Miloš Kössler

Über ein Teilerproblem

Věstník Král. čes. spol. nauk 1943, No. 11, 18 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501265

XI.

Über ein Teilerproblem.

Von Dr. **M. KÖSSLER,** Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juni 1943.)

Einleitung.

Es sei $\sigma_t(k)$ die Summe der t^{ten} Potenzen der Teiler von k und $S_t(N, s)$ die zugehörigen summatorischen Funktionen

$$\sum_1^N \frac{\sigma_t(k)}{k^s}.$$

Speziell ist also z. B. für $t = 0$, $\sigma_0(k) = \mathrm{d}(k)$ die Anzahl der Teiler von k und

$$S_0(N, s) = \sum_1^N \frac{\mathrm{d}(k)}{k^s}.$$

Im Folgenden wird eine asymptotische Formel (1,17) für diese Summen auf ganz elementarem Wege bewiesen werden. Die Abschätzung der Summe $S_t(N, s)$ im Falle $|\, t \,| > 1$ und bei beliebigem s ist so genau, daß man die Oszillationen des Restgliedes nicht nur scharf abgrenzen, sondern sogar eine wachsende Folge von Zahlen N angeben kann, bei welchen das Restglied seine maximale und seine minimale Grenze beinahe erreicht (s. (3,1) und (3,2)). Zu diesem Zwecke muß selbstverständlich die multiplikative Struktur der Zahl N berücksichtigt werden.

Noch eine Tatsache sei hervorgehoben. Das oszillierende Restglied des Produktes $N^s\, S_t(N, s)$ ist von dem Werte der komplexen Veränderlichen s vollkommen unabhängig.

*

1. Die Grundformel.

Die in dieser Abhandlung benützte elementare Methode stützt sich auf folgende Identität*)

$$\sum_1^N g(k)\, f\left[\frac{N}{k}\right] = \sum_1^r g(k)\, f\left[\frac{N}{k}\right] + \sum_1^\varrho \{f(k) - f(k-1)\}\, G\left[\frac{N}{k}\right] - f(\varrho)\, G(r). \quad (1,1)$$

*) M. Kössler: Einige Sätze aus der elementaren Zahlentheorie. 1942. Věstník Král. čes. spol. nauk, tř. II, s. 5.

Die Funktionen $g(k)$ und $f(k)$ sind beliebige für ganze Zahlen $k = 1, 2, \ldots, N$ definierte Funktionen, wobei jedoch immer $f(0) = 0$ zu setzen ist. Weiter ist

$$G(n) = g(1) + g(2) + \ldots + g(n),\ f\left[\frac{N}{k}\right] = f\left(\left[\frac{N}{k}\right]\right),$$

$$1 \leqq \varrho < N \text{ eine beliebige ganze Zahl, } r = \left[\frac{N}{\varrho + 1}\right].$$

Wenn

$$f(k) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{k^s}, \quad g(k) = \frac{h(k)}{k^s},$$

also

$$G(n) = \frac{h(1)}{1^s} + \frac{h(2)}{2^s} + \ldots + \frac{h(n)}{n^s}, \quad f(k) - f(k-1) = \frac{1}{k^s},$$

ins (1,1) eingesetzt wird, so bekommen wir

$$\begin{aligned}\sum_1^N \frac{h(k)}{k^s}\left\{\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]^s}\right\} &= \sum_1^r \frac{h(k)}{k^s}\left\{\frac{1}{1^s} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]^s}\right\} + \\ &+ \sum_1^\varrho \frac{1}{k^s}\left\{\frac{h(1)}{1^s} + \frac{h(2)}{2^s} + \ldots + \frac{h\left[\frac{N}{k}\right]}{\left[\frac{N}{k}\right]^s}\right\} - \left(\frac{1}{1^s} + \ldots + \frac{1}{\varrho^s}\right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{h(1)}{1^s} + \ldots + \frac{h(r)}{r^s}\right).\end{aligned} \tag{1,2}$$

Dabei ist $h(k)$ eine beliebige Funktion. Die linke Seite dieser Gleichung ist augenscheinlich mit der Summe $\sum\limits_1^N \frac{1}{k^s} \sum\limits_{d/k} h(d)$ identisch. In der Summe $\sum\limits_{d/k} h(d)$ kommen wie üblich nur die Teiler d der Zahl k vor. Die spezielle Wahl $h(k) = k^t$ hat

$$\sum_{d/k} h(d) = \sum_{d/k} d^t = \sigma_t(k)$$

zur Folge. So sind wir zur Grundformel unserer Rechnung angelangt

$$\begin{aligned}\sum_1^N \frac{\sigma_t(k)}{k^s} &= \sum_1^r \frac{1}{k^{s-t}}\left\{\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]^s}\right\} + \\ &+ \sum_1^\varrho \frac{1}{k^s}\left\{\frac{1}{1^{s-t}} + \frac{1}{2^{s-t}} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]^{s-t}}\right\} - \\ &- \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{\varrho^s}\right)\left(\frac{1}{1^{s-t}} + \ldots + \frac{1}{r^{s-t}}\right).\end{aligned} \tag{1,3}$$

Die Zahlen s, t sind ganz beliebige komplexe Zahlen. Ich werde jetzt diese Gleichung durch eine Rechnung transformieren, deren Ausführung und wahrscheinlich also auch das bloße Lesen nennenswerte Ansprüche auf die Geduld des Betroffenen macht. Es ist also ratsam bei dem ersten Lesen die folgenden Zeilen zu überschlagen und erst bei der Gleichung (1,16) wieder weiter zu lesen beginnen.

Die Euler-Maclaurinsche Summenformel

$$\sum_1^n \frac{1}{k^s} = \zeta(s) - \frac{1}{(s-1)\,n^{s-1}} + \frac{1}{2n^s} + O(n^{-s-1}) \tag{1,4}$$

ist für jede komplexe Zahl s mit der einzigen Ausnahme $s = 1$ giltig. In diesem Falle werden die beiden ersten Glieder der rechten Seite durch

$$\lim_{s \to 1} \left\{ \zeta(s) - \frac{1}{(s-1)\,n^{s-1}} \right\} = \log n + C$$

ersetzt.

Es ist also nach (1,4)

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]^s} = \zeta(s) + \frac{\left[\frac{N}{k}\right]^{1-s}}{1-s} + \frac{\left[\frac{N}{k}\right]^{-s}}{2} + O\left(\frac{k^{s+1}}{N^{s+1}}\right). \tag{1,5}$$

Das Gauss'sche Symbol $[x]$ wird jetzt durch die Einführung der Reste der Zahl N beseitigt. Es sei

$$\frac{N}{k} = \left[\frac{N}{k}\right] + r_k, \qquad 0 \leqq r_k \leqq \frac{k-1}{k}. \tag{1,6}$$

Also nach dem binomischen Satze:

$$\begin{aligned} \left[\frac{N}{k}\right]^{-s} &= \frac{k^s}{N^s}\left(1 - \frac{k r_k}{N}\right)^{-s} = \frac{k^s}{N^s} + \frac{s k^{s+1} r_k}{N^{s+1}} + O\left(\frac{k^{s+2}}{N^{s+2}}\right) \\ \frac{1}{1-s}\left[\frac{N}{k}\right]^{1-s} &= \frac{1}{1-s}\,\frac{k^{s-1}}{N^{s-1}} - \frac{k^s r_k}{N^s} + O\left(\frac{k^{s+1}}{N^{s+1}}\right) \end{aligned} \tag{1,7}$$

Es sei ausdrücklich betont, daß die Abschätzung des Restgliedes in der letzten Gleichung auch bei dem Grenzübergange $s \to 1$ erhalten bleibt. So bekommen wir nach (1,5) und (1,7)

$$\begin{aligned} \sum_1^r \frac{1}{k^{s-t}} \left\{ \frac{1}{1^s} + \dots + \frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]^s} \right\} &= \zeta(s) \sum_1^r \frac{1}{k^{s-t}} + \frac{N^{1-s}}{1-s} \sum_1^r k^{t-1} + \frac{N^{-s}}{2} \sum_1^r k^t + \\ &\quad - N^{-s} \sum_1^r k^t r_k + O\left(N^{-s-1} \sum_1^r k^{t+1}\right). \end{aligned} \tag{1,8}$$

Wird in dieser Formel $s - t = \sigma$ und $s = \sigma - \tau$ gesetzt, so geht sie in folgende über

$$\sum_1^{\varrho} \frac{1}{k^s} \left\{ \frac{1}{1^{s-t}} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{N}{k}\right]^{s-t}} \right\} =$$

$$= \zeta(s-t) \sum_1^{\varrho} \frac{1}{k^s} + \frac{N^{1+t-s}}{1+t-s} \sum_1^{\varrho} \frac{1}{k^{t+1}} + \frac{N^{t-s}}{2} \sum_1^{\varrho} \frac{1}{k^t} +$$

$$- N^{t-s} \sum_1^{\varrho} \frac{r_k}{k^t} + O\left(N^{-s-1+t} \cdot \sum_1^{\varrho} k^{1-t}\right). \tag{1,9}$$

Es zeigt sich nun als zweckmäßig die Zahl N in der Form

$$N = \nu(\nu+1) + \varkappa, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq \varkappa < 2(\nu+1) \tag{1,10}$$

zu betrachten und die bisher beliebige Zahl ϱ durch die Wahl $\varrho = \nu$ zu bestimmen. Dadurch ist auch die Zahl r bestimmt.

$$r = \left[\frac{N}{\varrho+1}\right] = \nu + \left[\frac{\varkappa}{\nu+1}\right].$$

Es bestehen also nur zwei Möglichkeiten. Entweder ist in (1,10)

$$0 \leqq \varkappa < \nu + 1 \quad \text{und dann } r = \nu = \varrho$$

oder (1,11)

$$\nu + 1 \leqq \varkappa < 2(\nu+1) \quad \text{und dann } r = \nu + 1 = \varrho + 1.$$

Durch die Formel (1,10) wird ν und $\varkappa$ der Zahl N eindeutig zugeordnet, denn

$$\nu(\nu+1) \leqq N < (\nu+1)(\nu+2),$$

also

$$\frac{\sqrt{4N+1}-1}{2} - 1 < \nu \leqq \frac{\sqrt{4N+1}-1}{2},$$

$$\nu = [\tfrac{1}{2}(\sqrt{4N+1}-1)] \tag{1,12}$$

Der Unterschied

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{4N+1}-1) - \nu = \vartheta$$

ist also immer kleiner als 1. Infolgedessen ist

$$\nu = N^{\frac{1}{2}} - (\tfrac{1}{2} + \vartheta) + O(N^{-\frac{1}{2}}). \tag{1,13}$$

Zuerst behandeln wir die erste Möglichkeit (1,11) d. h. $r = \varrho = \nu$. Nach (1,4) und (1,13) ist

$$\sum_1^{\nu} \frac{1}{k^s} = \zeta(s) - \frac{1}{(s-1)\,\nu^{s-1}} + \frac{1}{2\nu^s} + O(\nu^{-s-1}),$$

$$\nu^{-s} = N^{-\frac{s}{2}} + s(\tfrac{1}{2} + \vartheta)\, N^{-\frac{s+1}{2}} + O(N^{-1-\frac{s}{2}}),$$

$$\nu^{-s+1} = N^{\frac{1-s}{2}} + (s-1)\left(\tfrac{1}{2} + \vartheta\right) N^{-\frac{s}{2}} + O\left(N^{-\frac{1+s}{2}}\right),$$

$$\sum_1^{\nu} \frac{1}{k^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} N^{\frac{1-s}{2}} - \vartheta N^{-\frac{s}{2}} + O\left(N^{-\frac{1+s}{2}}\right) = \zeta(s) - R(s). \quad (1,14)$$

Die in (1,8) und (1,9) vorkommenden Summen

$$\sum_1^{\nu} k^t, \sum_1^{\nu} \frac{1}{k^{s-t}} \text{ usw.}$$

werden durch (1,14) transformiert, sodaß

$$\frac{N^{1-s}}{1-s} \sum_1^{\nu} k^{t-1} = \frac{N^{1-s}}{1-s} \zeta(1-t) + \frac{N^{1-s+\frac{t}{2}}}{t(1-s)} - \frac{\vartheta}{1-s} N^{\frac{1+t}{2}-s} + O\left(N^{\frac{t}{2}-s}\right),$$

$$\frac{N^{-s}}{2} \sum_1^{\nu} k^t = \frac{N^{-s}}{2} \zeta(-t) + \frac{1}{2(t+1)} N^{\frac{1+t}{2}-s} + O\left(N^{\frac{t}{2}-s}\right),$$

$$\frac{N^{1+t-s}}{1+t-s} \sum_1^{\nu} \frac{1}{k^{t+1}} = \frac{N^{1+t-s}}{1+t-s} \zeta(1+t) +$$

$$+ \frac{N^{1-s+\frac{t}{2}}}{t(1+t-s)} - \frac{\vartheta}{1+t-s} N^{\frac{1+t}{2}-s} + O\left(N^{\frac{t}{2}-s}\right),$$

$$\frac{N^{t-s}}{2} \sum_1^{\nu} \frac{1}{k^t} = \frac{N^{t-s}}{2} \zeta(t) - \frac{1}{2(t-1)} N^{\frac{1+t}{2}-s} + O\left(N^{\frac{t}{2}-s}\right).$$

Weiter ist

$$\zeta(s) \sum_1^{\nu} \frac{1}{k^{s-t}} + \zeta(s-t) \sum_1^{\nu} \frac{1}{k^s} - \sum_1^{\nu} \frac{1}{k^s} \cdot \sum_1^{\nu} \frac{1}{k^{s-t}} = \zeta(s)\{\zeta(s-t) - R(s-t)\} +$$

$$+ \zeta(s-t)\{\zeta(s) - R(s)\} - \{\zeta(s) - R(s)\}\{\zeta(s-t) - R(s-t)\} =$$

$$= \zeta(s)\,\zeta(s-t) - R(s) \,.\, R(s-t) =$$

$$= \zeta(s)\,\zeta(s-t) + \frac{N^{1+\frac{t}{2}-s}}{(s-1)(1+t-s)} + \frac{\vartheta}{1+t-s} N^{\frac{1+t}{2}-s} +$$

$$+ \frac{\vartheta}{1-s} N^{\frac{1+t}{2}-s} + O\left(N^{\frac{t}{2}-s}\right).$$

Das alles wird in die Formel (1,3) eingesetzt, welche dadurch in dieser Form erscheint

$$\sum_1^N \frac{\sigma_t(k)}{k^s} = \zeta(s)\,\zeta(s-t) + \frac{\zeta(1+t)}{1+t-s} N^{1+t-s} + \frac{\zeta(1-t)}{1-s} N^{1-s} +$$

$$+ \frac{\zeta(t)}{2} N^{t-s} - N^{t-s} \sum_1^{\nu} \frac{r_k}{k^t} + \frac{\zeta(-t)}{2} N^{-s} - N^{-s} \sum_1^{\nu} r_k k^t - \frac{N^{\frac{1+t}{2}-s}}{2(t-1)} +$$

$$+ \frac{N^{\frac{1+t}{2}-s}}{2(t+1)} + O\left(N^{\frac{t}{2}-s}\right) + O\left\{N^{-1-s}\left(\zeta(-t-1) + \frac{N^{1+\frac{t}{2}}}{t+2}\right)\right\} +$$

$$+ O\left\{N^{t-s-1}\left(\zeta(t-1) - \frac{N^{1-\frac{t}{2}}}{t-2}\right)\right\}. \tag{1,15}$$

Von den drei Restgliedern O wird selbstverständlich bei fest gegebenen s und t nur das größte beibehalten. Diese Formel ist für beliebige komplexe Werte von s, t anwendbar. Das Versagen bei den Werten $s = 1$, $t = \pm 1$, $t = \pm 2$, $s = t + 1$ ist aus demselben Grunde wie bei (1,4) nur scheinbar.

Die Berechnung wurde bei der Annahme $\varrho = r = \nu$ durchgeführt, welche nur bei gewissen N erfüllt ist. Nach (1,11) besteht aber noch die zweite Möglichkeit $\varrho = \nu$, $r = \nu + 1$. Wird das angenommen, so vergrößert sich die Summe auf der rechten Seite von (1,3) um

$$\frac{1}{(\nu+1)^{s-t}}\left\{\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{\left[\frac{N}{\nu+1}\right]^s}\right\} - \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{\nu^s}\right)\frac{1}{(\nu+1)^{s-t}}.$$

Aber in diesem Falle ist nach der Definition der Zahl r $r = \left[\frac{N}{\varrho+1}\right] = \left[\frac{N}{\nu+1}\right] = \nu + 1$, so daß das oben aufgeschriebene Unterschied sich auf

$$\frac{1}{(\nu+1)^{s-t}} \cdot \frac{1}{(\nu+1)^s} = \frac{1}{(\nu+1)^{2s-t}} = O(N^{\frac{t}{2}-s})$$

reduziert, was in dem ersten Restgliede O von (1,15) verschwindet. Die Formel (1,15) ist also von der Form der Zahl N vollkommen unabhängig.

Die Abschätzung der noch verbleibenden Summen in (1,15) wird erheblich erleichtert, wenn wir uns von nun an auf reelle Werte von t beschränken. Es sei aber ausdrücklich gesagt, das die Resultate sich mit nur geringfügigen Abänderungen auch auf den komplexen Fall ausdehnen lassen.

Bei reellem t ist nach (1,6) immer

$$r_k = \frac{N}{k} - \left[\frac{N}{k}\right], \qquad 0 < \sum_1^\nu \frac{r_k}{k^t} < \sum_1^\nu \frac{1}{k^t}.$$

Wir führen deshalb folgende Funktion ein

$$\Theta(N, t) = \sum_1^\nu \frac{r_k}{k^t} : \sum_1^\nu \frac{1}{k^t} < 1. \tag{1,16}$$

Es ist also nach (1,14)

$$\sum_1^\nu \frac{r_k}{k^t} = \Theta(N, t) \sum_1^\nu \frac{1}{k^t} = \Theta(N, t)\left\{\zeta(t) - \frac{1}{t-1} N^{\frac{1-t}{2}}\right\} + O(N^{-\frac{t}{2}}),$$

$$\sum_1^\nu r_k k^t = \Theta(N, -t) \sum_1^\nu k^t = \Theta(N, -t)\left\{\zeta(-t) + \frac{1}{t+1} N^{\frac{1+t}{2}}\right\} + O(N^{\frac{t}{2}}).$$

Durch Einsetzung ins (1,15) gelangen wir so zu der Hauptformel dieser Abhandlung

$$N^s \sum_1^N \frac{\sigma_t(k)}{k^s} = N^s\,\zeta(s)\,\zeta(s-t) + \frac{\zeta(1+t)}{1+t-s}\,N^{1+t} + \frac{\zeta(1-t)}{1-s}\,N + \\ + \zeta(t)\,\{\tfrac{1}{2} - \Theta(N,t)\}\,N^t + \zeta(-t)\,\{\tfrac{1}{2} - \Theta(N,-t)\} + \\ + N^{\frac{1+t}{2}}\left\{\frac{1}{t-1}\,(\Theta(N,t) - \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{t+1}\,(\tfrac{1}{2} - \Theta(N,-t))\right\} + R(N,t,s), \tag{1,17}$$

wobei

$$R(N,t,s) = O(N^{\frac{t}{2}}) + O\left(N^{-1}\left(\zeta(-t-1) + \frac{N^{1+\frac{t}{2}}}{t+2}\right)\right) + \\ + O\left(N^{t-1}\left(\zeta(t-1) - \frac{N^{1-\frac{t}{2}}}{t-2}\right)\right).$$

Das Restglied für $t > 0$ ist

$$\begin{aligned} R(N,t,s) &= O(N^{\frac{t}{2}} + N^{t-1}),\ t \neq 2, \\ R(N,2,s) &= O(N \log N). \end{aligned} \tag{1,17a}$$

Im Falle $t < 0$ ist

$$\begin{aligned} R(N,t,s) &= O(N^{\frac{t}{2}} + N^{-1}),\ t \neq -2, \\ R(N,-2,s) &= O(N^{-1} \log N), \end{aligned} \tag{1,17b}$$

aber immer ist das Restglied eine Funktion von s. Dagegen sind die oszillierenden Teile der Summe, das heißt der vierte, fünfte und sechste Summand auf der rechten Seite von (1,17) in gar keiner Weise von s abhängig.

Es entsteht also die Aufgabe das Verhalten der Faktoren $\frac{1}{2} - \Theta(N,t)$ bei wachsendem N zu untersuchen. Im Falle $t = 0$ ist schon eine befriedigende Abschätzung bekannt. Im Falle $|t| > 1$ werden wir ein sehr gutes Resultat erzielen. Im Falle $0 < |t| < 1$ kann derzeit nichts mehr als die triviale Abschätzung $|\frac{1}{2} - \Theta| < \frac{1}{2}$ erreicht werden.

2. Der Fall $t = 0$.

In der Formel (1,17) müßen das zweite und dritte Glied zusammengefaßt und ihr Grenzwert für $t \to 0$ berechnet werden. Es ist

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\zeta(1+t)\,N^{1+t}}{1-s+t} + \frac{\zeta(1-t)\,N}{1-s}\right\} = \frac{N}{1-s}\left\{\log N + 2C + \frac{1}{s-1}\right\},$$

da
$$\zeta(1+t) = \frac{1}{t} + C + O(t)$$

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{N^t}{t(1+t-s)}-\frac{1}{t(1-s)}\right\}=\frac{1}{1-s}\left(\log N-\frac{1}{1-s}\right)$$

ist. Weiter ist

$$\zeta(0)(\tfrac{1}{2}-\Theta(N,0))=O(1),\ R(N,0,s)=O(1),\ \sigma_0(k)=\mathrm{d}(k).$$

Also

$$N^s\sum_1^N\frac{\mathrm{d}(k)}{k^s}=N^s\,\zeta^2(s)+\frac{N}{1-s}\left\{\log N+2C-\frac{1}{1-s}\right\}+$$
$$+\,N^{\frac{1}{2}}(1-2\Theta(N,0)+O(1). \tag{2,1}$$

Der oszillierende von s unabhängige Faktor

$$1-2\Theta(N,0)$$

ist einer elementaren Abschätzung unzugänglich. Wenn aber $s=0$ eingesetzt wird, so erkennt man daß

$$N^{\frac{1}{2}}(1-2\Theta(N,0))=\sum_1^N\mathrm{d}(n)-N(\log N+2C-1)+O(1). \tag{2,2}$$

Die Abschätzung der Differenz

$$\sum_1^N\mathrm{d}(n)-N(\log N+2C-1)=\Delta(N)$$

wird als „Dirichlets Teilerproblem“ bezeichnet und die beste bisher bekannte Abschätzung stammt von van der Corput,*) welcher bewies, daß

$$\Delta(N)=O(N^\gamma),\ \gamma<\tfrac{33}{100}.$$

Die Abschätzung des Restgliedes in (2,1) ist also von s unabhängig. Nähert sich s der Zahl 1, so muß wiederum ein Grenzübergang durchgeführt werden. Da

$$\zeta^2(s)=\left(\frac{1}{s-1}+C\right)^2-2C_1+O(s-1)$$

gesetzt werden kann, so bekommt man nach leichter Rechnung

$$N\sum_1^N\frac{\mathrm{d}(k)}{k}=N\,\{\tfrac{1}{2}\log^2 N+2C\log N+C^2-2C_1\}+\Delta(N)+O(1). \tag{2,3}$$

Mit Hilfe von (2,1) kann die bekannte Tatsache, daß die Konvergenzabscisse der Dirich. Reihe

$$\sum_1^\infty\frac{\mathrm{d}(k)-\log k-2C}{k^s}$$

mit der Zahl γ identisch ist in drei Zeilen bewiesen werden. Es ist für jedes s

*) Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem, Math. Ann. 87 (1922), p. 39—65.

$$N^s \sum_1^N \frac{\log k}{k^s} = -N^s \zeta'(s) - \frac{N \log N}{s-1} - \frac{N}{(s-1)^2} + O(\log N),$$

$$2CN^s \sum_1^N \frac{1}{k^s} = 2CN^s \zeta(s) - \frac{2CN}{s-1} + O(1),$$

$$\sum_1^N \frac{\mathrm{d}(k) - \log k - 2C}{k^s} = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\,\zeta(s) + \frac{\Delta(N)}{N^s} + O\left(\frac{\log N}{N^s}\right). \tag{2,4}$$

3. Der Fall $|t| > 1$.

Bei $t > 1$ ist das größte osz. Glied in (1,17)

$$N^t \zeta(t) \{\tfrac{1}{2} - \Theta(N, t)\}$$

da $t > \frac{t+1}{2} > 0$. Bei $t < -1$ ist das größte o. G.

$$\zeta(-t) \{\tfrac{1}{2} - \Theta(N, -t)\}$$

da $0 > \frac{t+1}{2} > t$. Das Problem reduziert sich also auf die Abschätzung des o. Faktors

$$\tfrac{1}{2} - \Theta(N, t),$$

wenn $t > 1$ ist. Das kann vollkommen elementar durchgeführt werden. Nach (1,16) ist

$$\Theta(N, t) = \sum_1^\nu \frac{r_k}{k^t} : \sum_1^\nu \frac{1}{k^t}, \quad r_k \leqq 1 - \frac{1}{k}.$$

$$\Theta(N, t) < \sum_1^\nu \left(\frac{1}{k^t} - \frac{1}{k^{t+1}}\right) : \sum_1^\nu \frac{1}{k^t} = 1 - \sum_1^\nu \frac{1}{k^{t+1}} : \sum_1^\nu \frac{1}{k^t}.$$

Nach (1,14) ist

$$\sum_1^\nu \frac{1}{k^{t+1}} : \sum_1^\nu \frac{1}{k^t} =$$

$$= \left\{\zeta(t+1) - \frac{1}{t} N^{-\frac{t}{2}} + O\left(N^{-\frac{1+t}{2}}\right)\right\} : \left\{\zeta(t) - \frac{1}{t-1} N^{-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} + O\left(N^{-\frac{t}{2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\zeta(t+1)}{\zeta(t)} + O\left(N^{-\frac{t-1}{2}}\right).$$

Dabei ist das O für genügend große N positiv. Infolgedessen ist

$$\tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{2} - \Theta(N, t) > \tfrac{1}{2} - \left(1 - \frac{\zeta(t+1)}{\zeta(t)}\right). \tag{3,1}$$

Der Faktor kann also bei wachsendem N nur zwischen diesen Grenzen oszillieren. Es entsteht die Frage ob und für welche N sich der Faktor der einer oder der anderen Grenze nähert. Die Antwort ist in folgendem Satze enthalten:

Man kann eine Folge von wachsenden Zahlen $N_1 \leq N_2 \leq \ldots \leq \leq N_\mu \leq \ldots$ angeben, welche die Eigenschaft

$$\tfrac{1}{2} - \Theta(N_\mu, t) = \tfrac{1}{2} - O(\log^{1-t} N_\mu),$$

$$\tfrac{1}{2} - \Theta(N_\mu - 1, t) = \tfrac{1}{2} - \left(1 - \frac{\zeta(t+1)}{\zeta(t)}\right) + O(\log^{1-t} N_\mu). \quad (3,2)$$

besitzen.

Der Beweis erfordert eine einfache zahlentheoretische Vorbereitung. Es sei $n(\mu)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \mu$, und es seien $p_1 < p_2 < \ldots < p_\tau$ alle Primzahlen die kleiner oder gleich μ sind. Ist $p_\varkappa$ eine dieser Primzahlen, so muß $n(\mu)$ durch solche Potenz von $p_\varkappa$ teilbar sein die kleiner oder gleich μ ist. Das heißt, daß $n(\mu)$ durch $p_\varkappa^{\left[\frac{\log \mu}{\log p_\varkappa}\right]}$ teilbar sein muß und durch keine höhere Potenz teilbar sein kann. Da aber $n(\mu)$ durch keine Primzahl die größer als μ ist teilbar sein kann, so muß

$$n(\mu) = \prod_{p \leq \mu} p^{\left[\frac{\log \mu}{\log p}\right]}. \quad (3,3)$$

Es ist also

$$\log n(\mu) = \sum_{p \leq \mu} \left[\frac{\log \mu}{\log p}\right] \log p.$$

Die Zahl $\left[\frac{\log \mu}{\log p}\right]$ ist gleich $1, 2, 3$ usw. je nach dem $\mu^{\frac{1}{2}} < p \leq \mu$, $\mu^{\frac{1}{3}} < p \leq \mu^{\frac{1}{2}}$, $\mu^{\frac{1}{4}} < p \leq \mu^{\frac{1}{3}}$, usw. Infolgedessen

$$\log n(\mu) = \sum_{p \leq \mu} \log p + \sum_{p \leq \mu^{\frac{1}{2}}} \log p + \sum_{p \leq \mu^{\frac{1}{3}}} \log p + \ldots \quad (3,4)$$

Das ist aber die aus der Theorie der Primzahlen wohl bekannte Funktion $\psi(\mu)$, so daß die Abschätzung

$$\log n(\mu) = \psi(\mu) = \mu + o(\mu) \quad (3,5)$$

benützt werden kann.

Jetzt werden wir den Satz (3,2) durch die Wahl $N_\mu = n(\mu)$ beweisen. Da diese Zahl durch $1, 2, 3, \ldots, \mu$ teilbar ist, so $r_k = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, \mu$.

$$\sum_1^\nu \frac{r_k}{k^t} = \sum_{\mu+1}^\nu \frac{r_k}{k^t} < \sum_{\mu+1}^\nu \frac{1}{k^t} = \sum_1^\nu \frac{1}{k^t} - \sum_1^\mu \frac{1}{k^t}.$$

Nach (1,4) ist also

$$\sum_1^\nu \frac{r_k}{k^t} < \frac{1}{(t-1)\,\mu^{t-1}} - \frac{1}{(t-1)\,\nu^{t-1}} + O(\mu^{-t}) = O(\mu^{1-t}).$$

Für die Folge der Zahlen N_μ, $\mu = \mu_0, \mu_0 + 1, \mu_0 + 2, \ldots$ bei genügend großem μ_0 ist also

$$\Theta(N_\mu, t) = \sum_1^\nu \frac{r_k}{k^t} : \sum_1^\nu \frac{1}{k^t} = O(\mu^{1-t}).$$

Nach (3,5) ist das mit der Abschätzung

$$\Theta(N_\mu, t) = O(\log^{1-t} N_\mu)$$

identisch, was die erste Hälfte des Satzes (3,2) darstellt. Bei der Wahl $N = N_\mu - 1 = n(\mu) - 1$ ist für $k = 1, 2, \ldots, \mu$, $r_k = \frac{k-1}{k}$, also

$$\sum_1^\nu \frac{r_k}{k^t} = \sum_1^\mu \left(\frac{1}{k^t} - \frac{1}{k^{t+1}}\right) + \sum_{\mu+1}^\nu \frac{r_k}{k^t} = \sum_1^\mu \frac{1}{k^t} - \sum_1^\mu \frac{1}{k^{t+1}} + \vartheta \sum_{\mu+1}^\nu \frac{1}{k^t},$$
$$0 < \vartheta < 1.$$

Nach (1,4) ist

$$\sum_1^\mu \left(\frac{1}{k^t} - \frac{1}{k^{t+1}}\right) = \zeta(t) - \zeta(t+1) - \frac{\mu^{1-t}}{t-1} + O(\mu^{-t}),$$

$$\vartheta \sum_{\mu+1}^\nu \frac{1}{k^t} = O(\mu^{1-t}), \quad \sum_1^\nu \frac{1}{k^t} = \zeta(t) + O(\nu^{1-t}),$$

$$\Theta(N_\mu - 1, t) = \sum_1^\nu \frac{r_k}{k^t} : \sum_1^\nu \frac{1}{k^t} = 1 - \frac{\zeta(t+1)}{\zeta(t)} + O(\mu^{1-t})$$
$$= 1 - \frac{\zeta(t+1)}{\zeta(t)} + O(\log^{1-t} N_\mu),$$

was die zweite Hälfte des Satzes (3,2) darstellt.

Die Folge der Zahlen N_μ hat folgende Eigenschaft, die aus der Gleichung (3,4) abgelesen werden kann

$$\begin{aligned} N_\mu &= N_{\mu-1}, &&\text{wenn} \quad \mu \neq p^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\ N_\mu &= pN_{\mu-1}, &&\text{wenn} \quad \mu = p^k. \end{aligned} \tag{3,6}$$

Aus diesen Erwägungen geht auch deutlich hervor, daß bei Abschätzungen von $\Theta(N, t)$ bei beliebigem t auf die multiplikative Struktur der Zahl $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ Rücksicht genommen werden muß.

Die Formel (1,17) hat also im Falle $t > 1$ folgende Form

$$N^s \sum_1^N \frac{\sigma_t(k)}{k^s} = N^s \zeta(s)\, \zeta(s-t) + N \frac{\zeta(1-t)}{1-s} + \frac{\zeta(1+t)}{1+t-s} N^{1+t} +$$
$$+ \zeta(t)\, N^t \{\tfrac{1}{2} - \Theta(N, t)\} + O(N^{\frac{1+t}{2}} + N^{t-1}). \tag{3,7}$$

Nach (3,1) und (3,2) ist die Abschätzung des os. Faktors so genau, daß etwaige Verbesserung nur im O-Gliede des Satzes (3,2) erreicht werden könnte. Es ist zwar möglich für ganzzahlige und ungerade t die Summen $S_t(N, 0)$ durch die exakte Formel (5,1) auszudrücken, aber zu Abschätzungszwecken ist diese Formel bei jetzigem Stande unserer Kenntnisse vollkommen unbrauchbar.

Eine fast unmittelbare Folge von (3,7) ist die Möglichkeit der Bestimmung des wahren Konvergenzbereiches der Dir. Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\sigma_t(k) - k^t\,\zeta(1+t) - \zeta(1-t)}{k^s}. \tag{3,8}$$

Der Bereich ist durch $R(s) > t$ definiert. Der Beweis wird genau nach dem Muster (2,4) durchgeführt. Es ist für jedes s

$$N^s\,\zeta(1+t)\sum_1^N \frac{1}{k^{s-t}} = N^s\,\zeta(s-t)\,\zeta(1+t) + \frac{N^{1+t}\,\zeta(1+t)}{1+t-s} + \\ + \frac{N^t\,\zeta(1+t)}{2} + O(N^{t-1}),$$

$$N^s\,\zeta(1-t)\sum_1^N \frac{1}{k^s} = N^s\,\zeta(s)\,\zeta(1-t) + \frac{N\,\zeta(1-t)}{1-s} + O(1),$$

also nach (3,7)

$$N^s \sum_1^N \frac{\sigma_t(k) - k^t\,\zeta(1+t) - \zeta(1-t)}{k^s} =$$

$$= N^s\,\{\zeta(s)\,\zeta(s-t) - \zeta(1+t)\,\zeta(s-t) - \zeta(s)\,\zeta(1-t)\} + \\ - \frac{N^t}{2}\,\zeta(1+t) + \frac{N^t}{2}\,\zeta(t) - \zeta(t)\,N^t\,\Theta(N,t) + O(N^{\frac{1+t}{2}} + N^{t-1}). \tag{3,9}$$

Die Reihe (3,8) konvergiert also für $R(s) > t$ und divergiert für $R(s) \leq t$.

Durch diese Rechnungen ist aber auch der Fall $t < -1$ erledigt. Wenn in (3,7), (3,8), (3,9) anstatt s die Zahl $s+t$ eingesetzt wird, so bekommt man, da

$$\frac{\sigma_t(k)}{k^t} = \sigma_{-t}(k)$$

$$N^s \sum_1^N \frac{\sigma_{-t}(k)}{k^s} = N^s\,\zeta(s)\,\zeta(s+t) + \frac{N\,\zeta(1+t)}{1-s} + N^{1-t}\,\frac{\zeta(1-t)}{1-t-s} + \\ + \zeta(t)\,\{\tfrac{1}{2} - \Theta(N,t)\} + O(N^{\frac{1-t}{2}} + N^{-t}), \tag{3,10}$$

$$N^s \sum_1^N \frac{\sigma_{-t}(k) - \zeta(1+t) - k^{-t}\,\zeta(1-t)}{k^s} =$$

$$= \{\zeta(s)\,\zeta(s+t) - \zeta(s)\,\zeta(1+t) - \zeta(s+t)\,\zeta(1-t)\}\,N^s + \\ + \zeta(t)\left\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\zeta(1+t)}{\zeta(t)} - \Theta(N,t)\right\} + O(N^{\frac{1-t}{2}} + N^{-1}). \tag{3,11}$$

Der Konvergenzbereich der zu (3,11) gehörigen Dir. Reihe ist also genau $R(s) > 0$. Für $R(s) = 0$ divergiert die Reihe. Daß die Reihe im Bereiche $0 < R(s) \leq 1$ nur bedingt konvergiert, geht aus folgender Erwägung hervor. Wäre die Reihe absolut konvergent, so müßte auch die nur über die Primzahlen summierte Reihe

$$\sum_p \frac{\sigma_{-t}(p) - \zeta(1+t) - p^{-t}\,\zeta(1-t)}{p^s}$$

konvergieren. Da aber

$$\sigma_{-t}(p) = 1 + \frac{1}{p^t}, \quad \frac{\sigma_{-t}(p) - \zeta(1+t) - p^{-t}\,\zeta(1-t)}{p^s} =$$

$$= \frac{1 - \zeta(1+t)}{p^s} + \frac{1 - \zeta(1-t)}{p^{s+t}},$$

und die Reihe $\sum\limits_p \frac{1}{p^{s+t}}$ wegen $R(s+t) > 1$ konvergiert, während $\sum\limits_p \frac{1}{p^s}$ für $R(s) \leqq 1$ divergiert, so ist auch die „Primzahlen Reihe" divergent.

4. Der Fall $|t| \leqq 1$.

Der Fall $t = +1$ ist in dem Sinne singular, daß ein Grenzübergang in (1,17) durchgeführt werden muß. Es ist

$$\lim_{t\to 1}\left\{\zeta(t)\,N^t - \frac{N^{\frac{1+t}{2}}}{t-1}\right\} = N(C + \tfrac{1}{2}\log N),$$

also

$$N^s \sum_1^N \frac{\sigma_1(k)}{k^s} = N^s\,\zeta(s)\,\zeta(s-1) + \frac{\zeta(2)}{2-s}\,N^2 - \frac{N}{2(1-s)} +$$

$$+ N\log N\,\{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\Theta(N,1)\} + O(N). \tag{4,1}$$

Wird z. B. $s = 0$ gewählt, so kommt die Formel von S. Wigert*) heraus

$$\sum_1^N \sigma_1(k) = \frac{\pi^2}{12}\,N^2 + N\log N\,\{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\Theta(N,1)\} + O(N), \tag{4,2}$$

während die Wahl $s = 1$ nach Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{s\to 1}\left\{N^s\,\zeta(s)\,\zeta(s-1) - \frac{N}{2(1-s)}\right\} = -\frac{N}{2}\log N$$

zu der zweiten Wigertschen Formel führt

$$\sum_1^N \frac{\sigma_1(k)}{k} = \frac{\pi^2}{6}\,N - \tfrac{1}{2}\log N + \log N\,\{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\Theta(N,1)\} + O(1). \tag{4,3}$$

Wegen $0 < \Theta(N,1) < 1$, ist $|\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\Theta| < \tfrac{1}{4}$.

Durch ein ähnliches Verfahren wie bei (3,9) geht aus (4,1) die Formel hervor

$$\sum_1^N \frac{\sigma_1(k) - \frac{\pi^2}{6}\,k + \frac{1}{2}}{k^s} = \zeta(s)\{\zeta(s-1) + \tfrac{1}{2}\} - \frac{\pi^2}{6}\,\zeta(s-1) + O\left(\frac{N\log N}{N^s}\right) \tag{4,4}$$

*) Sur quelques fonctions arithmétiques, (1914), Acta Math. 37.

Die D. Reihe konvergiert also bestimmt mindestens im Bereiche $R(s) > 1$. Für $s = 1$ bekommt man das Restglied in der Form

$$\frac{\log N}{2}\left(\tfrac{1}{2} - \Theta(N, 1)\right) + O(1).$$

Da aber eine genauere Abschätzung von $\Theta(N, 1)$ unbekannt ist, so kann keine Entscheidung über das Verhalten der Reihe für $s = 1$ getroffen werden.

In dem noch verbleibendem Falle $0 < t < 1$ gibt wiederum (1,17) und (1,17a) den Bescheid. Es ist

$$N^s \sum_1^N \frac{\sigma_t(k)}{k^s} = N^s\, \zeta(s)\, \zeta(s-t) + \frac{\zeta(t+1)}{1+t-s} N^{1+t} + \frac{\zeta(1-t)}{1-s} N +$$
$$+ N^{\frac{1+t}{2}} \left\{ \frac{1}{t-1}\left(\Theta(N, t) - \tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{t+1}\left(\tfrac{1}{2} - \Theta(N, -t)\right)\right\} + O(N^{\frac{t}{2}}). \quad (4{,}5)$$

Der osz. Faktor ist gewiß absolut kleiner als $1 : (1 - t^2)$. Mehr kann man aber nicht behaupten. Durch dasselbe Verfahren wie bei (3,7) bekommt man

$$\sum_1^N \frac{\sigma_t(k) - k^t\, \zeta(1+t) - \zeta(1-t)}{k^s} =$$
$$= \{\zeta(s)\, \zeta(s-t) - \zeta(1+t)\, \zeta(s-t) - \zeta(s)\, \zeta(1-t)\} + O(N^{\frac{1+t}{2}-s}), \quad (4{,}6)$$

sodaß die D. Reihe mindestens im Bereiche

$$R(s) > \frac{1+t}{2}$$

konvergiert. Die Bestimmung des wahren Konvergenzgebietes stößt auf dieselbe Schwierigkeit wie bei (4,4). Durch (4,5) und (4,6) ist auch der Fall $-1 < t < 0$ erledigt. Den es genügd in diesen Formeln $s + t$ statt s einzusetzen.

5. Die exakte Formel.

Es sind zwei spezielle exakte Formeln bereits bekannt und zwar die Formeln von Voronoï und Walfisz

$$\sum_1^N \mathrm{d}(k) = N(\log N + 2C - 1) + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}(N) + \tfrac{1}{4} +$$
$$+ N^{\frac{1}{2}} \sum_1^\infty \frac{\mathrm{d}(n)}{\sqrt{n}} \{Y_1(4\pi\sqrt{Nn}) - H_1(4\pi\sqrt{Nn})\},$$
$$\sum_1^N \sigma_1(k) = \frac{\pi^2}{12} N^2 - \tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}\sigma_1(N) + \tfrac{1}{24} - N\sum_1^\infty \frac{\sigma_1(n)}{n} I_2(4\pi\sqrt{Nn}).$$

Die summatorische Funktion $\sum\limits_1^N \sigma_t(k)$ kann aber durch eine ähnliche

Formel exakt angedrückt werden, wenn t einer ganzen ungeraden Zahl $2\varkappa - 1$ gleich ist. Es ist

$$\sum_1^N \sigma_{2\varkappa-1}(n) = \frac{B_\varkappa}{4\varkappa}\left\{\frac{(2\pi N)^{2\varkappa}}{(2\varkappa)!} + (-1)^{\varkappa+1}\right\} + \tfrac{1}{2}\sigma_{2\varkappa-1}(N) + \\ + (-1)^\varkappa N^\varkappa \sum_1^\infty \frac{\sigma_{2\varkappa-1}(n)}{n^\varkappa} I_{2\varkappa}(4\pi\sqrt{Nn}), \tag{5,1}$$

$\varkappa \geqq 2$, $B_\varkappa$ die $\varkappa^{\text{te}}$ Bernoullische Zahl, $I_{2\varkappa}(x)$ die $(2\varkappa)^{\text{te}}$ Besselsche Funktion.

Die Reihe auf der rechten Seite ist divergent und kann nur mit Cesároschen Mitteln summiert werden. Zur asymptotischen Abschätzung kann also (5,1) nicht benutzt werden. Aus diesem Grunde werde ich den Beweis von (5,1) nur kurz skizieren.

O. Schlömilch*) hat die Funktionalgleichung

$$\frac{1}{4} - \frac{\pi s}{4\sin^2\frac{x}{2}} + 2\pi s\sum_1^\infty \frac{n\cos nx}{e^{2\pi ns}-1} = -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{4s\,\mathrm{snh}^2\frac{x}{2s}} + \\ -\frac{2\pi}{s}\sum_1^\infty \frac{n\,\mathrm{csh}\frac{nx}{s}}{e^{\frac{2\pi n}{s}}-1} \tag{5,2}$$

bewiesen. Dabei ist $0 \leqq x < 2\pi$ und s eine komplexe Zahl mit $R(s) > 0$. Für $x \to +0$ bekommt man

$$2\pi\sum_1^\infty \sigma_1(n)\, e^{-2\pi ns} = -\frac{1}{2s} + \frac{\pi}{12s}\left(s + \frac{1}{s}\right) - \frac{2\pi}{s^2}\sum_1^\infty \sigma_1(n)\, e^{-\frac{2\pi n}{s}}. \tag{5,3}$$

Die Gleichung (5,2) kann beliebig oftmal nach x deriviert werden. Deriviert man also $2(\varkappa-1)$-mal und setzt dann $x \to +0$ ein, so bekommt man die Funktionalgleichung

$$\sum_1^\infty \sigma_{2\varkappa-1}(n)\, e^{-2\pi ns} = \frac{B_\varkappa}{4\varkappa}\left(\frac{1}{s^{2\varkappa}} + (-1)^{\varkappa+1}\right) + \frac{(-1)^{\varkappa+1}}{s^{2\varkappa}}\sum_1^\infty \sigma_{2\varkappa-1}(n)\, e^{-\frac{2\pi n}{s}}. \tag{5,4}$$

Damit ist die Grundlage zum Beweise von (5,1) gegeben. Was folgt weiter ist nur ein Rutienwerk. Wird die Summe auf der linken Seite von (5,3) oder (5,4) als $F(s)$ bezeichnet, so ist für $x > 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{2\pi xs}F(s)\,ds}{s} = \sum_{n\leqq x}\sigma_{2\varkappa-1}(n) - (\tfrac{1}{2}\sigma_{2\varkappa-1}(x)) \tag{5,5}$$

wobei das letzte Glied nur bei ganzzahligem x zugefügt wird. Auf der rechten Seite der Gleichung erscheinen die bekannten Integrale (die Grenzen wie bei (5,5))

*) Sitzungsber. d. K. S. Gesselsch. d. Wissensch. 1887.

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{2\pi x s}\,ds}{s} = 1, \quad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{2\pi x s}\,ds}{s^{2\varkappa+1}} = \frac{(2\pi x)^{2\varkappa}}{(2\varkappa)!}$$

und das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{2\pi x s}\,.\,e^{-\frac{2\pi n}{s}}}{s^{2\varkappa+1}}\,ds = \left(\frac{x}{n}\right)^{\varkappa} I_{2\varkappa}\,(4\pi\sqrt{xn}). \tag{5,6}$$

Um (5,6) zu berechnen, wird zuerst nach üblicher Methode bewiesen, daß (5,6) dem Residuum der Funktion

$$\frac{e^{2\pi x s}\,.\,e^{-\frac{2\pi n}{s}}}{s^{2\varkappa+1}}$$

im Punkte $s = 0$ gleich ist. Da aber in dem Produkte

$$e^{\alpha s}\,.\,e^{-\frac{\beta}{s}} = \left(1 + \frac{\alpha s}{1!} + \frac{(\alpha s)^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 - \frac{\beta}{s} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\beta}{s}\right)^2 - \ldots\right)$$

der Koeffizient der Laurentschen Reihe bei $s^{2\varkappa}$ durch

$$\frac{(\alpha\beta)^{2\varkappa}}{(2\varkappa)!\,\beta^{2\varkappa}}\left\{1 - \frac{(\alpha\beta)}{1!\,(2\varkappa+1)} + \frac{(\alpha\beta)^2}{2!\,(2\varkappa+1)(2\varkappa+2)} - \ldots\right\}$$

gegeben ist, und die ν-te Besselsche Funktion durch

$$I_\nu(2z) = \frac{z^\nu}{\nu!}\left\{1 - \frac{z^2}{1!\,(\nu+1)} + \frac{z^4}{2!\,(\nu+1)(\nu+2)} - \ldots\right\}$$

definiert wird, so bekommt man bei der Wahl $\alpha = 2\pi x$, $\beta = 2\pi n$, $\nu = 2\varkappa$ das in (5,6) aufgeschriebene Resultat. Damit ist nicht nur die Formel von Walfisz sondern auch (5,1) bewiesen.

Schlußbemerkung.

Die angewandte Methode beruht auf der Identität (1,2). Infolgedessen kann dieselbe Methode immer dann angewendet werden, wenn die Dirichletsche Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{h(k)}{k^s}$$

eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme von etwaigen Polen reguläre Funktion darstellt. Solche Funktionen sind z. B.

$$(\zeta(s))^n, \quad (\zeta'(s))^n \text{ usw.}$$

Das führt zu dem Teilerproblem von Piltz und dessen Verallgemeinerungen.

Noch allgemeiner kann man erwarten, daß diese Methode auch beim Studium des Produktes

$$\sum_1^\infty \frac{a_k}{k^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{b_k}{k^t} = \sum_1^\infty \frac{a_k}{k^s} \cdot \sum_1^\infty \frac{b_k \,.\, k^{s-t}}{k^s}$$

gute Dienste leisten wird.

Zusatz bei der Korrektur.

Während des Druckes ist mir klar geworden, daß die Abschätzung bei (4,1), (4,4) und infolgedessen auch bei den Wigert-schen Formeln (4,2) und (4,3) wesentlich verschärft werden kann.

Die durch (1,16) definierte oszil. Funktion $\Theta(N, t)$ hat unter der Voraussetzung, daß $(N-1)$ und N zu derselben Zahl ν gehören folgende Eigenschaft.

$$\Theta(N-1, t) = \Theta(N,t) - \left\{\sum_1^\nu \frac{1}{k^{t+1}} - \sum_{d/N}^{d \leqq \nu} \frac{1}{d^t}\right\} : \sum_1^\nu \frac{1}{k^t}.$$

Das ist eine einfache Folge der Tatsache, daß

$$r_k(N-1) = r_k(N) - \frac{1}{k}$$

solange k ein Nichtteiler von N ist. Dagegen ist

$$r_k(N-1) = 1 - \frac{1}{k}.$$

wenn k/N. Wird jetzt $t = 1$ und $N = n(\mu)$ (siehe 3,3) gewählt, so bekommt man

$$\Theta(N-1, t) - \Theta(N, t) = \left\{\sum_{d/N}^{d \leqq \nu} \frac{1}{d} - \sum_1^\nu \frac{1}{k^2}\right\} : \sum_1^\nu \frac{1}{k}.$$

Bei dieser Wahl ist

$$\sum_{d/N}^{d \leqq \nu} \frac{1}{d} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\mu} = \log \mu + O(1).$$

$$\sum_1^\nu \frac{1}{k} = \log \nu + O(1), \quad \sum_1^\nu \frac{1}{k^2} = O(1),$$

also

$$\Theta(N-1, 1) - \Theta(N, 1) \geqq \frac{\log \mu}{\log \nu} + O\left(\frac{1}{\log \nu}\right).$$

Weiter ist

$$\log \nu = \tfrac{1}{2} \log N + o(1), \qquad \mu = \log N + o\,(\log N)$$

also

$$(\tfrac{1}{2} - \Theta(N, 1)) - (\tfrac{1}{2} - \Theta(N-1, 1)) \geqq \frac{2 \log \log N}{\log N} + O\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

$$\left|\tfrac{1}{2}-\Theta(N,1)\right|+\left|\tfrac{1}{2}-\Theta(N-1,1)\right| \geqq \frac{2\log\log N}{\log N}+O\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

Mindestens eine der Zahlen $\left|\tfrac{1}{2}-\Theta\right|$ ist also nicht kleiner als

$$\frac{\log\log N}{\log N}+O\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

Zusammenfassend kann man also in voller Übereinstimmung mit den Resultaten von Wigert behaupten, daß zwar immer

$$\left|\tfrac{1}{2}-\Theta(N,1)\right|<\tfrac{1}{2}$$

ist, daß es aber eine unbergenzte Folge von Zahlen $\boldsymbol{N}$ gibt, für welche

$$\left|\tfrac{1}{2}-\Theta(N,1)\right| \geqq \frac{\log\log N}{\log N}+O\left(\frac{1}{\log N}\right)$$

ist. Der wahre Konvergenzbezeich der Dirichlet. Reihe (4, 4) ist also durch $R(s)>1$ gegeben, wobei jedoch in dem Streifen $1<R(s)\leqq 2$ die Konvergenz nur bedingt ist.