Eduard Čech

Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nátur. (5) 30_2 (1921), 491-492

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500844

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dal vol. XXX, serie 5ª, 2º sem., fasc. 12º. — Seduta del 18 dicembre 1921.

Matematica. — *Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI.

Dans une Note récente [1], j'ai démontré l'énoncé suivant: *les plans osculateurs des trois courbes de Segre* (c'est-à-dire des courbes conjuguées aux lignes d'osculation quadrique de Darboux) *qui passent par un point* P *d'une surface quelconque ont une droite commune*, soit τ. Il s'ensuit que les surfaces L ici considérées ont la propriété caractéristiques que *toutes les droites* τ *passent par un point fixe* O. Les surfaces L sont isothermo-asymptotiques [2], de sorte que l'on peut les définir par un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+2\varphi\frac{\partial y}{\partial v}+fy=0\,,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+2\varphi\frac{\partial y}{\partial u}+gy=0\,.$$

Ceci étant, les conditions nécessaires et suffisantes pour une surface L sont

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=6\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,,$$

$$(3)\qquad f=-2\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,,\quad g=-2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,.$$

Soient $a_0\,,a_1\,,a_2\,,\alpha$ des constantes telles que

$$(4)\qquad a_0+a_1+a_2=0\,,$$

et posons

$$(5)\qquad x_0=u+v+a_0\,,\quad x_1=\varepsilon^2u+\varepsilon v+a_1\,,\quad x_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v+a_2\,,$$

$$\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}\,.$$

La solution *générale* des équations (2) est

$$(L_1)\qquad \varphi=-\frac{1}{3}(\zeta x_0+\zeta x_1+\zeta x_2)\,,$$

[1] Rozpravy české Akademie, Praga, 30e année, 1921, n. 23.

[2] M. Fubini appelle ainsi les surfaces pour lesquelles les lignes de Darboux sont définies par une équation du type $du^3+dv^3=0$.

les périodes de la fonction elliptique ζ étant quelconques. Toutefois, il y a des solutions qui échappent à la représentation (L_1):

$$(L_2) \qquad \varphi = -\frac{\alpha}{3}(\operatorname{cotg} \alpha x_0 + \operatorname{cotg} \alpha x_1 + \operatorname{cotg} \alpha x_2),$$

$$(L_3) \qquad \varphi = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right),$$

$$(L_4) \qquad \varphi = -\frac{\alpha}{3} \operatorname{cotg} \alpha x_i \qquad (i = 0, 1, 2),$$

$$(L_5) \qquad \varphi = -\frac{1}{3}\frac{1}{x_i} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

$$(L_6) \qquad \varphi = \text{costante}.$$

On peut distinguer bien nettement les six possibilités. *Les plans des courbes de Segre enveloppent* toujours *un cône algébrique* $\boldsymbol{\Gamma}$ *de la* 3^{me} *classe* et, suivant le cas,

(L_1) $\boldsymbol{\Gamma}$ est de genre *un*,

(L_2) $\boldsymbol{\Gamma}$ a un plan tangent double,

(L_3) $\boldsymbol{\Gamma}$ a un plan tangent stationnaire,

(L_4) et (L_5) $\boldsymbol{\Gamma}$ se décompose en un cône quadrique $\boldsymbol{\Gamma}_1$ et en un faisceau dont l'axe, dans le cas (L_5), appartient a $\boldsymbol{\Gamma}_1$.

(L_6) $\boldsymbol{\Gamma}$ se décompose en trois faisceaux.

Ce résultat permet de trouver les équations d'une surface L en termes finis. Pour cela, je renvoie à un mémoire qui paraîtra prochainement dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno.