Otakar Borůvka

V. Volterra - B. Hostinský: Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles. Paris, Gauthier-Villars 1938. 8° p. VII-239

Bollettino di Matematica 35, 1939, str. XVIII-XXI

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500199

que) avec un resumé des points essentiels à connaître, une règle du jeu, une bibliographie, ecc. - Paris, 1937, 12 fr., pag. 204 avec des figures et des nombreux tableaux.

L' opuscolo del dott. Maci Tóvan differisce da questi in quanto, dopo una breve introduzione di carattere generale, si limita al problema delle concordanze nello schema dei sorteggi. Esso dà senza dimostrazione la formula:

$$P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!},$$

che esprime la probabilità che nel sorteggio di palle numerate da un'urna, esca almeno una palla il cui numero concordi con quello di estrazione, e l'applica ad un caso particolare, a quello cioè che nella Roulette si punti sulle colonne, e cioè si scommetta che nel 1° colpo esca un numero della 1ª colonna, nel 2° uno della 2ª, nel 3° uno della 3ª colonna, ecc.

Si trova come probabilità:

$$P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3},$$

e ciò darebbe una combinazione favorevole al giocatore.

Il Maci Tóvan aggiunge molte tabelle relative alle permanenze autentiche di Montecarlo o di San Remo, le quali mostrano che le sue deduzioni si avverano in pratica, porta esempî, dà suggerimenti pratici ecc. È dunque aperta la via alla vincita e alla ricchezza? Ne dubitiamo.

A titolo di curiosità aggiungiamo i titoli di due altri opuscoli dello stesso A.: « Il problema delle concordanze applicato al Trente et Quarante », « Un impiego di capitale ad altissimo rendimento ». Concessionario De Augustinis Ferdinando, Salerno.

A. Natucci

V. Volterra et B. Hostinsky - *Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles.* Paris, Gauthier-Villars 1938. 8°. p. VII-239.

1. - Le materie trattate nei diciotto capitoli in cui è divisa quest' opera si ripartiscono in due sezioni. La prima comprende i capitoli I-XV e rappresenta circa tre quarti del tutto; l' altra abbraccia i capitoli XVI-XVIII.

2. - La prima sezione è una traduzione delle due memorie di Volterra *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* (Memorie della Società Italiana delle scienze, III Ser. T. VI, Parte I, 1887 ; III Ser. T. XII, Parte II, 1902) con alcuni comple-

menti e mutamenti di secondaría importanza. Si tratta, in fondo, di uno studio di due operazioni concernenti le matrici quadrate regolari i cui elementi sono funzioni di una o più variabili, operazioni analoghe alla derivazione ovvero alla differenziazione e l'integrazione delle funzioni nel senso ordinario di questo vocabolo. (Un resoconto di questo argomento trovasi ad es. nel volume: C. C. Mac Duffee, *The Theory of Matrices*, Berlin 1933, p. 102-103)

Sia $S(x)$ una matrice quadrata regolare i cui elemementi sono funzioni della variabile reale x, aventi, nel punto x, derivate di primo ordine. Allora i limiti

$$\frac{dS(x)}{dx} = \lim_{\Delta x=0} \frac{1}{\Delta x} \{S(x+\Delta x)\cdot S(x)^{-1} - I\},$$

$$S(x)\frac{d}{dx} = \lim_{\Delta x=0} \frac{1}{\Delta x} \{S^{-1}(x)\, S(x+\Delta x) - I\},$$

ove I designa la matrice unità, esistono e rappresentano la derivata a destra della matrice $S(x)$ nel punto x; le matrici infinitesime $dS(x) = S(x+dx)\,S(x)^{-1}$, $S(x)\,d = S(x)^{-1}S(x+dx)$ servono a definire la derivata a sinistra e la derivata a destra della matrice $S(x)$ nel punto x. In modo analogo si definiscono le derivate parziali e i differenziali delle matrici in cui elementi sono funzioni di parecchie variabili. Supponiamo che gli elementi della matrice $S(x)$ siano funzioni limitate e integrabili (R) nell'intervallo $a \ldots b$. Sia $a = a_0, a_1, \ldots, a_m = b$, una divisione dell'intervallo $a \ldots b$ e sia x_r un numero qualunque dell'intervallo $a_{r-1} \ldots a_r$. Poniamo $T_r = I + (a_r - a_{r+1})S(x)$,

$$A_m = T_m T_{m-1} \ldots T_1, \qquad A'_m = T_1 T_2 \ldots T_m.$$

Esistono allora $\lim A_m$, $\lim A'_m T$, quando m tende ad ∞ e gl'intervalli $a_{r-1} \ldots a_r$ tendono a zero e questi sono, per definizione, l'integrale a sinistra e l'integrale a destra, entro i limiti $a \ldots b$ della matrice $S(x)$. L'importanza di queste nozioni e d'altre che ne derivano (p. es. la nozione delle derivate di una matrice i cui elementi sono funzioni analitiche di una variabile complessa, quella di integrale curvilineo di una matrice, ecc.) consiste nel fatto che esse da un lato sono la base di una teoria che corrisponde all'ordinario calcolo infinitesimale ed alla teoria delle funzioni analitiche e che d'altra parte ammettono applicazioni notevoli alla teoria classica delle equazioni differenziali lineari. Così si scoprono in detta teoria delle analogie perfette con la relazione fra l'integrale e la funzione primitiva con l'integrazione di un differenziale totale, col teorema di Cauchy relativo alle funzioni analitiche, col teorema dei residui, con i teoremi relativi agli integrali abeliani, ecc. Un'applicazione alla teoria delle equazioni differenziali lineari è rappresentato dal seguente teorema: Ogni colonna dell'integrale a sinistra, fra i limiti $a \ldots x$ della matrice $|a_{ij}(x)|$ d'ordine n è un integrale del seguente sistema di equazioni differenziali lineari

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j$$

e questi n integrali costituiscono un sistema fondamentale che, per $x = a$, si riduce alla matrice-unità.

3. - La seconda sezione dell'opera è consacrata alle trasformazioni funzionali lineari, cioè alle trasformazioni $g = S(f)$ che fanno corrispondere ad ogni funzione $f(x)$ soddisfacente a certe condizioni (p. es. ad ogni funzione continua) un'altra funzione $g(x)$, in modo che alla funzione $a_1 f_2(x) + a_2 f_1(x)$ corrisponda la funzione $a_1 S(f_1) + a_2 S(f_2)$ per tutti i valori delle costanti a_1, a_2. Uno studio particolareggiato è fatto riguardo alle seguenti trasformazioni

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y, u) f(y) dy, \qquad g(x) = \int_a^b K(x, y, u) f(y) dy,$$

$K(x, y . u)$ essendo una funzione continua di x, y, u; queste trastormazioni si chiamano rispettivamente « trasformazioni di seconda classe » e « trasformazioni di prima classe » e vengono designate col simbolo $\}K(x, y, u)\{$. Le relative considerazioni sono naturalmente in relazione con le equazioni integrali di Fredholm e sono dovute, per la maggior parte, a B. Hostinsky. Questa seconda parte si collega alla prima mediante nozioni analoghe, una trasformazione funzionale lineare essendo analoga ad una sotistuzione lineare e la funzione $K(x, y, u)$ ad una matrice $S(u)$. Si tratta in certo modo di rimpiazzare degli indici, che sono discontinui, con variabili continue.

Nella teoria delle trasformazioni di seconda classe la definizione del prodotto di due trasformazioni $\}K(x, y, u)\{$, $\}K(x, y, v)\{$ e la definizione di trasformazione inversa $\}N(x, y, u)\{$ sono fondamentali. La definizione del prodotto di due trasformazioni è data dalla formula

$$\}K(x, y, v)\{\,\}K(x, y, u)\{ = \}K(x, y, v) + K(x, y, u) + \\ + \int_a^b K(x, z, v) \cdot K(x, y, u) \cdot dz\{$$

che risulta dalla formula di trasformazione quando la trasformazione $\}K(x, y, u)\{$ è seguita dalla $\}K(x, y, v)\{$; l'esistenza della trasformazione inversa $\}N(x, y, u)\{$ è assicurata, almeno sotto certe condizioni relative la funzione $K(x, y, u)$, dalla teoria di Fredholm:

$$f(x) = g(x) + \int_a^b N(x, y, u) g(y) dy.$$

Quando $K(x, y, u)$, $\dfrac{dK(x, y, u)}{du}$ sono continue, le trasformzioni-limiti

$$\lim_{\Delta u = 0} \frac{1}{\Delta u} \}K(x, y, u + \Delta u)\{\,\}N(x, y, u)\{$$

$$\lim_{\Delta u = 0} \frac{1}{\Delta u} \}N(x, y, u)\{\,\}K(x, y, u + \Delta u)\{$$

esistono e definiscono la derivata a sinistra e la derivata a destra della trasformazione $\}K(x, y, u)\{$. Si definisce in modo analogo a quello usato nel caso delle matrici, l'integrale a sinistra e l'integrale a destra della trasformazione $\}K(x, y, u)\{$: sono ancora il limite del prodotto di m certe trasformazioni quando m cresce indefinitivamente. In questa teoria dell'integrale rientra per es. la seguente equazione funzionale

$$\Psi(x, y, s, t) = \Psi(x, y, s, u) + \Psi(x, y, u, t) + \int_a^b \Psi(x, y, s, t)\Psi(z, y, s, u)\,dz$$

che è verificata dal nucleo $\Psi(x, y, s, t)$ dell'integrale a sinistra $\}\Psi(x, y, s, t)\{$ preso fra i limiti s, t.

Nel caso delle trasformazioni di prima classe i ragionamenti precedenti non si applicano in generale perchè una trasformazione di prima classe non ammette in generale trasformazione inversa. Tuttavia si può in questo caso svolgere una teoria dell'integrale e questa teoria conduce a delle funzioni $\Phi(x, y, s, t)$ che verificano l'equazione di Chapman

$$\Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u)\Phi(x, y, u, t)\,dz.$$

Riguardo a questa equazione l'ultimo capitolo contiene alcuni ragionamenti particolareggiati connessi alla teoria in questione, come pure delle informazioni intorno al lavori recenti sopra questa equazione.

4. - Ritengo che i numerosi e bei risultati a cui conduce la teoria svolta in quest'opera, richiameranno presto l'attenzione dei matematici sopra un tema che indubbiamente offre ancora molte possibilità.

O. Boruvka [1]

Brno (Cekoslovakia) 19-VI-1938

A. A. Albert. *Modern higher Algebra*. Chicago, The University of Chicago Press, 1937. gr. 8° p. XIV-319 (Prezzo doll. 4).

Che cosa intende l'autore per *Algebra superiore moderna*, è difficile dirlo in poche parole; il significato di questa frase risulterà meglio dall'analisi che ci proponiamo di fare dell'interessante volume.

I due primi capitoli sono di carattere introduttivo.

Nel C. 1 vengono anzitutto definiti i concetti di *aggregato*, *corrispondenza*, *trasformazione*, *operazione*, *equivalenza* (relazione riflessiva, simmetrica e transitiva), e si richiamano le proprietà fondamentali dei numeri interi. Si presenta poi il concetto di *gruppo*, insieme di elemento chiuso rispetto ad una determinata

(1) Versione dal francese per cura della Direzione del *Bollettino*.