Otakar Borůvka

Sur une extension des formules de Frenet dans l'espace complexe et leur image réelle

C. R. Acad. Sci. Paris t. 197, 1933, 109-112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500036

GÉOMÉTRIE. — *Sur une extension des formules de Frenet dans l'espace complexe et leur image réelle.* Note (¹) de M. O. **Borůvka.**

1. Plongeons-nous dans l'espace hermitien parabolique K_r à $r(>1)$ dimensions, déterminé par l'ensemble d'une forme linéaire z^0 et d'une forme hermitienne $z^1\bar{z}^1+\ldots+z^r\bar{z}^r$. Prenons dans K_r une courbe analytique (appartenant à cet espace), lieu des points $z^\alpha=f^\alpha(z)$, $1 \leq \alpha \leq r$, les f étant des fonctions analytiques d'une variable complexe $z=x+iy$. A chaque point M de la courbe associons r vecteurs $n_\alpha=u_\alpha(x,y)+iv_\alpha(x,y)$, $0 \leq \alpha \leq r-1$, les u, v étant des fonctions analytiques des deux variables réelles x, y, de manière que : 1° ils soient unitaires et rectangulaires deux à deux; 2° pour $0 \leq \alpha \leq r-1$ les vecteurs $n_0, \ldots, n_\alpha$ soient dans l'espace osculateur d'ordre $\alpha+1$ de la courbe au point M. Les vecteurs dM, dn_α sont alors des combinaisons linéaires des vecteurs n. Si l'on multiplie les vecteurs n_α par des facteurs de la forme exp. (it), t réel, les nouveaux vecteurs désignés encore par n_α satisfont à 1° et 2°. On en peut profiter pour faire en sorte que les combinaisons en question soient de la forme $(\alpha=0, 1, \ldots, r-1)$

$$
\begin{aligned}
d\mathrm{M} &= (\omega_1+i\omega_2)\,n_0,\\
dn_\alpha &= -\mathrm{R}_\alpha(\omega_1-i\omega_2)\,n_{\alpha-1}+i\varpi_\alpha n_\alpha+\mathrm{R}_{\alpha+1}(\omega_1+i\omega_2)\,n_{\alpha+1},
\end{aligned}
$$

les termes en n_{-1}, n_r étant à supprimer et les ω, ϖ étant des formes de Pfaff réelles en dx, dy telles que $\varpi_0+\ldots+\varpi_{r-1}=0$, les R étant enfin des fonctions analytiques réelles et positives de x, y. Ces formules représentent une espèce de formules de Frenet pour l'espace K_r, les droites (complexes) passant par un point M de la courbe et déterminées par les différents vecteurs n_α correspondants jouant le rôle de la tangente $(\alpha=0)$ et des normales successives $(\alpha>1)$, et les fonctions R celui des courbures scalaires de la courbe au point M. Remarquons qu'elles entraînent les conditions d'intégrabilité suivantes

$$
\left[(\omega_1+i\omega_2)\left(\frac{d\mathrm{R}_\alpha}{\mathrm{R}_\alpha}+i\,\overline{\varpi_0+\varpi_{\alpha-1}-\varpi_\alpha}\right)\right]=0 \qquad (\alpha=1, \ldots, r-1)
$$

(¹) Séance du 3 juillet 1933.

et qu'on peut prendre

$$\omega_1 \quad (R_1^{r-1} R_2^{r-2} \ldots R_{r-1})^{\;\;r+1} dx, \qquad \omega_2 \quad (R_1^{r-1} R_2^{r-2} \ldots R_{r-1})^{\;\;r\;1} dy.$$

2. Faisons la représentation de l'espace K_r sur l'espace euclidien réel S_{2r} à $2r$ dimensions de manière que l'image du point (vecteur)

$$z^1 \quad x^1 + ix^2, \qquad \ldots, \qquad z^r \quad x^{2r-1} \quad ix^{2r} \qquad (x \text{ réels})$$

de l'espace K_r soit dans S_{2r} le point (vecteur) $x^1, x^2, \ldots, x^{2r}$. Dans cette représentation, du reste isométrique, l'image de la courbe (M) est une surface (M^*) caractéristique (dans le sens de M. Levi-Civita), dont les équations sont de la forme $x^{2\alpha\;1} = U^\alpha(x, y)$, $x^{2\alpha} = V^\alpha(x, y)$, $1 < \alpha \quad r$, les U^α, V^α étant des fonctions harmoniques associées. De plus, l'image de la figure formée, en chaque point M de la courbe, par l'espace osculateur d'ordre α (qui est naturellement à α dimensions), $1 \quad \alpha \quad r$, et par la tangente et les normales successives, est la figure formée, au point M^* correspondant, par l'espace osculateur de la surface d'ordre α [qui est alors à 2α dimensions, de sorte qu'il y a au point M^* $r-1$ espaces principaux (¹) de la surface qui sont des plans] et par le plan tangent et les plans principaux successifs. Les plans en question sont donc caractéristiques; en conséquence ils coupent les deux espaces linéaires imaginaires I, $\bar{\mathrm{I}}$ à $r-1$ dimensions, situés sur la quadrique absolue, (I) $x^{2\alpha\;1} + ix^{2\alpha} = 0$, (I) $x^{2\alpha\;1} - ix^{2\alpha} = 0$, $(\alpha - 1, \ldots, r)$. Finalement pour $1 \quad \alpha \quad r-1$ la courbure scalaire de la courbe au point M a pour la surface (M^*) la signification simple suivante : Au point M^* correspondant l'indicatrice de courbure normale d'ordre α est une circonférence centrée au point M^* et de rayon $R_1 R_2 \ldots R_\alpha$.

3. Les surfaces caractéristiques dont nous venons de parler entraînent, évidemment, pour $r = 2$, les surfaces de Kwietniewski et Kommerell que l'on considère en relation avec la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes (²). Signalons à leur sujet encore les résultats suivants :

Pour qu'une surface dans S_{2r} soit caractéristique, il faut et il *suffit* que, dans chaque point M^* de la surface : *a*, l'espace osculateur de la surface d'ordre α soit à 2α dimensions ($1 \quad \alpha \quad r$); *b*, toutes les indicatrices de courbures normales soient des circonférences centrées en M^*; ou bien *b'*, le plan tangent et tous les plans principaux soient caractéristiques. Chaque surface

---

(¹) Pour la notion des espaces principaux et des indicatrices de courbures normales, voir mon Mémoire (*Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk*, 165, 1932).

(²) Voir par ex. B. Segre, *Rend. Sem. Mat. Roma*, 7, 1931, parte II, p. 59 107.

caractéristique est le lieu des points d'intersection des espaces complexes conjugués à r dimensions appartenant à deux variétés complexes conjuguées d'espaces à r dimensions passant respectivement par les deux espaces I et $\bar{\mathrm{I}}$ et dépendant analytiquement d'une variable complexe z resp. $\bar{z}$. Inversement, un tel lieu de points est toujours une surface caractéristique ([1]).

4. On peut étendre les raisonnements précédents et considérer plus généralement les surfaces plongées dans un espace S_{2r} à $2r$ dimensions à courbure constante *quelconque*, caractérisées par les propriétés a et b ci-dessus. Il y a encore un prototype complexe de telles surfaces représenté par une espèce de formules de Frenet dans un espace complexe à r dimensions doué d'une métrique hermitienne (à courbure constante). Tandis que par exemple il n'y a pas dans l'espace K_r considéré plus haut de courbes analytiques dont toutes les courbures scalaires R soient des constantes, il y en a si la métrique de l'espace complexe ambiant a été choisie à courbure *positive* convenable, et les surfaces représentatives correspondantes dans S_{2r} (à courbure positive) sont fournies par les fonctions sphériques de Laplace d'ordre r ([2]).

([1]) Pour $r = 2$ voir par exemple ma Note, *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 334.
([2]) Au sujet de ces surfaces voir ma Note, *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 1336.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 197, p. 109, séance du 10 juillet 1933.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
97188 33 Paris. Quai des Grands-Augustins, 55.