Otakar Borůvka

Über Ketten von Faktoroiden

Math. Ann. 118, 1941, 41-64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500058

# Über Ketten von Faktoroiden.

Von

O. Boruvka in Brünn.

In den Vorlesungen über Gruppentheorie, die ich im Jahre 1938/39 auf der Universität in Brünn gehalten habe, war ich bestrebt, die allgemeinen Sätze der Gruppentheorie mit Hinblick auf ihre Abhängigkeit von den einzelnen Gruppenaxiomen zu formulieren und zu beweisen. Das hat mich naturgemäß zu systematischen Untersuchungen über Gruppoide geführt. Unter einem Gruppoid verstehe ich den Inbegriff einer nicht leeren Menge $G$ und einer Multiplikation in $G$. In dieser Arbeit erlaube ich mir einen Teil meiner Resultate darzustellen, und zwar die Theorie der Ketten von Faktoroiden. Der Begriff eines Faktoroides ist für die gesamte Gruppoidentheorie von grundlegender Bedeutung und stellt eine Verallgemeinerung des Begriffes einer Faktorgruppe dar. Ich erlaube mir auf seine Definition in Nr. 8 hinzuweisen. Die hier entwickelte Theorie der Ketten von Faktoroiden bildet eine weitgehende Verallgemeinerung der klassischen Theorie der Normalketten.

Die Arbeit besteht aus drei Teilen. Im Teile I werden mengentheoretische Grundlagen der Gruppoidentheorie entwickelt; der Teil II enthält grundlegende Begriffe und Sätze der Gruppoidentheorie und der Teil III die Theorie der Ketten von Faktoroiden.

## I. Mengentheoretische Grundlagen der Gruppoidentheorie.

**1. Bezeichnungen.** Mengen (Elemente in Mengen) bezeichnen wir in der Regel mit großen (kleinen) lateinischen Buchstaben. Systeme von Mengen bezeichnen wir in der Regel mit Symbolen wie z. B. $\bar{A}$, $\mathring{A}$ und ihre einzelnen Elemente mit $a$, $\mathring{a}$. $\mathbf{s}\,\bar{A}$ bedeutet die Summe aller Mengen, die in $\bar{A}$ als Elemente vorkommen. 0 ist das Symbol für die leere Menge. Die auf zwei Mengen sich beziehenden Symbole $\vee$, $\wedge$, $\cap$ bedeuten ihre Summe, Differenz, Durchschnitt. Die Bedeutung von $\in$, $\subset$, $\supset$, $=$ und $\notin$, $\not\subset$, $\not\supset$, $\neq$ dürfen wir wohl als bekannt voraussetzen. Wenn zwei Mengen einen nicht leeren Durchschnitt haben, so nennen wir sie *inzident*. Der Buchstabe $G$ bedeutet die ganze Arbeit hindurch eine nicht leere Menge.

**2. Zerlegungen in Mengen.** Ein nicht leeres System $\bar{A}$ von nicht leeren paarweise fremden Untermengen in $G$ nennen wir *Zerlegung in $G$* und im Falle $s\bar{A} - G$ *Zerlegung von $G$* oder *auf $G$*. Ist $\bar{A}$ eine Zerlegung in $G$ und $A$ eine Zerlegung von $\bar{A}$, so ist das System $\mathring{A}$ von Untermengen in $G$, von denen jede die Summe aller in demselben Elemente von $A$ vorkommenden Elemente von $\bar{A}$ ist, wieder eine Zerlegung in $G$. Wir sagen, $\mathring{A}$ sei *die durch $A$ erzwungene Überdeckung von $\bar{A}$*, kürzer: eine *Überdeckung von $\bar{A}$*.

Es seien $\bar{A}, \bar{C}$ Zerlegungen in $G$. Die Menge aller nicht leeren Durchschnitte eines jeden Elementes in $\bar{A}$ mit jedem Elemente in $\bar{C}$ heißt *die Durchdringung von $\bar{A}, \bar{C}$* und wird mit $\bar{A} \sqcap \bar{C}$ oder $\bar{C} \sqcap \bar{A}$ bezeichnet. Es ist $s(\bar{A} \sqcap \bar{C}) \quad s\bar{A} \cap s\bar{C}$. In ähnlicher Weise definieren wir *die Durchdringung einer nicht leeren Untermenge $B \subset G$ und der Zerlegung $\bar{A}$*, und zwar als die Menge aller nicht leeren Durchschnitte von $B$ mit den Elementen in $\bar{A}$. Bezeichnung: $B \sqcap \bar{A}$ oder $\bar{A} \sqcap B$.

Die Menge der Elemente $\bar{c} \in \bar{C}$, die mit irgendeinem Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$ inzident sind, nennen wir *die Hülle der Zerlegung $\bar{A}$ in $\bar{C}$* und bezeichnen sie mit $\bar{A} \sqsubset \bar{C}$ oder $\bar{C} \sqsupset \bar{A}$. Nach dieser Definition ist also $\bar{A} \sqsubset \bar{C} \subset \bar{C}$ und es gilt $s\bar{A} \cap s(\bar{A} \sqsubset \bar{C}) = s\bar{A} \cap s\bar{C}$. In ähnlicher Weise definieren wir *die Hülle einer nicht leeren Untermenge $B \subset G$ in der Zerlegung $\bar{A}$*, und zwar als die Menge aller Elemente $a \in \bar{A}$, die mit $B$ inzident sind. Bezeichnung: $B \sqsubset \bar{A}$ oder $\bar{A} \sqsupset B$.

Es ist zweckmäßig, die Symbole $\bar{A} \sqcap \bar{C}$, $B \sqcap \bar{A}$, $\bar{A} \sqsubset \bar{C}$, $B \sqsubset \bar{A}$ auch für den Fall zu definieren, wo ein oder beide Buchstaben in einem solchen Symbole die leere Menge 0 bedeuten, und zwar wieder als 0.

Der Begriff der Durchdringung von zwei Zerlegungen hängt mit dem Begriffe der Durchdringung einer Untermenge und einer Zerlegung und ebenso der Begriff der Hülle einer Zerlegung in einer weiteren Zerlegung mit dem Begriffe der Hülle einer Untermenge in einer Zerlegung in folgender Weise zusammen:

$$\bar{A} \sqcap \bar{C} = (s\bar{A} \sqcap \bar{C}) \sqcap (\bar{A} \sqcap s\bar{C}), \qquad \bar{A} \sqsubset \bar{C} = s\bar{A} \sqsubset \bar{C}.$$

Wenn eine Untermenge $B$ und eine Zerlegung $\bar{A}$ in $G$ gegeben sind, wobei $B \cap s\bar{A} \neq 0$, so ist dadurch einerseits die Zerlegung $B \sqcap \bar{A}$ von $B \cap s\bar{A}$ und andererseits die nicht leere Untermenge $B \sqsubset \bar{A}$ in $\bar{A}$ eindeutig bestimmt.

Wir überlassen es dem Leser, die folgenden einfachen Beziehungen zwischen Durchdringungen und Hüllen zu beweisen. Dabei bedeuten $\bar{A}, \bar{C}$ Zerlegungen und $B \supset D$ Untermengen in $G$.

˙1. 1° $B \sqcap \bar{A} = (B \cap s\bar{A}) \sqcap \bar{A}$ 2° $B \sqsubset \bar{A} = (B \cap s\bar{A}) \sqsubset \bar{A}$;

˙2. $s(s\bar{A} \sqsubset \bar{C}) \sqcap \bar{A} = s\bar{C} \sqcap \bar{A}$;

˙3. $(D \sqsubset \bar{A}) \sqcap B = D \sqsubset (\bar{A} \sqcap B)$ $(= D \sqsubset \bar{A} \sqcap B)$. Daraus folgt (für $D = B$)

˙4. $(B \sqsubset \bar{A}) \sqcap B = \bar{A} \sqcap B$;

˙5. $(B \sqsubset \bar{A}) \sqcap D = \bar{A} \sqcap D$.

**3. Zerlegungen auf Mengen.** Wir werden nun insbesondere Zerlegungen *auf* $G$ betrachten. Als Beispiele von solchen Zerlegungen führen wir an die aus dem einzigen Elemente $\{G\}$ bestehende *größte Zerlegung* $\bar{G}_{max}$ *von* $G$ und *die kleinste Zerlegung* $\bar{G}_{min}$ *von* $G$; diese besteht aus den Untermengen $\{a\}$, wobei $a \in G$.

Es seien $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ Zerlegungen von $G$. Wenn jedes Element in $\bar{G}_1$ die Summe von einigen in $\bar{G}_2$ vorkommenden Elementen ist, so nennen wir $\bar{G}_1$ $(\bar{G}_2)$ *Überdeckung (Verfeinerung) von* $\bar{G}_2$ $(\bar{G}_1)$ und sagen, $\bar{G}_1$ $(\bar{G}_2)$ *sei* oder *liege über (unter)* $\bar{G}_2$ $(\bar{G}_1)$. Bezeichnung: $\bar{G}_1 \geqq \bar{G}_2$ oder $\bar{G}_2 \leqq \bar{G}_1$.

˙1. *Wenn* $\bar{G}_1 \geqq \bar{G}_2$ *gilt, so folgt aus* $a_1 \in \bar{G}_1$, $\bar{a}_2 \in \bar{G}_2$, $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \neq 0$ *die Beziehung* $\bar{a}_1 \supset a_2$ *und umgekehrt.*

Beweis. Ist $\bar{G}_1 \geqq \bar{G}_2$ und $a_1 \in \bar{G}_1$, $a_2 \in \bar{G}_2$, $a_1 \cap \bar{a}_2 \neq 0$, so ist $a_1$ die Summe von einigen in $\bar{G}_2$ vorkommenden Elementen; unter diesen befindet sich das Element $a_2$ wegen $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \neq 0$ und weil die Elemente von $\bar{G}_2$ paarweise fremd sind. Folgt umgekehrt aus $a_1 \in \bar{G}_1$, $a_2 \in \bar{G}_2$, $a_1 \cap \bar{a}_2 \neq 0$ die Beziehung $\bar{a}_1 \supset a_2$, so ist das Element $a_1$ die Summe aller mit ihm inzidenten Elemente in $\bar{G}_2$.

Wir bemerken, daß die oben definierte Beziehung $\geqq$ zwischen Zerlegungen von $G$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, also in jedem nicht leeren Systeme von Zerlegungen von $G$ eine partielle Ordnung bestimmt. Wegen $\bar{G}_{max} \geqq \bar{G}_1 \geqq \bar{G}_{min}$ hat das durch diese Beziehung $\geqq$ teilweise geordnete System aller Zerlegungen von $G$ das größte Element $\bar{G}_{max}$ und das kleinste Element $\bar{G}_{min}$.

Wir betrachten nun ein nicht leeres System $(\bar{X})$ von Zerlegungen von $G$. Wenn für eine Zerlegung $\bar{G}$ von $G$ die Beziehung $\bar{G} \geqq \bar{X}$ $(\bar{G} \leqq \bar{X})$ besteht, und zwar für jede Zerlegung $\bar{X} \in (\bar{X})$, so nennen wir $\bar{G}$ *Überdeckung (Verfeinerung) von* $(\bar{X})$ oder *gemeinsame Überdeckung (Verfeinerung) von Zerlegungen in* $(\bar{X})$ und sagen, $\bar{G}$ *sei* oder *liege über (unter)* $(\bar{X})$. Eine Überdeckung von $(\bar{X})$ heißt *größte (kleinste) Überdeckung von* $(\bar{X})$, wenn sie über (unter) jeder Überdeckung von $(\bar{X})$ liegt; eine Verfeinerung von $(\bar{X})$ heißt *größte (kleinste) Verfeinerung von* $(\bar{X})$, wenn sie über (unter) jeder Verfeinerung von $(\bar{X})$ liegt. Offenbar ist $\bar{G}_{max}$ die einzige größte Überdeckung und $\bar{G}_{min}$ die einzige kleinste Verfeinerung von $(\bar{X})$.

˙2. *Es gibt genau eine kleinste Überdeckung von* $(\overline{X})$. Dieselbe ist durch die im Teile a) des folgenden Beweises gegebene Konstruktion bestimmt.

Beweis. a) Es sei $\overline{G}_0 \in (\overline{X})$ und $a_0, \bar{b}_0 \in \overline{G}_0$. Eine geordnete endliche Menge von Elementen in $\overline{G}_0$

$$\{a_1, \ldots, a_\alpha\}$$

nennen wir *Kette in* $(\overline{X})$ *von* $a_0$ *nach* $b_0$, wenn $a_1 - a_0$, $a_\alpha = b_0$ und wenn je zwei einander folgende Elemente in der Menge mit einem und demselben Elemente einer geeigneten Zerlegung $\overline{X} \in (\overline{X})$ inzident sind. Die für je zwei Elemente $a_0, b_0$ in $\overline{G}_0$ durch die Existenz einer Kette in $(\overline{X})$ von $a_0$ nach $\bar{b}_0$ definierte Beziehung ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv. Es gibt also eine Zerlegung $\overline{\overline{G}}_0$ von $\overline{G}_0$, so daß für je zwei in demselben Element in $\bar{G}_0$ liegenden Elemente von $\overline{G}_0$ eine Kette in $(\overline{X})$ von dem einen nach dem anderen existiert, während es keine solche Kette gibt für zwei Elemente in $\overline{G}_0$, die in verschiedenen Elementen von $G_0$ liegen. Die durch $G_0$ erzwungene Überdeckung $\overline{U}$ von $\overline{G}_0$ ist die kleinste Überdeckung von $(\overline{X})$.

b) $\overline{U}$ ist eine Überdeckung von $(\overline{X})$. Zum Beweise betrachten wir eine Zerlegung $\overline{X} \in (\overline{X})$ von $G$ und zwei inzidente Elemente $u \in \overline{U}$, $x \in \overline{X}$. Nach ˙*1* genügt es zu zeigen, daß $\bar{u} \supset x$ ist. Nun gibt es aber nach der Definition von $\bar{u}$ und wegen $u \cap x \neq 0$ ein $a_0 \in \overline{G}_0$, so daß $u \supset a_0$, $\bar{a}_0 \cap \bar{x} \neq 0$. Wir wählen ein $x \in \bar{x}$ und betrachten das durch die Beziehung $x \in \bar{b}_0$ bestimmte Element $\bar{b}_0 \in \overline{G}_0$. Offenbar ist $\{\bar{a}_0, b_0\}$ eine Kette in $(\overline{X})$ von $\bar{a}_0$ nach $\bar{b}_0$. Die Elemente $a_0, b_0$ von $\overline{G}_0$ sind also in demselben Elemente von $\overline{G}_0$ enthalten; also ist $u \supset b_0$. Daraus folgt $x \in \dot{u}$ und weiter $u \supset x$.

c) $\overline{U}$ ist eine kleinste Überdeckung von $(\overline{X})$. Zum Beweise betrachten wir eine Überdeckung $\overline{G}$ von $(\overline{X})$ und zwei inzidente Elemente $\bar{a} \in \overline{G}$, $\bar{u} \in \overline{U}$. Nach ˙*1* haben wir zu zeigen, daß $\bar{a} \supset \bar{u}$ ist. Nun ist aber $a$ die Summe von einigen Elementen in $\overline{G}_0$ und desgleichen $u$. Daraus folgt wegen $\bar{a} \cap \bar{u} \neq 0$ die Existenz eines Elementes $a_0 \in \overline{G}_0$, wobei $a_0 \subset a \cap u$. Es sei $\bar{b}_0 \in \overline{G}_0$, $\bar{b}_0 \subset u$. Es gibt eine Kette in $(\overline{X})$ von $a_0$ nach $b_0$

$$\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha\}, \qquad (a_1 = \bar{a}_0,\ a_\alpha = b_0)$$

und nach der Voraussetzung besteht die Beziehung $a_1 \subset \bar{a}$. Wir nehmen an, daß für ein $(1 \leqq)\, \beta\, (\leqq \alpha - 1)$ auch die weiteren Beziehungen $a_1, \ldots, a_\beta \subset \bar{a}$ bestehen. Dann gibt es in einer geeigneten Zerlegung $X \in (\overline{X})$ von $G$ ein mit $\bar{a}_\beta, \bar{a}_{\beta+1}$ inzidentes Element $x$. Wegen $a_\beta \subset \bar{a}$ ist $x \cap a \neq 0$ und aus $\overline{X} \leqq \overline{G}$ folgt $\bar{x} \subset a$. Also ist $a_{\beta+1} \cap a \neq 0$, und aus $\overline{G}_0 \leqq \overline{G}$ folgern wir $a_{\beta+1} \subset \bar{a}$. Somit haben wir $\bar{a}_\alpha \subset a$ und daher auch $\bar{u} \subset \bar{a}$ bewiesen.

d) $\overline{U}$ ist die einzige kleinste Überdeckung von $(\overline{X})$. Denn ist auch $\overline{G}$ eine kleinste Überdeckung von $(\overline{X})$, so gelten die Beziehungen $\overline{G} \geqq \overline{U}$, $\overline{U} \geqq \overline{G}$, woraus wegen der Antisymmetrie der Beziehung $\geqq$ folgt $\overline{G} = \overline{U}$.

˙3. *Es gibt genau eine größte Verfeinerung von* $(\overline{X})$. Dieselbe ist durch die im Teile a) des folgenden Beweises gegebene Konstruktion bestimmt.

Beweis. a) Es sei $a, b \in G$. Wir sagen, daß sich $a$ mit $b$ verbinden läßt, wenn $a$ in demselben Elemente von jeder Zerlegung $\overline{X} \in (\overline{X})$ von $G$ wie $b$ liegt. Die für je zwei Elemente $a, b \in G$ definierte Beziehung, daß sich $a$ mit $b$ verbinden läßt, ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv. Es gibt also eine Zerlegung $\overline{V}$ von $G$, so daß sich zwei Elemente in $G$ dann und nur dann verbinden lassen, wenn sie in demselben Elemente von $\overline{V}$ liegen. $\overline{V}$ ist die größte Verfeinerung von $(\overline{X})$.

b) $\overline{V}$ ist eine Verfeinerung von $(\overline{X})$. Zum Beweise betrachten wir eine Zerlegung $\overline{X} \in (\overline{X})$ von $G$ und zwei inzidente Elemente $\bar{v} \in \overline{V}$, $x \in \overline{X}$. Nach ˙1 genügt es zu zeigen, daß $x \supset v$ ist. Wegen $\bar{v} \cap \bar{x} \neq 0$ gibt es ein $a \in v \cap x$ und nach der Definition von $\overline{V}$ läßt sich $a$ mit jedem $b \in \bar{v}$ verbinden. Es ist also $b \in x$, und daraus folgt $x \supset v$.

c) $\overline{V}$ ist eine größte Verfeinerung von $(\overline{X})$. Zum Beweise betrachten wir eine Verfeinerung $\overline{G}$ von $(\overline{X})$ und zwei inzidente Elemente $v \in \overline{V}$, $a \in \overline{G}$. Wieder genügt es, die Beziehung $v \supset \bar{a}$ zu beweisen. Wegen $\bar{v} \cap \bar{a} \neq 0$ gibt es ein $a \in v \cap a$. Es sei $\overline{X} \in (\overline{X})$, $x \in \overline{X}$, $a \in x$. Da $\overline{G}$ eine Verfeinerung von $(\overline{X})$ ist, so haben wir $a \subset x$. Also läßt sich $a$ mit jedem $b \in \bar{a}$ verbinden, und daraus folgt $v \supset a$.

d) $\overline{V}$ ist die einzige größte Verfeinerung von $(\overline{X})$. Der Beweis ist ähnlich wie in ˙2 d).

Nach den Sätzen ˙2, ˙3 bildet das durch die Beziehung $\geqq$ teilweise geordnete System aller Zerlegungen von $G$ einen vollständigen Verband (complete lattice). Wie wir schon erwähnt haben, hat dieser vollständige Verband das größte Element $\overline{G}_{max}$ und das kleinste $\overline{G}_{min}$.

Wir beweisen noch den folgenden Satz betreffend die kleinste gemeinsame Überdeckung $\overline{U}$ von zwei Zerlegungen $\overline{G}_1, \overline{G}_2$ von $G$.

˙4. *Aus* $a_1 \in \overline{G}_1$, $a_2 \in \overline{G}_2$, $\mathfrak{s}(a_1 \sqsubset \overline{G}_2) = \mathfrak{s}(a_2 \sqsubset \overline{G}_1)$ $(\equiv u)$ *folgt* $u \in \overline{U}$.

Beweis. Nach der Definition von $\bar{u}$ ist $\bar{u} = \Sigma_1 b_1 = \Sigma_2 \bar{b}_2$, wobei sich $\Sigma_1$ $(\Sigma_2)$ auf die mit $a_2$ $(a_1)$ inzidenten Elemente $b_1 \in \overline{G}_1$ $(b_2 \in \overline{G}_2)$ bezieht. Da jedes Element von $a_1$ $(a_2)$ in einem Elemente von $\overline{G}_2$ $(\overline{G}_1)$ liegt, so ist $a_1, a_2 \subset u$. Also ist $a_1$ $(\bar{a}_2)$ eines der Elemente $b_1$ $(b_2)$ und ist daher mit $a_2$ $(\bar{a}_1)$ inzident. Für $\bar{b}_1 \in \overline{G}_1$, $\bar{b}_1 \subset u$ stellt also $\{a_1, b_1\}$ eine Kette in $\{\overline{G}_1, \overline{G}_2\}$ von $a_1$ nach $b_1$ dar. Wir haben nur noch zu zeigen, daß es für $b_1 \in G_1$, $b_1 \not\subset u$ keine Kette in $\{\overline{G}_1, \overline{G}_2\}$ von $a_1$ nach $\bar{b}_1$ gibt. Gibt es eine solche Kette $\{a_1 = a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1\alpha} = \bar{b}_1\}$, so gilt für ein geeignetes $(0 \leqq)\, \beta\, (\leqq \alpha - 1)$: $\bar{a}_{1\beta} \subset \bar{u}$, $a_{1,\beta+1} \not\subset u$. Nach der Definition einer Kette gibt es ein mit $a_{1\beta}$ und $\bar{a}_{1,\beta+1}$ inzidentes Element $\bar{b}_2 \in \bar{G}_2$. Aus $\bar{a}_{1\beta} \subset u$ und $\bar{b}_2 \cap \bar{a}_{1\beta} \neq 0$ folgt $b_2 \subset u$, und wegen $\bar{b}_2 \cap \bar{a}_{1,\beta+1} \neq 0$ ist $a_{1,\beta+1} \subset u$.

**4. Verknüpfte Zerlegungen.** Es seien $\bar{A}, \bar{C}$ Zerlegungen in $G$. Wir nennen die Zerlegungen $\bar{A}, \bar{C}$ *verknüpft* und sagen, daß $\bar{A}$ $(\bar{C})$ mit $\bar{C}$ $(\bar{A})$ verknüpft ist, wenn es zu jedem Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$ genau ein mit ihm inzidentes Element $c \in \bar{C}$ gibt und umgekehrt zu jedem Elemente $\bar{c} \in \bar{C}$ genau ein mit ihm inzidentes Element $\bar{a} \in \bar{A}$.

Wir werden nun voraussetzen, daß $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$. Daraus folgt $s\bar{A} \cap s\bar{C} \neq 0$.

·*1. Die $\bar{A}, \bar{C}$ sind verknüpft, wenn und nur wenn $\bar{A} \sqcap s\bar{C} = \bar{C} \sqcap s\bar{A}$ ist.*

Beweis. a) Die $\bar{A}, \bar{C}$ seien verknüpft. Man betrachte z. B. ein Element $\bar{a}' \in \bar{A} \sqcap s\bar{C}$, so daß $a' = a \cap s\bar{C}$ gilt, wobei $\bar{a}$ ein geeignetes Element in $\bar{A}$ bedeutet. Nach der Voraussetzung gibt es genau ein mit $a$ inzidentes Element $c \in \bar{C}$ und $\bar{a}$ ist das einzige mit $c$ inzidente Element in $\bar{A}$. Es ist also $a' = a \cap c = c \cap s\bar{A} \in \bar{C} \sqcap s\bar{A}$.

b) Es sei $\bar{A} \sqcap s\bar{C} = \bar{C} \sqcap s\bar{A}$. Wir haben vorausgesetzt $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, d. h. daß jedes Element in $\bar{A}$ mit wenigstens einem Element in $\bar{C}$ inzident ist. Ist ein Element $a \in \bar{A}$ mit $\bar{c}_1, c_2 \in \bar{C}$ inzident, so ist $a \cap (\bar{c}_1 \vee \bar{c}_2) \subset a \cap s\bar{C} \in \bar{C} \sqcap s\bar{A}$ und es gibt ein Element $c \in \bar{C}$, für das die Beziehung $a \cap (\bar{c}_1 \vee c_2) \subset s\bar{A} \cap c$ besteht. Daraus folgt, da die Elemente in $\bar{C}$ paarweise fremd sind, $\bar{c}_1 = c_2 = c$.

Wir betrachten nun eine gemeinsame Überdeckung $\bar{B}$ der beiden Zerlegungen $\bar{A} \sqcap s\bar{C}$, $\bar{C} \sqcap s\bar{A}$ der Menge $s\bar{A} \cap s\bar{C}$ und definieren die Zerlegung $A$ $(C)$ von $\bar{A}$ $(\bar{C})$ in folgender Weise: Jedes Element in $A$ $(C)$ ist die Menge aller Elemente in $\bar{A}$ $(\bar{C})$, die mit demselben Elemente in $\bar{B}$ inzident sind. Es sei $\mathring{A}$ $(\mathring{C})$ die durch $A$ $(C)$ erzwungene Überdeckung von $\bar{A}$ $(\bar{C})$; es ist also $\Sigma \mathring{a} \in \mathring{A}$ $(\Sigma \bar{c} \in \mathring{C})$, wenn und nur wenn $\Sigma (a \cap s\bar{C}) \in \bar{B}$ $(\Sigma (\bar{c} \cap s\bar{A}) \in \bar{B})$ gilt.

·*2. Die $\mathring{A}, \mathring{C}$ sind verknüpft und es gilt $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = \bar{B}$.*

Beweis. Aus $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$ folgt $\mathring{A} = \mathring{C} \sqsubset \mathring{A}$ und ähnlich $\mathring{C} = \mathring{A} \sqsubset C$. Es genügt zu zeigen, daß

$$\mathring{A} \sqcap s C = \mathring{C} \sqcap s\mathring{A} = \bar{B} \tag{1}$$

gilt. Denn zu jedem $a' \in \mathring{A} \sqcap s\mathring{C}$ gibt es ein $\mathring{a} \in A$, so daß $a' = \mathring{a} \cap s\mathring{C} = \mathring{a} \cap \Sigma\, \mathring{c}$, wobei sich $\Sigma$ auf alle in $\mathring{C}$ vorkommenden Elemente $\mathring{c}$ bezieht. Ist (1) erfüllt, so sind nach ·*1* die $\mathring{A}, \mathring{C}$ verknüpft, und daher gibt es ein einziges mit $\dot{a}$ inzidentes Element $\dot{c} \in \dot{C}$. Also ist $a' = a \cap \dot{c} \in A \sqcap C$. Daraus folgt $\dot{A} \sqcap s\dot{C} \subset \dot{A} \sqcap \dot{C}$ und ähnlich $\supset$ und daher $\dot{A} \sqcap s\dot{C} = \dot{A} \sqcap \dot{C}$. Es sei also $(\Sigma_1 \bar{a}) \cap s\dot{C} \in \dot{A} \sqcap s\dot{C}$, wobei $\Sigma_1 a \in \dot{A}$. Wir haben $(\Sigma_1 a) \cap s\dot{C} = \Sigma_1 (\bar{a} \cap s\bar{C}) \in \bar{B}$. Da $\bar{B}$ zugleich eine Überdeckung der Zerlegung $\bar{C} \sqcap s\bar{A}$ von $s\bar{A} \cap s\bar{C}$ ist, so ist $\Sigma_1 (a \cap s\bar{C}) = \Sigma_2 (\bar{c} \cap s\bar{A})$, wobei die $\bar{c}$ in $\bar{C}$ sind. Daraus folgt $\Sigma_2 \bar{c} \in C$, also $\Sigma_2 (c \cap s\bar{A}) = (\Sigma_2 c) \cap s\bar{A} \in C \cap s\dot{A}$. Also ist $(\Sigma_1 \bar{a}) \cap s\dot{C} \in \dot{C} \cap sA$.

**5. Adjungierte Zerlegungen.** Wir betrachten Zerlegungen $\bar{A}, \bar{C}$ in $G$ und setzen voraus, daß $B \in \bar{A}$, $D \in \bar{C}$, wobei $B \cap D \neq 0$. Wir setzen $A = s\bar{A}$, $C = s\bar{C}$. Aus der Voraussetzung $B \cap D \neq 0$ folgt $B \in D \sqsubset \bar{A}$, $D \in B \sqsubset \bar{C}$ und wegen $B \subset A$, $D \subset C$ ist $0 \neq B \cap D \subset B \cap C$, $D \cap A$. Also sind

$$(1) \qquad D \sqsubset \bar{A} \sqcap C, \qquad B \sqsubset \bar{C} \sqcap A$$

Zerlegungen in $G$. Wenn für diese Zerlegungen die folgende Gleichheit besteht

$$(2) \qquad s(D \sqsubset \bar{A} \sqcap C) = s(B \sqsubset \bar{C} \sqcap A),$$

so sagen wir, daß die Zerlegungen $\bar{A}, \bar{C}$ in bezug auf $B, D$ *adjungiert* sind, oder, daß die Zerlegung $\bar{A}$ $(\bar{C})$ zur $\bar{C}$ $(\bar{A})$ in bezug auf $B, D$ adjungiert ist. Aus 2·*1* 2° folgt, daß man eine äquivalente Definition erhält, wenn man die Symbole (1) durch

$$(1') \qquad (D \cap A) \sqsubset (\bar{A} \sqcap C), \qquad (B \cap C) \sqsubset (\bar{C} \sqcap A)$$

ersetzt, wenn also die folgende Gleichheit gilt:

$$(2') \qquad s((D \cap A) \sqsubset (\bar{A} \sqcap C)) = s((B \cap C) \sqsubset (\bar{C} \sqsubset A)).$$

Die Gleichheit (2) besteht z. B. dann, wenn $\bar{A}$ die größte oder die kleinste Zerlegung von $A$ ist.

Wir setzen nun voraus, daß $\bar{A}, \bar{C}$ in bezug auf $B, D$ adjungiert sind. Dann sind

$$\bar{A}_1 = C \sqsubset \bar{A}, \qquad \bar{C}_1 = A \sqsubset \bar{C},$$
$$\bar{A}_2 = D \sqsubset \bar{A}, \qquad \bar{C}_2 = B \sqsubset \bar{C}$$

Zerlegungen in $G$. Wir setzen $A_1 = s\bar{A}_1$, usw., und erhalten die folgenden Beziehungen:

$$\bar{A} \supset \bar{A}_1 \supset \bar{A}_2 \supset \{B\}, \qquad \bar{C} \supset \bar{C}_1 \supset \bar{C}_2 \supset \{D\},$$
$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ B\ , \qquad C \supset C_1 \supset C_2 \supset \ D\ .$$

·*1. Es gibt verknüpfte Überdeckungen $\dot{A}, \dot{C}$ von $\bar{A}_1, \bar{C}_1$, wobei $A_2 \in \dot{A}$, $C_2 \in \dot{C}$ gilt.* Dieselben sind durch die im Teile a) des folgenden Beweises gegebene Konstruktion bestimmt. *Die Mengen $A_2, C_2$ sind inzident.*

Beweis. a) Jedes Element in $\bar{A}_1$ ($\bar{C}_1$) ist in $\bar{A}$ ($\bar{C}$) enthalten und ist mit $C$ ($A$), also auch mit einem mit $A$ ($C$) inzidenten Elemente in $\bar{C}$ ($\bar{A}$) inzident; dieses Element in $\bar{C}$ ($\bar{A}$) ist also in $\bar{C}_1$ ($\bar{A}_1$). Es ist also

$$\bar{A}_1 = \bar{C}_1 \sqsubset \bar{A}_1, \qquad \bar{C}_1 = \bar{A}_1 \sqsubset \bar{C}_1.$$

Weiter ist nach 2·5·2

$$A_1 \sqcap \bar{C}_1 = A_1 \sqcap C = A \sqcap \bar{C},$$
$$C_1 \sqcap \bar{A}_1 = C_1 \sqcap \bar{A} = C \sqcap \bar{A},$$

so daß $A_1 \sqcap \bar{C}_1$, $C_1 \sqcap \bar{A}_1$ Zerlegungen auf $A \cap C$ sind. Wir bezeichnen mit $\bar{U}$ ihre kleinste gemeinsame Überdeckung. Nach 4·2 gibt es verknüpfte Überdeckungen $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ von $\bar{A}_1$, $\bar{C}_1$, für die $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = \bar{U}$ gilt. Jedes Element in $\mathring{A}$ ($\mathring{C}$) ist die Summe aller mit demselben Elemente in $\bar{U}$ inzidenten Elemente in $\bar{A}_1$ ($\bar{C}_1$). $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ sind die erwähnten Überdeckungen.

b) Es ist $A_2 \in \mathring{A}$, $C_2 \in \mathring{C}$. In der Tat, aus den Beziehungen $B \in \bar{A}$, $D \in \bar{C}$ folgt

$$C \cap B \in C \sqcap \bar{A}, \qquad A \cap D \in A \sqcap \bar{C}$$

und da die $\bar{A}$, $\bar{C}$ in bezug auf $B, D$ adjungiert sind, so gilt (2′). Es gilt also nach 3·4

$$u \in \bar{U},$$

wobei $u$ die beiderseits in (2′) stehende Menge bedeutet. Die einzelnen Elemente in $\mathring{A}$ ($\mathring{C}$) sind die Summen aller je mit einem Elemente in $\bar{U}$ inzidenten Elemente in $\bar{A}_1$ ($\bar{C}_1$). Zur Feststellung der Beziehung $A_2 \in \mathring{A}$ ($C_2 \in \mathring{C}$) genügt es also zu beweisen, daß $A_2$ ($C_2$) die Summe aller mit $u$ inzidenten Elemente in $\bar{A}_1$ ($\bar{C}_1$) ist. Nun ist aber

$$u = s\,(D \sqsubset \bar{A} \sqcap C) = s\,(\bar{A}_2 \sqcap C) = A_2 \cap C.$$

Ein Element in $\bar{A}_1$ ist zugleich in $\bar{A}$ enthalten und ist inzident mit $C$; es ist in gleicher Zeit in $\bar{A}_2$, wenn und nur wenn es sogar mit $D$, also auch mit $A_2 \cap C = u$ inzident ist. Es sind also mit $u$ genau diejenigen Elemente in $\bar{A}_1$ inzident, die in $\bar{A}_2$ enthalten sind; ihre Summe ist also $A_2$. Ähnlich folgt aus den Gleichungen

$$u = s\,(B \sqsubset \bar{C} \sqcap A) = s\,(\bar{C}_2 \sqcap A) = C_2 \cap A,$$

daß die Summe der mit $u$ inzidenten Elemente in $\bar{C}_1$ die Menge $C_2$ ist.

c) Aus $0 \neq B \cap D \subset A_2 \cap C_2$ folgt $A_2 \cap C_2 \neq 0$.

## II. Grundbegriffe der Gruppoidentheorie.

**6. Gruppoide.** Wir bezeichnen nach wie vor mit $G$ eine nicht leere Menge. Den Inbegriff von $G$ und einer Multiplikation $\mathcal{M}$ in $G$ nennen wir *Gruppoid*[1]). $G$ ($\mathcal{M}$) ist das *Feld* (die *Multiplikation*) des Gruppoides. Gruppoide bezeichnen wir in der Regel mit denselben jedoch deutschen Buchstaben wie ihre Felder, z. B. $\mathfrak{G}$, und übertragen auf dieselben die für ihre Felder definierten mengentheoretischen Begriffe und Symbole. Wir sprechen also z. B. von Elementen, Untermengen, Zerlegungen in bzw. auf Gruppoiden und schreiben $a \in \mathfrak{G}$, $A \subset \mathfrak{G}$, usw. Das Produkt von $a$ und $b$, wobei $a, b \in \mathfrak{G}$, bezeichnen wir mit $a \,.\, b$ oder kürzer mit $a b$. Es ist zu beachten, daß im allgemeinen über die Multiplikation *keine* zusätzlichen Voraussetzungen (wie etwa die Gültigkeit des Assoziativgesetzes usw.) gemacht werden.

Die folgenden Grundbegriffe der Gruppoidentheorie dürfen wir wohl als bekannt voraussetzen:

1) Den Begriff des Produktes $AB$ einer Untermenge $A \subset \mathfrak{G}$ und einer weiteren Untermenge $B \subset \mathfrak{G}$. Ist einer der beiden Faktoren $A, B$ leer, so wollen wir unter dem Symbole $AB$ die leere Menge verstehen.

2) Den Begriff eines Untergruppoides $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ und eines Obergruppoides $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{A}$. Bezeichnung: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}, \cdot \mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}$. Wenn $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{G}$, so nennen wir $\mathfrak{A}$ *echtes* Untergruppoid in $\mathfrak{G}$, und ähnlich definieren wir ein echtes Obergruppoid. Für jedes $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ besteht die Beziehung $A A \subset A$; gilt umgekehrt diese Beziehung für eine nicht leere Untermenge $A \subset \mathfrak{G}$, so bildet dieselbe samt der durch $\mathcal{M}$ bestimmten Multiplikation in $A$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{G}$.

3) Der Begriff des Durchschnittes und der Vereinigung von zwei Untergruppoiden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Bezeichnungen: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{G} - (G, \mathcal{M})$ ein Gruppoid.

**7. Erzeugende Zerlegungen in Gruppoiden.** Eine Zerlegung $\bar{A}$ in $\mathfrak{G}$ nennen wir *erzeugende Zerlegung in* $\mathfrak{G}$, wenn es zu jedem geordneten Paare $a, b$ von Elementen in $\bar{A}$ ein Element $c \in \bar{A}$ gibt, so daß die folgende Beziehung besteht: $a b \subset c$. Als Beispiel von erzeugenden Zerlegungen in $\mathfrak{G}$ führen wir die beiden extremen Zerlegungen $\bar{G}_{max}$, $\bar{G}_{min}$ von $\mathfrak{G}$ an.

---

[1]) Der Name „Gruppoid" für diesen Begriff findet sich in der Arbeit *B. A. Hausmann and Oystein Ore:* Theory of quasigroups *(Amer. J. Math., Vol. LIX, 1937).* Im engeren Sinne kommt er vor bei *Garrett Birkhoff:* Rings of sets *(Duke Math. J., Vol. 3, 1937, p. 444).* Siehe auch *H. Brandt*: Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes (*Math. Annalen, Bd. 96, 1927*).

Es seien $\overline{A}, \overline{C}$ erzeugende Zerlegungen in $\mathfrak{G}$.

·1. *Es ist* $\boldsymbol{s}\,\overline{A}\,.\,\boldsymbol{s}\,\overline{A} \subset \boldsymbol{s}\,\overline{A}$.

Denn für $a; b \in \boldsymbol{s}\,\overline{A}$ gibt es Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \overline{A}$, so daß die Beziehungen $a \in a$, $b \in \bar{b}$, $\bar{a}\,\bar{b} \subseteq \bar{c}$ bestehen. Also ist $ab \in \bar{a}\,\bar{b} \subset \bar{c} \subset \boldsymbol{s}\,\overline{A}$.

Nach diesem Satze ist der Inbegriff der Untermenge $\boldsymbol{s}\,\overline{A}$ und der durch $\mathfrak{M}$ bestimmten Multiplikation in $\boldsymbol{s}\,\overline{A}$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{G}$.

·2. *Wenn* $\boldsymbol{s}\,\overline{A} \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C} \neq 0$ *ist, so sind* $\overline{A} \sqcap \overline{C}$ *und* $\overline{A} \sqsubset \overline{C}$ *erzeugende Zerlegungen in* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Unter der obigen Voraussetzung sind $\overline{A} \sqcap \overline{C}$ und $\overline{A} \sqsubset \overline{C}$ Zerlegungen in $\mathfrak{G}$. a) Wir betrachten zwei Elemente $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{A} \sqcap \overline{C}$. Nach der Definition von $\overline{A} \sqcap \overline{C}$ gibt es Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \overline{A}$; $c_1, \bar{c}_2 \in \overline{C}$, so daß $\bar{x} = \bar{a}_1 \cap \bar{c}_1$, $\bar{y} = a_2 \cap \bar{c}_2$. Da $\overline{A}$ $(\overline{C})$ eine erzeugende Zerlegung ist, so gibt es ein $a \in \overline{A}$ $(c \in \overline{C})$, so daß $\bar{a}_1\,\bar{a}_2 \subset \bar{a}$ $(\bar{c}_1\,\bar{c}_2 \subset \bar{c})$. Nun ist aber $\bar{x}\,\bar{y} \subset \bar{a}_1\,a_2 \cap \bar{c}_1\,c_2 \subset a \cap \bar{c} \in \overline{A} \sqcap \overline{C}$. b) Wegen $\overline{A} \sqsubset \overline{C} = \boldsymbol{s}\,\overline{A} \sqsubset \overline{C}$ genügt es zu beweisen, daß $\boldsymbol{s}\,\overline{A} \sqsubset \overline{C}$ erzeugend ist. Es seien $\bar{c}_1, c_2 \in \boldsymbol{s}\,\overline{A} \sqsubset \overline{C}$. Da $\overline{C}$ erzeugend ist, so gibt es ein $\bar{c} \in \overline{C}$, so daß $\bar{c}_1\,\bar{c}_2 \subset \bar{c}$. Wir wählen ein $x \in \boldsymbol{s}\,\overline{A} \cap \bar{c}_1$ und ein $y \in \boldsymbol{s}\,\overline{A} \cap \bar{c}_2$. Es ist $xy \in \boldsymbol{s}\,\overline{A}\,.\,\boldsymbol{s}\,\overline{A} \cap \bar{c}_1\,c_2 \subset \boldsymbol{s}\,\overline{A} \cap c$, woraus $\boldsymbol{s}\,\overline{A} \cap \bar{c} \neq 0$ folgt. Also ist $\bar{c} \in \boldsymbol{s}\,\overline{A} \sqsubset \overline{C}$.

Wir setzen nun $\overline{A} = \overline{C} \sqsubset \overline{A}, \overline{C} = \overline{A} \sqsubset \overline{C}$ voraus und betrachten eine gemeinsame Überdeckung $\overline{B}$ der beiden auf der Menge $\boldsymbol{s}\,\overline{A} \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}$ liegenden Zerlegungen $\overline{A} \sqcap \boldsymbol{s}\,\overline{C}$, $\overline{C} \sqcap \boldsymbol{s}\,\overline{A}$ und definieren die Überdeckungen $\mathring{A}, \mathring{C}$ von $\overline{A}, \overline{C}$ in derselben Weise wie in 4·2.

·3. *Wenn* $\overline{B}$ *erzeugend ist, so sind es auch* $A, C$.

Beweis. Es sei $\Sigma_1\,\bar{a}_1$, $\Sigma_2\,\bar{a}_2 \in \mathring{A}$; also sind die $a_1, a_2$ Elemente in $\overline{A}$ und $\Sigma_1\,(\bar{a}_1 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C})$, $\Sigma_2\,(\bar{a}_2 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C})$ sind Elemente in $\overline{B}$. Da $\overline{A}$ erzeugend ist, so gibt es zu jedem Produkte $\bar{a}_1\,a_2$ ein $a_{12} \in \overline{A}$, so daß $\bar{a}_1\,\bar{a}_2 \subset \bar{a}_{12}$, woraus $(a_1 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C})\,(a_2 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}) \subset \bar{a}_{12} \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}$ folgt. Da $\overline{B}$ erzeugend ist, so gibt es ein $\Sigma_3\,(\bar{a}_3 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}) \in \overline{B}$, so daß $\Sigma_1\,(\bar{a}_1 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C})\,\Sigma_2\,(a_2 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}) = \Sigma_1\,\Sigma_2\,(\bar{a}_1 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C})\,(a_2 \cap \boldsymbol{s}\,C)$ $\subset \Sigma_3\,(\bar{a}_3 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C})$ ist. Dabei sind die $\bar{a}_3$ Elemente in $\overline{A}$ und $\Sigma_3\,a_3 \in \mathring{A}$. Für jedes $\bar{a}_1$ $(a_2)$, auf das sich $\Sigma_1$ $(\Sigma_2)$ bezieht, haben wir also die Beziehung $(\bar{a}_1 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C})\,(a_2 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}) \subset (\bar{a}_{12} \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}) \cap \Sigma_3\,(\bar{a}_3 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C})$. Die $\bar{a}_{12} \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}$, $a_3 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}$ sind aber Elemente in der Zerlegung $\overline{A} \sqcap \boldsymbol{s}\,\overline{C}$ von $\boldsymbol{s}\,\overline{A} \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}$. Also gilt für ein geeignetes hinter dem Zeichen $\Sigma_3$ stehendes $a_3$ die Beziehung $\bar{a}_{12} \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}$ $= \bar{a}_3 \cap \boldsymbol{s}\,\overline{C}$, woraus $a_{12} = \bar{a}_3$ folgt. Wir haben also schließlich $\Sigma_1\,a_1\,\Sigma_2\,a_2$ $\subset \Sigma_1\,\Sigma_2\,\bar{a}_{12} \subset \Sigma_3\,\bar{a}_3 \in \mathring{A}$, womit der Satz bewiesen ist.

Es sei nun $(\overline{X})$ ein nicht leeres System von erzeugenden Zerlegungen von $\mathfrak{G}$.

*4. Die kleinste Überdeckung $\overline{U}$ von $(\overline{X})$ ist erzeugend.*

Beweis. Es sei $\bar{u}, v \in \overline{U}$. Wir haben zu zeigen, daß es ein $\overline{w} \in \overline{U}$ gibt, so daß $u\bar{v} \subset \overline{w}$. Wir betrachten eine Zerlegung $\overline{G}_0 \in (\overline{X})$ von $G$ und beliebige Elemente $\bar{a}_0, \bar{b}_0 \in \overline{G}_0$; $a_0 \subset \bar{u}$, $\bar{b}_0 \subset \bar{v}$. Da $G_0$ erzeugend ist, so gibt es ein $\bar{c}_0 \in \overline{G}_0$, so daß $a_0 \bar{b}_0 \subset c_0$. Wir bezeichnen mit $\overline{w}$ dasjenige Element in $\overline{U}$, für welches $c_0 \subset \overline{w}$ gilt.

Es sei $\bar{a}_\alpha, b_\beta \in \overline{G}_0$, $\bar{a}_\alpha \subset u$, $b_\beta \subset v$. Es gibt ein $\bar{c}_\gamma \in \overline{G}_0$, für welches die Beziehung $\bar{a}_\alpha b_\beta \subset \bar{c}_\gamma$ besteht, und wir haben zu zeigen, daß $\bar{c}_\gamma \subset \overline{w}$ gilt. Nach der Konstruktion von $\overline{U}$ gibt es eine Kette in $(\overline{X})$ von $\bar{a}_0$ nach $a_\alpha$: $\{a_0, \ldots, a_\alpha\}$ und eine Kette in $(\overline{X})$ von $\bar{b}_0$ nach $b_\beta$: $\{\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_\beta\}$. Wir können $\beta = \alpha$ voraussetzen, denn z. B. im Falle $\beta < \alpha$ genügt es, zu der zweiten Kette $\alpha - \beta$ gleiche Elemente $\bar{b}_\beta$ zuzufügen, um diese Voraussetzung zu erfüllen. Nun gibt es Elemente $c_0, \ldots, c_{2\alpha} \in \overline{G}_0$, so daß für $\mu = 0, \ldots, \alpha$ die Beziehungen $\bar{c}_{2\mu} \supset \bar{a}_\mu b_\mu$, $c_{2\mu+1} \supset a_{\mu+1} \bar{b}_\mu$ $(\bar{c}_{2\alpha+1} = \bar{a}_{\alpha+1} = 0$, $c_{2\alpha} = \bar{c}_\gamma)$ bestehen, und es genügt offenbar zu beweisen, daß $\{\bar{c}_0, \ldots, c_{2\alpha}\}$ eine Kette in $(\overline{X})$ von $\bar{c}_0$ nach $\bar{c}_{2\alpha}$ ist. Zu diesem Zwecke werden wir zeigen, daß zu je zwei einander folgenden Elementen $c_\nu$, $\bar{c}_{\nu+1}$ $(\nu = 0, \ldots, 2\alpha - 1)$ ein mit beiden inzidentes Element in einer geeigneten Zerlegung $\overline{G} \in (\overline{X})$ von $G$ existiert. Es sei z. B. $\nu = 2\mu$ eine gerade Zahl. Nach der Voraussetzung gibt es in einer geeigneten Zerlegung $\overline{G} \in (\overline{X})$ ein mit $a_\mu, a_{\mu+1}$ inzidentes Element $x$; es existieren also $a', b' \in G$, so daß $a' \in a_\mu \cap \bar{x}$, $b' \in \bar{a}_{\mu+1} \cap \bar{x}$. Wir wählen ein $a'' \in b_\mu$. Dann gibt es ein $\bar{y} \in \overline{G}$, so daß $a'' \in \bar{b}_\mu \cap y$. Da $\overline{G}$ erzeugend ist, so gibt es ein $z \in G$, für welches $x\,y \subset z$ gilt. Nun haben wir $a'\,a'' \in x\,y \cap a_u\,b_\mu \subset \bar{z} \cap \bar{c}_\nu$ und desgleichen $b'\,a'' \in x\,\bar{y} \cap a_{\mu+1} b_\mu \subset \bar{z} \cap c_{\nu+1}$, woraus folgt, daß $a'\,a''$ $(b'\,a'')$ sowohl in $\bar{z}$ als auch in $c_\nu$ $(c_{\nu+1})$ enthalten ist.

*5. Die größte Verfeinerung $\overline{V}$ von $(\overline{X})$ ist ebenfalls eine erzeugende.*

Beweis. Es sei $u, v \in \overline{V}$. Wir haben zu zeigen, daß es ein $\bar{w} \in \overline{V}$ gibt, so daß $u\,v \subset \overline{w}$. Wir betrachten beliebige Elemente $a \in u$, $b \in \bar{v}$ von $G$ und bezeichnen mit $\bar{w}$ dasjenige Element in $\overline{V}$, welches $a\,b$ enthält. Weiter betrachten wir beliebige Elemente $x \in \bar{u}$, $y \in v$ in $G$; $a$ $(b)$ läßt sich also mit $x$ $(y)$ verbinden. Offenbar genügt es zu zeigen, daß $a\,b$ sich mit $x\,y$ verbinden läßt. Es sei also $\overline{G} \in (\overline{X})$, $\bar{c} \in \overline{G}$, $a\,b \in \bar{c}$. Wir haben zu zeigen, daß $x\,y \in \bar{c}$. Wir bezeichnen mit $a$ $(b)$ dasjenige Element in $\overline{G}$, welches $a$ $(b)$ enthält. Nach der Voraussetzung haben wir $x \in \bar{a}$, $y \in \bar{b}$, also $x\,y \in a\,\bar{b}$. Da $\overline{G}$ erzeugend ist, so gibt es ein $\bar{c}' \in \overline{G}$, für welches $a\,b \subset c'$ gilt. Nun ist aber $a\,b \in c \cap a\,b \subset \bar{c} \cap \bar{c}'$, woraus $\bar{c}' = \bar{c}$ folgt. Also ist $x\,y \in \bar{c}$.

Nach den beiden letzten Sätzen ist die durch die Beziehung $\geqq$ teilweise geordnete Menge aller erzeugenden Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ ein vollständiger Verband. Da die $\bar{G}_{max}$ und $\bar{G}_{min}$ erzeugende Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ sind, so hat dieser vollständige Verband das größte Element $\bar{G}_{max}$ und das kleinste $\bar{G}_{min}$.

**8. Faktoroide.** Es sei $\bar{A}$ eine erzeugende Zerlegung in $\mathfrak{G}$. Wir definieren eine Multiplikation $\mathcal{N}$ in $\bar{A}$ in folgender Weise: Für $a, b \in \bar{A}$ ist das Produkt von $a$ und $b$ dasjenige Element $c \in \bar{A}$, für welches $a\,b \subset c$ gilt. Das Gruppoid $\bar{\mathfrak{A}} = (\bar{A}, \mathcal{N})$ nennen wir *Faktoroid in* $\mathfrak{G}$ und im Falle, daß $\bar{A}$ auf $\mathfrak{G}$ liegt, *Faktoroid von* $\mathfrak{G}$ oder *auf* $\mathfrak{G}$. Wir schreiben $\bar{a} \cdot b = c$ und haben daher $a\,b \subset a \cdot b \in \bar{\mathfrak{A}}$. Durch $\bar{A}$ ist also das entsprechende Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ eindeutig bestimmt. Das Untergruppoid in $\mathfrak{G}$, dessen Feld $\boldsymbol{s}\bar{A}$ ist, bezeichnen wir mit $\boldsymbol{s}\bar{\mathfrak{A}}$. Enthält $\bar{\mathfrak{A}}$ das Feld $B$ eines Untergruppoides $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ als Element, so sagen wir, $\bar{\mathfrak{A}}$ enthalte das Untergruppoid $\mathfrak{B}$ als Element und schreiben $\mathfrak{B} \in \bar{\mathfrak{A}}$ oder $\bar{\mathfrak{A}} \ni \mathfrak{B}$. Als Beispiele von Faktoroiden in $\mathfrak{G}$ führen wir an das größte Faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}_{max}$ und das kleinste Faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}_{min}$ von $\mathfrak{G}$.

Es seien $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{C}}$ Faktoroide in $\mathfrak{G}$. Entsprechend dem Satze 7 ˙*2* können wir im Falle $\boldsymbol{s}\bar{A} \cap \boldsymbol{s}\bar{C} \neq 0$ die Begriffe *der Durchdringung von* $\bar{\mathfrak{A}}$ *und* $\bar{\mathfrak{C}}$ und der *Hülle von* $\bar{\mathfrak{A}}$ *in* $\bar{\mathfrak{C}}$ definieren; Bezeichnungen: $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \bar{\mathfrak{C}}$ oder $\bar{\mathfrak{C}} \sqcap \bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{A}} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}$ oder $\bar{\mathfrak{C}} \sqsupset \bar{\mathfrak{A}}$. Ebenso offenbar sind die Begriffe *der Durchdringung* $\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{A}}$ oder $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ *von* $\bar{\mathfrak{A}}$ *mit einem Untergruppoid* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ und *der Hülle* $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$ oder $\bar{\mathfrak{A}} \sqsupset \mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{B}$ *in* $\bar{\mathfrak{A}}$ und die Begriffe von *verknüpften* und *adjungierten* Faktoroiden.

Es seien $\bar{\mathfrak{A}} \ni \mathfrak{B}$, $\bar{\mathfrak{C}} \ni \mathfrak{D}$ adjungierte Faktoroide in bezug auf $\mathfrak{B}, \mathfrak{D}$. Wir setzen $\mathfrak{A} = \boldsymbol{s}\bar{\mathfrak{A}}$, usw. Dann sind nach 7 ˙*2*

$$\bar{\mathfrak{A}}_1 = \mathfrak{C} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}, \qquad \bar{\mathfrak{C}}_1 = \mathfrak{A} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}},$$
$$\bar{\mathfrak{A}}_2 = \mathfrak{D} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}, \qquad \bar{\mathfrak{C}}_2 = \mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}$$

Faktoroide in $\mathfrak{G}$.

Aus 5 ˙*1* (mit Benützung von 7 ˙*2* ˙*4* ˙*3*) folgt der folgende Satz:

˙*1. Es gibt verknüpfte Überdeckungen* $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ *von* $\bar{\mathfrak{A}}_1, \bar{\mathfrak{C}}_1$, *so daß* $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}_2 \in \mathfrak{C}$; dieselben sind durch die in 5 ˙*1* a) gegebene Konstruktion bestimmt. *Die Untergruppoide* $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{C}_2$ *sind inzident.*

Wir betrachten nun Faktoroide *auf* $\mathfrak{G}$.

Es seien $\bar{\mathfrak{G}}_1, \bar{\mathfrak{G}}_2$ Faktoroide auf $\mathfrak{G}$. Wir schreiben $\bar{\mathfrak{G}}_1 \geqq \bar{\mathfrak{G}}_2$ oder $\bar{\mathfrak{G}}_2 \leqq \bar{\mathfrak{G}}_1$, wenn für die Felder $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ von $\bar{\mathfrak{G}}_1, \bar{\mathfrak{G}}_2$ die Beziehung $\bar{G}_1 \geqq \bar{G}_2$ besteht; in diesem Falle nennen wir $\bar{\mathfrak{G}}_1$ ($\bar{\mathfrak{G}}_2$) *Überdeckung (Verfeinerung) von* $\bar{\mathfrak{G}}_2$ ($\bar{\mathfrak{G}}_1$) und sagen, *das Faktoroid* $\bar{\mathfrak{G}}_1$ ($\bar{\mathfrak{G}}_2$) *sei* oder *liege auf* $\bar{\mathfrak{G}}_2$ ($\bar{\mathfrak{G}}_1$). $\bar{\mathfrak{G}}_{max}$ ($\bar{\mathfrak{G}}_2$) ist die größte (kleinste) Überdeckung von $\bar{\mathfrak{G}}_2$; $\bar{\mathfrak{G}}_1$ ($\bar{\mathfrak{G}}_{min}$) ist die größte (kleinste) Verfeinerung von $\overline{\mathfrak{G}}_1$. Durch jede Überdeckung $\overline{\mathfrak{G}}_1$ von $\overline{\mathfrak{G}}_2$ ist eine (und zwar die Überdeckung $\overline{\mathfrak{G}}_1$ erzwingende) Zerlegung $\mathfrak{G}_2$ von $\overline{\mathfrak{G}}_2$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt erzwingt jede Zerlegung $\mathfrak{G}_2$ von $\overline{\mathfrak{G}}_2$ eine bestimmte Überdeckung $\overline{G}_1$ der erzeugenden Zerlegung $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_2$ von $\mathfrak{G}$. Wenn $\overline{G}_1$ erzeugend ist, so ist das Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}_1$, dessen Feld $\overline{G}_1$ ist, die durch $G_2$ erzwungene Überdeckung von $\overline{\mathfrak{G}}_2$. Wann dieser Fall eintritt, darüber belehrt der folgende Satz.

˙2. *Es sei $\overline{\mathfrak{G}}_2$ ein Faktoroid auf $\mathfrak{G}$ und $\overline{G}_1$ die durch eine Zerlegung $G_2$ von $\overline{\mathfrak{G}}_2$ erzwungene Überdeckung der erzeugenden Zerlegung $\overline{G}_2$. Die Zerlegung $\overline{G}_1$ ist dann und nur dann erzeugend, wenn dieses für die Zerlegung $\overline{G}_2$ der Fall ist.*

Beweis. a) Wir setzen voraus, daß $G_2$ erzeugend ist. Es sei $a_1, b_1 \in \overline{G}_1$. Wir haben zu zeigen, daß es ein $\bar{c}_1 \in \overline{G}_1$ gibt, so daß $a_1 \bar{b}_1 \subset c_1$. Nun ist aber $a_1 = \Sigma \bar{a}_2$, $b_1 = \Sigma \bar{b}_2$, wobei sich die erste (zweite) Summe auf alle in demselben Elemente $a_2$ ($b_2$) von $G_2$ liegenden Elemente von $\overline{G}_2$ bezieht. Da $G_2$ erzeugend ist, so gibt es ein $c_2 \in G_2$, so daß $a_2 \cdot b_2 \subset c_2$ gilt. Wir bezeichnen mit $c_1$ die Summe der in $c_2$ liegenden Elemente von $\overline{G}_2$ und haben $c_1 \in \overline{G}_1$. Offenbar gilt für jedes $a_2$ ($b_2$), auf welches sich die erste (zweite) Summe bezieht: $a_2 \cdot \bar{b}_2 \in a_2 \cdot b_2 \subset c_2$. Also ist $a_1 b_1 = \Sigma \Sigma a_2 b_2 \subset \Sigma \Sigma a_2 \cdot b_2 \subset c_1$.

*b*) Wir setzen nun voraus, daß $\overline{G}_1$ erzeugend ist, und behalten die Bedeutung für $a_1, \bar{b}_1$; $a_2, b_2$; $a_2, b_2$. Da $\overline{G}_1$ erzeugend ist, so gibt es ein $c_1 \in \overline{G}_1$, für welches $a_1 b_1 \subset c_1$ gilt. Nach der Definition von $\overline{G}_1$ gibt es Elemente $c_2 \in \overline{G}_2$, so daß $c_1 = \Sigma \bar{c}_2$, und die Menge dieser Elemente ist ein Element $c_2 \in \overline{G}_2$. Für $a_2 \in a_2$, $b_2 \in b_2$ haben wir $\bar{a}_2 b_2 \subset c_1$ und daher gibt es ein $c_2 \in c_2$, so daß $\bar{a}_2 b_2 \subset c_2$. Daraus folgt $\bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2 = c_2 \in c_2$ und schließlich $a_2 \cdot b_2 \subset c_2$.

Es sei $\overline{\mathfrak{G}}$ ein Faktoroid auf $\mathfrak{G}$. Nach dem Satze ˙2 ist jede Überdeckung von $\overline{\mathfrak{G}}$ durch eine erzeugende Zerlegung $\overline{\overline{G}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ erzwungen. Wir sagen auch, daß die Überdeckung durch das entsprechende Faktoroid $\mathfrak{G}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ erzwungen ist. Offenbar ist die größte (kleinste) Überdeckung von $\overline{\mathfrak{G}}$ durch das größte (kleinste) Faktoroid von $\overline{\mathfrak{G}}$ erzwungen.

Wir setzen nun voraus, daß $\mathfrak{G}$ ein Untergruppoid $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$ als Element enthält und bezeichnen mit $\dot{\mathfrak{G}}$ eine Überdeckung von $\overline{\mathfrak{G}}$.

˙3. *Es gibt genau ein durch die Beziehungen $\dot{\mathfrak{G}} \ni \mathfrak{G}_2 \supset \mathfrak{G}_1$ bestimmtes Untergruppoid $\mathfrak{G}_2$ in $\mathfrak{G}$. Das Faktoroid $\mathfrak{G}_2 \sqcap \overline{\mathfrak{G}}$ ist ein Untergruppoid in $\overline{\mathfrak{G}}$.*

Beweis. Offenbar gibt es höchstens ein solches Untergruppoid $\mathfrak{G}_2$. Wir betrachten das die Überdeckung $\mathfrak{G}$ erzwingende Faktoroid $\mathfrak{G}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$. Das

Feld $G_1$ von $\mathfrak{G}_1$ ist in einem Elemente $a$ von $\mathfrak{G}$ als Element enthalten und aus $G_1 G_1 \subset G_1$ folgt $a \cdot a \subset a$. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathfrak{G}}_2$ das Untergruppoid in $\overline{\mathfrak{G}}$, dessen Feld $a$ ist, und setzen $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{s}\,\overline{\mathfrak{G}}_2$. Offenbar hat das Untergruppoid $\mathfrak{G}_2$ die obigen Eigenschaften.

**9. Relativ einfache und einfache Gruppoide.** Es sei $a \in \mathfrak{G}$. Wenn jedes Faktoroid von $\mathfrak{G}$ entweder $\overline{\mathfrak{G}}_{max}$ ist oder die aus dem einzigen Elemente $a$ bestehende Menge $\{a\}$ als Element enthält, so nennen wir $\mathfrak{G}$ *einfach in bezug auf a.* Wenn $\mathfrak{G}$ in bezug auf eines seiner Elemente einfach ist, so sagen wir, $\mathfrak{G}$ sei *relativ einfach.* Wenn $\mathfrak{G}$ in bezug auf jedes seiner Elemente einfach ist, so nennen wir es *einfach.*

*˙1. Wenn $\mathfrak{G}$ einfach ist, so sind $\overline{\mathfrak{G}}_{max}$ und $\overline{\mathfrak{G}}_{min}$ die einzigen Faktoroide von $\mathfrak{G}$ und umgekehrt.*

Beweis. Aus der Definition folgt, daß $\mathfrak{G}$ einfach ist, wenn $\overline{\mathfrak{G}}_{max}$ und $\overline{\mathfrak{G}}_{min}$ die einzigen Faktoroide von $\mathfrak{G}$ sind. Wir setzen also voraus, daß $\mathfrak{G}$ einfach ist, und betrachten ein Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$. Wenn $\overline{\mathfrak{G}} \neq \overline{\mathfrak{G}}_{max}$ ist, so enthält $\overline{\mathfrak{G}}$ für jedes $a \in \mathfrak{G}$ die aus dem einzigen Elemente $a$ bestehende Menge $\{a\}$ als Element, woraus $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}}_{min}$ folgt.

Wir betrachten nun relativ einfache und einfache Faktoroide.

Es sei $\overline{\mathfrak{G}}$ ein Faktoroid von $\mathfrak{G}$ und es sei $\mathfrak{G}_1 \in \overline{\mathfrak{G}}$. Wenn $\overline{\mathfrak{G}}$ in bezug auf das Element $G_1$, das Feld von $\mathfrak{G}_1$, einfach ist, so sagen wir auch, $\overline{\mathfrak{G}}$ sei *einfach in bezug auf* $\mathfrak{G}_1$.

*˙2. Dann und nur dann, wenn $\overline{\mathfrak{G}}$ in bezug auf $\mathfrak{G}_1$ einfach ist, ist jede Überdeckung von $\overline{\mathfrak{G}}$ entweder $\overline{\mathfrak{G}}_{max}$ oder sie enthält $\mathfrak{G}_1$ als Element.*

Beweis. a) $\overline{\mathfrak{G}}$ sei einfach in bezug auf $\mathfrak{G}_1$. Wir betrachten eine Überdeckung $\mathring{\mathfrak{G}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ und das diese Überdeckung erzwingende Faktoroid $\mathfrak{G}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$. Da $\overline{\mathfrak{G}}$ in bezug auf $\mathfrak{G}_1$ einfach ist, so ist $\mathfrak{G}$ entweder das größte Faktoroid von $\overline{\mathfrak{G}}$ oder es enthält die aus dem Felde $G_1$ von $\mathfrak{G}_1$ bestehende Menge als Element. Im ersten Falle ist $\mathring{\mathfrak{G}}$ das größte Faktoroid von $\mathfrak{G}$, im zweiten ist $\mathring{\mathfrak{G}} \ni \mathfrak{G}_1$.

b) $\overline{\mathfrak{G}}$ sei nicht einfach in bezug auf $\mathfrak{G}_1$. Dann gibt es ein Faktoroid $\mathfrak{G}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$, das weder das größte Faktoroid von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, noch die Menge $G_1$ als Element enthält. Es sei $a \in \overline{\mathfrak{G}}$, $G_1 \in a$. Dann ist $G_1$ echt in $\mathfrak{s}\,a$ und $\mathfrak{s}\,a$ ist echt in $G$. Die durch $\mathfrak{G}$ erzwungene Überdeckung $\mathring{\mathfrak{G}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält $\mathfrak{s}\,a$ als Element.. Also ist $\mathring{\mathfrak{G}}$ weder das größte Faktoroid von $\mathfrak{G}$, noch enthält es $\mathfrak{G}_1$ als Element.

Ähnlich beweist man den folgenden Satz:

*˙3. Dann und nur dann, wenn $\overline{\mathfrak{G}}$ einfach ist, ist jede Überdeckung von $\overline{\mathfrak{G}}$ entweder $\overline{\mathfrak{G}}_{max}$ oder das Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ selbst.*

**10. Die Isomorphiesätze.** Den Begriff der *homomorphen Abbildung* eines Gruppoides $\mathfrak{G}$ in und auf ein Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ dürfen wir wohl als bekannt voraussetzen. Eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ heißt auch *Homomorphismus.* Insbesondere setzen wir auch den Begriff einer *isomorphen Abbildung (Isomorphismus)* als bekannt voraus. Ein wichtiges Beispiel eines Homomorphismus ist folgendes: Die Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf ein Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$, in der jedes Element $a \in \mathfrak{G}$ auf das dieses Element $a$ enthaltende Element $a \in \overline{\mathfrak{G}}$ abgebildet wird. Ein wichtiges Beispiel eines Isomorphismus ist folgendes: Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ ein Faktoroid von $\mathfrak{G}$ und $\mathring{\mathfrak{G}}$ die durch ein Faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ erzwungene Überdeckung von $\overline{\mathfrak{G}}$, so ist die Abbildung von $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ auf $\mathring{\mathfrak{G}}$, in der jedes Element $a \in \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ auf die Summe $a \in \mathfrak{G}$ der in $a$ liegenden Elemente $a \in \overline{\mathfrak{G}}$ abgebildet wird, ein Isomorphismus.

Es sei $d$ eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}^*$. Für $a \in \mathfrak{G}$ $(0 \neq A \subset \mathfrak{G})$ bezeichnen wir mit $da$ $(dA)$ das Bild von $a$ (die Menge der Bilder der Elemente in $A$) in $d$. Ist $\bar{A} = \{a, b, \ldots\}$ eine Zerlegung in $\mathfrak{G}$, so bedeutet $d\bar{A}$ die Zerlegung $\{da, db, \ldots\}$ in $\mathfrak{G}^*$. Ist also $d$ ein Homomorphismus und $\bar{A}$ eine Zerlegung auf $\mathfrak{G}$, so ist $d\bar{A}$ eine Zerlegung auf $\mathfrak{G}^*$.

Ist $\bar{A}$ eine erzeugende Zerlegung, so ist auch $d\bar{A}$ eine erzeugende Zerlegung. Denn für $da, db \in d\bar{A}$ gibt es Elemente $a, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$, für die $a\bar{b} \subset c$ gilt, und es ist $da \,.\, d\bar{b} = d\bar{a}b \subset d\bar{c} \in d\bar{A}$.

Ist $\overline{\mathfrak{A}}$ ein Faktoroid in $\mathfrak{G}$, so wird mit $d\overline{\mathfrak{A}}$ das Faktoroid in $\mathfrak{G}^*$ bezeichnet, dessen Feld $d\bar{A}$ ist, wobei $\bar{A}$ das Feld von $\overline{\mathfrak{A}}$ bedeutet.

Wir werden nun insbesondere isomorphe Abbildungen von Faktoroiden betrachten.

Es seien $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ Faktoroide in $\mathfrak{G}$ und $i$ ein Isomorphismus von $\overline{\mathfrak{A}}$ auf $\overline{\mathfrak{C}}$. Wir betrachten die durch ein auf $\overline{\mathfrak{A}}$ liegendes Faktoroid $\mathfrak{A}$ erzwungene Überdeckung $\dot{\mathfrak{A}}$ von $\overline{\mathfrak{A}}$. Das auf $\overline{\mathfrak{C}}$ liegende Faktoroid $\mathfrak{C} = i\mathfrak{A}$ von $\overline{\mathfrak{C}}$ erzwingt eine Überdeckung $\mathfrak{C}$ von $\overline{\mathfrak{C}}$. Für jedes Element $\dot{a} \in \dot{\mathfrak{A}}$ $(\mathring{c} \in \hat{\mathfrak{C}})$ gibt es also ein Element $a \in \mathfrak{A}$, so daß $\mathring{a} = s\,a$ $(\mathring{c} = s\,(i\,a))$ ist.

˙1. *Die Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\dot{\mathfrak{C}}$, in der jedes Element $a = s\,a \in \dot{\mathfrak{A}}$ auf das Element $c = s\,(i\,a) \in \dot{\mathfrak{C}}$ abgebildet wird, ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die beschriebene Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathring{\mathfrak{C}}$ bezeichnen wir mit $\dot{i}$. Die Abbildung $i_1\,(i_2)$ von $\mathfrak{A}$ auf $\dot{\mathfrak{A}}$ (von $\mathfrak{C}$ auf $\mathring{\mathfrak{C}}$), in der jedes Element $a \in \mathfrak{A}$ $(c \in \mathfrak{C})$ auf das Element $\mathring{a} = s\,a \in \mathfrak{A}$ $(c = s\,\bar{\bar{c}} \in \mathfrak{C})$ abgebildet wird, ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\dot{\mathfrak{A}}$ (von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}$). Desgleichen ist die Abbildung $i_3$ von $\mathfrak{C}$ auf $i^{-1}\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$, in der jedem Elemente $c \in \mathfrak{C}$ das Element $i^{-1}\,c = a \in \mathfrak{A}$ entspricht, ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt nun aus der Gleichheit $i = i_2\, i_3^{-1}\, i_1^{\;1}$.

˙2. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ ein auf $\mathfrak{G}$ liegendes Faktoroid. Die Abbildung von $\mathfrak{A} \sqcap \overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{A} \sqsubset \overline{\mathfrak{G}}$, in der jedes Element in $\mathfrak{A} \sqcap \overline{\mathfrak{G}}$*

*auf das mit ihm inzidente Element in $\mathfrak{A} \sqsubset \overline{\mathfrak{G}}$ abgebildet wird, ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Zu jedem Elemente $a' \in \mathfrak{A} \sqcap \overline{\mathfrak{G}}$ ($a'' \in \mathfrak{A} \sqsubset \overline{\mathfrak{G}}$) gibt es genau ein mit ihm inzidentes Element $a'' \in \mathfrak{A} \sqsubset \overline{\mathfrak{G}}$ ($a' \in \mathfrak{A} \sqcap \overline{\mathfrak{G}}$) und es ist $a' = A \cap a''$. Die Abbildung $a' \to a''$ von $\mathfrak{A} \sqcap \overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{A} \sqsubset \overline{\mathfrak{G}}$ ist also umkehrbar eindeutig. Aus $a' \to a''$, $b' \to b''$ folgt $a' b' \subset a' \cdot b'$ und $a' b' \subset a'' b'' \subset a'' \cdot b''$. Also ist $a' \cdot b' = A \cap a'' \cdot b''$ und daher $a' \cdot b' \to a'' \cdot b''$.

Aus dem Satze ˙2 folgt leicht der Isomorphiesatz für verknüpfte Faktoroide:

˙3. *Es seien $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{C}}$ verknüpfte Faktoroide in $\mathfrak{G}$. Die Abbildung von $\overline{\mathfrak{A}}$ auf $\overline{\mathfrak{C}}$, in der jedes Element in $\overline{\mathfrak{A}}$ auf das mit ihm inzidente Element in $\overline{\mathfrak{C}}$ abgebildet wird, ist ein Isomorphismus.*

## III. Ketten von Faktoroiden.

**11. Grundbegriffe.** Es seien $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{C}}$ Faktoroide in $\mathfrak{G}$. Wir nennen das Faktoroid $\overline{\mathfrak{C}}$ *eingegliedert in* $\overline{\mathfrak{A}}$, wenn $\overline{\mathfrak{A}}$ das Untergruppoid $s\overline{\mathfrak{C}}$ als Element enthält, also $\overline{\mathfrak{A}} \ni s\overline{\mathfrak{C}}$; wir schreiben dann $\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{C}}$.

Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Untergruppoide in $\mathfrak{G}$. Unter einer *Kette von Faktoroiden von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$*, kürzer: *Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$*, verstehen wir eine geordnete endliche Menge von $\alpha\ (\geqq 1)$ Faktoroiden $\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. $\overline{\mathfrak{A}}_0$ liegt auf $\mathfrak{A}$; 2. Es gilt $\overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1} \to \overline{\mathfrak{A}}_\beta$ für $1 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$; 3. $\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1} \ni \mathfrak{B}$. Eine solche Kette wird mit

$$\overline{\mathfrak{A}}_0 \to \cdots \to \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$$

oder kürzer mit $[\overline{\mathfrak{A}}]$ bezeichnet. Für $0 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$ bezeichnen wir $s\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ mit $\mathfrak{A}_\beta$; es ist also insbesondere $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$. Außerdem setzen wir $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{B}$. Die $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind die *Enden* der Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$. Wir sagen, die Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ *liege in* $\mathfrak{G}$ und im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$ *auf* $\mathfrak{G}$. Unter der *Länge* der Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ verstehen wir die Anzahl $\alpha$ der Faktoroide in $[\overline{\mathfrak{A}}]$. Aus der Definition der Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{B}$.

Es sei ($[\overline{\mathfrak{A}}] \equiv$) $\overline{\mathfrak{A}}_0 \to \cdots \to \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$ eine Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ von der Länge $\alpha \geqq 1$. Wenn ein Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ $(0 \leqq \beta \leqq \alpha - 1)$ das größte Faktoroid auf $\mathfrak{A}_\beta$ ist, wenn also das Feld $\overline{A_\beta}$ von $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ aus dem einzigen Elemente $A_\beta = A_{\beta+1}$ besteht, so wird $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ *unwesentlich* genannt. Andernfalls ist $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ *wesentlich*. $\overline{\mathfrak{A}}$ ist also wesentlich dann und nur dann, wenn $\mathfrak{A}_{\beta+1}$ in $\mathfrak{A}_\beta$ echt ist. Existiert in $[\overline{\mathfrak{A}}]$ wenigstens ein unwesentliches Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$, so heißt $[\overline{\mathfrak{A}}]$ (wegen $\mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{A}_{\beta+1}$) *mit Wiederholungen*. In diesem Falle, wenn $\alpha > 1$, kann die Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ durch Streichen von $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$ *verkürzt* werden. Sind alle Faktoroide in der Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ wesentlich, so heißt $[\overline{\mathfrak{A}}]$ *ohne Wiederholungen*. Die Anzahl $\alpha'$ wesentlicher Faktoroide in der Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ ist die *reduzierte Länge* der Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$. Es ist $0 \leqq \alpha' \leqq \alpha$, wobei die Gleichheit $\alpha' = \alpha$ Ketten ohne Wiederholungen charakterisiert. Im Falle $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ sind alle Faktoroide in $[\overline{\mathfrak{A}}]$ unwesentlich, so daß $\alpha' = 0$ und umgekehrt. Wenn $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ echt ist, so kann die Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ durch Streichen aller unwesentlichen Faktoroide *reduziert*, d. h. auf eine Kette $[\overline{\mathfrak{A}}']$ ohne Wiederholungen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ verkürzt werden. Die Länge der reduzierten Kette $[\overline{\mathfrak{A}}']$ ist gleich der reduzierten Länge $\alpha'$ der Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$.

Umgekehrt kann die Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ *verlängert* werden, und zwar durch Eingliederung eines unwesentlichen Faktoroides zwischen zwei beliebige Faktoroide $\overline{\mathfrak{A}}_\beta$, $\overline{\mathfrak{A}}_{\beta+1}$ bzw. vor (hinter) das Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_0$ ($\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha\;1}$) der Kette, und zwar durch Eingliederung des größten Faktoroides auf $\mathfrak{A}_{\beta+1}$ bzw. auf $\mathfrak{A}_0$ ($\mathfrak{A}_\alpha$) oder einer beliebigen endlichen Anzahl gleicher solcher Faktoroide. Jede Verlängerung (Verkürzung) von $[\overline{\mathfrak{A}}]$ entsteht ersichtlich durch sukzessive Eingliederung (Streichen) je eines größten Faktoroides auf einem der Untergruppoide $\mathfrak{A}_0, \ldots \mathfrak{A}_\alpha$. Es ist auch klar, daß jede verlängerte oder verkürzte Kette von $[\overline{\mathfrak{A}}]$ dieselbe reduzierte Länge wie die Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ besitzt.

**12. Elementare Ketten.** Es sei $\overline{\mathfrak{A}} \ni \mathfrak{B}$ ein Faktoroid in $\mathfrak{G}$. Unter einer *elementaren Kette von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ *über* $\overline{\mathfrak{A}}$, kürzer: *elementaren Kette über* $\overline{\mathfrak{A}}$, verstehen wir eine Kette von Faktoroiden von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$

$$([\mathring{\mathfrak{A}}] =)\ \mathring{\mathfrak{A}}_0 \to \cdots \to \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha\quad 1}$$

von der Beschaffenheit, daß für $0 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$ jedes Faktoroid $\mathring{\mathfrak{A}}_\beta$ das Faktoroid $\mathfrak{A}_\beta \sqcap \overline{\mathfrak{A}}$ überdeckt.

In einer solchen Kette ist also zuerst das Faktoroid $\mathring{\mathfrak{A}}_0$ eine Überdeckung von $\overline{\mathfrak{A}}$ und es ist $\mathring{\mathfrak{A}}_0 \ni s\,\mathring{\mathfrak{A}}_1 \supset \mathfrak{B}$. Nach dem Satze 8 ·*3* ist durch diese Beziehungen das Untergruppoid $s\,\mathfrak{A}_1$ ($\equiv \mathfrak{A}_1$) in $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt und das Faktoroid $(\overline{\mathfrak{A}}_1 \equiv)\ \mathfrak{A}_1 \sqcap \overline{\mathfrak{A}} \ni \mathfrak{B}$ ist ein Untergruppoid in $\overline{\mathfrak{A}}$. Weiter ist im Falle $\alpha > 1$ das Faktoroid $\mathring{\mathfrak{A}}_1$ eine Überdeckung von $\overline{\mathfrak{A}}_1$ und es ist $\mathring{\mathfrak{A}}_1 \ni s\,\mathring{\mathfrak{A}}_2 \supset \mathfrak{B}$. Nach demselben Satze 8 ·*3* ist durch diese Beziehungen das Untergruppoid $s\,\mathring{\mathfrak{A}}_2$ ($\equiv \mathfrak{A}_2$) in $\mathfrak{A}_1$ eindeutig bestimmt und das Faktoroid $(\overline{\mathfrak{A}}_2 \equiv)\ \mathfrak{A}_2 \sqcap \overline{\mathfrak{A}} \ni \mathfrak{B}$ ist ein Untergruppoid in $\overline{\mathfrak{A}}_1$. Weiter ist im Falle $\alpha > 2$ das Faktoroid $\mathring{\mathfrak{A}}_2$ eine Überdeckung von $\overline{\mathfrak{A}}_2$ usw. Für $\alpha \geqq 1$ ist das Faktoroid $\mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$ eine Überdeckung von $\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$ und es enthält $\mathfrak{B}$ als Element.

Zu jeder natürlichen Zahl $\alpha$ kann man eine elementare Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ von der Länge $\alpha$ konstruieren in folgender Weise: Man wählt für $\mathring{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha-2}$ beliebige Überdeckungen von $\overline{\mathfrak{A}}, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-2}$ und für $\mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$ die *kleinste* Überdeckung von $\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$, d. h. also das Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$ selbst. Diese letzte Wahl bringt die Beziehung $\mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha\;1} \ni \mathfrak{B}$ mit sich.

Es sei $0 \leq \beta \leqq \alpha - 1$. Eine elementare Kette $[\mathfrak{A}]$ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ von der Länge $\alpha$ heißt *elementare Kette* $(\beta)$ *von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ *über* $\overline{\mathfrak{A}}$, kürzer: *elementare Kette* $(\beta)$ *über* $\overline{\mathfrak{A}}$, wenn sie vom folgenden Typus ist:

$\mathfrak{A}_0 \quad \cdots = \mathfrak{A}_{\beta-1}$ ist das größte Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_{max}$ von $\mathfrak{A}$,
$\mathring{\mathfrak{A}}_\beta$ ist eine Überdeckung von $\overline{\mathfrak{A}}$ und enthält $\mathfrak{B}$ als Element,
$\mathfrak{A}_{\beta+1} = \cdots - \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$ ist das größte Faktoroid $\overline{\mathfrak{B}}_{max}$ von $\mathfrak{B}$.

In dieser Definition liest man im Falle $\beta = 0$ $(\beta = \alpha - 1)$ nur die letzten (ersten) zwei Zeilen.

Wenn insbesondere $\mathring{\mathfrak{A}}_\beta = \overline{\mathfrak{A}}$, so nennen wir $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ *ausgezeichnete elementare Kette* $(\beta)$ *von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ *über* $\overline{\mathfrak{A}}$, kürzer: *ausgezeichnete elementare Kette* $(\beta)$ *über* $\overline{\mathfrak{A}}$. Insbesondere ist $\{\overline{\mathfrak{A}}\}$ die ausgezeichnete elementare Kette (0) von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ von der Länge 1.

Ersetzt man einerseits das Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ durch eine ausgezeichnete Kette $(\beta)$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ von der Länge $\alpha$ und setzt man andererseits vor $\overline{\mathfrak{A}}$ $\beta$ gleiche Faktoroide $\overline{\mathfrak{A}}_{max}$ und hinter $\overline{\mathfrak{A}}$ $\alpha - \beta - 1$ gleiche Faktoroide $\overline{\mathfrak{B}}_{max}$, so erhält man dasselbe Resultat.

Es sei

$$([\mathfrak{A}] \equiv)\ \mathring{\mathfrak{A}}_0 \to \cdots \to \mathfrak{A}_{\alpha-1}$$

eine elementare Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$.

Im Falle $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}_{max}$ gelten die Gleichheiten $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 = \cdots = \mathfrak{A}_{\alpha-1}$ und umgekehrt. Ist nämlich $\overline{\mathfrak{A}}$ das größte Faktoroid von $\mathfrak{A}$, so ist es auch jede seiner Überdeckungen, so daß im besonderen $\mathring{\mathfrak{A}}_0 = \overline{\mathfrak{A}}$. Daraus folgt $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}_1' = \overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathring{\mathfrak{A}}_1 = \overline{\mathfrak{A}}$ usw. und daraus die obigen Gleichheiten. Umgekehrt folgt aus diesen letzteren $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_0 = \cdots = \mathfrak{A}_\alpha \equiv \mathfrak{B}$ und daraus $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}_{max}$. — Ist also $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}_{max}$, so ist $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ eine elementare Kette $(\beta)$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ und sogar eine ausgezeichnete elementare Kette $(\beta)$ über $\overline{\mathfrak{A}}$, für jedes $(0 \leqq)\,\beta\,(\leqq \alpha - 1)$.

Die reduzierte Länge der elementaren Kette $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ ist 0 oder größer als 0, je nachdem $\overline{\mathfrak{A}}$ das größte Faktoroid von $\mathfrak{A}$ ist oder nicht.

*1. Die Ketten* $\{\overline{\mathfrak{A}}\}$, $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ *haben dann und nur dann dieselbe reduzierte Länge, wenn* $[\mathfrak{A}]$ *eine elementare Kette* $(\beta)$ *über* $\overline{\mathfrak{A}}$ *ist, wobei* $0 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$.

Beweis. a) Haben die Ketten $\{\overline{\mathfrak{A}}\}$, $[\mathfrak{A}]$ dieselbe reduzierte Länge $\alpha'$, so ist $\alpha' \leqq 1$. Im Falle $\alpha' = 0$ ist $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}_{max}$; daraus folgt, daß $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ eine (sogar ausgezeichnete) elementare Kette $(\beta)$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ ist, wobei $0 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$. Es sei also $\alpha' = 1$. Dann ist genau ein Faktoroid $\mathring{\mathfrak{A}}_\beta$ in der elementaren Kette $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ wesentlich, wobei $0 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$. Ist $\beta > 0$ $(\beta < \alpha - 1)$, so sind die Faktoroide $\mathring{\mathfrak{A}}_0, \cdots, \mathring{\mathfrak{A}}_{\beta-1}$ $(\mathring{\mathfrak{A}}_{\beta+1}, \cdots, \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha-1})$ unwesentlich, woraus

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_0 = \cdots = \mathfrak{A}_\beta\ (\mathfrak{A}_{\beta+1} = \cdots = \mathfrak{A}_\alpha \equiv \mathfrak{B})$ folgt. Also ist $\mathring{\mathfrak{A}}_0 = \cdots = \mathring{\mathfrak{A}}_{\beta-1}$ $(\mathring{\mathfrak{A}}_{\beta+1} = \cdots = \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha-1})$ das größte Faktoroid von $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B})$ und $\mathring{\mathfrak{A}}_\beta$ ist eine Überdeckung von $\mathfrak{A}$ und enthält $\mathfrak{B}$ als Element.

b) Ist $[\mathfrak{A}]$ eine elementare Kette $(\beta)$ über $\overline{\mathfrak{A}}$, wobei $0 \leqq \beta \leqq \alpha - 1$, so ist die reduzierte Länge von $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ gleich 0 oder 1, je nachdem $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ echt ist. Im ersten (zweiten) Falle ist aber die reduzierte Länge von $\{\overline{\mathfrak{A}}\}$ gleich 0 (1).

**13. Elementare Ketten über relativ einfachen und einfachen Faktoroiden.**

Es sei $\overline{\mathfrak{A}} \ni \mathfrak{B}$ ein Faktoroid in $\mathfrak{G}$.

*˙1. Wenn $\overline{\mathfrak{A}}$ in bezug auf $\mathfrak{B}$ einfach ist, so ist jede elementare Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ eine elementare Kette $(\beta)$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ und umgekehrt.*

Beweis. a) Das Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ sei in bezug auf $\mathfrak{B}$ einfach. Es sei

$$([\mathfrak{A}] \equiv)\ \mathfrak{A}_0 \to \cdots \to \mathfrak{A}_{\alpha\ \ 1}$$

eine elementare Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$. Ist $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}_{max}$, so ist $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ eine (sogar ausgezeichnete) elementare Kette $(\beta)$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ für jedes $(0 \leqq)\,\beta\,(\leqq \alpha - 1)$. Es sei also $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ echt. Für ein bestimmtes $(0 \leqq)\,\beta\,(\leqq \alpha - 1)$ gelten dann die Gleichheiten $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_0 = \cdots = \mathfrak{A}_\beta$, während $\mathfrak{A}_{\beta+1}$ in $\mathfrak{A}_\beta$ echt ist. Daraus folgt $\mathring{\mathfrak{A}}_0 = \cdots = \mathring{\mathfrak{A}}_{\beta-1} = \overline{\mathfrak{A}}_{max}$, $\overline{\mathfrak{A}}_\beta\ (\equiv \mathfrak{A}_\beta \sqcap \overline{\mathfrak{A}}) = \overline{\mathfrak{A}}$. Also ist das Faktoroid $\mathring{\mathfrak{A}}_\beta$ eine Überdeckung von $\overline{\mathfrak{A}}$, und nach 9 ˙2 enthält es $\mathfrak{B}$ als Element. Ist $\beta < \alpha - 1$, so ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{\beta+1} \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_{\alpha-1} \supset \mathfrak{B}$, und daraus folgt $\mathring{\mathfrak{A}}_{\beta+1} = \cdots = \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha\ \ 1} = \overline{\mathfrak{B}}_{max}$.

b) Ist das Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ in bezug auf $\mathfrak{B}$ nicht einfach, so gibt es nach 9 ˙2 eine Überdeckung $\mathring{\mathfrak{A}}_0$ von $\overline{\mathfrak{A}}$ von der Beschaffenheit, daß $\mathring{\mathfrak{A}} \ni \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{B}$, wobei $\mathfrak{A}_1$ $(\mathfrak{B})$ in $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A}_1)$ echt ist. Wir setzen $\mathring{\mathfrak{A}}_1 = \overline{\mathfrak{A}}_1\ (\equiv \mathfrak{A}_1 \sqcap \overline{\mathfrak{A}})$; es ist also $\mathring{\mathfrak{A}}_1 \ni \mathfrak{B}$. Die Kette $\mathring{\mathfrak{A}}_0 \to \mathring{\mathfrak{A}}_1$ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ ist elementar, aber für kein $\beta$ ist sie elementar $(\beta)$.

Ähnlich beweist man den folgenden Satz:

*˙2. Ist $\overline{\mathfrak{A}}$ einfach, so ist jede elementare Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ eine ausgezeichnete elementare Kette $(\beta)$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ und umgekehrt.*

**14. Verfeinerungen von Ketten.** Es sei $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ und sei

$$([\overline{\mathfrak{A}}] \equiv)\ \overline{\mathfrak{A}}_0 \to \cdots \to \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha\ \ 1}$$

eine Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ von der Länge $\alpha \geqq 1$.

Unter einer *Verfeinerung der Kette* $[\overline{\mathfrak{A}}]$ verstehen wir eine Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$

$$([\mathfrak{A}] -)\ \mathfrak{A}_{0,0} \to \cdots \to \mathfrak{A}_{0,\beta_0-1} \to \mathfrak{A}_{1,0} \to \cdots \to \mathfrak{A}_{1,\beta_1-1} \to \cdots \to$$
$$\to \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha-1,0} \to \cdots \to \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha-1,\beta_{\alpha-1}-1}$$

von der Beschaffenheit, daß für $\gamma = 0, \ldots, \alpha - 1$ die Teilkette

$$\mathring{\mathfrak{A}}_{\gamma,0} \to \cdots \to \mathring{\mathfrak{A}}_{\gamma,\beta_\gamma - 1}$$

eine elementare Kette von $\mathfrak{A}_\gamma$ nach $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$ über $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ ist.

Man erhält also eine jede Verfeinerung der Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$, indem man jedes Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ in der Kette durch eine elementare Kette von $\mathfrak{A}_\gamma$ nach $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$ über $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ ersetzt. Wenn man insbesondere jedes Faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ in der Kette durch die ausgezeichnete elementare Kette (0) von $\mathfrak{A}_\gamma$ nach $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$ über $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ von der Länge 1 ersetzt, so erhält man wieder $[\overline{\mathfrak{A}}]$. Die Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ ist also zugleich ihre eigene Verfeinerung.

Die reduzierte Länge jeder Verfeinerung von $[\overline{\mathfrak{A}}]$ ist gleich der Summe reduzierter Längen der einzelnen elementaren Ketten. Dieselbe ist also gleich oder größer als die reduzierte Länge von $[\overline{\mathfrak{A}}]$. Jede Verlängerung von $[\overline{\mathfrak{A}}]$ ist eine Verfeinerung.

**15. Isomorphe Ketten.** Zwei Ketten in $\mathfrak{G}$

$$([\overline{\mathfrak{A}}] \equiv)\ \overline{\mathfrak{A}}_0 \to \cdots \to \overline{\mathfrak{A}}_{\alpha-1},$$
$$([\overline{\mathfrak{C}}] \equiv)\ \overline{\mathfrak{C}}_0 \to \cdots \to \overline{\mathfrak{C}}_{\beta-1}$$

heißen *isomorph*, wenn es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung — die sogenannte *erste Abbildung* — der Faktoroide in der einen Kette zu den Faktoroiden in der anderen gibt von der folgenden Beschaffenheit: Je zwei einander zugeordnete Faktoroide $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$, $\overline{\mathfrak{C}}_\delta$ sind isomorph, wobei sich in dem Isomorphismus $A_{\gamma+1}$ und $C_{\delta+1}$ entsprechen. Sind $[\overline{\mathfrak{A}}]$, $[\overline{\mathfrak{C}}]$ isomorph, so sagen wir auch $[\overline{\mathfrak{A}}]$ ($[\overline{\mathfrak{C}}]$) sei isomorph mit $[\overline{\mathfrak{C}}]$ ($[\overline{\mathfrak{A}}]$).

Ersichtlich haben zwei isomorphe Ketten in $\mathfrak{G}$ dieselbe Länge.

Es seien $[\overline{\mathfrak{A}}]$, $[\overline{\mathfrak{C}}]$ isomorphe Ketten in $\mathfrak{G}$ von der Länge $\alpha \geqq 1$. Jedem unwesentlichen Faktoroide in $[\overline{\mathfrak{A}}]$ entspricht in der ersten Abbildung wieder ein unwesentliches Faktoroid in $[\overline{\mathfrak{C}}]$. Ist $\alpha > 1$, so sind beide durch das Streichen solcher zugeordneten unwesentlichen Faktoroide verkürzte Ketten wieder isomorph. Daraus folgt, daß $[\overline{\mathfrak{A}}]$, $[\overline{\mathfrak{C}}]$ dieselbe reduzierte Länge besitzen und die beiden reduzierten Ketten wieder isomorph sind.

Es seien $\overline{\mathfrak{A}} \ni \mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{C}} \ni \mathfrak{D}$ Faktoroide in $\mathfrak{G}$. Wir setzen voraus, daß ein Isomorphismus $i$ von $\overline{\mathfrak{A}}$ auf $\overline{\mathfrak{C}}$ existiert, wobei $iB = D$. Die beiden Ketten $\{\overline{\mathfrak{A}}\}$, $\{\overline{\mathfrak{C}}\}$ sind also isomorph. Wir betrachten weiter eine elementare Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$:

$$([\mathring{\mathfrak{A}}] =)\ \mathfrak{A}_0 \to \cdots \to \mathfrak{A}_{\alpha-1}.$$

1. *Es gibt eine elementare Kette* $[\mathfrak{C}]$ *von* $\mathfrak{C}$ *nach* $\mathfrak{D}$ *über* $\overline{\mathfrak{C}}$, *die mit* $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ *isomorph ist.* Dieselbe ist durch die im Teile a) des folgenden Beweises beschriebene Konstruktion bestimmt.

Beweis. a) Nach der Definition der elementaren Kette ist das Faktoroid $\mathfrak{A}_\gamma$, für $\gamma = 0, \cdots, \alpha - 1$, eine Überdeckung von $\mathring{\mathfrak{A}}_\gamma \sqcap \overline{\mathfrak{A}}$ ($\equiv \overline{\mathfrak{A}}_\gamma$). Es sei $\mathfrak{A}_\gamma$ das die Überdeckung $\mathring{\mathfrak{A}}_\gamma$ von $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ erzwingende Faktoroid von $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$. Es ist also insbesondere $\overline{\mathfrak{A}}_{\gamma+1} \in \mathfrak{A}_\gamma$, wobei $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha - \{\mathfrak{B}\}$ gesetzt wird. Wir definieren nun $\overline{\mathfrak{C}}_\gamma, \mathfrak{C}_\gamma, \mathfrak{C}_\gamma$, für $\gamma - 0, \cdots, \alpha - 1$ in folgender Weise: $\overline{\mathfrak{C}}_\gamma = \boldsymbol{i}\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$; setzen wir $\mathfrak{C}_\gamma = \boldsymbol{s}\overline{\mathfrak{C}}_\gamma$, so ist $\overline{\mathfrak{C}}_\gamma = \mathfrak{C}_\gamma \sqcap \overline{\mathfrak{C}}, \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}_\gamma = \boldsymbol{i}\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_\gamma$; es ist also insbesondere $\overline{\mathfrak{C}}_{\gamma+1}$ ($= \boldsymbol{i}\overline{\mathfrak{A}}_{\gamma+1}$) $\in \mathfrak{C}_\gamma$, wobei $\overline{\mathfrak{C}}_\alpha = \{\mathfrak{D}\}$ gesetzt wird. $\mathring{\mathfrak{C}}_\gamma$ ist die durch $\mathfrak{C}_\gamma$ erzwungene Überdeckung von $\overline{\mathfrak{C}}_\gamma$; da $\overline{\mathfrak{C}}_{\gamma+1} \in \mathfrak{C}_\gamma$ ist, so ist $\mathfrak{C}_{\gamma+1} \in \mathfrak{C}_\gamma$, wobei $\mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{D}$ gesetzt wird. — Es ist also

$$([\dot{\mathfrak{C}}] \equiv)\ \mathfrak{C}_0 \to \cdots \to \mathring{\mathfrak{C}}_{\alpha-1}$$

eine Kette von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$, und zwar eine elementare Kette über $\overline{\mathfrak{C}}$.

b) Wir definieren nun die erste Abbildung der Kette $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ auf $[\mathfrak{C}]$, indem wir für $\gamma - 0, \cdots, \alpha - 1$ dem Faktoroide $\mathring{\mathfrak{A}}_\gamma$ das Faktoroid $\mathring{\mathfrak{C}}_\gamma$ zuordnen. Nach dem Satze 10 *·1* gibt es eine isomorphe Abbildung $\dot{i}_\gamma$ von $\mathfrak{A}_\gamma$ auf $\mathfrak{C}_\gamma$, in der jedes Element $\boldsymbol{s}a$, für $a \in \mathfrak{A}_\gamma$ auf das Element $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{i}a)$ abgebildet wird, für die also $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{i}a) = \dot{i}_\gamma \boldsymbol{s}a$ und im besonderen $\mathfrak{C}_{\gamma+1} = i_\gamma A_{\gamma+1}$ ist. Also sind die Ketten $[\mathfrak{A}]$, $[\dot{\mathfrak{C}}]$ isomorph.

Ist $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ eine elementare Kette $(\beta)$ (eine ausgezeichnete elementare Kette $(\beta)$) von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$, so ist auch $[\dot{\mathfrak{C}}]$ eine elementare Kette $(\beta)$ (eine ausgezeichnete elementare Kette $(\beta)$) von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$ über $\overline{\mathfrak{C}}$. Denn ist $[\mathfrak{A}]$ eine elementare Kette $(\beta)$ von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ über $\overline{\mathfrak{A}}$ und ist $\beta > 0$ $(\beta < \alpha - 1)$, so ist $\mathring{\mathfrak{A}}_0 = \cdots = \mathfrak{A}_{\beta-1}$ $(\mathring{\mathfrak{A}}_{\beta+1} = \cdots = \mathring{\mathfrak{A}}_{\alpha\ 1})$ das größte Faktoroid von $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B})$ und infolgedessen $\mathring{\mathfrak{C}}_0 = \cdots = \mathring{\mathfrak{C}}_{\beta-1}$ $(\mathring{\mathfrak{C}}_{\beta+1} = \cdots = \mathring{\mathfrak{C}}_{\alpha\ 1})$ das größte Faktoroid von $\mathfrak{C}$ $(\mathfrak{D})$. Weiter ist $\overline{\mathfrak{A}}_\beta = \overline{\mathfrak{A}}, \{B\} \in \mathfrak{A}_\beta$, woraus $\overline{\mathfrak{C}}_\beta = \boldsymbol{i}\overline{\mathfrak{A}}_\beta = \boldsymbol{i}\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{C}}$, $\{D\} = \{\boldsymbol{i}B\} \in \boldsymbol{i}\mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{C}_\beta$ folgt. $\mathring{\mathfrak{C}}_\beta$ ist also eine Überdeckung von $\overline{\mathfrak{C}}$ und enthält $\mathfrak{D}$ als Element. Ist sogar $\dot{\mathfrak{A}}_\beta = \overline{\mathfrak{A}}$, so ist $\mathfrak{A}_\beta$ das kleinste Faktoroid von $\overline{\mathfrak{A}}$, also $\mathfrak{C}_\beta$ das kleinste Faktoroid von $\overline{\mathfrak{C}}$, woraus $\mathring{\mathfrak{C}}_\beta - \overline{\mathfrak{C}}$ folgt.

Es seien $[\overline{\mathfrak{A}}]$, $[\overline{\mathfrak{C}}]$ isomorphe Ketten in $\mathfrak{G}$ von der Länge $\alpha \geqq 1$.

*·2. Zu jeder Verfeinerung von* $[\overline{\mathfrak{A}}]$ *gibt es eine isomorphe Verfeinerung von* $[\overline{\mathfrak{C}}]$.

Beweis. Es sei $[\dot{\mathfrak{A}}]$ eine Verfeinerung von $[\overline{\mathfrak{A}}]$ und für $\gamma = 0, \cdots, \alpha - 1$ sei $[\dot{\mathfrak{A}}_\gamma]$ die elementare Kette von $\mathfrak{A}_\gamma$ nach $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$ über $[\overline{\mathfrak{A}}_\gamma]$, die sich in der Kette $[\mathfrak{A}]$ befindet. Da nach der Voraussetzung die Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ mit $[\overline{\mathfrak{C}}]$ isomorph ist, so entspricht in der ersten Abbildung jedem Faktoroide $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma \in [\overline{\mathfrak{A}}]$ umkehrbar eindeutig ein Faktoroid $\overline{\mathfrak{C}}_\delta \in [\overline{\mathfrak{C}}]$ und es gibt einen Isomorphismus $i_\gamma$ von $\overline{\mathfrak{A}}_\gamma$ auf $\overline{\mathfrak{C}}_\delta$, für den $i_\gamma A_{\gamma+1} = C_{\delta+1}$ ist. Es gibt also nach dem Satze *·1* eine mit $[\mathfrak{A}_\gamma]$ isomorphe elementare Kette $[\dot{\mathfrak{C}}_\delta]$ von $\mathfrak{C}_\delta$

nach $\mathfrak{C}_{\delta+1}$ über $\bar{\mathfrak{C}}_\delta$. Ersetzt man in der Kette $[\bar{\mathfrak{C}}]$ für $\gamma = 0, \ldots, \alpha - 1$, das Faktoroid $\bar{\mathfrak{C}}_\delta$ durch die elementare Kette $[\mathring{\mathfrak{C}}_\delta]$, so erhält man eine mit $[\bar{\mathfrak{A}}]$ isomorphe Verfeinerung von $[\bar{\mathfrak{C}}]$.

**16. Relativ einfache und einfache Ketten.** Es sei $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ und

$$([\bar{\mathfrak{A}}] \equiv)\ \bar{\mathfrak{A}}_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{\mathfrak{A}}_{\alpha-1}$$

eine Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Wir nennen die Kette $[\bar{\mathfrak{A}}]$ *relativ einfach*, wenn jedes Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma \in [\bar{\mathfrak{A}}]$, $\gamma = 0, \ldots, \alpha - 1$, in bezug auf $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$ $(\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{B})$ einfach ist. Wenn jedes Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma \in [\bar{\mathfrak{A}}]$ sogar einfach ist, so wird die Kette $[\bar{\mathfrak{A}}]$ *einfach* genannt.

·*1. Dann und nur dann, wenn die Kette* $[\bar{\mathfrak{A}}]$ *relativ einfach ist, haben alle ihre Verfeinerungen dieselbe reduzierte Länge.*

Beweis. a) Die Kette $[\bar{\mathfrak{A}}]$ sei relativ einfach, Wir haben zu zeigen, daß jede Verfeinerung $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ von $[\bar{\mathfrak{A}}]$ dieselbe reduzierte Länge wie $[\bar{\mathfrak{A}}]$ besitzt. Nun erhält man aber jede Verfeinerung $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ von $[\bar{\mathfrak{A}}]$, indem man jedes Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$ in der Kette $[\bar{\mathfrak{A}}]$ durch eine geeignete elementare Kette $[\mathring{\mathfrak{A}}_\gamma]$ von $\mathfrak{A}_\gamma$ nach $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$ über $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$ ersetzt. Nach dem Satze **13** ·*1* ist jede elementare Kette $[\mathring{\mathfrak{A}}_\gamma]$ eine elementare Kette $(\beta)$ über $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$ und nach **12** ·*1* ist ihre reduzierte Länge gleich der reduzierten Länge von $\{\bar{\mathfrak{A}}\}$. Außerdem ist die reduzierte Länge von $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ gleich der Summe der reduzierten Längen der einzelnen Ketten $[\mathring{\mathfrak{A}}_\gamma]$, und desgleichen ist die reduzierte Länge von $[\bar{\mathfrak{A}}]$ gleich der Summe der einzelnen Ketten $\{\bar{\mathfrak{A}}_\gamma\}$.

b) Wir setzen voraus, daß jede Verfeinerung $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ von $[\bar{\mathfrak{A}}]$ dieselbe reduzierte Länge wie die Kette $[\bar{\mathfrak{A}}]$ besitzt. Dann ist die reduzierte Länge der elementaren Teilkette $[\mathring{\mathfrak{A}}_\gamma] \subset [\mathring{\mathfrak{A}}]$ über jedem Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma \in [\bar{\mathfrak{A}}]$ gleich der reduzierten Länge von $\{\bar{\mathfrak{A}}_\gamma\}$, $\gamma = 0, \ldots, \alpha - 1$. Also ist nach dem Satze **12** ·*1* $[\mathring{\mathfrak{A}}_\gamma]$ eine elementare Kette $(\beta)$ über $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$, und nach **13** ·*1* ist das Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$ einfach in bezug auf $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$.

Ähnlich ist der Beweis des folgenden Satzes:

·*2. Dann und nur dann, wenn die Kette* $[\bar{\mathfrak{A}}]$ *einfach ist, ist jede Verfeinerung von* $[\bar{\mathfrak{A}}]$ *eine Verlängerung.*

Es seien $[\bar{\mathfrak{A}}]$, $[\bar{\mathfrak{C}}]$ isomorphe Ketten in $\mathfrak{G}$.

·*3. Wenn* $[\bar{\mathfrak{A}}]$ *relativ einfach ist, so ist es auch* $[\bar{\mathfrak{C}}]$.

Beweis. Wegen des Isomorphismus haben die Ketten $[\bar{\mathfrak{A}}]$, $[\bar{\mathfrak{C}}]$ dieselbe reduzierte Länge $\alpha'$. Ist die Kette $[\bar{\mathfrak{C}}]$ nicht relativ einfach, so gibt es nach ·*1* eine Verfeinerung $[\mathring{\mathfrak{C}}]$ von $[\bar{\mathfrak{C}}]$, deren reduzierte Länge $\beta'$ größer als $\alpha'$ ist. Nach **15** ·*2* gibt es eine mit $[\mathring{\mathfrak{C}}]$ isomorphe Verfeinerung $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ von $[\bar{\mathfrak{A}}]$. Die reduzierte Länge von $[\mathring{\mathfrak{A}}]$ ist nach **16** ·*1* gleich $\alpha'$, und wegen des Isomorphismus der Ketten $[\mathring{\mathfrak{A}}]$, $[\mathring{\mathfrak{C}}]$ ist sie gleich $\beta'$.

**17. Adjungierte Ketten.** Es seien

$$([\bar{\mathfrak{A}}] \equiv) \; \bar{\mathfrak{A}}_0 \to \cdots \to \bar{\mathfrak{A}}_{\alpha-1},$$
$$([\bar{\mathfrak{C}}] \equiv) \; \bar{\mathfrak{C}}_0 \to \cdots \to \bar{\mathfrak{C}}_{\beta-1},$$

Ketten in $\mathfrak{G}$. Wir sagen, daß $[\bar{\mathfrak{A}}]$, $[\bar{\mathfrak{C}}]$ *adjungierte Ketten* sind oder daß die Kette $[\bar{\mathfrak{A}}]$ ($[\bar{\mathfrak{C}}]$) zu $[\bar{\mathfrak{C}}]$ ($[\bar{\mathfrak{A}}]$) adjungiert ist, wenn 1. die Enden von $[\bar{\mathfrak{A}}]$ und $[\bar{\mathfrak{C}}]$ dieselben sind; 2. jedes Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma \in [\bar{\mathfrak{A}}]$ zu jedem Faktoroide $\bar{\mathfrak{C}}_\delta \in [\bar{\mathfrak{C}}]$ in bezug auf $\mathfrak{A}_{\gamma+1}, \mathfrak{C}_{\delta+1}$ adjungiert ist ($\gamma = 0, \ldots, \alpha-1$; $\delta = 0, \ldots, \beta-1$). Die Bedingung 1. drückt die folgenden Gleichheiten aus: $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{C}_0$ $(= \mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{C}_\beta$ $(\equiv \mathfrak{B})$. Nach 2. sind die Ketten $[\bar{\mathfrak{A}}]$, $[\bar{\mathfrak{C}}]$ nur dann adjungiert, wenn der Durchschnitt $\mathfrak{A}_\mu \cap \mathfrak{C}_\nu$ für $\mu = 0, \ldots, \alpha$; $\nu = 0, \ldots, \beta$ existiert.

Wenn man von zwei adjungierten Ketten eine der beiden Ketten oder beide verkürzt oder verlängert, so bekommt man wieder zwei adjungierte Ketten.

Es seien $[\bar{\mathfrak{A}}]$, $[\bar{\mathfrak{C}}]$ adjungierte Ketten in $\mathfrak{G}$.

˙*1.* (Verallgemeinerung des Satzes von Jordan-Hölder-Schreier.) *Die Ketten* $[\bar{\mathfrak{A}}]$, $[\bar{\mathfrak{C}}]$ *besitzen isomorphe Verfeinerungen.* Dieselben sind durch die im Teile a) des folgenden Beweises gegebene Konstruktion bestimmt.

B e w e i s. a) Da nach der Voraussetzung die Faktoroide $\bar{\mathfrak{A}}_\gamma$, $\bar{\mathfrak{C}}_\delta$, für $\gamma = 0, \ldots, \alpha-1$; $\delta = 0, \ldots, \beta-1$ adjungiert sind, so sind

$$\bar{\mathfrak{A}}_{\gamma,\nu} \equiv \mathfrak{C}_\nu \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}_\gamma, \qquad \bar{\mathfrak{C}}_{\delta,\mu} = \mathfrak{A}_\mu \sqsubset \bar{\mathfrak{C}}_\delta,$$

für $\mu = 0, \ldots, \alpha$; $\nu = 0, \ldots, \beta$, Faktoroide in $\mathfrak{G}$. Wir setzen $\mathfrak{A}_{\gamma,\nu} = s\,\bar{\mathfrak{A}}_{\gamma,\nu}$, $\mathfrak{C}_{\delta,\mu} = s\,\bar{\mathfrak{C}}_{\delta,\mu}$. Da die Ketten $[\bar{\mathfrak{A}}]$, $[\bar{\mathfrak{C}}]$ dieselben Enden haben, so ist

$$\mathfrak{A}_{\gamma,0} = \bar{\mathfrak{A}}_\gamma, \qquad \mathfrak{A}_{\gamma,\beta} = \mathfrak{A}_{\gamma+1},$$
$$\bar{\mathfrak{C}}_{\delta,0} = \bar{\mathfrak{C}}_\delta, \qquad \mathfrak{C}_{\delta,\alpha} = \mathfrak{C}_{\delta+1}.$$

Nach 8˙*1* gibt es verknüpfte Überdeckungen $\mathring{\mathfrak{A}}_{\gamma,\delta}$, $\mathfrak{C}_{\delta,\gamma}$ von $\mathfrak{A}_{\gamma,\delta}$, $\bar{\mathfrak{C}}_{\delta,\gamma}$, so daß $\mathfrak{A}_{\gamma,\delta+1} \in \mathfrak{A}_{\gamma,\delta}$, $\mathfrak{C}_{\delta,\gamma+1} \in \mathfrak{C}_{\delta,\gamma}$. Die Untergruppoide $\mathfrak{A}_{\gamma,\delta+1}$, $\mathfrak{C}_{\delta,\gamma+1}$ sind inzident. Da für $0 \leqq \delta \leqq \beta-1$ das Faktoroid $\mathring{\mathfrak{A}}_{\gamma,\delta}$ eine Überdeckung von $\bar{\mathfrak{A}}_{\gamma,\delta}$ $(= \mathfrak{A}_{\gamma,\delta} \sqcap \mathfrak{A}_\gamma)$, ist, so ist

$$\mathring{\mathfrak{A}}_{\gamma,0} \to \cdots \to \mathfrak{A}_{\gamma,\beta-1}$$

eine elementare Kette von $\mathfrak{A}_\gamma$ nach $\mathfrak{A}_{\gamma+1}$ über $\mathfrak{A}_\gamma$ und desgleichen ist

$$\mathfrak{C}_{\delta,0} \to \cdots \to \mathfrak{C}_{\delta,\alpha-1}$$

eine elementare Kette von $\mathfrak{C}_\delta$ nach $\mathfrak{C}_{\delta+1}$ über $\bar{\mathfrak{C}}_\delta$. Die Ketten von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$

$$([\mathfrak{A}] \equiv) \; \mathring{\mathfrak{A}}_{0,0} \to \cdots \to \mathfrak{A}_{0,\beta-1} \to \mathfrak{A}_{1,0} \to \cdots \to \mathfrak{A}_{\alpha-1,\beta-1},$$
$$([\mathfrak{C}] \equiv) \; \mathfrak{C}_{0,0} \to \cdots \to \mathring{\mathfrak{C}}_{0,\alpha-1} \to \mathfrak{C}_{1,0} \to \cdots \to \mathring{\mathfrak{C}}_{\beta-1,\alpha-1}$$

sind die erwähnten Verfeinerungen.

b) Um zu beweisen, daß die Ketten $[\mathfrak{A}], [\dot{\mathfrak{C}}]$ isomorph sind, definieren wir zuerst die erste Abbildung von $[\dot{\mathfrak{A}}]$ auf $[\dot{\mathfrak{C}}]$ in der Weise, daß wir jedem Faktoroide $\mathfrak{A}_{\gamma,\delta}$ das Faktoroid $\mathfrak{C}_{\delta,\gamma}$ zuordnen ($\gamma = 0, \ldots, \alpha - 1$; $\delta = 0, \ldots, \beta - 1$). Da die Faktoroide $\mathring{\mathfrak{A}}_{\gamma,\delta}, \dot{\mathfrak{C}}_{\delta,\gamma}$ verknüpft sind, so ist nach 10˙*3* die Abbildung $i_{\gamma,\delta}$ von $\mathfrak{A}_{\gamma,\delta}$ auf $\mathfrak{C}_{\delta,\gamma}$, in der jedes Element in $\mathfrak{A}_{\gamma,\delta}$ auf das mit ihm inzidente Element in $\mathfrak{C}_{\delta,\gamma}$ abgebildet wird, ein Isomorphismus. Weil insbesondere die $\mathfrak{A}_{\gamma,\delta+1}, \mathfrak{C}_{\delta,\gamma+1}$ inzident sind, so ist $i_{\gamma,\delta}\mathfrak{A}_{\gamma,\delta+1} \quad \mathfrak{C}_{\delta,\gamma+1}$.

˙*2. Wenn eine der Ketten* $[\overline{\mathfrak{A}}], [\overline{\mathfrak{C}}]$ *relativ einfach ist, so ist ihre reduzierte Länge nicht kleiner als die reduzierte Länge der anderen.*

Beweis. Wir setzen voraus, daß die Kette $[\overline{\mathfrak{A}}]$ relativ einfach ist. Es sei $\alpha'$ ($\beta'$) die reduzierte Länge von $[\overline{\mathfrak{A}}]$ ($[\overline{\mathfrak{C}}]$). Nach ˙*1* gibt es isomorphe Verfeinerungen der Ketten $[\overline{\mathfrak{A}}], [\overline{\mathfrak{C}}]$. Dieselben haben die gleiche reduzierte Länge $\gamma'$. Nun ist aber nach 16˙*1* $\alpha' = \gamma'$ und außerdem ist $\beta' \leqq \gamma'$. Also ist $\alpha' \geqq \beta'$.

Aus diesem Satze folgt der folgende Satz:

˙*3. Wenn die Ketten* $[\overline{\mathfrak{A}}], [\overline{\mathfrak{C}}]$ *relativ einfach sind, so sind ihre reduzierten Längen einander gleich.*

(Eingegangen am 6. 9. 1940.)