Eduard Čech

Géométrie projective des bandes d'éléments de contact de troisieme ordre

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) l_1 (1925), 200-204

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500896

stallini, permiani, triasici e liasici, se non pure giuresi, senza ordine riconoscibile?

2° - Poichè il capovolgimento della serie deve implicare almeno un rovesciamento completo di piega, che deve estendersi almeno una diecina di chilometri, si tratta senza alcun dubbio di un grande carreggiamento. Orbene, dove è la zona delle radici, ossia dove era il bacino in cui la potente serie secondaria si è originariamente depositata? Quale è stata la direzione del movimento? Su quale substratum si rovesciò e venne carreggiata la piega coricata?

3° - Il modo di appoggiarsi dell'Eocene in trasgressione contro le testate delle dolomie del Trias, sul Retico e sul Lias, tra il versante occidentale del M. Castellermo e il M. Torretta e la sovrapposizione dell'Eocene sulle breccie al Colle del Prion sembrerebbero dimostrare che questo carreggiamento sia stato anteriore all'Eocene; ma come potrebbe ciò conciliarsi coll'età certamente post-eocenica dei vicini carreggiamenti del M. Armetta e dell'Antoroto?

Solo il rilevamento completo, minuzioso e paziente di tutta la regione potrà permettere di rispondere, e forse solo in parte, a questi ardui quesiti.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Géomètrie projective des bandes d'éléments de contact de troisième ordre.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrisp. GUIDO FUBINI [1].

1. Soient $x(u_1, u_2)$ et $\xi(u_1, u_2)$ les coordonnées homogènes normales de M. Fubini respectivement des points et des plans tangents d'une surface réelle non réglée S. Soient φ_2, φ_3 les deux formes différentielles normales qui déterminent l'élément linéaire projectif de S.

Nons ferons usage du calcul absolu, φ_2 étant la forme fondamentale. Soit:

$$\varphi_2 = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k \;,\; \varphi_3 = \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l \,,$$

$$\mathrm{A} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 \;,\; \varepsilon = -\operatorname{sgn} \mathrm{A} \,,$$

$$\vartheta_{11} = 0 \;,\; \vartheta_{12} = \sqrt{|\mathrm{A}|} \;,\; \vartheta_{21} = -\sqrt{|\mathrm{A}|} \;,\; \vartheta_{22} = 0 \,,$$

$$\mathrm{D}u_i = \Sigma a^{ir}\, \vartheta_{rs}\, du_s \,,$$

$$\varphi'_3 = \Sigma a_{ikl}\, du_i\, du_k\, \mathrm{D}u_l = \Sigma b_{ikl}\, du_i\, du_k\, du_l \,,$$

$$a_{ikl,r} = \varepsilon \Sigma\, \vartheta_{rs}\, \psi^s \cdot b_{ikl} \;,\; \mathrm{K} = \text{courbure de } \varphi_2 \,.$$

(1) Presentata nella seduta del 16 novembre 1924.

Nous choisissons comme troisième forme différentielle la forme linéaire $\Sigma \tau_i du_i$ telle que les équations fondamentales soient:

$$x_{rs} = \Sigma a^i_{rs}\, x_i + \frac{1}{2}\,\Sigma a^i_{rs}\,(\tau_i - \psi_i)\, x + a_{rs}\, X\,,$$

$$X_i = \frac{1}{2}\left[\tau_i - K_i - \Sigma a^{rs}_i\,(\psi_{r,s} + \psi_r\,\psi_s)\right] x + (1 - K)\, x_i +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\Sigma a^{rs}_i\,(\tau_s + \psi_s)\, x_r\,,$$

où:

$$X = \frac{1}{2}\,\Delta_2\, x\,.$$

2. Soit C une courbe non asymptotique de S, et soient B_3 et B_4 respectivement les bandes d'éléments de contact de troisième et de quatrième ordre de la surface S le long de C. Soit, les différentielles se rapportant au passage le long de S,

$$e = \operatorname{sgn} \varphi_2\,.$$

J'appelle *arc projective de* B_3 l'intégrale:

$$s = \int \sqrt{|\,\varphi_2\,|}\,.$$

Pour déterminer la bande B_3, il faut connaître les coordonnées normales x et ξ le long de C et, en outre, le signe ε et le signe de l'invariant P_2 défini plus bas. La bande B_3 est déterminée à une homographie près, si on connaît en fonction de S les valeurs des invariants:

$$P_1 = e\,\frac{\varphi_3}{\sqrt{|\,\varphi_2\,|^3}}\,,\quad P_2 = e\,\frac{\varphi'_3}{\sqrt{|\,\varphi_2{}^3\,|}}\,,$$

$$Q = \frac{S\,(dx\, d^2x)\,(d\,\xi\, d^2\,\xi)}{ds^6}\,,$$

$$R_1 = \frac{(x\, d\, x\, d^2\, x\, d^3\, x)}{ds^6}\,,\quad R_2 = \frac{(\xi\, d\,\xi\, d^2\,\xi\, d^3\,\xi)}{ds^6}\,,$$

$$N = P_1\, Q + \frac{1}{2}\,\frac{S\,[(dx\, d^2x)\,(d\xi\, d^3\xi) - (dx\, d^3x)\,(d\xi\, d^2\xi)]}{ds^7}\,.$$

Entre P_1 et P_2 il y a la relation:

$$P_1{}^2 - \varepsilon\, P_2{}^2 = \frac{1}{2}\, e = \pm\,\frac{1}{2}\,.$$

3. En chaque point de C, on peut attacher à la bande B_3 un tétraèdre Δ aux sommets A_0, A_1, A_2, A_3, où:

$$\mathrm{A}_0 = x\,,\ \mathrm{A}_1 = \frac{dx}{ds}\,,\ \mathrm{A}_2 = -\left(\xi \frac{d\xi}{ds}\frac{d^2\xi}{ds^2}\right),$$

$$\mathrm{A}_3 = \frac{d^2x}{ds^2} - \mathrm{P}_1 \frac{dx}{ds} + \frac{1}{2}\mathrm{Q}x\,.$$

Alors, on a les formules fondamentales:

$$\frac{d\mathrm{A}_0}{ds} = \mathrm{A}_1\,,$$

$$\frac{d\mathrm{A}_1}{ds} = -\frac{1}{2}\mathrm{Q}\mathrm{A}_0 + \mathrm{P}_1\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_3\,,$$

$$\frac{d\mathrm{A}_2}{ds} = \mathrm{R}_2\,\mathrm{A}_0 - \mathrm{P}_1\,\mathrm{A}_2\,,$$

$$\frac{d\mathrm{A}_3}{ds} = \mathrm{N}\,\mathrm{A}_0 - \frac{1}{2}\mathrm{Q}\,\mathrm{A}_1 - \mathrm{R}_1\,\mathrm{A}_2\,.$$

3. Si la bande B_3 appartient à une surface S dont on connaît les formes φ_2, φ_3, $\Sigma\tau_i\,du_i$, on obtient les invariants Q, R_1, R_2, N selon les formules:

$$\mathrm{Q} = \varepsilon(\mathrm{P}_2^2 - g^2) + e(\mathrm{K} - 1) - e\,\frac{\Sigma a^i_{rs}\,\tau_i\,du_r\,du_s}{\varphi_2}\,,$$

$$\mathrm{R}_1 - \varepsilon\,\mathrm{R}_2 = 2\left(\frac{d\mathrm{P}_2}{ds} + \mathrm{P}_1\,g\right) + e\,\frac{\Sigma b^i_{rs}\,\psi_i\,du_r\,du_s}{\varphi_2}\,,$$

$$\mathrm{R}_1 + \varepsilon\,\mathrm{R}_2 = -2\left(\frac{dg}{ds} + \mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2\right) + e\,\frac{\Sigma b^i_{rs}\,\tau_i\,du_r\,du_s}{\varphi_2}\,,$$

$$2\,\mathrm{N} = -g(\varepsilon\,\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2) - \mathrm{P}_2(\varepsilon\,\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2) - e\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\Sigma a^i_{rs}\,\psi_i\,du_r\,du_s}{\varphi_2}\right) +$$

$$+\,e\,\frac{\Sigma\tau_i\,du_i - \Sigma a^i_{rs}\,(\psi_{r,s} + \psi_r\,\psi_s)}{ds} +$$

$$+\,e\,\varepsilon\,g\,\frac{\Sigma b^i_{rs}\,\psi_i\,du_r\,du_s}{\varphi_2} + e\,\varepsilon\,\mathrm{P}_2\,\frac{\Sigma b^i_{rs}\,\tau_i\,du_r\,du_s}{\varphi_2}\,,$$

où:

$$g = e\,\frac{\Sigma\,\vartheta_{rs}\,du_r\,\delta^2 u_s}{\sqrt{|\varphi_2|^3}}\,.$$

Le tetraèdre Δ s'obtient moyennant les formules:

$$x = A_0 \, , \frac{dx}{ds} = A_1 \, , \frac{Dx}{ds} = (g + P_2) A_0 + \varepsilon A_2 \, ,$$

$$e \left[X + \frac{1}{2} (K - 1) x \right] = \frac{1}{2} \left[e \, \frac{\Sigma a^i_{rs} \psi_i \, du_r \, du_s}{\varphi_2} - \varepsilon (g^2 - P_2^2 \right] A_0 -$$

$$- (g - P_2) A_2 + A_3 \, .$$

4. La bande B_3 étant connue, pour déterminer la bande B_4 qui la contient il faut et il suffit de connaître encore les invariants:

$$H_1 = \frac{\Sigma \psi_i \, du_i}{ds} \, , H_2 = \frac{\Sigma \psi_i \, Du_i}{ds} \, ,$$

entre lesquels on a l'identité:

$$3 P_2 H_1 - P_1 H_2 = 3 (R_1 - \varepsilon R_2) - 8 \frac{d P_2}{ds} \, ,$$

ainsi qu'il suffit de connaître le seul invariant:

$$3 P_1 H_1 - \varepsilon P_2 H_2 \, .$$

Par exemple, on peut obtenir les invariants:

$$\Phi = \Sigma \psi_i \psi^i \, , \, \Psi = \Sigma a^{rst} \psi_r \psi_s \psi_t \, , \, \Psi' = \Sigma b^{rst} \psi_r \psi_s \psi_t$$

(liés par l'identité:

$$\Psi^2 - \varepsilon \Psi'^2 = \frac{1}{2} \Phi^3)$$

de l'élement de contact de quatrième ordre de S moyennant les formules:

$$e \Phi = H_1^2 - \varepsilon H_2^2 \, ,$$

$$\Psi = - P_1 H_1^3 + 3 \varepsilon P_2 H_1^2 H_2 - 3 \varepsilon P_1 H_1 H_2^2 + P_2 H_2^3 \, ,$$

$$\Psi' = - P_2 H_1^3 + 3 P_1 H_1^2 H_2 - 3 \varepsilon P_2 H_1 H_2^2 + \varepsilon P_1 H_2^3 \, .$$

5. J'ai déduit quelques propositions géométriques de la théorie analytique dont je viens de résumer ce qu'il y a de plus important. En voici deux qui me semblent remarquables: Si deux surfaces ont contact de troisième ordre le long d'une courbe de Segre C, elles ont en chaque point de C la même normale projective. Si deux surfaces ont contact de troisième ordre le long d'une courbe de Darboux C, elles ont en chaque point de C le même

axe. Par l'axe de la surface S au point x j'entends la droite intersection des plans osculateurs en x aux trois courbes de Segre y passant.

6. Un exposé complet de ce qui vient d'être résumé paraîtra dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, Tchécoslovaquie dans le Mémoire *Courbes tracées sur une surface dans l'espace projectif.*

Matematica. — *Su una proposizione dell'Almansi.* Nota di Francesco Sbrana, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. In una Nota con questo titolo [2], il prof. Picone ha stabilito diverse proprietà notevoli della funzione di linea:

$$J(y) = \left\{\int_a^b y^2\,dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b y\,dx\right)^2\right\} : \int_a^b y'^2\,dx ,$$

già considerata dall'Almansi, che ne determinò il valore massimo, in corrispondenza di tutte le funzioni y con derivata continua, per le quali $y(a) = y(b)$. Il prof. Tonelli ha poi mostrato che il risultato dell'Almansi sussiste sotto condizioni più generali per la y, e queste condizioni sono riportate nel primo enunciato della Nota del prof. Picone. Ci sembra tuttavia possa presentare un certo interesse la seguente semplice dimostrazione del teorema generalizzato di Almansi-Tonelli, suggeritaci dalla lettura della Nota citata.

2. Come risulta da quanto ha osservato il prof. Picone, ponendo:

$$u = y - \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx ,$$

(donde segue:

$$u(a) = u(b) , \int_a^b u\,dx = 0) ,$$

possiamo ridurci a mostrare che:

$$J(u) = \int_a^b u^2\,dx : \int_a^b u'^2\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} . \tag{1}$$

(1) Presentata nella seduta del 16 novembre 1924.

(2) «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», 1923, pp. 97-101.