Eduard Čech

O trilineárních systémech čar na ploše a o projektivní aplikaci ploch

Rozpravy Československé Akad. Věd - Řada Mat. Přírod. Věd (23) 30 (1921), 6 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500836

O trilineárních systémech čar na ploše a projektivní aplikaci ploch.

Napsal Dr. **Eduard Čech.**

Předloženo dne 15. dubna 1921.

1. Analytickou basi našich úvah tvoří pět pojednání Wilczynského: „Projective differential geometry of curved surfaces (Trans. Amer. Math. Soc., roč. 8—12, 1907—1911).[1])

Buď dána nerozvinutelná plocha S_y systémem diferenciálních rovnic v kanonickém tvaru[2])

$$\begin{aligned} y_{uu} + 2\,b\,y_v + f\,y &= 0,\\ y_{vv} + 2\,a'\,y_u + g\,y &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

tak, že základní semikovarianty[3]) jsou

$$z = y_u,\quad \varrho = y_v,\quad \sigma = y_{uv}. \tag{2}$$

Buď τ daná funkce u, v. Výraz

$$\vartheta = z + \tau\,\varrho \tag{3}$$

znamená pak pro pevná u, v bod P_ϑ,[4]) ležící v tečné rovině plochy S_y v P_y, takže přímka $P_y\,P_\vartheta$ jest tečnou S_y v P_y. Měníme-li u, v, máme takto v každém bodě plochy S_y stanovenu určitou tečnu, čímž jest na S_y definována soustava ∞^1 (C_ϑ) křivek C_ϑ. Budeme hledati oskulační rovinu křivky C_ϑ v P_y. Z rovnic (1), (2) plyne

$$z_u = -\,f\,y - 2\,b\,\varrho,\quad z_v = \sigma,\quad \varrho_u = \sigma,\quad \varrho_v = -\,g\,y - 2\,a'\,z. \tag{4}$$

Zvětšíme-li u a v o nekonečně malé hodnoty δu, δv, přejde y, ϑ v $y + \delta y$, $\vartheta + \delta\vartheta$, kde

$$\begin{aligned} \delta y - y_u\,\delta u + y_v\,\delta v &= \delta u\,z + \delta v\,\vartheta,\\ \delta\vartheta = (\tau_u\,\delta u + \tau_v\,\delta v)\,\varrho &+ z_u\,\delta u + z_v\,\delta v + \tau\,(\varrho_u\,\delta u + \varrho_v\,\delta v), \end{aligned} \tag{5}$$

[1]) Budu je krátce citovati M_1, M_2, ...
[2]) M_1, § 5.
[3]) M_1, § 6.
[4]) M_2, § 1.

čili dle (4)

$$\begin{aligned}\delta \vartheta = -(\delta u + \tau \delta v)\, y - 2 \tau \delta v \,.\, a' z + \\ (\tau_u \delta u + \tau_v \delta v - 2 \delta u \,.\, b)\, \varrho + (\tau \delta u + \delta v)\, \sigma.\end{aligned} \tag{6}$$

Bod $P_{\vartheta + \delta\vartheta}$ leží na tečně v $P_{y+\delta y}$ ku příslušné křivce soustavy (C_ϑ). Volíme-li však δu, δv tak, aby $P_{y+\delta y}$ byl bod soumezný s P_y na C_ϑ, bude $P_{\vartheta + \delta\vartheta}$ patrně bod oskulační roviny křivky C_ϑ v P_y. Porovnáním rovnic (3) a (5) dostaneme, že v tomto případě jest klásti $\delta v = \tau \delta u$. Dosadíme-li do (6), obdržíme

$$\delta \vartheta = -(\delta u + \tau \delta v)\, y + \vartheta' \delta u,$$

kde

$$\vartheta' = -2 \tau^2 a' z + (\tau_u + \tau \tau_v - 2 b)\, \varrho + 2 \tau \sigma, \tag{7}$$

a také bod $P_{\vartheta'}$ náleží hledané oskulační rovině. Jsou-li x_1, x_2, x_3, x_4 bodové souřadnice pro souřadný tetraedr $P_y P_z P_\varrho P_\sigma$[1]), mají body P_y, P_ϑ $P_{\vartheta'}$, resp. souřadnice

$$P_y\,(1, 0, 0, 0)\,;\; P_\vartheta\,(0, 1, \tau, 0)\,;$$
$$P_{\vartheta'}\,(0, -2 \tau^2 a', \tau_u + \tau \tau_v - 2 b, 2 \tau)$$

a hledaná rovnice oskulační roviny křivky C_ϑ v P_y jest

$$2 \tau^2 x_2 - 2 \tau x_3 + (\tau_u + \tau \tau_v - 2 b + 2 \tau^3 a')\, x_4 = 0. \tag{8}$$

Poznamenejme ještě toto: Je-li v funkcí u podél C_ϑ, jest

$$\frac{d v}{d u} = \tau, \quad \frac{d^2 v}{d u^2} = \tau_u + \tau \tau_v.$$

2. Jsou-li $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}$ čtyři lineárně nezávislá řešení systému (1), označme $\bar y^{(1)}, \bar y^{(2)}, \bar y^{(3)}, \bar y^{(4)}$ minory matice

$$\left\| \begin{array}{cccc} y^{(1)} & y^{(2)} & y^{(3)} & y^{(4)} \\ y_u^{(1)} & y_u^{(2)} & y_u^{(3)} & y_u^{(4)} \\ y_v^{(1)} & y_v^{(2)} & y_v^{(3)} & y_v^{(4)} \end{array} \right\|.$$

$\bar y^{(i)}$ jsou pak souřadnice tečné roviny plochy S_y v P_y. V rovinových souřadnicích jest tedy S_y definována systémem[2])

$$\begin{aligned} \bar y_{uu} - 2 b \bar y_v + (\bar f + 2 b_v)\, \bar y = 0, \\ \bar y_{vv} - 2 a' \bar y_u + (\bar g + 2 a'_u)\, \bar y = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Základní kovarianty systému (9) jsou

$$\bar y, \; \bar z = \bar y_u, \; \bar \varrho = \bar y_v, \; \bar \sigma = \bar y_{uv}. \tag{10}$$

Stejně jako výraz $x_1 y + x_2 z + x_3 \varrho + x_4 \sigma$, kde $x_1 \ldots x_4$ jsou funkce u, v, znamená pro každé (u, v) bod, znamená výraz $\xi_1 \bar y + \xi_2 \bar z + \xi_3 \bar \varrho + \xi_4 \bar \sigma$

[1]) M_2, § 1.
[2]) M_1, § 8. Rovnice $\bar f = f$, $\bar g = g$ l. c. (str. 259) jsou zřejmě nesprávné a mají zníti $\bar f = f + 2 b_v$, $\bar g = g + 2 a'_u$. Naproti tomu jest $\bar h = h$, $\bar k = k$, jsou-li h, k, *invarianty* (M_1, str. 250, rovn. (50)).

pro každé (u, v) rovinu, specielně jsou $\bar{y}, \bar{z}, \varrho, \sigma$ roviny souřadné tohoto nového lokálního systému souřadnic. Jaká je souvislost mezi souřadnicemi x_i a souřadnicemi ξ_i? Snadno se zjistí, že minory matice

$$\left\| \begin{matrix} y^{(1)} & y^{(2)} & y^{(3)} & y^{(4)} \\ z^{(1)} & z^{(2)} & z^{(3)} & z^{(4)} \\ \varrho^{(1)} & \varrho^{(2)} & \varrho^{(3)} & \varrho^{(4)} \\ \sigma^{(1)} & \sigma^{(2)} & \sigma^{(3)} & \sigma^{(4)} \end{matrix} \right\| \tag{11}$$

tvoří matici (adjungovanou)

$$\left\| \begin{matrix} \sigma^{(1)} - 4\,a'\,b\,y^{(1)} & \sigma^{(2)} - 4\,a'\,b\,y^{(2)} & \sigma^{(3)} - 4\,a'\,b\,y^{(3)} & \sigma^{(4)} - 4\,a'\,b\,y^{(4)} \\ -\varrho^{(1)} & -\varrho^{(2)} & -\varrho^{(3)} & -\varrho^{(4)} \\ -z^{(1)} & -z^{(2)} & -z^{(3)} & -z^{(4)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} & y^{(3)} & y^{(4)} \end{matrix} \right\|. \tag{12}$$

Z toho však následuje bezprostředně, že platí, jsou-li $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ rovinové souřadnice příslušné k bodovým x_i, t. j. takové, že $\Sigma\, x_i \xi_i = 0$ je podmínka incidence,

$$\xi_1 = -4\,a'\,b\,\xi_1 + \xi_4,\ \xi_2 = -\xi_3,\ \xi_3 = -\xi_2,\ \xi_4 = \xi_1. \tag{13}$$

Geometricky můžeme tuto souvislost takto vyjádřiti: Polární rovinou bodu $x_1 y + x_2 z + x_3 \varrho + x_4 \sigma$ vzhledem ke kvadrice

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 + 2\,a'\,b\,x_4^2,$$

t. j. vzhledem k Licově kvadrice bodu P_y[1]) jest rovina $x_1 \bar{y} + x_2 z + x_3 \varrho + x_4 \sigma$. Tato poznámka může býti leckdy užitečná.

3. Na základě předchozího shledáváme, že rovina spojující $P_y P_\sigma$ s tím bodem na $P_z P_\varrho$, který spolu s bodem P_ϑ dělí $P_z P_\varrho$ harmonicky, je dána výrazem

$$\vartheta = y_u + \tau\, y_v. \tag{14}$$

Buď Γ_ϑ rozvinutelná plocha, opsaná ploše S_y podél C_ϑ. Pak obdržíme rovnici bodu vratu na té vytvořující přímce Γ_ϑ, jež jde bodem P_y, jednoduše tím, že v (8) místo $x_1, x_2, x_3, x_4, a', b$ píšeme $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, -a', -b$. Zavedeme-li ještě ξ_i substitucí (13), bude rovnice tohoto bodu

$$-2\,\tau^2\,\xi_3 + 2\,\tau\,\xi_2 + [\tau_u + \tau\,\tau_v + 2\,b - 2\,\tau^3 a']\,\xi_1 = 0. \tag{15}$$

Klademe-li nyní místo τ jiné libovolné funkce u, v: τ', τ'', obdržíme další dvě soustavy ∞^1 křivek, $(C_{\vartheta'})$, $(C_{\vartheta''})$. Definujme nyní: Soustavy (C_ϑ), $(C_{\vartheta'})$, $(C_{\vartheta''})$ tvoří *trilineární systém*, když 1. žádné dvě z nich nejsou identické, 2. žádná z nich neskládá se z křivek asymptotických,[2]) 3. *v každém bodě plochy oskulační roviny křivek C_ϑ, $C_{\vartheta'}$, $C_{\vartheta''}$ jím jdoucích procházejí touž přímkou*; 4. *body vratu rozvinutelných ploch Γ_ϑ, $\Gamma_{\vartheta'}$, $\Gamma_{\vartheta''}$ dotýkajících*

[1]) M_2, § 2, rovn. (11). Wilczynski nazývá Licovu kvadriku osculating hyperboloid.

[2]) Vyloučené případy jsou triviální.

se S_y podél C_ϑ, $C_{\vartheta'}$, $C_{\vartheta''}$ leží na téže přímce. Rovnice (8), (15) podávají ihned podmínky pro trilineární systém

$$
\begin{aligned}
&|\,\tau^2,\ \tau,\ b - \tau^3 a'\,| = 0,\\
&|\,\tau^2,\ \tau,\ \tau_u + \tau\,\tau_v\,| = 0,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

kde levé strany jsou determinanty, v nichž pouze prvý řádek jest vypsán. K nim přistupuje nerovnost $\tau\,\tau'\,\tau''\;|\,\tau^2, \tau, 1\,| \neq 0$, která dovoluje prvou z těchto podmínek nahraditi jednodušší podmínkou

$$\tau\,\tau'\,\tau''\,a' - b = 0. \tag{16}$$

Pro $a' = b = 0$ jest S_y kvadrika[1]) a rovnice (16) je splněna identicky. Tento případ vyloučíme. Pro $a' = 0$, $b \neq 0$ (i pro $a' \neq 0$, $b = 0$) je plocha S_y zborcená[2]) a trilineární systémy neexistují. Můžeme tedy předpokládati $a'\,b \pm 0$. Rovnice (16) pak praví: Trojice tečen ke křivkám trilineárního systému v každém bodě plochy náleží (kubické) dvojmocné involuci tečen apolárních s tečnami, konjugovanými s tečnami Darboux-Segreovými.[2]) Neboť pro Darboux-Segreovy tečny jest[3])

$$\tau^3\,a' + b = 0. \tag{17}$$

Dle podmínky (16) jsou τ, τ', τ'' kořeny kubické rovnice

$$\tau^3 + r\,\tau^2 + s\,\tau - \frac{b}{a'} = 0. \tag{18}$$

Pro r, s obdržíme pak snadným výpočtem podmínku

$$
\begin{aligned}
&2\,t\,(3\,r\,t - s^2)\,r_v - 3\,t\,(3\,t + r\,s)\,(r_u + s_v)\\
&+ 2\,t\,(3\,s + r^2)\,(s_u + t_v) + (5\,s^2 + 5\,r^2 s - 6\,r\,t)\,t_u = 0
\end{aligned}
\quad \left(t = -\frac{b}{a'}\right). \tag{19}
$$

4. Podmínka (16) jest patrně splněna, jsou-li (C_ϑ), $(C_{\vartheta'})$, $(C_{\vartheta''})$ tři soustavy čar konjugovaných s čarami Darboux-Segreovými, neboť pak jest

$$\tau = P,\ \tau' = \omega P,\ \tau'' = \omega^2 P,\ P = \sqrt[3]{\frac{b}{a'}},\ \omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

Podmínka (15) jest v tomto případě

$$
|\,\tau^2,\ \tau,\ \tau_u + \tau\,\tau_v\,| = P^3
\begin{vmatrix}
1, & 1, & P_u + P\,P_v\\
\omega^2, & \omega, & \omega\,P_u + \omega^2\,P\,P_v\\
\omega, & \omega^2, & \omega^2\,P_u + \omega\,P\,P_v
\end{vmatrix}
= 0
$$

a je tudíž také splněna; máme tedy výsledek: *Na každé nepřímkové ploše*

[1]) M_1, str. 260.

[2]) Tato podmínka jest tedy, jak ukazuje snadná úvaha, pouhý korolár věty, kterou jsem odvodil v pojednání „O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru“ „Časopis“, roč. 50, str. 219 a n., v části I, odst. 7, vztahujeme-li ji na transformaci Σ_{-3}. Viz též odst. 2. tamtéž; tam zmíněná involuce $I_2{}^3$ jest konjugovaná s naší involucí (16).

[3]) M_8, § 1, a M_9, § 6, rovn. (99). Wilczynski užívá Darbouxova názvu tangentes à osculation quadrique.

tvoří čáry konjugované s čarami Darboux-Segreovými trilineární systém. Rovnice tří oskulačních rovin jsou v tomto případě dle (9)

$$
\begin{aligned}
2 P^2 x_2 - 2 P x_3 + (P_u + P P_v) x_4 &= 0, \\
2 \omega^2 P^2 x_2 - 2 \omega P x_3 + (\omega P_u + \omega^2 P P_v) x_4 &= 0, \\
2 \omega P^2 x_2 - 2 \omega^2 P x_3 + (\omega^2 P_u + \omega P P_v) x_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Procházejí tedy vskutku touž přímkou l, jejíž rovnice jsou

$$6 a' b x_2 + (a' b_v - a'_v b) x_4, \quad 6 a' b x_3 - (a' b_u - a'_u b) x_4 = 0. \tag{20}$$

Stejně nalezneme z (15) pro přímku l', na níž leží tři body vratu,

$$6 a' b \xi_3 - (a' b_v - a'_v b) \xi_1 = 0, \quad 6 a' b \xi_2 + (a' b_u - a'_u b) \xi_1 = 0. \tag{21}$$

Přímky l, l' jsou ovšem reciproké poláry vzhledem k Licově kvadrice. Položme si otázku: *Pro jaké plochy splynou naše přímky l, l' s Wilczynského řídícími přímkami d, d'*, t. j. s řídícími přímkami lineární kongruence společné oskulačním lineárním komplexům obou asymptotických čar v každém bodě P_y? Obdržíme podmínky[1])

$$2 a' b_v + a'_v b = 2 a'_u b + a' b_u = 0,$$

čili

$$\frac{\partial}{\partial v} a' b^2 = \frac{\partial}{\partial u} a'^2 b = 0. \tag{22}$$

Avšak z toho plyne,[2]) že lze substitucí $u = \alpha(u)$, $v = \beta(v)$ docíliti $a' = b = 1$. Diferenciální rovnice Darboux-Segreových čar jest potom $d u^3 + d v^3 = 0$. *Žádaná vlastnost jest tedy charakteristická pro plochy, vyšetřované Wilczynskim,*[3]) připouštějící grupu projektivních transformací o dvou parametrech.

5. Z rovnic (15), (16) můžeme bez jakéhokoli počtu vyčísti větu: *Nutná a postačující podmínka, aby v korespondenci mezi dvěma (nepřímkovými) plochami S_y, S_η každému trilineárnímu systému na jedné příslušel trilineární systém na druhé, jest, aby si v této korespondenci odpovídaly čáry Darboux-Segreovy (všech tří soustav).* Neboť především musí involuci (16) odpovídati analogická involuce tečen S_η a tedy řečená podmínka jest nutná. Že však také stačí, vysvítá z fakta, že *rovnice* (15) *neobsahuje koeficientů diferenciálního systému* (1). Také platí: Jsou-li S_y, S_η tak na sebe zobrazeny, že si odpovídají křivky asymptotické (obou soustav) a *jednomu* trilineárnímu systému odpovídá stejný, pak *každému* trilineárnímu systému odpovídá trilineární systém. Jsou-li vůbec dvě plochy S_y, S_η na sebe zobrazeny tak, že si odpovídají oboje čáry asymptotické a je-li S_y dána systémem (1), jest S_η dána systémem téhož tvaru

$$
\left.
\begin{aligned}
\eta_{uu} + 2 \beta \eta_v + \varphi \eta &= 0, \\
\eta_{vv} + 2 \alpha' \eta_u + \gamma \eta &= 0:
\end{aligned}
\right. \tag{23}
$$

1) Porovnáním naší rovnice (18) s rovnicemi (70^b) v M_2, str. 95.

2) M_1, str. 250, rovn. (51) a (52).

3) Wilczynski, On a certain set of self-projective surfaces, Trans. Amer. M. S., vol. 14, str. 421—443.

při tom si odpovídají body příslušné týmž hodnotám (u, v). Naše podmínka jest vyjádřena rovnicí

$$\frac{b}{a'} = \frac{\beta}{\alpha'}. \tag{24}$$

Ptejme se nyní: *Jaké jsou podmínky pro takové zobrazení dvou nerozvinutelných ploch S_y, S_η, aby si odpovídaly oboje čáry asymptotické a aby v každém páru odpovídajících si bodů tvořily oskulační roviny odpovídajících si křivek dva kolineární trsy?* Ukáže se, že tyto podmínky mají za důsledek vlastnost duální a tedy i podmínku (24), t. j. korespondenci čar Darboux-Segreových. Z rovnice (8) nalezneme, jsou-li $(0, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ souřadnice roviny trsu P_y vztažené na tetraedr $P_y P_z P_\varrho P_\sigma$ a $(0, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4)$ analogické souřadnice příslušné roviny trsu P_η,

$$\begin{aligned} \lambda \xi_2 &= \tau^2, & \lambda' \xi'_2 &= \tau^2, \\ \lambda \xi_3 &= -\tau, & \lambda' \xi'_3 &= -\tau, \\ \lambda \xi_4 &= \tau - 2b + 2\tau^3 a', & \lambda' \xi'_4 &= \tau - 2\beta + 2\tau^3 \alpha', \end{aligned}$$

a tedy po vyloučení τ, τ

$$\begin{aligned} \mu \xi'_2 &= \xi_2^2 \xi_3, \\ \mu \xi'_3 &= \xi_2 \xi_3^2, \\ \mu \xi'_4 &= \xi_2 \xi_3 \xi_4 - 2(\beta - b)\xi_3^3 - 2(\alpha' - a')\xi_2^3. \end{aligned} \tag{25}$$

Obecně, t. j. je-li pouze ta podmínka splněna, že si odpovídají asymptotické čáry obou soustav, jest (25) *kubická* Cremonova transformace; redukuje se na *kvadratickou*, je-li *jedna* z veličin $\alpha' - a'$, $\beta - b$ rovna nule, specielně jsou-li obě plochy zborcené a vytvořující přímky si odpovídají; a konečně na *kolineaci*, je-li

$$\alpha' = a', \ \beta = b. \tag{26}$$

Rovnice (26) mají vskutku za důsledek rovnici (24). Jest však velmi snadno, poznati, že v případě, kdy rovnice (26) jsou splněny, jest korespondence mezi S_y a S_η *projektivní aplikace* definovaná Fubinim, t. j., jsou-li P_y, P_η odpovídající si body, že možno S_η nahraditi kolineární plochou S'_η tak, že příslušné si čáry ploch S_y, S'_η v P_y mají styk druhého řádu.[1]) Vidíme, že *i na základě Wilczynského teorie můžeme zcela dobře studovati projektivní aplikaci.* Zejména: *Ty z invariantů Wilczynskeho teorie, které závisejí pouze na a', b a jejich derivacích (ne na f, g), nemění se při projektivní aplikaci.*

Připomeňme ještě, že nejen projektivní aplikace, ale i obecnější transformace, hovící pouze podmínce (24), není možná mezi libovolně předepsaným párem ploch.

[1]) Stačí provésti takovou kolineaci, jež vede k tetraedru $P_y P_z P_\varrho P_\sigma$ od analogického tetraedru plochy S_η, jak plyne z rovnic v M_2, str. 100, následujících po rovnici (83) pro $a'b = 0$ a z rovnic (13) v M_3, str. 296, pro plochy zborcené. Pojednání, v němž Fubini zavedl projektivní aplikaci, jest Applicabilità proiettiva di due superficie (Palermo Rendiconti, sv. 41, 1916).