Eduard Čech

Užití theorie homologie na theorii souvislosti

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 188 (1933), 40 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501025

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1933 | ČÍS. 188

UŽITÍ TEORIE HOMOLOGIE NA TEORII SOUVISLOSTI I.

(APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE L'HOMOLOGIE À LA THÉORIE DE LA CONNEXITÉ I.)

NAPSAL

EDUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

UŽITÍ TEORIE HOMOLOGIE NA TEORII SOUVISLOSTI. I.

(AVEC UN RÉSUMÉ EN FRANÇAIS.)

I. Metrické prostory.

1. Při čtení tohoto článku je nutná znalost prvé části (I.) článku *Množství ireducibilně souvislá mezi n body* (Čas. pro pěst. mat. a fys., LXI, 1932, str. 109—114; citováno **M**), dále článků *Příspěvek k teorii dimense* (tamtéž, LXII, 1933, str. 277—291; citováno **D**) a *Úvod do teorie homologie* (tyto Spisy, 1933, č. 184; citováno **H**).

2. Nechť φ je funkce, jejíž obor (v. **H**, str. 6, pozn.*)) je prostor R (v. **M 1**). Nechť také φ (R) (v. **H**, str. 6, pozn.**)) je prostor. Je-li $S \subset \varphi(R)$, pak $\varphi_{-1}(S)$ je množství těch $x \in R$, pro něž $\varphi(x) \in S$. Funkce φ nazývá se *spojitá*, když $\varphi_{-1}(S)$ jest *uzavřené* v R, kdykoli S jest *uzavřené* ve $\varphi(R)$. Slovo *uzavřené* lze zřejmě (obakráte!) nahraditi slovem *otevřené*.

3. Funkce φ v oboru R nazývá se *prostá* (schlicht), když $\varphi(x) = \varphi(y)$ implikuje $x = y$. Pak každému $\xi \in \varphi(R)$ patří jedno a jen jedno $x \in R$, $\varphi(x) = \xi$; klademe $x = \varphi_{-1}(\xi)$. Pak φ_{-1} je prostá funkce v oboru $\varphi(R)$.

4. Prostory R a R^* jsou zřejmě *homeomorfní* (v. **M 3**), když a jen když existuje prostá funkce φ v oboru R taková, že $\varphi(R) = R^*$ a že φ i φ_{-1} jsou spojité.

5. Nechť R je libovolné množství. Nechť každému páru $a \in R$, $b \in R$ jsou přiřazena reálná čísla $\varrho_1(a, b)$, $\varrho_2(a, b)$ s vlastnostmi **M 5·1, 5·2, 5·3.** Považujeme-li ϱ_1 resp. ϱ_2 za vzdálenost, je R metrickým prostorem, který označíme R_1 resp. R_2. Když identické zobrazení R na R je homeomorfií mezi R_1 a R_2, pravíme, že ϱ_1 a ϱ_2 jsou *ekvivalentní metriky* prostoru R.

6. Nechť R je metrický prostor. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z R; nechť $x \in R$. Pravíme, že x je limitou posloupnosti $\{x_n\}$ a píšeme $\lim x_n = x$, když každému $\delta > 0$ lze přiřaditi m tak, že $n > m$ implikuje $\varrho(x_n, x) < \delta$. Platí pak věty[1]:

6·1. *Když* $\lim x_n = x$, $\lim x_n = y$, *jest* $x = y$.

6·2. *Když posloupnost* $\{y_n\}$ *jest vybrána z posloupnosti* $\{x_n\}$, (t. j. $y_1 = x_{i_1}$, $y_2 = x_{i_2}, \ldots$, $i_1 < i_2 < \ldots$) *a když* $\lim x_n = x$, *jest* $\lim y_n = x$.

Existuje-li $x = \lim x_n$, pravíme, že $\{x_n\}$ je *konvergentní* v R. Je-li $S \subset R$, $x_n \in S$, pak $\{x_n\}$ je konvergentní v S, když a jen když $x \in S$.

[1] Z nedostatku místa vynechávám (nebo jenom naznačuji) v kap. I a II některé jednoduché důkazy, které čtenář sám snadno sestaví resp. doplní.

7. *Nechť R je metrický prostor. Nechť $S \subset R$. Množství S jest uzavřené v R, když a jen když každá posloupnost $\{x_n\} \subset S$ konvergentní v R je konvergentní v S.*

8. *Nechť R, S jsou metrické prostory. Nechť φ je funkce v oboru R; nechť $\varphi(R) = S$. Funkce φ je spojitá, když a jen když $\{x_n\} \subset R$,* $\lim x_n = x$ *implikuje* $\lim \varphi(x_n) = \varphi(x)$.

9. Nechť opět jako v **5** jsou ϱ_1 a ϱ_2 dvě metriky v R. Limitu vzhledem ke vzdálenosti ϱ_1 (t. j. limitu v prostoru R_1, v. **5**) označíme lim, limitu vzhledem ke vzdálenosti ϱ_2 (t. j. limitu v prostoru R_2) označíme Lim. Pak platí věta:

9·1. *ϱ_1 a ϱ_2 jsou ekvivalentní metriky, když a jen když relace* $\lim x_n = x$, $\mathrm{Lim}\, x_n = x$ *implikují jedna druhou.*

II. Kompaktní metrické prostory.

1. Metrický prostor R nazývá se *kompaktní,* když z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset R$ lze vybrati posloupnost konvergentní v R.

Část S prostoru R nazveme kompaktní, když S jako prostor je kompaktní, tedy když z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset S$ lze vybrati posloupnost konvergentní v S.

Někteří autoři nazývají $S \subset R$ kompaktní tehdy, když z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset S$ lze vybrati posloupnost konvergentní v R. Snadno se dokáže, že v tomto smyslu kompaktní jest $S \subset R$ tehdy a jen tehdy, když $\overline{S}$ (v. **M 4**) je v našem smyslu kompaktní.

2. *Nechť R je metrický prostor; nechť $S \subset R$. Nechť S je kompaktní. Pak S jest uzavřené v R.*

3. *Nechť R je metrický kompaktní prostor; nechť $S \subset R$. S jest uzavřené v R, když a jen když S je kompaktní.*

4. *Nechť R je metrický prostor. R je kompaktní, když a jen když má následující vlastnost: Je-li $\{A_n\}$ posloupnost neprázdných v R uzavřených množství a je-li $A_n \supset A_{n+1}$ pro všecka n, jest* $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0$.

Důkaz. I. Nechť R má udanou vlastnost. Nechť $\{x_n\} \subset R$. Nechť z $\{x_n\}$ nelze vybrati konvergentní posloupnost. Lehko se vidí, že pak množství A_n bodů $x_n, x_{n+1}, \ldots$ jsou uzavřená v R, takže existuje $x \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak lze zřejmě z $\{x_n\}$ vybrati $\{y_n\}$ tak, že pro všecka n jest $y_n = x$, tedy $\lim y_n = x$, což je spor.

II. Nechť R je kompaktní. Zvolme $x_n \in A_n$ a z $\{x_n\}$ vyberme konvergentní $\{y_n\}$. Nechť $\lim y_n = x$. Lehko vidíme, že $x \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n$.

5. *Nechť R je metrický kompaktní prostor. Nechť $\delta > 0$. Lze udati konečný počet bodů z R tak, že každý bod z R má od některého z nich vzdálenost menší než δ.*

Důkaz. V opačném případě lze rekurentně určiti $x_n \in R$ tak, že pro $m < n$ jest $\varrho\,(x_m, x_n) \geqq \delta$. Pak z $\{x_n\}$ nelze vybrati konvergentní posloupnost.

6. Nechť R je metrický prostor. Pravíme, že R je *separabilní*, když buďto $R = 0$ nebo existuje posloupnost $\{x_n\} \subset R$ taková, že, kdykoli $x \in R$, lze z $\{x_n\}$ vybrati $\{y_n\}$ tak, že $\lim y_n = x$.

7. *Nechť R je metrický kompaktní prostor. Pak R je separabilní.*

Důkaz. Nechť $R \neq 0$. Podle **5** lze z R vybrati posloupnost

$$a_{11}, \ldots, a_{1r_1};\ a_{21}, \ldots, a_{2r_2};\ a_{31}, \ldots, a_{3r_3};\ a_{41}, \ldots \tag{1}$$

takovou, že při daném indexu $i\ (= 1, 2, 3, \ldots)$ a při daném bodě $x \in R$ lze udati index $j\ (1 \leqq j \leqq r_i)$ tak, že $\varrho\,(x, a_{ij}) < \frac{1}{i}$. Pak při daném $x \in R$ lze z (1) vybrati $\{y_n\}$, $\lim y_n = x$.

8. *Nechť $R \neq 0$ je metrický prostor. R je separabilní, když a jen když má následující vlastnost: Z každého systému v R otevřených množství pokrývajícího R* (v. **D 1**) *lze vybrati posloupnost $\{U_n\}$ pokrývající R.*

Důkaz. I. Nechť R má udanou vlastnost. Pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ nechť Φ_m je systém všech koulí (v. **D 7**) $K\left(x, \frac{1}{m}\right)$, kde x probíhá celý R. Pak (**D 8**) Φ_m je systém v R otevřených množství. Tedy existuje posloupnost $\{x_{mn}\} \subset R\ (n = 1, 2, 3 \ldots)$ taková, že posloupnost $\left\{K\left(x_{mn}, \frac{1}{m}\right)\right\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ pokrývá R. Dvojnou posloupnost $\{x_{mn}\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots$ t $n = 1, 2, 3, \ldots)$ uspořádejme podle nějakého zákona v posloupnost $\{y_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Kdykoli $x \in R$, lze z $\{y_n\}$ vybrati $\{z_n\}$, $\lim z_n = x$.

II. Nechť existuje posloupnost $\{x_n\} \subset R$ taková, že, kdykoli $x \in R$, lze z $\{x_n\}$ vybrati $\{y_n\}$, $\lim y_n = x$. Pro $m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť $K_{nm} = K\left(x_n, \frac{1}{m}\right)$ (v. **D 7**). Dvojnou posloupnost $\{K_{nm}\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots;$ $n = 1, 2, 3, \ldots)$ uspořádejme podle nějakého zákona v jednoduchou posloupnost $\{H_n\}$.

Nechť Φ je systém v R otevřených množství pokrývající R. Každému $x \in R$ přiřaďme $U_x \in \Phi$, $x \in U_x$. Podle **D 6** existuje $m\ (= 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $K\left(x, \frac{1}{m}\right) \subset U_x$. Existuje posloupnost $i_1 < i_2 < \ldots$ taková, že $\lim x_{i_n} = x$. Existuje n takové, že $\varrho\,(x, x_{i_n}) < \frac{1}{2m}$. Snadno se dokáže, že $x \in K_{i_n, 2m} \subset U_x$. Jinak řečeno, každému $x \in R$ lze přiřaditi index $k\,(x)$ a $U_x \in \Phi$ tak, že $x \in H_{k(x)} \subset U_x$. Z $\{H_n\}$ lze vybrati posloupnost $\{H'_n\}$ tak, že H_n náleží do $\{H'_n\}$, když a jen když existuje bod $x \in R$, $k\,(x) = n$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ existuje bod $z_n \in R$ takový, že $H'_n = H_{k(z_n)} \subset U_{z_n}$. Posloupnost $\{U_{z_n}\}$ je vybrána z Φ a pokrývá R.

9. *Nechť R je metrický prostor. R je kompaktní, když a jen když* *má následující vlastnost: Z každého systému Φ v R otevřených množství pokrývajícího R lze vybrati síť v R* (v. **H** III **2**).

Důkaz. Nechť $R \neq 0$. I. Nechť R má udanou vlastnost. Nechť A_n jsou uzavřená v R; nechť $A_n \neq 0$, $A_n \supset A_{n+1}$. Množství $R - A_n$ jsou otevřená v R. Je-li $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0$, pak $R - A_n$ pokrývají R, takže existuje m takové, že $R = \sum_{n=1}^{m} (R - A_n) = R - \prod_{n=1}^{m} A_n = R - A_m$, tedy $A_m = 0$, což je spor. Tedy $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0$. Tedy R je kompaktní podle **4**.

II. Nechť R je kompaktní. Nechť Φ je systém v R otevřených množství pokrývající R. Podle **7** a **8** lze z Φ vybrati posloupnost $\{U_n\}$ pokrývající R. Máme dokázati, že existuje m takové, že $\sum_{n=1}^{m} U_n = R$. Předpokládejme opak. Položme $A_m = R - \sum_{n=1}^{m} U_n$. Podle **4** je $\prod_{m=1}^{\infty} A_m \neq 0$, tedy $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} U_n \neq R$, t. j. $\sum_{m=1}^{\infty} U_m \neq R$, což je spor.

10. *Nechť R je metrický kompaktní prostor. Nechť Φ je systém v R otevřených množství pokrývající R. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že každému $x \in R$ lze přiřaditi $U \in \Phi$ tak, že $y \in R$, $\varrho(x, y) < \delta$ implikuje $y \in U$.*

Důkaz. Předpokládejme opak. Pak pro $n = 1, 2, 3, \dots$ existuje bod x_n s následující vlastností: Když $x_n \in U \in \Phi$, existuje $y \in R - U$, $\varrho(x_n, y) < \frac{1}{n}$. Z $\{x_n\}$ lze vybrati konvergentní $\{x_{i_n}\}$. Nechť $\lim x_{i_n} = x$. Nechť $x \in U \in \Phi$. Existuje (v. **D 6** a **7**) $\delta > 0$, $K(x, 2\delta) \subset U$. Existuje n takové, že $i_n^{-1} < \delta$, $\varrho(x, x_{i_n}) < \delta$. Pak $x_{i_n} \in U$. Tedy existuje $y \in R - U$, $\varrho(x_{i_n}, y) < \delta$. Avšak $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_{i_n}) + \varrho(x_{i_n}, y) < 2\delta$, tedy $y \in K(x, 2\delta) \subset U$, což je spor.

11. *Nechť R je metrický kompaktní prostor. Pak existuje posloupnost $\{\mathfrak{Z}_n\}$ sítí v R taková, že: 1⁰ pro každé n síť $\mathfrak{Z}_{n+1}$ je zjemnění* (v. **H** III **4**) *sítě $\mathfrak{Z}_n$; 2⁰ každé síti $\mathfrak{U}$ lze přiřaditi n takové, že $\mathfrak{Z}_n$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$.*

Důkaz. Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ nechť Φ_n je systém všech koulí (**D 7**) o středu $x \in R$ a poloměru $\frac{1}{n}$. Podle **9** lze z Φ_n vybrati síť $\mathfrak{B}_n$. Sestrojme rekurentně posloupnost $\{\mathfrak{Z}_n\}$ sítí v R takto: 1⁰ $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{B}_1$; 2⁰ jsou-li již sestrojeny sítě $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots, \mathfrak{Z}_n$, pak síť $\mathfrak{Z}_{n+1}$ je zjemnění obou sítí $\mathfrak{Z}_n$ a $\mathfrak{B}_{n+1}$ (to lze podle **H** III **4·1**). Nechť $\mathfrak{U}$ je libovolná síť v R. Podle **10** existuje $\delta > 0$ takové, že každému $x \in R$ lze přiřaditi $U_x \in \mathfrak{U}$ tak, že $y \in R$, $\varrho(x, y) < \delta$ implikuje $y \in U_x$. Zvolme $n > \frac{1}{\delta}$. Máme ukázati, že síť $\mathfrak{Z}_n$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$. Ježto $\mathfrak{Z}_n$ je zjemnění sítě $\mathfrak{B}_n$, stačí ukázati, že $\mathfrak{B}_n$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$. Nechť V je libovolný vrchol sítě $\mathfrak{B}_n$; máme ukázati, že existuje vrchol U sítě $\mathfrak{U}$ takový, že $V \subset U$. Ježto $\mathfrak{B}_n$

je vybrána z Φ_n, existuje bod $x \in R$ takový, že $V = \mathrm{K}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ (v. **D 7**). Když $y \in V$, jest $\varrho(x, y) < \frac{1}{n} < \delta$, tedy $y \in U_x$; tedy $V \subset U_x$.

12. Nechť R je topologický prostor. *Okolím*[1] bodu $a \in R$ nazýváme každé v R otevřené množství U takové, že $a \in U$. *Okolím*[1] množství $A \subset R$ nazýváme každé v R otevřené množství U takové, že $A \subset U$.

13. *Nechť R je metrický kompaktní prostor. Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost v R uzavřených množství taková, že $A_n \supset A_{n+1}$ pro všecka n. Nechť $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Nechť U jest okolí množství A. Pak existuje m takové, že $A_n \subset U$ pro všecka $n > m$.*

Důkaz. Předpokládejme opak. Pak existují indexy $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ takové, že $A_{i_n} - U \neq 0$ pro všecka n. Nechť $B_n = A_{i_n} - U = A_{i_n}(R - U)$. Podle **4** jest $0 \neq \prod_{n=1}^{\infty} B_n = (\prod_{n=1}^{\infty} A_{i_n}) - U$. Ježto $A_n \supset A_{n+1}$, $i_n < i_{n+1}$, je $\prod_{n=1}^{\infty} A_{i_n} = \prod_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Tedy $A - U \neq 0$, což je spor.

14. *Nechť R je metrický separabilní prostor. Nechť Φ je neprázdná třída v R uzavřených množství. Nechť $A_n \in \Phi$, $A_n \supset A_{n+1}$ implikuje $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \Phi$. Pak existuje $A \in \Phi$ takové, že $B \in \Phi$, $B \subset A$ implikuje $B = A$.*

To je t. zv. *Brouwerova redukční věta.*

Důkaz. Předpokládejme opak. Pak jest $R \neq 0$, a když pro $A \in \Phi$ znamená $\Psi(A)$ třídu všech $B \in \Phi$, $B \subset A$, $B \neq A$, je $\Psi(A) \neq 0$ pro každé $A \in \Phi$.

Nechť $m = 1, 2, 3, \ldots.$ Podle **8** existuje posloupnost $\{x_{mn}\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots) \subset R$ taková, že posloupnost $\{\mathrm{K}(x_{mn}, m^{-1})\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots;$ v. **D 7**) pokrývá R. Dvojnou posloupnost $\{\mathrm{K}(x_{mn}, m^{-1})\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots)$ uspořádejme podle nějakého zákona v jednoduchou posloupnost $\{H_n\}$.

Nechť $A \in \Phi$, $B \in \Psi(A)$. Pak $A - B \neq 0$, takže můžeme zvoliti bod $x \in A - B$. Ježto $x \in R - B$ a ježto $R - B$ jest otevřené v R, podle **D 6** existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathrm{K}(x, 2\delta) \subset R - B$. Zvolme p $(= 1, 2, 3, \ldots)$ tak, že $p^{-1} < \delta$. Existuje q $(= 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $x \in \mathrm{K}(x_{pq}, p^{-1})$, t. j. $\varrho(x, x_{pq}) < p^{-1}$. Je-li $y \in \mathrm{K}(x_{pq}, p^{-1})$, jest $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_{pq}) + \varrho(y, x_{pq}) < 2p^{-1} < 2\delta$, tedy $y \in R - B$. Tedy $B \,.\, \mathrm{K}(x_{pq}, p^{-1}) = 0$, kdežto $x \in A \,.\, \mathrm{K}(x_{pq}, p^{-1})$, tedy $A \,.\, \mathrm{K}(x_{pq}, p^{-1}) \neq 0$.

Tedy při daném $A \in \Phi$ každému $B \in \Psi(A)$ lze přiřaditi index i takový, že $AH_i \neq 0 = BH_i$. Ježto v každém neprázdném množství přirozených čísel vyskytuje se nejmenší prvek, lze tedy každému $A \in \Phi$ přiřaditi $\varphi(A) \in \Psi(A)$ a index $f(A) = 1, 2, 3, \ldots$ tak, že $A \,.\, H_{f(A)} \neq 0 = \varphi(A) \,.\, H_{f(A)}$, avšak $1 \leqq i < f(A)$, $B \in \Psi(A)$, $AH_i \neq 0$ implikuje $BH_i \neq 0$.

---

[1] Kde je toho pro určitost třeba, mluvíme o *okolí v prostoru R*.

Zvolme nyní $A_1 \varepsilon \Phi$ libovolně a položme $A_{n+1} = \varphi(A_n)$, $i_n = f(A_n)$. Pak jest $A_n \varepsilon \Phi$, $A_{n+1} \subset A_n$, $A_n H_{i_n} \neq 0 = A_{n+1} H_{i_n}$, avšak $1 \leqq i < i_n$, $B \varepsilon \Psi(A_n)$, $A_n H_i \neq 0$ implikuje $B H_i \neq 0$. Když $m > n$, jest $A_m \subset A_{n+1}$, $A_{n+1} H_{i_n} = 0$, tedy $A_m H_{i_n} = 0$, avšak $A_m H_{i_m} \neq 0$. Tedy $i_n \neq i_m$ pro $n \neq m$.

Nechť $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Ježto $A_n \varepsilon \Phi$, $A_n \supset A_{n+1}$, jest $A \varepsilon \Phi$. Nechť $B \varepsilon \Psi(A)$; ježto $A \subset A_n$, je $B \varepsilon \Psi(A_n)$ pro všecka n. Ježto $B \varepsilon \Psi(A)$, existuje index i takový, že $AH_i \neq 0 = BH_i$. Ježto $i_n \neq i_m$ pro $n = m$, existuje index n takový, že $i < i_n$. Pak jest $B \varepsilon \Psi(A_n)$, $1 \leqq i < i_n$, $A_n H_i \supset AH_i \neq 0$, tedy $BH_i \neq 0$, což je spor.

15. *Nechť a, b jsou reálná čísla; nechť $a < b$. Nechť R jest interval $a \leqq x \leqq b$. Pro $x \varepsilon R$, $y \varepsilon R$ nechť $\varrho(x, y) = |x - y|$. Pak R je kompaktní metrický prostor.*

16. *Nechť R je metrický kompaktní prostor. Nechť S je metrický prostor. Nechť f je spojitá funkce v oboru R; nechť $f(R) = S$. Pak S je kompaktní.*

III. Kombinatorický součin dvou prostorů.

1. Nechť R a S jsou jakákoli množství. Množství všech uspořádaných párů (a, b), kde $a \varepsilon R$, $b \varepsilon S$, nazýváme *kombinatorickým součinem* množství R a S a značíme je $R \times S$. Znak $R \times S$ musíme tedy dobře rozlišovati od znaku RS nebo $R\,.\,S$ pro množství prvků společných oběma množstvím R a S.

2. *Nechť R a S jsou metrické prostory. Pak lze v $R \times S$ zavésti takovou metriku, že* $\lim (x_n, y_n) = (x, y)$ $(x_n \varepsilon R,\ x \varepsilon R,\ y_n \varepsilon S,\ y \varepsilon S)$ *tehdy a jen tehdy, když současně* $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$.

Než přistoupíme k důkazu, dohodněme se, že kdykoli R a S jsou metrické prostory, jejich kombinatorickým součinem $R \times S$ vždy budeme rozuměti množství $R \times S$ opatřené metrikou mající vyslovenou vlastnost. Pro kterou z takových metrik se rozhodneme, je pro topologický prostor $R \times S$ lhostejné, neboť všecky tyto metriky podle **I 9·1** jsou ekvivalentní.

Důkaz. Nechť ϱ_1, ϱ_2 jsou dané metriky resp. v R a v S. Žádanou metriku v $R \times S$ poskytuje kterákoli z formulí

$$\varrho\,[(x, y), (\xi, \eta)] = \max.\,[\varrho_1(x, \xi), \varrho_2(y, \eta)],$$
$$\varrho\,[(x, y), (\xi, \eta)] = \varrho_1(x, \xi) + \varrho_2(y, \eta),$$
$$\varrho\,[(x, y), (\xi, \eta)] = \sqrt{[\varrho_1(x, \xi)]^2 + [\varrho_2(y, \eta)]^2}.$$

3. *Nechť R a S jsou metrické prostory. Nechť množství U jest otevřené v R; nechť množství V jest otevřené v S. Pak množství $U \times V$ jest otevřené v $R \times S$.*

4. *Nechť R a S jsou metrické prostory. Nechť $(a, b) \varepsilon R \times S$. Nechť*

Z jest okolí bodu (a, b) v prostoru $R \times S$. Pak existuje okolí U bodu a v prostoru R a okolí V bodu b v prostoru S taková, že $U \times V \subset Z$.

5. *Nechť R a S jsou metrické kompaktní prostory. Pak $R \times S$ je metrický kompaktní prostor.*

6. Nechť R a S jsou metrické prostory. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R, nechť $\mathfrak{V}$ je síť v S. Označme $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ množství všech $U \times V$, kde U probíhá vrcholy sítě $\mathfrak{U}$ a V probíhá vrcholy sítě $\mathfrak{V}$. Podle **3** $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ je síť v $R \times S$.

7. *Nechť R a S jsou metrické kompaktní prostory. Nechť $\mathfrak{Z}$ je síť v $R \times S$. Pak existuje síť $\mathfrak{U}$ v R a síť $\mathfrak{V}$ v S takové, že $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{Z}$.*

Důkaz. Nechť a je daný bod z R. Každému $b \in S$ lze přiřaditi $Z_{ab} \in \mathfrak{Z}$ tak, že $(a, b) \in Z_{ab}$. Ježto množství Z_{ab} jest otevřené v $R \times S$, podle **4** existuje okolí P_{ab} bodu a v R a okolí Q_{ab} bodu b v S taková, že $P_{ab} \times Q_{ab} \subset Z_{ab}$. Při daném a množství Q_{ab}, kde b probíhá S, jsou v S otevřená a pokrývají S. Podle II **9** existují body $b_{a1}, b_{a2}, \ldots, b_{a,k(a)}$ prostoru S v konečném počtu takové, že množství Q_{a,b_j} $(1 \leqq j \leqq k(a))$ jsou vrcholy sítě $\mathfrak{Q}_a$ v S. Nechť $U_a = \prod_{j=1}^{k(a)} P_{a,b_j}$. Množství U_a jest podle **M 1·7** otevřené v R. Když a probíhá R, množství U_a pokrývají R. Podle II **9** existují body $a_1, a_2, \ldots, a_h$ prostoru R v konečném počtu takové, že $U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_h}$ jsou vrcholy sítě $\mathfrak{U}$ v R. Podle **H** III **4·1** existuje síť $\mathfrak{V}$ v S, která je zjemněním každé ze sítí $\mathfrak{Q}_{a_i}$ $(1 \leqq i \leqq h)$. Pak $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$ je síť v $R \times S$. Nechť $U_{a_i} \times V$ je vrchol sítě $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V}$. Máme ukázati, že existuje $Z \in \mathfrak{Z}$ takové, že $U_{a_i} \times V \subset Z$. Ježto V je vrchol sítě $\mathfrak{V}$, která je zjemněním sítě $\mathfrak{Q}_{a_i}$, existuje index j $(1 \leqq j \leqq k(a_i))$ takový, že $V \subset Q_{a_i, b_{aj}}$. Ježto $U_{a_i} \subset P_{a_i, b_{aj}}$, jest

$$U_{a_i} \times V \subset P_{a_i, b_{aj}} \times Q_{a_i, b_{aj}} \subset Z_{a_i, b_{aj}} \in \mathfrak{Z}.$$

8. *Nechť R je metrický kompaktní prostor. Nechť T jest interval $0 \leqq t \leqq 1$. Nechť S jest uzavřené v R. Nechť existuje spojitá funkce f v oboru $S \times T$ taková, že 1^0 $f(S \times T) = M \subset R$; 2^0 $f(x, 0) = x$ pro každé $x \in S$. Nechť $S^* = f(S \times (1))$. Nechť $\mathfrak{U}$ je libovolná síť v R. Pak existuje zjemnění $\mathfrak{V}$ sítě $\mathfrak{U}$, které má následující vlastnost: Nechť $p = 0, 1, 2, \ldots$; nechť $\Gamma^p(\mathfrak{V})$ jest absolutní $(p, \mathfrak{V})$-cyklus v S; nechť $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$: pak existuje absolutní $(p, \mathfrak{U})$-cyklus $\Delta^p(\mathfrak{U})$ v S^* takový, že $\pi\Gamma^p(\mathfrak{V}) \sim \Delta^p(\mathfrak{U})$ v M.*

Důkaz. T je metrický kompaktní prostor podle II **15.** S je metrický kompaktní prostor podle II **3.** Tedy $S \times T$ je metrický kompaktní prostor podle **5.** Tedy M je kompaktní podle II **16**, takže M jest uzavřené v R podle II **2**.

Nechť U je vrchol sítě $\mathfrak{U}$, ježto f je spojitá funkce, podle I **2** množství $f_{-1}(UM)$ jest otevřené v $S \times T$. Když U probíhá všecky vrcholy U sítě $\mathfrak{U}$ takové, že $UM \neq 0$, zřejmě $f_{-1}(UM)$ probíhá vrcholy sítě v $S \times T$, kterou označme $\mathfrak{Z}$. Podle **7** existuje síť $\mathfrak{W}$ v S a síť $\mathfrak{T}$ v T takové, že síť $\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{Z}$; nechť $\varphi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}, \mathfrak{Z})$. Prostor T je souvislý podle **M 21**. Tedy $B^0(T) = 1$ podle **H** IV **8**; tedy ježto $T \neq 0$, je $B^0(\mathfrak{T}) = 1$ (v. **H** IV **7·1**), takže (v. **H** II **15**) existují vrcholy $T_0, T_1, \ldots, T_m$ sítě $\mathfrak{T}$ takové, že $0 \in T_0$, $1 \in T_m$, $T_{i-1} . T_i \neq 0$ pro $1 \leqq i \leqq m$.

Nechť W je libovolný vrchol sítě $\mathfrak{W}$. Pak $Z = \varphi(W \times T_0)$ je vrchol sítě $\mathfrak{Z}$. Podle definice sítě $\mathfrak{Z}$ existuje vrchol $U = \psi_1 W$ sítě $\mathfrak{U}$ takový, že $f(W \times T_0) = M\,U$. Ježto $0 \in T_0$ a $f(x, 0) = x$ pro každé $x \in S$, jest $S \supset W = f(W \times (0)) \subset f(W \times T_0)$, t. j. $W \subset M\,U$ a dokonce $W \subset S\,U$, ježto $W \subset S$. Z toho následuje, že síť $\mathfrak{W}$ je zjemněním sítě $S\,\mathfrak{U}$ (v. **H** III **5**) a že existuje projekce $\chi_1 = \text{Pr.}\,(\mathfrak{W}, S\,\mathfrak{U})$ taková, že $\chi_1 W = S . \psi_1 W$, $M . \psi_1 W = f(Z)$, kde $Z = \varphi(W \times T_0)$.

Každý vrchol W sítě $\mathfrak{W}$ jest množství otevřené v S a obsažené v $\chi_1 W = S\,U$, kde $U = \psi_1 W$. Z toho následuje snadno, že existuje množství $V = \psi_2 W$ otevřené v R a takové, že $W = S\,V$, $V \subset U$. Označme G množství $\Sigma \psi_2 W$, kde W probíhá všecky vrcholy sítě S. Pak G je množství otevřené v R a jest $G \supset S$. Každému bodu $x \in R - G$ můžeme zřejmě přiřaditi množství H_x otevřené v R a obsažené v $U_x - S$, kde U_x je vrchol sítě $\mathfrak{U}$. Podle II **3** $R - G$ je kompaktní. Tedy podle II **9** existuje konečný počet bodů x_ν $(1 \leqq \nu \leqq k)$ z $R - G$ takových, že $\sum_{\nu=1}^{k} (R - G)\,H_{x_\nu} = R - G$. Množství H_{x_ν} $(1 \leqq \nu \leqq k)$ spolu s množstvími $\psi_2 W$, kde W probíhá vrcholy sítě $\mathfrak{W}$, tvoří pak síť $\mathfrak{B}$ v R. Zřejmě $\mathfrak{B}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$ a existuje projekce $\pi = \text{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$ taková, že $\pi \psi_2 W = \psi_1 W$ pro každý vrchol W sítě $\mathfrak{W}$.

Pro $0 \leqq i \leqq m$ nechť, kdykoli W znamená vrchol sítě $\mathfrak{W}$, znamená $\omega_i W$ množství $W \times T_i$; zřejmě ω_i je simpliciální zobrazení (v. **H** II **17**) sítě $\mathfrak{W}$ do sítě $\mathfrak{W} \times \mathfrak{T}$; pro $1 \leqq i \leqq m$, ježto $T_{i-1} . T_i = 0$, zřejmě simpliciální zobrazení ω_{i-1} a ω_i jsou sousední (v. **H** II **18**).

Nechť nyní $\Gamma^p(\mathfrak{B})$ jest absolutní $(p, \mathfrak{B})$-cyklus v S. Z definice sítě $\mathfrak{B}$ vychází, že $S\,\mathfrak{B} = \mathfrak{W}$ (v. **H** III **5**). Ježto $\Gamma^p(\mathfrak{B})$ leží v S, zřejmě (v. **H** IV **3**)

$$\Gamma^p(\mathfrak{B}) = \Sigma a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_p} (\psi_2 W_{\nu_0}, \psi_2 W_{\nu_1}, \ldots, \psi_2 W_{\nu_p}), \tag{1}$$

$$(\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\,\Gamma^p(\mathfrak{B}) = \Sigma a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_p} (W_{\nu_0}, W_{\nu_1}, \ldots, W_{\nu_p}),$$

$$\omega_i (\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\,\Gamma^p(\mathfrak{B}) = \Sigma a_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_p} (W_{\nu_0} \times T_i, W_{\nu_1} \times T_i, \ldots, W_{\nu_p} \times T_i).$$

Ježto

$$\Gamma^p(\mathfrak{B}) \to 0, \text{ podle } \mathbf{H}\ \text{IV}\ \mathbf{3}\,(2) \text{ jest } (\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\,\Gamma^p(\mathfrak{B}) \to 0,$$

takže podle **H** II **18**

$$\omega_{i-1} (\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\,\Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \omega_i (\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\,\Gamma^p(\mathfrak{B}) \text{ pro } 1 \leqq i \leqq m,$$

tedy

$$\omega_0 (\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\,\Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \omega_m (\mathfrak{W} \mid \mathfrak{B})\,\Gamma^p(\mathfrak{B}),$$

takže

$$\varphi\,\omega_0\,(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{V})\,\Gamma^p\,(\mathfrak{V}) \sim \varphi\,\omega_m\,(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{V})\,\Gamma^p\,(\mathfrak{V}). \tag{2}$$

Položme $Z_\nu = \varphi\,(W_\nu \times T_0)$, $Z'_\nu = \varphi\,(W_\nu \times T_m)$, takže (2) nabude tvaru

$$\Sigma\,a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}\,(Z_{\nu_0}, Z_{\nu_1}, \ldots, Z_{\nu_p}) \sim \Sigma\,a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}\,(Z'_{\nu_0}, Z'_{\nu_1}, \ldots, Z'_{\nu_p}).$$

Tedy existuje $(p+1, \mathfrak{Z})$-řetěz $\Sigma\,b_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{p+1}}\,(Z''_{\mu_0}, Z''_{\mu_1}, \ldots, Z''_{\mu_{p+1}})$ (Z''_μ jsou vrcholy sítě $\mathfrak{Z}$) takový, že

$$\Sigma\,b_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{p+1}}\,(Z''_{\mu_0}, Z''_{\mu_1}, \ldots, Z''_{\mu_{p+1}}) \rightarrow \Sigma\,a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}(Z_{\nu_0}, Z_{\nu_1}, \ldots, Z_{\nu_p}) - \\ - \Sigma\,a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}\,(Z'_{\nu_0}, Z'_{\nu_1}\ldots, Z'_{\nu_p}). \tag{3}$$

Podle definice sítě $\mathfrak{Z}$ existují vrcholy U_ν, U'_ν, U''_μ sítě $\mathfrak{U}$ takové, že $f(Z_\nu) = M\,U_\nu$, $f\,(Z'_\nu) = M\,U'_\nu$, $f\,(Z''_\mu) = M\,U''_\mu$. Ze (3) následuje snadno, že

$$\Sigma b_{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{p+1}}(U''_{\mu_0}, U''_{\mu_1}, \ldots, U''_{\mu_{p+1}}) \rightarrow \Sigma a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}\,(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_p}) - \\ - \Sigma a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}\,(U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}\ldots, U'_{\nu_p}). \tag{4}$$

Ježto $\prod\limits_{i=0}^{p+1} Z''_{\mu_i} \neq 0$, jest $\prod\limits_{i=0}^{p+1} f\,(Z''_{\mu_i}) = M.\prod\limits_{i=0}^{p+1} U''_{\mu_i} \neq 0$, takže $(p+1, \mathfrak{U})$-řetěz nalevo ve (4) leží v M. Ježto $Z_\nu = \varphi\,(W_\nu \times T_0)$, jest $f\,(Z_\nu) = M.\,\psi_1\,W_\nu$, tedy $U_\nu = \psi_1\,W_\nu = \pi\,\psi_2\,W_\nu$, takže podle (1) jest $\Sigma a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}\,(U_{\nu_0}, U_{\nu_1}, \ldots, U_{\nu_p}) = \pi\,\Gamma^p\,(\mathfrak{V})$. Ježto $1 \in T_m$, $Z'_\nu \supset W_\nu \times T_m$ jest

$$(S \times (1)).\prod_{i=0}^{p} Z'_{\nu_i} \supset \prod_{i=0}^{p} W_{\nu_i} \times (1) \neq 0,$$

takže $S^*.\prod\limits_{i=0}^{p} U'_{\nu_i} \neq 0$, neboť $S^* = f\,(S \times (1))$, $U'_\nu \supset f\,(Z'_\nu)$. Tedy $\Delta^p\,(\mathfrak{U}) = \Sigma a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}\,(U'_{\nu_0}, U'_{\nu_1}, \ldots, U'_{\nu_p})$ je absolutní $(p, \mathfrak{U})$-cyklus v S^* a ze (4) následuje, že $\pi\,\Gamma^p\,(\mathfrak{V}) \sim \Delta^p\,(\mathfrak{U})$ v M, j. b. d.

IV. Adiční věty.

1. (Pomocná věta.) *Nechť R je normální prostor* (v. **D 9**). *Nechť množství S jest uzavřené v R. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R. Pak existuje okolí G množství S a zjemnění $\mathfrak{W}$ sítě $\mathfrak{U}$ takové, že, když K je jádro nějakého $\mathfrak{W}$-simplexu a když $K\,G \neq 0$, jest $K\,S \neq 0$.*

D ů k a z. Nechť $U_1, U_2, \ldots, U_m$ jsou vrcholy sítě $\mathfrak{U}$. Podle **D 14** existuje síť $\mathfrak{U}'$ o vrcholech $U'_1, U'_2, \ldots, U'_m$ takových, že $\overline{U'_i} \subset U_i$ pro $1 \leq i \leq m$. Podle **D 12**, kde místo $F_1, F_2, \ldots, F_m$ vezmeme množství $S, \overline{U'_1}\,\overline{U'_2}, \ldots, \overline{U'_m}$, existují v R otevřená množství $G, W_1, W_2, \ldots, W_m$ taková, že $G \supset S$, $W_i \supset \overline{U'_i}\,(1 \leq i \leq m)$ a že, kdykoli při nějaké kombinaci $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p)$ indexů $1, 2, \ldots, m$ jest $G\,.\prod\limits_{i=0}^{p} W_{\nu_i} \neq 0$, je také

$S \,.\, \prod_{i=0}^{p} \overline{U'_{v_i}} \neq 0$. Zřejmě množství $U_1 W_1, U_2 W_2, \ldots, U_m W_m$ jsou vrcholy žádané sítě $\mathfrak{V}$.

2. (Pomocná věta.) *Nechť R je normální prostor. Nechť množství φ a ψ jsou uzavřená v R. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R. Pak existuje zjemnění $\mathfrak{V}$ sítě $\mathfrak{U}$ a projekce $\pi =$ Pr. $(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ takové, že, když $(p, \mathfrak{V})$-řetěz $C^p(\mathfrak{V})$ leží současně ve φ i ve ψ, pak $(p, \mathfrak{U})$-řetěz $\pi\, C^p(\mathfrak{V})$ leží ve $\varphi\psi$.*

Důkaz. Určeme zjemnění $\mathfrak{W}$ sítě $\mathfrak{U}$ a okolí G množství $\varphi\psi$ podle **1**, kde položíme $S = \varphi\psi$; nechť $\pi_1 =$ Pr. $(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$. Množství $\varphi - G$ a $\psi - G$ jsou uzavřená v R a jest $(\varphi - G)(\psi - G) = 0$; tedy podle **D 9** existují v R otevřená množství P a Q taková, že $P \supset \varphi - G$, $Q \supset \psi - G$ $PQ = 0$. Tři množství P, Q a $G + [R - (\varphi + \psi)]$ zřejmě tvoří síť $\mathfrak{T}$ v R. Nechť (**H** III **4·1**) $\mathfrak{V}$ je zjemnění obou sítí $\mathfrak{W}$ a $\mathfrak{T}$; nechť $\pi_2 =$ Pr. $(\mathfrak{V}, \mathfrak{W})$.

Nechť K je jádro $(p, \mathfrak{V})$-simplexu; nechť $KG = 0$; nechť $K\varphi \neq 0 \neq K\psi$. Pak K není částí vrcholu $G + [R - (\varphi + \psi)]$ sítě $\mathfrak{T}$; avšak K je částí některého vrcholu sítě $\mathfrak{V}$, tedy také některého vrcholu sítě $\mathfrak{T}$. Tedy buďto $K \subset P$ nebo $K \subset Q$. Ježto $PQ = 0$, je tedy buďto $KP = 0$ nebo $KQ = 0$. To je nemožné, neboť $K\varphi \neq 0 \neq K\psi$, $KG = 0$, $\varphi - G \subset P$, $\psi - G \subset Q$.

Tedy, když K je jádro $(p, \mathfrak{V})$-simplexu, pak $K\varphi \neq 0 \neq K\psi$ implikuje $KG \neq 0$. Nechť nyní $C^p(\mathfrak{V}) = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i \tau_i^p$ $(r_i \in \mathfrak{R}, r_i \neq 0)$ je $(p, \mathfrak{V})$-řetěz a nechť $C^p(\mathfrak{V}) \subset \varphi$, $C^p(\mathfrak{V}) \subset \psi$. Máme ukázati, že $\pi_1 \pi_2 C^p(\mathfrak{V}) \subset \varphi\psi$. Je-li K_i jádro τ_i^p, pak $K_i \varphi \neq 0 \neq K_i \psi$; tedy $K_i G \neq 0$. Tedy buďto $\pi_2 \tau_i^p = 0$ nebo jádro K'_i simplexu $\pi_2 \tau_i^p$ protne G (vskutku $K'_i \supset K_i$). Ježto $\pi_2 \tau_i^p$ je $(p, \mathfrak{W})$-simplex, je pak $K'_i \,.\, \varphi\psi \neq 0$ podle definice $\mathfrak{W}$. Tedy $\pi_2 C^p(\mathfrak{V}) \subset \varphi\psi$, takže $\pi_1 \pi_2 C^p(\mathfrak{V}) \subset \varphi\psi$ podle **H** III **6.**

3. *(Prvá adiční věta o cyklech.) Nechť R je normální prostor. Nechť množství A, B a S jsou uzavřená v R. Nechť $A + B = R$. Nechť $p = 0, 1, 2, \ldots, m = 1, 2, 3, \ldots$. Nechť C_i^{p+1} $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou $(p+1, R)$-cykly mod S takové, že, když H_1^{p+1} je $(p+1, R)$-cyklus mod AS v A, když H_2^{p+1} je $(p+1, R)$-cyklus mod BS v B a když $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim H_1^{p+1} - H_2^{p+1}$ mod S $(r_i \in \mathfrak{R})$, jest $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Pak existují (p, R)-cykly Γ_i^p $(1 \leqq i \leqq m)$ mod ABS v AB takové, že 1^0 $\Gamma_i^p \sim 0$ mod AS v A i mod BS v B $(1 \leqq i \leqq m)$, 2^0 $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ mod ABS v AB $(1 \leqq i \leqq m)$ implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$.*

Důkaz. Pro každou síť $\mathfrak{U}$ v R označme $h(\mathfrak{U})$ hodnost modulu $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ všech vektorů (v. **H I 9**) $(r_1, \ldots, r_m)$ takových, že existují $(p+1, \mathfrak{U})$-cyklus $H_1^{p+1}(\mathfrak{U})$ mod AS v A a $(p+1, \mathfrak{U})$-cyklus $H_2^{p+1}(\mathfrak{U})$ mod BS v B takové, že $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1}(\mathfrak{U}) \sim H_1^{p+1}(\mathfrak{U}) - H_2^{p+1}(\mathfrak{U})$ mod S. Zřejmě $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$

je konečný modul (podle **H I 19** jest $p(\mathfrak{U}) \leqq m$). Když síť $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$, odvodíme snadno z **H III 7**, že $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ je podmodul modulu $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$, takže (**H I 19**) $h(\mathfrak{V}) \leqq h(\mathfrak{U})$. Zřejmě existuje síť $\mathfrak{U}_1$ taková, že pro každou síť $\mathfrak{U}$ je $h(\mathfrak{U}) \leqq h(\mathfrak{U}_1)$, takže pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_1$ je $h(\mathfrak{U}) = h(\mathfrak{U}_1)$, tedy (**H I 19**) $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$. Předpokládejme $h(\mathfrak{U}_1) > 0$. Pak existují $r_1, \ldots, r_m$ e $\mathfrak{R}$ taková, že aspoň jedno je $\neq 0$ a že vektor $(r_1, \ldots, r_m)$ náleží do $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$, tedy do $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_1$, tedy do $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ pro každou síť $\mathfrak{U}$. Podle **H IV 5** odvodíme snadno, že řetězy $H_1^{p+1}(\mathfrak{U})$ vyskytující se v homologiích $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1}(\mathfrak{U}) \sim H_1^{p+1}(\mathfrak{U}) - H_2^{p+1}(\mathfrak{U})$ mod S lze voliti tak, že definují $(p+1, R)$-cyklus H_1^{p+1} mod AS v A; na to opět z **H IV 5** odvodíme, že řetězy $H_2^{p+1}(\mathfrak{U})$ lze voliti tak, že definují $(p+1, R)$-cyklus H_2^{p+1} mod BS v B. Pak je však $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim H_1^{p+1} - H_2^{p+1}$ mod S, tedy $r_1 = \ldots = r_m = 0$, což je spor. Tedy je $h(\mathfrak{U}_1) = 0$, t. j. modul $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$ obsahuje pouze nulu.

Pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_1$ nechť $k(\mathfrak{U})$ je hodnost modulu $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ všech $(p, \mathfrak{U}_1)$-cyklů $\Gamma^p(\mathfrak{U}_1)$ homologických s $\pi\Gamma^p(\mathfrak{U})$ mod ABS v AB, kde $\Gamma^p(\mathfrak{U})$ probíhá všecky $(p, \mathfrak{U})$-cykly mod ABS v AB, homologické s nulou mod AS v A i mod BS v B, a $\pi = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1)$ (na bližší volbě π nezáleží podle **H III 7**). $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ je podmodul konečného (**H II 3**) modulu všech $(p, \mathfrak{U})$-řetězů, tedy (**H I 19**) je to konečný modul. Když $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$, zřejmě $\mathfrak{N}(\mathfrak{V})$ je podmodul modulu $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$, tedy $k(\mathfrak{V}) \leqq k(\mathfrak{U})$. Zřejmě existuje zjemnění $\mathfrak{U}_2$ sítě $\mathfrak{U}_1$ takové, že $k(\mathfrak{U}) \geqq k(\mathfrak{U}_1)$ pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_1$, tedy $k(\mathfrak{U}) = k(\mathfrak{U}_1)$ a $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{U}_1)$ pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_2$. Nechť $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$.

Podle **2** určeme zjemnění $\mathfrak{U}_3$ sítě $\mathfrak{U}_2$ a projekci $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$ kladouce $\varphi = AS$, $\psi = BS$, dále zjemnění $\mathfrak{U}_4$ sítě $\mathfrak{U}_3$ a projekci $\pi_{43} = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$ kladouce $\varphi = B$, $\psi = S$, potom zjemnění $\mathfrak{U}_5$ sítě $\mathfrak{U}_4$ a projekci $\pi_{54} = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{U}_5, \mathfrak{U}_4)$ kladouce $\varphi = A$, $\psi = S$ a konečně zjemnění $\mathfrak{U}_6$ sítě $\mathfrak{U}_5$ a projekci $\pi_{65} = \mathrm{Pr.}\ (\mathfrak{U}_6, \mathfrak{U}_5)$ kladouce $\varphi = A$, $\psi = B$. Nechť $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$, $\pi_{41} = \pi_{31}\pi_{43}, \ldots$.

Ježto $R = A + B$, můžeme položiti $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_6) = C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6)$, kde $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \subset A$, $C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \subset B$. Ježto $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \to 0$ mod S, je $F C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) = F C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6)$ mod S. Nechť $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ je ta část řetězu $F C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6)$, jejíž simplexy jsou $\neq 0$ mod S[1]. Pak $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ je také ta část řetězu $F C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6)$, jejíž simplexy jsou $\neq 0$ mod S. Ježto $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \subset A$, je $F C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \subset A$, tedy $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset A$, $F C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset A$. Podobně $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset B$, $F C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset B$.

---

[1] To znamená ovšem: jsou-li σ_j^p $(1 \leqq j \leqq \alpha)$ všecky $(p, \mathfrak{U}_6)$-simplexy a je-li $F C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) = \sum_{j=1}^{\alpha} r_j \sigma_j^p$, jest $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) = \sum_{j=1}^{\alpha} s_j \sigma_j^p$, kde $s_j = 0$ nebo $s_j = r_j$ podle toho zda je či není $\sigma_j^p \subset S$.

Podle definice sítě $\mathfrak{U}_5$ je $\pi_{65} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset AB$. Dále jest $FC_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset S$, $FC_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset S$, takže podle definice sítí $\mathfrak{U}_5$ a $\mathfrak{U}_4$ jest $\pi_{64} FC_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \pi_{64} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset AS$, $\pi_{63} FC_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \pi_{63} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset BS$, z čehož utvořením hranice vychází $\pi_{64} F\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset AS$, $\pi_{63} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset BS$, takže $\pi_{62} F\Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \subset ABS$ podle definice sítě $\mathfrak{U}_3$. Tedy $\pi_{62} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ je $(p, \mathfrak{U}_2)$-cyklus mod ABS v AB; mimo to $\pi_{62} C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \rightarrow \pi_{62} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod AS, $\pi_{62} C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \rightarrow \pi_{62} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$, takže $\pi_{61} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2)$. Podle definice sítě $\mathfrak{U}_2$ je $\pi_{61} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_1$. Tedy mohu pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_1$ zvoliti $(p, \mathfrak{U})$-cyklus $\Gamma_i^p(\mathfrak{U})$ mod ABS v AB tak, že, když $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1)$, je $\pi \Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim \pi_{61} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod ABS v AB a $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod AS v A i mod BS v B; když však síť $\mathfrak{U}$ není zjemněním sítě $\mathfrak{U}_1$, zvolme síť $\mathfrak{V}$ tak, aby byla zjemněním obou sítí $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{U}_1$ a zvolme $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim \pi' \Gamma_i^p(\mathfrak{V})$ mod ABS v AB, kde $\pi' = \text{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Z **H** IV **5** odvodíme snadno, že lze řetězy $\Gamma_i^p(\mathfrak{U})$ voliti tak, že definují (p, R)-cyklus Γ_i^p mod ABS v AB. Zřejmě $\Gamma_i^p \sim 0$ mod AS v A i mod BS v B, $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim \pi_{61} \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod ABS v AB.

Zbývá ukázati, že $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ mod ABS v AB implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Nechť platí právě napsaná homologie. Pak jest $\pi_{61} \sum_{i=1}^{m} r_i \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6) \sim 0$ mod ABS v AB. Tedy existuje $(p+1, \mathfrak{U}_1)$-řetěz $D^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \subset AB$ takový, že $D^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \rightarrow \pi_{61} \sum_{i=1}^{m} r_i \Delta_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod ABS. Ježto $\pi_{64} C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \rightarrow \pi_{64} \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod AS, $\pi_{63} C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \rightarrow \pi_{63} \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_6)$ mod BS, $\pi_{61} C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_6) = \pi_{61} C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - \pi_{61} C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) \sim C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$ mod S, jest

$$\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_1) - H_2^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \text{ mod } S,$$

kde

$$H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{61} \sum_{i=1}^{m} C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$$

je $(p+1, \mathfrak{U}_1)$-cyklus mod AS v A a

$$H_2^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{61} \sum_{i=1}^{m} C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_6) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$$

je $(p+1, \mathfrak{U}_1)$-cyklus mod BS v B. Tedy $(r_1, \ldots, r_m) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$, tedy $r_1 = \ldots = r_m = 0$, j. b. d.

4. (*Druhá adiční věta o cyklech.*) *Nechť R je normální prostor. Nechť množství A, B a S jsou uzavřená v R. Nechť $A + B = R$. Nechť $p = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Nechť Γ_i^p $(1 \leq i \leq m)$ jsou (p, R)-cykly* mod *ABS v AB takové, že 1⁰ $\Gamma_i^p \sim 0$* mod *AS v A i* mod *BS v B $(1 \leq i \leq m)$, 2⁰ $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$* mod *$ABS$ v AB implikuje $r_1 = \ldots =$*

$= r_m = 0$. *Pak existují $(p+1, R)$-cykly C_i^{p+1} $(1 \leqq i \leqq m)$* mod S *takové, že, když H_1^{p+1} je (p, R)-cyklus* mod AS *v A, když H_2^{p+1} je (p, R)-cyklus* mod BS *v B a když $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim H_1^{p+1} - H_2^{p+1}$* mod S, *jest* $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Důkaz. Pro každou síť $\mathfrak{U}$ v R nechť $h(\mathfrak{U})$ je hodnost konečného modulu $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$ všech vektorů $(r_1, \ldots, r_m)$ takových, že $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod ABS v AB. Když $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$, zřejmě $\mathfrak{M}(\mathfrak{V})$ je podmodul modulu $\mathfrak{M}(\mathfrak{U})$, tedy $h(\mathfrak{V}) \leqq h(\mathfrak{U})$. Zřejmě existuje síť $\mathfrak{U}_1$ taková, že pro každou síť $\mathfrak{U}$ je $h(\mathfrak{U}) \geqq h(\mathfrak{U}_1)$, takže pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_1$ je $h(\mathfrak{U}) = h(\mathfrak{U}_1)$ a tudíž $\mathfrak{M}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$. Je-li $(r_1, \ldots, r_m) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{U}_1)$, je $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod ABS v AB pro každé zjemnění $\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}_1$, tedy pro každou síť $\mathfrak{U}$, takže $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ mod ABS v AB. Tedy $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod ABS v AB implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Podle **2** určeme nejprve zjemnění $\mathfrak{U}_2$ sítě $\mathfrak{U}_1$ a projekci $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$ kladouce $\varphi = AB$, $\psi = S$, pak zjemnění $\mathfrak{U}_3$ sítě $\mathfrak{U}_2$ a projekci $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$ kladouce $\varphi = A$, $\psi = B$. Nechť $\mathfrak{U}_4$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_3$ normální vzhledem k $(p+1)$-cyklům mod S (v. **H** III **9** a **10**). Nechť $\pi_{43} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$, $\pi_{41} = \pi_{31}\pi_{43}$, $\pi_{42} = \pi_{32}\pi_{43}$.

Ježto pro $1 \leqq i \leqq m$ jest $\Gamma_i^p \sim 0$ mod AS v A i mod BS v B, existují $(p+1, \mathfrak{U}_4)$-řetězy $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$ a $D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset B$ takové, že $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \to \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4)$ mod AS a $D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \to \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4)$ mod BS, takže $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ je $(p+1, \mathfrak{U}_4)$-cyklus mod S. Podle definice sítě $\mathfrak{U}_4$ je $\pi_{43} D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ podstatný $(p+1, \mathfrak{U}_3)$-cyklus mod S, takže podle **H** IV **6·1** existuje $(p+1, R)$-cyklus C_i^{p+1} mod S takový, že $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43} D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$. Nechť H_1^{p+1} je $(p+1, R)$-cyklus mod AS v A a nechť H_2^{p+1} je $(p+1, R)$-cyklus mod BS v B. Nechť $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim H_1^{p+1} - H_2^{p+1}$ mod S. Máme ukázati, že $r_1 = \ldots = r_m = 0$.

Ježto $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43} D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$, existuje $(p+2, \mathfrak{U}_3)$-řetěz $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3)$ takový, že

$$E^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) + H_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \text{ mod } S.$$

Ježto $R = A + B$, můžeme položiti $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3) = E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3)$, kde $E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset B$. Pak jest

$$\begin{aligned} &F E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) + H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \\ &= F E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) + H_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \text{ mod } S. \end{aligned} \tag{1}$$

Označme $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ tu část levé, a tudíž i pravé, strany relace (1), jejíž simplexy jsou $\neq 0 \bmod S$. Ježto $E_1{}^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $D_{1i}{}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$, $H_1{}^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, jest $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A$; podobně $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset B$. Tedy $\pi_{32} K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$ podle definice sítě $\mathfrak{U}_3$. Dále jest

$$K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - [FE_1{}^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_{1i}{}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) + H_1{}^{p+1}(\mathfrak{U}_3)] \subset S.$$

Tvořením hranice vyjde

$$FK^{p+1}(\mathfrak{U}_3) + \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i{}^p(\mathfrak{U}_4) + \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i [FD_{1i}{}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \Gamma_i{}^p(\mathfrak{U}_4)] + FH_1{}^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset S.$$

Avšak $FD_{1i}{}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \Gamma_i{}^p(\mathfrak{U}_4) \subset S$, $FH_1{}^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset S$. Tedy

$$FK^{p+1}(\mathfrak{U}_3) + \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i{}^p(\mathfrak{U}_4) \subset S.$$

Avšak $\pi_{32} K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$, $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset AB$. Tedy podle definice sítě $\mathfrak{U}_2$ jest $\pi_{31} FK^{p+1}(\mathfrak{U}_3) + \pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset ABS$, takže $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod ABS$ v AB. Avšak $\pi_{41} \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \bmod ABS$ v AB, tedy $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim \bmod ABS$ v AB, takže podle definice sítě $\mathfrak{U}_1$ jest $r_1 = \ldots = r_m = 0$, j. b. d.

5. (*Prvá adiční věta o lokálních Bettiových číslech.*) *Nechť R je normální prostor. Nechť množství A a B jsou uzavřená v R. Nechť $A + B = R$. Nechť $a \in AB$. Nechť $p = 0, 1, 2, \ldots$. Nechť $\beta_{p+1}(a, A) = \beta_{p+1}(a, B) = 0$. Pak $\beta_p(a, AB) \geqq \beta_{p+1}(a, R)$.*

Důkaz. Z definice lokálních Bettiových čísel (v **H** IV **10**) vychází snadno, že stačí dokázati správnost následujícího tvrzení: Nechť $m = 1, 2, 3, \ldots$; nechť U jest okolí bodu a (v prostoru R) takové, že $\beta_{p+1}(a, U; R) \geqq m$. Pak jest $\beta_p(V, U; AB, R) \geqq m$ pro každé okolí $V \subset U$ bodu a.

Ježto $\beta_{p+1}(a, A) = \beta_{p+1}(a, A, R) = 0$, jest $\beta_{p+1}(a, V; A, R) = 0$. Tedy existuje okolí $W_1 \subset V$ bodu a takové, že $\beta_{p+1}(W'_1 V; A, R) = 0$ pro každé okolí $W'_1 \subset W_1$ bodu a. Podobně existuje okolí $W_2 \subset V$ bodu a takové, že $\beta_{p+1}(W'_2, V; B, R)$ pro každé okolí $W'_2 \subset W_2$ bodu a. Nechť $W = W_1 W_2$; pak $a \in W \subset V$, $\beta_{p+1}(W, V; A, R) = \beta_{p+1}(W, V; B, R) = 0$.

Ježto $\beta_{p+1}(a, U; R) \geqq m$, jest $\beta_{p+1}(W, U; R) \geqq m$. Tedy existují $(p+1, R)$-cykly C_i^{p+1} $(1 \leqq i \leqq m) \bmod (R - U)$ takové, že $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim 0 \bmod (R - W)$ implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Jako na počátku důkazu věty **4** zjistíme, že existuje síť $\mathfrak{U}_1$ taková, že $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (R - W)$ implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Nechť $\mathfrak{U}_2$ je (v. **H** III **10**) zjemnění sítě $\mathfrak{U}_1$ normální vzhledem k $(p+1)$-cyklům $\bmod (B - V)$ v B; nechť $\pi_{21} =$

$= \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$. Podle **2** určeme zjemnění $\mathfrak{U}_3$ sítě $\mathfrak{U}_2$ a projekci $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$ kladouce $\varphi = B$, $\psi = R - V$. Nechť $\mathfrak{U}_4$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_3$ normální vzhledem k $(p+1)$-cyklům mod $(A - V)$ v A; nechť $\pi_{43} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$. Podle **2** určeme zjemnění $\mathfrak{U}_5$ sítě $\mathfrak{U}_4$ a projekci $\pi_{54} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_5, \mathfrak{U}_4)$ kladouce $\varphi = A$, $\psi = R - V$. Nechť $\mathfrak{U}_6$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_5$ normální vzhledem k p-cyklům mod $(AB - U)$ v AB; nechť $\pi_{65} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_6, \mathfrak{U}_5)$. Podle **2** určeme nejprve zjemnění $\mathfrak{U}_7$ sítě $\mathfrak{U}_6$ a projekci $\pi_{76} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_7, \mathfrak{U}_6)$ kladouce $\varphi = AB$, $\psi = R - U$, potom zjemnění $\mathfrak{U}_8$ sítě $\mathfrak{U}_7$ a projekci $\pi_{87} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_8, \mathfrak{U}_7)$ kladouce $\varphi = A$, $\psi = B$. Nechť $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}, \dots$.

Ježto $A + B = R$, můžeme položiti $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_8) = C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8)$, kde $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset A$, $C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset B$. Nechť $\Delta_i^p\,\mathfrak{U}_8$ je ta část $(p, \mathfrak{U}_8)$-řetězu $F C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8)$, jejíž simplexy jsou $\neq 0$ mod $(R - U)$. Ježto $FC_i^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset R - U$, je $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$ také ta část řetězu $F C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8)$, jejíž simplexy jsou $\neq 0$ mod $(R - U)$. Ježto $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset A$, je $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset A$; ježto $C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \subset B$, je $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset B$. Tedy podle definice sítě $\mathfrak{U}_8$ jest $\pi_{87}\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset AB$, takže $F\pi_{87}\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset AB$. Ježto $\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) = FC_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8)$ mod $(R - U)$, jest $F\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset R - U$. Podle definice sítě $\mathfrak{U}_7$ je tedy $F\pi_{86}\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \subset AB - U$, takže $\pi_{86}\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$ je $(p, \mathfrak{U}_6)$-cyklus mod $(AB - U)$ v AB. Podle definice sítě $\mathfrak{U}_6$ je tedy $\pi_{85}\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$ podstatný $(p, \mathfrak{U}_5)$-cyklus mod $(AB - U)$ v AB, takže podle **H** IV **6·1** existuje (p, R)-cyklus Γ_i^p $(1 \leqq i \leqq m)$ mod $(AB - U)$ v AB takový, že $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_5) = \pi_{85}\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$. Nechť $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ mod $(AB - V)$ v AB. Stačí odvoditi, že $r_1 = \dots = r_m = 0$, neboť pak $\beta_p(V, U; AB, R) \geqq m$, j. b. d.

Ježto $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_5) = \pi_{85}\Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$, jest $\pi_{85}\sum_{i=1}^{m} r_i \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \sim 0$ mod $(AB - V)$ v AB. Tedy existuje $(p+1, \mathfrak{U}_5)$-řetěz $D^{p+1}(\mathfrak{U}_5) \subset AB$ takový, že

$$F D^{p+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{85}\sum_{i=1}^{m} r_i \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8) \text{ mod } (AB - V).$$

Avsak $C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) \to \Delta_i^p(\mathfrak{U}_8)$ mod $(AB - U) \subset (R - V)$. Tedy $(p+1, \mathfrak{U}_5)$-řetěz $\pi_{85}\sum_{i=1}^{m} r_i C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)$ leží v A a jeho hranice leží v $(R - V)$. Podle definice sítě $\mathfrak{U}_5$ jest $F[\pi_{84}\sum_{i=1}^{m} r_i C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{54} D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)] \subset A - V$, takže (podle definice sítě $\mathfrak{U}_4$) $\pi_{81}\sum_{i=1}^{m} r_i C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)$ je podstatný $(p+1, \mathfrak{U}_1)$-cyklus mod $(A - V)$ v A. Tedy podle **H** IV **6·1** existuje $(p+1, R)$-cyklus H_1^{p+1} mod $(A - V)$ v A takový, že

$$H_1^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{81}\sum_{i=1}^{m} r_i C_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{p+1}(\mathfrak{U}_5). \tag{1}$$

Podobně $(p+1, \mathfrak{U}_5)$-řetěz $\pi_{85}\sum_{i=1}^{m} r_i C_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_8) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_5)$ leží v B a jeho hranice leží v $(R - V)$. Podle definice sítě $\mathfrak{U}_3$ tedy $\pi_{82} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{2i}^{p+1} (\mathfrak{U}_8) - \pi_{52} D^{p+1} (\mathfrak{U}_5)$ je $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-cyklus mod $(B - V)$ v B, takže (podle definice sítě $\mathfrak{U}_2$) $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{2i}^{p+1} (\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{p+1} (\mathfrak{U}_5)$ je podstatný $(p + 1, \mathfrak{U}_1)$-cyklus mod $(B - V)$ v B. Tedy podle **H** IV **6·1** existuje $(p + 1, R)$-cyklus H_2^{p+1} mod $(B - V)$ v B takový, že

$$H_2^{p+1} (\mathfrak{U}_1) = \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{2i}^{p+1} (\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{p+1} (\mathfrak{U}_5). \tag{2}$$

Ježto $\beta_{p+1} (W, V; A, R) = \beta_{p+1} (W, V; B, R) = 0$, jest $H_1^{p+1} \sim 0$ mod $(A - W)$ v A, $H_2^{p+1} \sim 0$ mod $(B - W)$ v B. Tedy podle (1) a (2) existují $(p + 2, \mathfrak{U}_1)$-řetězy $E_1^{p+2} (\mathfrak{U}_1) \subset A$ a $E_2^{p+2} (\mathfrak{U}_1) \subset B$ takové, že

$$E_1^{p+2} (\mathfrak{U}_1) \rightarrow \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{1i}^{p+1} (\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{p+1} (\mathfrak{U}_5) \text{ mod } (A - W),$$

$$E_2^{p+2} (\mathfrak{U}_1) \rightarrow \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{2i}^{p+1} (\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{p+1} (\mathfrak{U}_5) \text{ mod } (B - W),$$

takže

$$E_1^{p+2} (\mathfrak{U}_1) - E_2^{p+2} (\mathfrak{U}_1) \rightarrow \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} (\mathfrak{U}_8) \text{ mod } (R - W),$$

t. j. $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} (\mathfrak{U}_8) \sim 0$ mod $(R - W)$. Avšak $\pi_{81} C_i^{p+1} (\mathfrak{U}_8) \sim$ $\sim C_i^{p+1} (\mathfrak{U}_1)$ mod $(R - W)$, takže $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} (\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $(R - W)$. Podle definice sítě $\mathfrak{U}_1$ je tedy $r_1 = \ldots = r_m = 0$, j. b. d.

6. (*Druhá adiční věta o lokálních Bettiových číslech.*) *Nechť R je normální prostor. Nechť množství A a B jsou uzavřená v R. Nechť $A + B = R$. Nechť $a \in AB$. Nechť $p = 0, 1, 2 \ldots$. Nechť $\beta_p (a, A) = \beta_p (a, B) = 0$. Pak $\beta_p (a, AB) \leq \beta_{p+1} (a, R)$.*

Důkaz. Z definice lokálních Bettiových čísel (v. **H** IV **10**) vychází snadno, že stačí dokázati správnost následujícího tvrzení: Nechť $m = 1, 2. 3, \ldots$; nechť U jest okolí bodu a (v prostoru R) takové, že $\beta_p (a, U; AB, R) \geq m$. Pak existuje okolí $V \subset U$ bodu a takové, že $\beta_{p+1} (a, V; R) \geq m$.

Ježto $\beta_p (a, A) = \beta_p (a; A, R) = 0$, jest $\beta_p (a, U; A, R) = 0$. Podobně $\beta_p (a, U; B, R) = 0$. Tedy existuje okolí $V \subset U$ bodu a takové, že $\beta_p (V, U; A, R) = \beta_p (V, U; B, R) = 0$. Máme ukázati, že, když W jest okolí bodu a takové, že $W \subset V$, jest $\beta_{p+1} (W, V; R) \geq m$.

Ježto $\beta_p (a, V; AB, R) \geq m$, jest $\beta_p (W, V; AB, R) \geq m$. Tedy existují (p, R)-cykly Γ_i^p $(1 \leq i \leq m)$ mod $(AB - U)$ v AB takové, že $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p \sim 0$ mod $(AB - W)$ v AB implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Jako na počátku důkazu věty **4** zjistíme, že existuje síť $\mathfrak{U}_1$ taková, že $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p (\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (AB - W)$ v AB implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Podle **2** určeme nejprve zjemnění $\mathfrak{U}_2$ sítě $\mathfrak{U}_1$ a projekci $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$ kladouce $\varphi = AB$, $\psi = R - W$, potom zjemnění $\mathfrak{U}_3$ sítě $\mathfrak{U}_2$ a projekci $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$ kladouce $\varphi = A$, $\psi = B$. Nechť $\mathfrak{U}_4$ je (v. **H** III **10**) zjemnění sítě $\mathfrak{U}_3$ normální vzhledem k $(p+1)$-cyklům mod $(R - V)$. Nechť $\pi_{43} = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$, $\pi_{41} = \pi_{31}\pi_{43}$, $\pi_{42} = \pi_{32}\pi_{43}$.

Ježto Γ_i^p jsou (p, R)-cykly mod $(AB - U)$ v AB, jsou to také (p, R)-cykly mod $(A - U)$ v A. Ježto $\beta_p(V, U; A, R) = 0$, je $\Gamma_i^p \sim 0$ mod $(A - V)$ v A. Podobně $\Gamma_i^p \sim 0$ mod $(B - V)$ v B. Tedy existují $(p+1, \mathfrak{U}_4)$-řetězy $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$ a $D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset B$ takové, že

$$\begin{aligned} D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) &\rightarrow \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \bmod (A - V), \\ D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) &\rightarrow \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \bmod (B - V). \end{aligned} \tag{1}$$

Tedy $D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ je $(p+1, (\mathfrak{U}_4)$-cyklus mod $(R - V)$, takže podle definice sítě $\mathfrak{U}_4$ řetěz $\pi_{43} D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ je podstatný $(p+1, \mathfrak{U}_3)$-cyklus mod $(R - V)$. Tedy podle **H** IV **6·1** existují $(p+1, R)$-cykly C_i^{p+1} $(1 \leqq i \leqq m)$ mod $(R - V)$ takové, že $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43} D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$.

Nechť $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{p+1} \sim 0$ mod $(R - W)$. Stačí odvoditi, že $r_1 = \ldots = r_m = 0$, neboť pak $\beta_{p+1}(W, V; R) \geqq m$, j. b. d. Ježto $C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43} D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$, existuje $(p+2, \mathfrak{U}_3)$-řetěz $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3)$ takový, že $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \rightarrow \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$ mod $(R - W)$. Ježto $R = A + B$, můžeme položiti $E^{p+2}(\mathfrak{U}_3) = E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) - E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3)$, kde $E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \subset B$. Zřejmě

$$\begin{aligned} &\pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - F E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) = \\ &= \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_{2i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - F E_2^{p+2}(\mathfrak{U}_3) \bmod (R - W). \end{aligned} \tag{2}$$

Označme $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ tu část levé, a tudíž i pravé, strany relace (2), jejíž simplexy jsou $\neq 0$ mod $(R - W)$. Pak jest $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset B$, tedy $\pi_{32} K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$ podle definice sítě $\mathfrak{U}_3$. Mimo to

$$F E_1^{p+2}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \bmod (R - W),$$

takže $\pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i D_{1i}^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \rightarrow 0$ mod $(R - W)$. Z toho následuje podle (1), že $F K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset R - W$. Tedy $(p, \mathfrak{U}_2)$-řetěz

$$F\pi_{32}K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{42}\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \tag{3}$$

leží v $R - W$. Ježto $\pi_{32}K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$, $\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset AB$, řetěz (3) leží také v AB. Tedy podle definice sítě $\mathfrak{U}_2$ jest $F\pi_{31}K^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{41}\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset AB - W$. Tedy $\pi_{41}\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (AB - W)$ v AB. Avšak $\pi_{41}\Gamma_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \bmod (AB - U)$ v AB. Ježto $W \subset U$, je $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (AB - W)$ v AB, takže podle definice sítě $\mathfrak{U}_1$ je $r_1 = \ldots = r_m = 0$, j. b. d.

7. *(Prvá adiční věta o lokální acyklicitě). Nechť R je normální prostor. Nechť množství A a B jsou uzavřená v R. Nechť $A + B = R$. Nechť $a \in AB$. Nechť $p = 0, 1, 2, \cdots$. Nechť množství A a B jsou v bodě a lokálně acyklická řádu $p + 1$. Nechť množství AB je v bodě a lokálně acyklické řádu p. Pak prostor R je v bodě a lokálně acyklický řádu $p + 1$.*

Důkaz. Nechť naopak (v. **H** IV **14**) $\gamma_{p+1}(a, R) \neq 0$. Pak existuje okolí U bodu a takové, že $\gamma_{p+1}(a, U; R) \neq 0$. Ježto $\gamma_{p+1}(a; A, R) = \gamma_{p+1}(a; B, R) = 0$, jest $\gamma_{p+1}(a, U; A, R) = \gamma_{p+1}(a, U; B, R) = 0$. Tedy existuje okolí $V \subset U$ bodu a takové, že $\gamma_{p+1}(V, U; A R) = \gamma_{p+1}(V, U; B, R) = 0$. Ježto $\gamma_p(a; AB, R) = 0$, jest $\gamma_p(a, V; AB, R) = 0$. Tedy existuje okolí $W_1 \subset V$ bodu a takové, že $\gamma_p(W_1, V; AB, R) = 0$. Podle **D 10** existuje okolí W_2 bodu a takové, že $W_2 \subset \overline{W_1}$. Ježto $\gamma_{p+1}(a, U; R) \neq 0$, jest $\gamma_{p+1}(W_2, U; R) \neq 0$.

Tedy existuje absolutní $(p + 1, R)$-cyklus C^{p+1}, který leží ve W_2 a není homologický s nulou v $\overline{U}$. Tedy existuje síť $\mathfrak{U}_1$ taková, že $C^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$ není ~ 0 v $\overline{U}$. Nechť (**H** III **9·3** a **10**) $\mathfrak{U}_2$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_1$ normální i vzhledem k absolutním $(p + 1)$-cyklům v $A\overline{V}$ i vzhledem k absolutním $(p + 1)$-cyklům v $B\overline{V}$. Nechť $\mathfrak{U}_3$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_2$ normální vzhledem k absolutním p-cyklům v $AB\overline{W_1}$. Určeme zjemnění $\mathfrak{U}_4$ sítě $\mathfrak{U}_3$ a projekci $\pi_{43} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$ podle **2**, kladouce $\varphi = A\overline{W_2}$, $\psi = B\overline{W_2}$. Nechť $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{42} = \pi_{32}\pi_{43}$, $\pi_{41} = \pi_{21}\pi_{42}$.

Ježto $C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset \overline{W_2}$, mohu položiti $C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4)$, kde $C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A\overline{W_2}$, $C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset B\overline{W_2}$. Ježto $C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \rightarrow 0$, mohu položiti

$$F C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = F C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4) = \Delta^p(\mathfrak{U}_4). \tag{1}$$

Jest $\Delta^p(\mathfrak{U}_4) \subset A\overline{W_2}$, $\Delta^p(\mathfrak{U}_4) \subset B\overline{W_2}$, tedy $\pi_{43}\Delta^p(\mathfrak{U}_4) \subset AB\overline{W_2}$ podle definice sítě $\mathfrak{U}_4$. Ježto $W_2 \subset \overline{W_1}$, $\pi_{43}\Delta^p(\mathfrak{U}_4)$ jest absolutní $(p, \mathfrak{U}_3)$-cyklus v $AB\overline{W_1}$. Podle definice sítě $\mathfrak{U}_3$ (v. též **H** IV **6·1**) existuje absolutní (p, R)-cyklus Γ^p v $AB\overline{W_1}$ takový, že $\Gamma^p(\mathfrak{U}_2) = \pi_{42}\Delta^p(\mathfrak{U}_4)$. Ježto $\gamma_p(W_1, V; AB, R) = 0$, jest $\Gamma^p \sim 0$ v $AB\overline{V}$. Tedy existuje $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-řetěz $D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset AB\overline{V}$ takový, že $D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \rightarrow \pi_{42}\Delta^p(\mathfrak{U}_4)$. Tedy podle (1)

$$\pi_{42}\, C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to 0, \quad \pi_{42}\, C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to 0.$$

Ježto $C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \subset \overline{A W_2}$, $D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset \overline{A B V}$, $\overline{W}_2 \subset W_1 \subset V$, jest $\pi_{42}\, C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset \overline{A V}$. Tedy, podle definice sítě $\mathfrak{U}_2$ (v. též **H** IV **6·1**) existuje absolutní $(p+1, R)$-cyklus E_1^{p+1} v $\overline{A V}$ takový, že

$$E_1^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{41}\, C_1^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21}\, D^{p+1}(\mathfrak{U}_2).$$

Podobně existuje absolutní $(p+1, R)$-cyklus E_2^{p+1} v $\overline{B V}$ takový, že

$$E_2^{p+1}(\mathfrak{U}_1) = \pi_{41}\, C_2^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21}\, D^{p+1}(\mathfrak{U}_2).$$

Ježto $\gamma_{p+1}(V, U; A, R) = \gamma_{p+1}(V, U; B, R) = 0$, jest $E_1^{p+1} \sim 0$ v $\overline{A U}$, $E_2^{p+1} \sim 0$ v $\overline{B U}$. Tedy existují $(p+2, \mathfrak{U}_1)$-řetězy $H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \subset \overline{A U}$, $H_2^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \subset \overline{B U}$ takové, že

$$H_i^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{41}\, C_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21}\, D^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \quad (i = 1, 2),$$

takže

$$H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_1) - H_2^{p+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{41}\, C^{p+1}(\mathfrak{U}_4),$$

tedy $\pi_{41}\, C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0$ v $\overline{U}$. Ježto C^{p+1} jest absolutní $(p+1, R)$-cyklus ve $\overline{W}_2 \subset \overline{U}$, jest $\pi_{41}\, C^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \sim C^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$ v $\overline{U}$. Tedy $C^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ v $\overline{U}$, což odporuje definici sítě $\mathfrak{U}_1$.

8. *(Druhá adiční věta o lokální acyklicitě.) Nechť R je normální prostor. Nechť množství A a B jsou uzavřená v R. Nechť $A + B = R$. Nechť $a \in A B$. Nechť $p = 0, 1, 2, \dots$. Nechť množství A a B jsou v bodě a lokálně acyklická řádu p. Nechť prostor R je v bodě a lokálně acyklický řádu $p + 1$. Pak množství AB je v bodě a lokálně acyklické řádu p.*

Důkaz. Nechť naopak $\gamma_p(a; AB, R) \neq 0$. Pak existuje okolí U_1 bodu a takové, že $\gamma_p(a, U_1; AB, R) \neq 0$. Podle **D 10** existuje okolí U_2 bodu a takové, že $\overline{U}_2 \supset U_1$. Ježto $\gamma_{p+1}(a; R) = 0$, jest $\gamma_{p+1}(a, U_2; R) = 0$. Tedy existuje okolí $V \subset U_2$ bodu a takové, že $\gamma_{p+1}(V, U_2; R) = 0$. Ježto $\gamma_p(a; A, R) = \gamma_p(a; B, R) = 0$, jest $\gamma_p(a, V; A, R) = \gamma_p(a, V; B, R) = 0$. Tedy existuje okolí $W \subset V$ bodu a takové, že $\gamma_p(W, V; A, R) = \gamma_p(W, V; B, R) = 0$. Ježto $\gamma_p(a, U_1; AB, R) \neq 0$, jest $\gamma_p(W, U_1; AB, R) \neq 0$.

Tedy existuje absolutní (p, R)-cyklus Γ^p, který leží ve $\overline{A B W}$ a není ~ 0 v $\overline{A B U_1}$. Tedy existuje síť $\mathfrak{U}_1$ taková, že $\Gamma^p(\mathfrak{U}_1)$ není ~ 0 v $\overline{A B U_1}$. Určeme zjemnění $\mathfrak{U}_2$ sítě $\mathfrak{U}_1$ a projekci $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$ podle **2**, kladouce $\varphi = A\, U_2$, $\psi = B\, \overline{U}_2$. Nechť $\mathfrak{U}_3$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_2$ normálním vzhledem k $(p+1)$-cyklům ve $\overline{V}$. Nechť $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\, \pi_{32}$.

Ježto $\overline{A B W} \subset \overline{A W}$, Γ^p jest absolutní (p, R)-cyklus v $\overline{A W}$. Ježto $\gamma_p(W, V; A, R) = 0$, je $\Gamma^p \sim 0$ v $\overline{A V}$. Podobně $\Gamma^p \sim 0$ v $\overline{B V}$. Tedy existují $(p+1, \mathfrak{U}_3)$-řetězy $D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset \overline{A V}$, $D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset \overline{B V}$ takové, že

$$D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \to \Gamma^p(\mathfrak{U}_3), \quad D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \to \Gamma^p(\mathfrak{U}_3). \tag{1}$$

Tedy $D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ jest absolutní $(p+1, \mathfrak{U}_3)$-cyklus ve $\overline{V}$. Podle definice sítě $\mathfrak{U}_3$ (v. též **H** IV **6·1**) existuje absolutní $(p+1, R)$-cyklus C^{p+1} ve $\overline{V}$ takový, že

$$C^{p+1}(\mathfrak{U}_2) = \pi_{32} D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{32} D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3).$$

Ježto $\gamma_{p+1}(V, U_2; R) = 0$, jest $C^{p+1} \sim 0$ v $\overline{U_2}$. Tedy existuje $(p+2, \mathfrak{U}_2)$-řetěz $H^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \subset U_2$ takový, že

$$H^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \rightarrow \pi_{32} D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{32} D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3).$$

Ježto $R = A + B$, mohu položiti $H^{p+2}(\mathfrak{U}_2) = H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_2) - H_2^{p+2}(\mathfrak{U}_2)$, kde $H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \subset A\overline{U_2}$, $H_2^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \subset B\overline{U_2}$. Tedy mohu položiti

$$\pi_{32} D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - FH_1^{p+2}(\mathfrak{U}_2) = \pi_{32} D_2^{p+1}(\mathfrak{U}_3) - FH_2^{p+3}(\mathfrak{U}_2) = \\ = K^{p+1}(\mathfrak{U}_2). \tag{2}$$

Ježto $D_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \subset \overline{AV}$, $H_1^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \subset A\overline{U_2}$, $V \subset U_2$, jest $K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset A\overline{U_2}$. Podobně $K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset B\overline{U_2}$. Tedy podle definice sítě $\mathfrak{U}_2$ jest $\pi_{21} K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset \subset AB\overline{U_2}$. Ježto $\overline{U_2} \subset U_1$, jest $\pi_{21} K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset \overline{ABU_1}$. Podle (1) a (2) je však $\pi_{21} K^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \rightarrow \pi_{31} \Gamma^p(\mathfrak{U}_3)$, takže $\pi_{31} \Gamma^p(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ v $\overline{ABU_1}$. Ježto Γ^p jest absolutní (p, R)-cyklus v $\overline{ABW} \subset \overline{ABU_1}$, jest $\pi_{31} \Gamma^p(\mathfrak{U}_3) \sim \sim \Gamma^p(\mathfrak{U}_1)$ v $\overline{ABU_1}$. Tedy $\Gamma^p(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ v $\overline{ABU_1}$, což odporuje definici sítě $\mathfrak{U}_1$.

V. Cykly dimense $\geqq n$ v prostoru dimense n.

1. *Nechť R je prostor. Nechť S jest uzavřené v R. Nechť* (v. **D 3**) dim $R = n < p$ (1, 2, 3, ...). *Pak* $\boldsymbol{B}^p(R, S) = 0$.

Důkaz. Nechť C^p je (p, R)-cyklus mod S. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R. Máme dokázati, že $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod S. Podle **D 3** existuje síť $\mathfrak{V}$ řádu $\leqq n$, která je zjemněním sítě $\mathfrak{U}$. Nechť $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, takže $\pi C^p(\mathfrak{V}) \sim C^p(\mathfrak{U})$ mod S. Ježto řád sítě $\mathfrak{V}$ je menší než p, je $C^p(\mathfrak{V}) = 0$. Tedy $C^p(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod S.

2. *Nechť R je prostor. Nechť* dim $R = n < p$ (= 1, 2, 3. ...). *Nechť $a \in R$. Pak $\beta_p(a, R) = 0$.*

Důkaz. Nechť U a V jsou okolí bodu a; nechť $U \supset V$. Nechť C^p je (p, R)-cyklus mod $(R - U)$. Stačí dokázati, že $C^p \sim 0$ mod $(R - V)$. Podle **1** je dokonce $C^p \sim 0$ mod $(R - U)$.

3. *Nechť R je prostor. Nechť* dim $R = n < p$ (= 1, 2, 3, ...). *Nechť $a \in R$. Pak R jest v bodě a lokálně acyklický řádu p.*

Důkaz. Nechť U a V jsou okolí bodu a; nechť $U \supset V$. Nechť Γ^p jest absolutní (p, R)-cyklus ve $\overline{V}$. Stačí dokázati, že $\Gamma^p \sim 0$ v $\overline{U}$. Podle **1** je dokonce $\Gamma^p \sim 0$ ve $\overline{V}$.

4. *Nechť R je metrický kompaktní prostor. Nechť* dim $R = = n$ (= 1, 2, 3, ...). *Nechť S a T jsou uzavřená v R; nechť $S \subset T$. Nechť C^n je (n, R)-cyklus* mod S *v T. Pak existuje množství T_0 uzavřené v R a takové, že:* 1^0 $S \subset T_0 \subset T$; 2^0 *existuje (n, R)-cyklus C_0^n* mod S *v T_0*

takový, že $C^n \sim C_0^n$ mod S *v* T; 3° *když* T_1 *jest uzavřené v* R, *když* $S \subset T_1 \subset T_0$, $T_1 \neq T_0$, *když* C_1^n *je* (n, R)*-cyklus* mod S *v* T_1, *není* $C^n \sim C_1^n$ mod S *v* T.

Důkaz. Nechť Φ je třída všech v R uzavřených množství A takových, že $S \subset A \subset T$ a že existuje (n, R)-cyklus C_A^n mod S v A takový, že $C^n \sim C_A^n$ mod S v T. Podle II **14** (v. též II **7**) stačí ukázati, že $A_k \in \Phi$, $A_k \supset A_{k+1}$, $B = \prod_{k=1}^{\infty} A_k$ implikuje $B \in \Phi$.

Ježto $A_k \in \Phi$, existuje (n, R)-cyklus C_k^n mod S v A_k takový, že $C^n \sim C_k^n$ mod S v T. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v R. Podle IV **1** (v. též **D 16**) existuje okolí $G(\mathfrak{U})$ množství B a zjemnění $f\mathfrak{U}$ sítě $\mathfrak{U}$ takové, že, když K je jádro nějakého $f\mathfrak{U}$-simplexu a když $K \,.\, G(\mathfrak{U}) \neq 0$, také $KB \neq 0$. Podle III **13** existuje index $m(\mathfrak{U})$ takový, že $A_{m(\mathfrak{U})} \subset G$. Nechť $\pi_{\mathfrak{U}} = \mathrm{Pr.}\,(f\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U})$. Nechť $D^n(\mathfrak{U}) = \pi_{\mathfrak{U}} C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U})$. Stačí ukázati, že řetězy $D^n(\mathfrak{U})$ definují (n, R)-cyklus D^n mod S v B takový, že $C^n \sim D^n$ mod S v T.

Ježto $FC^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \subset S$, jest $FD^n(\mathfrak{U}) \subset S$. Ježto $C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \subset A_{m(\mathfrak{U})} \subset G(\mathfrak{U})$, podle definice sítě $f\mathfrak{U}$ jest $C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \subset B$, tedy $D^n(\mathfrak{U}) \subset B$. Tedy $D^n(\mathfrak{U})$ jest $(n, \mathfrak{U})$-cyklus mod S v B.

Ježto

$$D^n(\mathfrak{U}) = \pi_{\mathfrak{U}} C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \sim C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{U}) \text{ mod } S \text{ v } A_{m(\mathfrak{U})} \subset T,$$
$$C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{U}) \sim C^n(\mathfrak{U}) \text{ mod } S \text{ v } T,$$

jest

$$D^n(\mathfrak{U}) \sim C^n(\mathfrak{U}) \text{ mod } S \text{ v } T. \tag{1}$$

Nechť $\mathfrak{V}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$ a nechť $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Ježto $\dim R = n$, existuje síť $\mathfrak{W}$ řádu $\leq n$, která je zjemněním obou sítí $f\mathfrak{U}$ i $f\mathfrak{V}$. Nechť $\pi_1 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, f\mathfrak{U})$, $\pi_2 = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{W}, f\mathfrak{V})$. Jest

$$C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \sim \pi_1 C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{W}) \text{ mod } S \text{ v } A_{m(\mathfrak{U})}.$$

Ježto $A_{m(\mathfrak{U})} \subset G(\mathfrak{U})$, je tedy podle definice sítě $f\mathfrak{U}$

$$C^n_{m(\mathfrak{U})}(f\mathfrak{U}) \sim \pi_1 C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{W}) \text{ mod } S \text{ v } B \tag{2}$$

a podobně

$$C^n_{m(\mathfrak{V})}(f\mathfrak{V}) \sim \pi_2 C^n_{m(\mathfrak{V})}(\mathfrak{W}) \text{ mod } S \text{ v } B. \tag{3}$$

Podle (1) a ježto $C^n \sim C^n_{m(\mathfrak{U})}$ mod S v T, existuje $(n+1, \mathfrak{W})$-řetěz $E^{n+1}(\mathfrak{W})$ takový, že

$$FE^{n+1}(\mathfrak{W}) = C_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{W}) - D^n(\mathfrak{W}) \text{ mod } S.$$

Ježto řád sítě $\mathfrak{W}$ je $\leq n$, jest $E^{n+1}(\mathfrak{W}) = 0$, takže

$$C^n_{m(\mathfrak{U})}(\mathfrak{W}) = D^n(\mathfrak{W}) \text{ mod } S. \tag{4}$$

Podobně

$$C^n_{m(\mathfrak{V})}(\mathfrak{W}) = D^n(\mathfrak{W}) \text{ mod } S. \tag{5}$$

Podle (2), (3), (4) a (5) jest

$$D^n(\mathfrak{U}) \sim \pi_{\mathfrak{U}}\, \pi_1\, D^n(\mathfrak{W}) \bmod S \text{ v } B,$$
$$\pi\, D^n(\mathfrak{V}) \sim \pi\, \pi_{\mathfrak{V}}\, \pi_2\, D^n(\mathfrak{W}) \bmod S \text{ v } B.$$

Ježto $D^n(\mathfrak{W})$ je (n, R)-cyklus mod S v B, podle **H** III **7** jest

$$\pi_{\mathfrak{U}}\, \pi_1\, D^n(\mathfrak{W}) \sim \pi\, \pi_{\mathfrak{V}}\, \pi_2\, D^n(\mathfrak{W}) \bmod S \text{ v } B.$$

Tedy

$$D^n(\mathfrak{U}) \sim \pi\, D^n(\mathfrak{V}) \bmod S \text{ v } B.$$

VI. Prostory R_n, S_n a T_n.

1. R_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ znamená *n-rozměrný euklidovský prostor,* t. j. množství všech uspořádaných skupin $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n reálných čísel, metrisované formulí $\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ pro $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Zřejmě (v. III **1**)

$$R_{n+1} = R_n \times R_1 \text{ pro } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1}$$

2. S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ znamená množství těch $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R_{n+1}$, pro něž platí $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$.

3. T_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ znamená množství těch $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$, pro něž platí $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \leqq 1$.

4. *Nechť* $a = (\pm 1, 0, \ldots, 0) \in S_n$. *Pak prostory* R_n *a* $S_n - (a)$ *jsou homeomorfní.*

Důkaz. Každému $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in S_n - (a)$ přiřaďme bod $f(x) = y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R_n$ takto:

$$y_j = \frac{x_j}{1 \mp x_0} \; (1 \leqq j \leqq n). \tag{1}$$

Snadno vidíme, že rovnice (1) jsou ekvivalentní s rovnicemi

$$x_0 = \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 1}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 1}, \quad x_j = \frac{2\, y_j}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 1} \; (1 \leqq j \leqq n). \tag{2}$$

Tedy f je prostá funkce v oboru $S_n - (a)$, jest $f[S_n - (a)] = R_n$ a obě funkce f a f_{-1} jsou spojité.

5. *Množství* T_n $(n = 2, 3, \ldots)$ *obsahuje část homeomorfní s* $S_{n-1} \times T_1$.

Důkaz. Takovou částí množství T_n je množství těch $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro něž $4^{-1} \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq 1$.

6. *Nechť* $n = 1, 2, 3, \cdots$. *Jest* $S_n = T'_n + T''_n$, *kde množství* T'_n *a* T''_n *jsou homeomorfní s* T_n. *Množství* $T'_1 \,.\, T''_1$ *skládá se ze dvou bodů. Když* $n \geqq 2$, *množství* $T'_n \,.\, T''_n$ *jest homeomorfní s* S_{n-1}.

Důkaz. Stačí za T'_n, resp. T''_n vzíti množství těch bodů $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, pro něž $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$ a $x_0 \geqq 0$, resp. $x_0 \leqq 0$.

7. S_n *a* T_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *jsou metrické kompaktní prostory.*

Důkaz. Nechť U_n znamená množství těch $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro něž platí $-1 \leqq x_i \leqq 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Podle II **15** U_1 je kompaktní. Zřejmě $U_{n+1} = U_n \times U_1$, takže podle III **5** U_n je kompaktní. Zřejmě T_n jest uzavřené v U_n a S_n jest uzavřené v U_{n+1}. Tedy S_n a T_n jsou kompaktní podle II **3**.

8. $\dim R_n = \dim S_n = \dim T_n \leqq n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$*.

Důkaz. I. Podle **D 26** a **D 28** jest $\dim T_n \leqq \dim R_n$. Podle **4**, **D 26** a **D 28** jest $\dim R_n \leqq \dim S_n$. Podle **6**, **D 16** a **D 23** je $\dim S_n \leqq \dim T_n$. Tedy $\dim R_n = \dim S_n = \dim T_n$.

II. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť v T_1. Podle II **9** a II **15** existuje $\delta > 0$ takové, že každému $x \in T_1$ lze přiřaditi vrchol U sítě $\mathfrak{U}$ tak, že $y \in T_1$, $|y - x| < 2\delta$ implikuje $y \in U$. Nechť $-1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = 1$, $|a_i - a_{i-1}| < \delta$. Pak intervaly $-1 \leqq x < a_2$, $a_1 < x < a_3, \ldots, a_{m-3} < x < a_{m-1}$, $a_{m-2} < x \leqq 1$ tvoří síť řádu 1, která je zjemněním sítě $\mathfrak{U}$. Tedy $\dim T_1 \leqq 1$.

III. Zbývá dokázati, že $\dim S_{n-1} \leqq n - 1$ implikuje $\dim S_n \leqq n$ $(= 2, 3, 4, \ldots)$. Podle **5**, **D 26** a **D 28** stačí z předpokladu $\dim S_{n-1} \leqq n - 1$ odvoditi $\dim S_{n-1} \times T_1 \leqq n$. Nechť $\mathfrak{Z}$ je daná síť v $S_{n-1} \times T$. Podle **7** a III **7** existuje síť $\mathfrak{U}$ v S_{n-1} a síť $\mathfrak{T}$ v T_1 takové, že síť $\mathfrak{U} \times \mathfrak{T}$ je zjemněním sítě $\mathfrak{Z}$. Ježto $\dim S_{n-1} \leqq n - 1$, existuje síť $\mathfrak{V}$ v S_{n-1} řádu $\leqq n - 1$, která je zjemněním sítě $\mathfrak{U}$. Nechť $V_1, V_2, \ldots, V_m$ jsou vrcholy sítě $\mathfrak{V}$. Podle II **9** a II **15** existuje $\delta > 0$ takové, že, když $-1 \leqq x < y \leqq 1$, $y - x < (m + 1)\,\delta$, existuje vrchol sítě $\mathfrak{T}$ obsahující všecka z taková, že $x \leqq z \leqq y$. Nechť $-1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{km-1} < a_{km} = 1$, $|a_i - a_{i-1}| < \delta$ pro $1 \leqq i \leqq km$. Pro $1 \leqq i \leqq m$ nechť W_{i0} je množství těch $x \in T_1$, pro něž platí $-1 \leqq x < a_i$. Pro $1 \leqq i \leqq m$ nechť W_{ik} je množství těch $x \in T_1$, pro něž platí $a_{(k-1)m+i-1} < x \leqq 1$. Pro $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq k - 1$ nechť W_{ij} je množství těch $x \in T_1$, pro něž platí $a_{(j-1)m+i-1} < x < a_{jm+i}$. Pro $1 \leqq i \leqq m$ zřejmě $W_{i0}, W_{i1}, \ldots, W_{ik}$ jsou vrcholy sítě $\mathfrak{W}_i$ v T_1, která je zjemněním sítě $\mathfrak{T}$. Mimo to, když $x \in T_1$, buďto pro každé i $(1 \leqq i \leqq m)$ x náleží do jediného vrcholu sítě $\mathfrak{W}_i$ nebo existuje index i_0 $(1 \leqq i_0 \leqq m)$ takový, že x náleží právě do dvou vrcholů sítě $\mathfrak{W}_{i_0}$, kdežto pro $1 \leqq i \leqq m$, $i \neq i_0$ x náleží do jediného vrcholu sítě W_i. Množství $V_i \times W_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 0 \leqq j \leqq k)$ jsou vrcholy sítě $\mathfrak{P}$ v $S_{n-1} \times T_1$, která je zjemněním sítě $\mathfrak{V} \times \mathfrak{T}$, tedy také zjemněním sítě $\mathfrak{Z}$. Ježto řád sítě $\mathfrak{V}$

---

* V. v dalším větu **14**.

je $\leqq n-1$, z výše uvedené vlastnosti sítí $\mathfrak{W}_i$ následuje, že řád sítě $\mathfrak{P}$ je $\leqq n$.

9. *Nechť* $n=1,2,3,\ldots;\ p=0,1,2,\cdots$. *Pak* $\boldsymbol{B}^0(T_n)=1, \boldsymbol{B}^p(T_n)=0$ *pro* $p\geqq 1$.

Důkaz. Nechť Γ^p jest absolutní (p, T_n)-cyklus; když $p=0$, nechť $J(\Gamma^0)=0$. Máme ukázati (v. **H** IV **9·1**), že $\Gamma^p \sim 0$. Nechť T jest interval $0\leqq t\leqq 1$. Když $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_n$, $t \in T$, nechť $f(x, 1-t)= =(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$. Pak f je spojitá funkce v oboru $T_n \times T$ taková, že 1° $f(T_n\times T)=T_n$; 2° $f(x, 0)=x$ pro každé $x \in T_n$, 3° $f(T_n\times \times(1))=(c)$, kde $c=(0, 0, \ldots, 0) \in T_n$. Nechť $\mathfrak{U}$ je libovolná síť v T_n. Podle III **8** existuje zjemnění $\mathfrak{B}$ sítě $\mathfrak{U}$ a absolutní $(p, \mathfrak{U})$-cyklus $\Delta^p(\mathfrak{U})$ v (c) takové, že $\pi\Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \Delta^p(\mathfrak{U})$, kde $\pi=\mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Ježto $\Delta^p(\mathfrak{U}) \subset (c)$ a $J[\Delta^0(\mathfrak{U})]=J(\Gamma^0)=0$ pro $p=0$, zřejmě $\Delta^p(\mathfrak{U})=0$. Tedy $\pi\Gamma^p(\mathfrak{B})=0$. Avšak $\pi\Gamma^p(\mathfrak{B}) \sim \Gamma^p(\mathfrak{U})$. Tedy $\Gamma^p(\mathfrak{U}) \sim 0$.

10. *Nechť* $n=1, 2, 3, \ldots;\ p=0, 1, 2, \cdots$. *Když* $p \neq 0$ *a* $p\neq n$, *jest* $\boldsymbol{B}^p(S_n)=0$. *Když* $p=0$ *nebo* $p=n$, *jest* $\boldsymbol{B}^p(S_n)=1$.

Důkaz. I. Podle **9** a **H** IV **8** T_n je souvislé. Tedy podle **6** a **M 12** S_n je souvislé, takže podle **H** IV **8** jest $\boldsymbol{B}^0(S_n)=1$.

II. Když $p\geqq 2$, jest $\boldsymbol{B}^p(S_1)=0$ podle **8** a V **1**.

III. Podle **6**, **9** a **H** IV **8** a **9·1** jest $S_1=T'_1+T''_1$, kde množství T'_1 a T''_1 jsou uzavřená v S_1 a $\boldsymbol{B}_0{}^0(T')=\boldsymbol{B}_0{}^0(T'')=0$, $\boldsymbol{B}_0{}^0(T'T'')=1$. Tedy existuje absolutní $(0, S_1)$-cyklus Γ^0 v $T'T''$, který není ~ 0 v $T'T''$, avšak je ~ 0 i v T' i v T''. Podle II **4**, kde za R, A, B, S, p, m dosadíme resp. $S_1, T'_1, T''_1, 0, 0, 1$, existuje absolutní $(1, S_1)$-cyklus C^1, který není ~ 0. Tedy $\boldsymbol{B}^1(S_1)\geqq 1$. Kdyby bylo $\boldsymbol{B}^1(S_1)\geqq 2$, podle **6** a **9** by existoval absolutní $(1, S_1)$-cyklus D^1 takový, že, kdykoli $H_1{}^1$ a $H_2{}^1$ jsou absolutní $(1, S_1)$-cykly resp. v T' a v T'', homologie $rC^1+sD^1 \sim \sim H_1{}^1-H_2{}^1$ implikuje $r=s=0$. Tedy podle II **3**, kde za R, A, B, S, p, m dosadíme resp. $S_1, T'_1, T''_1, 0, 0, 2$, existovaly by absolutní $(0, S_1)$-cykly $\Gamma_1{}^0$ a $\Gamma_2{}^0$ takové, že 1° $\Gamma_1{}^0 \sim \Gamma_0{}^2 \sim 0$ v T'_1, 2° $r_1\Gamma_1{}^0+r_2\Gamma_2{}^0 \sim 0$ v $T'T''$ implikuje $r_1=r_2=0$. Podle **H** II **11** by bylo $J(\Gamma_1{}^0)= =J(\Gamma_2{}^0)=0$, takže by bylo $\boldsymbol{B}_0{}^0(T'T'')=0$, což je spor. Tedy $\boldsymbol{B}^1(S_1)=1$.

IV. Zbývá dokázati, že pro $p\geqq 1$ jest $\boldsymbol{B}^p(S_n)=0$ pro $p\neq n$ a $\boldsymbol{B}^n(S_n)=1$. Pro $n=1$ je tomu tak podle II a III. Nechť tedy to platí pro S_{n-1}.

V. Nechť nejprve $p\geqq 1$, $p\neq n$, $n\geqq 2$, takže $\boldsymbol{B}^{p-1}(S_{n-1})=0$ pro $p\geqq 2$ a $\boldsymbol{B}_0{}^0(S_{n-1})=0$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{B}^p(S_n)>0$. Podle **6** a **9** jest $S_n=T'_n+T''_n$, kde T'_n a T''_n jsou uzavřená v S_n a $\boldsymbol{B}^p(T'_n)= \boldsymbol{B}^p(T''_n)=0$, $\boldsymbol{B}^{p-1}(T'_nT''_n)=0$ pro $p\geqq 2$, $\boldsymbol{B}_0{}^0(T'_nT''_n)=0$. Ježto $\boldsymbol{B}^p(S_n)>0$, existuje absolutní (p, S_n)-cyklus C^p takový, že, kdykoli $H_1{}^p$ a $H_2{}^p$ jsou absolutní (p, S_n)-cykly resp. v T'_n a T''_n, homologie $rC^p \sim H_1{}^p-H_2{}^p$ implikuje $r=0$. Podle IV **3**, kde za R, A, B, S, p, m dosadíme resp. $S_n, T'_n, T''_n, 0, p-1, 1$, existuje absolutní $(p-1, S_n)$-

cyklus Γ^{p-1}, který je homologický s nulou v T'_n, nikoli však v $T'_n T''_n$. Tedy $\boldsymbol{B}^{p-1}(T'_n T''_n) \geqq 1$ a v případě $p = 1$ podle **H** II **11** také $\boldsymbol{B}_0{}^0(T'_n T''_n) \geqq 1$, což je spor.

VI. Nechť konečně $p = n \geqq 2$, takže $\boldsymbol{B}^{n-1}(S_{n-1}) = 1$. Kdyby bylo $\boldsymbol{B}^n(S_n) \neq 1$, bylo by buďto $\boldsymbol{B}^n(S_n) = 0$ nebo $\boldsymbol{B}^n(S_n) \geqq 2$. Předpokládejme nejprve, že $\boldsymbol{B}^n(S_n) \geqq 2$. Podle **6** a **9** jest $S_n = T'_n + T''_n$, kde T'_n a T''_n jsou uzavřená v S_n a $\boldsymbol{B}^n(T'_n) = \boldsymbol{B}^n(T''_n) = 0$, $\boldsymbol{B}^{n-1}(T'_n T''_n) = 1$. Ježto $\boldsymbol{B}^n(S_n) \geqq 2$, existují absolutní (n, S_n)-cykly $C_1{}^n$ a $C_2{}^n$ takové, že, kdykoli $H_1{}^n$ a $H_2{}^n$ jsou absolutní (n, S_n)-cykly resp. v T'_n a v T''_n, homologie $r_1 C_1{}^n + r_2 C_2{}^n \sim H_1{}^n - H_2{}^n$ implikuje $r_1 = r_2 = 0$. Podle IV **3**, kde za R, A, B, S, p, m dosadíme resp. $S_n, T'_n, T''_n, 0, n-1, 2$, existují absolutní $(n-1, S_n)$-cykly $\Gamma_1{}^{n-1}$, $\Gamma_2{}^{n-1}$ v $T'_n T''_n$ takové, že homologie $r_1 \Gamma_1{}^{n-1} + r_2 \Gamma_2{}^{n-1} \sim 0$ v $T'_n T''_n$ implikuje $r_1 = r_2 = 0$. Tedy $\boldsymbol{B}^{n-1}(T'_n T''_n) \geqq 2$, což je spor.

Zbývá ukázati, že $\boldsymbol{B}^n(S_n) > 0$. Ježto $\boldsymbol{B}^{n-1}(T'_n T''_n) = 1$, kdežto $\boldsymbol{B}^{n-1}(T') = \boldsymbol{B}^{n-1}(T'') = 0$, existuje absolutní $(n-1, S_n)$-cyklus Γ^{n-1} v $T'_n T''_n$, který je homologický s nulou i v T'_n i v T''_n, nikoli však v $T'_n T''_n$. Podle IV **4**, kde za R, A, B, S, p, m dosadíme resp. $S_n, T'_n, T''_n, 0, n-1, 1$, existuje absolutní (n, S_n)-cyklus C^n, který není homologický s nulou. Tedy $\boldsymbol{B}^n(S_n) > 0$.

11. *Nechť A jest uzavřené v S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť $A \neq S_n$. Pak $\boldsymbol{B}^n(A) = 0$.*

Důkaz. Ze **4** následuje snadno, že existuje v S_n uzavřené $B \supset A$ homoemorfní s T_n. Podle **9** jest $\boldsymbol{B}^n(B) = 0$. Nechť Γ^n jest absolutní (n, S_n)-cyklus v A. Máme dokázati, že $\Gamma^n \sim 0$ v A. Ježto $A \subset B$, jest $\Gamma^n \sim 0$ v B. Nechť $\mathfrak{U}$ je libovolná síť v S_n. Podle **8** existuje síť $\mathfrak{B}$ řádu $\leqq n$, která je zjemněním sítě $\mathfrak{U}$; nechť $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$, takže $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim \pi \Gamma^n(\mathfrak{B})$ v B. Ježto $\Gamma^n \sim 0$ v B, existuje $(n+1, \mathfrak{B})$-řetěz $E^{n+1}(\mathfrak{B})$ takový, že $F E^{n+1}(\mathfrak{B}) = \Gamma^n(\mathfrak{B})$. Ježto řád sítě $\mathfrak{B}$ je $\leqq n$, jest $E^{n+1}(\mathfrak{B}) = 0$. Tedy $\Gamma^n(\mathfrak{B}) = 0$, takže $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ v B.

12. *Nechť $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nechť Γ^n jest absolutní (n, S_n)-cyklus, který není homologický s nulou. Nechť $A \neq S_n$ jest uzavřené v S_n. Pak není $\Gamma^n \sim 0 \bmod A$.*

Důkaz. Nechť naopak $\Gamma^n \sim 0 \bmod A$. Pak pro každou síť $\mathfrak{U}$ existuje absolutní $(n, \mathfrak{U})$-cyklus $D^n(\mathfrak{U}) \subset A$ takový, že $\Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim D^n(\mathfrak{U})$. Nechť $\Phi(\mathfrak{U})$ je množství všech $D^n(\mathfrak{U})$. Zřejmě $\Phi(\mathfrak{U})$ jest lineární systém (v. **H** I **26**) vzhledem k modulu všech absolutních $(n, \mathfrak{U})$-cyklů v A. Mimo to zřejmě, když síť $\mathfrak{B}$ je zjemněním sítě $\mathfrak{U}$, když $\pi = \mathrm{Pr.}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$ a když $D^n(\mathfrak{B}) \in \Phi(\mathfrak{B})$, jest $\pi D^n(\mathfrak{B}) \in \Phi(\mathfrak{U})$. Tedy podle **H** IV **5** existuje absolutní (n, S_n)-cyklus C^n v A takový, že pro každou síť $\mathfrak{U}$ jest $D^n(\mathfrak{U}) \sim C^n(\mathfrak{U})$ v A, takže $\Gamma^n \sim C^n$. Podle **11** jest $C^n \sim 0$ v A. Tedy $\Gamma^n \sim 0$, což je spor.

13. *Nechť A jest uzavřené v S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; nechť $0 \neq A \neq S_n$.*

Když $n \geqq 2$ *a* $\boldsymbol{B}^{n-1}(A) < \infty$, *jest* $\boldsymbol{B}^n(S_n, A) = \boldsymbol{B}^{n-1}(A) + 1$. *Když* $n = 1$ *nebo* $\boldsymbol{B}^{n-1}(A) = \infty$, *jest* $\boldsymbol{B}^n(S_n, A) = \boldsymbol{B}^{n-1}(A)$.

Důkaz proveďme pro $n \geqq 2$, ponechávajíce čtenáři malou modifikaci nutnou v případě $n = 1$. Nechť (v. **10**) C_0^n jest absolutní (n, S_n)-cyklus, který není homologický s nulou.

I. Nechť Γ_i^{n-1} $(1 \leqq i \leqq m;\ m = 0, 1, 2, \dots)$ jsou absolutní $(n-1, S_n)$-cykly v A takové, že homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ v A implikuje $r_1 = \dots = r_m = 0$. Jako na začátku důkazu věty IV **4** vidíme, že existuje síť $\mathfrak{U}$ taková, že homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U})$ v A implikuje $r_1 = \dots = r_m = 0$. Zřejmě $\mathfrak{U}$ lze voliti tak, že $C_0^n(\mathfrak{U})$ není homologické s nulou. Nechť $\mathfrak{B}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$ normální vzhledem k n-cyklům mod A; nechť $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Podle **10** jest $\Gamma_i^{n-1} \sim 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$, takže existují $(n, \mathfrak{B})$-cykly $D_i^n(\mathfrak{B})$ mod A takové, že $D_i^n(\mathfrak{B}) \rightarrow \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{B})$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Pak $\pi D_i^n(\mathfrak{B})$ $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou podstatné $(n, \mathfrak{U})$-cykly mod A, takže (v. **H** IV **6·1**) existují (n, S_n)-cykly C_i^n mod A $(1 \leqq i \leqq m)$ takové, že $C_i^n(\mathfrak{U}) = \pi D_i^n(\mathfrak{B})$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Nechť $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod A. Pak $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod A, t. j. $r_0 C_0^n(\mathfrak{U}) + \pi \sum_{i=1}^{m} r_i D_i^n(\mathfrak{B}) \sim 0$ mod A, takže existuje $(n, \mathfrak{U})$-řetěz $E^n(\mathfrak{U}) \subset A$ takový, že $r_0 C_0^n(\mathfrak{U}) + \pi \sum_{i=1}^{m} r_i D_i^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U}) \rightarrow 0$, tedy $FE^n(\mathfrak{U}) = \pi \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{B})$, tedy $\pi \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{B}) \sim 0$ v A. Avšak $\pi \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{B}) \sim \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U})$ v A, takže $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim 0$ v A, takže $r_1 = \dots = r_m = 0$, tedy $r_0 C_0^n(\mathfrak{U}) \sim 0$, takže $r_0 = 0$. Tedy homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod A implikuje $r_0 = r_1 = \dots = r_m = 0$. Tedy $\boldsymbol{B}^n(S_n, A) \geqq m + 1$. Tedy $\boldsymbol{B}^n(S_n, A) \geqq \boldsymbol{B}^{n-1}(A) + 1$ (při čemž $\infty + 1$ znamená ∞).

II. Nechť C_i^n $(1 \leqq i \leqq m;\ m = 0, 1, 2, \dots)$ jsou (n, S_n)-cykly mod A takové, že homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod A implikuje $r_0 = r_1 = \dots = r_m = 0$. (Podle **12** není $C_0^n \sim 0$ mod A.) Nechť $\mathfrak{U}_0$ je síť taková, že homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ mod A implikuje $r_0 = r_1 = \dots = r_m = 0$. Nechť $\mathfrak{U}_1$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_0$ normální vzhledem k absolutním n-cyklům. Nechť $\mathfrak{U}_2$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_1$ normální vzhledem k absolutním $(n-1)$-cyklům v A. Nechť $\pi_{10} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$, $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{20} = \pi_{10}\pi_{21}$. Nechť $\Delta_i^{n-1}(\mathfrak{U}_2) = FC_i^n(\mathfrak{U}_2)$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Pak $\pi_{21}\Delta_i^{n-1}(\mathfrak{U}_2)$ jsou podstatné absolutní $(n-1, \mathfrak{U}_2)$-cykly v A, takže podle **H** IV **6·1** existují absolutní $(n-1, S_n)$-cykly Γ_i^{n-1} v A $(1 \leqq i \leqq m)$ takové, že $\Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) =$

$= \pi_{21} \Delta_i^{n-1}(\mathfrak{U}_2)$. Nechť $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ v A. Pak $\pi_{21} \sum_{i=1}^{m} r_i FC_i^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0$ v A, takže existuje $(n, \mathfrak{U}_1)$-řetěz $D^n(\mathfrak{U}_1) \subset A$ takový, že $D^n(\mathfrak{U}_1) - \pi_{21} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_2) \rightarrow 0$. Pak $\pi_{10} D^n(\mathfrak{U}_1) - \pi_{20} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_2)$ je podstatný absolutní $(n, \mathfrak{U}_0)$-cyklus, takže existuje absolutní (n, S_n)-cyklus E^n takový, že $E^n(\mathfrak{U}^0) = \pi_{10} D^n(\mathfrak{U}_1) - \pi_{20} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_2)$. Podle **10** jest $E^n \sim r_0 C_0^n$, tedy $E^n(\mathfrak{U}_0) \sim r_0 C_0^n(\mathfrak{U}_0) \sim r_0 \pi_{20} C_0^n(\mathfrak{U}_2)$, takže $\pi_{20} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_2) - \pi_{10} D^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0$. Ježto $D^n(\mathfrak{U}_1) \subset A$, jest $\pi_{20} \sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod A$, tedy $\sum_{i=0}^{m} r_i C^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0 \bmod A$, tedy $r_0 = r_1 = \ldots r_m = 0$. Tedy homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{n-1} \sim 0$ v A implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Tedy $B^{n-1}(A) \geqq m$. Tedy $B^{n-1}(A) + 1 \geqq B^n(S_n, A)$.

14. $\dim R_n = \dim S_n = \dim T_n = n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Důkaz. V opačném případě podle **8** by bylo $\dim S_n \leqq n - 1$, tedy podle V **1** by bylo $B^n(S_n) = 0$, což je spor podle **10.**

15. *Nechť* $n = 1, 2, 3, \ldots$; $p = 1, 2, 3, \ldots$. *Nechť* $a \in S_n$. *Pak pro* $p \neq n$ *jest* $\beta_p(a, S_n) = 0$, *kdežto* $\beta_n(a, S_n) = 1$.

Důkaz. Ze **4** vychází snadno (v. **H** IV **10** (1)), že stačí dokázati, že pro $a \in R_n$ jest $\beta_p(a, R_n) = 0$ (když $p \neq n$) resp. $= 1$ (když $p = n$).

Nechť U a V jsou okolí bodu a (v prostoru R_n) taková, že $V \subset U$ a že U jest ohraničené. Podle **D 6** a **8** existuje $\delta > 0$ takové, že množství W všech $x \in R_n$ takových, že $\varrho(a, x) < \delta$, jest okolím bodu a a že $\overline{W} \subset V$. Stačí ukázati, že $\beta_p(W, U; R_n) = \delta_{pn}$, kde δ_{ik} je Kroneckerův symbol ($= 1$ pro $i = k$, $= 0$ pro $i \neq k$).

Snadno se dokáže, že množství $\overline{W}$ jest homeomorfní s T_n a že množství $\overline{W} - W$ 1° skládá se ze dvou bodů, když $n = 1$, 2° jest homeomorfní s S_{n-1}, když $n \geqq 2$.

Nechť $m = 1, 2, 3, \ldots$. Nechť C_i^p $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou (p, R_n)-cykly mod $(R_n - U)$ takové, že homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p \sim 0 \bmod (R_n - W)$ implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Nechť H_1^p jest absolutní (p, R_n)-cyklus ve $\overline{W}$; nechť H_2^p jest (p, R_n)-cyklus mod $(R_n - U)$ v $(R_n - W)$. Nechť $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p \sim H_1^p - H_2^p \bmod (R_n - U)$. Jest $H_2^p \subset R_n - W$; H_1^p jest absolutní (p, R_n)-cyklus ve $\overline{W}$; ježto $p \geqq 1$, podle **9** jest $B^p(\overline{W}_n) = 0$; tedy $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p \sim 0 \bmod (R_n - W)$, z čehož $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Podle IV **3**, kde za R, A, B, S, p dosadíme po řadě $R_n, \overline{W}, R_n - W, R_n - U, p - 1$, existují absolutní $(p-1, R_n)$-cykly Γ_i^{p-1} $(1 \leqq i \leqq m)$ ve $\overline{W} - W$ takové, že 1° $\Gamma_i^{p-1} \sim 0$ ve $\overline{W}$ pro $1 \leqq i \leqq m$, 2° $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^{p-1} \sim 0$ ve $\overline{W} - W$

implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Je-li $p = 1$, pak $J(\Gamma_i^0) = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$ podle **H** II **11**. Tedy $m \leqq B^{p-1}(\overline{W} - W)$ a pro $p = 1$ dokonce (v. **H** IV **9·1**) $m \leqq B_0^0(\overline{W} - W)$. Podle **10** je však pro $n \geqq 2$ $B_0^0(\overline{W} - W) = 0$ a (pro $p \geqq 2$) $B^{p-1}(\overline{W} - W) = \delta_{pn}$; pro $n = 1$ je zřejmě $B_0^0(\overline{W} - W) = 1$ a (pro $p \geqq 2$) $B^{p-1}(\overline{W} - W) = 0$. Tedy $m \leqq \delta_{pn}$. Z toho následuje snadno, že $\beta_p(W, U; R_n) \leqq \delta_{pn}$. Když $p \neq n$, je $\delta_{pn} = 0$, tedy $\beta_p(W, U; R_n) = 0$.

Zbývá ukázati, že $\beta_n(W, U; R_n) \geqq 1$. Podle **9** a **10** pro $n \geqq 2$ existuje absolutní $(n-1, R_n)$-cyklus Γ^{n-1} ve $\overline{W} - W$, homologický s nulou ve $\overline{W}$, nikoli však ve $\overline{W} - W$. Totéž platí zřejmě i pro $n = 1$. Nechť $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Nechť T jest interval $0 \leqq t \leqq 1$. Ježto U jest ohraničené, existuje $r > 0$ takové, že $x \in R_n$, $\varrho(a, x) \geqq r$ implikuje $x \in R_n - U$. Pro $x \in \overline{W} - W$, $t \in T$ nechť $f(x, t) = \left[a_1 + \frac{tr + (1-t)\delta}{\delta}(x_1 - a_1), \ldots, a_n + \right.$ $\left. + \frac{tr + (1-t)\delta}{\delta}(x_n - a_n)\right]$. Pak f je spojitá funkce v oboru $(\overline{W} - W) \times T$ taková, že 1° $f[(\overline{W} - W) \times T] \subset R_n$, 2° $f(x, 0) = x$ pro každé $x \in \overline{W} - W$; 3° $f[(\overline{W} - W) \times (1)] \subset R_n - \mathfrak{U}$. Nechť $\mathfrak{U}$ je libovolná síť v R_n. Podle III **8** existuje zjemnění $\mathfrak{V}$ sítě $\mathfrak{U}$ a absolutní $(n-1, \mathfrak{V})$-cyklus $\Delta^{n-1}(\mathfrak{V}) \subset R_n - U$ takové, že $\pi\Gamma^{n-1}(\mathfrak{V}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{V})$, kde $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Ježto $\pi\Gamma^{n-1}(\mathfrak{V}) \sim$ $\sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ ve $\overline{W} - W \subset R_n - W$, $\Delta^{n-1}(\mathfrak{V}) \subset R_n - U$, jest $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim 0$ mod $(R_n - U)$ v $R_n - W$. Podle IV **4**, kde za R, A, B, S, p, m dosadíme resp. R_n, $\overline{W}$, $R_n - W$, $R_n - U$, $n-1$, m, existuje (n, R_n)-cyklus C^n mod $(R_n - U)$ takový, že, když K^n jest (n, R_n)-cyklus mod $(R_n - U)$ v $(R_n - W)$, nemůže býti $C^n \sim K^n$ mod $(R_n - U)$.

Stačí ukázati, že C^n není ~ 0 mod $(R_n - W)$. Předpokládejme opak. Pak pro každou síť $\mathfrak{U}$ v R_n existuje $(n, \mathfrak{U})$-řetěz $H^n(\mathfrak{U})$ v $R_n - W$ takový, že $C^n(\mathfrak{U}) \sim H^n(\mathfrak{U})$ mod $(R_n - U)$. Nechť $\Phi(\mathfrak{U})$ je systém všech $H^n(\mathfrak{U})$. Zřejmě pro každou síť $\mathfrak{U}$ $\Phi(\mathfrak{U})$ je lineární systém (v. **H** I **26**) vzhledem k modulu všech $(n, \mathfrak{U})$-cyklů mod $(R_n - U)$ v $R_n - W$. Když síť $\mathfrak{V}$ je zjemněním sítě $\mathfrak{U}$ a když $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$, $H^n(\mathfrak{V}) \in \Phi(\mathfrak{V})$, zřejmě $\pi H^n(\mathfrak{V}) \in \Phi(\mathfrak{U})$. Tedy podle **H** IV **5** existuje (n, R_n)-cyklus K^n mod $(R_n - U)$ v $(R_n - W)$ takový, že v každé síti $\mathfrak{U}$ jest $K^n(\mathfrak{U}) \sim H^n(\mathfrak{U})$ mod $(R_n - U)$. Pak je však $C^n \sim K^n$ mod $(R_n - U)$, což je spor.

16. Když $a \in A \subset S_n$, pravíme, že bod a je *vnitřním bodem* množství A (vzhledem k prostoru S_n), když existuje okolí U bodu a takové, že $U \subset A$. Lehko se vidí, že a je vnitřním bodem množství A, když a jen když $a \in S_n - \overline{S_n - A}$.

16·1. *Nechť A jest uzavřené v S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť $a \in A$. Pak $\beta_n(a, A) = 1$ nebo $\beta_n(a, A) = 0$ podle toho, zda bod a jest či není vnitřním bodem množství A.*

Důkaz. I. Nechť a je vnitřním bodem množství A. Podle **12** a **H** IV **10** (1) jest $\beta_n(a, A) = \beta_n(a, S_n) = 1$.

II. Nechť $a \in A \,.\, \overline{S_n - A}$. Nechť U jest okolí bodu a (v prostoru S_n).

Máme ukázati, že $\beta_n(a, U; A, S_n) = 0$, t. j. že existuje okolí $W \subset U$ bodu a takové, že $\beta_n(W, U; A, S_n) = 0$. Ježto $\beta_n(a, S_n) = 1$ (v. **15**), jest $\beta_n(a, U; S_n) \leqq 1$. Tedy existuje okolí $W \subset U$ bodu a takové, že $\beta_n(W, U; S_n) \leqq 1$. Ježto $a \in \overline{S_n - A}$, jest $W - A \neq 0$. Nechť C^n je (n, S_n)-cyklus mod $(A - W)$ v A. Máme ukázati, že $C^n \sim 0$ mod $(A - W)$ v A. Podle **10** existuje absolutní (n, S_n)-cyklus Γ^n, který není ~ 0. Podle **12** není $\Gamma^n \sim 0$ mod $(S_n - W)$. Ježto C^n a Γ^n jsou (n, S_n)-cykly mod $(S_n - W)$ a ježto $\beta_n(W, U, S_n) \leqq 1$, ne však $\Gamma^n \sim 0$ mod $(S_n - W)$, existuje $r \in \mathfrak{R}$ takové, že $C^n \sim r\Gamma^n$ mod $(S_n - W)$. Nechť $\mathfrak{U}$ je síť taková, že $\Gamma^n(\mathfrak{U})$ není ~ 0 mod $(S_n - W)$. Nechť $\mathfrak{B}$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}$ normální vzhledem k absolutním n-cyklům v $A + (S_n - W)$; nechť $\pi = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. Ježto $C^n \sim r\Gamma^n$ mod $(S_n - W)$, existuje $(n, \mathfrak{B})$-řetěz $D^n(\mathfrak{B}) \subset S_n - W$ takový, že $C^n(\mathfrak{B}) - r\Gamma^n(\mathfrak{B}) - D^n(\mathfrak{B}) \to 0$, tedy $C^n(\mathfrak{B}) - D^n(\mathfrak{B}) \to 0$. Tedy $\pi[C^n(\mathfrak{B}) - D^n(\mathfrak{B})]$ je podstatný $(n, \mathfrak{U})$-cyklus v $A + (S_n - W)$, takže podle **11** $\pi[C^n(\mathfrak{B}) - D^n(\mathfrak{B})] \sim 0$, neboť $A + (S_n - W) \neq S_n$, ježto $W - A \neq 0$. Ježto $\pi C^n(\mathfrak{B}) \sim C^n(\mathfrak{U}) \sim r\Gamma^n(\mathfrak{U})$ mod $(S_n - W)$, $D^n(\mathfrak{B}) \subset$ $\subset S_n - W$, jest $r\Gamma^n(\mathfrak{U}) \sim 0$, tedy $r = 0$, tedy $C^n \sim 0$ mod $(S_n - W)$.

Nechť $\mathfrak{U}_0$ je libovolná síť. Určeme zjemnění $\mathfrak{U}_1$ sítě $\mathfrak{U}_0$ a projekci $\pi_{10} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$, podle IV **2**, kladouce $\varphi = A$, $\psi = S_n - W$. Podle **8** existuje síť $\mathfrak{U}_2$ řádu $\leqq n$, která je zjemněním sítě $\mathfrak{U}_1$. Nechť $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{20} = \pi_{10}\pi_{21}$. Ježto $C^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0$ mod $(S_n - W)$ a ježto řád sítě $\mathfrak{U}_2$ je $\leqq n$, je $C^n(\mathfrak{U}_2) \subset S_n - W$. Avšak $C^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$. Tedy $\pi_{21} C^n(\mathfrak{U}_2)$ leží i v A i v $S_n - W$, takže $\pi_{20} C^n(\mathfrak{U}_2) \subset A - W$. Avšak $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim \pi_{20} C^n(\mathfrak{U}_2)$ mod $(A - W)$ v A. Tedy $C^n(\mathfrak{U}_0) \sim 0$ mod $(A - W)$ v A. Tedy $C^n \sim 0$ mod $(A - W)$ v A.

17. *Nechť $A \subset S_n$, $B \subset S_n$.* Nechť f je homeomorfní zobrazení množství A na množství B. Nechť $a \in A$, $b = f(a)$. Pak a je vnitřním bodem množství B.*

Důkaz. Když množství A (tedy také B) je kompaktní, pak podle **16** (v. též II **2**) a je vnitřním bodem množství A, když a jen když $\beta_n(a, A) = 1$. Zřejmě však $\beta_n(a, A) = \beta_n(b, B)$. Když množství A je jakékoli, když a je vnitřním bodem množství A, existuje kompaktní $C \subset A$ takové, že a je vnitřním bodem množství C, takže b je vnitřním bodem množství $f(C) \subset B$ a tedy i vnitřním bodem množství B.

18. *Nechť $a \in S_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť $p = 0, 1, 2, \ldots$. Pak $\gamma_p(a, S_n) = 0$.*

Důkaz. Stačí dokázati (v. **4** a **H** IV **14** (1)), že pro $a \in R_n$ jest $\gamma_p(a, R_n) = 0$. Nechť U a V jsou okolí bodu a taková, že $V \subset U$. Zřejmě existuje okolí $W \subset V$ bodu a takové, že $\overline{W}$ je homeomorfní s T_n. Stačí dokázati, že $\gamma_p(W, U; R_n) = 0$. Neboť C^p jest absolutní (p, S_n)-cyklus ve $\overline{W}$; když $p = 0$, nechť $J(C^0) = 0$. Máme dokázati, že $C^p \sim 0$ v $\overline{U}$; podle **9** je dokonce $C^p \sim 0$ ve $\overline{W}$.

---

* Zřejmě věta **17** zůstane v platnosti, když prostor S_n nahradíme prostorem R_n.

19. *Nechť A jest uzavřené v S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť $a \in A$. Pak $\gamma_n(a, A) = 0$.*

Důkaz. Nechť U jest okolí bodu a (v prostoru S_n). Podle **18** jest $\gamma_n(a, U; S_n) = 0$, takže existuje okolí $V \subset U$ bodu a takové, že $\gamma_n(V, U; S_n) = 0$. Stačí ukázati, že $\gamma_n(V, U; A, S_n) = 0$. Nechť C^n je absolutní (n, S_n)-cyklus v $A\overline{V}$. Máme dokázati, že $C^n \sim 0$ v $A\overline{U}$. Ježto $\gamma_n(V, U; A, S_n) = 0$, jest $C^n \sim 0$ v $\overline{U}$. Nechť $\mathfrak{U}$ je libovolná síť. Podle **8** existuje síť $\mathfrak{V}$ řádu $\leqq n$, která je zjemněním sítě $\mathfrak{U}$; nechť $\pi = \text{Pr.}(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$. Ježto $C^n \sim 0$ v $\overline{U}$, existuje $(n+1, \mathfrak{V})$-řetěz $D^{n+1}(\mathfrak{V}) \rightarrow C^n(\mathfrak{V})$. Ježto $\mathfrak{V}$ má řád $\leqq n$, jest $D^{n+1}(\mathfrak{V}) = 0$, tedy $C^n(\mathfrak{V}) = 0$. Avšak $\pi\, C^n(\mathfrak{V}) \sim$ $\sim C^n(\mathfrak{U})$ v $A\overline{V}$, tedy $C^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ v $A\overline{V} \subset A\overline{U}$.

VII. Rozklad prostoru S_n uzavřeným množstvím.

1. *Nechť A a B jsou uzavřená v S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť G jest otevřené v S_n. Nechť $0 \neq G \subset S_n - A$. Nechť $\overline{G} - G \subset A$. Nechť $G - B \neq 0$. Pak existuje (n, S_n)-cyklus* mod *A v $(G + A)$, který není homologický s nulou* mod *$(A + B)$.*

Důkaz. Podle VI **10** existuje absolutní (n, S_n)-cyklus Γ^n, který není ~ 0. Ježto $AG = 0 \neq G - B$, jest $A + B + (S_n - G) \neq S_n$. Podle VI **12** tedy není $\Gamma^n \sim 0$ mod $[A + B + (S_n - G)]$. Tedy existuje síť $\mathfrak{U}_0$ taková, že $\Gamma^n(\mathfrak{U}_0)$ není ~ 0 mod $[A + B + (S_n - G)]$. Nechť $\mathfrak{U}_1$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_0$ normální vzhledem k n-cyklům mod A v $(G + A)$; nechť $\pi_{10} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$. Určeme zjemnění $\mathfrak{U}_2$ sítě $\mathfrak{U}_1$ a projekci $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$ podle IV **2**, kladouce $\varphi = G + A$, $\psi = S_n - G$. [Ježto $\overline{G} - G \subset A$, $G + A$ jest uzavřené v S_n.] Nechť $\pi_{20} = \pi_{10}\,\pi_{21}$. Ježto $S_n = (G + A) + (S_n - G)$, mohu položiti $\Gamma^n(\mathfrak{U}_2) = C^n(\mathfrak{U}_2) - D^n(\mathfrak{U}_2)$, kde $C^n(\mathfrak{U}_2) \subset G + A$, $D^n(\mathfrak{U}_2) \subset S_n - G$. Ježto $F\Gamma^n(\mathfrak{U}_2) = 0$, $F C^n(\mathfrak{U}_2)$ leží i v $G + A$ i v $S_n - G$. Tedy $F\pi_{21}\, C^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$. Tedy $\pi_{20}\, C^n(\mathfrak{U}_2)$ je podstatný $(n, \mathfrak{U}_0)$-cyklus mod A v $(G + A)$, takže (**H** IV **6·1**) existuje (n, S_n)-cyklus E^n mod A v $G + A$ takový, že $E^n(\mathfrak{U}_0) = \pi_{20}\, C^n(\mathfrak{U}_2)$. Nechť $E^n \sim 0$ mod $(A + B)$. Pak $\Gamma^n(\mathfrak{U}_0) \sim \pi_{20}\, \Gamma^n(\mathfrak{U}_2) \sim \pi_{20}\, [C^n(\mathfrak{U}_2) -$ $- D^n(\mathfrak{U}_2)] \sim E^n(\mathfrak{U}_0) - \pi_{20} D^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0$ mod $[A + B + (S_n - G)]$, což je spor.

2. *Nechť A jest uzavřené v S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť G je souvislé a otevřené v S_n. Nechť $0 \neq G \subset S_n - A$. Nechť $\overline{G} - G \subset A$. Pak $\boldsymbol{B}^n(G + A, A) = 1$.*

Důkaz. Podle **1** (kde položíme $B = 0$) jest $\boldsymbol{B}^n(G + A, A) \geqq 1$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{B}^n(G + A, A) \geqq 2$. Pak existují (n, S_n)-cykly $C_1{}^n$ a $C_2{}^n$ mod A v $(G + A)$ takové, že $r_1 C_1{}^n + r_2 C_2{}^n \sim 0$ mod A v $(G + A)$ implikuje $r_1 = r_2 = 0$. Zvolme bod $a \in G$; pak G jest okolí bodu a. Podle VI **16·1** jest $\beta_n(a, G + A) = 1$, takže $\beta_n(a, G; G + A, S_n) \leqq 1$. Tedy existuje okolí $U \subset G$ bodu a takové, že $\beta_n(U, G; G + A, S_n) \leqq 1$. Ježto $C_1{}^n$ a $C_2{}^n$ jsou (n, S_n)-cykly mod $A = (G + A) - G$ v $(G + A)$, existují $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$ ($r_1 \neq 0$ nebo $r_2 \neq 0$) taková, že $C^n = r_1 C_1^n + r_2 C_2^n \sim 0$ mod $(G + A - U)$ v $(G + A)$. Podle V **4** existuje v S_n uzavřené T takové, že 1° $A \subset T \subset G + A$; 2° existuje (n, S_n)-cyklus E^n mod A v T homologický s C^n mod A v $(G + A)$; když T' jest uzavřené v S_n, když $A \subset T' \subset T, T' \neq T$, pak C^n není homologické mod A v $(G + A)$ s žádným (n, S_n)-cyklem mod A v T'. Kdyby bylo $T = A$, bylo by $C^n \sim 0$ mod A v $(G + A)$, což je spor. Ježto $C^n \sim 0$ mod $(G + A - U)$ v $(G+A)$, pro každou síť $\mathfrak{U}$ existuje $(n, \mathfrak{U})$-cyklus $D^n(\mathfrak{U})$ mod A v $(G+A-U)$ takový, že $C^n(\mathfrak{U}) \sim D^n(\mathfrak{U})$ mod A v $(G + A)$. Podle **H** IV **5** soudíme snadno, že lze řetězy $D^n(\mathfrak{U})$ voliti tak, že definují (n, S_n)-cyklus D^n mod A v $(G + A - U)$. Ježto $C^n \sim D^n$ mod A v $(G + A)$, jest $T \neq G + A$.

Jest $G = TG + (G - T)$ se sčítanci různými od nuly. Ježto G je souvislé a TG jest uzavřené v G, $G - T$ není uzavřené v G, takže (v. **M 6**) existuje bod $b \in G T . \overline{G - T} \subset T . \overline{S_n - T}$. Podle VI **16·1** jest $\beta_n(b, T) = 0$, tedy $\beta_n(b, G; T, S_n) = 0$, takže existuje okolí $V \subset G$ bodu a takové, že $\beta_n(V, G; T, S_n) = 0$. Ježto E^n je (n, S_n)-cyklus mod $A \subset T - G$ v T, jest $E^n \sim 0$ mod $(T - V)$ v T. Tedy pro každou síť $\mathfrak{U}$ existuje $(n, \mathfrak{U})$-cyklus $H^n(\mathfrak{U})$ mod A v $(T - V)$ takový, že $E^n(\mathfrak{U}) \sim H^n(\mathfrak{U})$ mod A v T. Podle **H** IV **5** můžeme řetězy $H^n(\mathfrak{U})$ voliti tak, že definují (n, S_n)-cyklus H^n mod A v T. Jest $E^n \sim H^n$ mod A v T, $E^n \sim C^n$ mod A v $(G + A)$, tedy $H^n \sim C^n$ mod A v $(G + A)$. Podle definice T je tedy $T - V = T$, t. j. $TV = 0$, což je spor, neboť $b \in TV$.

3. *Nechť A jest uzavřené v S_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. Nechť $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ s oddělenými sčítanci. Nechť W jest otevřené v S_n. Nechť $WP_i \neq 0$ pro $1 \leqq i \leqq m$. Pak existují (n, S_n)-cykly C_i^n mod A $(1 \leqq i \leqq m)$ takové, že homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$ implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$.*

Důkaz. Množství P_i jsou (**M 7**) otevřená v $S_n - A$, tedy (**M 5**) i v S_n. Množství P_i jsou také uzavřená v $S_n - A$, takže (v. **M 6**) $\overline{P_i} - P_i \subset A$. Tedy podle **1** (kde položíme $B = S_n - WP_i$) existuje pro $1 \leqq i \leqq m$ (n, S^n)-cyklus C_i^n mod A v $(P_i + A)$, který není ~ 0 mod $[A + (S_n - WP_i)]$. Nechť $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$ a nechť na př. $r_1 \neq 0$. Ježto pro $2 \leqq i \leqq m$ jest $C_i^n \subset P_i + A \subset S^n - WP_1$, jest $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim$ mod $0 [A + (S_n - WP_1)]$, $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - WP_1)]$, tedy $r_1 C_1^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - WP_1)]$, tedy $r_1 = 0$, což je spor.

4. *Nechť A jest uzavřené v S_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. Nechť W jest otevřené v S_n. Nechť $m = 1, 2, 3, \cdots$. Nechť C_i^n $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou (n, S_n)-cykly* mod A. *Nechť homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ m od$[A + (S_n - W)]$ implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Pak existuje rozklad $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ s oddělenými sčítanci takový, že $WP_i \neq 0$ pro $1 \leqq i \leqq m$.*

D ů k a z. Podle VI **18** a **H** IV **18·2** prostor S_n je lokálně souvislý. Tedy podle **H** IV **18·3** komponenty množství $S_n - A$ jsou otevřené v S_n. Nechť μ ($= 1, 2, 3, \ldots$ nebo $= \infty$) je počet těch komponent množství $S_n - A$, které protnou W. Je-li $\mu \geqq m$, nechť P_i $(1 \leqq i \leqq m-1)$ jsou mezi sebou různé komponenty množství $S_n - A$ protínající W a nechť P_m je součet všech ostatních komponent množství $S_n - A$. Pak $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ se sčítanci otevřenými a vzájemně se neprotínajícími, tedy oddělenými.

Nechť tedy $\mu < m$. Nechť P_i $(1 \leqq i \leqq \mu)$ jsou ty komponenty množství $S_n - A$, které protnou W. Nechť P_0 je součet ostatních komponent množství $S_n - A$. Pak $S_n - A = \sum_{k=0}^{\mu} P_k$ s oddělenými sčítanci a $WP_0 = 0$, kdežto $WP_k \neq 0$ pro $1 \leqq k \leqq \mu$. Množství P_k jsou (**M 7**) uzavřená v $S_n - A$, takže $\overline{P_k} - P_k \subset A$ (v. **M 6**) pro $0 \leqq k \leqq \mu$.

Jako na počátku důkazu věty IV **4** vidíme, že existuje síť $\mathfrak{U}_0$ taková, že homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod [A + (S_n - W)]$ implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Nechť (v. **H** III **9·3** a **10**) $\mathfrak{U}_1$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_0$ normální vzhledem k n-cyklům mod A v $P_k + A$ současně pro všecka k, $0 \leqq \mu \leqq k$. Určeme postupně zjemnění $\mathfrak{U}_{k+2}$ sítě $\mathfrak{U}_{k+1}$ $(0 \leqq k \leqq \mu)$ podle IV **2**, kladouce $\varphi = P_k + A$, $\psi = \sum_{\substack{h=0\\ h \neq k}}^{\mu} (P_h + A)$. Nechť $\pi_{10} = \Pr.(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_0)$, $\pi_{21} = \Pr.(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \ldots, \pi_{20} = \pi_{10}\pi_{21}, \ldots$.

Pro $1 \leqq k \leqq \mu$ množství P_k jest otevřené a souvislé a jest $A\overline{P_k} = \overline{P_k} - P_k$. Tedy podle **2** jest $\boldsymbol{B}^n(P_k + A, A) = 1$. Tedy pro $1 \leqq k \leqq \mu$ existuje (n, S_n)-cyklus E_k^n mod A v $P_k + A$, který není ~ 0 mod A v $P_k + A$. Zřejmě $S_n = \sum_{k=0}^{\mu} (P_k + A)$ se sčítanci uzavřenými v S_n. Tedy pro $1 \leqq i \leqq m$ lze položiti $C_i^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) = \sum_{k=0}^{\mu} C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2})$, kde $C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset P_k + A$. Jest $F\,C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset P_k + A$, $F\,C_i^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset A$. Tedy $F\,C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset \sum_{\substack{h=0\\ h \neq k}}^{\mu} (P_h + A) = B_k$, takže $\pi_{\mu+2, k+2}\, F\,C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2})$ leží i v $P_k + A$ i v B_k, takže $\pi_{\mu+2, k+1}\, F\,C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset (P_k + A)\, B_k = A$. Tedy $\pi_{\mu+2, 1}\, C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2})$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 0 \leqq k \leqq \mu)$ jsou $(n, \mathfrak{U}_1)$-cykly mod A v $P_k + A$, takže podle **H** IV **6** existují (n, S_n)-cykly D_{ik}^n mod A v $P_k + A$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 0 \leqq k \leqq \mu)$ takové, že $D_{ik}^n(\mathfrak{U}_0) = \pi_{\mu+2, 0}\, C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2})$. Pro $1 \leqq \mu \leqq k$ jest $\boldsymbol{B}^n(P_k + A, A) = 0$, takže pro $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq k \leqq \mu$ existují čísla $s_{ik} \in \mathfrak{R}$ taková, že $\pi_{\mu+2, 0}\, C_{ik}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \sim s_{ik} E_k^n(\mathfrak{U}_0)$ mod A. Tedy při libovolných $r_1, \ldots, r_m \in \mathfrak{R}$ jest

$$\pi_{\mu+2, 0} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \sim \pi_{\mu+2, 0} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i0}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) + \sum_{k=1}^{\mu} t_k E_k^n(\mathfrak{U}_0) \bmod A, \tag{1}$$

kde

$$t_k = \sum_{i=1}^{m} r_i s_{ik} \text{ pro } 1 \leqq i \leqq \mu.$$

Ježto $\mu < m$, můžeme čísla $r_1, \ldots, r_m$ určiti tak, že $t_1 = \ldots = t_\mu = 0$, avšak nikoli $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Ježto $C_{i0}^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \subset P_0 + A \subset A + (S^n - W)$, podle (1) bude

$$\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_0) \sim \pi_{\mu+2, 0} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_{\mu+2}) \sim 0 \bmod A + (S_n - W),$$

což je spor.

5. *Nechť A jest uzavřené v S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť $0 \neq A \neq {}_nS$ Když $n \geqq 2$ a $B^{n-1}(A) < \infty$, pak množství $S_n - A$ má $B^{n-1}(A) + 1$ komponent. Když $n = 1$ nebo $B^{n-1}(A) = \infty$, pak množství $S_n - A$ má $B^{n-1}(A)$ komponent.*

Důkaz. Podle VI **13** máme ukázati, že počet komponent množství $S_n - A$ je roven $B^n(S_n, A)$. Nechť $m = 1, 2, 3, \cdots$. Máme ukázati, že počet komponent množství $S_n - A$ jest $\geqq m$, když a jen když $B^n(S_n, A) \geqq m$. Když $S_n - A$ má aspoň m komponent, podle **M 18** a **19** jest $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$; podle **3** (kde položíme $W = S_n$), jest $B^n(S_n, A) \geqq m$. Když $B^n(S_n, A) \geqq m$, pak podle **4** (kde položíme $W = S_n$), jest $S_n - A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ s oddělenými sčítanci, takže $S_n - A$ má aspoň m komponent.

VIII. Lokální rozklad prostoru S_n uzavřeným množstvím.

1. Nechť R je prostor. Nechť A jest uzavřené v R. Nechť $a \in A$. Litery U, V znamenají okolí bodu a v prostoru R. Když a je vnitřním bodem množství A vzhledem k R (v. VI **16**), klademe $\alpha(a, A, R) = 0$. Nechť tedy $a \in A \,.\, \overline{R - A}$.

Při daném U nechť $\alpha(a, U; A, R) = B_0^0(V - A)$, kde $V \subset U$ je voleno tak, aby $B_0^0(V - A)$ bylo co nejmenší. Tedy (v. **H** IV **8** a **9·1**), existuje-li $V \subset U$ takové, že množství $V - A$ má konečný počet komponent a volíme-li $V \subset U$ tak, aby tento počet byl co nejmenší, jest $\alpha(a, U; A, R) + 1$ rovné počtu komponent množství $V - A$; když pro každé $V \subset U$ množství $V - A$ má nekonečný počet komponent, jest $\alpha(a, U; A, R) = \infty$.

Když $V \subset U$, zřejmě $\alpha(a, V; A, R) \geqq \alpha(a, U; A, R)$. Z toho následuje snadno, že jsou tři možné případy:

I. Existuje m $(= 0, 1, 2, \ldots)$ a U takové, že $\alpha(a, V; A, R) = m$ pro všecka $V \subset U$. Tu klademe $\alpha(a, A, R) = m$ a pravíme, že *A rozkládá R lokálně v bodě a na $m + 1$ částí.* Když $m = 0$, pravíme, že *A v bodě a nerozkládá lokálně prostor R.*

II. Číslo $\alpha(a, V; A, R)$ je konečné pro všecka V, ale při libovolně daném $m\,(=0, 1, 2, \ldots)$ existuje U takové, že $\alpha\,(a, V;\, A, R) > m$ pro všecka $V \subset U$. Tu klademe $\alpha\,(a, A, R) = \omega$ a pravíme, že *A rozkládá R lokálně v bodě a na rostoucí počet částí.*

III. Existuje U takové, že $\alpha\,(a, V;\, A, R) = \infty$ pro všecka $V \subset U$. Tu klademe $\alpha\,(a, A, R) = \infty$ a pravíme, že *A rozkládá R lokálně v bodě a na nekonečně mnoho částí.*

Symbol ω považujeme za menší než symbol ∞, ale za větší, než každé $m\,(=0, 1, 2, \ldots)$.

2. *Nechť R je lokálně souvislý prostor. Nechť A jest uzavřené v R. Nechť $a \in A \,.\, \overline{R - A}$. Nechť U jest okolí bodu a. Nechť $m = 0, 1, 2, \cdots$. Jest $\alpha\,(a, U;\, A, R) \geqq m$, když a jen když každému okolí $V \subset U$ bodu a lze přiřaditi rozklad $U - A = \sum\limits_{i=0}^{m} P_i$ s oddělenými sčítanci takový, že $V P_i \neq 0$ pro $0 \leqq i \leqq m$.*

Důkaz. I. Nechť $\alpha\,(a, U;\, A, R) \geqq m$. Nechť $V \subset U$ jest okolí bodu a. Nechť μ je počet těch komponent množství $U - A$, které protnou V. Je-li $\mu \leqq m$, nechť $K_k\,(1 \leqq k \leqq \mu)$ jsou všecky ty komponenty a nechť $W = \sum\limits_{k=1}^{\mu} K_k$. Jest $V - A \subset W \subset U$; W jest otevřené podle **H** IV **18·3**. Tedy $a \in V + W \subset U$, takže $(V + W) - A$ má aspoň $m + 1$ komponent. To je spor, neboť $(V + W) - A = W$ má $\mu \leqq m$ komponent. Tedy $\mu \geqq m + 1$. Nechť $P_1, \ldots, P_m$ jsou různé komponenty množství $U - A$ protínající V a nechť P_0 je součet ostatních komponent množství $U - A$. Pak $U - A = \sum\limits_{i=0}^{m} P_i$ s oddělenými sčítanci (v. **H** IV **18·3**) a $V P_i \neq 0$ pro $0 \leqq i \leqq m$.

II. Nechť každému okolí $V \subset U$ bodu a lze přiřaditi rozklad $U - A = \sum\limits_{i=0}^{m} P_i$ s oddělenými sčítanci takový, že $V P_i \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Pak každé P_i obsahuje (v. **M 11**) aspoň jednu komponentu množství $V - A$. Tedy $V - A$ má aspoň $m + 1$ komponent. Tedy $\alpha\,(a, U;\, A, R) \geqq m$.

3. *Nechť A jest uzavřené v S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; nechť $a \in A$. Pak jest $\alpha\,(a, A;\, S_n) = \beta_{n-1}\,(a, A)$.*

Důkaz. Když a je vnitřním bodem množství A, jest $\alpha\,(a, A;\, S_n) = 0$; avšak podle VI **10** a **H** IV **10** (1) jest $\beta_{n-1}\,(a, A) = \beta_{n-1}\,(a, S_n) = 0$. Nechť tedy $a \in A \,.\, \overline{S_n - A}$.

I. Dokažme, že $\alpha\,(a, A, S_n) \leqq \beta_{n-1}\,(a, A)$. Nechť U jest okolí bodu a; nechť $\alpha\,(a, U;\, A, S_n) \geqq m\,(= 1, 2, 3, \ldots)$. Stačí dokázati, že $\beta_{n-1}\,(V, U;\, A, S_n) \geqq m$ pro každé okolí $V \subset U$ bodu a. Podle VI **10** jest $\beta_n\,(a, V;\, S_n) \leqq 1$; tedy existuje okolí $W \subset V$ bodu a takové, že $\beta_n\,(W, V, S_n) \leqq 1$. Ježto $a \in \overline{S_n - A}$, jest $W - A \neq 0$. Podle VI **10** a **12** existuje absolutní (n, S_n)-cyklus Γ^n, který není $\sim 0 \bmod (S_n - W)$. Prostor S_n je lokálně souvislý podle VI **7** a **18** a **H** IV **18·2**. Tedy podle **2** existuje rozklad $U - A = \sum\limits_{i=0}^{m} P_i$

s oddělenými sčítanci takový, že $WP_i \neq 0$ pro $0 \leqq i \leqq m$. Podle VII **3** (kde místo A vezmeme $A + (S_n - U)$) existují (n, S_n)-cykly C_i^n mod $[A + (S_n - U)]$ $(0 \leqq i \leqq m)$ takové, že homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$ implikuje $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$. Tedy existuje síť $\mathfrak{U}_1$ taková, že není $\Gamma^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $(S_n - W)$ a že homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$ implikuje $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$. Nechť $\mathfrak{U}_2$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_1$ normální vzhledem k n-cyklům mod $(S_n - V)$. Nechť $\mathfrak{U}_3$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_2$ normální vzhledem k $(n-1)$-cyklům mod $(A - U)$ v A. Určeme zjemnění $\mathfrak{U}_4$ sítě $\mathfrak{U}_3$ a projekci $\pi_{43} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$ podle IV **2**, kladouce $\varphi = A$, $\psi = R - U$. Nechť $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}, \ldots$.

Ježto C_i^n jsou (n, S_n)-cykly mod $[A + (S_n - U)]$, existují $(n-1, \mathfrak{U}_4)$-řetězy $D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$, $E_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset S_n - U$ takové, že $C_i^n(\mathfrak{U}_4) \rightarrow D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) - E_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ $(0 \leqq i \leqq m)$. Jest $FD_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$, $FD_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) = FE_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset S_n - U$, tedy $F\pi_{43} D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A - U$. Tedy $\pi_{42} D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ jsou podstatné $(n-1, \mathfrak{U}_2)$-cykly mod $(A - U)$ v A. Tedy (**H** IV **5**) existují $(n-1, S_n)$-cykly G_i^{n-1} mod $(A - U)$ v A $(0 \leqq i \leqq m)$ takové, že $C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_2) = \pi_{42} D^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$. Máme dokázati, že homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i G_i^{n-1} \sim 0$ mod $(A - V)$ v A jednoznačně určuje poměry $r_0 : r_1 : \ldots : r_m$. Když $\sum_{i=0}^{m} r_i G_i^{n-1} \sim 0$ mod $(A - V)$ v A, jest $\pi_{42} \sum_{i=0}^{m} r_i D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0$ mod $(A - V)$ v A. Tedy existuje $(n, \mathfrak{U}_2)$-řetěz $H^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$, $H^n(\mathfrak{U}_2) \rightarrow \pi_{42} \sum_{i=0}^{m} r_i D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ mod $(A - V)$. Ježto $C_i^n(\mathfrak{U}_4) \rightarrow D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ mod $(R - U)$, jest $\pi_{42} \sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_4) - H^n(\mathfrak{U}_2) \rightarrow 0$ mod $(R - V)$. Tedy (v. **H** IV **5**) existuje (n, S_n)-cyklus K^n mod $(R - V)$ takový, že $K^n(\mathfrak{U}_1) = \pi_{41} \sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21} H^n(\mathfrak{U}_2)$. Ježto $\beta_n(W, V, S_n) \leqq 1$, existuje $s \in \mathfrak{R}$ takové, že $K^n \sim s\Gamma^n$ mod $(S_n - W)$. Tedy $\pi_{41} \sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21} H^n(\mathfrak{U}_2) - s\Gamma^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $(S_n - W)$. Ježto $\pi_{41} C_i^n(\mathfrak{U}_4) \sim C_i^n(\mathfrak{U}_1)$ mod $[A + (S_n - W)]$, $H^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$, jest $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim s\Gamma^n(\mathfrak{U}_1)$ mod $[A + (S_n - W)]$. Ježto homologie $\sum_{i=0}^{m} r_i C_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$, jsou poměry $r_0 : r_1 : \ldots r_m$ jednoznačně určeny.

II. Dokažme, že $\alpha(a, A, S_n) \geqq \beta_{n-1}(a, A)$. Nechť U jest okolí bodu a; nechť $\beta_{n-1}(a, U; A, S_n) \geqq m$ $(= 1, 2, 3, \ldots)$. Stačí dokázati, že existuje okolí $V \subset U$ bodu a takové, že $\alpha(a, V; A, S_n) \geqq m$. Podle VI **10** jest $\beta_{n-1}(a, U; S_n) = 0$, takže V lze voliti tak, že $\beta_{n-1}(V, U; S_n) = 0$. Nechť $W \subset V$ jest okolí bodu a. Podle VI **10** a **12** existuje absolutní (n, S_n)-cyklus Γ^n, který není ~ 0 mod $[A + (S_n - W)]$. Podle **2** máme dokázati, že existuje rozklad $V - A = \sum_{i=0}^{m} P_i$ s oddělenými sčítanci, $WP_i \neq 0$. Podle VII **4** (kde místo A vezmeme $A + (S_n - V)$) stačí ukázati, že existují (n, S_n)-cykly C_i^n mod A $(1 \leqq i \leqq m)$ takové, že homologie $r_0 \Gamma^n + \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$ implikuje $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$. Ježto $\beta_{n-1}(a, U; A, S_n) \geqq m$, jest $\beta_{n-1}(W, U; A, S_n) \geqq m$. Tedy existují $(n-1, S_n)$-cykly G_i^{n-1} mod $(A - U)$ v A $(1 \leqq i \leqq m)$ takové, že homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1} \sim 0$ mod $(A - W)$ v A implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Nechť $\mathfrak{U}_1$ je síť taková, že homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $(A - W)$ v A implikuje $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Určeme zjemnění $\mathfrak{U}_2$ sítě $\mathfrak{U}_1$ a projekci $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, kladouce $\varphi = A$, $\psi = S_n - W$. Nechť $\mathfrak{U}_3$ je zjemnění sítě $\mathfrak{U}_2$ normální vzhledem k n-cyklům mod $[A + (S_n - V)]$. Nechť $\pi_{32} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21} \pi_{32}$.

Ježto G_i^{n-1} jsou $(n-1, S_n)$-cykly mod $(S_n - U)$ a ježto $\beta_{n-1}(V, U; S_n) = 0$, existují $(n, \mathfrak{U}_3)$-řetězy $D_i^n(\mathfrak{U}_3) \rightarrow G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$ mod $(S_n - V)$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Ježto $G_i^{n-1} \subset A$, podle **H** IV **5** existují (n, S_n)-cykly C_i^n mod $[A + (S_n - V)]$ $(1 \leqq i \leqq m)$ takové, že $C_i^n(\mathfrak{U}_2) = \pi_{32} D_i^n(\mathfrak{U}_3)$. Nechť $r_0 \Gamma^n + \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$. (Máme dokázati, že $r_0 = r_1 = \ldots = r_m = 0$.) Pak existuje $(n, \mathfrak{U}_2)$-řetěz $H^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$ takový, že $r_0 \Gamma^n(\mathfrak{U}_2) + \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i D_i^n(\mathfrak{U}_3) - H^n(\mathfrak{U}_2) \rightarrow 0$ mod $(S_n - W)$. Řetěz $\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) - F H^n(\mathfrak{U}_2)$ leží tedy v $(S_n - W)$; týž řetěz leží však v A. Tedy $\pi_{21} H^n(\mathfrak{U}_2) \rightarrow \pi_{31} \sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$ mod $(A - W)$, tedy $\sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim \pi_{31} \sum_{i=1}^{m} r_i G_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ mod $(A - W)$ v A, takže $r_1 = \ldots = r_m = 0$. Tedy $r_0 \Gamma^n \sim 0$ mod $[A + (S_n - W)]$, takže také $r_0 = 0$.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE L'HOMOLOGIE À LA THÉORIE DE LA CONNEXITÉ. I.

PAR

EDUARD ČECH.

(RÉSUMÉ.)

Au Mémoire *Introduction à la théorie de l'homologie* (ces Publications, n° 184) j'ai donné un exposé élémentaire de la théorie de l'homologie dans les espaces topologiques. J'y ai omis toutes les applications. Ce sont les applications à la théorie de la connexité dont je m'occupe dans le Mémoire présent, ainsi que dans un autre qui en fera la suite.

Au Chap. I—III je rappelle des faits connus sur les espaces métriques et compacts ainsi que sur le produit combinatoire de deux espaces. Dans III **8**, je démontre que, si le sous-ensemble fermé $S(t)$ d'un espace métrique et compact R varie d'une manière continue avec $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$, chaque cycle dans $S(0)$ est homologue dans $\Sigma S(t)\,(0 \leqq t \leqq 1)$ à un cycle dans $S(1)$. Ce théorème, d'ailleurs très simple, me permet plus tard d'éviter complètement l'usage des polyèdres.

Le Chap. IV est consacré au *théorèmes d'addition* (au sens de M. Alexandroff). On y suppose que $R = A + B$, où R est un espace topologique normal et les ensembles A et B sont fermés dans R. Il s'agit de trois couples de théorèmes. Dans le premier couple, on compare les $(p+1)$-cycles dans R avec les p-cycles dans AB. J'ai donné ces théorèmes déjà [mais sans les formuler explicitement] au Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque* (Fund. Math. XIX, formule (1) au bas de la page 176). La présente démonstration est nouvelle et plus simple; en outre, j'avais supposé l. c. que R soit un espace *complètement* normal, tandisque cette fois je suppose seulement que R soit *normal.* Le deuxième et le troisième couple de théorèmes d'addition donnent des résultats analogues pour les *nombres de Betti locaux* et pour *l'acyclicité locale* des espaces $A+B$, A, B et AB.

Au Chap. V je démontre que, dans un espace R métrique et compact à n dimensions, on peut attacher à chaque n-cycle C^n un sous-ensemble fermé T_0 tel que C^n est homologue à un n-cycle situé dans $T \subset R$ si et seulement si $T \supset T_0$.

Au Chap. VI je considère l'espace euclidien à n dimensions R_n, l'espace sphérique à n dimensions S_n, et la cellule à n dimensions T_n. Je détermine les nombres de Betti et les nombres de Betti locaux de ces ensembles, en m'appuyant sur les théorèmes d'addition; je ne fais aucun usage de la structure polyédrale des ensembles considérés. Comme application, je détermine la dimension de R_n et je prouve l'invariance topologique des points intérieurs.

Au Chap. VII je démontre que, A étant un sous-ensemble fermé de S_n, le nombre des composantes de $S_n - A$ est égal au $(n-1)^{\text{ème}}$ nombre de Betti de A augmenté d'une unité. La présente démonstration a l'avantage de ne faire usage que des propriétés de S_n qui semblent indispensables pour la validité du théorème de manière que, en réalité, je prouve un théorème beaucoup plus général, sans le formuler explicitement. Je reviendrai ailleurs sur ce point.

Au Chap. VIII je démontre que, a étant un point d'un sous-ensemble fermé A de S_n, A coupe localement l'espace S_n au point a en $\beta_{n-1}(a, A) + 1$ régions (au sens de M. Zarankiewicz), où $\beta_{n-1}(a, A)$ désigne le $n^{\text{ème}}$ nombre de Betti local de A au point a.