Vojtěch Jarník

Sur les approximations diophantiques linéaires non homogénes

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1946, 145-160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500769

Sur les approximations diophantiques linéaires non homogènes.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 22 Novembre 1941.

---

§ 1. Introduction.

Tous les nombres dans cette Note sont réels. Les lettres a, b, c, d, h (pourvues éventuellement d'indices) désignent toujours des nombres entiers. Soient donnés deux nombres entiers $r > 0$, $s > 0$ et rs nombres réels Θ_i $(1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq s)$. Pour $t \geqq 1$ posons (α_i, β_j étant des nombres réels quelconques)

$$(1)\left\{\begin{aligned}
\psi_1\ (t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) &= \min_{\substack{o<\max|a_j|\leqq t \\ 1\leqq j\leqq s}} \left(\max_{1\leqq i\leqq r} |\Theta_{i1}a_1 + \ldots + \Theta_{is}a_s + a_{i+s} + \alpha_i|\right)\\
\psi'_1\ (t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) &= \min_{\substack{\max|a_j|\leqq t \\ 1\leqq j\leqq s}} \left(\max_{1\leqq i\leqq r} |\Theta_{i1}a_1 + \ldots + \Theta_{is}a_s + a_{i+s} + \alpha_i|\right)\\
\psi_2\ (t; \beta_1, \ldots, \beta_s) &= \min_{\substack{o<\max|b_{s+i}|\leqq t \\ 1\leqq i\leqq r}} \left(\max_{1\leqq j\leqq s} |\Theta_{1j}b_{s+1} + \ldots + \Theta_{rj}b_{s+r} - b_j - \beta_j|\right)
\end{aligned}\right.$$

et soit, pour plus de simplicité, $\psi_v(t) = \psi_v(t; 0, \ldots, 0)$ $(v = 1, 2)$. Les fonctions (1) sont évidemment des fonctions non croissantes et non négatives de t et elles ne changent pas, si l'on ajoute aux nombres α_i, β_j des nombres entiers quelconques; c'est pourquoi il est permis d'imposer p. ex. aux nombres α_i les conditions $0 \leqq \alpha_i < 1$, ce que nous allons faire dans les démonstrations des théorèmes 6 et 8.

Le but de cette Note est la comparaison de l'ordre de grandeur de la fonction $\psi_2(t; 0, \ldots, 0)$ avec celle de la fonction $\psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ ou $\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$

(pour $t \to \infty$); c'est-à-dire nous allons considérer les relations entre les solutions approximatives du système homogène

$$\sum_{i=1}^{r} \Theta_{ij} b_{s+i} - b_j = 0 \; (1 \leqq j \leqq s)$$

en nombres entiers $b_1, \ldots, b_{r+s}$ d'une part[1]) et celles du système inhomogène

$$\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij} a_j + a_{i+s} + \alpha_i = 0 \; (1 \leqq i \leqq r)$$

en nombres entiers $a_1, \ldots, a_{r+s}$ d'autre part.[2]) Pour aborder cette question, nous aurons besoin des théorèmes suivants:

Théorème 1.[3]) $\limsup\limits_{t \to \infty} \psi_1(t) \, . \, t^{\frac{s}{r}} \leqq 1$

(*donc, par raison de symétrie, aussi* $\limsup \psi_2(t) t^{\frac{r}{s}} \leqq 1$).

Théorème 2. *Si* $\liminf\limits_{t \to \infty} \psi_2(t) \, t^{\frac{r}{s}} > 0$, *on a aussi* $\liminf\limits_{t \to \infty} \psi_1(t) \, t^{\frac{s}{r}} > 0$.

Dans tout ce qui suit, soient $\varphi(t)$, $\sigma(t)$ deux fonctions continues et croissantes pour $t \geqq 0$, $\varphi(0) = \sigma(0) = 0$. Nous supposons qu'il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $\varphi(t) \, t^{-\eta}$ soit une fonction croissante pour $t > 0$, $\varphi(t) \, t^{-\eta} \to \infty$ pour $t \to \infty$. Par $\varrho(t)$, nous allons désigner toujours la fonction inverse à la fonction φ, de sorte que $\varrho(0) = 0$, $\varrho(t)$ est continue et croissante pour $t \geqq 0$, $\varrho(t) \to \infty$ pour $t \to \infty$. En ce qui concerne notre problème, on connaît déjà les théorèmes suivants:[4]),

Théorème 3. *Soit* $\liminf\limits_{t \to \infty} \varphi(t) \, \psi_2(t; 0, \ldots, 0) > 1$;
allors on a[5])

$$\limsup_{t \to \infty} \varrho(t) \, . \, \operatorname*{Sup}_{0 \leqq \alpha_i < 1} \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq ((r+s)! \, (r+s))^{\frac{\eta+1}{\eta}};$$

donc, a fortiori,

$$\limsup_{t \to \infty} \varrho(t) \, \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq \limsup_{t \to \infty} \varrho(t) \, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq ((r+s)! \, (r+s))^{\frac{\eta+1}{\eta}}$$

pour chaque système $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Théorème 4. *Soit*

$$\liminf_{t \to \infty} \varphi(t) \, \psi_2(t; 0, \ldots, 0) < \infty; \tag{2}$$

---

[1]) La solution banale $b_1 = \ldots = b_{r+s} = 0$ étant exclue.

[2]) Le cas $a_1 = \ldots = a_s = 0$ étant exclu ou non, suivant que l'on considère la fonction ψ_1 ou ψ'_1.

[3]) Bien connu; voir p. ex. J. F. KOKSMA, Diophantische Approximationen, p. 5—6.

[4]) V. JARNÍK, Remarque à l'article précédent de M. Mahler, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 68 (1939), 103—111.

[5]) $\operatorname*{Sup}\limits_{0 \leqq \alpha_i < 1} f(\alpha, \ldots, \alpha_r)$ signifie la borne supérieure de

$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ pour $0 \leqq \alpha_1 < 1, \ldots, 0 \leqq \alpha_r < 1$.

alors il existe un système $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ *tel que*

$$\limsup_{t\to\infty} \varrho(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geqq \limsup_{t\to\infty} \varrho(t)\, \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > 0. \tag{3}$$

Théorème 5. *Plus précisément: si l'on a* (2), *alors l'inégalité* (3) *est valable pour presque tous les systémes* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.[6])

Evidemment, le th. 4 est une conséquence immédiate du th. 5. Dans cette Note, nous allons envisager le problème analogue, où lim inf, lim sup sont interchangés; et nous allons parvenir aux résultats suivants:

Théorème 6. *Soit*

$$A > 0, \limsup_{t\to\infty} \varphi(t)\, \psi_2(t; 0, \ldots, 0) > A; \tag{4}$$

alors on a

$$\liminf_{t\to\infty} \varrho(t) \,.\, \operatorname*{Sup}_{0\leqq\alpha_i<1} \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq \varDelta,$$

où

$$\varDelta = \tfrac{3}{2}\, (r+s)!\ (r+s) \,.\, \mathrm{Max}\left(1, \left(\frac{(r+s)!\ (r+s)}{2A}\right)^{\frac{1}{r}}\right). \tag{5}$$

Donc, a fortiori,

$$\liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\psi'_1 (t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq \liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq \varDelta$$

pour chaque système $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Une conséquence immédiate du théorème 6 est le théorème suivant: *Si l'on a*

$\limsup \varphi(t)\, \psi_2(t; 0, \ldots, 0) > 0$, *alors on a*

$$\liminf \varrho(t)\, \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq \liminf \varrho(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \infty$$

pour chaque système $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.[7])

Théorème 7. *Soit* $\limsup\limits_{t\to\infty} \varphi(t)\, \psi_2(t; 0, \ldots, 0) < \infty$; *alors, il existe un système* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ *tel que*

$$\liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geqq \liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\, \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > 0. \tag{6}$$

Théorème 8. *Soit*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\sigma^r(x)} \tag{7}$$

une série convergente. Alors on a

$$\liminf_{t\to\infty} \sigma(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \liminf_{t\to\infty} \sigma(t)\, \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \infty \tag{8}$$

pour presque tous les systèmes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

---

[6]) C'est-à-dire: pour tous les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ de l'espace à r dimensions, exception faite des points d'un certain ensemble A tel que $\mu A = 0$; le symbole μA signifie toujours la mesure lebesguienne de l'ensemble A.

[7]) Evidemment, on peut démontrer de même une modification analogue du th. 3.

Théorème 9. *Soit* $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t)\, t^{-\frac{s}{r}} = \infty$ *et soit*

$$\liminf_{t\to\infty} t^{\frac{r}{s}} \psi_2(t; 0, \ldots, 0) > 0 \text{ (donc, d'après le théorème 1,}$$
$$0 < \liminf_{t\to\infty} t^{\frac{r}{s}} \psi_2(t) \leqq \limsup_{t\to\infty} t^{\frac{r}{s}} \psi_2(t) \leqq 1).$$

Alors, on a les résultats suivants:

1. *Si* (7) *est une série convergente, on a* (8) *pour presque tous les systèmes* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

2. *Au contraire, si* (7) *est une série divergente, on a*

$$\liminf_{t\to\infty} \sigma(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \liminf_{t\to\infty} \sigma(t)\, \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$$

pour presque tous les systèmes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

On voit que les théorèmes 6, 7 sont complètement analogues aux théorèmes correspondants 3, 4. D'autre part, les théorèmes 8, 9 diffèrent essentiellement du théorème correspondant (th. 5.). Pour mieux saisir cette différence, considérons l'exemple suivant: Soir $s = 1$ et écrivons Θ_i au lieu de Θ_{i1}; donc

$$\psi_2(t) = \min_{\substack{0 < \max |c_i| \leqq t \\ 1 \leqq i \leqq r}} |\Theta_1 c_1 + \ldots + \Theta_r c_r - c_0|, \quad \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) =$$
$$= \min_{|d| \leqq t} (\max_{1 \leqq i \leqq r} |\Theta_i d + d_i + \alpha_i|).$$

Choisissons, en particulier, pour les nombres $\Theta_1, \ldots, \Theta_r$ des nombres d'un corps algébrique du degré $r + 1$ et tels qu'il n'existe aucune relation

$$\Theta_1 c_1 + \ldots + \Theta_r c_r = c_0, \text{ où } \max_{1 \leqq i \leqq r} |c_i| > 0. \text{ Dans ce cas, on sait que}^{8)}$$

$$0 < \liminf t^r \psi_2(t) \leqq \limsup t^r \psi_2(t) \leqq 1.$$

On a donc, d'après le th. 9, pour presque tous les systèmes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ et pour chaque $\delta > 0$

$$\liminf_{t\to\infty} t^{\frac{1}{r}} (\log t)^{\frac{1}{r}+\delta} \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \infty,$$
$$\liminf t^{\frac{1}{r}} (\log t)^{\frac{1}{r}} \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0,$$

donc aussi $\liminf t^{\frac{1}{r}} \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$, tandis que les théorèmes 3, 5 donnent $0 < \limsup t^{\frac{1}{r}} \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \infty$ pour presque tous les systèmes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. (Le fait que p. ex. la fonction $t^{\frac{1}{r}} (\log t)^{\frac{1}{r}}$ ne satisfait aux conditions, imposées à la fonction $\sigma(t)$, que pour de grandes valeurs de t, n'a aucune importance, tous les théorèmes énoncés possédant un caractère limite.)

---

[8]) Voir O. Perron, Über diophantische Approximationen, Math. Annalen **83** (1921), 77—84 ou le théorème 10 dans le texte tchèque de cette note (Rozpravy II. třídy Čes. Akad. **51**, no. 29).

§ 2. Démonstration des théorèmes 2, 6.[9])

Par $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_q)$, $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_q)$ etc. on va désigner, dans ce paragraphe, des points de l'espace à q dimensions; en particulier $\mathfrak{o} = (0, \ldots, 0)$. u, v étant deux nombres, on pose $u\mathfrak{x} + v\mathfrak{y} = (ux_1 + vy_1, \ldots, ux_q + vy_q)$. On dira qu'un point $\mathfrak{x}$ *dépend* des points $\mathfrak{x}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(v)}$, s'il existe des nombres $t_1, \ldots, t_v$ tels que $\mathfrak{x} = t_1\mathfrak{x}^{(1)} + \ldots + t_v\mathfrak{x}^{(v)}$. Dans tout ce paragraphe, soit $q = r + s$ et pour $z > 0$ soit

$$(9)\quad \begin{aligned} F(\mathfrak{x}) = F_z(\mathfrak{x}) = \max\Big(&|\Theta_{11}x_1 + \ldots + \Theta_{1s}x_s + x_{s+1}|\, z^s, \ldots \\ &\ldots, |\Theta_{r1}x_1 + \ldots + \Theta_{rs}x_s + x_{s+r}|\, z^s, \left|\frac{-x_1}{z^r}\right|, \ldots, \left|\frac{-x_s}{z^r}\right|\Big), \end{aligned}$$

$$(10)\quad G(\mathfrak{x}) = G_z(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{r}\left|\frac{x_{s+i}}{z^s}\right| + \sum_{j=1}^{s} z^r\, |\Theta_{1j}x_{s+1} + \ldots + \Theta_{rj}x_{s+r} - x_j|,$$

où $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_{r+s})$. Les points $\mathfrak{x}$, satisfaisant à l'inégalité $F_z(\mathfrak{x}) \leqq 1$, forment un corps convexe $\mathfrak{K}_z$ au volume 2^q; de même, l'inégalité $G_z(\mathfrak{x}) \leqq 1$ définit un corps convexe $\mathfrak{K}'_z$ (le corps „polaire" au corps $\mathfrak{K}_z$) au volume $\frac{1}{q!}2^q$.

Définissons $q + 1$ points $\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(q)}$ et q nombres $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ comme il suit: Soit $\mathfrak{x}^{(0)} = \mathfrak{o}$; en général, $\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(v)}$ $(0 \leqq v < q)$ étant choisis, choisissons, parmi tous les points à coordonnées entières ($\doteq$ points à c. e.) qui ne dépendent pas de $\mathfrak{x}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{x}^{(v)}$, un point $\mathfrak{x}^{(v+1)}$ avec la plus petite valeur possible de $F(\mathfrak{x})$. Les nombres

$$F(\mathfrak{x}^{(i)}) = \sigma_i \quad (0 < \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \ldots \leqq \sigma_q)$$

sont appelés les „minima successifs de $F(\mathfrak{x})$". De même, soient $\tau_1, \ldots, \tau_q$ $(0 < \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \ldots \leqq \tau_q)$ les minima successifs de $G(\mathfrak{x})$ (définis de la même manière, seulement avec G au lieu de F). On a alors[10])

$$(\mathrm{I})\quad \frac{1}{q!} \leqq \sigma_1 \ldots \sigma_q \leqq 1,\; 1 \leqq \tau_1 \ldots \tau_q \leqq q!,\; 1 \leqq \tau_1\sigma_q \leqq q!,\; 1 \leqq \sigma_1\tau_q \leqq q!$$

(II) A chaque point $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_q)$, on peut trouver un point $\mathfrak{x}$ à c. e. tel que

$$F(\mathfrak{x} + \mathfrak{v}) < \frac{q!q}{2\tau_1}.$$

Evidemment, les nombres $\sigma_1, \ldots, \sigma_q, \tau_1, \ldots, \tau_q$ dépendent de z; c'est pourquoi nous allons — pour plus de clarté — écrire quelquefois p. ex. $\tau_1(z)$ au lieu de τ_1.

Démonstration du théorème 2. Soit $\liminf \psi_2(t)t^{\frac{r}{s}} > 0$; il existe donc un nombre $A (0 < A < 1)$ tel que $\psi_2(z^s) > Az^{-r}$ pour $z > 1$. Soit $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_{r+s})$ un point à c. e., $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$. On a donc (voir (1)) ou bien

[9]) Les méthodes, employées dans ce paragraphe, sont en principe connues; voir K. MAHLER, Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 68 (1939), 93—102 et V. JARNÍK, Remarque à l'article précédent de M. MAHLER, ibid., pp. 103—111.

[10]) Voir p. ex. l. c. [9]), p. 103—105.

$\max\limits_{1\leq i\leq r}|b_{s+i}| > z^s$, ou bien $\max\limits_{1\leq j\leq s}|\Theta_{1j}b_{s+1}+\ldots+\Theta_{rj}b_{s+r}-b_j| > Az^{-r}$ ou bien $b_{s+1}=\ldots=b_{s+r}=0$, ce qui donne aussi (à cause de $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{o}$) $\max\limits_{1\leq j\leq s}|\Theta_{1j}b_{s+1}+\ldots+\Theta_{rj}b_{s+r}-b_j| = \max\limits_{1\leq j\leq s}|b_j| \geqq 1 > Az^{-r}$, car $z^r > 1 > A$; donc (voir (10)) $G(\mathfrak{b})\geqq A$, alors $\tau_1\geqq A$, d'où (voir (I)) $A^{q-1}\tau_q \leqq \tau_1^{q-1}\tau_q \leqq \tau_1\ldots\tau_q \leqq q!$, $\sigma_1 \geqq \tau_q^{-1} \geqq B$, où $q!\,B = A^{q-1}$.

Soit maintenant $t > 1$ (donc $t > \frac{1}{2}B$) et définissons $z > 0$ par l'équation $t = \frac{1}{2}Bz^r$, donc $z > 1$. Pour chaque point $\mathfrak{a}=(a_1,\ldots,a_{r+s})\neq\mathfrak{o}$ (à c. e.) on a $F(\mathfrak{a})\geqq\sigma_1\geqq B$. Donc: si $0<\max\limits_{1\leq j\leq s}|a_j|\leqq t$, on a $|-a_jz^{-r}|\leqq\frac{1}{2}B$, donc (voir (9)) $\max\limits_{1\leq i\leq r}|\Theta_{i1}a_1+\ldots+\Theta_{is}a_s+a_{i+s}|\geqq Bz^{-s}=Ct^{-\frac{s}{r}}$, où $C=B(\frac{1}{2}B)^{\frac{s}{r}}$, donc $\psi_1(t)\geqq Ct^{-\frac{s}{r}}$.

Démonstration du théorème 6. Supposons que l'on ait (4), de sorte qu'il existe une suite $t_1 < t_2 < \ldots$ telle que

$$\lim_{v\to\infty} t_v=\infty,\ \varphi(t_v)\,\psi_2(t_v) > A\ (v=1,2,\ldots). \tag{11}$$

Soit $z^{qr} > q!$, $z > 0$. On a $\tau_1^q\leqq q!$ et il existe un point à c. e. $\mathfrak{b}=(b_1,\ldots,b_{r+s})\neq\mathfrak{o}$ tel que $G(\mathfrak{b})=\tau_1$, c'est-à-dire

$$\max_{1\leq i\leq r}|b_{s+i}|\leqq\tau_1z^s,\quad \max_{1\leq j\leq s}|\Theta_{1j}b_{s+1}+\ldots+\Theta_{rj}b_{s+r}-b_j|\leqq\frac{\tau_1}{z^r}<1;$$

de la dernière inégalité et de $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{o}$ il s'ensuit $\max\limits_{1\leq i\leq r}|b_{s+i}|>0$, donc

$$\tau_1z^s\geqq 1,\ \psi_2(\tau_1z^s)\leqq\frac{\tau_1}{z^r}. \tag{12}$$

On a ici $\psi_2(t)>0$ pour $t\geqq 1$, $\psi_2(\tau_1z^s)\to 0$ pour $z\to\infty$ (voir (12)), donc $\tau_1z^s\to\infty$ pour $z\to\infty$. Le nombre $\tau_1=\tau_1(z)$ étant une fonction continue de z, il existe un $\varkappa$ et une suite $z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2},\ldots$ telle que $z_k\to\infty$, $\tau_1(z_k)\,.\,z_k^s=t_k$, donc (voir (11), (12))

$$\frac{1}{\varphi(t_k)}<\frac{1}{A}\psi_2(t_k)=\frac{1}{A}\psi_2(\tau_1(z_k)\,.\,z_k^s)\leqq\frac{1}{A}\frac{\tau_1(z_k)}{z_k^r}\ (k\geqq\varkappa).$$

Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ des nombres quelconques tels que $0\leqq\alpha_i<1$ $(1\leqq i\leqq r)$. D'après (II) (où l'on pose $v_1=\ldots=v_s=0$, $v_{s+1}=\alpha_1,\ldots,v_{s+r}=\alpha_r$), il existe un point $\mathfrak{a}=(a_1,\ldots,a_{r+s})$ à c. e. tel que

$$\max_{1\leq j\leq s}|a_j|\leqq\frac{q!q}{2\tau_1(z_k)}z_k^r<\frac{q!q}{2A}\varphi(t_k),$$

$$\max_{1\leq i\leq r}|\Theta_{i1}a_1+\ldots+\Theta_{is}a_s+a_{i+s}+\alpha_i|\leqq\frac{q!q}{2\tau_1(z_k)z_k^s}=\frac{q!q}{2t_k}.$$

En posant

$$B=\max\left(1,\left(\frac{q!q}{2A}\right)^{\frac{1}{\eta}}\right)\geqq 1,\ T_k=\varphi(Bt_k)\geqq B^\eta\varphi(t_k)\geqq\frac{q!q}{2A}\varphi(t_k), \tag{13}$$

on a $t_k=\frac{1}{B}\varrho(T_k)$, donc

(14) $\max\limits_{1\leqq j\leqq s}|a_j|\leqq T_k,\ \max\limits_{1\leqq i\leqq r}|\Theta_{i1}a_1+\ldots+\Theta_{is}a_s+a_{i+s}+\alpha_i|\leqq\dfrac{Bq!q}{2\varrho(T_k)}=$
$$=M<\tfrac{1}{4},$$

si k est assez grand. S'il existe un $i\,(1\leqq i\leqq r)$ tel que $2M\leqq\alpha_i\leqq 1-2M$, on a évidemment $\max\limits_{1\leqq j\leqq s}|a_j|>0$. Dans le cas contraire, posons $\gamma_i=\alpha_i$ pour $2\leqq i\leqq r$, $\gamma_1=2M$ pour $0\leqq\alpha_1<2M$, $\gamma_1=1-2M$ pour $1-2M<\alpha_1<$ <1. Il existe (voir (14)) $r+s$ nombres entiers $c_1,\ldots,c_{r+s}$ tels que

$$\max_{1\leqq j\leqq s}|c_j|\leqq T_k,\ \max_{1\leqq i\leqq r}|\Theta_{i1}c_1+\ldots+\Theta_{is}c_s+c_{i+s}+\gamma_i|\leqq M,$$

donc

$$\max_{1\leqq j\leqq s}|c_j|>0,\ \max_{1\leqq i\leqq r}|\Theta_{i1}c_1+\ldots+\Theta_{is}c_s+c_{i+s}+\alpha_i|\leqq 3M.$$

On a donc dans les deux cas (voir (14), (13), (5)) $\psi_1(T_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\leqq 3M=$ $=\Delta\varrho^{-1}(T_k)$, si $k\geqq\varkappa$ est assez grand pour que $\Delta\varrho^{-1}(T_k)<\tfrac{3}{4}$.

§ 3. Démonstration du théorème 7.[11])

Premier cas: *il existe un* $t\geqq 1$ *tel que* $\psi_2(t)=0$. Il y a donc des nombres entiers $B_1,\ldots,B_{r+s}$ tels que

$$B=\max_{1\leqq i\leqq r}|B_{s+i}|>0,\ \sum_{i=1}^{r}\Theta_{ij}B_{s+i}-B_j=0\ (1\leqq j\leqq s). \tag{15}$$

Choisissons $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,.\,B_{s+i}=\tfrac{1}{2}. \tag{16}$$

Si l'on avait

$$|\sum_{j=1}^{s}\Theta_{ij}a_j+a_{i+s}+\alpha_i|<\frac{1}{2rB}\ (i=1,\ldots,r)$$

pour un certain système de nombres entiers $a_1,\ldots,a_{r+s}$, on aurait

$$|\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\Theta_{ij}B_{s+i}a_j+\sum_{i=1}^{r}B_{s+i}a_{s+i}+\sum_{i=1}^{r}B_{s+i}\alpha_i|<\tfrac{1}{2},$$

donc (voir (15), (16))

$$|\sum_{j=1}^{s}B_ja_j+\sum_{i=1}^{r}B_{s+i}a_{s+i}+\tfrac{1}{2}|<\tfrac{1}{2},$$

ce qui est une contradiction, le premier membre de cette inégalité ayant la forme „nombre entier $+\ \tfrac{1}{2}$". On a donc $\psi'_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\geqq\dfrac{1}{2rB}$ pour chaque $t\geqq 1$, d'où (6) pour le système $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ considéré.

Deuxième cas: *pour chaque* $t\geqq 1$, *on a* $\psi_2(t)>0$. D'après le th. 1, on a $\psi_2(t)\to 0$ pour $t\to\infty$. Il existe donc une suite de nombres naturels

[11]) Un cas particulier du th. 7 a été démontré par M. A. KHINTCHINE, Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen, Acta Aritmetica 2 (1937), 161—172.

$t_1 < t_2 < \ldots$ telle que $\psi_2(t)$ soit constant pour $t_k \leqq t < t_{k+1}$, tandis que $\psi_2(t_{k+1}) < \psi_2(t_k)$. Il existe donc un système $b_{1,k}, \ldots, b_{r+s,k}$ tel que

$$\max_{1 \leqq i \leqq r} |b_{s+i,k}| = t_k, \quad \max_{1 \leqq j \leqq s} \left|\sum_{i=1}^{r} \Theta_{ij} b_{s+i,k} - b_{j,k}\right| = \psi_2(t_k) \tag{17}$$

($k = 2, 3, \ldots$). Soit maintenant lim sup $\varphi(t)\,\psi_2(t) < \infty$; il existe donc un $A > 0$ et un $\varkappa > 1$ tel que $\varphi(t)\,\psi_2(t) < A$ pour $t \geqq t_\varkappa$, donc, en particulier, $\varphi(t)\,\psi_2(t_k) < A$ pour $t_k \leqq t < t_{k+1}$; $\varphi(t)$ étant continu, il s'ensuit

$$\varphi(t_{k+1})\,\psi_2(t_k) \leqq A \quad (k \geqq \varkappa). \tag{18}$$

Lemme 1. *Il existe une suite de nombres naturels $k_1 < k_2 < \ldots$ telle que*

$$t_{k_{n+1}} > (2r+1)\,t_{k_n}, \quad \psi_2(t_{k_n}) \leqq \frac{A}{\varphi\left(\frac{1}{(2r+1)^2}\,t_{k_{n+1}}\right)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Démonstration. *Premier cas:* pour toutes les valeurs assez grandes de k, on a $t_{k+1} \leqq (2r+1)\,t_k$. On peut donc choisir la suite $k_1 < k_2 < \ldots$ ($k_1 > \varkappa$) de sorte que

$$(2r+1)\,t_{k_i} < t_{k_{i+1}} \leqq (2r+1)^2\,t_{k_i}, \tag{19}$$

d'où

$$\psi_2(t_{k_i}) \leqq \frac{A}{\varphi(t_{k_i})} \leqq \frac{A}{\varphi\left(\frac{1}{(2r+1)^2}\,t_{k_{i+1}}\right)}. \tag{19'}$$

Deuxième cas: il existe une suite $z_1 < z_2 < \ldots$ ($z_1 \geqq \varkappa$) telle que

$$\begin{aligned} &t_{z_v+1} > (2r+1)\,t_{z_v},\ t_{i+1} \leqq (2r+1)\,t_i \text{ pour } z_v + 1 \leqq i < z_{v+1} \\ &(v = 1, 2, \ldots). \text{ Soit } \mathfrak{M}_1 = \{t_{z_1}\},\ \mathfrak{M}_{v+1} = \{t_{z_v+1}, t_{z_v+2}, \ldots, t_{z_{v+1}}\} \end{aligned} \tag{20}$$

pour $v = 1, 2, \ldots$[12]). Pour chaque $v \geqq 1$, définissons un ensemble $\mathfrak{A}_v \subset \mathfrak{M}_v$ comme il suit: si $\mathfrak{M}_v$ ne contient qu'un seul nombre t_{z_v}, soit $\mathfrak{A}_v = \mathfrak{M}_v$. Dans le cas contraire, on peut choisir parmi les nombres $t_{z_{v-1}+1}, t_{z_{v-1}+2}, \ldots, t_{z_v}$ une suite finie $t_{w_1} > t_{w_2} > \ldots > t_{w_c}$ ($c \geqq 1$) telle que

$$\begin{aligned} &t_{w_1} = t_{z_v};\ \frac{1}{2r+1}\,t_{w_i} > t_{w_{i+1}} \geqq \frac{1}{(2r+1)^2}\,t_{w_i} (1 \leqq i < c); \\ &t_{w_c} \leqq (2r+1)\,t_{z_{v-1}+1}; \end{aligned} \tag{21}$$

posons $\mathfrak{A}_v = \{t_{w_1}, t_{w_2}, \ldots, t_{w_c}\}$. Les éléments de l'ensemble-somme $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \ldots$, ordonnés par l'ordre de grandeur, soient désignés par $t_{k_1} < t_{k_2} < \ldots$. On voit, d'après (21): si $t_{k_i}, t_{k_{i+1}}$ appartiennent au même ensemble $\mathfrak{A}_v$ on a (19), (19'); dans le cas contraire, on a $t_{k_i} \in \mathfrak{A}_v$, $t_{k_{i+1}} \in \mathfrak{A}_{v+1}$, donc $t_{k_i} = t_{z_v}$, $t_{z_v+1} \leqq t_{k_{i+1}} \leqq (2r+1)\,t_{z_v+1}$, donc (voir (20), (18)) $t_{k_{i+1}} \geqq t_{z_v+1} > (2r+1)\,t_{z_v} =$

[12]) Le symbole $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u\}$ signifie l'ensemble qui consiste précisément des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$; 0 désigne l'ensemble vide. $\alpha \in A$ signifie: α est un élément de l'ensemble A.

$= (2r+1)\, t_{k_i},\ \psi_2(t_{k_i}) = \psi_2(t_{z_v}) \leqq \dfrac{A}{\varphi(t_{z_v+1})} \leqq \dfrac{A}{\varphi\left(\dfrac{1}{2r+1}\, t_{k_{i+1}}\right)}$; le lemme 1 est donc démontré. En posant $T_n = t_{k_n}$, $B_{v,n} = b_{v,k_n}$ $(1 \leqq v \leqq r+s)$, on peut énoncer le résultat du lemme 1 sous la forme suivante:

Lemme 2. *Il existe une suite de nombres naturels $T_1 < T_2 < \ldots$ telle que*

$$T_{n+1} > (2r+1)\, T_n,\ \psi_2(T_n) \leqq \frac{A}{\varphi\left(\dfrac{1}{(2r+1)^2}\, T_{n+1}\right)}. \tag{22}$$

Pour chaque nombre naturel n, il existe $r+s$ nombres entiers $B_{1,n}, \ldots, B_{r+s,n}$ tels que

$$\max_{1 \leqq i \leqq r} |B_{s+i,n}| = T_n,\quad \max_{1 \leqq j \leqq s} |\sum_{i=1}^{r} \Theta_{ij} B_{s+i,n} - B_{j,n}| = \psi_2(T_n). \tag{23}$$

* * *

Dans le reste de ce paragraphe, et aussi dans le paragraphe suivant, nous allons considérer les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ de l'espace à r dimensions; le mot „cube" va désigner toujours un cube, dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées. Choisissons f_1, f_2 de sorte que

$$0 < f_1 < \frac{1}{(2r+1)^2},\ sA\, f_1^{\eta}(2r+1)^{2\eta} < \frac{1}{8r+4},\ 0 < \frac{rf_2}{f_1} < \frac{1}{8r+4} \tag{24}$$

et choisissons un nombre entier $n_0 > 0$ tel que $\varphi(f_1 T_{n_0}) > 1$. Pour $n \geqq n_0$ soit $\mathfrak{V}_n$ l'ensemble de tous les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, qui jouissent de la propriété suivante: il existe un t de l'intervalle $\varphi(f_1 T_n) \leqq t < \varphi(f_1 T_{n+1})$ tel que $\varrho(t)\, \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < f_2$.

Lemme 3. *Soit $n \geqq n_0$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathfrak{V}_n$. Alors il existe un nombre entier D tel que*

$$|\sum_{i=1}^{r} B_{s+i,n}\alpha_i + D| < \frac{1}{4r+2}. \tag{25}$$

Démonstration. Il existe (voir (1)) un t et des nombres entiers $a_1, \ldots, a_{r+s}$ tels que

$$\begin{gathered} \varphi(f_1 T_n) \leqq t,\ |\, a_j \,| \leqq \varphi(f_1 T_{n+1})\ (1 \leqq j \leqq s), \\ |\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij} a_j + a_{i+s} + \alpha_i| < \frac{f_2}{\varrho(t)}\ (1 \leqq i \leqq r). \end{gathered} \tag{26}$$

D'après (23), (22), (24) on obtient (D_1 étant un nombre entier)

$$\begin{gathered} |\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} \Theta_{ij} B_{s+i,n}\, a_j + D_1| \leqq s\psi_2(T_n)\, \varphi(f_1 T_{n+1}) \\ \leqq sA\, \frac{\varphi(f_1 T_{n+1})}{\varphi((2r+1)^{-2} T_{n+1})} < sA\, f_1^{\eta}(2r+1)^{2\eta} < \frac{1}{8r+4}. \end{gathered} \tag{27}$$

En utilisant (26), on obtient de (27)

$$(28) \qquad |\sum_{i=1}^{r} B_{s+i,n}\alpha_i + D| < \frac{1}{8r+4} + \frac{f_2 r}{\varrho(t)} T_n,$$

où D est un nombre entier et $\varrho(t) \geqq f_1 T_n$. En comparant (28) avec (24), on obtient (25).

Lemme 4. *Soit $n > n_0$ et soit W un cube fermé quelconque au côté $\frac{2}{(2r+1)T_{n-1}}$. Alors il existe un cube fermé W_1 au côté $\frac{2}{(2r+1)T_n}$ tel que $W_1 \subset W$, $W_1 \mathfrak{B}_n = 0$.*

Démonstration. Sans restreindre la généralité, supposons $B_{s+1,n} = T_n$ (voir (23)). Soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ le centre de W et posons

$$X = -\frac{1}{T_n} \sum_{i=2}^{r} B_{s+i,n}\gamma_i \text{ (pour } r = 1, \text{ on pose } \sum_{i=2}^{r} = 0);$$

choisissons un nombre entier E tel que

$$\gamma_1 - \frac{1}{(2r+1)T_{n-1}} < X + \frac{E}{T_n} < X + \frac{E+1}{T_n} < \gamma_1 + \frac{1}{(2r+1)T_{n-1}}$$

(ceci est possible, car $T_n > (2r+1)T_{n-1}$). Posons

$$(29) \qquad \delta_1 = X + \frac{1}{T_n}(E + \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{B_{s+1,n}}(-\sum_{i=2}^{r} B_{s+i,n}\gamma_i + E + \tfrac{1}{2})$$

et soit W_1 le cube fermé au côté $\frac{2}{(2r+1)T_n}$ et au centre $(\delta_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$. Evidemment $W_1 \subset W$. Supposons qu'il existe un point

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in W_1\mathfrak{B}_n, \text{ donc } |\alpha_1 - \delta_1| \leqq \frac{1}{(2r+1)T_n},$$

$$|\alpha_i - \gamma_i| \leqq \frac{1}{(2r+1)T_n} \; (2 \leqq i \leqq r), \text{ donc (voir (29))}$$

$$(30) \qquad \begin{aligned} |\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_{s+i,n} - E - \tfrac{1}{2}| &\leqq \frac{rT_n}{(2r+1)T_n} + \\ + |\delta_1 B_{s+1,n} + \sum_{i=2}^{r} \gamma_i B_{s+i,n} - E - \tfrac{1}{2}| &= \frac{r}{2r+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, il doit exister (d'après le lemme 3) un nombre entier D tel que l'on ait (25); de (25), (30) on déduirait $|D + E + \frac{1}{2}| < \frac{r}{2r+1} + \frac{1}{4r+2} = \frac{1}{2}$, ce qui est une contradiction. Donc $W_1\mathfrak{B}_n = 0$.

Fin de la démonstration du th. 7. D'après le lemme 4, il existe une suite de cubes fermés $W_{n_0} \supset W_{n_0+1} \supset W_{n_0+2} \supset \ldots$ telle que le côté de W_n soit égal à $\frac{2}{(2r+1)T_n}$ et $W_n\mathfrak{B}_n = 0$ pour $n > n_0$. Il existe un point

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in W_{n_*+1} W_{n_*+2} \ldots$; ce point n'appartient pas à l'ensemble $\mathfrak{B}_{n_*+1} + \mathfrak{B}_{n_*+2} + \ldots$, d'où $\varrho(t)\, \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geqq f_2$ pour chaque $t \geqq \geqq \varphi(f_1 T_{n_*+1})$.

§ 4. Démonstration des théorèmes 8, 9.

Démonstration du théorème 8. Soit (7) une série convergente; soit W le cube $0 \leqq \alpha_i < 1$ $(1 \leqq i \leqq r)$. Soit M_k $(k = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de tous les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ du cube W tels que $\liminf \sigma(t)\, \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < k$; il faut démontrer que $\mu(M_1 + M_2 + \ldots) = 0$ et pour cela il suffit de démontrer que $\mu M_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Soit $M_{k,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de tous les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ de W tels qu'il existe un t tel que $2^n \leqq t < 2^{n+1}$, $\sigma(t)\, \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < k$.

Evidemment $M_k \subset \sum\limits_{n=N}^{\infty} M_{k,n}$, donc

$$\mu M_k \leqq \sum_{n=N}^{\infty} \mu M_{k,n} \text{ pour chaque } N. \tag{31}$$

A chaque point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in M_{k,n}$, il existe un t et $r + s$ nombres entiers $a_1, \ldots, a_{r+s}$ tels que

$$|a_j| \leqq t < 2^{n+1} (1 \leqq j \leqq s),\ \left|\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij} a_j + a_{i+s} + \alpha_i\right| <$$
$$< \frac{k}{\sigma(t)} \leqq \frac{k}{\sigma(2^n)}\ (1 \leqq i \leqq r).$$

On a donc $(2^{n+2} - 1)^s$ possibilités pour $a_1, \ldots, a_s$; ces nombres étant donnés, les nombres $a_{s+1}, \ldots, a_{s+r}$ doivent satisfaire aux conditions

$$-\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij} a_j - 1 - \frac{k}{\sigma(2^n)} < a_{i+s} < -\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij} a_j + \frac{k}{\sigma(2^n)}\ (1 \leqq i \leqq r),$$

ce qui donne, pour chaque a_{i+s}, deux possibilités tout au plus, si n est assez grand.

Donc

$$\mu M_{k,n} \leqq (2^{n+2})^s\, 2^r \left(\frac{2k}{\sigma(2^n)}\right)^r = 2^{3s+2r} k^r \cdot \frac{2^{(n-1)s}}{\sigma^r(2^n)} \leqq k^r 2^{3s+2r} \sum_{x=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{x^{s-1}}{\sigma^r(x)},$$

de sorte que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu M_{k,n}$ est une série convergente; le passage à la limite $N \to \infty$ dans (31) donne alors l'équation cherchée $\mu M_k = 0$.

Démonstration du théorème 9. Dans cette démonstration, les lettres m, n (pourvus éventuellement d'indices) signifient des nombres entiers non négatifs. Supposons les conditions du th. 9 remplies; d'après le th. 2, il existe un $A > 0$ tel que

$$\psi_1(t) > A t^{-\frac{s}{r}} \text{ pour } t \geqq 1. \tag{32}$$

La première partie du th. 9 (le cas de convergence de la série (7)) étant contenue dans le th. 8, supposons que la série (7) soit divergente. D'après le th. 6 (où l'on peut poser $\varphi(t) = t^{\frac{r}{s}}$, $\varrho(t) = t^{\frac{s}{r}}$), il existe, à chaque $m \geqq 0$, un nombre entier $f(m) > 0$ tel que l'on ait

$$(33) \qquad \psi_1(f(m); \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < 2^{-m-2}$$

pour chaque point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Désignons, en général, par $p(a_1, \ldots, a_{r+s})$ le point aux coordonnées $-\sum_{j=1}^{s}\Theta_{ij}a_j - a_{i+s}$ $(i = 1, \ldots, r)$. Aux deux systèmes $a_1, \ldots, a_{r+s}$ différents correspondent toujours deux points différents (car $\psi_1(t) > 0$) . $n \geqq 0$ étant un nombre entier, nous allons appeler le point $p(a_1, \ldots, a_{r+s})$ „point d'ordre n", si $\max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |a_j| \leqq 2^n$; il sera appelé „point primitif d'ordre n", si $n \geqq 2r + 4s$, $2^{n-2r-4s} < \max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |a_j| \leqq 2^n$. Le symbole $W(h_1, \ldots, h_r; m)$ va signifier toujours le cube $2^{-m}h_i \leqq \alpha_i < 2^{-m}(h_i + 1)$ $(1 \leqq i \leqq r)$; par $P(h_1, \ldots, h_r;\ m;\ n)$ et $Q(h_1, \ldots, h_r;\ m;\ n)$ on va désigner le nombre de tous les points d'ordre n, resp. le nombre de tous les points primitifs d'ordre n, appartenant au cube $W(h_1, \ldots, h_r;\ m)$.

Evidemment

$$(34) \quad \sum_{h_1=0}^{2^m-1} \cdots \sum_{h_r=0}^{2^m-1} P(h_1, \ldots, h_r;\ m;\ n) = P\,(0, \ldots, 0;\ 0;\ n) = (2^{n+1} + 1)^s,$$

$$(35) \quad Q(h_1, \ldots, h_r; m; n) = P(h_1, \ldots, h_r; m; n) - P(h_1, \ldots, h_r; m; n - 2r - 4s)$$

pour $n \geqq 2r + 4s$.

Soit $2^n > f(m)$ et soient h_i, h'_i $(1 \leqq i \leqq r)$ des nombres entiers quelconques. D'après (33), il existe $r + s$ nombres entiers $A_1, \ldots, A_{r+s}$ tels que

$$\max_{1 \leqq j \leqq s} |A_j| \leqq f(m) < 2^n,\ \max_{1 \leqq i \leqq r} \left|\sum_{j=1}^{s}\Theta_{ij}A_j + A_{i+s} + \frac{2h'_i - h_i + \frac{1}{2}}{2^{m+1}}\right| < \frac{1}{2^{m+2}}.$$

Soit $p(a_1, \ldots, a_{r+s})$ un point d'ordre n, situé dans le cube $W(h_1, \ldots, h_r;$ $m + 1)$; on obtient aussitôt

$$|a_j + A_j| \leqq f(m) + 2^n < 2^{n+1}\ (1 \leqq j \leqq s),$$

$$\frac{h'_i}{2^m} \leqq -\sum_{j=1}^{s}\Theta_{ij}(a_j + A_j) - (a_{i+s} + A_{i+s}) < \frac{h'_i + 1}{2^m}\ (1 \leqq i \leqq r),$$

de sorte que le point $p(a_1 + A_1, \ldots, a_{r+s} + A_{r+s})$ est un point d'ordre $n + 1$ situé dans $W(h'_1, \ldots, h'_r;\ m)$. Donc

$$P(h_1, \ldots, h_r; m + 1; n) \leqq P(h'_1, \ldots, h'_r; m; n + 1)$$

pour $2^n > f(m)$. En laissant les h_i fixes et en faisant la somme pour $0 \leqq$ $\leqq h'_i < 2^m$ $(1 \leqq i \leqq r)$, on obtient d'après (34)

$$2^{mr}P(h_1, \ldots, h_r; m + 1; n) \leqq (2^{n+2} + 1)^s < 2^{(n+3)s}$$

et, d'une manière analogue,

$$2^{(m+1)r}P(h'_1, \ldots, h'_r; m; n+1) > 2^{(n+1)s}.$$

En changeant un peu la notation, on obtient

$$(36) \qquad 2^{ns-(m+1)r} < P(h_1, \ldots, h_r; m; n) < 2^{(n+3)s-(m-1)r}$$

pour $m > 0$, $2^n > \max(2f(m), f(m-1))$. En employant (36) et (35), on obtient enfin aisément

$$(37) \qquad 2^{ns-mr-r-1} < Q(h_1, \ldots, h_r; m; n) < 2^{ns-mr+3s+r}$$

pour $m > 0$, $2^{n-2r-4s} > \max(2f(m), f(m-1))$.

* * *

Soit donné un certain cube

$$(38) \qquad W(h_1, \ldots, h_r; m).$$

Un cube ouvert K sera appelé un cube d'ordre n ($n \geqq 2r + 4s$), si les conditions suivantes sont satisfaites:

1. Le centre de K est un point primitif $p(a_1, \ldots, a_{r+s})$ d'ordre n, situé dans le cube (38).

2. Le côté de K est égal à $\frac{2}{\sigma(2^n)}$.

Les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathsf{K}$ sont donc caractérisés par les inégalités

$$\left|\sum_{j=1}^{s}\Theta_{ij}a_j + a_{i+s} + \alpha_i\right| < \frac{1}{\sigma(2^n)} \quad (1 \leqq i \leqq r)$$

et, pour tous ces points, on a

$$(39) \qquad \psi_1(2^n; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \frac{1}{\sigma(2^n)}.$$

Lemme 5. *A chaque n_0, on peut faire correspondre un nombre fini de cubes $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_w$ ($w \geqq 1$), jouissants des propriétés suivantes:*

A) *Chaque cube K_i ($1 \leqq i \leqq w$) est un cube d'ordre $> n_0$.*
B) $\mathsf{K}_i\mathsf{K}_j = 0$ *pour* $1 \leqq i < j \leqq w$.
C) $\mu\mathsf{K}_1 + \ldots + \mu\mathsf{K}_w > \Gamma \cdot 2^{-mr}$, *où* $\Gamma = A^r 2^{-5-5r-4s}$.

Supposons, pour un moment, le lemme 5 démontré; nous en allons déduire le th. 9. Soit M_k ($k = 1, 2, \ldots$) l'ensemble de tous les points $(\alpha_1, \ldots, \ldots, \alpha_r)$ tels que $\liminf \sigma(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > \frac{1}{k}$ et supposons $\mu M_1 > 0$. Il existe donc un cube $W = W(h_1, \ldots, h_r; m)$ ($m > 0$) de sorte que

$$\mu M_1 W > (1 - \tfrac{1}{2}\Gamma)\,\mu W = (1 - \tfrac{1}{2}\Gamma)\, 2^{-mr},$$

d'où

$$(40) \qquad \mu(W - M_1) < \tfrac{1}{2}\Gamma \cdot 2^{-mr}.$$

Pour $n_0 \geqq 1$ soit $N(n_0)$ l'ensemble de tous les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in W$ tels qu'il existe un $t \geqq 2^{n_0}$ avec $\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \frac{1}{\sigma(t)}$. On a évidemment

$$N(n_0) \supset N(n_0+1), \ W - M_1 \supset \prod_{n_0=1}^{\infty} N(n_0),$$

donc

$$\mu(W - M_1) \geqq \mu \prod_{n_0=1}^{\infty} N(n_0) = \lim_{n_0 \to \infty} \mu N(n_0). \tag{41}$$

L'inégalité (39) étant remplie pour chaque point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ situé dans un cube quelconque d'ordre n, on voit que

$$N(n_0) \supset W(\mathsf{K}_1 + \ldots + \mathsf{K}_w),$$

$\mathsf{K}_1, \ldots, \mathsf{K}_w$ étant les cubes du lemme 5. Chaque cube K_i $(1 \leqq i \leqq w)$ est situé dans le cube W' au côté $\frac{1}{2^m} + \frac{2}{\sigma(2^{n_0})}$, concentrique avec W. D'après le lemme 5, on a donc

$$\mu N(n_0) \geqq \mu(\mathsf{K}_1 + \ldots + \mathsf{K}_w) -$$
$$- \mu(W' - W) > \Gamma \, . \, 2^{-mr} - \left(\left(\frac{1}{2^m} + \frac{2}{\sigma(2^{n_0})} \right)^r - \frac{1}{2^{mr}} \right);$$

la formule (41) donne donc $\mu(W - M_1) \geqq \Gamma \, . \, 2^{-mr}$ (car $\lim\limits_{n_0 \to \infty} \sigma(2^{n_0}) = \infty$), ce qui est en contradiction avec (40). Donc $\mu M_1 = 0$; en appliquant ce résultat aux fonctions $2\sigma(t)$, $3\sigma(t)$, ..., satisfaisant elles aussi aux conditions imposées à la fonction $\sigma(t)$, on voit que $\mu M_2 = \mu M_3 = \ldots = 0$, donc lim inf $\sigma(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$ pour presque tous les systèmes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Donc le th. 9 sera démontré au moment où nous allons achever la

démonstration du lemme 5. Le nombre n_0 soit donné; choisissons un nombre entier ν_0 tel que

$$\begin{gathered} \nu_0 > n_0,\ \nu_0 \geqq 2r + 4s,\ \sigma(2^{\nu_0}) > 2,\ 2^{\nu_0 - 2r - 4s} > \max\,(2f(m), f(m-1)), \\ \frac{A}{2^{(\nu_0+1)\frac{s}{r}}} < 1,\ \frac{t^s}{\sigma^r(t)} < \frac{A^r}{2^{5r+4s+3}} \left(\text{donc } \frac{(2t)^{\frac{s}{r}}}{\sigma(t)} < \frac{A}{2} \right) \text{ pour } t \geqq 2^{\nu_0}. \end{gathered} \tag{43}$$

Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ posons $\nu_k = \nu_0 + (2r + 4s)k$. On a

$$\sum_{x=2^{\nu_k}+1}^{2^{\nu_k+1}} \frac{x^{s-1}}{\sigma^r(x)} \leqq \frac{2^{\nu_k+1\,s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})} = \frac{2^{\nu_k s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})} \, . \, 2^{s(2r+4s)},$$

de sorte que la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\nu_k s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})}$ est divergente. Chaque terme de cette série étant plus petit que 4Γ (voir (43)), on peut choisir un nombre entier $K > 0$ tel que

$$4\Gamma < \sum_{k=0}^{K} \frac{2^{\nu_k s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})} < 8\Gamma. \tag{44}$$

Le centre d'un cube quelconque d'ordre ν_k $(k > 0)$ étant un point *primitif* d'ordre ν_k, il ne peut être en même temps centre d'aucun cube d'ordre ν_l, où $l < k$.

Si un cube

$$|\sum_{j=1}^{s}\Theta_{ij}a_j + a_{i+s} + \alpha_i| < \frac{1}{\sigma(2^{\nu_k})} \; (1 \leqq i \leqq r)$$

d'ordre ν_k a un point commun avec un autre cube

$$|\sum_{j=1}^{s}\Theta_{ij}b_j + b_{i+s} + \alpha_i| < \frac{1}{\sigma(2^{\nu_l})} \; (1 \leqq i \leqq r)$$

d'ordre $\nu_l(0 \leqq l \leqq k)$, on a $\max\limits_{1 \leqq v \leqq r+s} |b_v - a_v| > 0$,

$$\max_{1 \leqq i \leqq r} |\sum_{j=1}^{s}\Theta_{ij}(b_j - a_j) + (b_{i+s} - a_{i+s})| < \frac{2}{\sigma(2^{\nu_l})} < 1,$$

$$\text{donc } 0 < \max_{1 \leqq j \leqq s} |b_j - a_j| \leqq 2^{\nu_k+1},\ \psi_1(2^{\nu_k+1}) < \frac{2}{\sigma(2^{\nu_l})}.$$

D'après (32), on a donc

$$A\, 2^{-(\nu_k+1)\frac{s}{r}} < 2\sigma^{-1}(2^{\nu_l}), \tag{45}$$

donc, en particulier, $l < k$ (voir (43)). Deux cubes différents du même ordre sont donc disjoints.

Soient maintenant données, deux nombers entiers l, k avec $0 \leqq l < k$ et un cube

$$\max_{1 \leqq i \leqq r} |\sum_{j=1}^{s}\Theta_{ij}a_j + a_{i+s} + \alpha_i| < \frac{1}{\sigma(2^{\nu_l})} \tag{46}$$

d'ordre ν_l. Soit S le nombre des cubes d'ordre ν_k ayant un point commun au moins avec le cube (46). Nous allons montrer que

$$S \leqq \frac{2^{s+3r}}{A^r}\frac{2^{\nu_k s}}{\sigma^r(2^{\nu_l})} \; (0 \leqq l < k). \tag{47}$$

En effet, si (45) n'est pas rempli, on a $S = 0$ et (47) est vrai. Supposons donc que l'on ait (45). Si (47) n'était pas vrai, on aurait

$$S > \left(2 \cdot \frac{2^{2+\frac{s}{r}}}{A}\frac{2^{\nu_k\frac{s}{r}}}{\sigma(2^{\nu_l})}\right)^r \geqq \left(\left[\frac{4}{\sigma(2^{\nu_l})}\frac{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}}{A}\right] + 1\right)^r. \tag{48}$$

Les centres de tous les cubes d'ordre ν_k, ayant un point commun avec le cube (46), sont situés dans un cube ouvert au côté $\dfrac{2}{\sigma(2^{\nu_l})} + \dfrac{2}{\sigma(2^{\nu_k})} < \dfrac{4}{\sigma(2^{\nu_l})}$. Si (48) était vrai, on pourrait trouver (Schubfachprinzip!) deux cubes d'ordre ν_k dont les centres $p(b_1, \ldots, b_{r+s})$, $p(c_1, \ldots, c_{r+s})$ satisferaient aux inégalités

$$\max_{1 \leqq i \leqq r} \left|\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij}(b_j - c_j) + (b_{i+s} - c_{i+s})\right| <$$

$$< \frac{4}{\sigma(2^{\nu_l})} \left(\left[\frac{4}{\sigma(2^{\nu_l})} \frac{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}}{A}\right] + 1\right)^{-1} < \frac{A}{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}} < 1 \text{ (voir (43))},$$

$$0 < \max_{1 \leqq v \leqq r+s} |b_v - c_v|, \text{ donc } 0 < \max_{1 \leqq j \leqq s} |b_j - c_j| \leqq 2^{\nu_k+1}, \psi_1(2^{\nu_k+1}) < \frac{A}{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}},$$

ce qui est en contradiction avec (32); (47) est donc démontré.

Soit maintenant $\mathfrak{A}_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) l'ensemble de tous les cubes d'ordre ν_k, qui n'ont — pour $0 \leqq l < k$ — aucun point commun avec aucun cube d'ordre ν_l. L'ensemble $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_K$ consiste d'un nombre fini de cubes, que nous désignons par $\mathsf{K}_1, \ldots, \mathsf{K}_w$. Les propriétés **A**, **B** sont évidentes. Soit enfin Z_k le nombre de tous les cubes de l'ensemble $\mathfrak{A}_k$; d'après (47), (37) on a

$$Z_k \geqq Q(h_1, \ldots, h_r; m; \nu_k) - \sum_{0 \leqq l < k} \frac{2^{s+3r}\, 2^{\nu_k s}}{A^r \sigma^r(2^{\nu_l})} Q(h_1, \ldots, h_r; m; \nu_l)$$

$$\geqq 2^{\nu_k s - mr - r - 1} - \sum_{l=0}^{K} \frac{2^{4r+4s}}{A^r} \frac{2^{\nu_k s} \cdot 2^{\nu_l s - mr}}{\sigma^r(2^{\nu_l})}.$$

Donc, d'après (44),

$$\mu\,\mathsf{K}_1 + \ldots + \mu\,\mathsf{K}_w = \sum_{k=0}^{K} Z_k \left(\frac{2}{\sigma(2^{\nu_k})}\right)^r$$

$$\geqq 2^{-mr} \sum_{k=0}^{K} \tfrac{1}{2} \frac{2^{\nu_k s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})} \left(1 - \sum_{l=0}^{K} \frac{2^{5r+4s+1}}{A^r} \frac{2^{\nu_l s}}{\sigma^r(2^{\nu_l})}\right)$$

$$> 2^{-mr} \sum_{k=0}^{K} \tfrac{1}{2} \frac{2^{\nu_k s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})} (1 - \tfrac{1}{2}) \geqq \Gamma \cdot 2^{-mr},$$

d'où la propriété **C**.