Eduard Čech
Literaturberichte: K. Menger, Kurventheorie

Monatsh. Math. Phys. 40 (1933), no. 1, A23--A25

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501027

Rotationen in linearen Räumen findet, sowie den Nachweis, daß der Raum der im Intervalle [0,1] stetigen Funktionen (mit der üblichen Metrik) im folgenden Sinne ein Universalraum ist: Er enthält zu jedem separablen Raume vom Typus *(B)* einen äquivalenten linearen Teilraum und zu jedem separablen metrischen Raum einen isometrischen Teilraum. Endlich seien noch hervorgehoben die Untersuchungen über die l i n e a r e D i m e n s i o n von Vektorräumen: Es wird geschrieben: $\dim_l E \leqq \dim_l E_1$, wenn E isomorph ist einem abgeschlossenen linearen Teilraum von E_1; gilt sowohl $\dim_l E \leqq \dim_l E_1$, als $\dim_l E_1 \leqq \dim_l E$, so wird geschrieben: $\dim_l E = \dim_l E_1$; gilt die erste dieser beiden Ungleichungen, aber nicht die zweite, so wird geschrieben: $\dim_l E < \dim_l E_1$; gilt keine dieser beiden Ungleichungen, so wird gesagt: die linearen Dimensionen von E und E_1 sind unvergleichbar. Von den sehr merkwürdigen Resultaten, die sich da ergeben, seien erwähnt: ist $l^{(p)}$ $(p > 1)$ der Raum der Zahlenfolgen $x = \{\xi_n\}$ mit der Metrik $|x| = (\sum_n |\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $L^{(p)}$ $(p > 1)$ der Raum der Funktionen $x = x(t)$ in [0,1] mit der Metrik $|x| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$, so gilt $\dim_l L^{(p)} = \dim_l l^{(q)}$ nur für $p = q = 2$; für $1 < p < q < 2$ und $2 < p < q$ sind die linearen Dimensionen von $L^{(p)}$ und $l^{(q)}$ unvergleichbar; für $p \neq 2$ ist $\dim_l l^{(p)} < \dim_l L^{(p)}$; für $p \neq q$ sind die linearen Dimensionen von $l^{(p)}$ und $l^{(q)}$ unvergleichbar. — In einem Anhange findet man viele ergänzende Bemerkungen und reichhaltige Literaturangaben. Von besonderem Werte für junge Forscher wird es sein, daß vielfach auf ungelöste, aber keineswegs hoffnungslose Probleme hingewiesen wird. Wenn — wie zu hoffen berechtigt ist — die folgenden Bände dieser Monographiensammlung polnischer Mathematiker ähnliche wissenschaftliche Höhe erreichen, wie dieser erste, so wird sie eine der bedeutsamsten literarischen Unternehmungen auf dem Gebiete der Mathematik darstellen. *Hans Hahn.*

K. Menger, Kurventheorie. Herausgegeben unter Mitarbeit von G. N ö b e l i n g. (Mengentheoret. Geometrie in Einzeldarstellungen. Herausgegeben von K. M e n g e r. Bd. 2.) B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1932. VI + 375 S. RM 22,—.

Im ersten Kapitel werden ältere Versuche, die anschauliche Kurvenvorstellung begrifflich zu erfassen, zusammengestellt und einer Kritik unterzogen. Es werden behandelt: Die eineindeutigen Streckenbilder, die stetigen Streckenbilder, die topologischen Streckenbilder (Bogen), die irreduzibeln Kontinua, die Summen endlich vieler bis auf Endpunkte paarweise fremder Bogen (gewöhnliche Kurven), die nirgendsdichten Teilkontinua der Ebene (C a n t o r sche Kurven). Diese Übersicht wird in trefflicher Weise dazu ausgenützt, den Anfänger mit den topologischen Grundbegriffen bekanntzumachen, so daß das Buch ohne nennenswerte Vorkenntnisse lesbar ist.

Im zweiten Kapitel wird der M e n g e r - U r y s o h n sche Kurvenbegriff (Kurve = eindimensionales Kontinuum) eingeführt und es wird gezeigt, daß er für Teilmengen der Ebene mit dem C a n t o r schen Kurvenbegriff zusammenfällt.

Das dritte Kapitel ist dem grundlegenden Begriff der (Verzweigungs-)Ordnung gewidmet: Sei p ein Punkt einer Menge M. Falls p in beliebig kleinen Umgebungen mit höchstens abzählbaren (Relativ-)Begrenzungen enthalten ist, so heißt p rational (sonst irrational). Wird das Wort abzählbar durch endlich ersetzt, so hat man einen regulären (bzw. irregulären) Punkt. Der Punkt p ist von einer Ordnung $\leqq n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, wenn er in beliebig kleinen Umgebungen mit höchstens n-punktiger Begrenzung enthalten ist. Die Ordnung von p ist $= n$, falls sie $\leqq n$, aber nicht $\leqq n - 1$ ist. Ein Punkt der Ordnung 1 heißt Endpunkt, ein Punkt der Ordnung 2 heißt gewöhnlicher Punkt, die Punkte, die nicht von einer Ordnung $\leqq 2$ sind, heißen Verzweigungspunkte. Nach den Definitionen folgt eine eingehende Strukturanalyse, aus der folgende Sätze angeführt werden mögen: In jedem Kontinuum K ist die Menge K^1 der Endpunkte höchstens nulldimensional (kann jedoch in K dicht liegen), die Menge $K - K^1$ ist kontinuaverknüpft und in jedem regulären Punkte von derselben Ordnung wie K selbst (M e n g e r, teilweise auch U r y s o h n). Für $n = 3, 4, 5, \ldots$ ist die Menge der Punkte, die eine Ordnung zwischen n und $2n-3$ haben (die Grenzen mitinbegriffen), höchstens nulldimensional (Ayres). Der Irregulärteil einer kompakten Menge enthält zu jedem seiner Punkte ein diesen Punkt enthaltendes Teilkontinuum (Hurewicz). Der Irrationalteil einer kompakten Menge kann, ohne leer zu sein, in jedem Punkte rational sein (Mazurkiewicz), ist jedoch in keinem Punkte regulär (Menger und Urysohn). Der Schlußabschnitt des Kapitels ist den Zerlegungspunkten und lokalen Zerlegungspunkten gewidmet: Jedes Kontinuum enthält mindestens zwei Punkte, die nicht Zerlegungspunkte sind (Moore). Die Menge der zerlegenden (sogar der lokal zerlegenden) Verzweigungspunkte eines Kontinuums ist höchstens abzählbar (Whyburn). Das vierte Kapitel enthält den auf Kurven bezüglichen Spezialfall des Summensatzes der Dimensionstheorie. Die hier gegebene Beweisanordnung des Summensatzes ist auf höhere Dimensionen leicht übertragbar und ist übersichtlicher als die in der „Dimensionstheorie" des Verfassers (Teubner, 1928) gegebene Darstellung. Bei dieser Gelegenheit möge bemerkt werden, daß die Lektüre der ersten fünf Kapitel des vorliegenden Werkes für den Anfänger eine ausgezeichnete Vorbereitung für das Studium der „Dimensionstheorie" bildet.

Das fünfte Kapitel enthält den Zerlegungssatz für Kurven (Spezialfall des dimensionstheoretischen Zerlegungssatzes), dann u. a. den Zerlegungssatz für im Kleinen zusammenhängende Kurven, dessen Übertragung auf höhere Dimensionen meines Erachtens ein wichtiges offenes Problem ist.

Das sechste Kapitel enthält den wichtigen „n-Beinsatz" (für reguläre Kurven Menger, allgemein Nöbeling): Von jedem Punkt p einer Ordnung $\geqq n$ eines im Kleinen zusammenhängenden Kontinuums K gehen n bis auf p paarweise fremde Teilbogen von K aus. Dieser Satz, sowie der ähnlich klingende „ω-Beinsatz", erscheinen dabei als Folgerungen von dem „n-Bogensatz" (Nöbeling): Sind P und Q zwei fremde abgeschlossene Teilmengen einer im Kleinen zusammenhängenden kompakten Menge K und ist für jede höchstens $(n-1)$-punktige Menge $T \subset K-(P+Q)$ die Menge $K-T$ zusammenhängend zwischen P und Q, so gibt es in K n bis auf die Endpunkte fremde Bogen zwischen P und Q.

Weitere vier Kapitel sind Spezialtypen von Kurven gewidmet: VII. Über erblichen Zusammenhang im Kleinen. VIII. Die regulären Kurven. IX. Die rationalen Kurven. X. Die Baumkurven. Es ist leider nicht möglich, auf den reichen Inhalt dieser Kapitel hier einzugehen.

Das elfte Kapitel ist der Whyburnschen Theorie der zyklischen Elemente gewidmet. Schade, daß die zyklisch erweiterbaren Eigenschaften nicht eingehender behandelt werden konnten.

Das zwölfte Kapitel ist der Mengerschen Universalkurve gewidmet. Während sich Verf. aus didaktischen Rücksichten in den früheren Kapiteln auf Teilmengen euklidischer Räume beschränkt, wird hier der allgemeine Begriff eines metrischen Raumes aufgestellt und es wird gezeigt, daß derselbe keine tatsächliche Verallgemeinerung des Kurvenbegriffs ergibt.

In einem sehr lesenswerten Schluß findet man eine graphische Darstellung der wichtigsten behandelten Begriffe, dann eine kurze Übersicht der Hauptsätze sowie Ausblicke auf verwandte Gegenstände und ungelöste Fragen. Nicht behandelt wurden besonders drei wichtige Ideenkreise: Erstens die Theorie der unzerlegbaren Kontinua und die damit nahe verwandte Strukturtheorie der irreduzibeln Kontinua und der irreduzibeln Schnitte der Ebene; diese Dinge sollen in einem eigenen Bande der Sammlung „Mengentheoretische Geometrie" behandelt werden. Zweitens die wichtige, aber vorläufig noch in ihren Anfängen stehende Abbildungstheorie von Kurven (vgl. Nöbeling, Fund. Math., XX, S. 30—46). Drittens die Homologietheorie, die zwar für das Studium der internen Kurveneigenschaften (dem Hauptgegenstand des Buches) ohne nennenswerte Bedeutung ist, jedoch z. B. für das Studium der in eine Ebene eingebetteten Kurven von großer Wichtigkeit ist.

Das Buch ist in einem lebendigen und anregenden Stil geschrieben, ist einerseits auch für einen Anfänger sehr gut lesbar, andererseits auch für den Kenner höchst inhaltsreich und wird vermutlich viel beitragen sowohl zur Verbreitung der erworbenen Kenntnisse, als auch zum weiteren Forschen auf diesem schönen und wichtigen Gebiete. Es ist sehr sorgfältig geschrieben und wohl frei von ernsteren Versehen. Für den Anfänger seien hier einige kleine Versehen angegeben: S. 32, Z. 6 v. u.: statt die Strecke lies den Punkt. S. 32, Z. 5 v. u.: statt $\frac{1}{m+1} \leqq x \leqq \frac{1}{m}$ lies $x = \frac{1}{m}$. S. 32, Z. 4 u. 3 v. u.: statt die Strecke S lies den Punkt 1, 0. S 53, Z. 14 v. o.: statt U_{n+1} lies K_{n+1}. S. 58, Z. 12 v. u.: statt 40 lies 39. S. 70, Z. 11 v. u.: statt T lies T'. S. 101, Z. 9 v. u.: statt U_k lies AU_k. S. 118, Z. 15 v. o.: statt U'_j lies $K.B(U'_j)$. S. 119, Z. 13 v. u.: statt X^{**} lies $\overline{X}^{**}$ und statt X_{h_j} lies $\overline{X}_{h_j}$. S. 122, Z. 11 v. u.: statt U_{mj} lies $\overline{U}_{mj}$. S. 127, Z. 14 v. o.: statt zweiter lies erster. S 137, Z. 5 v. o.: statt $A' \subset A$ lies $KA' \subset A$ S. 139, Z. 12 v. u.: statt K lies $\overset{e}{K}$. S. 174, Z. 17 v. u.: statt $X \supset B(U)$ lies X. S. 208, Z. 5, 10, 12, 13, 14 v. o.: statt U lies Z. S. 231, Z. 18 v. o.: statt W_i lies AW_i. S. 257, Z. 1 v. o.: statt U lies $\overline{U}$. S. 266, Z. 11 v. o.: statt 266 lies 260. S. 272, Z. 6 v. o.: statt p lies p_i und nach Bogens füge $\subset K - Q$ hinzu. S. 272, Z. 11 v. o.: statt P lies (p_1). S. 307, Z. 17 v. u.: statt 164 lies 163. S. 311, Z. 4 v. o.: statt $\frac{a+b}{2}$ lies $\frac{b-a}{2}$.

E. Čech (Brünn).

M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. American Mathematical Society Colloquium publications, Volume XV, New York 1932. (VI + 622 Seiten.) Preis: Dollar 6,50.

Durch die Entwicklung der Quantentheorie ist ein neuer Impuls in die von Hilbert geschaffene Theorie der Funktionen und Matrizen von unendlich vielen Variabeln und in die eng damit verknüpfte Theorie der linearen Integralgleichungen gekommen. Die Untersuchungen Hilberts und seiner unmittelbaren Nachfolger bezogen sich zunächst auf einen reellen unendlich dimensionalen Raum, für dessen Punkte die Koordinaten eine konvergente Quadratsumme besitzen und in welchem dann der Abstand zweier Punkte durch die Pythagoräische Formel gegeben ist. Es wurde eine Theorie der linearen Transformationen in diesem Raume bzw. der zugeordneten bilinearen und quadratischen Formen geschaffen, die für den Fall der „Beschränktheit" bis zu einem gewissen Abschluß gebracht wurden, während in der Lehre von den nicht beschränkten Formen (Hellinger, Hilb, Riesz u. a.) bzw. der ihnen entsprechenden singulären Integralgleichungen (besonders Carleman) noch viele Probleme ihrer Erledigung harrten. Über die Entwicklung der Theorie bis 1927 und die bis dahin erschienene Literatur gibt der Enzyklopädiebericht von Hellinger und Toeplitz erschöpfende Auskunft.

Für die neueren Untersuchungen wesentlich ist das prinzipielle Arbeiten im Komplexen (ein Punkt = unendliche Folge von komplexen Zahlen, für welche die Summe der Quadrate der Absolutbeträge konvergiert bzw. eine komplexwertige Funktion, für die das Quadrat des Absolutbetrages integrierbar ist) und das Fallenlassen der Forderung der Beschränktheit. Und in methodischer Hinsicht fundamental ist die durch I. v. Neumann durchgeführte Axiomatisierung des Gebietes, indem von den speziellen analytischen Darstellungen (unendliche Zahlenfolgen oder Funktion) abgesehen wird und die Untersuchungen in einem abstrakten „Hilbertschen" Raume durchgeführt werden, dessen Eigenschaften durch ein Axiomensystem festgelegt sind.

Das vorliegende Buch ist die erste zusammenfassende Darstellung der Theorie des abstrakten Hilbertschen Raumes. Es füllt damit eine empfindliche Lücke aus, und zwar, wie gleich betont werden soll, in hervorragender Weise, indem es große Exaktheit mit Klarheit und Verständlichkeit verbindet. Die wesentlichen Beweismethoden schließen sich an frühere eigene Arbeiten des Verfassers an, die, wie fast alle neueren Arbeiten über nicht beschränkte Transformationen, stark durch F. Riesz beeinflußt sind. Im Detail enthält das Buch sehr viel Neues und eigene Arbeit, wie das notwendig ist bei einer ersten Gesamtdarstellung eines Gebietes, das bisher nur in Einzelabhandlungen entstanden ist. Über den Umfang des behandelten Stoffes soll die folgende kurze Inhaltsangabe orientieren.

I. Die axiomatische Festlegung des Hilbertschen Raumes, die Mannigfaltigkeiten in ihm und seine speziellen Realisierungen. II. Transformationen im Hilbertschen Raume. Definition des fundamentalen Begriffes des „adjungiert