. Levou i pravou stranu této rovnice označme písmenem k. Potom

$$\frac{y_1}{x_1} = k, \frac{y_2}{x_2} = k$$

čili

$$y_1 = kx_1, \; y_2 = kx_2.$$

Protože dvojice y_1, y_2 a x_1, x_2 sobě odpovídajících hodnot byly zcela libovolné, platí uvedené rovnice i pro jakékoliv jiné x a jemu odpovídající y, t. j. každou přímou úměrnost můžeme zapsat rovnicí

$$y = kx,$$

kde k je konstanta úměrnosti.

Konstanta je určena párem hodnot obou proměnných, jež si navzájem odpovídají, neboť z rovnice

$$y = kx, \text{ plyne } k = \frac{y}{x}.$$

Na př. když za 7 kg zboží zaplatíme 139 Kčs, je $139 = k \cdot 7$, čili $k = \frac{139}{7} =$ $= 19\frac{6}{7}$. Tato konstanta znamená cenu 1 kg zboží.

Jestliže do rovnice $y = kx$ dosadíme $x = 1$, potom

$$y = k.$$

Všimněme si konstanty v několika příkladech:

1. Dráha, kterou urazí pohybující se těleso, je za předpokladu rovnoměrného pohybu přímo úměrná času. Označíme-li, jak je obvyklé, čas t, dráhu s a konstantu úměrností c, jest

$$s = ct.$$

Pro $t = 1$ plyne $s = c$, t. j. konstanta úměrnosti se rovná dráze vykonané za jednotku časovou; říkáme jí **rychlost**. Jestliže rychlík urazí 90 km za $1\frac{1}{4}$ hod., dostaneme dosazením do napsané rovnice $90 = c \cdot 1\frac{1}{4}$ a odtud rychlost $c = 90 : 1\frac{1}{4} = 72$ km/hod.

(Pojmenování km/hod — čti km za hodinu — naznačuje, že rychlost byla vypočtena z dráhy v km a času měřeného v hodinách.)

Řekneme-li, že rychlík urazí 90 km za 75 minut, je to totéž. Pak dosazením do vzorce vyjde $90 = c \cdot 75$; $c = 90 : 75 = 1{,}2$ km/min (čti km za minutu). Týž příklad však dostaneme, řekneme-li, že vlak urazí 90 000 m za 75 . 60 vt., t. j. za 4 500 vt. Pak je $90\,000 = c \cdot 4\,500$, t. j. $c = 90\,000 : 4\,500 = 20$ m/sec (čti metrů za vteřinu).

Z toho usoudíme:

Hodnota konstanty úměrnosti závisí na tom, jakými jednotkami měříme obě proměnné.

2. Rozřešíme úlohu: 100 g železa má objem 12,8 cm^3, kolik váží 230 cm^3 železa? Označíme-li (jak ve fysice zvykem) váhu písmenem G, objem V a konstantu úměrnosti s, pak platí

$$G = s \,.\, V,$$

neboť váha je přímo úměrná objemu.

Dosadíme-li $V = 1$, je $G = s$, t. j. konstanta úměrnosti se rovná váze jednotkového objemu; nazývá se **měrná (specifická) váha.** Odpovídá-li hodnotě 100 g objem 12,8 cm^3, znamená to, že $100 = s \,.\, 12{,}8$, čili $s = 100 : 12{,}8 \doteq$ $\doteq 7{,}8$ g/cm^3 (čti gramů na krychlový centimetr). Pak váha 250 cm^3 je $g =$ $= s \,.\, 250 \doteq 1\,950$ g.

Cvičení.

373. Auto ujede 5 km za 6 min. Vyjádřete a) dráhu jako funkci času, b) čas jako funkci dráhy. Vysvětlete význam konstant v těchto rovnicích.

374. Výkon motoru se měří buď v jednotkách zvaných koň (značka k*) nebo v jednotkách zvaných kilowatt (značka kW). Mezi nimi platí vztah 1 k = 0,735 kW. Značí-li x počet k a y počet kW, napište převodní rovnice, podle nichž lze přepočítati výkon v k na kW a naopak.

375. Tlak vzduchu se měří buď na mm Hg, nebo v jednotkách zvaných milibar (značka mb) tak, že 1 000 mb = 750 mm Hg. Značí-li x počet mb a y počet mm Hg, napište převodní rovnice k přepočítání tlaku vzduchu v mb na mm Hg a naopak.

376. Ve vojenství se užívá jako míry úhlové t. zv. dílců. Úhel plný má 6 400 dílců.**) a) Značí-li x počet stupňů a y počet dílců, napište převodní rovnice k přepočítávání stupňů v dílce a naopak! b) Kolik dílců má 1°, kolik stupňů (minut, vteřin) má 1 dílec?

377. Co značí, řekneme-li, že mapa je zhotovena v měřítku 1 : 75 000? Měří-li určitá vzdálenost ve skutečnosti x km a její obraz na mapě y cm, napište rovnici, jež vyjadřuje y jako funkci x, a obráceně, rovnici, jež vyjadřuje x jako funkci y, a vyložte, jaký význam mají konstanty v těchto rovnicích.

378. Atomová váha sodíku je 23, chloru 35,5. a) Kolik g sodíku a chloru je obsaženo v 100 g kuchyňské soli (NaCl)? b) V kolika g kuchyňské soli je obsaženo 100 g α) sodíku, β) chloru?

---

*) Někdy se užívá též značky HP z angl. horse-power, jež bývá nesprávně překládáno názvem „koňská síla“.

**) Držíme-li milimetrové měřítko přibližně ve vzdálenosti 1 m (přesněji 1 019 mm) od oka, odpovídá jednomu dílci zorný úhel, pod nímž vidíme délku 1 mm. Číslo 6 400 bylo voleno tak, aby bylo dělitelno číslem 400, neboť moderní úhloměrné přístroje neužívají stupňů jako míry úhlové, nýbrž t. zv. gradů, jichž jde do plného úhlu 400 ($4R = 400^g$). Každý grad má 10 decigradů nebo 100 centigradů. Kolik dílců a kolik stupňů má 1 grad?

379. Jestliže v přímé úměrnosti odpovídá 100 jednotkám nezávisle proměnné p jednotek závisle proměnné, říkáme, že závisle proměnná (zvaná **procentová částka**) obsahuje $p\%$ nezávisle proměnné (zvané **základ**).

a) Napište funkční závislost procentové částky $č$ na základu z.

b) Kterou jinou přímou úměrnost lze z rovnice vyčíst, považujete-li základ za konstantní?

*380. a) Ve 100 g politury je rozpuštěno p g šelaku (p-procentní roztok podle váhy). Napište rovnici, která vyjadřuje váhu lihu (rozpouštědla) jako funkci váhy šelaku! b) Kolik g lihu třeba přidat do 100 g 25% roztoku, aby vznikl roztok 15%? c) Kolik g šelaku třeba přidat do 100 g 25% roztoku, aby vznikl roztok 35%?

381. V cementárně měli v únoru vyrobit podle plánu x kanalisačních rour. Plán překročili o $p\%$. Vyjádřete únorový výkon y jako funkci plánovaného počtu x kanalisačních rour.

*382. Rychlost, kterou se šíří světlo, je 300 000 km/sec. Za jak dlouho k nám doletí světelný paprsek a) z Měsíce, b) ze Slunce, c) z nejbližší stálice zvané Proxima Centauri? (Vzdálenost Měsíce je 384 000 km, Slunce 149 500 000 km, nejbližší stálice 40 000 000 000 000 km.)

*383. Napište rovnice, které vyjadřují závislost úhlu α (ve stupních), o který se otočí a) velká, b) malá, c) vteřinová ručička hodin, na čase t (v min.).

*384. Jak se číselně změní měrná váha, měříme-li a) váhu v kg a objem v dm^3, b) váhu v tunách a objem v m^3, c) váhu v g a objem v l, d) váhu v kg a objem v m^3?

B) Grafické znázornění přímé úměrnosti.

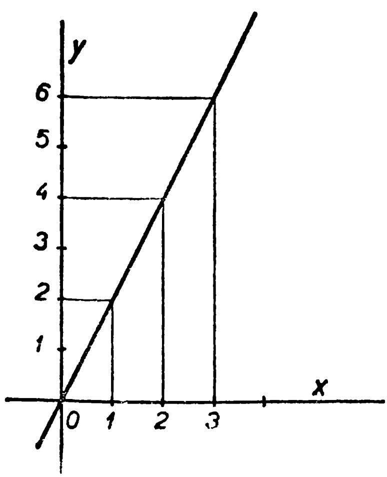
1. úloha.

Znázorněte graficky funkci $y = 2x$.

Nejdříve sestavíme tabulku této závislosti

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
d	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

a pak vyneseme do diagramu jednotlivé body. (Obr. 12.)

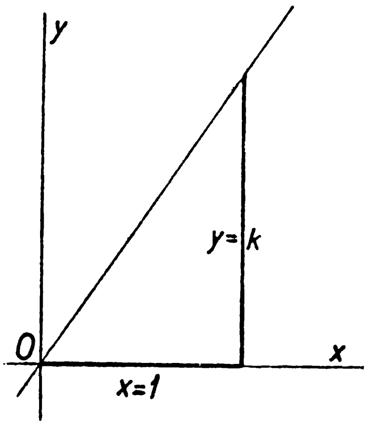


Obr. 12.

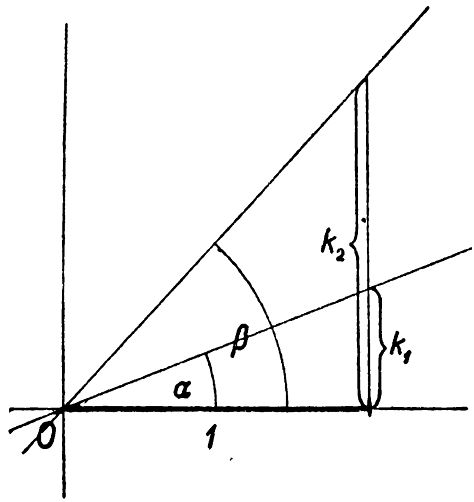
Spojením těchto bodů vznikne přímka jdoucí počátkem O. Lze dokázat, že každá rovnice $y = kx$ je graficky znázorněna přímkou.

Jestliže je $x = 0$, je $y = 0$. Bod, jehož obě souřadnice se rovnají nule, leží v počátku. Tento bod leží také na přímce p (neboť jeho souřadnice vyhovují rovnici $y = kx$). Musí proto přímka p procházet počátkem.

Rovnici $y = kx$, která vyjadřuje přímou úměrnost, nazýváme **rovnicí přímky jdoucí počátkem,** Jestliže v ní zvolíme $x = 1$, pak $y = k$. Viz obr. 13.



Obr. 13.



Obr. 14.

Úhel, který svírá přímka $y = kx$ s osou x, závisí na velikosti konstanty k . Proto konstantu nazýváme také směrnice přímky (neboť udává její směr). Viz obr. 14.

2. *úloha* (viz obr. 15).

Máme najít rovnici přímky, která prochází počátkem a bodem $A(4; 5)$.

Souřadnice bodu A musí vyhovovat rovnici $y = kx$, t. j.

$$5 = k \cdot 4.$$

Z toho $k = \frac{5}{4} = 1{,}25$, takže rovnice této přímky je

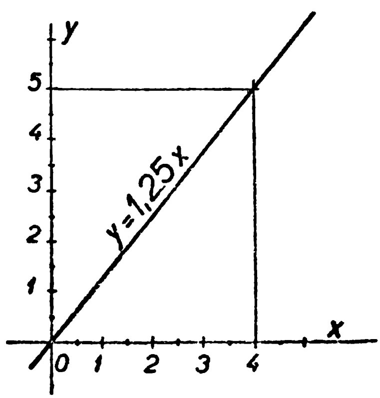
$$y = 1{,}25x.$$

Toho, že grafickým znázorněním přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem, můžeme užíti k rychlému (ale ne příliš přesnému) řešení úloh o přímé úměrnosti, jako jsou třeba úlohy na výpočet počtu procent. (Takové řešení provádíme zpravidla na milimetrovém papíru).

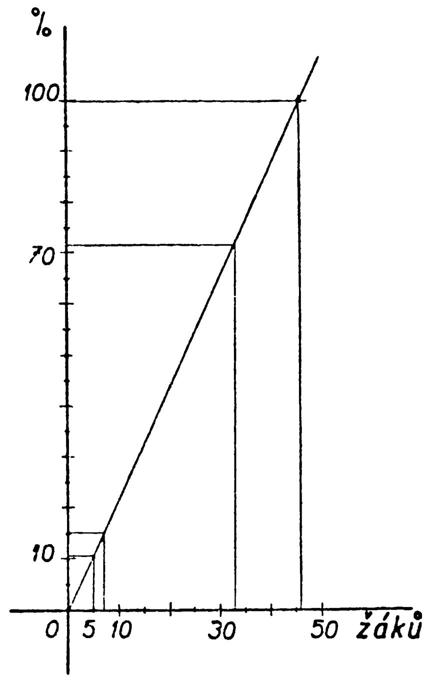
3. úloha (viz obr. 16).

Ve třídě je 46 žáků, z nichž 5 prospělo s vyznamenáním, 33 prospělo, 7 neprospělo a 1 nebyl tříděn. Vyjádřete vše v procentech!

Počet procent je přímo úměrný procentové části (v naší úloze počtu žáků); 100% odpovídá 46 žákům. Zvolíme za jednotku 1 mm; sestrojíme bod (46; 100) a spojíme jej s počátkem. Na ose úseček čteme procentové části (počet žáků); na ose pořadnic čteme ihned příslušný počet procent



Obr. 15.



Obr. 16.

Cvičení.

885. Jakou rovnici má přímka, která prochází počátkem a mimo to a) bodem A (13; 8); b) bodem B(—15; 5); c) bodem C(—9; —7); d) bodem D(6; —10)?

886. Rozhodněte, zda body A(2; 3), B(2,6; 4), C(—1,9; —2,8), D(—7,4; —11,1) leží na přímce $y = 1{,}5x$. Lze se spolehnouti na grafické znázornění?

887. Je dána přímka $y = 2{,}8x$. Vypočtěte a) jakou pořadnici mají body této přímky, jejichž úsečky jsou 2,5; —4,2; b) jakou úsečku mají body této přímky, jejichž pořadnice jsou 2,5; —4,2.

888. Znázorněte graficky převod čtverečních sáhů na m². Pro tento převod platí závislost vyjádřená přibližně rovnicí $y = 3{,}6x$, v níž nezávisle proměnnou je počet čtver. sáhů a závisle proměnnou je počet čtver. metrů.

889. Z předešlého grafu zjistěte: a) kolik m² je 1,5; 2,5; 6; 10 čtverečních sáhů; b) kolik čtverečních sáhů je 2,4; 3,6; 8; 10 m².

*890. Pracovní norma horníka je 13,8 q uhlí na směnu, což považujeme za 100%. Narube-li horník za směnu r q uhlí a jestliže to je p% z normy, říkáme, že dosáhl pracovního výkonu p%. Sestrojte příslušný diagram a vyčtěte z něho pracovní výkon horníka, který za směnu narube 9; 15; 16,4; 18; 21; 20,4 q uhlí. (1 q narubaného uhlí znázorněte délkou $\frac{1}{2}$ cm a 100% normy délkou 5 cm.)

5. Nepřímá úměrnost a její znázornění.

1. úloha.

Sledujte:

Jedu-li rychlostí 25 km/hod, dojedu z Prahy do Plzně za 4 hod.
Jedu-li rychlostí 50 km/hod, dojedu z Prahy do Plzně za 2 hod.
Jedu-li rychlostí $12\frac{1}{2}$ km/hod, dojedu z Prahy do Plzně za 8 hod.
Jedu-li rychlostí x_1 km/hod, dojedu z Prahy do Plzně za y_1 hod.
Jedu-li rychlostí x_2 km/hod, dojedu z Prahy do Plzně za y_2 hod.

Rychlost a doba se mění v obráceném poměru. Zvětšuje-li se rychlost, zmenšuje se doba a naopak. (Jsou-li na př. dvě rychlosti v poměru $\frac{25}{50}$, t. j. $\frac{1}{2}$, jsou příslušné doby v poměru $\frac{4}{2}$, t. j. $\frac{2}{1}$.)

Všimneme-li si blíže jednotlivých součinů libovolných hodnot nezávisle proměnné x a příslušné závislé proměnné y, zjistíme, že je stálý.

Na př.

$$25 \,.\, 4 = 50 \,.\, 2 = 12{,}5 \,.\, 8 = x_1 y_1 = x_2 y_2 = xy.$$

Označíme-li tento stálý poměr písmenem k, pak lze napsati:

$$k = xy,$$

z čehož

$$y = \frac{k}{x},$$

což je rovnice nepřímé úměrnosti, kde x značí nezávisle proměnnou, y příslušnou závisle proměnnou a k konstantu, která i zde se nazývá konstanta úměrnosti.

Označme dvě libovolné hodnoty nezávisle porměnné x_1 a x_2, jim odpovídající hodnoty závisle proměnné y_1 a y_2, pak skutečnost, že jsou v obráceném poměru, zapíšeme rovnicí

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1},$$

z čehož plyne $$x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

Označte hodnotu levé i pravé strany rovnice písmenem k; potom

$$k = x_1 y_1, \; k = x_2 y_2,$$

čili

$$y_1 = \frac{k}{x_1}, \quad y_2 = \frac{k}{x_2}.$$

Protože x_1, x_2 jsou zcela libovolné hodnoty nezávislé proměnné, platí rovnice pro jakékoli jiné nezávislé x na něm závislé y. Každou nepřímou úměrnost lze napsat ve tvaru

$$y = \frac{k}{x}.$$

Jestliže do rovnice $y = \frac{k}{x}$ dosadíme $x = 1$, je $y = k$, což značí, že konstanta se rovná té hodnotě závislé proměnné y, pro kterou se nezávisle proměnná x stala jednotkou.

Všimněme si toho na dvou příkladech:

1. V továrně na mycí prášek dávají prášek do válcovitých krabiček. Prášku je vždy 100 g. Krabička musí být tolikrát vyšší, kolikrát je menší její průřez. Proto výška (v) je nepřímo úměrná průřezu (s).

Platí tedy $v = \frac{k}{s}$ Jestliže $s = 1$, je $v = k$ a konstanta úměrnosti se rovná výšce krabičky o jednotkovém průřezu; kdyby prášek chtěli sypat do krabic o průřezu n-krát větším, byla by výška n-krát menší, než je výška krabičky, do níž se prášek sype.

2. Víme, že rychlost je nepřímo úměrná době potřebné k proběhnutí určité dráhy, což lze vyjádřit rovnicí

$$c = \frac{s}{t},$$

kde c = rychlost, s = dráha, t = čas.

Jestliže $t = 1$, je $c = s$, což znamená, že rychlost tělesa se musí číselně rovnat dráze. (Je-li na př. dráha 60 km a má-li ji auto projet za 1 hod., musí jeti rychlostí 60 km/hod, která se číselně rovná dráze 60 km.)

3. Označíme-li čitatele zlomku a, jmenovatele b, hodnotu zlomku c, je $c = \frac{a}{b}$.

Jestliže považujeme a za konstantu, je hodnota zlomku nepřímo úměrná jmenovateli. Protože však také $c = \frac{1}{b} \cdot a$, lze říci, že hodnota zlomku je přímo úměrná čitateli, jestliže jmenovatele zlomku považujeme za konstantu.

(S těmito větami jsme se již setkali: Kolikrát se při stejném jmenovateli zvětší čitatel, tolikrát se zvětší hodnota zlomku; kolikrát se při stejném čitateli zvětší jmenovatel, tolikrát se zmenší hodnota zlomku.)

2. úloha.

Užijeme rovnice nepřímé úměrnosti v tomto případě:

V továrně měli k poháněcímu kolu o průměru 45 cm, které má 150 obrátek za minutu, zhotovit převodové kolečko o 750 obrátkách za minutu. Jak veliký průměr bude mít toto kolečko?

Víme, že počet obrátek je při stálé obvodové rychlosti nepřímo úměrný průměru kola. Jestliže průměr většího kola je d_1 a počet obrátek o_1 průměr menšího kola d_2, příslušný počet obrátek o_2, pak platí

$$d_2 o_2 = d_1 o_1,$$

kde hodnota součinů $d_2 o_2$, $d_1 o_1$ je konstantní.

Je tedy hledaný průměr kola

$$d_2 = \frac{d_1 o_1}{o_2}, = \frac{45 \cdot 150}{750} = 9 \text{ (cm)}.$$

3. úloha.

Sestrojme si diagram funkční závislosti $y = \frac{k}{x}$ v tomto případě:

Průměr d dm kola a počet obrátek o za jednotku doby jsou při stálé obvodové rychlosti veličiny nepřímo úměrné. Kolo o průměru 1 dm se otáčí za časovou jednotku 100krát. Závislost počtu obrátek na průměru kola je vyjádřena rovnicí

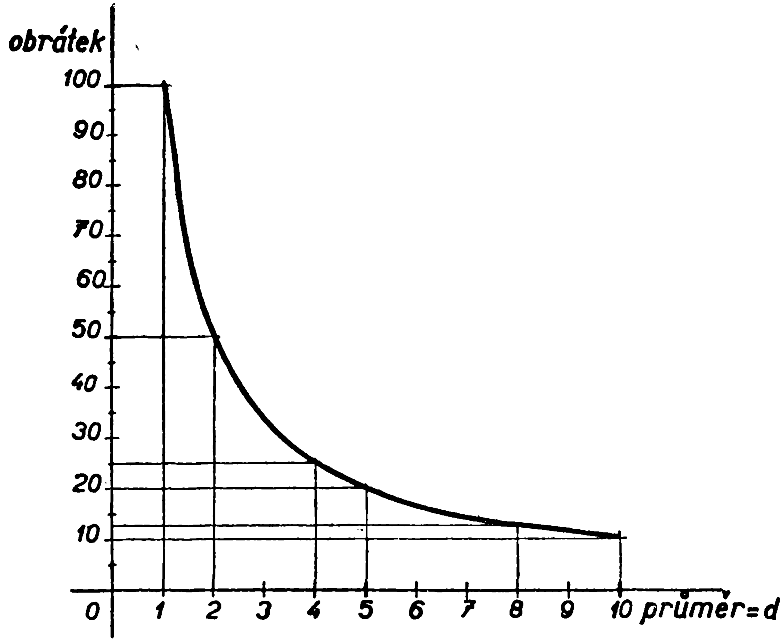
$$o = \frac{100}{d}$$

Sestavte tabulku pro hodnoty d od 1 do 20.

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12,5	20
o	100	50	$\frac{100}{3}$	25	20	$\frac{100}{6}$	$\frac{100}{7}$	12,5	$\frac{100}{9}$	10	8	5

Tyto hodnoty naneseme jako souřadnice do diagramu (na osu x vyneste dílky po 1 cm, na osu y po 1 mm; obr. 17).

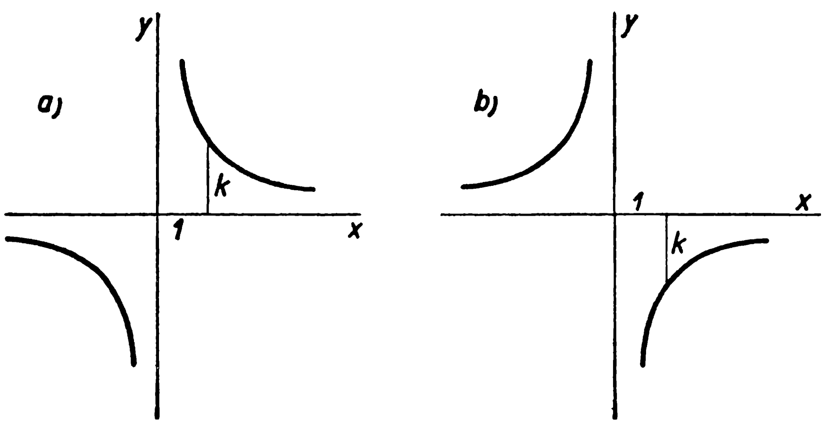
Obecně je však také možno do rovnice $y = \frac{100}{x}$ dosadit za x záporné hodnoty (pak ovšem y je také záporné).



Obr. 17.

Vynesme do diagramu i tyto hodnoty jako souřadnice. Všechny body vyplňují jistou křivku, která znázorňuje nepřímou úměrnost. Tuto křivku nazýváme rovnoosá hyperbola. Skládá se ze dvou nesouvisících větví.

Obr. 18a představuje průběh hyperboly při kladném k, obr. 18b představuje její průběh při záporném k.



Obr. 18.

Sledujte, jakých hodnot nabývá y pro rostoucí hodnoty x.

x	1	10	100	1 000	100 000	10 000 000
y	100	10	1	0,1	0,001	0,000 01

Sledujte, jakých hodnot nabývá y pro x blízká nule.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,000 01
y	100	1 000	10 000	100 000	10 000 000

Vzrůstá-li hodnota nezávisle proměnné x, hodnota zlomku $y = \frac{k}{x}$ se neustále zmenšuje, proto se body na obou větvích hyperboly tím více blíží k ose x, čím dále jsou od počátku.

Jestliže se však hodnota x blíží k nule, hodnota zlomku $y = \frac{k}{x}$ se zvětšuje, a proto se body na obou větvích hyperboly blíží k ose y tím víc, čím dále jsou od počátku.

Protože rovnoosá hyperbola je grafickým vyjádřením rovnice nepřímé úměrnosti $y = \frac{k}{x}$, kterou lze napsat ve tvaru $xy = k$, nazýváme ji **rovnice rovnoosé hyperboly.**

Jestliže v rovnici $y = \frac{k}{x}$ je $x = 1$, pak $y = k$, takže hyperbola prochází bodem, jehož souřadnice jsou $(1; k)$. Proto konstanta úměrnosti má tutéž hodnotu jako úsek, který vytíná rovnoosá hyperbola na pořadnici, která je od osy y o 1 jednotku vzdálená.

Cvičení.

391. a) Vyjádřete graficky závislost výšky obdélníka o obsahu 36 cm^2 na jeho základně. b) Napište rovnici této závislosti.

392. Vyjádřete graficky funkční závislost převrácené hodnoty na daném čísle.

393. Auto ujede 100 m za t vteřin. Vyjádřete jeho rychlost c km/hod jako funkci času t (vteřin) potřebného k ujetí 100 m.

***394.** Rychlost c kapaliny proudící v potrubí je nepřímo úměrná průřezu potrubí S. Zapište tuto větu matematicky, a to dvojím způsobem podle toho, kterou z obou veličin považujete za nezávisle proměnnou. Jaký význam má konstanta úměrnosti v obou případech?

***395.** Výšky sloupců dvou vzájemně se nemísících kapalin ve spojitých nádobách (měřené od společného rozhraní obou kapalin) jsou nepřímo úměrné měrným vahám kapalin. a) Sahá-li v jednom rameni voda do výše 60 cm, jak vysoko sahá rtuť ($s = 13,6$ g/cm^3) ve druhém rameni? b) Je-li v jednom rameni voda do výše 40 cm a ve druhém olej do výše 43 cm, jaká je měrná váha oleje?

896. Podle měření provedených v letech 1792—1799 ve Francii bylo zhotoveno platiniridové měřítko, které se nazývá mezinárodní metr a které mělo být rovno jedné desetimiliontině vzdálenosti zemského pólu od rovníku (zvané zemský kvadrant). Pozdější měření však ukázala, že toto měřítko je asi o 0,2287 mm kratší. Kolik m měří podle toho zemský kvadrant?

6. Lineární funkce.

Třetí druh funkční závislosti, s kterou se často setkáme, je **závislost lineární**. Uvedeme ji na příkladu:

Tkadlec pracující na poloautomatickém stavu, měl na začátku směny 3 m plátna ve stavu. Každou hodinu utkal průměrně $2\frac{1}{2}$ m plátna. Sledujte, jak přibývá plátna ve stavu.

Množství plátna ve stavu

na počátku směny.....	3 m
za 1 hod.............	$5\frac{1}{2}$ m $= 1 \,.\, 2{,}5$ m $+ 3$ m
za 2 hod.	8 m $= 2 \,.\, 2{,}5$ m $+ 3$ m
za 3 hod.	$10\frac{1}{2}$ m $= 3 \,.\, 2{,}5$ m $+ 3$ m
⋮	⋮ ⋮ ⋮
za t hod.	a m $= t \,.\, 2{,}5$ m $+ 3$ m

Funkční závislost utkaného množství plátna (a) na čase (t) je vyjádřena rovnicí

$$a = 2{,}5t + 3.$$

Obecně tento druh závislosti vyjadřujeme rovnicí

$$y = kx + q;$$

x značí nezávisle proměnnou, y závisle proměnnou, k a q jsou konstanty. Závislost vyjádřená touto rovnicí se jmenuje **závislost lineární**. Říkáme také, že proměnná y je **lineární funkcí** proměnné x.

Jestliže je v této rovnici $q = 0$, pak $y = kx + 0$, čili $y = kx$, což je rovnice přímé úměrnosti. Podle toho je přímá úměrnost zvláštní případ lineární funkce.

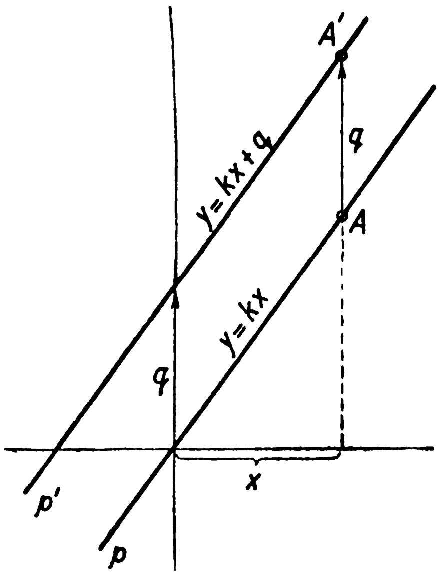
Jak znázorníme lineární funkci graficky?

Sestrojme diagram funkce

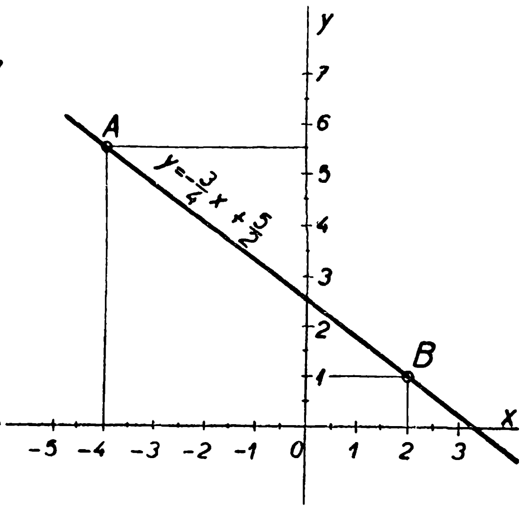
$$y = kx + q \text{ pro } q = 0.$$

V tomto případě je $y = kx$. Již z dřívějška víme, že grafickým vyjádřením této funkce je přímka p procházející počátkem O. Každý bod této přímky má pořadnici kx (viz obr. 19).

Posuneme-li bod A přímky p rovnoběžně ve směru osy y o konstantu q, vznikne bod A' o pořadnici $kx + q$. Protože x může nabýti všech možných hodnot, můžeme tento výrok opakovati pro kterýkoli bod přímky p. Posuneme-li všechny body přímky p o konstantu q rovnoběžně s osou y, vyplňují přímku p', která bude rovnoběžná s přímkou p.



Obr. 19.



Obr. 20.

Je-li q kladné, posuneme přímku ve směru, v němž měříme y kladně, je-li q záporné, posuneme opačným směrem.

Je tedy grafickým znázorněním lineární funkce $y = kx + q$ přímka rovnoběžná s přímkou znázorňující funkci $y = kx$ a posunutá o q jednotek podél osy y.

Tuto přímku sestrojíme nejpohodlněji, známe-li některé dva její body. Chceme-li třeba sestrojit diagram funkce

$$y = -\tfrac{3}{4}x + \tfrac{5}{2}.$$

zvolíme jednou $x = -4$, z čehož vypočteme $y = 5\frac{1}{2}$, po druhé třeba $x = 2$, z čehož $y = 1$. Body $A(-4; 5\frac{1}{2})$, $B(2; 1)$ leží na hledané přímce, kterou z nich snadno sestrojíme. (Viz obr. 20.)

Rovnice $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$, a také každá jiná rovnice tvaru $y = kx + q$, která vyjadřuje lineární funkci, je rovnice 1. stupně o dvou neznámých.

Z každé rovnice 1. stupně o dvou neznámých dovedeme vypočíst jednu neznámou jako lineární funkci druhé neznámé. Na př. z rovnice

$$3x + 4y = 10$$

vypočteme $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$, což je lineární funkce znázorněná na obr. 20. Přímka zobrazená na obr. 20 vyjadřuje tedy graficky také rovnici

$$3x + 4y = 10.$$

Obecně: Z každé rovnice $ax + by = c$, v níž $b \neq 0$, můžeme vypočíst

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},$$

což je lineární funkce, o které víme, že je zobrazena přímkou. Tato přímka ovšem také zobrazuje původní rovnici $ax + by = c$.

Kdyby v dané rovnici bylo $a = 0$, $b \neq 0$, vyhovuje jí každá dvojice čísel

$$x \text{ libovolné}, \; y = \frac{c}{b}.$$

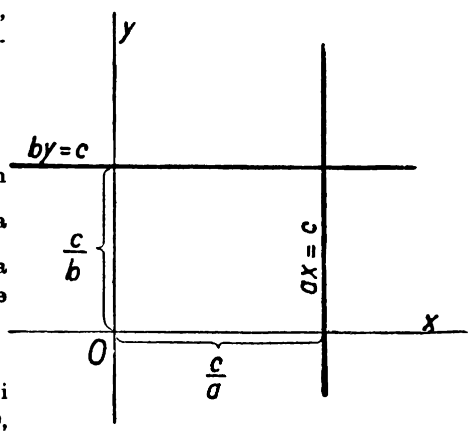
Jejím grafem je souhrn všech bodů, jejichž úsečka je libovolná a pořadnice rovna $\frac{c}{b}$. Je to přímka rovnoběžná s osou úseček ve vzdálenosti $\frac{c}{b}$ (obr. 21).

Kdyby bylo $a \neq 0$, $b = 0$, vyhovuje naší rovnici každá dvojice čísel

$$x = \frac{c}{a}, \; y \text{ libovolné}.$$

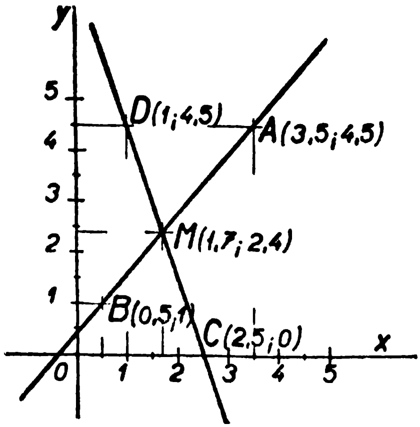
Jejím znázorněním je pak souhrn všech bodů, jejichž úsečka je $\frac{c}{a}$ a pořadnice libovolná. Je to přímka rovnoběžná s osou pořadnic ve vzdálenosti $\frac{c}{a}$ (obr. 21).

Není možno, aby v rovnici $ax + by = c$ bylo současně $a = 0$, $b = 0$.



Obr. 21.

Možno tedy říci: **Grafickým znázorněním každé rovnice 1. stupně o dvou neznámých je přímka**, kterou sestrojíme, budeme-li znát její dva body. Tohoto poznatku užíváme, chceme-li graficky řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Každá z těchto rovnic vyjadřuje přímku; souřadnice každého bodu této přímky vyhovují její rovnici. Souřadnice společného průsečíku obou přímek vyhovují oběma rovnicím. Jsou tedy řešením obou rovnic.

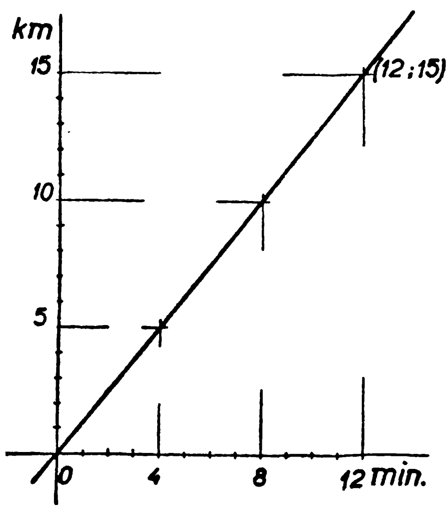


Obr. 22.

V obr. 22 je graficky řešena soustava rovnic

$$14x - 12y = -5,$$
$$6x + 2y = 15.$$

Přímka p_1, která vyjadřuje první rovnici, byla sestrojena z bodů $A(3{,}5;\ 4{,}5)$, $B(0{,}5;\ 1)$ a přímka p_2, která vyjadřuje druhou rovnici, byla sestrojena z bodů $C(2{,}5;\ 0)$, $D(1;\ 4{,}5)$. Obě se protínají v bodě M. Z obrázku vyčteme jeho souřadnice (1,7; 2,4), takže daná soustava rovnic má kořeny $x = 1{,}7$; $y = 2{,}4$. Přesvědčte se výpočtem, že je to pravda.



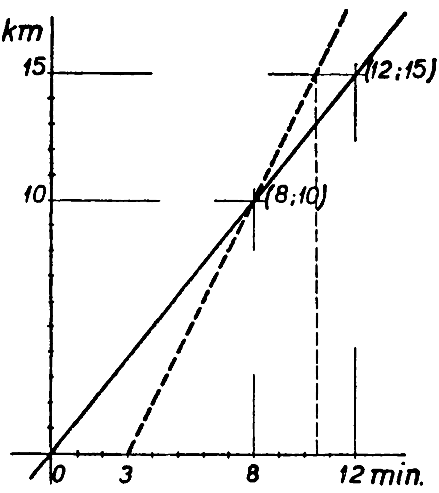
Obr. 23.

K lineárním funkcím vedou úlohy o rovnoměrných pohybech, které lze také výhodně a rychle řešit graficky.

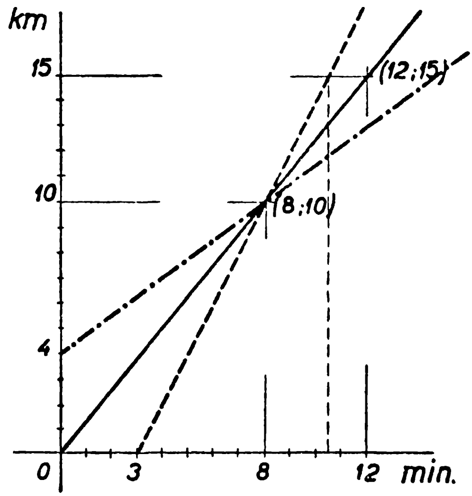
Znázorňujte následující pohyby graficky postupně do téhož obrazce a napište si vždy příslušnou rovnici závislosti dráhy na čase:

a) Z obce A do D je 15 km. Auto Praga ujelo tuto vzdálenost za 12 minut (obr. 23).

Vykonaná dráha (při rovnoměrném pohybu) je přímo úměrná času. Čím je tedy znázorněna závislost dráhy na čase? Jak daleko od výchozí stanice je auto za 4 minuty; za 8 minut? Vzdálenost auta od A je dána rovnicí $s = \frac{5}{4}t$.



Obr. 24.

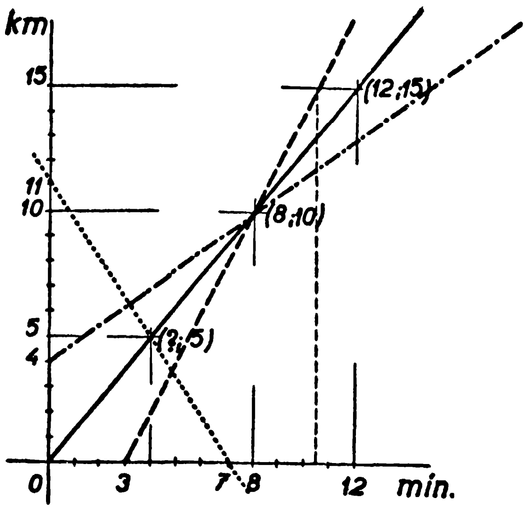


Obr. 25.

b) 3 minuty po něm vyjelo z A týmž směrem auto Tatra rychlostí 120 km/hod. Předhonilo předešlé auto v obci C. Jak daleko je C od A? Za kolik minut dojelo první auto do D? (Obr. 24.) Jak daleko bylo auto Praga, když auto Tatra vyjelo? Co znamená, že se obě přímky proťaly? Za průsečíkem se přímky zase rozbíhají. Co to znamená? Která přímka je strmější? Proč? Jak se projevuje rychlost na sklonu přímky? Vzdálenost tohoto auta od obce A na čase t je dána rovnicí $s = 2t - 6$.

c) Když auto Praga bylo v A, ujíždělo 4 km od A nákladní auto rychlostí 45 km/hod. týmž směrem (obr. 25). Potkala se naše tři auta? Kde? Závislost dráhy nákladního auta na čase má rovnici $s = \frac{3}{4}t + 4$.

d) V téže době, když auto Praga vyjelo z obce A, přijížděl ze vzdálenosti 11 km od A opačným směrem motocykl rychlostí 90 km/hod. Obě vozidla se potkala v obci B (obr. 26). Za kolik minut? Jak daleko je z A do B? Kdy a kde se potkal motocykl s ostatními auty? Závislost dráhy motocyklu na čase je vyjádře-

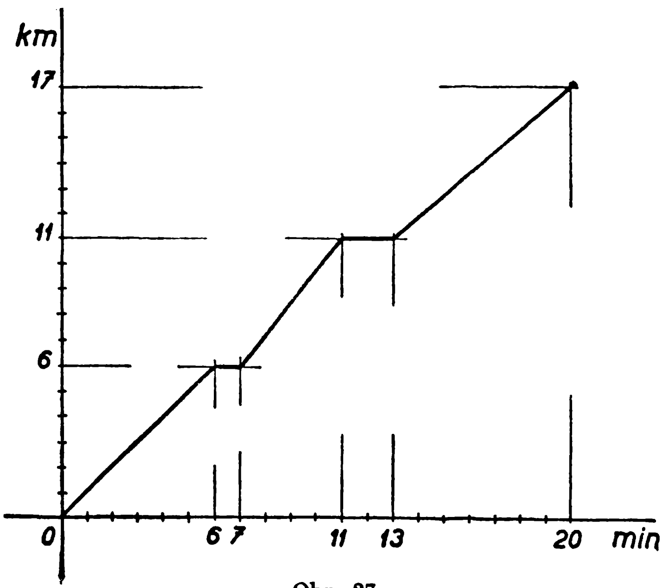


Obr. 26.

na rovnicí $s = -\frac{3}{2}t + 11$. Uvážíme-li, že rychlost pohybu směrem AB je kladná, pak rychlost pohybu opačným směrem je záporná: proto $-\frac{3}{2}$.

Jestliže závislosti dráhy na čase u prvních 3 aut, jedoucích směrem kladným, byly vyznačeny přímkami stoupajícími, je tato závislost u motocyklu jedoucího opačným, tedy záporným směrem, vyznačena přímkou klesající.

Právě tak, jako jsme vyjádřili graficky pohyb vozidel na silnici, lze vyjádřit i pohyb vlaků na železniční trati. Takové vyjádření se jmenuje grafický jízdní řád.

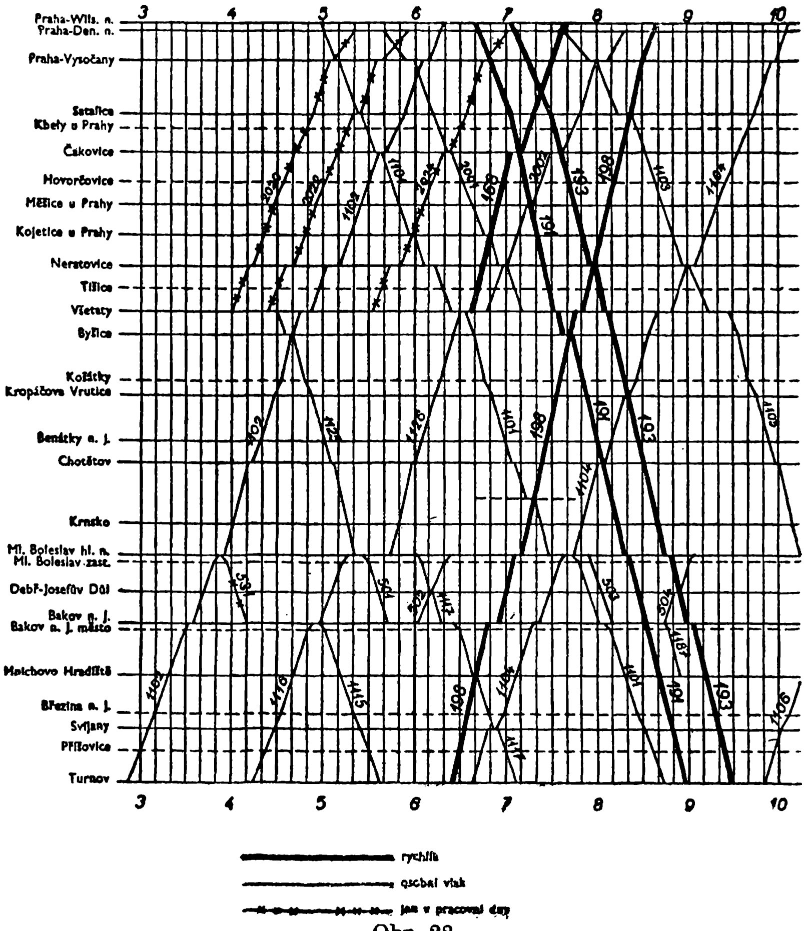


Obr. 27.

Na železnicích užívají téměř výhradně grafických jízdních řádů. Jsou pro železniční zaměstnance mnohem výhodnější než tabulkové jízdní řády, neboť z nich na první pohled poznají, kdy a kde vlaky křižují, kdy vlak přijíždí a odjíždí, jak dlouho se zdrží ve stanici a pod.

Na obr. 27 je znázorněna dráha vlaku jedoucího ze stanice A do stanice D. Ze stanice A do B je 6 km; vlak tam jede 6 minut a stojí 1 minutu. Do C, kam je 5 km, jede vlak 4 minuty; zdrží se 2 minuty. Pak jede 7 minut do D, kam je 6 km.

Na obr. 28 je uvedena část grafického jízdního řádu pro trať



Obr. 28.

Praha—Turnov. Na svislé ose jsou zakresleny vzdálenosti od Prahy se jmény stanic, na vodorovné ose je nanášen čas po 10 minutách od 3 do 10 hodin.

Vidíme tu čáry dvojího směru: čáry z levého horního rohu do pravého dolního značí vlaky jedoucí z Prahy k Turnovu (jsou označeny lichými čísly); druhé čáry jdou z levého dolního rohu do pravého horního a značí vlaky jedoucí opačným směrem (jsou označeny sudými čísly). Čím rychleji jede vlak, tím strmější čarou je zobrazen jeho pohyb; zdržení vlaků ve stanici jsou znázorněna úsečkami rovnoběžnými s osou úseček. Pokuste se přečíst dobu odjezdu, příjezdu a zdržení vlaků v některých stanicích.

Cvičení.

397. Znázorněte graficky do téhož diagramu tyto lineární funkce: $y = \frac{1}{2}x + 3$; $y = 2x - 3$; $y = \frac{3}{8}x + 3$; $y = -x - 4$; $y = 3 - 2x$; $x + 2y - 3 = 0$.

398. a) Napište převodní vztahy, jimiž se přepočítávají teploty měřené ve stupnici Fahrenheitově na stupnici Celsiovu a naopak ($0°$ C $= 32°$ F, $100°$ C $= 212°$ F). b) Kolik stupňů F jest $20°$ C, $-20°$ C? c) Kolik stupňů C měří $0°$ F, $96°$ F?*) d) Která teplota je v obou stupnicích udána stejným počtem stupňů?

399. Objem plynu (při stálém tlaku) je lineární funkce teploty, a to taková, že zvýšením teploty o $1°$ C se zvětší objem plynu o $\frac{1}{273}$ toho objemu, který mělo totéž množství plynu při teplotě $0°$ C (Gay-Lussac, 1801). Označte objem plynu při teplotě $0°$ značkou $V°$ a napište, jak závisí objem V na teplotě t.

400. Také tlak plynu (při stálém objemu) je lineární funkcí teploty, a to takovou, že zvýšením teploty o $1°$ C se zvětší tlak plynu o $\frac{1}{273}$ toho tlaku, který mělo totéž množství plynu při teplotě $0°$ C (Amontons, 1700). a) Byl-li při teplotě $0°$ C naměřen tlak p_0 a při teplotě $t°$ C tlak p, vypočtěte teplotu t pomocí p, p_0. b) Pro vodík bylo naměřeno $p_0 = 1\,000$ mm Hg; stanovte, o kolik mm Hg vzroste jeho tlak, vzroste-li teplota o $1°$ C.**)

***401.** Kyvadlo 90 cm dlouhé má dobu kyvu 0,952 sec, kyvadlo 100 cm dlouhé má dobu kyvu 1,003 sec. Jak dlouhé je kyvadlo, jehož doba kyvu je právě 1 sec? (V malém rozmezí můžeme předpokládat, že délka kyvadla je lineární funkcí doby kyvu.)

---

*) Tyto teploty zvolil Fahrenheit (1714) za základní body své teploměrné stupnice. Prvá jest teplota směsi ledu a salmiaku, druhá teplota lidského těla.

**) Přesná měření teploty se provádějí teploměrem plněným vodíkem, jímž se určuje teplota podle tlaku vodíku.

402. Graficky řešte soustavu rovnic:

a) $x + 3y = -14$, $3x - y = -5$. b) $3x + 2y = 2$, $4x + y = 4$. c) $3x - 4y = 12$, $12x + 16y = 15$.

403. „Slovenská strela“ vyjíždí z Prahy v 18 hod. 22 min. a přijíždí do Brna (255 km) v 21 hod. 30 min. Předpokládáte-li, že jede stále stejně rychle, vyjádřete graficky závislost její dráhy na čase a z diagramu vyčtěte a) kdy projíždí Kolínem (61 km), Pardubicemi (105 km), Chocní (140 km) a Českou Třebovou (165 km). b) Kolik km ujede za hodinu a za jak dlouho ujede 100 km.

404. Vlak vyjel v 0^{00} rychlostí 60 km/hod směrem k A. Sestavte rovnici závislosti dráhy s na čase t a naznačte graficky. Za 5 minut po něm vyjel z téže stanice vlak rychlostí 90 km/hod týmž směrem. V témž diagramu znázorněte graficky. Vyčtěte z diagramu, kdy se vlaky setkají a jak daleko od výchozí stanice je stanice, v níž druhý vlak dohonil první. Řešte tento příklad také úsudkem i rovnicí.

405. Vlak jedoucí rychlostí 90 km/hod vyjel v 0^{00} směrem k A; 5 minut před ním vyjel týmž směrem vlak rychlostí 60 km/hod. Znázorněte graficky!

406. Z určitého místa vyjede cyklista rychlostí 24 km/hod. O hodinu později vyjede za ním automobil rychlostí 60 km/hod. Kdy a kde cyklistu dohoní? Řešte graficky!

***407.** Řešte graficky úlohu: Kolikrát se kryjí ručičky hodin během 12 hodin a kdy to nastane? (Znázorněte závislost úhlu, který ručičky opíší, na čase.)

408. Znázorněte graficky: Ze stanice A do B je 7 km. Vlak tam jede 7 min. a stojí 1 min. Do C, kam je 5 km, jede vlak 4 min., zdrží se 7 min. Pak jede 5 min. do D, kam je 7 km.

409. V témže obrazci znázorněte závislost dráhy na čase pro zrychlený vlak, který vyjel z A o 9 min. později; jel do B 4 min. a projel bez zastavení; z B do C jel 3 min. a zase projel bez zastavení, z C do D jel 5 min. Za kolik minut předjel zrychlený vlak osobní vlak? Jak daleko od výchozí stanice? Za kolik minut byl ve stanici D? Kde asi byl v této době osobní vlak? Jak daleko od výchozí stanice A byl zrychlený vlak, když osobní vjel do stanice B? Jak daleko byl zrychlený vlak, když osobní vyjížděl ze stanice B? Jak dlouho stál osobní vlak ve stanici C, když zrychlený projížděl?

VII. Opakování učiva.

a) *Dělitelnost.*

Cvičení.

410. Najděte všecka čísla větší než 500 a menší než 1 000, jež jsou dělitelná číslem 72.

411. Dokažte: Číslo $n^2 - 1$ není prvočíslem pro žádné celé n větší než 2.

412. Kterým pokud možno nejmenším celým číslem třeba násobiti číslo 9 450, aby vyšla druhá mocnina nějakého celého čísla?

413. Napište všecka celá čísla menší než 100 složená ze dvou prvočinitelů. Kolik je takových čísel?

414. Ze všech trojciferných čísel mají nejvíce dělitelů čísla: 840 (32 dělitele), 720 (30 dělitelů), 960 (28 dělitelů) a 900 (27 dělitelů). Stanovte všecky ty dělitele!

415. Které pravidelné mnohoúhelníky mají vnější (a proto i vnitřní) úhly vyjádřené celistvým počtem stupňů?

416. Určete dvě čísla, obě větší než 100, ale menší než 150, aby jejich největší společný dělitel byl 14.

417. Ve třídě je více žáků než 40 a méně než 50. Postavíme-li je do čtyřstupů nebo do šestistupů, zbude po každé jeden žák. Kolik je žáků?

418. V pokoji jdou dvoje hodiny. Jedny z nich tikají za minutu 72krát a druhé 60krát. Jestliže se v určitý okamžik sešly jejich tiky, po kolika vteřinách se opět sejdou?

419. Jsou-li dvě čísla složena z prvočinitelů takových, že žádný prvočinitel jednoho čísla není prvočinitelem druhého, jsou to čísla navzájem nesoudělná. Dokažte!

420. Dokažte, že čísla a, $ab + 1$ jsou navzájem nesoudělná.

421. Je-li D největší společný dělitel a n nejmenší společný násobek čísel a, b, je $ab = Dn$. Dokažte!

422. Rozložte v jednoduché činitele:

a) $b - b^2$; b) $16u^3 - 4u$;

c) $4m^3 - 12m^2n + 9mn^2$; d) $x^2 - (y - 1)^2$.

423. Je-li a číslo celé, je $a^3 - a$ dělitelné třemi. Dokažte!

424. Je-li p prvočíslo větší než 3, je vždy jedno z čísel $p - 1$, $p + 1$ dělitelné a) čtyřmi, b) šesti. Dokažte!

b) *Lomené algebraické výrazy.*

425. Slučte a napište, za jakých podmínek má výpočet smysl:

a) $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}$; b) $\dfrac{1}{c} - \dfrac{c + d}{cd}$;

c) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{a - 1}{a^2} - \dfrac{a - 1}{a^3} - \dfrac{a - 1}{a^4}$; d) $\dfrac{k}{k + h} - \dfrac{h}{k - h}$;

e) $\dfrac{z}{z - 1} + \dfrac{1}{1 - z}$; f) $\dfrac{r + s}{r - s} - \dfrac{r^2 + s^2}{r^2 - s^2}$;

g) $\dfrac{1}{1\, v(v - 1)} + \dfrac{1}{(v - 1)(v - 2)}$.

426. Znásobte a napište, za jakých podmínek má výpočet smysl:

a) $\dfrac{4u + 6}{9u + 6} \cdot \dfrac{6u + 4}{6u + 9}$; b) $\dfrac{a - a^2}{b - b^3} \cdot \dfrac{b - b^3}{a - a^3}$;

c) $\dfrac{a - ab}{b - ab} \cdot \dfrac{b - bc}{c - bc} \cdot \dfrac{c - ca}{a - ca}$; d) $\left(\dfrac{2}{m - 1} + 1\right)\left(\dfrac{2}{m + 1} - 1\right)$;

e) $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(x + 1 - \dfrac{1}{x + 1}\right)$; f) $\left(\dfrac{1}{z + 1} + \dfrac{1}{z - 1}\right)\left(\dfrac{1}{z + 1} - \dfrac{1}{z - 1}\right)$

427. Dělte a napište, za jakých podmínek má výpočet smysl:

a) $\dfrac{4u + 6}{9u + 6} : \dfrac{6u + 4}{6u + 9}$; b) $\dfrac{p^2 - 1}{r - 1} : \dfrac{p - 1}{r^2 - 1}$;

c) $\dfrac{a^2 - ac}{b^2 - bc} : \dfrac{ab + ac}{ab + bc}$; d) $(p - q) : \left(\dfrac{p}{q} - \dfrac{q}{p}\right)$;

e) $\left(\dfrac{r + s}{r - s} - \dfrac{r - s}{r + s}\right) : \left(\dfrac{r}{s} - \dfrac{s}{r}\right)$;

f) $\left(\dfrac{u + v}{u - v} + \dfrac{u - v}{u + v}\right) : \left(\dfrac{u + v}{u - v} - \dfrac{u - v}{u + v}\right)$.

428. Zjednodušte a napište, za jakých podmínek má výpočet smysl:

a) $\dfrac{\dfrac{2v + 2t}{v + 2t}}{\dfrac{v + t}{v}}$; b) $\dfrac{\dfrac{b^2 - ab}{a^2 - 2ab}}{\dfrac{a^2 - ab}{2b^2 - ab}}$; c) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}}$ d) $\dfrac{z - \dfrac{1}{z}}{1 - \dfrac{1}{z}}$

429. Zaměstnanci družstva spolu s dobrovolnou pracovní brigádou svezli a složili do skladiště celkem a q brambor, při čemž členové brigády složili k-krát více než zaměstnanci. Kolik q složili zaměstnanci a kolik členové brigády?

430. Roztok obsahuje a dílů rozpuštěné látky a b dílů rozpouštědla. Kolik % rozpuštěné látky a kolik % rozpouštědla obsahuje?

431. Kůl a m dlouhý je zaražen $\dfrac{1}{r}$ své délky v zemi a $\dfrac{1}{s}$ zbytku je ve vodě. Kolik m je v zemi, kolik m je ve vodě a kolik m vyčnívá nad vodou?

432. V závodě pracovalo a dělníků. Jednoho dne přešlo do jiného úseku práce b dělníků. O kolik % musí zbývající zvýšit svůj průměrný denní výkon, chtějí-li dodržet výrobní plán?

433. a) V dílně pracuje a dělníků, kteří mají dokončit určitou zakázku za d dní. Jaká část zakázky je rozpočtena denně na každého dělníka? b) Z dělníků dílny se utvořila úderka v počtu m mužů a rozhodla se, že zvýší svůj výkon o 10%. Jaká část zakázky připadne podle toho denně na každého člena úderky? c) Jakou část zakázky zhotoví denně všichni dělníci dohromady? d) Za jak dlouho zakázku dokončí? e) Dosaďte $m = a$! Jaký to má význam?

c) *Zlomky desetinné.*

Ve cvič. **434—438** stanovte meze výsledku!

434. Hrana krychle měří 12,4 cm (zaokrouhleno na desetiny). Jaký je její a) povrch, b) objem?

435. Povrch krychle měří 216 cm^2 (zaokrouhleno na jednotky). Jaká je její hrana?

436. Objem krychle měří 216 cm^3 (zaokrouhleno na jednotky). Jaká je její hrana?

437. Strany obdélníkové zahrady měří 26,7 m a 32,4 m (zaokrouhleno na desetiny). Jak dlouhá je její úhlopříčka?

438. Přepona pravoúhlého trojúhelníka je 12,7 cm, odvěsna 8,4 cm (zaokrouhleno na desetiny). Jak dlouhá je druhá odvěsna?

Ve cvič. 439—442 počítejte podle návodu v poznámce na str. 63.

439. Z půlkruhu o poloměru 10 cm byla svinuta kuželovitá nálevka. Jaký je její objem?

440. Jaké musí být rozměry válcovité nádoby, jejíž objem je 1 litr a jejíž průměr je roven výšce?

441. Jaký je poloměr koule, jejíž objem je 1 m^3?

442. Při pokusu odkapávala kapalina ze silnostěnné kapiláry v kapkách. Bylo zváženo 200 kapek a zjištěno, že váží 6,72 g. Měrná váha kapaliny je 0,845 g/cm^3. Jaký je průměr kapek za předpokladu, že jsou všecky stejné?

d) *Rovnice prvého stupně.*

443. $(3s - 2)(2s + 3) - (3s + 2)(2s - 3) = (s + 1)(s - 1) - s^2.$

444. $\dfrac{5(2 - 3n)}{6} - \dfrac{7(2n - 3)}{10} = \dfrac{4(n + 6)}{15}.$

445. $\dfrac{2k + 3}{2k + 4} - \dfrac{3k + 5}{3k + 6} = 1.$

446. $\dfrac{2x + 1}{2x + 3} = \dfrac{3x - 2}{3x + 1}.$

447. $\dfrac{1}{a + 1} - \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{a - 1} = \dfrac{2}{a^3 - a}.$

448. $2(x + 2) = 3(y - 3),$
$3(x - 2) = 2(y + 3).$

449. $(2a - 5)(b - 2) - (a - 4)(b + 1) = (a - 4)(b - 2),$
$(3a + 1)(b + 2) - (a - 1)(2b + 9) = (a - 1)(b + 2).$

450. $\dfrac{a}{5} + \dfrac{b}{2} = 1, \qquad \dfrac{a}{5} + \dfrac{b}{3} = -1.$

451. $\dfrac{r}{4} + \dfrac{s}{2} = 6, \qquad \dfrac{r}{2} - \dfrac{s}{4} = 2.$

452. $\dfrac{2z + 3}{2} + \dfrac{2u - 5}{5} = 1, \qquad \dfrac{2z - 3u}{2} + \dfrac{3z - 4u}{3} = 1.$

453. Nalezněte dvě čísla, jejichž součet je $7\frac{1}{2}$ a dvojnásobek jednoho je roven trojnásobku druhého.

454. Nalezněte dvě čísla těchto vlastností: Přičtu-li k jednomu z nich 3, dostanu třikrát více, než je druhé číslo. Přičtu-li ke druhému 2, součet bude dvakrát menší než prvé číslo.

455. Dvojciferné číslo má součet číslic 12; zaměníme-li pořádek obou číslic, je nové číslo sedmkrát větší než čtvrtina původního čísla. Které je to číslo?

456. Ve dvou konvích je celkem 40 l mléka. Jestliže odlijeme z prvé konve do druhé právě tolik, kolik tam bylo původně, a potom ze druhé odlijeme zpět do první tolik, kolik tam zůstalo po prvním odlití, bude v obou konvích stejně. Kolik l mléka je v každé konvi?

457. Žáci ve třídě si chtěli koupit kopací míč. Kdyby dal každý po 5 Kčs, nedostávalo by se jim 90 Kčs; kdyby dal každý po 10 Kčs, přebylo by jim 60 Kčs. Kolik bylo žáků a kolik stál míč?

458. Plavec plove po proudu rychlostí 96 m/min a proti proudu rychlostí 64 m/min. Určitou vzdálenost uplaval tam a zpět celkem za $12\frac{1}{2}$ min. Jaká to byla vzdálenost?

459. Cyklista jedoucí z jednoho města do druhého rychlostí 12 km/hod si vypočítal, že by přijel k cíli o 1 hod. dříve, kdyby za každou hodinu ujel o 2 km více. Na jak dlouho měl cestu rozpočtenu a jak to bylo daleko?

e) *Funkce a jejich znázornění.*

460. Z tabulky ve cvič. 355 na str. 95 stanovte hodnoty výrazu $\frac{T^2}{l}$ pro kyvadla různých délek a vyjádřete odtud dobu kyvu jako funkci délky kyvadla a délku kyvadla jako funkci doby kyvu.

461. Vyjádřete a) povrch S krychle jako funkci délky její hrany a; b) hranu a krychle jako funkci jejího objemu V; c) povrch S krychle jako funkci jejího objemu V a naopak objem V krychle jako funkci jejího povrchu S.

462. Dvě kola, z nichž jedno má průměr 12 cm a druhé 30 cm, jsou spojena převodovým řemenem. a) Vykoná-li menší kolo x obrátek, kolik jich vykoná větší kolo? b) Vykoná-li větší kolo y obrátek, kolik jich vykoná menší kolo?

463. Délka kolejnice je lineární funkcí teploty. Železná kolejnice 25 m dlouhá zvětší svou délku asi o 0,28 mm při zvýšení teploty o 1°. a) Vyjádřete její délku jako funkci teploty t. b) Kladou-li se kolejnice při teplotě 15°, jaká mezera se musí mezi nimi nechat, počítáme-li, že by za parného dne jejich teplota mohla vystoupit až na 50°?

464. Měrná váha vody je 1 g/cm^3, čistého lihu 0,795 g/cm^3. Sestavte diagram, podle něhož by bylo možno stanoviti měrnou váhu s směsi lihu a vody jako funkci koncentrace p za předpokladu, že je to funkce lineární. (Koncentrací směsi lihu a vody nazýváme počet procent lihu ve směsi; čistá voda má koncentraci 0%, čistý líh 100%.)

465. Rychlík č. 124 vyjíždí z Prahy v 16 hod. 12 min. a přijíždí do Kolína (61 km) v 17 hod. 15 min.; rychlík č. 40 vyjíždí z Prahy v 16 hod. 55 min. a přijíždí do Kolína v 17 hod. 56 min. Proti nim jede rychlík č. 15, který vyjíždí z Kolína v 16 hod. 51 min. a přijíždí do Prahy v 17 hod. 48 min., a rychlík č. 37, který vyjíždí z Kolína v 17 hod. 05 min. a přijíždí do Prahy v 18 hod. 02 min. Stanovte graficky, kdy a kde se tyto rychlíky setkají.

Z historie aritmetiky.

Aritmetika — nauka o číslech a počítání s nimi — je téměř tak stará jako lidstvo samo. S vývojem společnosti se ukázala potřeba čísla a početních výkonů, jejichž účel byl z počátku čistě praktický. Během dlouhých staletí se počtářské umění zdokonalovalo a opouštělo ponenáhlu svůj počáteční výlučně praktický ráz, až se stalo nejpřísnější školou přesných úsudků. Výsledky znovu potom sloužily praxi.

Pozornost lidstva byla zprvu obrácena k t. zv. přirozeným (t. j. celým a kladným) číslům, k nimž docházíme, chceme-li stanovit počet předmětů v nějaké skupině. Záhy však se poznalo, že při měření nevystačíme s čísly celými. Proto byly zaváděny zlomky, jejichž užívání se vyvíjelo u různých národů rozličně. Egypťané dovedli již v nejdávnějších dobách počítati se zlomky, jak je zřejmo z nejstarších dochovaných egyptských rukopisů, při čemž počítali tak, že každý zlomek rozkládali v součet t. zv. kmenných zlomků, jejichž čitatel je roven jedné. Babyloňané naproti tomu počítali se zlomky, jejichž jmenovatelé byli mocniny čísla 60, jak se to dodnes udrželo při měrách časových a úhlových. Indové vynalezli způsob počítání se zlomky velmi podobný tomu, jímž počítáme dnes. Ve středověku se počítání se zlomky učilo čistě mechanicky podle pravidel, která se žáci učili odříkávat zpaměti, takže znalost počítání se zlomky si osvojili jen ti nejpilnější. Nepřekvapuje proto, že tato znalost byla považována za vrchol vědění a že zlomky obyčejné byly v běžném životě znenáhla téměř úplně vytlačeny zlomky desetinnými. Počítání se zlomky v nové době bylo pěstováno zvláště na amerických školách se zaměřením k praxi, která sloužila kapitalistickému hospodářství a také pro nedůsledné zavedení metrické soustavy.

Již ve starověku bylo známo, že některé výkony s čísly přirozenými dávají vždy přirozená čísla za výsledky; naproti tomu zejména dělení dvou čísel přirozených vede k číslu přirozenému jen za určitých okolností. Tak byly položeny počátky nauky o dělitelnosti čísel. Některým číslům, která měla po této stránce zvlášť pozoruhodné vlastnosti, byl ve starověku přikládán zvláštní význam, na př. číslům 3, 7, 13 atd. Řekové již asi kolem roku 500 př. n. l. (Pythagorova škola) znali dělitelnost čísel a otázky s ní souvisící; vše, co bylo tehdy známo z tohoto oboru, je obsaženo ve slavném Eukleidově spisu „Základy" (kolem roku 325 př. n. l.). Eukleides dovedl stanoviti největší společné dělitele a nejmenší společné násobky čísel, věděl, že počet prvočísel je nekonečně veliký, a dovedl to dokázat. Způsob, jak lze stanoviti všecka prvočísla menší než dané číslo, pochází od Eratosthena (kolem roku 250 př. n. l.). V polovině III. století n. l. napsal Diofant spis o aritmetice, v kterém pojednává o vlastnostech celých čísel a počtářsky řeší rovnice 1. a 2. stupně o jedné i o více neznámých. Užívá při tom důmyslné soustavy zkratek, z níž se později vyvinulo zapisování čísel pomocí písmen. Shledáváme se u něho i se stopami záporných čísel. S rovnicemi a s úlohami, jež se řeší rovnicemi, setkáváme se ostatně u všech kulturních národů. Mohamed al Chovarismi sepsal v Bagdadu hlavně podle indických pramenů kolem r. 825 knihu s názvem „Aldžebr valmukabala" (název značí asi totéž jako převádění členů s jedné strany rovnice na druhou a jejich slučování). Tato kniha se rozšířila hlavně v latinských překladech po celém tehdy známém světě a její zkomolený název dal označení velkému odvětví matematiky: algebře. Al Chovarismi značí z provincie Choresmi, neboli nynější Chivy, města severozápadně od Bochary v Uzbecké SSR.

Výhody počítání s desetinnými zlomky byly poznány teprve počátkem novověku. Desetinných zlomků se užívalo k velkým výpočtům zejména v astronomii (Mikuláš Koperník 1473—1543, Tycho de Brahe 1561—1601, Johannes Kepler 1571—1630, jenž si byl plně vědom významu zaokrouhlených čísel). První soustavný výklad o desetinných zlomcích podal Simon Stevin (1548—1620). François Viète (zvaný též Vieta 1540—1603), který zavedl soustavné psaní písmen místo čísel, připadl na myšlenku oddělit celky od desetin. V nové době počítáme téměř výhradně s desetinnými zlomky, neboť skoro k veškerému měření používáme jednotek v metrické soustavě.

Z látky probírané v aritmetice na střední škole je dodnes předmětem vědeckého bádání studium vlastností celých čísel. Toto studium se vyvinulo v rozsáhlou matematickou nauku zvanou theorie čísel. Základ k této nauce položili zejména Pierre Fermat (1601 až 1665), Leonhard Euler (1707—1783), Karl Friedrich Gauss (1777 až 1855) a Lejeune Dirichlet (1805—1859). Velmi významně se tu uplatnili i ruští matematikové, zvláště Pafnutij Lvovič Čebyšev (1821—1894). V nejnovější době bylo v theorii čísel dosaženo nejskvělejších výsledků slavnou sovětskou školou vedenou Ivanem Matvějevičem Vinogradovem (nar. 1891).

Výsledky cvičení.

I. Opakování a doplňky.

1. Písmena ve významu čísel. Jednočleny.

1. a) 1,4; b) $2x^2$; c) $8z - 9$; d) $11v - 11u$; e) $pq^2 - 3p^2q$. **2.** a) $17x^2y$; b) $\frac{1}{8}tu^3v^2$. **3.** a) $16m^4$; b) $p^4q^2r^6$; c) $27u^9v^6z^3$. **4.** a) $10h^5$; b) $e^2f^2g^2 + 4efg^2$; c) 0. **5.** a) $3ab$; b) $\frac{3}{4}u^2v^3$; c) $\frac{4}{5}rs$; d) $\frac{1}{2}xz$. **6.** a) $5xy$; b) $16c^2d^4$; c) $17a^6b^6$.

2. Závorky.

7. a) $a(b + c)$; b) $ab + c$. **8.** a) $a - (b + c)$; b) $a - b + c$. **9.** a) $(p + q)(r - s)$; b) $(p + q)r - s$; c) $p + q(r - s)$; d) $p + qr - s$.

10. a) $xy + zu$; b) $(xy + z)\,u$; c) $x(y + z)\,u$. **11.** a) $(5k)^2$; b) $5k^2$. **12.** $(p + q)^2 - (p^2 + q^2)$. **13.** $a + 10 \,.\, b + 10^2 \,.\, c + 10^3 \,.\, d$. **14.** $(b - t)\,c + f$. **15.** a) $8s - t$; b) $8(s - t)$. **16.** $2{,}5 \,.\, x + 1{,}5 \,.\, y + 3{,}5 \,.\, z$. **17.** a) $1{,}25 \,.\, b - a$; b) $20(1{,}25 \,.\, b - a)$, $a < 1{,}25 \,.\, b$. **18.** $4ab - 5(a - 6) \,.\, c$. **19.** $(d + s) : c$.

20. $(c - d) : b$, $ab : (c - d)$. **21.** $p : (x - 1)$, $px : (x - 1)$.

3. Čísla relativní.

22. a) 2; b) -12; c) 8; d) -20. **23.** a) -14; b) -34; c) 10; d) -10. **24.** a) -38; b) -98; c) -66; d) -126; **25.** a) -4; b) 104; c) 248; d) 17 576; e) -4.

4. Počítání s mnohočleny.

26. a) 0; b) $2xy$. **27.** a) $-a^2 - 4$; b) $3t^2$. **28.** a) $u^3 + v^3$; b) $-p^4q - pq^4$. **29.** a) $-7a + 6$; b) $uv^2 - u^2v$.

30. a) $27v^3 - 90v^2 + 60v + 25$; b) $-36v^2 + 135v - 125$; c) $63v - 125$; d) $-45v^2 + 78v + 25$. **31.** $3x - 4a + 1$. **32.** a) $6a^2$; b) -2. **33.** $9b - 9a$. **34.** $6r - 25$. **35.** $ac - 2b - 2c$. **36.** $3x$. **37.** $(6 + 0{,}1 \,.\, x)$ Kčs.

5. Umocňování mnohočlenů.

38. a) $4x^4 - 20x^2y^3 + 25y^6$; b) $144a^4b^6 - 96a^3b^6 + 16a^2b^6$; c) $36u^4v^6 + 36u^3v^5 + 9u^2v^4$; d) $16a^4 - 24a^2b^3 + 9b^6$.

41. a) $9h^2 + 12hk + 4k^2 + 6h + 4k + 1$; b) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$; c) $\frac{1}{4} - a - a^2 + 4a^3 + 4a^4$; d) $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$. **42.** a) $216a^3 + 216a^2b + 72ab^2 + 8b^3$; b) $27a^6 + 108a^4b^2 + 144a^2b^4 + 64b^6$; c) $27a^6 - 135a^4b^3 + 225a^2b^6 - 125b^9$; d) $64x^3y^6 - 144x^2y^5z^2 + 108xy^4z^4 - 27y^3z^6$. **43.** a) $(2x + 3y)(2x - 3y)$; b) $(5a^2b^3 + 8ab^2)(5a^2b^3 - 8ab^2)$; c) $(6u^2v^3 + 12uv^2)(6u^2v^3 - 12uv^2)$; d) $(13x^2y^4 + 16x^4y^2)(13x^2y^4 - 16x^4y^2)$. **44.** a) $a^2 + 3$; b) $4xy$; c) $(u^2 - v^2)^2$; d) $-56d + 7$. **45.** a) $2u^3 + 6uv^2$; b) $6u^2v + 2v^3$; c) $10m^2$; d) $(ab - cd)^2$. **46.** a) $p^2 + 2pq + q^2 - r^2$; b) $p^2 - 2pq + q^2 - r^2$; c) $x^4 + x^2 + 1$; d) $p^2 + 2pq + q^2 - r^2 + 2rs - s^2$. **47.** $2pq$. **48.** $x - 1$. **49.** a) $(a - b)^2$; b) $2ab - b^2$.

50. $12a + 6$, $3a^2 + 3a + 1$. **51.** Oba jsou si rovny. **52.** $a^2 + b^2$.

6. *Řešení úloh rovnicemi.*

53. a) 2; b) —$3\frac{1}{3}$; c) —0,6; d) 5,5. **54.** a) 2; b) —15; c) —1; d) —0,25. **55.** a) 4; b) 0; c) —0,5; d) $\frac{3}{2}$. **56.** 2. **57.** 7. **58.** 14. **59.** 15, 45.

60. 4 dvoukoruny a 12 korun. **61.** 4 pole, 3 stroje. **62.** 8 a 4. **63.** 320. **64.** 45 členů, 400 hod. **65.** 60 km/hod, 240 km/hod. **66.** 10 hod. 10 min. **67.** a) $4\frac{4}{5}$ min.; b) 8 min. **68.** 5 dnů, 1 200 m.

II. Dělitelnost.

1. *Násobek a dělitel.*

69. Podle poučky 1; 56 = 7 . 8; 728 = 7 . 104 = 8 . 91.

70. Podle poučky 1; 468 = 13 . 36. **71.** Podle poučky 2: a) dělitele 7 . 4 = = 28 má číslo 105 . 4 = 420; b) dělitele 7 . 11 = 77 má číslo 105 . 11 = 1 155; c) dělitele 7 . 13 = 91 má číslo 105 . 13 = 1 365. Každý násobek čísla 420 je dělitelný číslem 28, každý násobek čísla 1 155 je dělitelný číslem 77, každý násobek čísla 1 365 je dělitelný číslem 91. **72.** Podle poučky 3; 84 = 7 . 12. **73.** Podle poučky 3; 323 = 17 . 19. **74.** a) 4 375, 3 206 nebo 3 276; b) 4 378, 3 256; c) nelze, 3 276. **75.** a) 36 = 4 . 9, 236 = 4 . 59, 378 = 9 . 42; b) 75 = 5 . 15, 32 = 2 . 16 = 4 . 8, 27 = 3 . 9; 10 = 2 . 5, 18 = 2 . 9, 30 = 2 . 3 . 5, 45 = 5 . 9, 90 = 2 . 5 . 9. **76.** a) $2x \cdot 2y = 4xy$; b) $2x \cdot pqr \ldots = 2 \cdot xpqr \ldots$ **77.** $6x + 1$, $6x + 2$, $6x + 3$, $6x + 4$, $6x + 5$; lichá a nedělitelná třemi jsou $6x + 1$, $6x + 5$. **78.** a) 1 995, 2 010; b) 988, 1 001. **79.** a) 994, 1 995, 3 836; b) 1 001, 2 002, 3 850.

80. a) $2x \cdot 2(x + 1) = 4 \cdot x(x + 1)$, $x(x + 1)$ je sudé (cvič. 76b); b) $2x \cdot 2(x + 1) \cdot 2(x + 2) \cdot 2(x + 3) = 16 \cdot x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$, v čísle $x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ je jeden činitel dělitelný dvěma a jeden čtyřmi. **81.** Z rovnic $a = bx$, $b = ay$ plyne $xy = 1$. **82.** Taková čísla jsou a) $2x + 1$, $2x - 1$; b) $3x + 1$, $3x - 1$.

2. *Prvočísla. Rozklad na prvočinitele.*

83. a) 5^3; b) $2^4 \cdot 3 \cdot 7$; c) $2^2 \cdot 101$; d) $2^2 \cdot 17^2$; e) $11 \cdot 13 \cdot 17$. **84.** a) $3^2 \cdot 11$; b) $3^3 \cdot 37$; c) $2^3 \cdot 5^3$. **85.** Protože 11^2 je již 121. **86.** 63krát. **87.** Každé sudé číslo je dělitelné dvěma. **88.** 126. **89.** Dvaceti.

90. 108, 128, 144, 162, 192, 216, 243, 256, 288, 324, 384, 432, 486, 512, 576, 648, 729, 768, 864, 972. **91.** a) Do 17; b) do 23; c) do 31. **92.** Mohl užíti buď balíku čtvrtého, nebo balíků prvního a druhého, nebo třetího a pátého.

3. *Stanovení všech dělitelů daného čísla.*

93. a) 1 a 36, 2 a 18, 3 a 12, 4 a 9, 6 a 6; b) 1 a 24, 2 a 12, 3 a 8, 4 a 6; c) 1 a 48, 2 a 24, 3 a 16, 4 a 12, 6 a 8. **94.** 2 . 500. 4 . 250, 5 . 200, 8 . 125, 10 . 100, 20 . 50, 25 . 40. **95.** 6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, 496 = 1 + 2 + + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248. **96.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72; 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84; 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96. **97.** 24 a 4. **98.** 30 a 2. **99.** 9 cm a 4 cm.

100. a) $1, p, p^2$, b) $1, p, p^2, p^3$; c) $1, p, p^2, p^3, p^4$. **101.** $k + 1$, 11 dělitelů. **102.** a) $1, p, q, pq$; b) $1, p, p^2, q, p^2q$; c) $1, p, p^2, p^3, q, pq, p^2q, p^3q$. **103.** Každý dělitel čísla p^k (viz cv. 101) lze spojit s každým dělitelem čísla q^l. **104.** Jako 103.

4. Společný dělitel. Společný násobek.

105. a) 1, 5; b) $1, a$; c) a, a. **106.** a) 36; b) 144. **107.** b, a. **108.** a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15; b) 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23; c) 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35. **109.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

110. a) 18; b) 56; c) 91; d) 27; e) 1. **111.** a) 24; b) 49; c) 35. **112.** 14 km/hod, 18 hod. **113.** 40 dětí. **114.** $D(84; 140; 224) = 28$. **115.** Bylo by D rovné aspoň dvěma. **116.** 144, 936. **117.** Délka strany: 1 cm nebo 2 cm nebo 7 cm nebo 14 cm; počet čtverců: 5 488 nebo 1 372 nebo 112 nebo 28. **118.** 1 080, 1 440, 1 800. **119.** a) 448; b) 2 160; c) 714; d) 2 205.

120. a) 1 365; b) 14 400; c) 480. **121.** 360. **122.** 6. dělicí čárka s 3., 11. s 5., 16. se 7. atd. **123.** 20. **124.** 60 cm, 120 krabiček. **125.** 5 obrátek, 3 obrátky. **126.** 540, 720, 900. **127.** $30x + 1$. **128.** a) Rozkladem obou čísel v prvočinitele. b) Je-li současně dělitelné 1. dvěma a třemi, 2. třemi a čtyřmi, 3. dvěma a devíti.

5. Rozklad mnohočlenů.

129. a) $2^4 . 3 . a^2 . c^2$; b) $2^2 . 3^2 . a . x^3$; c) $7 . 13 . p^4 . q^3$; d) $11 . 13 . u^5 . v^4$; e) $2^2 . 3^3 . (r + s) . r^2 . s$.

130. a) $1, 2, 3, 6, a, 2a, 3a, 6a, b, 2b, 3b, 6b, x, 2x, 3x, 6x, ab, 2ab, 3ab, 6ab, ax, 2ax, 3ax, 6ax, bx, 2bx, 3bx, 6bx, abx, 2abx, 3abx, 6abx$; b) $1, 3, 9, r, 3r, 9r, s, 3s, 9s, r^2, 3r^2, 9r^2, rs, 3rs, 9rs, s^2, 3s^2, 9s^2, r^2s, 3r^2s, 9r^2s, rs^2, 3rs^2, 9rs^2, r^2s^2, 3r^2s^2, 9r^2s^2$; c) $1, p, q, r, p^2, pq, pr, qr, r^2, p^2q, p^2r, pqr, pr^2, qr^2, r^3, p^2qr, p^2r^2, pqr^2, pr^3, qr^3, p^2qr^2, p^2r^3, pqr^3, p^2qr^3$. **131.** a) $x(y + 2z)$; b) $x(a - z)$; c) $r^3(1 + r^2$; d) $2^2 . 3 . 5 . (2a + 3b)$; e) $hk(h - k)$. **132.** a) $3 . 5a^3b^4(a^2 - 2b^5)$; b) $2^2 . mn^2(6m^2 + 7n^2)$; c) $2^2 . 3a^2(1 - 2a^2)$; d) $3x^2(5 - 4x^2)$. **133.** a) $2a(4bx - 3cy + 5z)$; b) $t^2u^2v(t + u - 1)$; c) $6p^3(4p^2 - 3p - 2)$. **134.** a) $16abx(2b - 3ax^2 + 4bx)$; b) $3mv(11m - 9v^2 + 8mv)$; c) $6zu(2zu^2 + 3u - 5z^2)$; d) $25ac^2(2ac + 1 - 3a^3c^2)$. **135.** a) $(x + 2)(y + 2)$; b) $(a - 3)(t - 2)$; c) $c + 1)(p - q)$. **136.** a) $(2x - 1)(3x + 1)$; b) $(a + b)(c + d)$; c) $(r + 1)(s - x)$. **137.** a) $2x^2(a + b) . (1 - 2x)$; b) $(m - 1)(x - y)$; c) $(3n^2 - 1)(z + u)$; d) $(4a - 1)(a^2 - b)$. **138.** a) $(2x + 1)^2$; b) $(3b - 2c)^2$; c) $2 . 3u(u - 3)^2$. **139.** a) $(2a + b)(2a - b)$; b) $(6uv + 1)(6uv - 1)$; c) $(p^2q + 4)(p^2q - 4)$.

140. a) $r^4(a^2 + r)(a^2 - r)$; b) $xy(x + 2y)(x - 2y)$; c) $(h^2 + 1)(h + 1)(h - 1)$; d) $z^2(1 + z^2)(1 + z)(1 - z)$. **141.** a) $(p + q - r)(p - q + r)$; b) $(6x - 5y + 8)(-2x - y + 2)$; c) $(z + 1 + 2u)(z + 1 - 2u)$; d) $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c)$. **142.** a) $2x + 2y = 2(x + y)$; b) $2x + 1 + 2y + 1 = 2(x + y + 1)$; c) $2x + 2y + 1 = 2(x + y) + 1$. **143.** $(2x + 1)(2y + 1) = 2(2xy + x + y) + 1$. **144.** $(2x + 1)^2 - 1 = 4x(x + 1)$. **145.** $a = 100x + y = 4 . 25x + y$.

6. Nejvyšší společný dělitel a nejnižší společný násobek mnohočlenů.

146. a) 2; b) $4p^2q^2$; c) $5tuv$; d) z; e) $4ab^2c$. **147.** a) $12rs$; b) $8p^3q^3$; c) $10t^3uv^3$;

d) $3xz^2$; e) $80a^2b^3c^3$. 148. a) $2p$, $24p^3qr$; b) $3r^2st$, $180r^3s^2t^3$; c) 4, $48a^3b^2c$. 149. a) $8(a + b)$, $96(a + b)^2(a - b)$; b) x, $4x^3 - x$; c) $3g - 2h$, $18g - 12h$.

150. a) $1 - s$, $1 - s - s^2 + s^3$; b) $a^2 - ab$, $2a^4b - 2a^2b^3$; c) $k - 1$, $12k^4 - 12k^2$.

III. Lomené algebraické výrazy.

1. Rozšiřování a krácení zlomků.

151. $\dfrac{a}{n-4}$, $n > 4$, a kladné. 152. a) $\dfrac{s}{c+v}$ hod.; b) $\dfrac{s}{c-v}$ hod., daná čísla kladná, $c > v$. 153. a) $\dfrac{5x-4r}{x}$; b) $\dfrac{5x-4r+s}{x+s}$, daná čísla kladná, $5x > 4r$. 154. a) $\dfrac{5a}{4}$ Kčs; b) $\dfrac{5(ax+b)}{4x}$ Kčs, daná čísla kladná. 155. $\dfrac{c-b}{a}$ kg, $\dfrac{ax}{c-b}$ pytlů, daná čísla kladná, $c > b$. 156. $\dfrac{1000s}{c_1+c_2}$, daná čísla kladná. 157. a) $\dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$; b) $\frac{2}{3}$, $a \neq 0$; c) 5, $z \neq 0$; d) u^2, $u \neq 0$. 158. a) $\dfrac{e}{a}$, $a \neq 0$, $e \neq 0$; b) $\dfrac{1}{rs}$, $r \neq 0$, $s \neq 0$; c) $\dfrac{1}{2qr^2}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, $r \neq 0$; d) $\dfrac{2a}{3x}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; e) $\dfrac{3v^2}{4t^2}$, $t \neq 0$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. 159. a) $\dfrac{x}{4y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; b) $\dfrac{4}{rs}$, $r \neq 0$, $s \neq 0$; c) $2a$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; d) $\dfrac{1}{9p^4}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$; e) $\dfrac{l^4}{10k}$, $k \neq 0$, $l \neq 0$, $m \neq 0$.

160. a) $\dfrac{3x}{x}$; $x \neq 0$; $\dfrac{3ab}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; b) $\dfrac{bx}{x}$, $x \neq 0$; $\dfrac{b^2}{b}$, $b \neq 0$; $\dfrac{ab^2}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; c) $\dfrac{u^2vx}{x}$, $x \neq 0$; $\dfrac{u^3v}{u}$, $u \neq 0$; $\dfrac{u^2v^4}{v^3}$, $v \neq 0$; $\dfrac{u^3v^3}{uv^2}$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. 161. $\dfrac{9a^2b^2c^2}{12a^2b^2c^2}$, $\dfrac{24a^3bc^2}{12a^2b^2c^2}$, $\dfrac{2abc}{12a^2b^2c^2}$, $\dfrac{30a^4bc}{12a^2b^2c^2}$, $\dfrac{20a^4b^3}{12a^2b^2c^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. 162. a) $\dfrac{3k}{2(h+2k)}$, $h \neq 0$, $h + 2k \neq 0$; b) $x + y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; c) $\dfrac{3b^2-5a^2}{2ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $z \neq 0$; d) $\dfrac{1}{v(2u+3v-1)}$, $u \neq 0$, $v \neq 0$, $2u + 3v \neq 1$. 163. a) $\dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$, $r \neq -1$; b) $\frac{2}{3}$, $x \neq -y$; c) $-\dfrac{1}{p}$, $p \neq 0$, $p \neq 1$; d) $\dfrac{1+s}{1-s}$, $s \neq 1$; e) $-b-2$, $b \neq 2$. 164. a) $-\dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$, $b \neq a$; b) $\dfrac{a+b}{2}$, $a \neq -b$; c) $-\dfrac{2x}{3z}$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $z \neq x + y$; d) $\dfrac{x+y-z}{x-y+z}$, $x + y + z \neq 0$, $x - y + z \neq 0$.

2. Sčítání a odčítání zlomků.

165. a) $\frac{7s}{6}$; b) $-\frac{t}{6}$; c) $\frac{5a}{4}$; d) $-\frac{7b}{6}$. **166.** a) $\frac{x+y}{y}$, $y \neq 0$; b) $\frac{2y-uz}{z}$, $z \neq 0$; c) $\frac{a^2-1}{a}$, $a \neq 0$. **167.** a) $\frac{1}{3p}$, $p \neq 0$; b) $\frac{11}{15g}$, $g \neq 0$; c) $\frac{5r}{4s}$, $s \neq 0$; d) $-\frac{a}{3b}$, $b \neq 0$, **168.** a) $\frac{5x+4}{6}$; b) $\frac{y-11}{12}$; c) $\frac{p+q}{6}$; d) $\frac{e-9f}{15}$. **169.** a) $\frac{x+y}{xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; b) $\frac{2y^2-z^2}{2yz}$, $y \neq 0$, $z \neq 0$; c) $\frac{(p-q)^2}{pq}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$; d) $\frac{a^2+b^2-c^2}{abc}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

170. a) $\frac{uv-u^2-v^2}{uv}$, $u \neq 0$, $v \neq 0$; b) $\frac{2y^2-3x^2}{18xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; c) $\frac{3x+y}{6x^2y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; d) $\frac{5}{p^2q}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$. **171.** a) $\frac{x}{x(+3)(x+2)}$, $x \neq -3$. $x \neq -2$; b) $\frac{t^2}{t-s}$, $t \neq s$; c) $\frac{r}{(r-1)^2}$, $r \neq 1$; d) $\frac{16-2c}{16-c^2}$, $c \neq 4$, $c \neq -4$. **172.** a) 4, $u \neq 1$, $u \neq -1$; b) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z \neq -1$, $z \neq -2$; c) $\frac{3}{p-1}$, $p \neq 1$; d) $\frac{3r}{2(s-1)}$, $s \neq 1$. **173.** a) $\frac{1}{t(t-1)}$, $t \neq 0$, $t \neq 1$; b) $-\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $x \neq 4$; c) $\frac{32dhm}{(4d^2-h^2)^2}$, $h \neq 2d$, $h \neq -2d$; d) $-\frac{2u}{(1-u^2)(1-u)}$, $u \neq 1$, $u \neq -1$.
174. $\frac{a}{n-1}$, $n > 1$, a kladné. **175.** $\frac{ak}{n(n+k)}$, písmena značí kladná čísla. **176.** a) O $\frac{b}{a+1}$ m; b) o $\frac{a}{b-1}$ m, a kladné, $b > 1$. **177.** a) $\frac{2cs}{c^2-v^2}$ hod.; b) byl by u cíle dříve o $\frac{2sv^2}{c(c^2-v^2)}$ hod., daná čísla jsou kladná a $c > v$.

3. Násobení zlomků.

178. a) xy, $x \neq 0$, $y \neq 0$; b) $\frac{2q^2}{r}$, $p \neq 0$, $r \neq 0$; c) $-\frac{2s^2}{9rt}$, $r \neq 0$, $t \neq 0$; d) 1, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. **179.** a) $\frac{1}{x^3yz^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$; b) $-\frac{5a^4}{9}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$; c) $\frac{yz}{x^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$; d) $-3ab$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

180. a) $\frac{r-s}{r+s}$, $r \neq s$, $r \neq -s$; b) $\frac{5y}{8}$, $x \neq 2y$, $y \neq 0$; c) $\frac{1-p}{2p+2}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p \neq -1$; d) $\frac{ac}{bd}$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, $b \neq 1$, $d \neq 0$. **181.** a) $\frac{4t}{t^2-4}$, $t \neq 2$,

$t \neq -2$, $t \neq 4$; b) $\left(\frac{a}{d}\right)^2$, $b \neq c$, $b \neq -c$, $d \neq 0$; c) -1, $u \neq z$, $v \neq u$, $z \neq v$; d) $\frac{v^2 - u^2}{uv}$, $u \neq 0$, $u \neq v$, $u \neq -v$, $v \neq 0$. **182.** a) $-\frac{(x-y)^2}{xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; b) $a + b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$; c) $-\frac{u}{v}$, $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u \neq v$; d) 1, $p \neq 1$, $p \neq -1$. **183.** a) 4, $r \neq s$, $r \neq -s$, $r \neq 0$, $s \neq 0$; b) $\frac{z^2}{1-z^2}$, $z \neq 1$, $z \neq -1$; c) $\frac{1}{x^2-4}$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq -1$, $x \neq -2$; d) -1, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. **184.** Oba jsou rovny $\frac{(a+b)^2}{ab}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. **185.** a) Oba jsou rovny $\frac{2k^2}{k^2+1}$; b) oba jsou rovny $\left[\frac{(p^2+q^2)^2}{2pq(p^2-q^2)}\right]^2$, $p \neq q$, $p \neq -q$, $p \neq 0$, $q \neq 0$. **186.** a) $\frac{1}{a}$, $a \neq 0$; b) $\frac{b}{a}$, $a \neq 0$. **187.** a) $\frac{b}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; b) $\frac{bc}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. **188.** $\frac{a(py+qx)}{pq}$, daná čísla jsou kladná. **189.** a) $\frac{v}{h}$, $\frac{v}{k}$, $\frac{v(h+k)}{hk}$; b) $\frac{vt}{h}$, $\frac{vt}{k}$, $\frac{v(h+k)t}{hk}$; c) $\frac{hk}{h+k}$, daná čísla kladná.

190. a) $\frac{ab - x(a+b)}{ab}$; b) $\frac{ab}{a+b}$, daná čísla kladná. **191.** a) $\frac{3v}{5}$; b) $\frac{9v}{25}$; c) $\frac{27v}{125}$. **192.** a) $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$; b) $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$; c) $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$.

4. Dělení zlomků.

193. a) $\frac{9xy}{4ab}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; b) $\frac{1}{p^2r^2}$, $r \neq 0$, $p \neq 0$; c) $\frac{m}{n}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$; d) $\frac{1}{v^4}$, $v \neq 0$, $u \neq 0$; e) $\frac{24b^3x^6}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$. **194.** a) -1, $p \neq -q$, $p \neq q$; b) $\frac{3r-6}{4r-2}$, $2r \neq 1$, $r \neq 0$, $r \neq 2$; c) $-c$, $c \neq 0$, $c \neq 1$; d) $\frac{x}{xy-2y^2}$, $y \neq 0$, $x \neq 2y$, $x \neq -2y$; e) $\frac{t+s}{v-u}$, $u \neq v$, $u \neq -v$, $t \neq s$. **195.** a) $\frac{3b^2}{2a^3}$, $b \neq 0$, $a \neq 0$; b) $\frac{1}{6a^3b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; c) $\frac{5q^4}{4p^3}$, $q \neq 0$, $p \neq 0$; d) $\frac{5b^2x^7}{9a^3y^6}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; e) $\frac{30r^2s^4}{t^4}$, $r \neq 0$, $s \neq 0$, $t \neq 0$. **196.** a) $\frac{3ab}{4-2a^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a^2 \neq 2$; b) $\frac{t+1}{t^3+2t^2}$, $t \neq 0$, $t \neq -1$, $t \neq -2$; c) $\frac{z-4}{(z-2)^2}$, $z \neq 3$, $z \neq -2$, $z \neq 0$; d) $\frac{1-a^2}{1-b^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $b \neq -1$. **197.** a) $-xy$, $x \neq 0$,

$y \neq 0, x \neq y$; b) $-u-v, u \neq 0, v \neq 0, u \neq v$; c) $-\frac{ac}{bd}, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, $d \neq 0$, $ad \neq bc$; d) $1, a \neq 0, b \neq 0$. **198.** a) $\frac{1+z}{1-z}, z \neq 1, z \neq -1, z \neq 0$; b) $\frac{pq}{p+q}, p \neq 0, q \neq 0, p \neq q, p \neq -q$; c) $\frac{s^2}{r-s}, r \neq 0, s \neq 0, r \neq s, r \neq -s$; d) $\frac{2pq}{p^2-q^2}, p \neq 0, q \neq 0, p \neq q, p \neq -q$. **199.** a) $\frac{b}{a}$; b) $\frac{ac}{b}$, a, b, c kladné.

200. k-krát, $k \neq 0, u \neq 0, u \neq -1$. **201.** $\frac{ac_2 + bc_1}{c_1c_2}$ hod., $\frac{(a+b)\,c_1c_2}{ac_2 + bc_1}$ km/hod, daná čísla kladná. **202.** $\frac{ap + bq}{a+b}$, daná čísla kladná. **203.** a) $\frac{P(a+b)}{ab}$; b) $\frac{ab}{a+b}$, daná čísla kladná. **204.** $\frac{abc}{ab + ac + bc}$, daná čísla kladná. **205.** $\frac{ap}{a+b}$, daná čísla kladná. **206.** $\frac{ap + 100b}{a+b}$, daná čísla kladná. **207.** Je-li $a = 1 \pm b$, je $\frac{1}{a} = 1 \mp \frac{b}{1 \pm b}$.

IV. Zlomky desetinné.

1. *Převádění zlomků obyčejných na zlomky desetinné.*

208. a) 0,6; b) 0,875; c) 0,4625; d) 0,8125. **209.** a) 0,5714; b) 0,6364; c) 0,6667; d) 0,3077; e) 0,6296; f) 0,9687 nebo 0,9688.

210. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{8}{25}$; d) $\frac{2}{25}$; e) $\frac{5}{8}$; f) $\frac{27}{40}$; g) $\frac{7}{16}$. **211.** $\frac{2}{3} < \frac{9}{13} < \frac{7}{10} < \frac{12}{17} < \frac{5}{7} < \frac{8}{11} < \frac{3}{4}$. **212.** a) 0,04167; b) 0,00069; c) 0,00001. **213.** 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80.

2. *Čísla periodická.*

214. a) $0,\overline{7}$; b) $0,\overline{36}$; c) $0,\overline{629}$; d) $0,\overline{675}$; e) $0,8\overline{3}$; f) $0,91\overline{6}$; g) $0,45\overline{370}$. **215.** $0,\overline{142857}$, $0,\overline{285714}$, $0,\overline{428571}$, $0,\overline{571428}$, $0,\overline{714285}$, $0,\overline{857142}$.

3. *Čísla zaokrouhlená a počítání s nimi.*

216. $0,678 \pm 0,002$. **217.** $7,837 \pm 0,003$. **218.** $(191,5 \pm 0,2)$ m. **219.** $(38,5 \pm 0,7)$ cm^2 nebo $(38,4 \pm 0,7)$ cm^2.

220. $0,3185 \pm 0,0006$ nebo $0,3184 \pm 0,0006$. **221.** $60,27 \pm 0,02$. **222.** $(4,69 \pm 0,06)$ cm nebo $(4,70 \pm 0,06)$ cm. **223.** $(19,11 \pm 0,02)$ cm nebo $(19,10 \pm 0,02)$ cm. **224.** $(1\,700 \pm 200)$ m. **225.** a) Obsah se může lišiti až o 3,48 m^2; b) cena až o 870 Kčs. **226.** Měrná váha je větší než $30,5 : 4,5 \doteq 6,8$ g/cm^3 a menší než $31,5 : 3,5 = 9$ g/cm^3, takže ji nelze spolehlivě stanoviti. **227.** $(62,1 \pm 1,1)$ km/hod. **228.** a) (56 ± 3) m^3; b) $(56,1 \pm 0,3)$ m^3 nebo $(56,0 \pm 0,3)$ m^3. **229.** $(5,65 \pm 0,04)$ cm nebo $(5,64 \pm 0,04)$ cm.

230. (8,21 $\pm$ 0,06) g/cm³ nebo (8,22 $\pm$ 0,06) g/cm³. **231.** 1,00 m². **232.** 0,405, 2,47. **233.** 930krát. **234.** 20 milionů m³, 7,4 miliardy m³. **235.** 2 300 000. **236.** 1,1 t. **237.** a) 3,59 m²; b) 28,8 a. **238.** 67 kg. **239.** a) 1,77 m; b) 0,564 m.

240. a) 0,0796 m²; b) 3,55 m. **241.** $2\pi r(r + v) \doteq 1{,}00$ m². **242.** 16 kg. **243.** 1 270 m². **244.** a) 82,7; b) 90,7. **245.** a) 58,2 vteř.; b) 65,2 vteř. **246.** 27,4 km.

V. Rovnice prvního stupně.

1. Pravidla pro řešení rovnic.

247. — 1. **248.** — 3,6. **249.** — 10.

250. $5\frac{1}{4}$. **251.** $3\frac{1}{2}$. **252.** $\frac{3}{4}$. **253.** 0. **254.** 3. **255.** $3\frac{2}{3}$. **256.** 3,2. **257.** $\frac{1}{3}$. **258.** —3. **259.** $1\frac{2}{3}$.

260. — 8,5. **261.** Nemá řešení. **262.** $\frac{2}{3}$. **263.** $\frac{1}{48}$. **264.** 5. **265.** $-\frac{1}{2}$. **266.** $\frac{7}{12}$. **267.** $\frac{1}{2}$. **268.** 9. **269.** h libovolné vyjma $h = 2$.

270. $\frac{2}{3}$. **271.** $-\frac{1}{2}$. **272.** $-1\frac{1}{3}$. **273.** $-6\frac{1}{2}$. **274.** 0. **275.** $-1\frac{1}{2}$. **276.** $-3\frac{1}{2}$. **277.** Nemá řešení. **278.** $\frac{2}{3}$. **279.** s libovolné vyjma $s = 1, s = -1$.

280. Nemá řešení. **281.** Nemá řešení. **282.** $\frac{1}{2}$.

2. Rovnice, které obsahují vedle neznámé další písmena.

283. a) $b + c$; b) $a - c$. **284.** a) $4 - 4v$; b) $1 - \frac{1}{4}u$. **285.** $a + b \neq 0$, $z = \dfrac{1}{a + b}$; $a + b = 0$, nemá řešení. **286.** a) $y \neq 3$, $x = -2$; $y = 3$, x libovolné; b) $x \neq -2$, $y = 3$; $x = -2$, y libovolné. **287.** a) $s \neq 1$, $r = \dfrac{s}{s - 1}$; $s = 1$, nemá řešení; b) $r \neq 1$, $s = \dfrac{r}{r - 1}$; $r = 1$, nemá řešení. **288.** a) $n \neq 1$, $m = \dfrac{n + 1}{n - 1}$; $n = 1$, nemá řešení; b) $m \neq 1$, $n = \dfrac{m + 1}{m - 1}$; $m = 1$, nemá řešení. **289.** $s \neq 1$, $s \neq -1$, nemá řešení; $s = 1$ nebo $s = -1$, r libovolné.

290. a libovolné. **291.** $p \neq 0$, $q = 1$; $p = 0$, q libovolné. **292.** $a \neq 1$, $x = a + 1$; $a = 1$, x libovolné.

3. Soustava rovnic o dvou neznámých.

293. 15, —2. **294.** 3, 1. **295.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. **296.** 1,6, —0,44. **297.** $2\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{9}$. **298.** $-6\frac{1}{3}$, $-2\frac{3}{5}$. **299.** 12, 15.

300. —3, —2. **301.** 29, 9. **302.** 0,64, 1,08. **303.** $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. **304.** $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{9}$. **305.** 0, $-\frac{5}{2}$. **306.** Nemá řešení. **307.** 2, 3. **308.** 2,84, —1,88. **309.** $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

310. $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. **311.** x libovolné, $y = 35 - \frac{5}{3}x$. **312.** Nemá řešení.

4. Slovní úlohy.

313. 306 a 13. **314.** 312 a 36. **315.** 35 m a 14 m. **316.** 150 chlapců a 30 dívek. **317.** 45 a 30. **318.** 128 a 200. **319.** 2 370 a 237.

820. 68 a 63. **821.** 75. **822.** 92 a 29. **823.** 14 a 6. **824.** 32 a 16. **825.** 15 hod. a 5 hod. **826.** 15 let a 10 let. **827.** 36 hl a 24 hl. **828.** 12 kg. **829.** 40 a 56.

830. 7 žen, 60 řad. **831.** 74 Kčs. **832.** 44 a 84. **833.** O 1 Kčs. **834.** 35 000, 56 000, 196 km. **835.** 30 a 20. **836.** 55 směn, 90 směn. **837.** 3 600 a 4 800 obleků; **838.** 18 q a 20 q. **839.** 2 000 pluhů, 15 dní.

840. 19 m a 31 m. **841.** 8 m a 5 m. **842.** 51°, 51°, 78°. **843.** 20úhelník, 18°, 162°. **844.** 25%. **845.** 7 kg, 56 l. **846.** 10%. **847.** 24 kg a 8 kg. **848.** 12 kg a 7 kg. **849.** $33\frac{1}{3}$ g.

850. 25 g. **851.** $23\frac{1}{13}$ g a $76\frac{12}{13}$ g. **852.** 15 dní, každý vykonal právě polovinu. **853.** 4 hod. 10 min. **854.** 128 m, 57,6 km/hod.

VI. Funkce a jejich grafické znázornění.

1. *Vyjádření závislosti tabulkou.*

855. a) Dvakrát, třikrát, čtyřikrát; b) 1,585 vteř. **856.** Stoupala od 6 do 16 hod.; nejvyšší byla v 16 hod., nejnižší v 6 hod. **857.** Rychlík jede 1 hod. 8 min. rychlostí 43,5 km/hod.; vlak č. 804 jede 1 hod. 40 min. rychlostí 29,6 km/hod a vlak č. 1250 jede 1 hod. 27 min. rychlostí 34,0 km/hod.

2. *Závislost vyjádřená rovnicí.*

858. a) $o = 4a$; b) $o = 3a$; c) $o = 2\pi r$; d) $V = a^3$. Konstanty a) 4; b) 3; c) 2π; d) 1. Nezávisle proměnné: a) a; b) a; c) r; d) a. **859.** a) $P = \frac{\pi d^2}{4}$; b) $d = 2\sqrt{\frac{P}{\pi}}$.

860. a) 342,5 m/sec; b) —2,8° C. **861.** 250 m. **862.** $P = 2x^2 + 2ax + a^2$. **863.** a) $x^3 + (a + b + c)\,x^2 + (ab + ac + bc)\,x$; b) $6x^2 + 4(a + b + c)\,x$. **864.** $4x^3 - 2(a + b)\,x^2 + abx$. **865.** $\alpha_1 = 90 - \frac{\alpha}{2}$, atd.

3. *Závislost vyjádřená graficky.*

867. 48,25 ž. znázor. 96 mm, atd. **868.** b) 105,30; 133,39; 168,75; 147,58; 162,09; 81,67; 136,47; 185,18; 192,24; 151,39; 141,38; **869.** 2,84; 3,08; 3,32; 3,56; 3,80; 4,03; 4,27; 4,51; 4,75; 4,98; 5,22; 5,46; 5,70 kg.

870. 5 m^3 zobrazte 1 mm, 10 let zobrazte 1 cm. **871.** 1 283; 722; 462; 321; 236; 180; 143; 115. **872.** Zdánlivý pohyb Slunce není rovnoměrný.

4. *Přímá úměrnost a její znázornění.*

873. a) $s = \frac{5}{6}t$; b) $t = \frac{6}{5}s$. **874.** $y = 0{,}735x$; $x = 1{,}36y$. **875.** $y = 0{,}75x$; $x = 1{,}33y$. **876.** a) $y = 17{,}78x$, $x = 0{,}056\,25y$; b) $1° = 17{,}8$ dílce, 1 dílec $= 3'22{,}5''$. **877.** $y = \frac{4}{3}x$, $x = \frac{3}{4}y$. **878.** a) 39,3; 60,7 g; b) 254,3; 164,8 g. **879.** a) $\check{c} = \frac{p}{100} \cdot z$; b) $\check{c} = \frac{z}{100} \cdot p$.

380. a) $y = \frac{100 - p}{p} x$; b) 66,7; c) 15,4. **381.** $y = \frac{x(100 + p)}{100}$. **382.** a) 1,28 vteř.; b) 8 min. 18 vteř.; c) 4 roky 83 dny. **383.** a) $\alpha = 6t$; b) $\alpha = 0{,}5t$; c) $\alpha = 360t$. **384.** ab) nezmění se; cd) zvětší se tisíckrát. **385.** a) $y = \frac{8}{13}x$; b) $y = -\frac{1}{3}x$; c) $y = \frac{7}{9}x$; d) $y = -\frac{5}{3}x$. **386.** A, D leží, B, C neleží. **387.** a) 7; — 11,76; b) 0,893; —1,5. **390.** Spojte počátek s bodem (13,6; 100).

5. Nepřímá úměrnost a její znázornění.

391. b) $v = \frac{36}{z}$. **393.** $c = \frac{360}{t}$. **394.** $c = \frac{k}{S}$, $S = \frac{k'}{c}$. **395.** a) 4,4 cm; b) 0,93 cm. **396.** 10 002 290 m.

6. Lineární funkce.

398. a) $y°\,F = 1{,}8 \,.\, x°\,C + 32$, $x°\,C = \frac{5}{9}(y°\,F - 32)$; b) 68° F, —4° F; c) —17$\frac{7}{9}$° C, 35$\frac{5}{9}$° C; d) —40°. **399.** $V = V_0(1 + \frac{1}{273}t)$.

400. a) $\frac{273(p - p_0)}{p}$; b) 3,66 mm Hg. **401.** 99,4 cm. **402.** a) —2,9, —3,7; b) 1,2, —0,8; c) 2,62, —1,03. **403.** Asi v 19 hod. 07 min., 19 hod. 39 min., 20 hod. 05 min., 20 hod. 24 min. **404.** V 0^h15^m ve vzdálenosti 15 km. **405.** Setkají se v 0^h10^m ve vzdálenosti 15 km. **406.** Za 1 hod. 40 min. ve vzdálenosti 40 km. **407.** $1^h5^m27^{vt}$, $2^h10^m55^{vt}$, $3^h16^m22^{vt}$, $4^h21^m49^{vt}$, $5^h27^m16^{vt}$, $6^h32^m44^{vt}$, $7^h38^m11^{vt}$, $8^h43^m38^{vt}$, $9^h49^m05^{vt}$, $10^h54^m33^{vt}$.

VII. Opakování učiva.

410. 504, 576, 648, 720, 792, 864, 936. **411.** $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$. **412.** 42. **413.** 4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 49, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, 74, 77, 82, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95. **414.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 56, 60, 70, 84, 105, 120, 140, 168, 210, 280, 420, 840; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 180, 240, 360, 720; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, 80, 96, 120, 160, 192, 240, 320, 480, 960; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75, 90, 100, 150, 180, 225, 300, 450, 900. **415.** Pravidelný 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360úhelník. **416.** 112 a 126 nebo 126 a 140. **417.** 49. **418.** Po 5 vteřinách. **419.** Nemají společných prvočinitelů, proto jejich $D = 1$.

420. Žádný dělitel čísla a není dělitelem čísla $ab + 1$ kromě samozřejmého dělitele 1. **421.** V součinu ab je každý prvočinitel čísla a i každý prvočinitel čísla b; každý jejich společný prvočinitel je tam dvakrát. **422.** a) $b(1 - b)$; b) $2^2 \,.\, u(2u + 1)(2u - 1)$; c) $m(2m - 3n)^2$; d) $(x + y - 1)(x - y + 1)$. **423.** $a^3 - a = (a - 1) \,.\, a \,.\, (a + 1)$, ze tří po sobě jdoucích celých čísel je vždy jedno dělitelné třemi. **424.** a) Čísla $p - 1$ a $p + 1$ jsou obě sudá a ze dvou sudých čísel po sobě jdoucích je jedno dělitelné čtyřmi. b) Čísla $p - 1$ a $p + 1$ jsou obě sudá a $p - 1$, p, $p + 1$ jsou tři celá čísla po sobě jdoucí. Prostřední z nich není dělitelné třemi (neboť je to prvočíslo větší než 3), proto je dělitelné třemi jedno z obou krajních čísel. **425.** a) $\frac{v-u}{uv}$, $u \neq 0$, $v \neq 0$; b) $-\frac{1}{d}$, $c \neq 0$, $d \neq 0$; c) $\frac{1}{a^4}$, $a \neq 0$; d) $\frac{k^2-2kh-h^2}{k^2-h^2}$, $k \neq h$, $k \neq -h$; e) 1, $z \neq 1$; f) $\frac{2rs}{r^2-s^2}$, $r \neq s$; $r \neq -s$; g) $\frac{2}{v(v-2)}$, $v \neq 0$, $v \neq 1$, $v \neq 2$. **426.** a) $\frac{4}{9}$, $2u+3 \neq 0$, $3u+2 \neq 0$; b) $\frac{1+b}{1+a}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, $b \neq 0$, $b \neq 1$; c) 1, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, $b \neq 1$, $c \neq 0$, $c \neq 1$; d) -1, $m \neq 1$, $m \neq -1$; e) x^2+x-2, $x \neq 0$, $x \neq -1$; f) $-\frac{4z}{(z^2-1)^2}$, $z \neq 1$, $z \neq -1$. **427.** a) $\left(\frac{2u+3}{3u+2}\right)^2$, $3u+2 \neq 0$, $2u+3 \neq 0$; b) $pr+p+r+1$, $r \neq 1$, $r \neq -1$, $p \neq 1$; c) $\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}$, $a \neq 0$, $a \neq -c$, $b \neq 0$, $b \neq c$, $b \neq -c$; d) $\frac{pq}{p+q}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p \neq q$, $p \neq -q$; e) $\left(\frac{2rs}{r^2-s^2}\right)^2$, $r \neq s$, $r \neq -s$, $r \neq 0$, $s \neq 0$; f) $\frac{u^2+v^2}{2uv}$, $u \neq v$, $u \neq -v$, $u \neq 0$, $v \neq 0$. **428.** a) $\frac{2v}{v+2t}$, $v \neq 0$, $v \neq -t$, $v \neq -2t$; b) $\frac{b^2}{a^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq 2b$; c) $\frac{xy}{y-x}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq x$; d) $z+1$, $z \neq 0$, $z \neq 1$. **429.** $\frac{a}{k+1}$, $\frac{ak}{k+1}$, a, k kladné.

430. $\frac{100a}{a+b}$, $\frac{100b}{a+b}$, daná čísla kladná. **431.** $\frac{a}{r}$ m v zemi, $\frac{(r-1)a}{rs}$ m ve vodě, $\frac{(r-1)(s-1)a}{rs}$ m nad vodou, a kladné, $r > 1$, $s > 1$. **432.** $\frac{100b}{a-b}$, $a > b$, a, b kladné. **433.** a) $\frac{1}{ad}$; b) $\frac{1,1}{ad}$; c) $\frac{a+0,1\,.\,m}{ad}$; d) $\frac{ad}{a+0,1\,.\,m}$; e) všichni zvýší svůj výkon tak jako členové úderky. Daná čísla musí být kladná. **434.** a) $(923 \pm \pm 8)$ cm^2; b) $(1\,900 \pm 30)$ cm^3 nebo (1910 ± 30) cm^3. **435.** $(6 \pm 0,007)$ cm. **436.** $(6 \pm 0,005)$ cm. **437.** $(41,98 \pm 0,08)$ m nebo $(41,99 \pm 0,08)$ m. **438.** $(9,5 \pm 0,2)$ cm nebo $(9,6 \pm 0,2)$ cm. **439.** 227 cm^3.

440. $2r = v \doteq 10,8$ cm. **441.** 0,620 m. **442.** 0,42 cm. **443.** —0,1. **444.** 0,52. **445.** $-2\frac{1}{6}$. **446.** Nemá řešení. **447.** a libovolné vyjma $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$. **448.** 12,4, 12,6. **449.** 5, 3.

450. —25, 12. **451.** 8, 8. **452.** $\frac{1}{2}$, 0. **453.** $4\frac{1}{2}$ a 3. **454.** 18 a 7. **455.** 48. **456.** 25 l a 15 l. **457.** 30 žáků, 240 Kčs. **458.** 480 m. **459.** 7 hod., 84 km.

460. $T = 0,1003\ l$, $\sqrt{l} = 99,4\,.\,T^2$. **461.** a) $S = 6a^2$; b) $a = \sqrt[3]{V}$; c) $S = 6\sqrt[3]{V^2}$, $V = \sqrt{S^3 : 216}$. **462.** a) $\frac{4}{5}x$; b) $\frac{5}{4}y$. **463.** a) $(25 + 0,00028\,.\,t)$ m; b) 9,8 mm. **464.** Body (0; 1), (100; 0,795) spojte přímkou. **465.** V 17 hod. 02 min. ve vzdálenosti 49 km od Prahy, v 17 hod. 10 min. ve vzdálenosti 56 km, v 17 hod. 22 min. ve vzdálenosti 27 km a v 17 hod. 30 min. ve vzdálenosti 35 km.

Rejstřík

Uspořádání abecední podle podstatných jmen. Čísla značí stránku.

V tomto vydání byly provedeny změny v př.: 2b; 31; 44b; 54d; 85; 90; 92; 120; 277; 317; 372; 388; 400; 427; v tabulce na str. 18, v obr. 7 na str. 98 a v obr. 10 na str. 101; ve „Výsledcích cvičení" byly doplněny výsledky cvičení 103, 104, 207, 272 a 390 a opraveny výsledky cvičení 208, 207a) 377, 383a), b). V textu byly provedeny drobné úpravy na str. 33, 67, 114 (pořadí tabulek), 116 a 119.

Pokud učivo 4. třídy předpokládá znalosti, které žáci z předchozích tříd neovládají vůbec anebo jen zčásti, je třeba tyto znalosti žákům napřed doplnit.

V dělitelnosti vyložíme napřed učivo podle Aritmetiky pro druhou třídu a teprve potom je prohloubíme podle učebnice pro 4. třídu.

V nauce o lomených algebraických výrazech se omezíme na základní principy a jejich uvědomělé osvojení.

V rovnicích navážeme na poznatky ze 3. třídy a prohloubíme je. Na uvědomělé osvojení principů klademe větší důraz než na procvičení velkého počtu úloh bez jejich řádného rozboru.

O desetinných zlomcích a o dělitelnosti bylo pojednáno ve druhém a třetím čísle prvního ročníku časopisu „Matematika ve škole".

Strana

OBSAH

ARITMETIKA

pro čtvrtou třídu středních škol

Autoři: Dr Jan Bílek, Dr Eduard Čech, Dr Karel Hruša, Vítězslav Jozífek, Karel Prášil, Karel Rakušan

Odpovědný redaktor: prof. Dr František Vyčichlo

Technický redaktor: Ing. Antonín Langer

Obálka: Marie Tůmová

Obrazce rýsoval: Václav Krauman

Korektor: Jindřich Ludvík

Plánovací skupina 301 20-52i - Schváleno výnosem ministerstva školství, věd a umění ze dne 21. března 1951, č. 16 197/51-I/1, v třetím vydání jako učebnice pro školy střední - Povoleno MIO č. j. 45091/51-20-III/1 ze dne 13. března 1951 - Čkm. S 235-IV - Sazba: 16. 3. 51 - Tisk 15. 5. 51 - Vydalo r. 1951 Státní nakladatelství učebnic v třetím vydání - Náklad 30 000 výt./135001. — 165 000. výt./ - Plánovacích archů 9,— - - Autorských archů 10,82 - Vydavatelských archů 10,98 - Papír 221-10 - Formát A 5 - - Písmo Extended - Druh tisku: knihtisk - Všeobecná daň 1% - Vytiskly Středočeské tiskárny, n. p., závod 07, Praha VIII

CENA SEŠ. VÝTISKU Kčs 9,80

Čkm. S 235-IV

Cena Kčs 9,80
301 20-521