Miloš Kössler

Sur une formule de récurrence relative aux nombres premiers

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1918, 1-3

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501288

Sur une formule de récurrence relative aux nombres premiers.*)

Par MILOŠ KÖSSLER.

La fonction $\zeta(s)$ est définie par la formule d'Euler

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}},$$

où $p_1, p_2, \ldots$ sont les nombres premiers $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ et ainsi de suite. Posons

$$\Phi(s) + 1 = \zeta(s) \, . \, (1 - p_1^{-s})(1 - p_2^{-s}) \ldots (1 - p_{k-1}^{-s}).$$

Nous en déduirons facilement

$$\Phi(s) + 1 = 1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_{k+1}^s} + \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.)$$

où chaque terme de la série est plus petit que le précédent.

On obtient à l'aide de la formule (1)

$$\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} = p_k^2 \frac{1 + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^s + \ldots}{1 + \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{s+2} + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^{s+2} + \ldots} \quad \ldots (2.)$$

En posant

$$\varphi(s) = \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s + \left(\frac{p_k}{p_{k+2}}\right)^s + \ldots,$$

on a

$$\varphi(s) < p_k^s \left[\frac{1}{p_{k+1}^s} + \frac{1}{(p_{k+1}+1)^s} + \frac{1}{(p_{k+1}+2)^s} + \ldots\right],$$

*) O rekurrentním vzorci pro prvočísla. Rozpravy České Akademie XXVI. 1917.

mais

$$\frac{1}{p_{k+1}^s}+\frac{1}{(p_{k+1}+1)^s}+\frac{1}{(p_{k+1}+2)^s}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{(s-1)\,p_{k+1}^{s-1}}+\frac{1}{2\,p_{k+1}^s}+\frac{\Theta\,.\,s}{12\,.\,p_{k+1}^{s+1}},$$

$$0<\Theta<1;$$

donc

$$\varphi(s)<\left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s.\left[\frac{p_{k+1}}{s-1}+\frac{1}{2}+\frac{s\,.\,\Theta}{12\,p_{k+1}}\right] \ldots\ldots\ldots(3.)$$

Si nous prenons

$$s-1>8\,p_{k+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3a)$$

nous pouvons écrire

$$\frac{s}{12\,p_{k+1}}>\frac{1}{2}+\frac{p_{k+1}}{s-1};$$

donc

$$\varphi(s)<\left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s.\frac{s}{6\,p_{k+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.)$$

Alors on aura d'après (2)

$$p_k^2=\lim_{s=\infty}\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.)$$

Cette formule donne une solution du problème proposé. Mais on peut déduire de l'équation (2) une autre solution d'une forme beaucoup plus simple.

Or on a d'après (2) et (4)

$$p_k^2<\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)}<p_k^2+\frac{p_k^2\,s}{6\,p_{k+1}}\left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^s.$$

Si l'on peut trouver un nombre entier σ de sorte que

$$\frac{p_k\,.\,\sigma}{6}\left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{\sigma+1}<1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6a)$$

on a aussi

$$\frac{p_k\,s}{6}\left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{s+1}<1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.)$$

$$s\geqq\sigma;$$

donc

$$p_k^2=E\left[\frac{\Phi(s)}{\Phi(s+2)}\right]; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6b.)$$

$F(x)$ désigne le plus grand entier contenu dans x.

Considerons l'inégalité évidente

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqq \frac{p_k + 2}{p_k}$$

et l'inégalité de Čebyšev

$$p_k < 2\, p_{k-1}\,;$$

nous voyons que au lieu de (6a), on peut écrire

$$\frac{2\, p_{k-1} \,.\, \sigma}{6} < \left(\frac{p_{k-1} + 1}{p_{k-1}}\right)^{\sigma+1}.$$

Cette inégalité et l'inégalité (3a) admettent la solution

$$\sigma = 7\, p_{k-1} \log p_{k-1},$$

$$p_{k-1} > 11$$

pour la quelle a *fortiori* a lieu l'inégalité (6a).

En substituant

$$s = 2\, m, \quad (m \text{ entier})$$

$$\zeta\,(2\, m) = \frac{2^{2\,m-1}\, B_m\, \pi^{2\,m}}{(2\, m)\,!},$$

on obtient enfin l'équation (6b) sous la forme

$$p_k^2 = E\left[(2\,m+1)\,(2\,m+2)\,\frac{2^{2\,m-1}\, B_m \pi^{2\,m}\,(1 - p_1^{-2\,m})\,(1 - p_2^{-2\,m})\ldots}{2^{2\,m+1}\, B_{m+1}\, \pi^{2\,m+2}\,(1 - p_1^{-2\,m-2})\,(1 - p_2^{-2\,m-2})\ldots}\right.$$

$$\left.\frac{\ldots(1 - p_{k-1}^{-2\,m}) - (2\,m)\,!}{\ldots(1 - p_{k-1}^{-2\,m-2}) - (2\,m-2)\,!}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7.)$$

$$p_{k-1} > 11, \qquad m > 3{\cdot}5\, p_{k-1} \log p_{k-1},$$

où B_m, B_{m+1} sont les nombres bien connus de Bernoulli.

Étant donnés les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots p_{k-1}$ d'indice plus petit que k, on peut, au moye de la formule (7), calculer le nombre premier p_k.