Eduard Čech

Propriétés projectives du contact. I

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 91 (1928), 35 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500834

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1928 Čís. 91

P. prof. B. Bydžovskému
s kol. pozdravem E. Čech

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DU CONTACT

I.

PAR

EDOUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

TISKEM POLYGRAFIE V BRNĚ.

Dans ce Mémoire, je m'occupe du problème suivant: Soient données, dans un espace projectif E_n à n dimensions, deux courbes C_1 et C_2 ayant, à un point commun A, un contact d'ordre précisément $s-1$. On se propose de trouver un espace linéaire O à m dimensions contenu dans E_n tel que le contact des projections des courbes C_1 et C_2 soit d'ordre $s+\sigma-1$ $(\sigma \geqq 1)$. Je pose en outre la condition restrictive $\sigma \leqq s$.

Le cas très particulier $n=3$, $\sigma=1$ est classique. Il a été résolu par Halphen en 1880*. Le résultat de Halphen a été étendu au cas de n quelconque et $\sigma=1$**. Il existe alors un plan tangent π commun aux courbes C_1 et C_2 au point A, appelé *plan principal*, tel que l'ordre *du contact des projections* est s lorsque l'espace O rencontre le plan π et dans ce cas seulement. Les cas $n=3$, $\sigma=1$, 2, 3 ont été traités presque simultanément par M. Bompiani*** et par l'auteur†. Il s'est montré utile de supposer que les courbes C_1 et C_2 soient situées sur une surface donnée Σ††. En particulier, le plan principal coïncide alors avec le plan tangent à Σ au point A.

Ici je traite le problème général, en continuant à supposer que les courbes C_1 et C_2 soient situées sur une surface (à deux dimensions) Σ donnée. Le résultat est que (v. § 9 pour l'énoncé précis) le centre de projection O doit rencontrer les plans tangents à Σ à σ points successifs de la courbe C_1 (ou de la courbe C_2). Il est remarquable que les conditions pour O ne dépendent pas de la valeur de s (pourvu que $s \geqq \sigma$).

Si l'on voulait approfondir ce résultat, on devrait faire usage de la notion des tangentes quasiconjuguées, due à M. Bompiani (v. § 10). Je fais cette étude détaillée pour les cas $\sigma=2$ et $\sigma=3$.

* *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (Journal de l'École Polytechnique, t. 27, 1880).

** Berzolari, *Sugli invarianti differenziali proiettivi delle curve di un iperspazio* (Annali di Matematica, t. 26 (2), 1897).

*** *Sul contatto di due curve sghembe* (Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna, t. 3 (8), 1925-6.

† *Projektivní diferenciální geometrie* (Sborník Jednoty československých matematiků a fysiků sv. 18, 1926).

†† Il suffit évidemment que Σ ait un contact d'ordre $s+\sigma-1$ avec C_1 et C_2 en A.

La méthode employée est une extension de celle dont j'avais fait usage en traitant le cas $n=3$; l'extension au cas de n quelconque exige d'ailleurs beaucoup de calcul.

Dans les suivants Mémoires, portant le même titre, je traiterai d'autres questions de nature projective relatives au contact. Le lemme du § 2 et ses diverses extensions joueront toujours un rôle fondamental.

§ 1. Définition du contact de deux courbes.

Par une *fonction* j'entends dans tout ce qui suit une fonction réelle ou complexe d'une ou de plusieurs variables indépendantes réelles ou complexes, définie dans un domaine ouvert et y possédant les différentielles totales de tous les ordres.

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ un système de coordonnées curvilignes dans un espace E_n à n dimensions ou plutôt dans une portion ouverte de cet espace. Une *courbe* C_1 de l'espace E_n sera supposée définie par un système d'équations de la forme

$$u_1 = \varphi_1(v), \ldots, u_n = \varphi_n(v), \tag{1}$$

$\varphi_1, \ldots \varphi_n$ étant des fonctions (au sens précisé plus haut) d'une variable indépendante *(paramètre)* v. Le même lieu de points soit défini aussi par le système d'équations

$$u_1 = \overline{\varphi}_1(w), \ldots u_n = \overline{\varphi}_n(w). \tag{2}$$

On a alors une correspondance entre les paramètres v et w; *nous conviendrons de ne regarder comme identiques les deux courbes définies respectivement par les équations (1) et (2) que lorsque cette correspondance est biunivoque et exprimée analytiquement par $w = F(v)$ où F est une fonction* (au sens précisé plus haut) *telle que, pour chaque valeur de v,* $\frac{dF(v)}{dv} \neq 0$. On sait que la notion de courbe, ainsi précisée, est invariante par rapport aux changements biunivoques et réguliers des coordonnées curvilignes $(u_1, \ldots, u_n)$

$$\bar{u}_i = f_i(u_1, \ldots, u_n), \quad (1 \leq i \leq n)$$

le mot *régulier* signifiant que le déterminant $\left|\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|$ est partout différent de zéro.

Un point particulier de la courbe C_1, définie par les équations (1), correspondant à la valeur $\hat{v}$ du paramètre v, sera dit un *point simple* de la courbe C_1 si une au moins des dérivées $\varphi'_i(v)\,(1 \leq i \leq n)$ ne s'anulle pas pour $v = \hat{v}$. Grâce à la condition posée plus haut, cette notion du point simple est invariante par rapport au passage de la représentation (1) à la représentation (2); cette notion est aussi invariante par rapport aux changements biunivoques et réguliers des coordonnées curvilignes $(u_1, \ldots, u_n)$. Sauf avis contraire, on supposera toujours que *chaque point considéré d'une courbe en est un point simple.*

Considérons maintenant, outre la courbe C_1 définie par les équations (1) et contenant le point

$$A = [\varphi_1(\mathring{v}), \ldots \varphi_n(\mathring{v})],$$

une autre courbe C_2 de l'espace E_n passant elle aussi par le point A. Soit s un nombre entier positif. On dit que les courbes C_1 et C_2 ont un *contact d'ordre $s - 1$ au point A* si l'on peut définir la courbe C_2 par des équations

$$u_1 = \psi_1(v), \ldots, u_n = \psi_n(v)$$

telles que*

$$\left[\frac{d^\nu \psi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}} = \left[\frac{d^\nu \varphi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}}. \qquad (0 \leq \nu \leq s-1;\ 1 \leq i \leq n)$$

Rappelons que nous ne considérons que le cas où A est un point simple et de C_1 et de C_2. On sait que la définition donnée du contact est invariante par rapport aux changements biunivoques et réguliers des coordonnées curvilignes $u_1 \ldots u_n$; on sait encore que cette définition ne dépend pas du choix de la représentation paramétrique (1) de la courbe C_1. L'ensemble M de toutes les courbes ayant au point A un contact d'ordre $s - 1$ avec C_1, forme *l'élement d'ordre $s - 1$ de la courbe C_1* au point A; c'est aussi l'élément d'ordre $s - 1$ d'une courbe quelconque de l'ensemble M. Si les courbes C_1 et C_2 ont un contact d'ordre $s - 1$ au point commun A, et si $1 \leq \sigma \leq s$, elles y ont aussi un contact d'ordre $\sigma - 1$. Si les courbes C_1 et C_2 ont, au point commun A, un contact d'ordre $s - 1$, mais non d'ordre s, je dis qu'elles ont un *contact d'ordre précisément $s - 1$* au point A. Rappelons enfin que deux courbes C_1, C_2 ont un contact d'ordre 0 en chaque point commun.

§ 2. Lemme fondamental.

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ un système de coordonnées curvilignes dans l'espace E_n à n dimensions. Considérons deux courbes C_1 et C_2 de l'espace E_n définies respectivement par les équations

$$u_i = \varphi_i(v); \quad (1 \leq i \leq n) \tag{1}$$

$$u_i = \psi_i(v). \quad (1 \leq i \leq n) \tag{2}$$

Soit $\mathring{v}$ une valeur particulière de la variable v. Posons

$$\left[\frac{d^\nu \varphi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}} = \varphi_{i\nu}, \quad \left[\frac{d^\nu \psi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}} = \psi_{i\nu}.$$

$$(1 \leq i = n; \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots)$$

Soit $1 \leq \sigma < s$. Soit

$$\varphi_{i\nu} = \psi_{i\nu} \quad (0 \leq \nu \leq s-1;\ 1 \leq i \leq n) \tag{3}$$

---

* La dérivée d'ordre zéro d'une fonction φ est la fonction φ elle-même.

ainsi que les courbes C_1 *et* C_2 *ont un contact d'ordre* $s-1$ *au point*

$$A=(\varphi_{10},\ldots,\varphi_{n0})=(\psi_{10},\ldots,\psi_{n0}).$$

Ce contact est d'ordre $s+\sigma-1$ *si l'on peut déterminer des nombres* a_ν $(0\leq\nu\leq\sigma-1)$ *tels que*

$$\psi_{i,s+t}-\varphi_{i,s+t}=\sum_{\nu=0}^{s+t}\binom{s+t}{\nu}a_{t-\nu}\varphi_{i,\nu+1} \tag{4}$$

$$(1\leq i\leq n;\quad 0\leq t\leq\sigma-1)$$

et dans ce cas seulement.

Démonstration. De la définition du contact il résulte aisément que le contact considéré est d'ordre $s+\sigma-1$ alors et alors seulement si l'on peut déterminer une fonction $F(v)$ telle que

$$F(\mathring{v})=\mathring{v},\quad\left[\frac{dF(v)}{dv}\right]_{v=\mathring{v}}\neq 0$$

et

$$\left[\frac{d^\nu\varphi_i(F(v))}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}}=\psi_{i\nu}.\quad(0\leq\nu\leq s+\sigma-1;\quad 1\leq i\leq n) \tag{5}$$

Or, A étant un point simple de la courbe C_1, un au moins des nombres φ_{i1} $(1\leq i\leq n)$ est différent de zéro. Il s'ensuit, en vertu de (3), que celles des équations (5) dans lesquelles $0\leq\nu\leq s-1$ sont vérifiées alors et alors seulement si

$$\left[\frac{d^\nu F(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\mathring{v}}=\begin{cases}1 \text{ si } \nu=1\\ 0 \text{ si } \nu>1.\end{cases}\quad(1\leq\nu\leq s-1)$$

On peut donc poser

$$F(v)=v+\sum_{\alpha=0}^{\sigma-1}\frac{a_\alpha}{(s+\alpha)!}(v-\mathring{v})^{s+\alpha}+O(s+\sigma), \tag{6}$$

en désignant par $O(s+\sigma)$ chaque fonction de v dont toutes les dérivées d'ordre ≥ 0 et $\leq s+\sigma-1$ s'annulent pour $v=\mathring{v}$. Or

$$\varphi_i(v)=\sum_{\alpha=0}^{s+\sigma-1}\frac{\varphi_{i\alpha}}{\alpha!}(v-\mathring{v})^\alpha+O(s+\sigma),$$

ainsi que

$$\varphi_i(F(v))=\sum_{\alpha=0}^{s+\sigma-1}\frac{\varphi_{i\alpha}}{\alpha!}(F(v)-\mathring{v})^\alpha+O(s+\sigma). \tag{7}$$

Or de (6) il résulte

$$(F(v)-\mathring{v})^\alpha=(v-\mathring{v})^\alpha+\alpha\sum_{\beta=0}^{\sigma-\alpha}\frac{a_\beta}{(s+\beta)!}(v-\mathring{v})^{s+\alpha+\beta-1}+O(s+\sigma),$$

$$(F(v)-\mathring{v})^{\sigma+\gamma}=(v-\mathring{v})^{\sigma+\gamma}+O(s+\sigma).\qquad(1\leq\alpha\leq\sigma;\ 1\leq\gamma\leq s-1)$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (7) on trouve

$$\varphi_i(F(v))=$$

$$=\varphi_{i0}+\sum_{\alpha=1}^{\sigma}\frac{\varphi_{i\alpha}}{\alpha!}\left[(v-\mathring{v})^\alpha+\sum_{\beta=0}^{\sigma-\alpha}\frac{a_\beta}{(s+\beta)!}(v-\mathring{v})^{s+\alpha+\beta-1}+O(s+\sigma)\right]+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{s-1}\frac{\varphi_{i,\sigma+\gamma}}{(\sigma+\gamma)!}\left[(v-\mathring{v})^{\sigma+\gamma}+O(s+\sigma)\right]+O(s+\sigma),$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi_i(F(v)) = \sum_{\alpha=0}^{s-1} \frac{\varphi_{i\alpha}}{\alpha!}(v-\mathring{v})^\alpha +$$

$$+\sum_{t=0}^{\sigma-1}\left[\varphi_{i,s+t} + \sum_{\nu=0}^{t}\binom{s+t}{\nu} a_{t-\nu}\varphi_{i,\nu+1}\right]\frac{(v-\mathring{v})^{s+t}}{(s+t)!} + O(s+\sigma). \qquad (8)$$

Il en résulte que

$$\left[\frac{d^\alpha \varphi_i(F(v))}{dv^\alpha}\right]_{v=\mathring{v}} = \varphi_{i\alpha}, \qquad (0\leq \alpha \leq s-1;\ 1\leq i\leq n)$$

$$\left[\frac{d^{s+t}\varphi_i(F(v))}{dv^{s+t}}\right]_{v=\mathring{v}} = \varphi_{i,s+t} + \sum_{\nu=0}^{t}\binom{s+t}{\nu}a_{t-\nu}\varphi_{i,\nu+1}.$$

$$(0\leq t\leq \sigma-1;\ 1\leq i\leq n)$$

Les équations (5) équivalent donc d'après (3) aux équations (4).

§ 3. Cas des coordonnées homogènes.

Jusqu'ici j'ai supposé l'espace E_n rapporté à un système de n coordonnées curvilignes $(u_1, \ldots, u_n)$. Mais il est facile de transporter les définitions du § 1, ainsi que le théorème du § 2, au cas où l'on rapporte l'espace E_n (où une portion ouverte de cet espace) à un système de $n+1$ *coordonnées curvilignes homogènes* $(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$. Une courbe C_1 de l'espace E_n sera alors définie par des équations de la forme

$$x^{(i)} = \varphi_i(v) \qquad (0\leq i\leq n) \qquad (1)$$

où les fonctions φ_i ne s'annulent simultanément pour aucune valeur de v, et où les rapports seulement des fonctions φ_i sont essentiels. Le point de la courbe C_1 correspondant à $v=\mathring{v}$ est un point simple de la courbe C_1 si un au moins des nombres

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(\mathring{v}), & \varphi_j(\mathring{v}) \\ \varphi'_i(\mathring{v}), & \varphi'_j(\mathring{v}) \end{vmatrix} \qquad (0\leq i<j\leq n)$$

est divers de zéro.

Considérons maintenant deux courbes C_1 et C_2 de l'espace E_n et soit A un point commun à ces deux courbes*. Soit s un entier positif. Si la courbe C_1 est définie par les équations (1), le point A correspondant à la valeur $\mathring{v}$ du paramètre v, les courbes C_1 et C_2 auront évidemment un contact d'ordre $s-1$ au point A alors et alors seulement si l'on peut exprimer paramétriquement la courbe C_2 par des équations

$$x^{(i)} = \psi_i(v) \qquad (0\leq i\leq n) \qquad (2)$$

telles que

$$\varphi_{i\nu} = \psi_{i\nu}, \qquad (0\leq \nu\leq s-1;\ 0\leq i\leq n) \qquad (3)$$

* On suppose que A soit un point simple pour C_1 et pour C_2.

où j'ai posé

$$\left[\frac{d^\nu \varphi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\hat{v}} = \varphi_{i\nu}, \quad \left[\frac{d^\nu \psi_i(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\hat{v}} = \psi_{i\nu}.$$

$$(\nu = 0,\ 1\ldots;\ 0 \leqq i \leqq n)$$

Le lemme fondamental s'étend de la manière suivante:

Les conditions (3) *étant vérifiées, le contact des courbes* C_1 *et* C_2 *au point* A *est d'ordre* $s+\sigma-1$, *où* $1 \leqq \sigma \leqq s$, *si l'on peut déterminer des nombres* a_ν, b_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ *tels que*

$$\psi_{i,s+t} - \varphi_{i,s+t} = \sum_{\nu=0}^{t} \binom{s+t}{\nu} \left(a_{t-\nu}\varphi_{i,\nu+1} + b_{t-\nu}\varphi_{i\nu}\right) \tag{4}$$

$$(0 \leqq i \leqq n;\ 0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

et dans ce cas seulement.

Démonstration. On voit tout de suite que les courbes C_1 et C_2 ont un contact d'ordre $s+\sigma-1$ alors et alors seulement si l'on peut déterminer deux fonctions $F(v)$, $\varrho(v)$ telles que

$$F(\hat{v}) = \hat{v},\ \left[\frac{d\,F(v)}{dv}\right]_{v=\hat{v}} \neq 0,\ \varrho(\hat{v}) \neq 0$$

et

$$\left[\frac{d^\nu}{dv^\nu}\varrho(v)\cdot\varphi_i(F(v))\right]_{v=\hat{v}} = \psi_{i\nu}. \tag{5}$$

$$(0 \leqq \nu \leqq s+\sigma-1;\ 0 \leqq i \leqq n)$$

Or, A étant un point simple de la courbe C_1, un au moins des nombres

$$\begin{vmatrix} \varphi_{i0} & \varphi_{j0} \\ \varphi_{i1} & \varphi_{j1} \end{vmatrix} \qquad (0 \leqq i < j \leqq n)$$

est différent de zéro. On en déduit sans difficulté, ayant égard aux équations (3), que celles des équations (5) dans lesquelles $0 \leqq \nu \leqq s-1$ sont vérifiées alors et alors seulement si $\varrho(\hat{v}) = 1$ et

$$\left[\frac{d^\nu F(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\hat{v}} = \begin{cases} 1 \text{ si } \nu = 1 \\ 0 \text{ si } \nu > 1 \end{cases},\quad \left[\frac{d^\nu \varrho(v)}{dv^\nu}\right]_{v=\hat{v}} = 0.$$

$$(1 \leqq \nu \leqq s-1)$$

On peut donc poser

$$F(v) = v + \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \frac{a_\alpha}{(s+\alpha)!}(v-\hat{v})^{s+\alpha} + O(s+\sigma),$$

$$\varrho(v) = 1 + \sum_{\alpha=0}^{\sigma-1} \frac{b_\alpha}{(s+\alpha)!}(v-\hat{v})^{s+\alpha} + O(s+\sigma), \tag{6}$$

en désignant de nouveau $O(s+\sigma)$ chaque fonction de v dont toutes les dérivées d'ordre $\geqq 0$ et $\leqq s+\sigma-1$ s'annulent pour $v=\hat{v}$. On calcule aisément (v. § 2, (8)) que

$$\varphi_i(F(v)) = \sum_{\alpha=0}^{s-1} \frac{\varphi_{i\alpha}}{\alpha!}(v-\hat{v})^\alpha +$$

$$+ \sum_{t=0}^{\sigma-1}\left[\varphi_{i,s+t} + \sum_{\nu=0}^{t}\binom{s+t}{\nu} a_{t-\nu}\varphi_{i,\nu+1}\right]\frac{(v-\hat{v})^{s+t}}{(s+t)!} + O(s+\sigma).$$

Donc, d'après (6),

$$\varrho(v)\cdot\varphi_i(F(v)) = \sum_{\alpha=0}^{s-1} \frac{\varphi_{i\alpha}}{\alpha!}(v-\mathring{v})^\alpha +$$

$$+\sum_{t=0}^{\sigma-1}\left[\varphi_{i,s+t} + \sum_{\nu=0}^{t}\binom{s+t}{\nu}(a_{t-\nu}\varphi_{i,\nu+1} + b_{t-\nu}\varphi_{i\nu})\right]\frac{(v-\mathring{v})^{s+t}}{(s+t)!} + O(s+\sigma).$$

Il en résulte que

$$\left[\frac{d^\alpha}{dv^\alpha}\varrho(v)\varphi_i(F(v))\right]_{v=\mathring{v}} = \varphi_{i\alpha}, \qquad (0\leq\alpha\leq s-1;\ 0\leq i\leq n)$$

$$\left[\frac{d^{s+t}}{dv^{s+t}}\varrho(v)\varphi_i(F(v))\right]_{v=\mathring{v}} = \varphi_{i,s+t} + \sum_{\nu=0}^{t}\binom{s+t}{\nu}(a_{t-\nu}\varphi_{i,\nu+1} + b_{t-\nu}\varphi_{i\nu}).$$

$$(0\leq t\leq\sigma-1;\ 0\leq i\leq n)$$

Les équations (5) équivalent donc d'après (3) aux équations (4).

§ 4. Première forme des conditions pour le contact des projections de deux courbes.

Dorénavant (à l'exception du § 5), l'espace ambiant E_n soit un espace projectif à n dimensions rapporté à un système de coordonnées homogènes ordinaires (linéaires). Suivant un usage déjà assez commun, j'indiquerai l'ensemble des $n+1$ coordonnées homogènes $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $x_1^{(i)}$ etc. $(0\leq i\leq n)$ par une lettre unique x, y, x_1 etc. Pour $1\leq m\leq n$, je désigne par

$$(x_0\, x_1 \ldots x_m)$$

l'ensemble des $\binom{n+1}{m+1}$ déterminants d'ordre $m+1$ tirés du tableau

$$\left\| \begin{matrix} x_0^{(0)} & x_1^{(0)} & \ldots & x_m^{(0)} \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \ldots & x_m^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & \ldots & x_m^{(n)} \end{matrix} \right\|$$

J'écris

$$(x_0\, x_1 \ldots x_m) = 0$$

si tous ces déterminants sont nuls; si $(x_0\, x_1 \ldots x_m) \neq 0$, les déterminants symbolisés par $(x_0\, x_1 \ldots x_m)$ sont les coordonnées grassmanniennes de l'espace linéaire E_m à m dimensions (droite pour $m=1$, plan pour $m=2$, hyperplan pour $m=n-1$) déterminé par les points $x_0, x_1 \ldots x_m$; parfois, je ferai usage du symbole $(x_0, x_1, \ldots x_m)$ aussi pour désigner cet espace E_m.

Une courbe C_1 de l'espace E_n sera définie en exprimant les coordonnées homogènes du point mobile de C_1 comme fonctions d'un paramètre v; je désigne par x (v) l'ensemble de ces $n+1$ fonctions. Pour que le point correspondant à $v=\mathring{v}$ soit un point simple de la courbe C_1, il faut et il suffit que

$$\left[x(\mathring{v}), \left(\frac{d\,x\,(v)}{d\,v}\right)_{v=\mathring{v}}\right] \neq 0; \tag{1}$$

la droite représentée par le premier membre de (1) est alors la *tangente* à la courbe C_1 au point considéré.

Outre la courbe C_1, considérons encore une autre courbe C_2 de l'espace E_n exprimée elle aussi moyennant le paramètre v; soient $y(v)$ les coordonées homogènes du point mobile de C_2. Soit A un point commun à C_1 et à C_2, et supposons que ce soit un point simple pour C_1 et pour C_2. Je peux supposer que la même valeur $\overset{\circ}{v}$ de v donne A considéré comme point de C_1 ou de C_2. Supposons que les courbes C_1 et C_2 aient un *contact d'ordre précisément* $s-1$ $(s \geq 1)$ au point A; d'après § 3, je peux supposer, sans restreindre la généralité, que

$$y_\nu = x_\nu, \quad (0 < \nu \leq s-1) \tag{1}$$

où j'ai posé

$$\left[\frac{d^\nu x(v)}{d v^\nu}\right]_{v=\overset{\circ}{v}} = x_\nu, \left[\frac{d^\nu y(v)}{d v^\nu}\right]_{v=\overset{\circ}{v}} = y_\nu.$$
$$(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$$

Le contact considéré étant d'ordre *précisément* $s-1$, on a, d'après § 3, (4)

$$y_s - x_s - a_o\, x_1 - b_o\, x_o \neq 0$$

pour chaque choix des nombres a_o, b_o. Il s'ensuit

$$(y_s - x_s,\ x_o,\ x_1) \neq 0 \tag{2}$$

car les points x_o, x_1 sont linéairement indépendants, puisque A est un point simple de la courbe C_1. Rappelons que la droite (x_o, x_1) est la tangente à la courbe C_1 (si $s \geq 2$, aussi à la courbe C_2) au point A.

Ceci étant, soit O un espace linéaire fixe à m dimensions ne contenant pas le point A; soit Ω un espace linéaire fixe à $n-m-1$ dimensions sans point commun avec O. Projetons les deux courbes C_1 et C_2 du centre O dans l'espace Ω. Pour que la projection A^* du point A soit un point simple des courbes projetées $C_1{}^*$, $C_2{}^*$, il faut et il suffit que l'espace O n'ait aucun point commun avec la droite $(x_o\ x_1)$ ni avec la droite $(y_o\ y_1)$ (ces deux droites n'étant distinctes que si $s=1$). Faisons cette supposition. En outre, supposons que $0 \leq m \leq n-3$ et par suite $n \geq 3$ *. L'espace O soit déterminé par $m+1$ points linéairement indépendants

$$z_o, z_1 \ldots z_m.$$

Pour plus de clarté, choisissons pour un moment le système de référence de l'espace E_n de manière que les $n-m$ dernières coordonnées de chaque point de O, ainsi que les $m+1$ premières coordonnées de chaque point de Ω, soient nulles. Alors les coordonnées homogènes du point mobile de la courbe $C_1{}^*$ seront égales à quelques-uns des déterminants symbolisés par

$$(Z,\ x\ (v)) = (z_o,\ z_1, \ldots z_m,\ x(v)),$$

les autres déterminants étant nuls.

---

* Le cas exclu $m = n-2$ est banal.

Pareillement, les coordonnées homogènes du point mobile de la courbe C_2^* sont symbolisées par

$$(Z, y(v)) = (z_0, z_1 \ldots, z_m, y(v)).$$

Les points $z_0, z_1, \ldots z_m$ étant fixes, on a

$$\frac{d^\nu}{d v^\nu}(Z, x(v)) = \left(Z, \frac{d^\nu x(v)}{d v^\nu}\right),$$

$$\frac{d^\nu}{d v^\nu}(Z, y(v)) = \left(Z, \frac{d^\nu y(v)}{d v^\nu}\right).$$

$$(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$$

Or, d'après (1),

$$(Z, y_\nu) = (Z, x_\nu); \quad (0 \leqq \nu \leqq s - 1)$$

on voit donc que C_1^* et C_2^* ont un contact d'ordre $s - 1$ au point A^*, projection du point A, ce qui était évident. Soit maintenant σ un nombre entier tel que $1 \leqq \sigma \leqq s$ et cherchons les conditions pour que le contact des courbes C_1^* et C_2^* au point A^* soit d'ordre $s + \sigma - 1$. D'après § 3, (4), condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on puisse trouver des nombres a_ν, b_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ tels que

$$(Z, y_{s+t} - x_{s+t}) = \left[Z, \sum_{\nu=0}^{t} \binom{s+t}{\nu}(a_{t-\nu} x_{\nu+1} + b_{t-\nu} x_\nu)\right].$$

$$(0 \leqq t \leqq \sigma - 1).$$

Autrement dit: *Condition nécessaire et suffisante pour que les projections C_1^*, C_2^* aient un contact d'ordre $s + \sigma - 1$ $(1 \leqq \sigma \leqq s)$ au point A^* est qu'on puisse déterminer des nombres a_ν, b_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ tels que le centre de projection O contienne les points*

$$y_{s+t} - x_{s+t} - \sum_{\nu=0}^{t} \binom{s+t}{\nu}(a_{t-\nu} x_{\nu+1} + b_{t-\nu} x_\nu). \tag{3}$$

$$(0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

On ne doit pas oublier que nous supposons toujours que l'espace O ne contienne aucun point de la droite $(x_0 x_1)$ (et de la droite $(y_0 y_1)$ qui ne diffère de la précédente que si $s = 1$) et que la dimension de O soit $\leqq n - 3$.

Le résultat est particulièrement simple dans le cas $\sigma = 1$. On voit immédiatement (v. (2)) que les projections ont un contact d'ordre s alors et alors seulement si le centre de projection O contient un point du plan

$$(y_s - x_s, \ x_0, \ x_1); \tag{4}$$

c'est le plan principal de Halphen-Berzolari*. Le plan (4) est un plan tangent commun aux courbes C_1 et C_2 au point A; dans le cas simple $s = 1$ c'est le plan qui joint les tangentes aux deux courbes C_1 et C_2 au point A.

* V. l'introduction.

Le résultat obtenu est beaucoup moins satisfaisant si $\sigma > 2$. Il semble que, pour le discuter, on ne puisse que prendre en considération toutes les relations linéaires et homogènes qui peuvent exister entre les points

$$x_\nu,\ y_{s+t} - x_{s+t}. \qquad (0 \leq \nu \leq s-1\,;\ 0 \leq t \leq \sigma - 1)$$

Or en procédant ainsi, on ne peut guère espérer d'arriver à aucun résultat *général.* Il est d'autant plus remarquable que, comme je montrerai plus tard, il suffit de poser convenablement la question pour obtenir un résultat assez intuitif et général.

§ 5. La notion de variété.

Pour transformer convenablement les conditions justement trouvées, je supposerai que les courbes C_1 et C_2 soient situées sur une surface donnée Σ, A étant un point simple de la surface Σ. Or la notion de surface, comme celle de courbe, n'est qu'un cas particulier de la notion générale de variété.

Soit, comme au § 1, $(u_1, \ldots u_n)$ un système de coordonnées curvilignes (non homogènes) de l'espace ambiant E_n. Soit $1 \leq m \leq n-1$. Une *variété à m dimensions V_m de l'espace E_n* sera supposé définie par un système d'équations de la forme

$$u_i = \varphi_i(v_1, \ldots, v_m), \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{1}$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions (au sens expliqué au § 1) de m variables indépendantes (*paramètres*) $(v_1, \ldots v_m)$. Le même lieu de points soit défini aussi par le système d'équations

$$u_i = \overline{\varphi}_i(w_1, \ldots, w_m). \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{2}$$

On a alors une correspondance entre les paramètres $(v_1, \ldots v_m)$ et $(w_1, \ldots w_m)$; nous conviendrons de ne regarder comme identiques les deux variétés définies respectivement par les équations (1) et (2) que lorsque cette correspondance est biunivoque et régulière, c'est-à-dire exprimée analytiquement par $w_\alpha = F_\alpha(v_1, \ldots v_m)$ $(1 < \alpha \leq m)$ où F_α $(1 \leq \alpha \leq m)$ sont des fonctions (au sens du § 1) telles que le déterminant $\left|\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial v_\beta}\right|$ soit partout différent de zéro. On sait que la notion de variété à m dimensions, ainsi précisée, est invariante par rapport aux changements biunivoques et réguliers des coordonnées curvilignes $(u_1, \ldots, u_n)$. Une variété à une dimension n'est rien autre qu'une courbe au sens du § 1. Une variété à deux dimensions s'appelle *surface*; une variété à $n-1$ dimensions s'appelle *hypersurface.*

Un point particulier de la variété V_m définie par (1), correspondant aux valeurs $(\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_m)$ des paramètres $(v_1, \ldots, v_m)$, sera dit un *point simple* de la variété V_m si un au moins des déterminants d'ordre

m du tableau à n lignes

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_m}\right) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

diffère de zéro pour $(v_1, \ldots, v_m) = (\overset{\circ}{v}_1, \ldots, \overset{\circ}{v}_m)$ (v. § 1 pour le cas particulier $m = 1$). On sait que cette notion de point simple est invariante par rapport au passage de la représentation (1) à la représentation (2); cette notion est aussi invariante par rapport aux changements biunivoques et réguliers des coordonnées curvilignes $(u_1, \ldots, u_n)$.

On peut faire correspondre à la variété V_m définie par (1) une portion ouverte d'un espace E_m à m dimensions en considérant les paramètres $(v_1, \ldots, v_m)$ comme des coordonnées curvilignes de l'espace E_m. Une variété W_μ à μ $(1 \leqq \mu \leqq m-1)$ dimensions de l'espace E_m soit définie par les équations

$$v_\alpha = f_\alpha\ (w_1, \ldots, w_\mu). \qquad (1 \leqq \alpha \leqq m) \tag{3}$$

En substituant les valeurs (3) dans les équations (1) on obtient des équations de la forme

$$u_i = \Phi_i\ (w_1, \ldots, w_\mu) \tag{4}$$

qui définissent une variété V_μ située sur V_m. Les variétés W_μ et V_μ étant rapportées aux mêmes paramètres $(w_1, \ldots, w_\mu)$, on a une correspondance ponctuelle entre elles; on voit facilement que, si tous les points de V_m sont simples, à un point simple de W_μ correspond un point simple de V_μ et *vice versa*. Si tous les points de V_m sont simples, on peut obtenir *chaque* variété V_μ situé sur V_m de la façon qui vient d'être décrite.

En particulier, considérons une courbe C_1 tracée sur la variété V_m définie par (1); la courbe C_1 soit déterminée moyennant les équations

$$v_\alpha = f_\alpha\ (w). \qquad (1 \leqq \alpha \leqq m) \tag{5}$$

Soit $\overset{\circ}{w}$ une valeur particulière de la variable w; soit $f_\alpha\ (\overset{\circ}{w}) = \overset{\circ}{v}_\alpha$ $(1 \leqq \alpha \leqq m)$; soit $\overset{\circ}{u}_i = \varphi_i\ (\overset{\circ}{v}_1, \ldots, \overset{\circ}{v}_m)$ $(1 \leqq i \leqq n)$. La courbe C_1 passe alors par le point $A = (\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_n)$ de l'espace E_n. Supposons que A soit un point simple et pour la courbe C_1 et pour la variété V_m. Soit C_2 une autre courbe de la variété V_m passant elle aussi par A et y possédant un point simple. La courbe C_2 soit définie par les équations

$$v_\alpha = g_\alpha\ (w), \qquad (1 \leqq \alpha \leqq m) \tag{6}$$

le point A correspondant, ici encore, à la valeur $\overset{\circ}{w}$ de w. Les équations (5) et (6) peuvent être considérées comme définissant deux courbes $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ d'un espace à m dimensions rapporté aux coordonnées curvilignes $(v_1, \ldots, v_m)$; le point $(\overset{\circ}{v}_1, \ldots \overset{\circ}{v}_m)$ est un point simple de $\overline{C}_1$ et de $\overline{C}_2$. *Les courbes C_1 et C_2 ont un contact d'ordre $s-1$ au point A alors et alors seulement si les courbes $\overline{C}_1$ et $\overline{C}_2$ ont un contact d'ordre $s-1$ au point $(\overset{\circ}{v}_1, \ldots, \overset{\circ}{v}_m)$.* C'est qu'on voit immédiatement si l'on observe que,

A étant un point simple de V_m, il est possible, au moins dans un voisinage du point A, de choisir les coordonnées curvilignes $(u_1, \ldots, u_n)$ de l'espace E_n de manière qu'on puisse mettre les èquations (1) sous la forme simple

$$u_\alpha = v_\alpha, \ u_\beta = 0. \qquad (1 \leqq \alpha \leqq m;\ m+1 \leqq \beta \leqq n)$$

Enfin, considérons le cas où l'espace ambiant E_n soit rapporté à un système de $n+1$ coordonnées homogènes $(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$. Une variété V_m à m dimensions est alors définie par des équations de la forme

$$x^{(i)} = \varphi_i\ (v_1, \ldots, v_m), \qquad (0 \leqq i \leqq n)$$

les fonctions φ_i ne s'annulant jamais simultanément; les rapports seuls des fonctions φ_i sont essentiels. On voit tout de suite qu'un point de V_m correspondant aux valeurs $(\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_m)$ des paramètres $(v_1, \ldots, v_m)$ est simple pour V_m alors et alors seulement si l'un au moins des déterminants d'ordre $m+1$ du tableau à $n+1$ lignes

$$\left(\varphi_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_m}\right) \qquad (0 \leqq i \leqq n)$$

diffère de zéro pour $(v_1, \ldots, v_m) = (\mathring{v}_1, \ldots, \mathring{v}_m)$.

§ 6. Contact des projections de deux courbes situées sur une surface donnée.

Reprenons les considérations du § 4. On peut toujours indique une surface contenant les courbes C_1 et C_2 et ayant un point simpler en A. On peut procéder p. ex. de la manière suivante. Posons

$$z\,(\mathring{v}) = \frac{y_s - x_s}{s\,!}$$

et pour $v \neq \mathring{v}$

$$z\,(v) = \frac{y\,(v) - x\,(v)}{(v - \mathring{v})^s}.$$

Des équations § 4, (1) il résulte que les coordonnées $z^{(i)}\,(v)$ $(0 \leqq i \leqq n)$ sont des fonctions infiniment dérivables de la variable v, la valeur $v = \mathring{v}$ y comprise. Or posons

$$X\,(u, v) = x\,(v) + u\,z\,(v),$$

ainsi que

$$x\,(v) = X\,(o, v), \quad y\,(v) = X\,[(v - \mathring{v})^s, v].$$

Le point $X\,(u, v)$ décrit évidemment une surface Σ contenant les courbes C_1 et C_2. Il faut montrer que A est un point simple de Σ, ou bien que $\left(X \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}\right) \neq 0$ pour $(u, v) = (0, \mathring{v})$. Or

$$\left(X \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}\right) = \left[x\,(v),\ z\,(v),\ \frac{dx\,(v)}{dv} + u \frac{dz\,(v)}{dv}\right],$$

ce qui devient, en posant $u=0$, $v=\mathring{v}$

$$\left[x_0,\ \frac{1}{s!}(y_s-x_s), x_1\right] \neq 0$$

d'après § 4, (2).

Maintenant, il convient d'introduire des notations nouvelles. Soient (u_1, u_2) les paramètres du point mobile de la surface Σ*, les valeurs $(\mathring{u}_1, \mathring{u}_2)$ des paramètres (u_1, u_2) correspondant au point A; désignons par $x=x(u_1, u_2)$ l'ensemble des $n+1$ coordonnées homogènes du point mobile de Σ exprimées moyennant les paramètres u_1, u_2. Posons

$$x_1=\frac{\partial x}{\partial u_1}, \quad x_2=\frac{\partial x}{\partial u_2}. \tag{1}$$

On a

$$(x\,x_1\,x_2)\neq 0 \tag{2}$$

pour chaque valeur de (u_1, u_2) correspondant à un point simple de Σ, en particulier pour $(u_1, u_2)=(\mathring{u}_1, \mathring{u}_2)$. Le plan $(x\,x_1\,x_2)$ est, comme on sait, le *plan tangent* à la surface Σ au point $x(u_1, u_2)$. Indiquons par l'affixe 0 la substitution $u=\mathring{u}$, $v=\mathring{v}$; p. ex.

$$x_0=x(\mathring{u}, \mathring{v}); \ (x\,x_1\,x_2)_0=\left[x(\mathring{u}, \mathring{v}),\ \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\right)_{\substack{u=\mathring{u},\\ v=\mathring{v}}}\ \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\right)_{\substack{u=\mathring{u}\\ v=\mathring{v}}}\right].$$

La courbe C_1 de la surface Σ soit définie par les équations

$$u_1=\varphi_1(v), \quad u_2=\varphi_2(v), \tag{3}$$

la valeur $v=\mathring{v}$ correspondant au point A.

Pour une fonction quelconque $f(u_1, u_2)$ des variables u_1, u_2 posons

$$d^\nu f=\left[\frac{d^\nu}{dv^\nu}f(\varphi_1(v),\ \varphi_2(v))\right]_{v=\mathring{v}}, \quad (\nu=0, 1, 2\ldots)$$

$d^1f=df$, ainsi que, p. ex.,

$$d^0u_1=\mathring{u}_1,\ d^0x=x_0,\ d^1x=dx=(x_1)_0\,\varphi'_1(\mathring{v})+(x_2)_0\,\varphi'_2(\mathring{v})=$$
$$=(x_1)_0\,du_1+(x_2)_0\,du_2;$$

la tangente à la courbe C_1 au point A est évidemment (x_0, dx).

La deuxième courbe C_2 de la surface Σ soit définie par les équations

$$u_1=\psi_1(v), \quad u_2=\psi_2(v), \tag{4}$$

la valeurs $v=\mathring{v}$ correspondant, ici encore, au point A. Pour une fonction quelconque $f(u_1, u_2)$ des variables u_1, u_2 posons

$$\delta^\nu f=\left[\frac{d^\nu}{dv^\nu}f(\psi_1(v),\ \psi_2(v))\right]_{v=\mathring{v}}, \quad (\nu=0, 1, 2\ldots)$$

* La surface Σ est supposée seulement contenir les courbes C_1 et C_2 et avoir le point A comme point simple; ce n'est pas nécessairement la surface construite plus haut.

$\delta^1 f = \delta f$, ainsi que, p. ex.,

$$\delta^0 u_2 = u_2, \quad \delta^0 x = x_0, \quad du_1 = \psi'_1(v), \quad d^3 u_2 = \psi'''_2(v).$$

Nous supposons, comme au § 4, que les courbes C_1 et C_2 aient un contact d'ordre précisément $s-1$ $(s \geqq 2)$ au point A; d'après le § 5, cela revient à supposer que, en considérant u_1, u_2 comme des coordonnées curvilignes dans un plan, les deux courbes de ce plan définies respectivement par les équations (3) et (4), aient un contact d'ordre précisément $s-1$. On peut donc supposer, d'après § 1, que

$$\delta^\nu u_\alpha = d^\nu u_\alpha. \quad (\alpha = 1, 2;\ 0 \leqq \nu \leqq s-1) \tag{5}$$

L'ordre du contact étant *précisément* $s-1$, on a donc, pour tout choix du nombre a_0 (v. § 2, (4)), ou

$$\delta^s u_1 - d^s u_1 \neq a_0\, du_1$$

ou bien

$$\delta^s u_2 - d^s u_2 \neq a_0\, du_2.$$

Or, A étant un point simple de la courbe C_1, on ne peut pas avoir simultanément $du_1 = 0$, $du_2 = 0$, ainsi que

$$(\delta^s u_1 - d^s u_1)\, du_2 - (\delta^s u_2 - d^s u_2)\, du_1 \neq 0. \tag{**}$$

Posons enfin

$$\vartheta_{t,\alpha} = \delta^{s+t} u_\alpha - d^{s+t} u_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2;\ t = 0, 1, 2 \ldots) \tag{6}$$

ainsi que l'inégalité (**) s'écrit

$$\vartheta_{01}\, du_2 - \vartheta_{02}\, du_1 \neq 0. \tag{7}$$

Des équations (5) il résulte que

$$\delta^\nu x = d^\nu x. \qquad (0 \leqq \nu \leqq s-1)$$

On peut donc transporter aux notations actuelles le résultat final du § 4 et on obtient: *Condition nécessaire et suffisante pour que les projections C_1^*, C_2^* des courbes C_1, C_2 aient un contact d'ordre $s+\sigma-1$ $(1 \leqq \sigma \leqq s)$ au point A^*, qui est la projection du point A, est qu'on puisse déterminer des nombres a_ν, b_ν $(0 \leqq \nu \leqq s-1)$ tels que le centre de projection O contienne les points*

$$z_t = \delta^{s+t} x - d^{s+t} x - \sum_{\nu=0}^{t} \binom{s+t}{\nu} (a_{t-\nu}\, d^{\nu+1} x + b_{t-\nu}\, d^\nu x). \tag{8}$$
$$(0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

Répétons encore une fois que nous supposons que le centre de projection O n'ait aucun point commun avec la tangente (x_0, dx) à la courbe C_1 au point A, et que la dimension de O soit $\leqq n-3$.

§ 7. Première transformation des conditions trouvées.

Gardons toutes les notations du § précédent. Démontrons que, si $f(u_1, u_2)$ est une fonction quelconque de (u_1, u_2), on a

$$\delta^{s+t} f - d^{s+t} f = \sum_{\nu=0}^{t} \binom{s+t}{\nu} \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_{t-\nu,\alpha} d^{\nu} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha}. \qquad (1)$$
$$(0 \leqq t \leqq s-1)$$

On voit sans difficulté que l'équation (1) est vraie, si $t=0$ (d'après § 6, (5)). Supposons donc que le nombre τ $(0 \leqq \tau \leqq s-2)$ ait la propriété que (1) soit vraie pour $0 \leqq t \leqq \tau$, quelle que soit la fonction f; si nous en pouvons déduire que (1) reste vraie pour $t = \tau + 1$, la démonstration de (1) sera complètement achevée. Or

$$d^{s+\tau+1} f = d^{s+\tau} \sum_{\alpha=0}^{1} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} du_\alpha =$$
$$= \sum_{h=0}^{s+\tau} \sum_{\alpha=1}^{2} \binom{s+\tau}{h} d^h \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} \cdot d^{s+\tau+1-h} u_\alpha,$$

et pareillement

$$\delta^{s+\tau+1} f = \sum_{h=0}^{s+\tau} \sum_{\alpha=1}^{2} \binom{s+\tau}{h} \delta^h \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} \delta^{s+\tau+1-h} u_\alpha,$$

ce qui peut s'écrire, d'après § 6, (5) et parce que $\tau + 1 \leqq s - 1$,

$$\delta^{s+\tau+1} f = \sum_{h=0}^{s-1} \sum_{\alpha=1}^{2} \binom{s+\tau}{h} d^h \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} \delta^{s+\tau+1-h} u_\alpha +$$
$$+ \sum_{h=s}^{s+\tau} \sum_{\alpha=1}^{2} \binom{s+\tau}{h} \delta^h \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} d^{s+\tau+1-h} u_\alpha.$$

On a donc, en employant la notation § 6, (6),

$$\delta^{s+\tau+1} f - d^{s+\tau+1} f = \sum_{\nu=0}^{\tau+1} \binom{s+\tau}{\nu} \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_{\tau+1-\nu,\alpha} d^{\nu} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} + S, \qquad (2)$$

où j'ai posé

$$S = \sum_{h=s}^{s+\tau} \sum_{\alpha=1}^{2} \binom{s+\tau}{h} \left(d^h \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} - d^h \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} \right) d^{s+\tau+1-h} u_\alpha.$$

Or d'après la propriété supposée du nombre τ on a pour $s \leqq h \leqq s+\tau$

$$\delta^h \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} - d^h \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} = \sum_{p=0}^{h-s} \binom{h}{p} \sum_{\beta=1}^{2} \vartheta_{h-s-p,\beta} d^p \frac{\partial^2 f}{\partial u_\alpha \partial u_\beta},$$

ainsi que

$$S = \sum_{h=s}^{s+\tau} \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \binom{s+\tau}{h} \binom{h}{p} \vartheta_{h-s-p,\beta} d^{s+\tau+1-h} u_\alpha d^p \frac{\partial^2 f}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} =$$
$$= \sum_{h=s}^{s+\tau} \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \binom{s+\tau}{h-p} \binom{s+\tau-h+p}{p} \vartheta_{h-s-p,\beta} d^{s+\tau+1-h} u_\alpha d^p \frac{\partial^2 f}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}.$$

Ici je pose $\nu = s + \tau - h + p + 1$, ainsi que $\sum_{h=s}^{s+\tau} \sum_{p=0}^{h-s} = \sum_{\nu=1}^{\tau+1} \sum_{p=0}^{\nu-1}$ et par suite

$$S=\sum_{\nu=1}^{\tau+1}\binom{s+\tau}{s+\tau-\nu+1}\sum_{\beta=1}^{2}\vartheta_{\tau-\nu+1,\beta}\sum_{p=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{p}\sum_{\alpha=1}^{2}d^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial u_\alpha\,\partial u_\beta}d^{\nu-1-p}(du_\alpha)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\tau+1}\binom{s+\tau}{\nu-1}\sum_{\beta=1}^{2}\vartheta_{\tau-\nu+1,\beta}\,d^{\nu-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u_\alpha\,\partial u_\beta}du_\alpha\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\tau+1}\binom{s+\tau}{\nu-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta_{\tau+1-\nu,\alpha}\,d^{\nu}\frac{\partial f}{\partial u_\alpha}.$$

En substituant cette expression de S dans l'équation (2), on obtient

$$\delta^{s+\tau+1}f-d^{s+\tau+1}f=\sum_{\nu=0}^{\tau+1}\binom{s+\tau+1}{\nu}\sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta_{\tau+1-\nu,\alpha}\,d^{\nu}\frac{\partial f}{\partial u_\alpha}.$$

Or c'est l'équation (1) pour $t=\tau+1$; la démonstration de (1) est donc complète.

En vertu de (1), les équations § 6, (8) prenent la forme

$$z_t=\sum_{\nu=0}^{t}\binom{s+t}{\nu}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta_{t-\nu,\alpha}\,d^{\nu}x_\alpha-a_{t-\nu}\,d^{\nu+1}x-b_{t-\nu}\,d^{\nu}x\right].\qquad(3)$$

$$(0\leq t\leq\sigma-1)$$

Or

$$\sum_{h=0}^{t}\binom{s+t}{h}a_{t-h}\,d^{h+1}x=\sum_{h=0}^{t}\binom{s+t}{h}a_{t-h}\,.\,d^{h}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}x_\alpha\,du_\alpha\right)=$$

$$=\sum_{h=0}^{t}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{h}\binom{s+t}{h}a_{t-h}\,.\binom{h}{\nu}d^{\nu}x_\alpha\,.\,d^{h+1-\nu}u_\alpha=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{t}\sum_{h=\nu}^{t}\sum_{\alpha=1}^{2}\binom{s+t}{h}\binom{h}{\nu}a_{t-h}\,d^{\nu}x_\alpha\,.\,d^{h+1-\nu}u_\alpha=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{t}\sum_{h=\nu}^{t}\sum_{\alpha=1}^{2}\binom{s+t}{\nu}\binom{s+t-\nu}{h-\nu}a_{t-h}\,d^{\nu}x_\alpha\,.\,d^{h+1-\nu}u_\alpha=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{t}\sum_{\alpha=1}^{2}\binom{s+t}{\nu}d^{\nu}x_\alpha\sum_{h=\nu}^{t}\binom{s+t-\nu}{h-\nu}a_{t-h}\,d^{h+1-\nu}u_\alpha=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{t}\sum_{\alpha=1}^{2}\binom{s+t}{\nu}d^{\nu}x_\alpha\sum_{h=0}^{t-\nu}\binom{s+t-\nu}{h}a_{t-\nu-h}\,d^{h+1}u_\alpha;$$

pareillement

$$\sum_{h=0}^{t}\binom{s+t}{h}b_{t-h}\,d^{h}x=b_t x_0+\sum_{h=1}^{t}\binom{s+t}{h}b_{t-h}\,d^{h-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}x_\alpha\,du_\alpha\right)=$$

$$=b_t x_0+\sum_{h=1}^{t}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{h-1}\binom{s+t}{h}b_{t-h}\,.\binom{h-1}{\nu}d^{\nu}x_\alpha\,d^{h-\nu}u_\alpha=$$

$$=b_t x_0+\sum_{\nu=0}^{t-1}\sum_{h=\nu+1}^{t}\sum_{\alpha=1}^{2}\binom{s+t}{h}\binom{h-1}{\nu}b_{t-h}\,d^{\nu}x_\alpha\,d^{h-\nu}u_\alpha=$$

$$=b_t x_0+\sum_{\nu=0}^{t-1}\sum_{h=\nu+1}^{t}\sum_{\alpha=1}^{2}\binom{s+t}{\nu+1}\binom{s+t-\nu-1}{h-\nu-1}\frac{\nu+1}{h}b_{t-h}\,d^{\nu}x_\alpha\,d^{h-\nu}u_\alpha=$$

$$=b_t x_0+\sum_{\nu=0}^{t-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\binom{s+t}{\nu+1}d^{\nu}x_\alpha\,.\sum_{h=\nu+1}^{t}\binom{s+t-\nu-1}{h-\nu-1}\frac{\nu+1}{h}b_{t-h}\,d^{h-\nu}u_\alpha=$$

$$=b_t x_0+\sum_{\nu=0}^{t-1}\binom{s+t}{\nu+1}d^{\nu}x_\alpha\sum_{h=0}^{t-\nu-1}\binom{s+t-\nu-1}{h}\frac{\nu+1}{h+\nu+1}b_{t-\nu-h-1}\,d^{h+1}u_\alpha.$$

On peut donc mettre les équations (3) sous la forme

$$
\begin{aligned}
z_t = \sum_{\nu=0}^{t} \sum_{\alpha=1}^{2} \binom{s+t}{\nu} d^\nu x_\alpha \left[\vartheta_{t-\nu,\alpha} - \sum_{h=0}^{t-\nu} \binom{s+t-\nu}{h} a_{t-\nu-h}\, d^{h+1} u_\alpha\right] - \\
- b_t x_0 - \sum_{\nu=0}^{t-1} \binom{s+t}{\nu+1} d^\nu x_\alpha \sum_{h=0}^{t-\nu-1} \binom{s+t-\nu-1}{h} \frac{\nu+1}{h+\nu+1} b_{t-\nu-h-1}\, d^{h+1} u_\alpha .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$(0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

§ 8. Ultérieure transformation des conditions trouvées.

Posons
$$c_0 = 1. \tag{1}$$

Définissons les nombres c_ν, A_ν $(1 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ moyennant les équations

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{t} \frac{\binom{s+t}{p}}{\binom{s+p}{p}} c_{t-p} \left[\vartheta_{p\alpha} - \sum_{h=0}^{p} \binom{s+p}{h} a_{p-h}\, d^{h+1} u_\alpha\right] = \\
= \frac{(s+t)!}{s!} \sum_{h=0}^{t-1} \frac{A_{t-h}}{h!} d^{h+1} u_\alpha .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$(\alpha = 1, 2;\ 1 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

Les nombres a_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ supposés donnés, les équations (2) déterminent sans ambiguïté les nombres c_ν, A_ν $(1 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$; en effet, si l'on connait déjà c_ν, A_ν pour $1 \leqq \nu \leqq t - 1$, les équations (2) ont la forme

$$c_t \vartheta_{01} - \frac{(s+t)!}{s!} A_t\, du_1 = \ldots, \quad c_t \vartheta_{02} - \frac{(s+t)!}{s!} A_t\, du_2 = \ldots,$$

les seconds membres étant connus; on en calcule sans ambiguïté c_t et A_t, vu l'inégalité § 6, (7). En outre, on voit sans difficulté que

$$A_t = \frac{s!}{(s+t)!} a_t + \ldots, \qquad (1 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

où les points ... indiquent une quantité qui ne dépend que de a_ν $(1 \leqq \nu \leqq t - 1)$. On peut donc exprimer les quantités arbitraires a_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ moyennant les nouvelles quantités arbitraires a_0, A_ν $(1 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$; les quantités c_ν $(1 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ deviennent alors des fonctions bien déterminées de a_0, A_ν $(1 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$. Pareillement, au lieu des quantités arbitraires b_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ on peut introduire des nouvelles quantités arbitraires B_ν $(0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$ moyennant les équations

$$\sum_{p=0}^{t} \frac{\binom{s+t}{t-p}}{\binom{s+t-p}{t-p}} c_{t-p}\, b_p = -\frac{(s+t)!}{s!} B_t . \qquad (0 \leqq t \leqq \sigma - 1) \tag{3}$$

Enfin, observons (v. la fin du § 6) que ce ne sont pas les points z_t $(0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$ eux-mêmes qui importent pour le problème qui nous occupe, mais seulement l'espace linéaire déterminé par ces points; je peux donc remplacer les points z_t $(0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$ par les points

$$\bar{z}_t = \frac{s!}{(s+t)!} \sum_{p=0}^{t} \frac{\binom{s+t}{t-p}}{\binom{s+t-p}{t-p}} c_{t-p} z_p. \qquad (0 \leqq t \leqq \sigma - 1) \tag{4}$$

Or d'après (3) et § 7, (4)

$$\bar{z}_t = \frac{s!}{(s+t)!} (Z'_t - Z''_t) + B_t \,.\, x_0, \tag{5}$$

où j'ai posé

$$Z'_t = \sum_{p=0}^{t} \sum_{\nu=0}^{p} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\binom{s+t}{t-p}\binom{s+p}{\nu}}{\binom{s+t-p}{t-p}} c_{t-p}\, d^\nu x_\alpha \left[\vartheta_{p-\nu,\,\alpha} - \sum_{h=0}^{p-\nu} \binom{s+p-\nu}{h} a_{p-\nu-h}\, d^{h+1} u_\alpha\right], \tag{6}$$

$$Z''_t = \sum_{p=0}^{t} \sum_{\nu=0}^{p-1} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\binom{s+t}{t-p}\binom{s+p}{\nu+1}}{\binom{s+t-p}{t-p}} c_{t-p}\, d^\nu x_\alpha \sum_{h=0}^{p-\nu-1} \binom{s+p-\nu-1}{h} \frac{\nu+1}{h+\nu+1} b_{p-\nu-h-1}\, d^{h+1} u_\alpha. \tag{7}$$

$$(0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

Or

$$\frac{\binom{s+t}{t-p}\binom{s+p}{\nu}}{\binom{s+t-p}{t-p}} = \binom{s+t}{\nu} \frac{\binom{s+t-\nu}{p-\nu}}{\binom{s+p-\nu}{p-\nu}} \; ; \quad \sum_{p=0}^{t} \sum_{\nu=0}^{p} = \sum_{\nu=0}^{t} \sum_{p=\nu}^{t},$$

ainsi qu'on déduit de (6)

$$Z'_t = \sum_{\nu=0}^{t} \sum_{\alpha=1}^{2} \binom{s+t}{\nu} d^\nu x_\alpha\, Y_{t-\nu,\,\alpha}, \qquad (0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

où j'ai posé

$$Y_{t-\nu,\,\alpha} = \sum_{q=0}^{t-\nu} \frac{\binom{s+t-\nu}{q}}{\binom{s+q}{q}} c_{t-\nu-q} \left[\vartheta_{q,\alpha} - \sum_{h=0}^{q} \binom{s+q}{h} a_{q-h}\, d^{h+1} u_\alpha\right].$$

On a donc pour $\nu = t$

$$Y_{0\alpha} = c_0 (\vartheta_{0\alpha} - a_0\, du_\alpha) = \vartheta_{0\alpha} - a_0\, du_\alpha;$$

pour $0 \leqq \nu \leqq t - 1$ on au contraire, en vertu de (2),

$$Y_{t-\nu,\,\alpha} = \frac{(s+t-\nu)!}{s!} \sum_{h=0}^{t-\nu-1} \frac{A_{t-\nu-h}}{h!} d^{h+1} u_\alpha.$$

Donc

$$\frac{s!}{(s+t)!} Z'_t = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[(\vartheta_{0\alpha} - a_0\, du_\alpha) \frac{d^t x_\alpha}{t!} + \sum_{\nu=0}^{t-1} \frac{d^\nu x_\alpha}{\nu!} \sum_{h=0}^{t-\nu-1} A_{t-\nu-h} \frac{d^{h+1} u_\alpha}{h!}\right]. \tag{8}$$

$$(0 \leqq t \leqq \sigma - 1)$$

Faisant usage des identités

$$\binom{s+t}{t-p}\binom{s+p}{\nu+1}\binom{s+p-\nu-1}{h}=\binom{s+t}{\nu+1}\binom{s+t-\nu-1}{h}\binom{s+t-\nu-h-1}{t-p},$$

$$\sum_{p=0}^{t}\sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{h=0}^{p-\nu-1}=\sum_{\nu=0}^{t-1}\sum_{h=0}^{t-\nu-1}\sum_{p=\nu+h+1}^{t},$$

on déduit de (3) et de (7)

$$-\frac{s!}{(s+t)!}Z''_t=\sum_{\nu=0}^{t-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{d^\nu x_\alpha}{\nu!}\sum_{h=0}^{t-\nu-1}\frac{B_{t-\nu-h-1}}{\nu+h+1}\frac{d^{h+1}u_\alpha}{h!}. \tag{9}$$

$$(0\leqq t\leqq\sigma-1)$$

De (5), (8) et (9) il résulte

$$\begin{aligned}\bar{z}_t=&\sum_{\alpha=1}^{2}(\vartheta_{0\alpha}-a_0\,du_\alpha)\frac{d^t x_\alpha}{t!}+B_t x_0+\\&+\sum_{\nu=0}^{t-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{d^\nu x_\alpha}{\nu!}\sum_{h=0}^{t-\nu-1}\left(A_{t-\nu-h}+\frac{B_{t-\nu-h-1}}{\nu+h+1}\right)\frac{d^{h+1}u_\alpha}{h!}.\end{aligned}$$

$$(0\leqq t\leqq\sigma-1)$$

Or

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{t-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{d^\nu x_\alpha}{\nu!}\sum_{h=0}^{t-\nu-1}\left(A_{t-\nu-h}+\frac{B_{t-\nu-h-1}}{\nu+h+1}\right)\frac{d^{h+1}u_\alpha}{h!}=\\&=\sum_{\nu=0}^{t-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{d^\nu x_\alpha}{\nu!}\sum_{p=0}^{t-\nu-1}\left(A_{p+1}+\frac{B_p}{t-p}\right)\frac{d^{t-\nu-p}u_\alpha}{(t-\nu-p-1)!}=\\&=\sum_{p=0}^{t-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\nu=0}^{t-p-1}\frac{d^\nu x_\alpha}{\nu!}\left(A_{p+1}+\frac{B_p}{t-p}\right)\frac{d^{t-\nu-p}u_\alpha}{(t-\nu-p-1)!}=\\&=\sum_{p=0}^{t-1}\frac{A_{p+1}+B_p:(t-p)}{(t-p-1)!}\sum_{\nu=0}^{t-p-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\binom{t-p-1}{\nu}d^\nu x_\alpha\,d^{t-\nu-p-1}(du_\alpha)=\\&=\sum_{p=0}^{t-1}\frac{A_{p+1}+B_p:(t-p)}{(t-p-1)!}d^{t-p-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}x_\alpha\,du_\alpha\right)=\\&=\sum_{p=0}^{t-1}\frac{(t-p)A_{p+1}+B_p}{(t-p)!}d^{t-p-1}(dx)=\\&=\sum_{p=0}^{t-1}A_{p+1}\frac{d^{t-p}x}{(t-p-1)!}+\sum_{p=0}^{t-1}B_p\frac{d^{t-p}x}{(t-p)!},\end{aligned}$$

ainsi que

$$\bar{z}_t=\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_\alpha\frac{d^t x_\alpha}{t!}+\sum_{p=0}^{t-1}A_{p+1}\frac{d^{t-p}x}{(t-p-1)!}+\sum_{p=0}^{t}B_p\frac{d^{t-p}x}{(t-p)!}, \tag{10}$$

$$(0\leqq t\leqq\sigma-1)$$

où j'ai posé

$$\mu_\alpha=\vartheta_{0\alpha}-a_0\,du_\alpha \qquad (\alpha=1,2)$$

ainsi que, d'après § 6, (7),

$$\mu_1\,du_2-\mu_2\,du_1\neq 0. \tag{11}$$

Plus précisément, on doit avoir

$$\mu_1\,du_2-\mu_2\,du_1=\vartheta_{01}\,du_2-\vartheta_{02}\,du_1;$$

cependant, pour notre but il est évidemment permis de multiplier simultanémant tous les nombres

$$\mu_1, \mu_2, \; A_\nu (1 \leqq \nu \leqq \sigma - 1), \; B_\nu (0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1) \tag{12}$$

par le même facteur $c \neq 0$, ainsi que nous pouvons supposer que les nombres μ_1, μ_2 ne sont soumis qu'à la condition (11).

En définitive, nous pouvons énoncer le résultat de la fin du § 6 sous la forme suivante, où nous avons gardé toutes les notations du § 6: *Condition nécessaire et suffisante pour que le contact des projections C_1^*, C_2^* au point A^* soit d'ordre $s + \sigma - 1$ $(1 \leqq \sigma \leqq s)$, est qu'on puisse déterminer les nombres* (12), *liés à la condition* (11), *de manière que le centre de projection O contienne les points* (10).

§ 9. Forme définitive du résultat.

On peut énoncer le résultat des recherches qui précèdent sous la forme suivante:

Soient s et σ deux nombres entiers tels que $1 \leqq \sigma \leqq s$. Soient C_1 et C_2 deux courbes de l'espace projectif E_n à n dimensions et soit A un point commun à ces deux courbes et simple pour chacune d'elles. Soit Σ une surface de l'espace E_n contenant les courbes C_1 et C_2 et ayant en A un point simple. Supposons que les courbes C_1 et C_2 aient un contact d'ordre précisément $s - 1$ au point A. Soit O un espace linéaire à m $(0 \leqq m \leqq n - 3)$ dimensions contenu dans E_n et n'ayant aucun point commun aux tangentes aux courbes C_1 et C_2 au point A (ces tangentes ne sont distinctes que *si* $s = 1$). *Soit Ω un espace linéaire à $n - m - 1$ dimensions contenu dans E_n, sans point commun avec O. Projetons les courbes C_1 et C_2 du centre O dans l'espace Ω; soient C_1^* et C_2^* les projections des courbes C_1 et C_2: soit A^* la projection du point A. Les courbes C_1^* et C_2^* ont un contact d'ordre $s + \sigma - 1$ au point A^* alors et alors seulement si l'espace O contient un espace O' construit de la manière suivante: On fera correspondre, point par point, à la courbe C_1 une autre courbe C'** de manière que le point B' de C' qui correspond au point B quelconque de C_1 soit situé dans le plan tangent à la surface Σ au point B; l'espace O' est alors l'espace osculateur d'ordre $\sigma - 1$ à ce point A' de C' qui correspond au point A de C_1.*

Dans cet énoncé, l'espace osculateur d'ordre $\sigma - 1$ à la courbe C' lieu du point $X(v)$, au point correspondant à $v = \bar{v}$, est l'espace linéaire déterminé par les points

$$\left[\frac{d^\nu X(v)}{dv^\nu}\right]_{v = \bar{v}}; \; (0 \leqq \nu \leqq \sigma - 1)$$

* La courbe C' peut se réduire à un point.

pour $\sigma=0$, c'est simplement le point $X(\mathring{v})$; pour $\sigma=1$ c'est encore le point $X(\mathring{v})$ si ce point n'est pas simple pour C'; au contraire c'est la tangente à C' au point $X(\mathring{v})$ si ce point est simple pour C'.

La démonstration est maintenant très simple: Le point $X(v)$ de la courbe C' correspondant au point $x[\varphi_1(v), \varphi_2(v)]$ (je garde les notations du § 6) de la courbe C_1 a la forme

$$X(v)=k(v)\,x[\varphi_1(v), \varphi_2(v)]+\sum_{\alpha=1}^{2} l_\alpha(v)\,x_\alpha[\varphi_1(v), \varphi_2(v)].$$

Le point $X(\mathring{v})=[kx+l_1x_1+l_2x_2]_0$ n'est pas situé sur la droite (x_0, dx), cette droite devant n'avoir aucun point commun à l'espace O' contenu dans O; donc en profitant de ce qu'on peut multiplier toutes les coordonnées $X^{(i)}(v)\ (0\leq i\leq n)$ par un facteur commun quelconque, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que

$$X(v)=\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_\alpha x_\alpha[\varphi_1(v),\varphi_2(v)]+k(v)\,x[\varphi_1(v),\varphi_2(v)]+\lambda(v)\frac{d}{dv}x[\varphi_1(v),\varphi_2(v)],$$

où $\lambda(\mathring{v})=0$ et μ_1, μ_2 sont deux nombres fixes satisfaisant à l'inégalité § 8 (11). L'espace O' est alors déterminé par les points

$$d^t X=\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_\alpha d^t x_\alpha+\sum_{p=0}^{t-1}\binom{t}{p+1}d^{p+1}\lambda\,.\,d^{t-p}x+\sum_{p=0}^{t}\binom{t}{p}d^p k\,.\,d^{t-p}x.$$

Or posons

$$d^{p+1}\lambda=(p+1)!\,A_{p+1}\ (0\leq p\leq t-1),\quad d^p k=p!\,B_p\ (0\leq p\leq t)$$

ainsi que les A_{p+1} et B_p sont des nombres qui peuvent être choisis arbitrairement; alors

$$\frac{d^t X}{t!}=\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_\alpha\frac{d^t x_\alpha}{t!}+\sum_{p=0}^{t-1}A_{p+1}\frac{d^{t-p}x}{(t-p-1)!}+\sum_{p=0}^{t}B_p\frac{d^{t-p}x}{(t-p)!}.$$
$$(0\leq t\leq\sigma-1)$$

En comparant avec § 8, (10) on voit bien l'exactitude de l'énoncé.

Il est remarquable que le nombre s *n'entre dans l'énoncé que par l'inégalité* $s\geq\sigma$.

§ 10. Les tangentes conjuguées de M. Bompiani.

Si l'on voulait approfondir notre résultat, on devrait évidemment prendre en considération toutes les relations lineaires et homogènes qui peuvent exister entre les points

$$x_0,\ d^\nu x_1,\ d^\nu x_2. \qquad (0\leq\nu\leq\sigma-1)$$

Or ceci conduit à la belle généralisation, due à M. Bompiani*, de la

* *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi*, Rendiconti di Palermo, t. 46 (1922).

notion classique de tangente conjuguée. En gardant les notations du § 6, on peut énoncer la définition de M. Bompiani, en la généralisant un peu, de la manière suivante*: Une tangente $(x, \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)_0$ à la surface Σ au point A s'appelle *conjuguée à l'élement d'ordre* $\sigma - 1$ ($\sigma \geqq 2$, v. la définition de l'élément à la fin du § 1) *de la courbe* C_1 *au point* A, si le point

$$\mu_1 d^{\sigma-1} x_1 + \mu_2 d^{\sigma-1} x_2$$

dépend linéairement des points

$$x_0, d^\nu x_1, d^\nu x_2. \qquad (0 \leqq \nu \leqq \sigma - 2)$$

On voit facilement que cette définition dépend seulement de Σ, C_1 et A et non de la représentation analytique choisie. Pour $\sigma = 1$ on a la tangente conjuguée, au sens classique, à la tangente à la courbe C_1 au point A. La tangente conjuguée, au sens général, peut ne pas exister, ou avoir une position bien déterminée, ou enfin ce peut être une tangente quelconque à Σ au point A. Si la tangente conjuguée à l'élément d'ordre $\sigma - 1$ de la courbe C_1 existe à *chaque* point de C_1, la même tangente est aussi conjuguée à l'élement d'ordre $s - 1$ de la courbe C_1 pour chaque valeur de $s > \sigma$; c'est qu'on voit tout de suite par différentiation; il en est tout autrement si l'on ne considère qu'un point particulier A,

On peut donner à la définition de tangente conjuguée une autre forme, en utilisant la notion si importante d'espace osculateur à une variété. L'espace osculateur d'ordre $\sigma - 1$ $(\sigma > 1)$ à une variété V_m à m dimensions de l'espace projectif E_n, engendrée par le point $x(u_1, \ldots, u_m)$, au point de V_m correspondant aux valeurs $(\mathring{u}_1, \ldots, \mathring{u}_m)$ des paramètres, c'est l'espace linéaire déterminé par les points

$$\left[\frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}}{\partial u_1^{\alpha_1} \ldots \partial u_m^{\alpha_m}} x(u_1, \ldots, u_m)\right]_{u_1 = \mathring{u}_1, \ldots, u_m = \mathring{u}_m}.$$

$$(0 \leqq \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leqq \sigma - 1)$$

Pour $\sigma = 1$, c'est simplement le point $x(\mathring{u}_1, \ldots, \mathring{u}_m)$. Pour $\sigma = 2$, c'est l'espace tangent à la variété V_m au point $x(\mathring{u}_1, \ldots, \mathring{u}_m)$; la dimension en est m, si ce point est simple pour V_m, $< m$ dans le cas contraire. L'espace osculateur d'ordre $\sigma - 1$ à une variété V_{m+h} à $m + h$ dimensions de l'espace projectif E_n, engendrée par l'espace linéaire à m dimensions $(x_0, x_1 \ldots, x_\alpha)$ $(x_\alpha = x_\alpha(u_1, \ldots u_m), 0 \leqq \alpha \leqq h)$, dans l'espace générateur

$$(x_0, x_1 \ldots x_\alpha)_{u_1 = \mathring{u}_1, \ldots u_m = \mathring{u}_m}$$

de la variété V_{m+h}, c'est l'espace linéaire déterminé par les points

$$\left[\frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}}{\partial u_1^{\alpha_1} \ldots \partial u_m^{\alpha_m}} x_\beta(u_1, \ldots, u_m)\right]_{u_1 = \mathring{u}_1, \ldots, u_m = \mathring{u}_m}.$$

$$(0 \leqq \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leqq \sigma - 1;\ 0 \leqq \beta \leqq h)$$

---

* On voit que de la définition s'applique non seulement à une surface, mais aussi à une variété à un nombre quelconque de dimensions.

Cela étant, soit V_3 la variété engendrée par les plans tangents

$$[x(\varphi_1(v),\ \varphi_2(v)),\ x_1(\varphi_1(v),\ \varphi_2(v)),\ x_2(\varphi_1(v),\ \varphi_2(v))]$$

à la surface Σ le long de la courbe C_1. Soit $T_{\sigma-2}$ l'espace osculateur d'ordre $\sigma-2$ $(\sigma\geq 2)$ à la variété V_2 dans le plan générateur $(x\,x_1\,x_2)_0$ de V_3. Soit V_2 une surface réglée engendrée par des tangents

$$[x(\varphi_1(v),\ \varphi_2(v)),\ \sum_{\alpha=1}^{2}\mu_\alpha(v)\,x_\alpha(\varphi_1(v),\ \varphi_2(v))]$$

à la surface Σ le long de la courbe C_1. Soit $\tau_{\sigma-1}$ l'espace osculateur d'ordre $\sigma-1$ à la surface V_2 dans la génératrice $(x,\ \mu_1 x_1+\mu_2 x_2)_0$. La droite $(x,\ \mu_1 x_1+\mu_2 x_2)_0$ est une tangente conjuguée à l'élément d'ordre $\sigma-1$ de la courbe C_1 au point A alors et alors seulement si l'espace $\tau_{\sigma-1}$ fait partie de l'espace $T_{\sigma-2}$. Il est intéressant que la surface V_2 n'entre dans l'énoncé que par sa génératrice $(x,\ \mu_1 x_1+\mu_2 x_2)_0$ *.

En retournant au problème qui m'occupe actuellement, je ne traiterai d'une manière approfondie que les cas $\sigma=1,\ 2,\ 3$.

§ 11. Etude des cas $\sigma=1$ et $\sigma=2$.

Pour $\sigma=1$, le résultat est très simple*; le plan principal de Halphen-Berzolari* (v. § 4) *est le plan* $(x\,x_1\,x_2)_0$ *tangent à la surface* Σ *au point* A.

Passons au cas $2=\sigma\leq s$. Les équations § 8, (10) se réduisent à

$$\bar z_0=\mu_1(x_1)_0+\mu_2(x_2)_0+B_0 x_0,$$
$$\bar z_1=\mu_1\,dx_1+\mu_2\,dx_2+(A_1+B_0)\,dx+B_1 x_0.$$

Quatre cas sont à distinguer: I. La tangente conjuguée à $(x_0,\,dx)$ (par rapport à la surface Σ) n'existe pas. II. La tangente $(x,\ \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)_0$ conjuguée à la tangente $(x_0,\,dx)$ existe, est unique et ne coïncide pas avec $(x_0,\,dx)$. III. La tangente conjuguée $(x_0,\,dx)$ existe, est unique et coïncide avec $(x_0,\,dx)$. IV. La tangente conjuguée a $(x_0,\,dx)$ est indéterminée. Le cas I exige $n\geq 4$.

Je me borne à indiquer les résultats qu'on vérifie sans peine.

I. Soit V_3 la variété engendrée par les plans tangents

$$[x(\varphi_1(v),\varphi_2(v)),\quad x_1(\varphi_1(v),\varphi_2(v)),\quad x_2(\varphi_1(v),\varphi_2(v))]$$

à la surface Σ le long de la courbe C_1. L'espace tangent à V_3 au point

$$\mu_1(x_1)_0+\mu_2(x_2)_0+\mu x_0$$

est évidemment l'espace à trois dimensions

$$[x_0,\ (x_1)_0,\ (x_2)_0,\quad \mu_1\,dx_1+\mu_2\,dx_2]\,; \tag{1}$$

cet espace est donc le même à tous les points de la droite

$$[x_0,\ \mu_1(x_1)_0+\mu_2(x_2)_0], \tag{2}$$

* M. Bompiani ne donne qu'un cas très particulier de cet énoncé (l. c., § 4).

le point A de cette droite étant excepté*. On arrive ainsi à une correspondance homographique π entre le faisceau (2) des tangentes à Σ au point A et le faisceau (1) d'espaces à trois dimensions (1) contenus dans l'espace à quatre dimensions

$$[x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, dx_1, dx_2] \tag{3}$$

et passants par le plan $(x x_1 x_2)_0$. Or soit B un point situé dans le plan $(x x_1 x_2)_0$ mais non sur la droite (x_0, dx), et menons par le point B une droite p située dans l'espace du faisceau (1) correspondant, dans l'homographie π, à la droite AB, mais non située dans le plan $(x x_1 x_2)_0$. Ces droites p forment une famille ∞^4 (∞^2 pour chaque position du point B) et sont toutes contenues dans l'espace à 4 dimensions (3). Les projections C_1^*, C_2^* ont un contact d'ordre $s+1$ au point A^* alors et alors seulement si le centre de projection O — supposé ne contenir aucun point de (x_0, dx) — contient au moins une droite p de la famille ainsi définie. Cela exige que la dimension de O soit ≥ 1.

II. Définissons la variété V_3 comme dans le cas I. Maintenant, l'espace tangent à V_3 au point quelconque

$$\mu_1 (x_1)_0 + \mu_2 (x_2)_0 + \mu x_0$$

du plan générateur $(x x_1 x_2)_0$ est fixe; c'est l'espace à 3 dimensions

$$[x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, d^2x]\,^{**}; \tag{4}$$

cependant, les points de la tangente $(x, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, qui ne sont pas simples pour V_3, font exception, l'espace tangent relatif se réduisant au plan $(x, x_1, x_2)_0$. Les projections C_1^*, C_2^* ont un contact d'ordre $s+1$ au point A^* alors et alors seulement si le centre de projection O — supposé ne contenir aucun point de (x_0, dx) — contient: 1° ou un point divers de A de la tangente $(x, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)_0$ conjuguée à (x_0, dx); 2° ou bien une droite située dans l'espace (4), cette droite ne rencontrant ni (x_0, dx) ni $(x, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)_0$. La seconde éventualité exige $n \geq 4$, la dimension de O étant $< n-3$.

III. Considérons toujours la variété V_3. L'espace tangent à V_3 au point quelconque

$$\mu_1 (x_1)_0 + \mu_2 (x_2)_0 + \mu x_0$$

du plan générateur $(x x_1 x_2)_0$ est, ici encore, fixe; c'est espace à 3 dimensions contenant les points

$$x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, dx_1, dx_2; \tag{5}$$

les points de la tangente (x_0, dx), qui ne sont pas simples pour V_3, font exception, l'espace tangent relatif se réduisant au plan $(x x_1 x_2)_0$.

---

* Le point A n'est pas simple pour V_3 et l'espace tangent à V_3 en A n'a que deux dimensions (c'est le plan $(x x_1 x_2)_0$).

** On obtient le même espace en joignant le plan tangent $(x x_1 x_2)_0$ au plan osculateur $(x_0, dx, d^2 x)$ à C_1 en A.

Les projections C_1^*, C_2^* ont un contact d'ordre $s+1$ au point A^* alors et alors seulement si le centre de projection O — supposé ne contenir aucun point de (x_0, dx) — contient une droite de l'espace (5), cette droite ne rencontrant pas (x_0, dx). Cela n'est possible que si $n \geqq 4$, parce que la dimension de O doit être $\leqq n-3$.

IV. Les projections C_1^*, C_2^* ont un contact d'ordre $s+1$ au point A^* alors et alors seulement si le centre de projection O — supposé ne contenir aucun point de (x_0, dx) — contient un point du plan $(x x_1 x_2)_0$. Dans ce cas, aucun point de l'espace générateur $(x x_1 x_2)_0$ n'est pas simple pour la variété V_3.

§ 12. Etude du cas $\sigma = 3\,(s \geqq 3)$.

Si les projections C_1^*, C_2^* ont un contact d'ordre $\geqq s$ au point A^* le centre de projection O supposé sans point commun à la tangente (x_0, dx), le centre de projection doit contenir un point bien déterminé B du plan $(x x_1 x_2)_0$. La droite t qui joint les points A et B est une tangente à la surface Σ au point A, différente naturellemente de la tangente (x_0, dx). Pour abréger, je dirai que *le centre de projection O appartient à la tangente t.*

Choisissons arbitrairement une tangente $t = (x, \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)_0$ différente de $(x_0\, dx)$. D'après § 8, (10), les projections C_1^* et C_2^* ont un contact d'ordre $s+2$ au point A^*, *le centre de projection O appartenant à la tangente t,* alors et alors seulement si l'on peut déterminer les nombres A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 de manière que O contienne les points

$$\begin{aligned} z_0 &= \mu_1 (x_1)_0 + \mu_2 (x_2)_0 + B_0 x_0, \\ z_1 &= \mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + (A_1 + B_0)\, dx + B_1 x_0, \\ z_2 &= \mu_1 d^2 x_1 + \mu_2 d^2 x_2 + (2A_1 + B_0)\, d^2 x + 2\,(A_2 + B_1)\, dx + 2 B_2 x_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour interpréter géométriquement ce résultat, *choisissons une surface réglée R engendrée par des tangentes à la surface Σ le long de la courbe C_1 et contenant comme génératrice la tangente t choisie plus haut.* La surface R est le lieu du point*

$$X(v, w) = \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha x_\alpha (\varphi_1(v), \varphi_2(v)) + \\ + \omega(v) \cdot \frac{d}{dv} x(\varphi_1(v), \varphi_2(v)) + w \cdot x(\varphi_1(v), \varphi_2(v)),$$

$\omega(v)$ étant une fonction de v telle que $\omega(\bar v) = 0$ et d'ailleurs arbitraire, mais choisie d'une manière fixe.

---

* La représentation analytique choisie de la surface R exclut les points de la courbe C_1; mais cela n'importe pas pour notre but.

Je distinguerai *huit cas*:

I. *La tangente conjuguée* à (x_0, dx) n'existe pas; la tangente t n'est pas conjuguée* à l'élément du second ordre de la courbe C_1 au point A.* Cela exige que $n \geqq 5$.

Le plan tangent à la surface R au point $X(\overset{0}{v}, w)$ de la génératrice t est déterminé par les points

$$X(\overset{0}{v}, w), \quad \frac{\partial X(\overset{0}{v}, w)}{\partial w}, \quad \left[\frac{\partial X(v, w)}{\partial v}\right]_{v=\overset{0}{v}}; \tag{2}$$

c'est donc le plan

$$|x_0, \mu_1 (x_1)_0 + \mu_2 (x_2)_0, \mu_1\, dx_1 + \mu_2\, dx_2 + (w + d\omega)\, dx|; \tag{3}$$

l'espace osculateur du second ordre à la surface R au point $X(\overset{0}{v}, w)$ est déterminé par les points (2) et

$$\frac{\partial^2 X(\overset{0}{v}, w)}{\partial w^2}, \quad \left[\frac{\partial^2 X(v, w)}{\partial v\, \partial w}\right]_{v=\overset{0}{v}}, \quad \left[\frac{\partial^2 X(v, w)}{\partial v^2}\right]_{v=\overset{0}{v}};$$

c'est donc l'espace à 4 dimensions**

$$|x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, \mu_1\, dx_1 + \mu_2\, dx_2, \mu_1\, d^2 x_1 + \mu_2\, d^2 x_2 + (w + 2\, d\omega)\, d^2 x|. \tag{4}$$

En comparant avec (1), on voit que: 1° le point z_0 coïncide avec $X(\overset{0}{v}, B_0)$; 2° le point z_1 est situé dans le plan tangent à la surface R au point $X(\overset{0}{v}, A_1 + B_0 - d\omega)$, mais non sur la droite (x_0, dx); 3° le point z_2 est situé dans l'espace à quatre dimensions osculateur du second ordre à la surface R au point $X(\overset{0}{v}, 2A_1 + B_0 - 2\, d\omega)$, mais non dans l'espace à trois dimensions

$$|x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, \mu_1\, dx_1 + \mu_2\, dx_2|; \tag{5}$$

4° les points z_0, z_1, z_2 ne sont soumis à aucune autre condition. L'espace (5) est l'espace tangent à la surface réglée R dans la génératrice t. En observant encore que les deux couples de points de la droite t

$$x_0, \ X(\overset{0}{v}, A_1 + B_0 - d\omega); \quad X(\overset{0}{v}, B_0), \ X(\overset{0}{v}, 2A_1 + B_0 - 2\, d\omega)$$

sont harmoniques, on arrive au résultat suivant: *Soit P_1 un point quelconque de t, différent du point A; soient P_0, P_2 deux autres points de t différents de A et tels que les deux couples*

$$A, P_1; \quad P_0, P_2$$

*soient harmoniques***; soit Q_1 un point situé dans le plan tangent à la surface R au point P_1, mais non sur la droite (x_0, dx); soit Q_2 un point situé dans l'espace osculateur du second ordre à la surface P_2, mais non dans l'espace tangent à R dans la génératrice t; soit π le plan déterminé*

---

* par rapport à la surface Σ; pareillement dans tous les autres cas.

** On doit tenir compte de ce que la droite t diffère de (x_0, dx), ainsi que $\mu_1\, du_2 - \mu_2\, du_1 \neq 0$.

*** Cela n'exclut pas l'éventualité que les trois points P_0, P_1, P_2 soient confondus.

par les points P_0, Q_1, Q_2. Le plan π engendre une famille ∞^5 (∞^3 pour chaque choix des points P_0, P_1, P_2), tous les plans de la famille étant contenus dans l'espace à 5 dimensions

$$|x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, dx_1, dx_2, \mu_1 d^2 x_1 + \mu_2 d^2 x_2| \tag{6}$$

osculateur du second ordre à la surface réglée R dans la génératrice t. Les projections C^*_1 et C^*_2 ont un contact d'ordre $s+2$ au point A^*, le centre de projection O appartenant à la tangente t, alors et alors seulement si O contient un plan π au moins de la famille ∞^5 qui vient d'être décrite. Cela exige que la dimension de O soit $\geqq 2$.

L'espace (6) est indépendant du choix de la tangente t dans le cas où il existe une tangente conjuguée à l'élément du second ordre de C_1 en A (ce qui arrive certainement si $n=5$), et dans ce cas seulement.

II. *La tangente conjuguée à (x_0, dx) existe, mais ne coïncide pas avec t; la tangente t n'est pas conjuguée à l'élément du second ordre de la courbe C_1 au point A.* Cela exige que $n \geqq 4$.

Le résultat qui vient d'être exposé reste valable; cependant, l'espace (4) ne dépend pas de w, car le point $d^2 x$ dépend linéairement de

$$x_0, \ (x_1)_0, \ (x_2)_0, \ \mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2.$$

C'est pourquoi on peut donner un énoncé plus simple: *Soient P_0 et P_1 deux points de t, distincts ou non, mais divers de A; soit Q_1 un point situé dans le plan tangent à R au point P_1, mais non sur la droite (x_0, dx); soit π un plan contenant P_0 et Q_1 et situé dans l'espace à 4 dimensions*

$$[(x)_0, (x_1)_0, (x_2)_0, \mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2, \mu_1 d^2 x_1 + \mu_2 d^2 x_2] \tag{7}$$

osculateur du second ordre à la surface réglée R dans la génératrice t, mais ne pas situé dans l'espace à 3 dimensions (5) *tangent à R dans cette génératrice. Le plan π engendre une famille ∞^5 (∞^3 pour chaque choix des points P_0, P_1), tous les plans de la famille étant contenus dans l'espace* (7). *Les projections C_1^* et C^*_2 ont un contact d'ordre $s+2$ au point A^*, le centre de projection O appartenant à la tangente t, alors et alors seulement si O contient un plan π au moins de la famille ∞^5 qui vient d'être décrite.* Cela exige que la dimension de O soit $\geqq 2$, ce qui n'est possible que si $n \geqq 5$.

L'espace (7) est indépendant du choix de la tangente t dans le cas où il existe une tangente conjuguée à l'élément du second ordre de C_1 en A (ce qui arrive certainement si $n=4$) et dans ce cas seulement.

III. *La tangente conjuguée à (x_0, dx) n'existe pas; la tangente t est conjuguée à l'élément du second ordre de la courbe C_1 au point A* Cela exige que $n \geqq 4$.

Dans ce cas les points

$$x_0, \ (x_1)_0, \ (x_2)_0, \ dx_1, \ dx_2$$

sont linéairement indépendants; au contraire, on a une relation de la forme

$$\mu_1 d^2 x_1 + \mu_2 d^2 x_2 = m_1 dx_1 + m_2 dx_2 + \ldots,$$

où ... indique une combinaison linéaire de x_0, $(x_1)_0$, $(x_2)_0$.

Le plan tangent à la surface R au point $X(v, w)$ continue à être donné par (3). Posons

$$w_2 = -2\,d\omega - \frac{\mu_1 m_2 - \mu_2 m_1}{\mu_1 du_2 - \mu_2 du_1}.$$

L'espace osculateur du second ordre à la surface R au point $X(v, w)$ est, pourvu que $w \neq w_2$,

$$[x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, dx_1, dx_2]; \tag{8}$$

il a donc 4 dimensions et ne dépend pas de w; c'est aussi l'espace osculateur du second ordre à R dans la génératrice t. Au contraire, l'espace osculateur du second ordre à R au point $X(v, w_2)$ n'a que 3 dimensions; c'est l'espace

$$[x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, \mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2]. \tag{5}$$

En raisonnant comme dans le cas I, on arrive au résultat suivant: *Il y a, sur la génératrice t de la surface réglée R, un point et un seul, différent de A, dans lequel l'espace osculateur du second ordre à R n'a que 3 dimensions; désignons par B ce point et par ω l'espace osculateur relatif. Soit P_1 un point quelconque de t, différent de A; soit P_0 le conjugué harmonique du point B par rapport au couple A, P_1 (on peut avoir $B = P_0 = P_1$); soit p une droite différente de t, passant par le point P_0 et située dans le plan tangent à R au point P_1. On obtient ainsi une famille F_1 ∞^2 de droites p (∞^1 pour chaque position de P_1), chaque droite de la famille F_1 étant située dans l'espace ω. Soient encore P'_0 et P'_1 deux points de t, distincts ou confondus, mais divers de A, et tels que le conjugué harmonique de B par rapport au couple A, P'_1 soit différent de P'_0; soit Q_1 un point situé dans le plan tangent à la surface R au point P'_1, mais non sur la droite (x_0, dx); soit Q_2 un point situé dans l'espace à 4 dimensions (8) osculateur du second ordre à la surface réglée R dans la génératrice t, le point Q_2 n'appartenant pas à ω; soit enfin π le plan déterminé par les points P'_0, Q_1, Q_2. Le plan π engendre une famille F_2 ∞^5 (∞^3 pour chaque choix des points P'_0 et P'_1), tous les plans de la famille F_2 étant contenus dans l'espace à 4 dimensions (8). Les projections C_1^* et C_2^* ont un contact d'ordre $s+2$ au point A^*, le centre de projection O appartenant à la tangente t, alors et alors seulement si O contient: 1° ou une droite de la famille F_1, 2° ou bien un plan de la famille F_2.* La seconde éventualité n'est possible que si $n \geq 5$, parce que la dimension de O est $\leq n-3$.

IV. *La tangente conjuguée à (x_0, dx) existe, mais ne coïncide pas* *avec t; la tangente t est conjuguée à l'élement du second ordreide la courbe C_1' au point A.*

Dans ce cas les points

$$x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, \quad \mu_1\, dx_1 + \mu_2\, dx_2$$

sont linéairement indépendants, et les points

$$dx_1, dx_2, d^2x, \quad \mu_1\, d^2x_1 + \mu_2\, d^2x_2$$

en sont des combinaisons linéaires. On voit qu'on peut toujours choisir les nombres A_2 et B_2 de manière que le point $\bar{z}_2$ soit linéairement dépendant des points $\bar{z}_0$ et $\bar{z}_1$. Le plan tangent à R au point $X(\overset{\circ}{v}, w)$ continue à être donné par (3). Au contraire, l'espace osculateur du second ordre à R au point $X(\overset{\circ}{v}, w)$ ne dépend pas de w et coïncide avec l'espace à trois dimensions

$$[x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, \quad \mu_1\, dx_1 + \mu_2\, dx_2] \tag{5}$$

tangent à la surface réglée R dans la génératrice t. On arrive sans difficulté au résultat suivant: *Soit ω l'espace* (5) *à 3 dimensions tangent à la surface réglée R dans la génératrice t. Soit P un point arbitraire de t, différent de A. Soit p une droite contenant le point P, située dans l'espace ω, mais non dans le plan $(x\, x_1\, x_2)_0$ tangent à Σ en A. La droite p engendre une famille F ∞^3 (∞^2 pour chaque position de P), chaque droite de la famille F étant contenue dans l'espace ω. Les projections C_1^* et C_2^* ont un contact d'ordre $s+2$ au point A^*, le centre de projection O appartenant à la tangente t, alors et alors seulement si O contient une droite de la famille F.* Cela n'est possible que si $n \geqq 4$, parce que la dimension de O doit être $\leqq n-3$.

V. *La tangente conjuguée à (x_0, dx) existe, est bien déterminée et coïncide avec t; la tangente t n'est pas conjuguée à l'élément du second ordre de la courbe C_1 au point A.* Cela exige que $n \geqq 4$.

Dans ce cas les points

$$x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, d^2x, \mu_1\, d^2x_1 + \mu_2\, d^2x_2$$

sont linéairement indépendants; au contraire, on peut déterminer le nombre h de manière que le point

$$\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 - h dx$$

soit une combinaison linéaire de x_0 et $(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)_0$. Si

$$A_1 + B_0 + h = 0,$$

on peut choisir le nombre B_1 de manière que le point $\bar{z}_1$ dépende linéairement de $\bar{z}_0$. En dehors de ce cas, il n'y a aucune relation linéaire entre les points $\bar{z}_0$, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$. Posons

$$w_1 = -h - d\omega.$$

Le point $X(\mathring{v}, w_1)$ n'est pas simple pour la surface réglée R; l'espace tangent à R à ce point se réduit à la droite t. Pour $w \neq w_1$ le plan tangent à la surface R au point $X(\mathring{v}, w)$ ne dépend pas de w; c'est simplement le plan $(x x_1 x_2)_0$ tangent à Σ au point A. L'espace osculateur du second ordre à la surface R au point $X(\mathring{v}, w)$ est donné par

$$|x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, \mu_1 d^2 x_1 + \mu_2 d^2 x_2 + (w + 2d\omega)\, d^2 x|;$$

il a donc 3 dimensions. On obtient sans difficulté le résultat suivant*: *Il y a, sur la génératrice t de la surface réglée R, un point et un seul, différent de A, qui n'est pas simple pour la surface R; désignons ce point par B. Choisissons un point quelconque P_0 de la droite t, différent du point A; soit P_2 le conjugué harmonique de P_0 par rapport au couple A, B: soit p une droite menée par le point P_0 dans l'espace osculateur du second ordre (à 3 dimensions) à la surface R au point P_2, la droite p n'étant pas située dans le plan tangent à la surface Σ au point A. La droite p engendre une famille $F\,\infty^3$ de droites (∞^2 pour chaque position du point P_0), toutes les droites de la famille F étant contenues dans l'espace à 4 dimensions*

$$|x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, d^2 x, \mu_1 d^2 x_1 + \mu_2 d^2 x_2|$$

osculateur du second ordre à la surface réglée R dans la génératrice t. Les projections C_2^* et C_2^* ont un contact d'ordre $s + 2$ au point A^*, le centre de projection O appartenant à la tangente t, alors et alors seulement si O contient une droite de la famille F. Cela exige que la dimension de O soit ≥ 1.

VI. *Chaque tangente à la surface Σ au point A est conjuguée à la tangente (x_0, dx); la tangente t n'est pas conjuguée à l'élément du second ordre de la courbe C_1 au point A.*

Le résultat énoncé dans le cas V reste valable; cependant, l'espace (9) ne dépend pas, dans le cas présent, de la valeur de w et l'on peut donner un énoncé plus simple: *L'espace osculateur ω du second ordre à la surface réglée R dans la génératrice t à 3 dimensions; c'est l'espace*

$$|x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, \mu_1 d^2 x_1 + \mu_2 d^2 x_2|. \tag{9}$$

Menons, par un point arbitraire P de la droite t, différent de A, une droite quelconque p située dans l'espace ω, mais non dans le plan tangent à Σ en A. Ces droites p engendrent une famille $F\,\infty^3$ de droites situées dans l'espace ω. Les projections C_1^* et C_2^* ont un contact d'ordre $s + 2$ au point A^*, le centre de projection O appartenant à la tangente t, alors et alors seulement si O contient une droite de la famille F. Cela est impossible si $n = 3$, car la dimension de O doit être $\leq n - 3$.

---

* On ne doit pas oublier qu'on suppose que O soit sans point commun avec (x_0, dx).

L'espace ω est indépendant du choix de la tangente t dans le cas où il existe une tangente conjuguée à l'élément du second ordre de C_1 en A (ce qui arrive certainement si $n=3$) et dans ce cas seulement.

VII. *La tangente conjuguée à* (x_0, dx) *existe, est bien déterminée et coïncide avec* t; *la tangente* t *est conjuguée à l'élément du second ordre de la courbe* C_1 *au point* A.

Ici, les points

$$x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, d^2 x$$

sont linéairement indépendants; au contraire, on a des relations de la forme

$$\mu_1 \, dx_1 + \mu_2 \, dx_2 = h \, dx + \ldots,$$
$$\mu_1 \, d^2 x_1 + \mu_2 \, d^2 x_2 = kd^2 x + ldx + \ldots,$$

où ... indique une combinaison linéaire de x_0 et $\mu_1 (x_1)_0 + \mu_2 (x_2)_0$. Si la condition

$$A_1 + B_0 + h = 0 \tag{10}$$

n'est pas vérifiée, les points $\bar{z}_0$ et $\bar{z}_1$ sont linéairement indépendants; or ils appartiennent au plan $(x x_1 x_2)_0$, ainsi que tout espace O passant par $\bar{z}_0$ et $\bar{z}_1$ rencontre la droite (x_0, dx). Supposons donc que l'équation (10) soit vérifiée; on peut alors choisir le nombre B_1 de manière que $\bar{z}_1$ dépende linéairement de $\bar{z}_0$. Si l'on a de plus

$$2 A_1 + B_0 + k = 0, \tag{11}$$

on peut déterminer A_2 et B_2 de manière que $\bar{z}_2$ dépende aussi linéairement de $\bar{z}_0$. Au contraire, si la condition (11) n'est pas vérifiée, le point $\bar{z}_2$ est linéairement indépendant de $\bar{z}_0$ et l'on a

$$\bar{z}_2 = (2 A_1 + B_0 + k) \, d^2 x + \ldots,$$

où ... indique un point de $(x x_1 x_2)_0$. De (10) et (11) on calcule $B_0 = k - 2h$, ainsi que

$$\bar{z}_0 = \mu_1 (x_1)_0 + \mu_2 (x_2)_0 + (k - 2h) \, x_0 = X(\mathring{v}, k - 2h). \tag{12}$$

Le point $X(\mathring{v}, -d\omega - h)$ de la génératrice t de la surface réglée R n'est pas simple pour R, l'espace tangent relatif se réduisant à t; pour $w \neq -d\omega - h$, le plan $(x x_1 x_2)_0$ est le plan tangent à R en $X(\mathring{v}, w)$. L'espace osculateur du second ordre au point $X(\mathring{v}, w)$ est l'espace à 3 dimensions

$$[x_0, (x_1)_0, (x_2)_0, d^2 x] \tag{13}$$

si $w \neq -2 \, d\omega - k$; au contraire, l'espace osculateur relatif au point $X(\mathring{v}, -2 \, d\omega - k)$ se réduit au plan $(x x_1 x_2)$. Les couples

$$x_0, \; X(\mathring{v}, -d\omega - h); \quad X(\mathring{v}, k - 2h), \; X(\mathring{v}, -2 \, d\omega - k)$$

de points de la droite t sont harmoniques. De tout ceci on obtient: *Il y a, sur la génératrice* t *de la surface réglée* R: 1° *un point* P_1 *divers de* A *qui n'est pas simple pour* R, *l'espace tangent à* R *en* P_1 *se réduisant à la droite* t; 2° *un point* P_2 *divers de* A *tel que l'espace osculateur du second ordre à* R *à ce point se réduit au plan tangent à* Σ

en A †. *Soit* P_0 *le conjugué harmonique du point* P_2 *par rapport au couple* A, P_1. *Les projections* C_1^* *et* C_2^* *ont un contact d'ordre* $s+2$ *au point* A^*, *le centre de projection* O *appartenant à la tangente* t, *alors et alors seulement si* O *contient:* 1° *ou le point* P_0, 2° *ou bien une droite* p *située dans l'espace à* 3 *dimensions* (13) *osculateur du second ordre à la surface réglée* R *dans la génératrice* t. La seconde éventualité exige $n \geq 4$, parce que la dimension de O doit être $< n-3$.

VIII. *Chaque tangente à la surface* Σ *au point* A *est conjuguée à la tangente* (x_0, dx); *la tangente* t *est conjuguée à l'élément du second ordre de la courbe* C_1 *au point* A.

Dans ce cas, les points

$$x_0,\ (x_1)_0,\ (x_2)_0$$

sont linéairement indépendants et les points

$$dx_1,\ dx_2,\ \mu_1 d^2 x_1 + \mu_2 d^2 x_2$$

en sont des combinaisons linéaires.

Comme dans le cas précédent, il faut supposer (10); mais alors, dans le cas qui nous occupe, cela suffit pour que les points z_1 et z_2 deviennent, par un choix convenable des nombres B_1, A_2 et B_2, linéairement dépendants de z_0. Quant à la surface R, le point $X(\mathring{v}, -d\omega - h)$, ici encore, n'est pas simple pour elle, l'espace tangent relatif se réduisant à la droite t; pour $w \neq -d\omega - h$, le plan $(x\, x_1\, x_2)_0$ est le plan tangent à R au point $X(\mathring{v}, w)$. Pour chaque valeur de w, l'espace osculateur du second ordre à la surface R au point $X(\mathring{v}, w)$ se réduit au plan $(x\, x_1\, x_2)_0$.

On a le résultat suivant: *Les projections* C_1^* *et* C_2^* *ont toujours un contact d'ordre* $s+2$, *si le centre de projection* O *appartient à la tangente* t.

† Si l'on choisit la surface réglée R de manière que $d\omega = h - k$, les points P_1 et P_2 coïncident.